Concurso Ayudante de Segunda - Área Matemática

A los 17 días del mes de septiembre de 2024 el jurado que entiende en el concurso para proveer 37 (treinta y siete) cargos de Ayudante de Segunda (Área Matemática) conformado por Alejandra Aguilera Aguilera, Mauro Rodriguez Cartabia y Mara Georgina Giacobbe establece lo siguiente.

Tabla de Puntajes

Antecedentes docentes	6
Antecedentes científicos	3
Antecedentes de extensión	5
Antecedentes profesionales	3
Prueba de oposición	58
Calificaciones, títulos, estudios y otros antecedentes	25

Fecha y modalidad de la prueba de oposición

La prueba de oposición consistirá de una prueba escrita y se realizará en forma presencial el día viernes 27 de septiembre de 2024 a las 15 horas en el Aula Magna del Pabellón 2 y tendrá una duración de **90 minutos**.

Se deberá desarrollar un ejercicio de cada una de las listas detalladas a continuación (dos ejercicios en total).

La Lista 1 contiene 10 ejercicios correspondientes a la materia *Análisis II/Matemática 3/Análisis Matemático II* y la Lista 2 contiene 10 ejercicios de la materia *Algebra Lineal*.

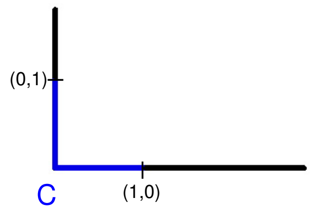
Los ejercicios a desarrollar serán anunciados por el jurado al inicio de la prueba de oposición. Se espera que sean presentados de la manera en que serían explicados a estudiantes que esté cursando la materia correspondiente, detallando de forma escrita incluso aquello que se indicaría en forma verbal e indicando los resultados teóricos usados según el momento de la materia en que se estuvieran desarrollado los ejercicios. Se tendrá en cuenta la claridad y legibilidad de la presentación escrita.

Alejandra Aguilera Aguilera   Mauro Rodriguez Cartabia   Mara Georgina Giacobbe

Lista 1: Análisis II/Matemática 3/Análisis Matemático II

Curvas - Teorema de Green

1. Considerar la curva $\mathcal{C}$ formada por los segmentos que unen el $(0,1)$ con el $(0,0)$ y el $(0,0)$ con el $(1,0)$.



   Probar que
$$\sigma(t) := \begin{cases} \big(0, (1-t)^2\big), & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ \big((t-1)^2, 0\big), & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$
   es una parametrización C^1 de la curva $\mathcal{C}$.

   Observar que $\mathcal{C}$ no tiene recta tangente en el $(0,0)$. ¿Por qué no hay contradicción?

2. (a) Mostrar que la integral de longitud de arco de $f(x,y)$ a lo largo de una curva dada en coordenadas polares por $r = r(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ es
$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f\big(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta\big)\sqrt{r(\theta)^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$
   (b) Calcular la longitud de la curva $r(\theta) = 1 + \cos\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3. (a) Mostrar que la longitud del gráfico de f en [a,b] es
$$\int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx.$$
   (b) Hallar la longitud del gráfico de $y = \log x$ de $x = 1$ a $x = 2$.

4. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $F(x,y) = (y + 3x, 2y - x)$ al mover una partícula rodeando una vez la elipse $4x^2 + y^2 = 4$ en el sentido de las agujas del reloj.

5. Calcular la integral $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 e^x + \cos x + (x-y)^2\,,\, 2\,y\,e^x + \operatorname{sen} y)$, y $\mathcal{C}$ es la curva $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, orientada de manera tal que comience en $(1,0)$ y termine en $(-1,0)$.

Superficies - Teoremas de Gauss y Stokes

6. Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por
$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^3\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$
   con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ en el plano xy. Sea S la superficie que se obtiene al girar la curva $\mathcal{C}$ alrededor del eje x

(a) Hallar una parametrización de S.

(b) Hallar el área de S.

