

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Bilímites 2-cofiltrantes de topos

Tesis de Licenciatura

Autor: Sergio A. Yuhjtman

Director: Eduardo J. Dubuc

Diciembre de 2007

Agradecimientos

A mis viejos, a Ale y a la familia toda.

También agradezco a Martín M, a Eduardo, a Martín S, a Mati, a Fede. A Pancho, Diego, Nico A, Carlos, Leandro L, Leandro A(SM), Pedro, Mara, Lau L, al Beto, Patricia y Flora, Meli, Pablo H, Gerva, Christian, Santiago L, Santiago PG, Fede F, Dany, Pablo C, Mariano, Martín B, Nico B, Lau P, Guido dC, Nacho, Guidon y Tute.

Y a varios más.

Gracias a todos, de verdad, que sin ustedes no soy nada.

Índice

1. Introducción	3
1.1. Comentarios sobre universos	3
2. Resultados preliminares	5
2.1. Límites y colímites en $\mathcal{E}ns$ y en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}op}$	6
2.1.1. Colímites - colímites filtrantes	6
2.1.2. Límites	7
2.1.3. Límites finitos vs. colímites filtrantes	8
2.2. Familias epimorfas estrictas	12
2.3. Funtor denso y generadores de una categoría	14
2.4. Lemas de Yoneda	16
3. Aspectos introductorios a la teoría de topos	18
3.1. Categoría de haces sobre un sitio	18
3.2. Construcción del funtor “haz asociado”	19
3.3. El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$	29
3.4. Propiedades de exactitud	31
3.5. Definición de topos - Teorema de Giraud	34
3.5.1. Algunos ejemplos de topos	35
3.6. Morfismos geométricos	37
3.6.1. Ejemplos de morfismos geométricos	38
3.6.2. Construcción de un adjunto a derecha	39
3.7. Sitios con límites finitos	42
3.8. Lema de Gröthendieck	43
4. 2-categorías	51
4.1. Bicolímites en $\mathcal{C}at$	53
4.1.1. Categoría libre generada por un multigrafo dirigido	53
4.1.2. Cociente de categorías	54
4.2. Bicolímites 2-filtrantes	59
4.3. Categorías con límites finitos	64
4.4. Bicolímite en $\mathcal{S}it$	68
5. Bilímites 2-cofiltrantes de topos	69
5.1. Restricción a un diagrama de sitios	69
5.2. Construcción del bicolímite en TOP^{op}	69

1. Introducción

La teoría de topos fue creada por Alexander Gröthendieck a fines de la década del ‘50. Surge de la necesidad de definir la cohomología étal de esquemas, pieza clave en la resolución de las conjeturas de Weil. Además de revolucionar la geometría algebraica, los topos han influido notablemente en el estudio de la topología, el álgebra y la lógica. La obra fundacional de la teoría, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas (SGA4)*, es la principal referencia de este trabajo¹.

Nuestro principal objetivo es la construcción de bilímites de topos indexados por una 2-categoría 2-cofiltrante. Este resultado generaliza la construcción de bilímites cofiltrantes de topos realizada en el segundo tomo del SGA4 (exposé VI). La idea que se utiliza, tanto aquí como en la obra mencionada, es considerar sitios generadores de los topos y tomar el topos generado por el bicolímite del diagrama de sitios. La diferencia entre la noción de límite que interesa (bilímite) y los límites usuales, consiste en que los conos son en realidad pseudo-conos. Esto se debe a la naturaleza 2-categorica que presentan los topos en conjunto, tal como sucede en \mathcal{Cat} , la 2-categoría de categorías². Desde este punto de vista, resulta razonable que los diagramas considerados estén indexados por una 2-categoría, en lugar de una categoría. La condición de ser filtrante puede ser reemplazada por otra más general, llamada “2-filtrante”, que involucra a las flechas dobles. En el caso de una 2-categoría trivial, ambas definiciones coinciden. Existen casos, por ejemplo en teoría de Galois, de diagramas de topos 2-cofiltrantes que no son en general cofiltrantes.

En [DS], Eduardo J. Dubuc y Ross Street dan una construcción de los bicolímites 2-filtrantes en \mathcal{Cat} y demuestran que preservan ciertas propiedades, situación en cierta forma análoga a la de colímites filtrantes de conjuntos. La propiedad más importante para nuestros fines que hereda la categoría bicolímite es la de poseer límites finitos. Esto nos permite construir el bicolímite 2-filtrante de sitios y en consecuencia el bilímite 2-filtrante de topos.

En la sección 4 exhibimos una construcción de bicolímites en \mathcal{Cat} indexados por una 2-categoría arbitraria. Se obtiene como cociente de una categoría libre. Luego empalmamos esta construcción con la de [DS] para el caso 2-filtrante. En la última sección obtenemos el bilímite 2-cofiltrante de topos y demostramos la propiedad universal. Como herramienta clave, se usa un lema de Gröthendieck que permite obtener un morfismo de topos a partir de un morfismo de sitios ([SGA4-I], exposé IV). Al final de la sección 3 exponemos una demostración detallada e inédita de dicho lema. En las primeras secciones tratamos algunos temas introductorios a la teoría de topos, entre los que se destaca una construcción novedosa del funtor “haz asociado” en una sola etapa. La conocida “construcción ++” requiere, en cambio, la aplicación de un mismo funtor dos veces.

1.1. Comentarios sobre universos

Un universo es un conjunto que satisface las siguientes condiciones:

U.I) Si $x \in \mathcal{U}$ e $y \in x$, entonces $y \in \mathcal{U}$.

U.II) Si $x, y \in \mathcal{U}$, entonces $\{x, y\} \in \mathcal{U}$.

¹De hecho, el lector debe tener en cuenta que la referencia es permanente en las secciones 2 y 3.

²Las 2-categorías son categorías con flechas entre las flechas. En otras palabras, los “*hom*” son categorías.

U.III) Si $x \in \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{U}$.

U.IV) Si $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ es una familia de elementos de \mathcal{U} , e $I \in \mathcal{U}$, entonces la unión $\bigcup_{\alpha \in I} x_\alpha$ pertenece a \mathcal{U} .

Con estos axiomas se puede probar que \mathcal{U} también es cerrado por construcciones tales como pares ordenados, productos, coproductos, conjuntos de funciones entre dos conjuntos, etc. En definitiva, se puede realizar las operaciones habituales de la teoría de conjuntos sin salirse del universo. Es posible definir el concepto de categoría a partir del conjunto de objetos, el de flechas y las aplicaciones estructurales. De esta forma podemos decir si una categoría pertenece a un universo determinado.

La noción de universo nos sirve para precisar el sentido de, por ejemplo, la categoría de los conjuntos. Así, $\mathcal{U}\text{-Ens}$ es la categoría de conjuntos pertenecientes a un universo \mathcal{U} . Normalmente supondremos fijo el universo, por lo que escribiremos simplemente Ens . La misma perspectiva puede adoptarse para las otras categorías grandes familiares (grupos, espacios topológicos, etc.). Estas categorías no pertenecen al universo original. N. Bourbaki propone la introducción del siguiente axioma: para todo conjunto x existe un universo \mathcal{U} tal que $x \in \mathcal{U}$. Su adopción permite que las categorías Ens , Ab , ${}_A\text{Mod}$, Cat , etc., sean pequeñas en un universo \mathcal{V} tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$. A lo largo del trabajo, diremos que una categoría \mathcal{C} es pequeña cuando $\mathcal{C} \in \mathcal{U}$, para lo cual alcanza con que los conjunto de objetos y de flechas pertenezcan a \mathcal{U} . Por \mathcal{U} -categoría entendemos una categoría tal que sus hom son conjuntos pertenecientes a \mathcal{U} (“conjuntos pequeños”). Si el conjunto de objetos de una \mathcal{U} -categoría pertenece a \mathcal{U} , entonces la categoría es pequeña. Además de las categorías grandes ya mencionadas, los topos (más rigurosamente los “ \mathcal{U} -topos”) son ejemplos de \mathcal{U} -categorías.

2. Resultados preliminares

2.1 Definición. Dadas dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} se puede definir la categoría $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$. Sus objetos son los pares (C, D) con $C \in \mathcal{C}$ ⁽³⁾ y $D \in \mathcal{D}$ y los notamos $C \times D$. El conjunto $[A \times B, C \times D]$ se define como $[A, C] \times [B, D]$, o sea que las flechas de $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ son los pares (f, g) donde f y g son flechas de \mathcal{C} y \mathcal{D} respectivamente.

$$id_{A \times B} := (id_A, id_B).$$

La composición se define así: $(f, g)(h, k) = (fh, gk)$.

2.2 Observación. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son dos categorías, los funtores de \mathcal{C} a \mathcal{D} , junto con las transformaciones naturales entre ellos, forman una categoría, que notamos $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Para cada $C \in \mathcal{C}$ se tiene el funtor evaluación $\mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{ev_C} \mathcal{D}$ que se define $ev_C(F) = FC$ en los objetos y $ev_C(\eta) = \eta_C$ en las flechas $F \xrightarrow{\eta} G$.

2.3 Proposición. Sean \mathcal{C}, \mathcal{D} y \mathcal{E} tres categorías. Las categorías $\mathcal{E}^{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}$ y $(\mathcal{E}^{\mathcal{D}})^{\mathcal{C}}$ son isomorfas.

2.4 Proposición. Un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ da una equivalencia si y sólo si es plenamente fiel y es cuasisuryectivo en los objetos (i.e. $\forall D \in \mathcal{D} \exists C \in \mathcal{C} / FC \simeq D$). Si F es plenamente fiel y biyectivo en los objetos, entonces es un isomorfismo de categorías.

2.5 Lema. Si se tiene dos colímites en \mathcal{C} cuyos diagramas están dados desde una misma categoría Γ , una transformación natural entre los diagramas induce un único morfismo entre los colímites.

Más precisamente: dada una transformación natural $\Gamma \xrightarrow[\downarrow \gamma]{A} \mathcal{C}$ existe un único morfismo $colim A \rightarrow colim B$ tal que los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{\lambda_i} & colim A \\ \gamma_i \downarrow & & \downarrow \\ B_i & \xrightarrow{\mu_i} & colim B \end{array}$$

conmutan. A tal morfismo lo podemos denominar $colim \gamma$.

También vale para límites en lugar de colímites.

Demostración. Por la naturalidad de \mathcal{E} , las flechas $\mu_i \mathcal{E}_i$ dan un cono de A a $colim B$. De la propiedad universal de $colim A$ se deduce la existencia y unicidad del morfismo buscado. \square

2.6 Observación. Este hecho permite construir un funtor $\mathcal{C}^{\Gamma} \xrightarrow{colim} \mathcal{C}$. En realidad existe un funtor $colim$ para cada elección de los objetos colímite para cada diagrama. Dados dos funtores $colim$ existe un único isomorfismo natural entre ellos.

