Concurso Ayudante de Segunda
Área Materias que Utilizan Herramientas Computacionales

A los 17 días del mes de septiembre de 2024 el jurado que entiende en el concurso para proveer 15 (quince) cargos de Ayudante de Segunda (Área Materias que Utilizan Herramientas Computacionales) en el Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) formado por Francisco Mastroberti Bersetche, G. Sebastián Pedersen y María Lorena Stockdale establece lo siguiente.

Puntaje:

Antecedentes docentes	5
Antecedentes científicos	3
Antecedentes de extensión	5
Antecedentes profesionales	3
Prueba de oposición	56
Calificaciones, títulos, estudios y otros	28

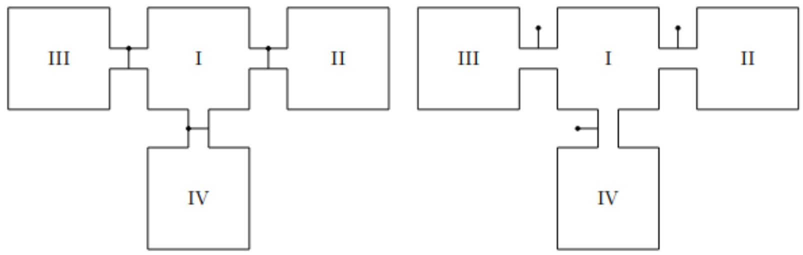
Fecha, modalidad y temas de la prueba de oposición:

La prueba de oposición será desarrollada el día Miércoles 2 de Octubre de 2024 a las 9 hs. en los laboratorios 1108 y 1109 del Pabellón $0+\infty$ y tendrá una duración de 90 minutos. El/La concursante deberá elaborar un programa utilizando el lenguaje de programación Python de uno de los ejercicios de la lista detallada a continuación. La lista consta de 6 ejercicios de programación correspondientes a las materias Elementos de Cálculo Numérico - Álgebra Lineal Computacional - Matemática II para Biología. El ejercicio a desarrollar será anunciado por el jurado al inicio de la prueba de oposición. El programa debe ser claro, con los debidos comentarios tanto al comienzo como a lo largo del código, y al final de la resolución, para que un estudiante pueda comprender el código y el problema. Todos los comentarios deben estar escritos dentro del mismo archivo `.ipynb` a entregar. Al finalizar la prueba, el archivo `Apellido_Nombre.ipynb` debe ser enviado al correo electrónico concursoay2_amc24@dm.uba.ar.

Francisco Mastroberti Bersetche   G. Sebastián Pedersen   María Lorena Stockdale

Lista de ejercicios:

1. **Procesos de Markov:**



(a) Laberinto cerrado. (b) Laberinto abierto.

Figure 1: El laberinto se abre unos pocos segundos cada hora.

En el instante inicial 20 ratones se encuentran en el compartimiento I (ver Figura 1). Las puertas que separan los compartimientos permanecen cerradas salvo durante un breve lapso cada hora, donde los ratones pueden pasar a un comportamiento adyacente o permanecer en el mismo. Se supone que nada distingue un compartimento de otro, es decir que es igualmente probable que un ratón pase a cualquiera de los adyacentes o se quede en el compartimiento en el que está. Se realizan observaciones cada hora y se registra el número de ratones en cada compartimiento.

a) Determinar la matriz de transición del proceso P.

b) Determinar cuántos ratones habrá en cada celda al cabo de 4 horas.

c) Decidir si existe o no un estado de equilibrio.

d) Decidir si existe P^{∞} y en tal caso calcularla. ¿Qué aspecto tiene?, ¿por qué?.

2. **Mínimos Cuadrados:**

Link para descargar infantesConBajoPesoAlNacer.txt:
`https://drive.google.com/file/d/1YIa6F9CZiQjM7yCb5x2FIR7GuVHPjVPi/view?usp=sharing`

En el archivo infantesConBajoPesoAlNacer.txt se encuentran los datos correspondientes a mediciones de 100 niños nacidos con bajo peso en Boston (Labor and deliver characteristics and the risk of germinal matrix hemorrhage in low birth weight infants. Journal of child neurology, 6(1), 35-40, (1991)).

Llamamos
$Y =$ perímetro cefálico del bebé al nacer, en centímetros (columna headcirc).
$X_1 =$ edad gestacional del bebé al nacer, en semanas (columna gestage).
$X_2 =$ peso al nacer del bebé, en gramos (columna birthwt).

a) Graficar X_1 vs Y y X_2 vs Y. ¿Qué tipo de relación observa en cada caso?.

b) Plantear un modelo de regresión lineal para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional.

c) Plantear un modelo de regresión lineal múltiple para predecir el perímetro cefálico del bebé en función de su edad gestacional y de su peso al nacer.

d) Si en el modelo obtenido en el ítem anterior mantenemos constante la edad gestacional, cuántos centímetros de aumento en su perímetro cefálico, en promedio, se corresponde a cada incremento del peso en 10 gramos.

3. **<u>Ecuaciones no lineales:</u>**
El siguiente sistema de ecuaciones representa la dinámica de un sistema transcripcional en donde la proteína inhibe (reprime) su propia producción. La variable x representa la concentración de mARN y la variable y representa la concentración de proteína:

$$\begin{cases} \dot{x} = \kappa_1 f(y) - \gamma_1 x, \\ \dot{y} = \kappa_2 x - \gamma_2 y, \end{cases}$$

donde $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ son constantes que representan la tasa de producción y $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ son constantes que representan la tasa de degradación. La no linealidad viene dada por la función $f(y) = \frac{\theta^\alpha}{\theta^\alpha + y^\alpha}$, con $\theta > 0$.

Considerar $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\theta = 1$ y $\alpha = 0{,}5$. Plantear un método de punto fijo convergente y luego aproximar el estado estacionario del sistema implementando dicho método. Recordar que los estados estacionarios son aquellos en los que $\dot{x} = \dot{y} = 0$.

4. **<u>Ecuaciones diferenciales:</u>**
Escribir un programa que implemente el método de Euler explícito para resolver ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

tomando como parámetros la función f, los tiempos inicial y final (t_0 y t_f), el paso h y el dato inicial y_0; y arrojando como resultados el vector $t = (t_0, t_0 + h, \ldots, t_f)$ y la solución y.

5. **<u>Ecuaciones diferenciales: Oscilador no lineal</u>**
Dada la ecuación $\ddot{x}(t) = -2x^3(t) + x(t)$

a) Formular el problema como un sistema de ecuaciones de primer orden.

b) Utilizar el método de Runge-Kutta de cuarto orden para obtener las soluciones correspondientes a las condiciones iniciales $x(0) = -2; -1{,}9; \ldots; 1{,}9; 2$ y $\dot{x}(0) = 0$.

c) Graficarlas en el diagrama de fases.

d) Graficar la cantidad $\mathcal{H}(t) = \dot{x}^2(t) + x^4(t) - x^2(t)$ para cada solución.

6. **<u>Integración Numérica:</u>**
Se sabe que $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$.

a) Para $n = 1, \ldots, 100$ utilizar la regla de trapecios compuesta para aproximar numéricamente la integral y dar un valor cercano a π.

b) Graficar las sucesiones obtenidas junto con el valor de π que arroja `numpy`.