7. Calcular
$$\int_{\mathcal{C}} (y + \operatorname{sen} x)\, dx + \left(\tfrac{3}{2}z^2 + \cos y\right) dy + 2x^3\, dz,$$
donde $\mathcal{C}$ es la curva orientada parametrizada por $\sigma(t) = \big(\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t\big)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Sugerencia: Observar que $\mathcal{C}$ se encuentra en la superficie $z = 2xy$.

8. Calcular la integral de línea $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ donde $\mathbf{F}$ es el campo vectorial definido por:
$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy + z^2, x^2 - 2yz, 2xz - y^2)$$
y $\mathcal{C}$ es la curva que está contenida en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el plano de ecuación $y = x$ recorrida desde el punto $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ al polo norte.

9. Para cada $R > 0$ sea $S_R = \big\{(x, y, z) \,/\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\,,\ z \geq 0\big\}$ orientada con la normal que apunta hacia arriba, y sea el campo
$$\mathbf{F}(x, y, z) = \big(xz - x\cos z, -yz + y\cos z, 4 - x^2 - y^2\big).$$
Determinar R de modo que el flujo del campo $\mathbf{F}$ a través de S_R sea máximo.

10. Sea $\mathcal{C}$ la curva en el plano xz dada en polares por:
$$r(\varphi) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\,(2 - \cos(2\varphi)) \quad \text{para } \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6},$$
donde φ es el ángulo que forma el radio vector con el semieje positivo de las z. Sea S la superficie que se obtiene por **revolución** de esta curva alrededor del eje z.

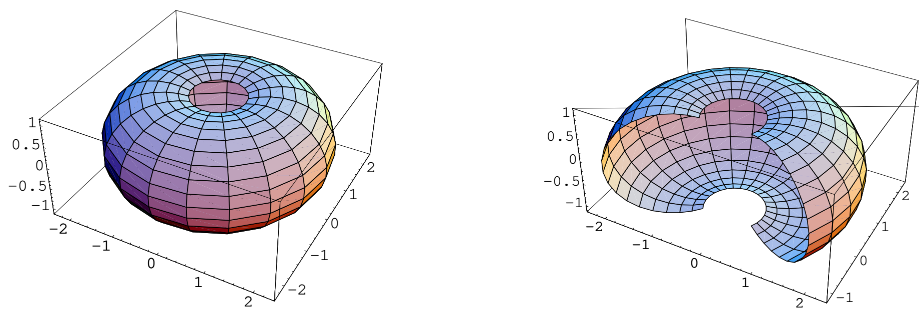


Figure 1

En el primer dibujo se muestra la superficie S, en el segundo se realizó un corte de la misma para que se aprecie mejor su forma.

Calcular el **flujo** a través de S en el sentido "externo" del campo
$$F(x, y, z) = (x, y, -2z).$$

Lista 2: Álgebra lineal

Transformaciones lineales

1. Sea $S = < (1,1,0,1),(2,1,0,1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

   i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$.

   ii) Hallar ecuaciones para S (usar i)).

   iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea $< (1,1,0,1),(2,1,0,1) > + (0,1,1,2)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

   i) Hallar $f(3v_1 + 2v_2 - v_3)$. ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

   ii) Hallar una base de $\mathrm{Nu}(f)$ y una base de $\mathrm{Im}(f)$.

   iii) Describir el conjunto $f^{-1}(\{w_1 - 3\,w_3 - w_4\})$.

3. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, y sea E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Determinar U'.

4. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A \cdot B) \leq \mathrm{rg}(B)$.

5. i) Sean A, $A' \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim A'$. Probar que $tr(A) = tr(A')$.

   ii) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

   ¿Existen $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = A'$?

Autovalores y autovectores - Diagonalización

6. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2k + k^2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2 - 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

7. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

   i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

   ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

   iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

   i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\iff$ 0 no es autovalor de A.

   ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, v autovector de $A \Rightarrow v$ autovector de A^{-1}.

   iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

9. i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

   ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de $A - 3\,I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

10. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

   i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

   iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.

   v) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$.