³Si \mathcal{C} es una categoría, $C \in \mathcal{C}$ significará $C \in ob(\mathcal{C})$.

2.7 Lema. Sean dos colímites en \mathcal{C} dados por $\Gamma \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ y $\Lambda \xrightarrow{G} \mathcal{C}$. Un funtor $\Lambda \xrightarrow{T} \Gamma$ tal que $FT = G$ induce una flecha $\text{colim } G \rightarrow \text{colim } F$.

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & & \\ T \downarrow & \searrow G & \\ \Gamma & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \end{array}$$

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} G(\alpha) = FT(\alpha) & & \\ \searrow r_\alpha & \xrightarrow{s_{T(\alpha)}} & \text{colim } G \xrightarrow{\exists!} \text{colim } F \\ & & \end{array}$$

□

2.1. Límites y colímites en $\mathcal{E}ns$ y en $\mathcal{E}ns^{cop}$

2.1.1. Colímites - colímites filtrantes

La categoría $\mathcal{E}ns$ tiene todos los colímites pequeños. Dado un diagrama $\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{E}ns$ el colímite se puede construir como un cociente de la unión disjunta, en donde se identifican los elementos conectados por una flecha del diagrama. La relación de equivalencia es entonces la generada por estos pares.

$$\text{colim } A = \coprod_{i \in \Gamma} A_i / \sim \quad a \sim f(a)$$

La estructura de cono está dada por las inclusiones a la unión disjunta compuestas con la proyección al cociente. Es fácil verificar la propiedad universal.

Si la categoría de índices Γ verifica algunas condiciones (de “filtración”) la relación de equivalencia considerada tiene una forma más explícita, y el colímite posee algunas propiedades interesantes. A continuación exponemos estas condiciones tal como son planteadas en [SGA4-I] (exposé I, sección 2).

2.8 Definición. Decimos que una categoría es pseudo-filtrate si tiene las siguientes dos propiedades.

PS1) Todo par de flechas $\alpha \rightarrow \beta$, $\alpha \rightarrow \gamma$ se puede completar a un cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & \beta & \\ \nearrow & & \searrow \\ \alpha & & \delta \\ \searrow & & \nearrow \\ & \gamma & \end{array}$$

PS2) Para todo diagrama de la forma $\alpha \xrightarrow[u]{v} \beta$ existe una flecha $\beta \xrightarrow{w} \gamma$ tal que $wu = wv$.

2.9 Observación. Si la categoría de índices de un diagrama en $\mathcal{E}ns$ cumple PS1, la relación de equivalencia en la unión disjunta admite la siguiente descripción: si $a \in A_\alpha$ y $b \in A_\beta$, entonces $\bar{a} = \bar{b}$ si y sólo si existen $\alpha \xrightarrow{m} \gamma \xleftarrow{n} \beta$ tales que $m(a) = n(b)$.

Esta nueva relación así definida es de equivalencia (la transitividad es consecuencia de PS1) y coincide con la anterior pues vale la doble inclusión.

2.10 Observación. Si Γ es pseudo-filtrante, la condición PS2 da la siguiente propiedad. Dos elementos en un mismo conjunto $a, b \in A_\alpha$ pertenecen a la misma clase en el colímite si y sólo si existe $\alpha \xrightarrow{m} \gamma$ tal que $m(a) = m(b)$.

2.11 Definición. Una categoría es filtrante si es no vacía, pseudo-filtrante y conexa (i.e., dos objetos cualesquiera están unidos por una secuencia de flechas, sin imponer condiciones sobre el sentido de las mismas).

Observación. La condición PS1 hace que la conexión sea equivalente a:

F0) dados dos objetos $\alpha, \beta \in \Gamma$ existen
$$\begin{array}{ccc} & \alpha & \\ & \searrow & \\ & & \gamma \\ & \nearrow & \\ & \beta & \end{array}$$

Por otra parte, las condiciones PS2, F0 y $\Gamma \neq \emptyset$ bastan para que Γ sea filtrante.

2.1.2. Límites

Los límites de conjuntos también existen y se pueden obtener como subconjunto del producto de los objetos en cuestión; el subconjunto de tiras coherentes con las flechas.

$$\text{lím } A = \{a \in \prod_{i \in \Gamma} A_i / f(a_i) = a_j \forall i \xrightarrow{f} j\}$$

Esta construcción de alguna manera se generaliza a límites en cualquier categoría mediante el siguiente lema.

2.12 Lema. *Todo límite se puede expresar mediante un egalizador y productos.*

Demostración. Sea $I \xrightarrow{L} \mathcal{C}$ un diagrama.

Sean a y b las flechas que hacen conmutar los siguientes dos cuadrados.

$$\begin{array}{ccc} L_{cod(f)} & \xrightarrow{id} & L_{cod(f)} \\ \pi_{cod(f)} \uparrow & & \uparrow \pi'_f \\ S \longrightarrow \prod_{i \in Ob(I)} L_i & \xrightleftharpoons[b]{a} & \prod_{f \in Fl(I)} L_{cod(f)} \\ \pi_{dom(f)} \downarrow & & \downarrow \pi'_f \\ L_{dom(f)} & \xrightarrow{L_f} & L_{cod(f)} \end{array}$$

S es el egalizador de a y b . Es sencillo comprobar que S es el límite de L . □

2.13 Corolario. *Para que una categoría tenga límites basta con que tenga productos y egalizadores. También se desprende que una categoría tiene límites finitos si y sólo si tiene productos finitos y egalizadores.*

2.14 Corolario. Si un funtor preserva productos arbitrarios (resp. finitos) y egalizadores entonces preserva límites arbitrarios (resp. finitos).

2.15 Observación. Si una categoría tiene productos fibrados y objeto final, entonces tiene todos los límites finitos. Los productos $A \times B$ se pueden construir como el pullback de $A \rightarrow 1 \leftarrow B$, mientras que el egalizador de $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{a} \\ \xrightarrow{b} \end{smallmatrix} B$ es el pullback de

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ & \downarrow \Delta & \\ A & \xrightarrow{(a,b)} & B \times B \end{array}$$

2.1.3. Límites finitos vs. colímites filtrantes

2.16 Observación. Consideremos tres categorías I , Γ y \mathcal{C} tales que \mathcal{C} tiene todos los límites indexados por I y todos los colímites indexados por Γ .

Sea $\Gamma \times I \xrightarrow{A} \mathcal{C}$ un funtor.

La composición $\Gamma \xrightarrow{A} \mathcal{C}^I \xrightarrow{\text{lim}} \mathcal{C}$ permite construir $\text{colim}_{\alpha} \text{lim}_i A_{i,\alpha}$.

Análogamente se tiene $\text{lim}_i \text{colim}_{\alpha} A_{i,\alpha}$.

Probaremos que existe una flecha canónica $\text{colim}_{\alpha} \text{lim}_i A_{i,\alpha} \xrightarrow{u} \text{lim}_i \text{colim}_{\alpha} A_{i,\alpha}$. Esta flecha surge del siguiente diagrama.

$$\text{lim}_i A_{i,\beta} \xrightarrow{p_{j,\beta}} A_{j,\beta} \xrightarrow{q_{j,\beta}} \text{colim}_{\alpha} A_{j,\alpha}$$

Es fácil comprobar que dejando fijo j obtenemos el cono $(q_{j,\beta} p_{j,\beta})$ en β hacia $\text{colim}_{\alpha} A_{j,\alpha}$ (se usa el lema 2.5). Éste induce las flechas t_j . (Análogamente, dejando fijo β se obtiene un cono en j).

$$\begin{array}{ccccc} \text{lim}_i A_{i,\beta} & \xrightarrow{p_{j,\beta}} & A_{j,\beta} & \xrightarrow{q_{j,\beta}} & \text{colim}_{\alpha} A_{j,\alpha} \\ \downarrow r_{\beta} & & & \nearrow t_j & \uparrow s_j \\ \text{colim}_{\alpha} \text{lim}_i A_{i,\alpha} & \xrightarrow{u} & \text{lim}_i \text{colim}_{\alpha} A_{i,\alpha} & & \end{array}$$

Las flechas t_j también forman un cono que provocan la flecha u . Se puede comprobar que u es la única que cumple $s_j u r_{\beta} = q_{j,\beta} p_{j,\beta}$ (el rectángulo conmuta). Esto explica que si se fabrica u a partir de t'_{β} en lugar de t_j (la otra diagonal del rectángulo) se obtiene la misma flecha.

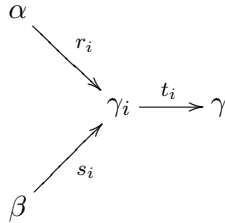
2.17 Proposición. En la categoría $\mathcal{E}ns$, colímites filtrantes conmutan con límites finitos: la flecha canónica $\text{colim}_{\alpha} \text{lim}_i A_{i,\alpha} \xrightarrow{u} \text{lim}_i \text{colim}_{\alpha} A_{i,\alpha}$ es un isomorfismo.

Demostración. Primero demostraremos que colímites filtrantes conmutan con productos finitos, luego con egalizadores, y finalmente tendremos el caso general gracias al lema 2.12.

Sea I un conjunto finito. La flecha canónica $\text{colim}_{\alpha} \prod_i C_{i,\alpha} \xrightarrow{u} \prod_i \text{colim}_{\alpha} C_{i,\alpha}$ está definida así: $u(\overline{(a_i)}) = \overline{(a_i)}$.

La suryectividad de u se debe a que para cualquier tira $(\overline{a_i})$ se pueden elegir los representantes de manera que estén todos en conjuntos con el mismo índice α (se usa que Γ es filtrante e I finito).

Para ver que u es inyectiva, supongamos $(\overline{a_i}) = (\overline{b_i})$, con $a_i \in C_{i,\alpha}$ y $b_i \in C_{i,\beta}$. Al ser Γ filtrante, para cada i existe un índice γ_i con flechas $\alpha \longrightarrow \gamma_i \longleftarrow \beta$ tales que los representantes se igualan en C_{i,γ_i} . Además podemos avanzar para elegir a todos los γ_i iguales entre sí:



Pero aún las flechas $t_i r_i$ pueden no ser todas iguales. Ídem las flechas $t_i s_i$. Por la propiedad PS2 existe $\gamma \xrightarrow{w} \delta$ tal que las flechas $wt_i r_i$ se igualan, y también las flechas $wt_i s_i$. Esto nos da unos representantes $c_i \in C_{i,\delta}$ tales que $\overline{(a_i)} = \overline{(c_i)} = \overline{(b_i)}$.

Ahora veamos que los colímites filtrantes conmutan con egalizadores.

