Concurso Ayudante de Segunda - Área Materias que Utilizan Herramientas Computacionales

A los 11 días del mes de septiembre de 2023 el jurado que entiende en el concurso para proveer 15 (quince) cargos de Ayudante de Segunda (Área Materias que Utilizan Herramientas Computacionales) en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) formado por Lucía Busolini, Sandra Martínez y Mariano Merzbacher establece lo siguiente.

Puntaje

Antecedentes docentes	5
Antecedentes científicos	3
Antecedentes de extensión	5
Antecedentes profesionales	3
Prueba de oposición	56
Calificaciones, títulos, estudios y otros	28

Fecha, modalidad y temas de la prueba de oposición

La prueba de oposición será desarrollada el día martes 26 de septiembre de 2023 a las 10 hs en los laboratorios 1108 y 1109 del Pabellón $0 + \infty$ y tendrá una duración de 90 minutos.
El/La concursante deberá elaborará un programa utilizando el lenguaje de programación `Python` de **uno** de los ejercicios de la lista detallada a continuación.
La Lista consta de 7 ejercicios de programación correspondientes a las materias *Cálculo númerico / Álgebra Lineal Computacional/ Matemática II para biología.*
El ejercicio a desarrollar será anunciado por el jurado al inicio de la prueba de oposición.
El programa debe ser claro, con los debidos comentarios tanto al comienzo como a lo largo del código para que un estudiante pueda comprenderlo. Todos los comentarios deben estar escritos dentro del mismo archivo `.py` a entregar. Al finalizar la prueba el archivo `.py` debe ser enviado al correo electrónico `concursoay2_23@dm.uba.ar`.

Sandra Martinez   Lucía Busolini   Mariano Merzbacher

Lista de ejercicios

1. **Normas matriciales.** Se quiere estimar la norma 2 de una matriz $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ como el máximo del valor $\|\boldsymbol{Ax}\|_2/\|\boldsymbol{x}\|_2$ entre varios vectores $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ no nulos generados al azar. Hacer un programa que reciba una matriz A y luego

   - genere los primeros 100 términos de la siguiente sucesión:
   $$s_1 = 0, \quad s_{k+1} = \max\left\{s_k, \frac{\|\boldsymbol{Ax}_k\|_2}{\|\boldsymbol{x}_k\|_2}\right\}$$
   donde los $x_k \in \mathbb{R}^3$ son vectores no nulos generados al azar en la bola unitaria: $B = \{\boldsymbol{x} : \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq 1\}$.
   - Grafique la sucesión calculada, junto con el valor exacto de la norma de la matriz.

   Recordar que la norma 2 de un vector `v` puede calcularse con el comando `np.linalg.norm(v)`, mientras que la norma 2 de una matriz `A` se puede obtener con `np.linalg.norm(A,2)`. Tener en cuenta que los vectores generados al azar (comando `np.random.random`) tienen coordenadas en el intervalo $[0, 1]$ y por lo tanto abarcan sólo el primer octante en $\mathbb{R}^3$.

2. **Resolución de ecuaciones.**

   (a) Escribir un programa que implemente el método de Jacobi para la resolución de un sistema lineal $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, con las siguientes condiciones:
   - que al inicio calcule el radio espectral del método y que termine si es mayor o igual a 1,
   - que finalice si el método se estaciona,
   - que finalice si se excede cierto tope de iteraciones.

   (b) Testear el programa desarrollado en el item anterior para los sistemas
   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 32 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$
   y analizar los resultados.

3. **Resolución de ecuaciones.**

   (a) Implementar un programa que reciba como input una función f, su derivada f', un punto inicial x_0, una tolerancia ε y un entero N y aplique el método de Newton-Raphson para buscar una raíz de f a partir de x_0. El programa debe finalizar cuando $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ o cuando llega al paso N. Si no se alcanza la convergencia luego de N pasos, imprimir un mensaje de error.

   (b) Para $f(x) = x^{15} - 2$ implementando el programa del item anterior, hallar una aproximación del cero de la función comenzando con $x_0 = 1$, usando una tolerancia de 10^{-3}.

4. **Ecuaciones diferenciales.** Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para aproximar numéricamente la solución $x(t)$ de la siguiente ecuación diferencial en el intervalo $[t_0, t_F]$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases}$$

¿Qué parámetros debe recibir y qué información debe devolver este programa para que la aproximación obtenida pueda graficarse?

5. **Ecuaciones diferenciales.** Se quiere verificar numéricamente el orden de convergencia de los métodos de Euler y Taylor de orden 2. Para ello: resolver numéricamente el problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t), \\ x(t_0) = 1, \end{cases}$$

en el intervalo $[0, 1]$ con ambos métodos, tomando $h = 0.1,\ 0.05,\ 0.01,\ 0.005,\ 0.001$ y 0.0005.

Obtener la solución exacta y para cada h, calcular el error que se comete al aproximar $x(1)$: $E_N = |x(1) - x_N|$. Graficar $\log(E_N)$ en función de $\log(h)$. ¿Qué se espera ver? ¿El resultado es consistente con el esperado?

6. **Cuadrados mínimos.**

(a) Implementar una función que reciba vectores de datos x, y y un vector de pesos positivos w y devuelva la función $f(x) = ax + b$ que minimiza el error

$$\sum_{0 \le i \le n} w_i (y_i - f(x_i))^2.$$

(b) Testear el programa para la siguiente tabla de datos

x	1	2	3	4	5
y	3	5.01	7.02	9.1	11.1
w	1	0.5	1	0.5	0.5

7. **Integración numérica.**

(a) Sea $a = x_0, \ldots, x_n = b$ una partición regular de $[a, b]$. Implementar un programa que reciba una función f, los límites del intervalo $[a, b]$ y un parámetro n y que mediante la regla de trapecios devuelva un valor aproximado de $\int_a^b f$, partiendo $[a, b]$ en n intervalos.

(b) Emplear el programa del item anterior para calcular

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx, \quad \text{con } n = 4.$$