Sean $S_{\alpha} \hookrightarrow C_{\alpha} \xrightleftharpoons[g_{\alpha}]{f_{\alpha}} D_{\alpha}$ egalizadores indexados por una categoría filtrante. Tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} S_{\alpha} & \hookrightarrow & C_{\alpha} & \xrightleftharpoons[g_{\alpha}]{f_{\alpha}} & D_{\alpha} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{colim}_{\alpha} S_{\alpha} & \longrightarrow & \text{colim}_{\alpha} C_{\alpha} & \xrightleftharpoons[\overline{g_{\alpha}}]{\overline{f_{\alpha}}} & \text{colim}_{\alpha} D_{\alpha} \\ \downarrow u & \nearrow & & & \\ E & & & & \end{array}$$

donde E es el egalizador de $\overline{f_{\alpha}}$ y $\overline{g_{\alpha}}$ y u es la flecha canónica. Debemos verificar que u es inyectiva y suryectiva. Vale $u(\overline{c}) = \overline{c}$ pues u hace conmutar el trapecio de la izquierda.

De esta forma, la inyectividad de u significa que si $a \in S_{\alpha}$ y $b \in S_{\beta}$ son tales que $\overline{a} = \overline{b}$ en $\text{colim}_{\alpha} C_{\alpha}$ entonces también $\overline{a} = \overline{b}$ en $\text{colim}_{\alpha} S_{\alpha}$. Lo cual se deduce del siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
a \in S_\alpha & \xrightarrow{\quad} & C_\alpha \\
& \searrow r & \\
& & S_\gamma \xrightarrow{\quad} C_\gamma \\
& \nearrow s & \\
b \in S_\beta & \xrightarrow{\quad} & C_\beta
\end{array}$$

donde r y s son tales que $ra = sb$.

La suryectividad significa que todo elemento $\bar{a} \in E \subset \text{colim}_\alpha C_\alpha$ posee un representante en un S_β .

Sabemos que $\overline{f_\alpha(a)} = \overline{f_\alpha(\bar{a})} = \overline{g_\alpha(\bar{a})} = \overline{g_\alpha(a)}$. De modo que existe un $\alpha \xrightarrow{\lambda} \beta$ tal que $\lambda f_\alpha(a) = \lambda g_\alpha(a)$. Como λ conmuta con f y g , $f_\beta \lambda(a) = g_\beta \lambda(a)$. Esto dice que $\lambda(a) \in S_\beta$ y representa a la misma clase que a , tal como se buscaba.

Último paso: Sea $E_\alpha = \lim_i A_{i,\alpha}$ y $F = \lim_i \text{colim}_\alpha A_{i,\alpha}$.

$$\begin{array}{ccccc}
F & \xrightarrow{e} & \prod_{i \in \text{Ob}(I)} \text{colim}_\alpha A_{i,\alpha} & \xrightarrow[\quad]{\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}} & \prod_{f \in \text{Fl}(I)} \text{colim}_\alpha A_{\text{cod}(f),\alpha} \\
\uparrow u & & \uparrow v & & \uparrow w \\
\text{colim}_\alpha E_\alpha & \xrightarrow{f} & \text{colim}_\alpha \prod_{i \in \text{Ob}(I)} A_{i,\alpha} & \xrightarrow[\quad]{\begin{smallmatrix} c \\ d \end{smallmatrix}} & \text{colim}_\alpha \prod_{f \in \text{Fl}(I)} A_{\text{cod}(f),\alpha}
\end{array}$$

Para ver que $vf = eu$ se puede usar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
\lim_i \text{colim}_\alpha A_{i,\alpha} & \xrightarrow{e} & \prod_i \text{colim}_\alpha A_{i,\alpha} \\
\uparrow u & & \uparrow v \\
\text{colim}_\alpha \lim_i A_{i,\alpha} & \xrightarrow{f} & \text{colim}_\alpha \prod_i A_{i,\alpha}
\end{array}
\begin{array}{c}
\searrow \pi_i \\
\text{colim}_\alpha A_{i,\alpha} \\
\nearrow \bar{\pi}_i
\end{array}$$

Las flechas π_i son las proyecciones del producto. $\bar{\pi}_i$ es la flecha colímite de las proyecciones $\prod_i A_{i,\alpha} \rightarrow A_{i,\alpha}$

Por como es la construcción del límite a partir de un egalizador, $\pi_i e$ son las proyecciones del límite, mientras que $\bar{\pi}_i f$ son las proyecciones del límite (para cada α) pasadas al colímite. Por el análisis hecho en la observación 2.16, $\pi_i e u = \bar{\pi}_i f$ y $\pi_i v = \bar{\pi}_i$. Luego, $\pi_i e u = \pi_i v f$ de donde $eu = vf$.

De manera similar se puede comprobar que $wc = av$ y $wd = bv$. $\text{colim}_\alpha E_\alpha$ es egalizador de c y d por el paso anterior. Como v y w son isomorfismos, también es egalizador de a y b . En consecuencia, u es isomorfismo. \square

2.18 Proposición. Si \mathcal{D} tiene límites entonces $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ también tiene límites y se calculan lugar a lugar.

Demostración. Sea $I \xrightarrow{F} \mathcal{D}^{\mathcal{C}}$. Para armar el límite $\lim F = \underline{F}$ definimos primero su valor en los objetos de \mathcal{C} .

$$\underline{F}(C) := \lim ev_C \circ F = \lim_i F_i(C)$$

$$I \xrightarrow{F} \mathcal{D}^{\mathcal{C}} \xrightarrow{ev_C} \mathcal{D}$$

Si $C \xrightarrow{f} D$ es una flecha en \mathcal{C} , $\underline{F}(f)$ será la única flecha que hace conmutar

$$\begin{array}{ccc} \underline{F}(C) & \xrightarrow{\underline{F}(f)} & \underline{F}(D) \\ \pi_{C,i} \searrow & & \searrow \pi_{D,i} \\ & F_i(C) \xrightarrow{F_i(f)} & F_i(D) \end{array}$$

para todo $i \in I$ (lema 2.5). Es fácil ver que \underline{F} así definido resulta un funtor y que se tienen proyecciones $\underline{F} \xrightarrow{\pi_i} F_i$ que dan un cono porque evaluando en cada C dan conos (la naturalidad de π_i es el paralelogramo anterior).

Verifiquemos la propiedad universal. Sean $G \xrightarrow{\lambda_i} F_i$ transformaciones naturales que dan un cono. Debemos definir $G \xrightarrow{l} \underline{F}$ tal que $\pi_i l = \lambda_i$. Evaluando en cada $C \in \mathcal{C}$, vemos que l_C queda determinado:

$$\begin{array}{ccc} GC & \xrightarrow{l_C} & \underline{F}C \\ & \searrow \lambda_{i,C} & \searrow \pi_{i,C} \\ & & F_i C \end{array}$$

lo que nos da la unicidad de l , y también la existencia una vez probada la naturalidad.

Para $C \xrightarrow{f} D \in \mathcal{C}$ tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} GC & \xrightarrow{l_C} & \underline{F}C & & \\ \downarrow Gf & \searrow & \downarrow \underline{F}f & \searrow \pi_{i,C} & \\ GD & \xrightarrow{l_D} & \underline{F}D & & F_i C \\ & \searrow \lambda_{i,D} & \searrow \pi_{i,D} & \downarrow F_i f & \\ & & & & F_i D \end{array}$$

Seguendo el diagrama se ve que $\pi_{i,D} l_D G(f) = \pi_{i,D} \underline{F}(f) l_C$, de donde $l_D G(f) = \underline{F}(f) l_C$ por la propiedad universal de $\lim_i F_i(D)$. \square

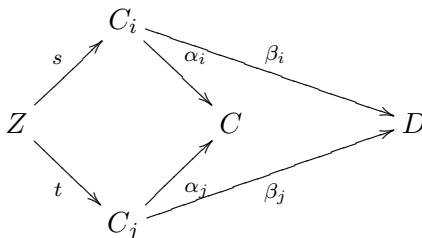
2.19 Definición. Si \mathcal{C} es una categoría, un prehaz sobre \mathcal{C} es un funtor $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{F} \mathcal{E}ns$. $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ es la categoría de prehaces sobre \mathcal{C} . Por la proposición anterior esta categoría tiene todos los límites y colímites pequeños.

2.20 Proposición. *Un cono de un diagrama de preheces tal que al evaluar en todo objeto da un límite de conjuntos, es un límite.*

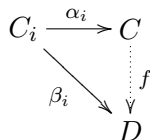
Demostración. Sea $F \xrightarrow{t_i} F_i$ el cono. Tomamos un límite $F' \xrightarrow{t'_i} F_i$. Existe una única $F \xrightarrow{g} F'$ tal que $t'_i g = t_i$. Al evaluar en un C , g_C debe ser un isomorfismo porque tanto $F' C$ como $F C$ son límites. Por lo tanto g es isomorfismo y F es límite. \square

2.2. Familias epimorfas estrictas

2.21 Definición. Sea $C_i \xrightarrow{\alpha_i} C$ una familia de flechas en una categoría. La familia $C_i \xrightarrow{\beta_i} D$ se dice compatible con (α_i) si para todo par de flechas $Z \xrightarrow{s} C_i, Z \xrightarrow{t} C_j$ tales que $\alpha_i s = \alpha_j t$ se tiene $\beta_i s = \beta_j t$.



2.22 Definición. Una familia $C_i \xrightarrow{\alpha_i} C$ se dice epimorfa estricta si para toda familia compatible con ella $C_i \xrightarrow{\beta_i} D$ existe una única $C \xrightarrow{f} D$ tal que $f \alpha_i = \beta_i \forall i$.



2.23 Proposición. *Las familias epimorfas estrictas son epimorfas.*

Demostración. Sea $C_i \xrightarrow{\alpha_i} C$ una familia epimorfa estricta. Al componerla con una flecha cualquiera $C \xrightarrow{f} D$ se obtiene una familia compatible, i.e. $(f \alpha_i)$ es compatible con (α_i) . Si f y g son tales que $f \alpha_i = g \alpha_i$ para todo i , entonces la unicidad en la definición de familia epimorfa estricta dice que $f = g$. \square

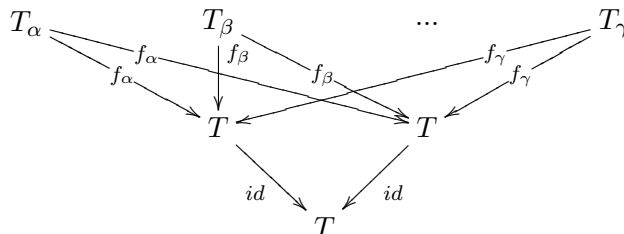
2.24 Proposición. *Si $A \xrightarrow{f} B$ es monomorfismo y epimorfismo estricto entonces es isomorfismo.*

Demostración. Por ser monomorfismo la flecha $A \xrightarrow{id_A} A$ es compatible con f . Luego, $\exists! B \xrightarrow{g} A$ tal que $g f = id_A$.

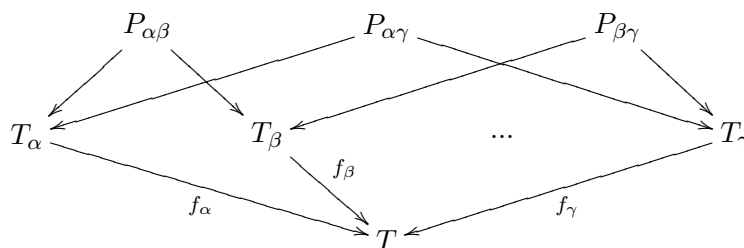
Para ver que $f g = id_B$, basta con notar que f es compatible con sí misma. Como $f g f = f$ e $id_B f = f$, por la unicidad $f g = id_B$. \square

El hecho de que una familia de flechas sea epimorfa o epimorfa estricta se puede expresar mediante colímites, como veremos a continuación. Para las familias epimorfas estrictas se usa la existencia de productos fibrados.

2.25 Observación. Una familia de flechas $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T$ en una categoría cualquiera es epimorfa si y sólo si, en el diagrama de abajo, T junto con las identidades da un colímite.



2.26 Observación. Sea $T_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} T$ una familia de flechas. Supongamos que existen los colímites de los pares (f_α, f_β) , y llamémoslos $P_{\alpha\beta}$. (f_α) es epimorfa estricta si y sólo T es colímite en el siguiente diagrama.

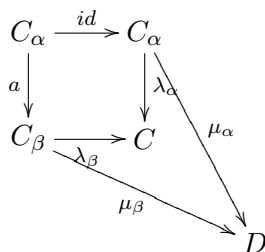


2.27 Observación. En la categoría de conjuntos las familias epimorfas son estrictas. Es fácil ver que ambas condiciones equivalen a que las imágenes cubran el codominio.

En $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$, como los límites y colímites se calculan lugar a lugar, y por las observaciones anteriores, las familias epimorfas también son estrictas (se usa la proposición 2.20) y son las familias suryectivas lugar a lugar.

2.28 Lema. Si $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ es un colímite entonces también es una familia epimorfa estricta.

Demostración. Sea $C_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} D$ una familia compatible con (λ_α) . Veamos que resulta ser un cono para que exista una única flecha $C \xrightarrow{s} D$ tal que $s\lambda_\alpha = \mu_\alpha$. Sea $C_\alpha \xrightarrow{a} C_\beta$ una flecha del diagrama del colímite.



Como $\lambda_\alpha id = \lambda_\beta a$, $\mu_\alpha id = \mu_\beta a$.

□

2.3. Funtor denso y generadores de una categoría

2.29 Definición. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ un funtor y $D \in \mathcal{D}$. Llamaremos diagrama de D a través de F a la categoría Γ_D^F cuyos objetos son los pares (C, g) donde $C \in \mathcal{C}$ y $FC \xrightarrow{g} D$, y una flecha entre (C, g) y (C', g') está dada por una $C \xrightarrow{t} C'$ tal que $g' Ft = g$.

$$\begin{array}{ccc} C & & FC \\ \downarrow t & & \downarrow Ft \quad \searrow g \\ C' & & FC' \xrightarrow{g'} D \end{array}$$

Se tiene una proyección canónica $\Gamma_D^F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$. $\pi(C, g) = C$, $\pi(t) = t$. Además se tiene un cono desde el funtor $\Gamma_D^F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ hacia D

2.30 Definición. Un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ se dice denso si todo objeto $D \in \mathcal{D}$ es colímite de su diagrama a través de F .

2.31 Proposición. Sea $S \xrightarrow{F} T$ un funtor denso, $T \xrightarrow[G]{H} U$ dos funtores que preservan colímites y $S \xrightarrow[HF]{GF} U$ una transformación natural. η se puede extender a una única

$$T \xrightarrow[H]{G} U \text{ tal que } \eta = \bar{\eta}F.$$

Demostración. Sea D un objeto cualquiera de T .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_D^F & & \\ \pi \downarrow & & \\ S \xrightarrow{F} T & \xrightarrow[G]{H} & U \end{array}$$

Como D es colímite de $F\pi$, GD y HD son colímites de $GF\pi$ y $HF\pi$ respectivamente. Dado que tenemos una transformación natural entre $GF\pi$ y $HF\pi$, el lema 2.5 nos dice que existe una única $GD \xrightarrow{\bar{\eta}_D} HD$ tal que

$$\begin{array}{ccc} GF(A) & \xrightarrow{Gg} & GD \\ \eta_A = \bar{\eta}_{F(A)} \downarrow & & \downarrow \bar{\eta}_D \\ HF(A) & \xrightarrow{Hg} & HD \end{array}$$

conmuta para toda flecha $F(A) \xrightarrow{g} D$ en T . Esto ya nos da la unicidad de $\bar{\eta}$. Sólo resta chequear la naturalidad. Sea $D \xrightarrow{t} D'$ una flecha en T . Para toda flecha $F(A) \xrightarrow{g} D$, tenemos:

$$\begin{array}{ccccc}
GF(A) & \xrightarrow{Gg} & GD & \xrightarrow{Gt} & GD' \\
\eta_A \downarrow & & \downarrow \bar{\eta}_D & & \downarrow \bar{\eta}_{D'} \\
HF(A) & \xrightarrow{Hg} & HD & \xrightarrow{Ht} & HD'
\end{array}$$

$$\bar{\eta}'_D Gt Gg = Ht Hg \eta_A = Ht \bar{\eta}_D Gg$$

Como GD es colímite podemos cancelar Gg . □

2.32 Proposición. *Sea \mathcal{C} una categoría y S una subcategoría plena. Son equivalentes:*

- 1) *La inclusión $S \xrightarrow{h} \mathcal{C}$ es densa.*
- 2) *Para todo objeto P de \mathcal{C} la clase de todas las flechas que salen de objetos de S y tienen codominio P es epimorfa estricta.*

Cuando se cumplen estas afirmaciones decimos que S es densa en \mathcal{C} o bien que “genera” \mathcal{C} .

Demostración. 1) implica 2) por el lema 2.28 (colímite implica familia epimorfa estricta). Veamos la otra implicación.

$$\Gamma_P^h \xrightarrow{\pi} S \xrightarrow{h} \mathcal{C}$$

El cono $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} P$ está dado trivialmente. Si tenemos otro cono $C_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} Q$:

$$\begin{array}{ccc}
C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & P \\
& \searrow \mu_\alpha & \\
& & Q
\end{array}$$

sólo debemos ver que (μ_α) es compatible con (λ_α) . Sean $Z \xrightarrow{a} C_\alpha$ y $Z \xrightarrow{b} C_\beta$ tales que $\lambda_\alpha a = \lambda_\beta b$. Supongamos primero que $Z \in S$.

Escribamos $\lambda_\gamma = \lambda_\alpha a = \lambda_\beta b$.

$(Z, \lambda_\gamma) \in \Gamma_P^i$. De esta forma, a y b dan flechas en Γ_P^i .

$$\begin{array}{ccccc}
& & C_\alpha & & \\
& a \nearrow & & \searrow \lambda_\alpha & \\
Z & & & & P \\
& \xrightarrow{b} & C_\beta & \xrightarrow{\lambda_\beta} & \\
& & \lambda_\gamma & &
\end{array}$$

Como (μ_α) es cono, $\lambda_\alpha a = \lambda_\gamma = \lambda_\beta b \Rightarrow \mu_\alpha a = \mu_\gamma = \mu_\beta b$.

Si ahora Z es cualquiera, para toda flecha $L \xrightarrow{t} Z$ con $L \in S$, por lo probado recién, vale $\mu_\alpha at = \mu_\beta bt$. Usando la hipótesis (2) para Z , la familia de las flechas t es epimorfa, luego $\mu_\alpha a = \mu_\beta b$. □

2.33 Observación. Sea \mathcal{C} una categoría con un conjunto generador S . Para que un cono $C \xrightarrow{p_i} C_i$ en \mathcal{C} sea un límite basta con que se cumpla la propiedad universal para los objetos generadores.

2.4. Lemas de Yoneda

2.34 Proposición. Lema de Yoneda I.

Sea \mathcal{C} una categoría, $F \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}}$ y $C \in \mathcal{C}$ se tiene una biyección $\{[C, -]_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\tau} F\} \leftrightarrow FC$ que resulta natural en las variables C y F .

Demostración. La biyección se define, para un lado:

$$\begin{aligned} \{[C, -]_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\tau} F\} &\longrightarrow FC \\ \tau &\longmapsto \tau_C(id_C) \end{aligned}$$

Para la inversa, sea $\alpha \in FC$ y $f \in [C, D]$. Se define $\tilde{\alpha}_D(f) = Ff(\alpha)$

$$\begin{array}{ccc} id_C \in [C, C] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_C} & FC \ni \alpha \\ f_* \downarrow & & \downarrow Ff \\ f \in [C, D] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}_D} & FD \end{array}$$

Se chequea la naturalidad de $\tilde{\alpha}$, que las dos composiciones dan las identidades y la naturalidad en C y F . \square

2.35 Observación. Si aplicamos el lema a \mathcal{C}^{op} podemos escribir $[-, C]_{\mathcal{C}}$ en lugar de $[C, -]_{\mathcal{C}^{op}}$.

2.36 Corolario. La inclusión de Yoneda $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$, $h(C) := [-, C]_{\mathcal{C}}$, es plenamente fiel.

Tener una flecha $C \rightarrow D$ equivale a $[-, C] \rightarrow [-, D]$. Por esta razón es frecuente la omisión del functor h , considerando $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$. Usaremos constantemente el abuso de escribir $C \xrightarrow{\alpha} F$ para referir tanto al elemento en FC como a la transformación natural $[-, C] \rightarrow F$ correspondiente.

Los diagramas de la pinta

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{f} & D \\ & \searrow \alpha f & \downarrow \alpha \\ & & F \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} C & & \\ \alpha \downarrow & \searrow t\alpha & \\ F & \xrightarrow{t} & G \end{array}$$

($C, D \in \mathcal{C}$, $F, G \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$) tienen sentido gracias a la naturalidad de la biyección del lema de Yoneda I.

Notar que $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ completa por límites y colímites pequeños a la categoría arbitraria \mathcal{C} .

2.37 Proposición. *Lema de Yoneda II.*

El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ es denso.

Demostración. En la categoría $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ las familias epimorfas son estrictas (observación 2.27). Por lo tanto basta con comprobar que la familia de flechas $[-, C] \rightarrow F$ es epimorfa, es decir que es suryectiva lugar a lugar. Esto es inmediato del lema de Yoneda I, pues todo $\alpha \in FC$ es igual a $\tilde{\alpha}_C(id_C)$ \square

2.38 Observación. *La inclusión de Yoneda preserva límites.*

Demostración. Sea $C \xrightarrow{p_i} C_i$ un límite en \mathcal{C} , y $F \xrightarrow{g_i} C_i$ un cono ($F \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$). Para cada $D \xrightarrow{\alpha} F$, con $D \in \mathcal{C}$, tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\alpha} & F \\
 \searrow t_\alpha & & \downarrow \exists! t \\
 & & C \\
 & & \xrightarrow{p_i} C_i
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow g_i \\
 \searrow g_i
 \end{array}$$

Las t_α aparecen porque $C \xrightarrow{p_i} C_i$ es límite en \mathcal{C} . Por el lema de Yoneda II existe un único t tal que los triángulos de la izquierda conmutan, lo cual equivale a que conmuten los de la derecha. \square

3. Aspectos introductorios a la teoría de topos

3.1. Categoría de haces sobre un sitio

3.1 Definición. Un sitio es una categoría con una topología. Una topología consiste en una clase $cov(C)$ para cada objeto $C \in \mathcal{C}$, de familias de flechas $(C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C)$ (cubrimientos) satisfaciendo las siguientes propiedades.

- (1) Si $C \xrightarrow{f} D$ es un isomorfismo, $(C \xrightarrow{f} D) \in cov(D)$.
- (2) Si $(C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C) \in cov(C)$ y se tiene una $D \xrightarrow{f} C$ entonces existe un cubrimiento de D , $(D_\gamma \xrightarrow{\mu_\gamma} D)$ tal que cada flecha $f\mu_\gamma$ se factoriza por alguna λ_α :

$$\begin{array}{ccc} D_\gamma & \xrightarrow{t_\gamma} & C_{\alpha_\gamma} \\ \mu_\gamma \downarrow & & \downarrow \lambda_{\alpha_\gamma} \\ D & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- (3) Los cubrimientos son estables por composición: si $(C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C) \in cov(C)$ y $(C_{\alpha,\gamma} \xrightarrow{\mu_{\alpha,\gamma}} C_\alpha) \in cov(C_\alpha)$ entonces $(C_{\alpha,\gamma} \xrightarrow{\lambda_\alpha \mu_{\alpha,\gamma}} C) \in cov(C)$.
- (4) Si un refinamiento de una familia cubre, entonces la familia original también cubre.

Es decir:

Dada una familia de flechas $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y un cubrimiento $D_\gamma \xrightarrow{\mu_\gamma} C$ tal que cada flecha se factoriza por una λ_α ,

$$\begin{array}{ccc} D_\gamma & & \\ & \searrow \mu_\gamma & \\ & & C \\ & \swarrow t_\gamma & \\ & C_{\alpha_\gamma} & \xrightarrow{\lambda_{\alpha_\gamma}} C \end{array}$$

se tiene $(\lambda_\alpha) \in cov(C)$.

3.2 Observación. Si \mathcal{C} tiene pull-backs, la condición (2) es equivalente a que los cubrimientos sean estables por pull-backs (usando (4)).

3.3 Observación. La intersección de topologías es una topología. Además, se tiene la topología máxima (o discreta) en la que toda familia $C_\alpha \rightarrow C$ es un cubrimiento (incluso $\phi \in cov(C)$). Esto permite definir la topología generada por un conjunto arbitrario de familias $C_\alpha \rightarrow C$.

La topología indiscreta es la generada por el vacío. Está formada por las familias $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ tales que alguna λ_α es una retracción. Es la menor topología, está contenida en cualquier otra.

3.4 Definición. Tal como ha sido mencionado recién en la propiedad (4), un refinamiento de una familia de flechas $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ es otra familia $D_\gamma \xrightarrow{\mu_\gamma} C$ tal que cada flecha se factoriza por una λ_α .

$$\begin{array}{ccc}
 D_\gamma & & \\
 \searrow & \mu_\gamma & \\
 & C_{\alpha_\gamma} & \xrightarrow{\lambda_{\alpha_\gamma}} C \\
 \swarrow t_\gamma & &
 \end{array}$$

3.5 Observación. Dados dos cubrimientos de un mismo objeto $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y $D_\beta \xrightarrow{\mu_\beta} C$, existe un tercer cubrimiento que refina a ambos:

$$\begin{array}{ccc}
 E_\gamma & \xrightarrow{s_\gamma} & C_{\alpha_\gamma} \\
 \downarrow t_\gamma & \searrow \rho_\gamma & \downarrow \lambda_{\alpha_\gamma} \\
 D_{\beta_\gamma} & \xrightarrow{\mu_{\beta_\gamma}} & C
 \end{array}$$

Demostración. Basta con tomar para cada β un cubrimiento $F_{\beta,\delta} \xrightarrow{\tau_{\beta,\delta}} D_\beta$ tal que las flechas $\mu_\beta \tau_{\beta,\delta}$ se factoricen por alguna λ_α (condición 2). El conjunto de todas las flechas $F_{\beta,\delta} \xrightarrow{\mu_\beta \tau_{\beta,\delta}} C$ es un cubrimiento (por la condición 3) que refina a (λ_α) y a (μ_β) . \square

3.6 Definición. Un haz sobre un sitio \mathcal{C} es un prehaz que cree que los cubrimientos son familias epimorfas estrictas. Es decir: para todo cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y toda familia $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ compatible, existe una única $C \xrightarrow{\tau} F$ tal que $\tau \lambda_\alpha = \tau_\alpha$.

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
 \searrow \tau_\alpha & & \downarrow \exists! \\
 & & F
 \end{array}$$

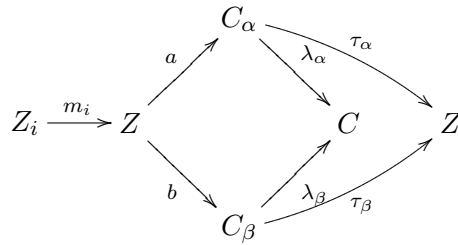
Llamaremos $\tilde{\mathcal{C}}$ a la categoría de haces sobre el sitio \mathcal{C} . Se define como la subcategoría plena de $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ cuyos objetos son los haces.

3.7 Observación. Usando que para todo prehaz Z la familia de flechas $D \rightarrow Z$ con $D \in \mathcal{C}$ es epimorfa (lema de Yoneda 2) se obtiene que para que valga la compatibilidad de una familia $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ con un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ es suficiente testearla solamente para objetos $D \in \mathcal{C}$.

3.2. Construcción del funtor “haz asociado”

Exhibiremos a continuación una construcción del funtor $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{\#} \tilde{\mathcal{C}}$ adjunto a izquierda de la inclusión. Asigna a cada prehaz el haz de alguna manera más cercano. La exposición resulta novedosa por ser “en un solo paso”, a diferencia de la tradicional que requiere la aplicación de un mismo funtor dos veces para obtener $\#$. La nueva idea introducida es la de las familias “localmente compatibles”. No es preciso entender los detalles de esta construcción para continuar la lectura.

3.8 Definición. Sea $F \in \mathcal{E}ns^{C^{op}}$. Una familia $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ se dice localmente compatible con un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ si para todo par de flechas $Z \xrightarrow{a} C_\alpha$, $Z \xrightarrow{b} C_\beta$ tales que $\lambda_\alpha a = \lambda_\beta b$, existe un cubrimiento de Z , $Z_i \xrightarrow{m_i} Z$ tal que $\tau_\alpha a m_i = \tau_\beta b m_i$.

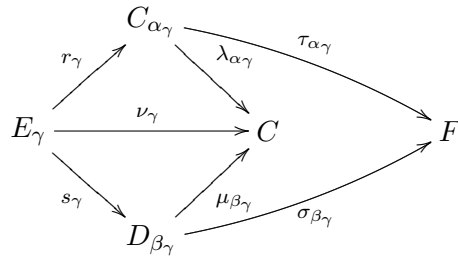


3.9 Definición. Definimos $\#F(C)$ como el conjunto de familias $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ localmente compatibles con algún cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$, cocientado por una relación de equivalencia.

Dos tales familias están relacionadas si existe un cubrimiento de C que refina a ambos cubrimientos de manera que se igualan las dos familias. Más precisamente:



si existe un cubrimiento $E_\gamma \xrightarrow{\nu_\gamma} C$ tal que el siguiente diagrama conmuta para todo γ .

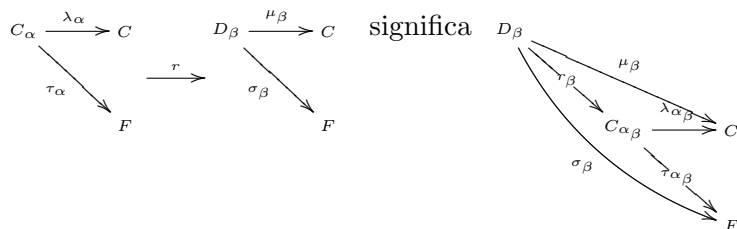


3.10 Proposición. La relación recién definida es de equivalencia.

Demostración. Reconstruiremos el conjunto $\#F(C)$ como un colímite en $\mathcal{E}ns$. Como categoría de índices tomamos Λ_C^F , cuyos objetos son los cubrimientos de C junto con una familia localmente compatible: $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y las flechas son los refinamientos que respetan

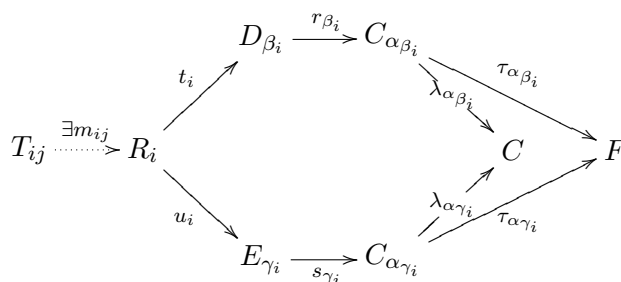


las familias localmente compatibles:



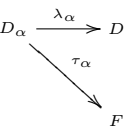
El functor $\Lambda_C^F \rightarrow \mathcal{E}ns$ es simplemente el singleton en cada objeto con las únicas flechas posibles. Mostraremos que la categoría de índices tiene la propiedad PS1. Sabiendo esto, es claro que la relación definida anteriormente no es otra cosa que la relación de equivalencia propia de este colímite.

Tenemos $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y dos cubrimientos que refinan a (λ_α) : $D_\beta \rightarrow C$ y $E_\gamma \rightarrow C$ que inducen sendas flechas de Λ_C^F . Tomando un cubrimiento $R_i \rightarrow C$ que refine a estos dos últimos, obtenemos:

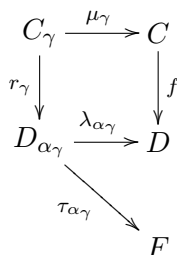


Como $\lambda_{\alpha\beta_i} r_{\beta_i} t_i = \lambda_{\alpha\gamma_i} s_{\gamma_i} u_i$ y (τ_α) es una familia localmente compatible, podemos cubrir cada R_i con $(m_{ij})_j$ de manera que $\tau_{\alpha\beta_i} r_{\beta_i} t_i m_{ij} = \tau_{\alpha\gamma_i} s_{\gamma_i} u_i m_{ij}$. □

3.11 Definición. Definamos $\#F$ sobre las flechas de \mathcal{C} .

Sea $C \xrightarrow{f} D$ una flecha en \mathcal{C} . Debemos definir una flecha $\#F(D) \rightarrow \#F(C)$. Tomemos un elemento cualquiera $\tau \in \#F(D)$, supongámoslo representado por $D_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} D$.  Con-

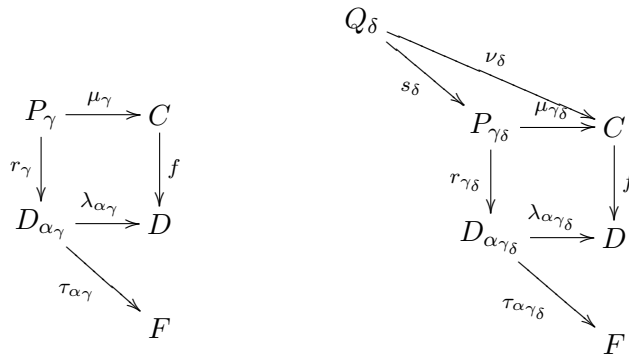
sideramos un cubrimiento de $C_\gamma \xrightarrow{\mu_\gamma} C$ tal que $(f\mu_\gamma)$ se factorice por (λ_α) .



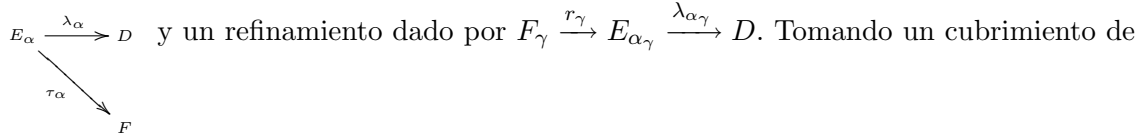
Definimos $\#F(f)(\tau)$ como la clase correspondiente a la familia $(\tau_{\alpha_\gamma} r_\gamma)$ con el cubrimiento (μ_γ) . Es fácil ver que es localmente compatible.

A continuación probamos la buena definición. En primer lugar, que la definición no depende de la elección del cubrimiento de C (para un mismo representante de τ) y luego que no depende de la elección del representante de τ .

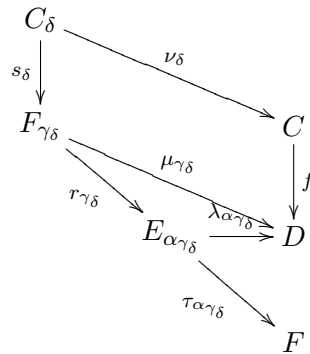
Demostración. Debemos mostrar que para dos cubrimientos de C que se factorizan por (λ_α) se obtienen familias equivalentes. Considerando un cubrimiento que refina a ambos, nos basta con probar que cada familia es equivalente a la familia refinada. Pero tal equivalencia está provocada por el mismo refinamiento, como se puede ver en los siguientes diagramas.



Probemos ahora que eligiendo distintos representantes de τ se obtiene igual resultado. Basta con chequearlo para los generadores de la relación de equivalencia. Sean entonces



C que se factorice por $\mu_\gamma = \lambda_{\alpha_\gamma} r_\gamma$ obtenemos:



El mismo cubrimiento se factoriza también por (λ_α) . □

3.12 Observación. $\#F$ es un funtor. Es trivial que preserva identidades. El siguiente

diagrama muestra que también preserva la composición.

$$\begin{array}{ccc}
 C_\delta & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow f \\
 D_{\gamma_\delta} & \longrightarrow & D \\
 \downarrow & & \downarrow g \\
 E_{\alpha_{\gamma_\delta}} & \longrightarrow & E \\
 & \searrow \tau_{\alpha_{\gamma_\delta}} & \\
 & & F
 \end{array}$$

3.13 Observación. Se tiene una transformación natural $F \xrightarrow{k} \#F$ asignándole a cada elemento $C \xrightarrow{a} F$ de FC la clase de $c \xrightarrow{id} c$ en $\#F(C)$.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{id} & c \\
 & \searrow a & \\
 & & F
 \end{array}$$

Demostración. La naturalidad, expresada a la izquierda, la da el diagrama de la derecha.

$$\begin{array}{ccc}
 FC & \xrightarrow{k_C} & \#F(C) \\
 Ff \uparrow & & \uparrow \#F(f) \\
 FD & \xrightarrow{k_D} & \#F(D)
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{id} & C \\
 f \downarrow & & \downarrow f \\
 D & \xrightarrow{id} & D \\
 & \searrow a & \\
 & & F
 \end{array}
 \quad \square$$

3.14 Lema. Sea Z un objeto de \mathcal{C} y $Z \xrightarrow[a]{a} F \xrightarrow{k} \#F$ tales que $ka = kb$. Entonces existe un cubrimiento $Z_i \xrightarrow{\lambda_i} Z$ tal que $a\lambda_i = b\lambda_i$ para todo i .

Demostración. La hipótesis es que $z \xrightarrow{id} z \xrightarrow[a]{a} F \xrightarrow{k} \#F \sim z \xrightarrow{id} z \xrightarrow[b]{b} F \xrightarrow{k} \#F$. Es decir que existe un refinamiento del cubrimiento (id_Z) que iguala a a y a b . Pero un refinamiento tal debe estar dado por un cubrimiento de $Z_i \xrightarrow{\lambda_i} Z$ factorizado trivialmente por (id_Z) . Luego, $a\lambda_i = b\lambda_i$. \square

3.15 Lema. Sea $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ un cubrimiento. Supongamos que para cada α se tiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
 \tau_\alpha \downarrow & & \downarrow \tau \\
 F & \xrightarrow{k} & \#F
 \end{array}$$

Los diagramas son conmutativos si y sólo si (τ_α) es una familia localmente compatible con (λ_α) y $(\tau_\alpha, \lambda_\alpha)$ es un representante de τ .

Demostración. Supongamos primero que (τ_α) es una familia localmente compatible con (λ_α) y $(\tau_\alpha, \lambda_\alpha)$ es un representante de τ . Pensando $k\tau_\alpha$ como elemento de $\#F(C_\alpha)$, podemos elegir como representante a $C_\alpha \xrightarrow{id} C_\alpha$. Para $\tau\lambda_\alpha$ obtenemos el mismo representante:

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha & \xrightarrow{id} & C_\alpha \\
 \tau_\alpha \searrow & & \downarrow \lambda_\alpha \\
 & & C \\
 & & \tau_\alpha \searrow \\
 & & F
 \end{array}$$

Por lo tanto $k\tau_\alpha = \tau\lambda_\alpha$.

Ahora supongamos que los diagramas conmutan. Que (τ_α) es localmente compatible con (λ_α) es consecuencia inmediata del lema anterior, 3.14.

Para ver que $(\tau_\alpha, \lambda_\alpha)$ es un representante de τ , consideremos un representante cualquiera de τ , $(\sigma_\gamma, \mu_\gamma)$. Gracias a la existencia de refinamientos podemos suponer que (μ_γ) refina a (λ_α) .

$$\begin{array}{ccccc}
 D_\gamma & & & & \\
 \sigma_\gamma \searrow & & \mu_\gamma \searrow & & \\
 & & C_{\alpha_\gamma} & \xrightarrow{\lambda_{\alpha_\gamma}} & C \\
 & & \downarrow \tau_{\alpha_\gamma} & & \downarrow \tau \\
 & & F & \xrightarrow{k} & \#F
 \end{array}$$

El cuadrilátero exterior conmuta por la otra implicación de este lema. Usando también que el cuadrado conmuta, se obtiene $k\sigma_\gamma = k\tau_{\alpha_\gamma}r_\gamma$. Por el lema 3.14 las flechas σ_γ y $\tau_{\alpha_\gamma}r_\gamma$ se igualan localmente en un cubrimiento de D_γ . Estos cubrimientos inducen un cubrimiento de C que refina tanto a (μ_γ) como a (λ_α) e iguala las familias correspondientes (σ_γ) y (τ_α) . \square

3.16 Proposición. $\#F$ es un haz.

Demostración. Probemos primero que $\#F$ es un monoprehaz, es decir que se cumple la unicidad de la flecha en la definición de haz. Esto equivale a que para todo cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y todo par de flechas $C \xrightarrow[a]{b} \#F$ tal que $a\lambda_\alpha = b\lambda_\alpha$, valga $a = b$ ($\#F$ cree que los cubrimientos son familias epimorfos).

Suponiendo entonces $a\lambda_\alpha = b\lambda_\alpha$ elijamos representantes para a y para b pensados como elementos de $\#F(C)$. Tomando un cubrimiento que refina a los cubrimientos correspondientes a dichos representantes, pero que también refina a (λ_α) , obtenemos

$$\begin{array}{ccc}
D_\gamma & \xrightarrow{\mu_\gamma} & C \\
\tau_\gamma \downarrow & \sigma_\gamma & \downarrow a \\
F & \xrightarrow{k} & \#F
\end{array}$$

con $a\mu_\gamma = b\mu_\gamma$. Gracias al lema 3.15, $k\tau_\gamma = a\mu_\gamma$ y $k\sigma_\gamma = b\mu_\gamma$. Luego, $k\tau_\gamma = k\sigma_\gamma$. Aplicando el lema 3.14 podemos cubrir cada D_γ igualando a τ_γ y a σ_γ localmente.

$$\begin{array}{ccccc}
D_{\gamma i} & \xrightarrow{\nu_{\gamma i}} & D_\gamma & \xrightarrow{\mu_\gamma} & C \\
\rho_{\gamma i} \searrow & & \tau_\gamma \downarrow & \sigma_\gamma & \downarrow a \\
& & F & \xrightarrow{k} & \#F
\end{array}$$

Aplicando la otra implicación del lema 3.15 hayamos un representante común a a y a b , o sea que $a = b$.

Pasemos a demostrar la existencia de la flecha de la definición de haz. Sea $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} \#F$ una familia compatible con el cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$. Tomando representantes para cada flecha τ_α , conseguimos:

$$\begin{array}{ccccc}
C_{\alpha\gamma} & \xrightarrow{\mu_{\alpha\gamma}} & C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
\tau_{\alpha\gamma} \downarrow & & \tau_\alpha \searrow & & \downarrow \tau \\
F & \xrightarrow{k} & \#F & & \#F
\end{array}$$

con $\tau_\alpha\mu_{\alpha\gamma} = k\tau_{\alpha\gamma}$. Se comprueba fácilmente que la familia $(\tau_{\alpha\gamma})$ es localmente compatible con el cubrimiento $\lambda_\alpha\mu_{\alpha\gamma}$ usando que (τ_α) es compatible con (λ_α) , que $\tau_\alpha\mu_{\alpha\gamma} = k\tau_{\alpha\gamma}$ y el lema 3.14, en ese orden.

De esta forma, $(\tau_{\alpha\gamma})$ induce un $C \xrightarrow{\tau} \#F$ tal que el rectángulo conmuta. Como consecuencia, $\tau\lambda_\alpha\mu_{\alpha\gamma} = \tau_\alpha\mu_{\alpha\gamma}$. Como $\#F$ es monoprehaz podemos cancelar $\mu_{\alpha\gamma}$ en la última igualdad, y eso completa la demostración. \square

3.17 Observación. $\# : \mathcal{E}ns^{C^{op}} \rightarrow \tilde{\mathcal{C}}$ es un funtor.

Demostración. Si $F \xrightarrow{t} G$ es una flecha de $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$, definimos $\#F(C) \xrightarrow{\#t_D} \#G(C)$ como sigue. A la clase de $c_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ le asignamos la clase de $c_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$

$$\begin{array}{ccc}
c_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C & & c_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C \\
\tau_\alpha \searrow & & \tau_\alpha \searrow \\
F & & F \xrightarrow{t} G
\end{array}$$

Es inmediato que $(t\tau_\alpha)$ es localmente compatible con (λ_α) y que la función está bien definida (no varía al tomar un refinamiento). La naturalidad es simplemente la asociatividad de la composición en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 D_\gamma & \xrightarrow{\mu_\gamma} & D \\
 r_\gamma \downarrow & & \downarrow f \\
 C_{\alpha_\gamma} & \xrightarrow{\lambda_{\alpha_\gamma}} & C \\
 & \searrow \tau_\alpha & \\
 & & F \xrightarrow{t} G
 \end{array}$$

□

3.18 Observación. k es una transformación natural $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow[\text{i\#}]{id} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ (i es la in-

clusión de $\tilde{\mathcal{C}}$ en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$).

Demostración. Por la densidad de \mathcal{C} en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$, es suficiente probar que para toda $C \xrightarrow{\alpha} F$ ($C \in \mathcal{C}$) vale $\#tk\alpha = kt\alpha$.

$$\begin{array}{ccc}
 & & C \\
 & \searrow \alpha & \\
 & & F \xrightarrow{k} \#F \\
 & & \downarrow \#t \\
 & & G \xrightarrow{k} \#G
 \end{array}$$

Pero ambos elementos están dados por

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{id} & C \\
 & \searrow \alpha & \\
 & & F \xrightarrow{t} G
 \end{array}$$

□

Pasamos a demostrar que vale la adjunción.

3.19 Observación. Si $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ es un cubrimiento, $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ es una familia localmente compatible y F un monorehaz, entonces (τ_α) es compatible con (λ_α) .

Demostración. Es inmediato. □

3.20 Lema. Si F es un haz, $F \xrightarrow{k} \#F$ es un isomorfismo.

Demostración. Veamos que es mono. Partiendo de $C \xrightarrow[a]{b} F \xrightarrow{k} \#F$ con $ka = kb$, por el lema 3.14, a y b se igualan localmente en algún cubrimiento de C , pero al ser F un haz, $a = b$.

Veamos que es suryectiva en cada lugar. Sea $C \xrightarrow{\tau} \#F$ un elemento de $\#F(C)$. Eligiendo un representante podemos armar los cuadrados conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
\tau_\alpha \downarrow & \swarrow \sigma & \downarrow \tau \\
F & \xrightarrow{k} & \#F
\end{array}$$

(τ_α) es localmente compatible con (λ_α) pero como F es un haz, es compatible. Por lo tanto, existe una $C \xrightarrow{\sigma} F$ tal que $\sigma\lambda_\alpha = \tau_\alpha$. Componiendo con k queda $\tau\lambda_\alpha = k\sigma\lambda_\alpha$. Como $\#F$ es un haz, se puede cancelar λ_α . \square

3.21 Proposición. *El funtor $\#$ es adjunto a izquierda de la inclusión.*

Demostración. La adjunción está dada por k como unidad. Sólo debemos probar que para todo prehaz F y todo haz G , la flecha $F \xrightarrow{k} \#F$ induce una biyección $[\#F, G] \xrightarrow{k^*} [F, G]$. Es decir que para toda flecha $F \xrightarrow{m} G$ existe una única $\#F \xrightarrow{l} G$ tal que $lk = m$.

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{k} & \#F \\
& \searrow m & \downarrow l \\
& & G
\end{array}$$

La existencia es consecuencia inmediata del lema anterior, como muestra la siguiente figura.

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{k_F} & \#F \\
m \downarrow & & \downarrow \#m \\
G & \xrightarrow{k_G} & \#G \\
& \xleftarrow{k_G^{-1}} &
\end{array}$$

Veamos la unicidad. Sean $\#F \xrightarrow{a} G$ y $\#F \xrightarrow{b} G$ tales que $ak = bk = m$. Para cada $C \xrightarrow{\tau} \#F$ podemos armar

$$\begin{array}{ccc}
C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
\tau_\alpha \downarrow & & \downarrow \tau \\
F & \xrightarrow{k} & \#F \\
& \searrow m & \downarrow a \downarrow b \\
& & G
\end{array}$$

de donde sale $a\tau\lambda_\alpha = b\tau\lambda_\alpha$. Como G es haz, $a\tau = b\tau$. Dado que las flechas $C \xrightarrow{\tau} \#F$ forman una familia epimorfa, $a = b$. \square

Por último, mostraremos que $\#$ preserva límites finitos. Más adelante veremos que esta propiedad es de gran importancia.

3.22 Lema. Sean F_1, \dots, F_n prehaces y $C \xrightarrow[r_i]{s_i} F_i \xrightarrow{k_{F_i}} \#F_i$.

Existe un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ tal que $r_i \lambda_\alpha = s_i \lambda_\alpha$ para todo i .

Demostración. Para $n = 1$ es el lema 3.14. Para el paso inductivo se usa que composición de cubrimientos es cubrimiento. \square

El siguiente lema constituye la idea principal de la demostración de la proposición que le sigue.

3.23 Lema. Sea (F_i) un diagrama finito de prehaces y $C \xrightarrow{t_i} \#F_i$ un cono con $C \in \mathcal{C}$. Existe un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ junto con flechas $C_\alpha \xrightarrow{\tau_{i,\alpha}} F_i$ tales que

$$\begin{array}{ccc} F_i & \xrightarrow{k_i} & \#F_i \\ \tau_{i,\alpha} \uparrow & & \uparrow t_i \\ C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \end{array}$$

conmuta y para cada α las flechas $\tau_{i,\alpha}$ dan un cono.

Demostración. Sabemos que el lema vale para un diagrama con un solo objeto y sin flechas (lema 3.15). Para un diagrama finito sin flechas, podemos tomar cubrimientos que sirvan independientemente para cada F_i y luego se toma un cubrimiento que refine a todos (propiedad F1).

Para un diagrama finito cualquiera, primero tomamos $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y $(\tau_{i,\alpha})$ como si no hubiera flechas (como recién) obteniendo cuadrados conmutativos $k_i \tau_{i,\alpha} = t_i \lambda_\alpha$, pero sin que las flechas $(\tau_{i,\alpha})$ den necesariamente conos. Ahora la estrategia es, por cada flecha $F_i \xrightarrow{m} F_j$ del diagrama, refinar el cubrimiento de manera que las nuevas $(\tau_{i,\alpha})$ cumplan $\tau_{j,\alpha} = m \tau_{i,\alpha}$. En principio tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} & & F_j & \xrightarrow{k_j} & \#F_j \\ & m \nearrow & & & \nearrow \#m \\ F_i & \xrightarrow{k_i} & \#F_i & & \\ \tau_{i,\alpha} \uparrow & \tau_{j,\alpha} \nearrow & & & \nearrow t_j \\ C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C & & \\ & & & & \uparrow t_i \end{array}$$

$$k_j m \tau_{i,\alpha} = \#m k_i \tau_{i,\alpha} = \#m t_i \lambda_\alpha = t_j \lambda_\alpha = t_j \lambda_\alpha = k_j \tau_{j,\alpha}$$

Por el lema anterior podemos encontrar un cubrimiento para cada C_α tal que se igualan $m \tau_{i,\alpha}$ y $\tau_{j,\alpha}$. Componiéndolos con (λ_α) obtenemos el cubrimiento que deseábamos. Este proceso lo podemos repetir para todas las flechas. \square

3.24 Proposición. *El functor $\#$ preserva los límites finitos.*

Demostración. Sea $F \xrightarrow{p_i} F_i$ un límite finito en $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$. Basta con chequear la propiedad universal de $\#F \xrightarrow{\#p_i} \#F_i$ para los conos $C \xrightarrow{t_i} \#F_i$ con $C \in \mathcal{C}$.

Veamos la unicidad de la P.U.:

Sean $C \xrightarrow[r]{s} \#F$ dos flechas tales que $\#p_i r = \#p_i s = t_i$. Por el lema anterior, podemos conseguir un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ junto con flechas r_α, s_α y $t_{i,\alpha}$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_i & \xrightarrow{k_i} & \#F_i \\
 & p_i \nearrow & \uparrow & & \nearrow \#p_i \\
 F & \xrightarrow{k} & \#F & & \uparrow t_i \\
 & \nwarrow s_\alpha & \nwarrow t_{i,\alpha} & & \nwarrow s \\
 & r_\alpha \swarrow & \swarrow r & & \\
 & & C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C
 \end{array}$$

tales que $kr_\alpha = r\lambda_\alpha$, $ks_\alpha = s\lambda_\alpha$, $k_it_{i,\alpha} = t_i\lambda_\alpha$, y además $(t_{i,\alpha})$ son conos en i , $p_i r_\alpha = t_{i,\alpha}$ y $p_i s_\alpha = t_{i,\alpha}$ (en este caso el diagrama en cuestión para aplicar el lema se forma con el diagrama (F_i) más dos objetos -ambos iguales a F - y las flechas p_i dos veces). Como F es límite, $r_\alpha = s_\alpha$, de donde $r = s$.

La existencia:

Sea $C \xrightarrow{t_i} \#F_i$ un cono. Por el lema anterior conseguimos un cubrimiento $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ y conos $C_\alpha \xrightarrow{t_{i,\alpha}} F_i$ tales que $k_it_{i,\alpha} = t_i\lambda_\alpha$.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & F_i & \xrightarrow{k_i} & \#F_i \\
 & p_i \nearrow & \uparrow & & \nearrow \#p_i \\
 F & \xrightarrow{k} & \#F & & \uparrow t_i \\
 & \nwarrow t_{i,\alpha} & \nwarrow t_{i,\alpha} & & \nwarrow s \\
 & \bar{t}_\alpha \swarrow & \swarrow \lambda_\alpha & & \\
 & & C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C
 \end{array}$$

Las flechas \bar{t}_α aparecen por la propiedad universal de F . Se comprueba que $(k\bar{t}_\alpha)$ es compatible con λ_α usando la unicidad de la P.U. recién probada. Por lo tanto existe una $C \xrightarrow{\bar{t}} \#F$ tal que $t\lambda_\alpha = k\bar{t}_\alpha$.

Siguiendo el diagrama se comprueba que $t_i\lambda_\alpha = \#p_it\lambda_\alpha$ de donde, por ser los $\#F_i$ haces, $\#p_it = t_i$.

□

3.3. El functor $\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$

$\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$ se define como la composición $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{E}ns^{C^{op}} \xrightarrow{\#} \tilde{\mathcal{C}}$.

3.25 Proposición. $\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$ preserva límites finitos y manda cubrimientos a familias epimorfias estrictas.

Demostración. ϵ preserva límites finitos porque tanto h como $\#$ los preservan.

Sea $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ un cubrimiento, y $\#C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} F$ una familia compatible con $\#C_\alpha \xrightarrow{\epsilon(\lambda_\alpha)} \#C$

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
 k \downarrow & & \downarrow k \\
 \#C_\alpha & \xrightarrow{\epsilon(\lambda_\alpha)} & \#C \\
 & \searrow \tau_\alpha & \\
 & & F
 \end{array}$$

$(\tau_\alpha k)$ es compatible con (λ_α) (es inmediato usando que el rectángulo conmuta y que (τ_α) es compatible). Como F es un haz, $\exists! C \xrightarrow{t} F$ tal que $t\lambda_\alpha = \tau_\alpha k$. Como $\#$ es adjunto a izquierda $\exists! \#C \xrightarrow{m} F$ tal que $mk = t$.

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C \\
 k \downarrow & & \downarrow k \\
 \#C_\alpha & \xrightarrow{\epsilon(\lambda_\alpha)} & \#C \\
 & \searrow \tau_\alpha & \swarrow t \\
 & & F \\
 & & \swarrow m
 \end{array}$$

Para ver que $m\epsilon(\lambda_\alpha) = \tau_\alpha$ se comprueba sin dificultad que $m\epsilon(\lambda_\alpha)k = \tau_\alpha k$ y luego se puede cancelar k por la adjunción. La unicidad de m : si l también hace conmutar el triángulo, entonces componiendo con k se llega a $lk\lambda_\alpha = t\lambda_\alpha$. Por la unicidad en la propiedad de haz para F , $lk = t$, de donde $l = m$. \square

Nota. Vale la recíproca de la proposición anterior: si $(\epsilon\lambda_\alpha)$ es epimorfa estricta entonces (λ_α) es un cubrimiento.

3.26 Proposición. El funtor ϵ es denso.

Demostración. Como las flechas $C \xrightarrow{\alpha} F$ forman una familia epimorfa estricta en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ para todo haz F (lema de Yoneda II) y $\#$ preserva familias epimorfias estrictas (por preservar colímites y límites finitos), las flechas $\#C \xrightarrow{\#\alpha} F$ forman una familia epimorfa estricta. \square

3.27 Proposición. Sea \mathcal{C} un sitio. Son equivalentes:

- Los funtores representables son haces.
- Los cubrimientos son familias epimorfias estrictas en \mathcal{C} .
- El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$ es plenamente fiel.

3.28 Observación. Dada una categoría \mathcal{C} y un conjunto cualquiera de prehaces, es posible definir la topología más fina tal que esos prehaces son haces. Si en particular consideramos los prehaces representables, se obtiene la “topología canónica”. Si \mathcal{C} tiene límites finitos la topología canónica está formada por las familias epimorfos estrictas universales.

La proposición anterior describe las topologías menos finas que la canónica, por lo que son llamadas “topologías subcanónicas”.

3.4. Propiedades de exactitud

Estudiaremos en esta sección algunas propiedades importantes de la categoría de los conjuntos que son también heredadas por las categorías de prehaces y de haces sobre un sitio.

A continuación generalizamos la definición de relación de equivalencia para una categoría cualquiera. Esta noción únicamente será utilizada para enunciar el teorema de Giraud. No incluimos algunas demostraciones pero salen todas sin dificultad.

Para empezar, podemos extender la definición de relación de equivalencia en $\mathcal{E}ns$ a todo monomorfismo $R \rightarrow A \times A$ cuya imagen sea una relación de equivalencia.

3.29 Proposición. Sea $R \xrightarrow{q} A \times A$ una flecha en $\mathcal{E}ns$. Son equivalentes:

- 1) $R \xrightarrow{q} A \times A$ es una relación de equivalencia.
- 2) $[B, R] \xrightarrow{q_*} [B, A \times A] \simeq [B, A] \times [B, A]$ es una relación de equivalencia para todo conjunto B .

Idea para la demostración: Ambas afirmaciones son equivalentes a $[*, R] \xrightarrow{q_*} [*, A] \times [*, A]$ es una relación de equivalencia.

3.30 Definición. Una flecha $R \xrightarrow{q=(q_1, q_2)} A \times A$ en una categoría \mathcal{C} es una relación de equivalencia si para todo $B \in \mathcal{C}$, $[B, R] \xrightarrow{q_*} [B, A] \times [B, A]$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}ns$.

3.31 Lema. En una categoría con un conjunto de generadores, $R \xrightarrow{q} A \times A$ es una relación de equivalencia si y sólo si $[C, R] \xrightarrow{q_*} [C, A] \times [C, A]$ es una relación de equivalencia para todo generador C .

3.32 Corolario. Sean $F, G \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$.

$F \xrightarrow{q} G \times G$ es una relación de equivalencia si y sólo si para todo $C \in \mathcal{C}$, $FC \xrightarrow{q_C} GC \times GC$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{E}ns$.

Demostración. Es consecuencia del lema anterior y los lemas de Yoneda. □

3.33 Observación. Si se tiene un pull-back de la forma:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q_1} & A \\ q_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array}$$

entonces $q = (q_1, q_2)$ es una relación de equivalencia.

3.34 Definición. Una relación de equivalencia $R \xrightarrow{q} A \times A$ se dice efectiva si existe un morfismo $A \xrightarrow{\pi} Q$ tal que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q_1} & A \\ q_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\ A & \xrightarrow{\pi} & Q \end{array}$$

es un pull-back y un push-out (o, equivalentemente, el cuadrado es un pull-back y π es coegalizador de q_1 y q_2). En este caso, se dice que la flecha $A \xrightarrow{\pi} Q$ es el cociente de la relación y resulta ser un epimorfismo estricto.

Si π es un epimorfismo estricto universal (i.e.: al cambiar de base se obtiene un epimorfismo estricto) entonces se dice que la relación de equivalencia es efectiva y universal.

3.35 Definición. Un objeto inicial 0 se dice vacío si toda flecha $A \rightarrow 0$ es un isomorfismo. Un coproducto $X = \coprod X_i$ se dice disjunto si los morfismos de inclusión son monomorfismos y los pull-backs $X_i \times_X X_j$ ($i \neq j$) son un objeto inicial vacío.

3.36 Proposición. La categoría $\mathcal{E}ns$ posee las siguientes propiedades:

- (1) Tiene todos los límites y colímites pequeños.
- (2) Los colímites son universales.
- (3) Las familias epimorfas son estrictas y universales.
- (4) Las relaciones de equivalencia son efectivas y universales.
- (5) Colímites filtrantes conmutan con límites finitos.
- (6) El objeto inicial es vacío y los coproductos son disjuntos.
- (7) Tiene un conjunto pequeño de generadores.

Demostración. El punto (1) ya fue tratado. (2) significa que para cada colímite $C_\alpha \xrightarrow{j_\alpha} C$ y cada flecha $D \xrightarrow{f} C$, los productos fibrados

$$\begin{array}{ccc} D_\alpha & \longrightarrow & C_\alpha \\ \downarrow \lambda_\alpha & & \downarrow j_\alpha \\ D & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

dan un colímite $D_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} D$. La estructura de cono se obtiene naturalmente usando la propiedad universal del producto fibrado. La propiedad universal de (λ_α) se chequea usando la caracterización del colímite $C = \coprod C_\alpha / \sim$ y la caracterización del pull-back: $D_\alpha = \{(c, d) \in C_\alpha \times D / f(d) = \bar{c}\}$.

En cuanto a (3), ya vimos que las familias epimorfas son estrictas. La universalidad (son estables por cambio de base) es consecuencia de la universalidad de los colímites, ya que, como vimos, las familias epimorfas pueden ser expresadas como un colímite.

Dada una relación de equivalencia $R \subset A \times A$, el cociente usual $A \xrightarrow{\pi} A / \sim$ es un coegalizador para $R \xrightarrow[p_2]{p_1} A$ y hace que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{p_1} & A \\
p_2 \downarrow & & \downarrow \pi \\
A & \xrightarrow{\pi} & A/\sim
\end{array}$$

sea un pull-back.

(5) ya fue probado. El punto (6) es evidente.

Por último, el singleton genera $\mathcal{E}ns$. \square

3.37 Proposición. *La categoría $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$ posee las siete propiedades anteriores.*

Demostración. Las primeras seis propiedades se deducen inmediatamente usando que los límites y colímites en $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$ se calculan lugar a lugar y el lema 2.20. El lema de Yoneda II dice que los representables forman un conjunto de generadores de $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$. \square

La siguiente proposición describe los límites y colímites en $\tilde{\mathcal{C}}$ en términos de los de $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$.

3.38 Proposición. *Dado un diagrama de haces (F_α) , si $F_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} F$ es el colímite en $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$ entonces $F_\alpha \xrightarrow{k_F \lambda_\alpha} \#F$ es el colímite en $\tilde{\mathcal{C}}$.*

Si tomamos el límite $F \xrightarrow{p_i} F_i$ en $\mathcal{E}ns^{C^{op}}$ de un diagrama de haces cualquiera, entonces F resulta ser un haz y también es el límite en $\tilde{\mathcal{C}}$.

Demostración. La primera afirmación sale aplicando el funtor $\#$, que preserva colímites y es isomorfo a la identidad sobre los haces.

Para la segunda, sólo utilizaremos que $\tilde{\mathcal{C}}$ es subcategoría plena y la adjunción $\# \dashv i$. Veamos que $F \xrightarrow{k_F} \#F$ es un isomorfismo. Por la adjunción obtenemos \bar{p}_i tales que $\bar{p}_i k = p_i$,

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{p_i} & F_i \\
k \downarrow & \nearrow \rho & \\
\#F & & \bar{p}_i
\end{array}$$

que dan un cono gracias a la naturalidad de la biyección de la adjunción. Por la propiedad universal de F , existe un único ρ tal que $p_i \rho = \bar{p}_i$.

Se deduce que $p_i \rho k = p_i$, de donde $\rho k = id_F$. Por último, de la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc}
F & \xrightarrow{k} & \#F \\
k \downarrow & \nearrow k\rho & \\
\#F & &
\end{array}$$

y la propiedad universal de k se sigue que $k\rho = id_{\#F}$. \square

3.39 Proposición. *Las categorías de haces sobre un sitio pequeño también poseen las siete propiedades de exactitud.*

Demostración. (1) ya lo hemos probado.

(2) sale aplicando el siguiente lema. Si $T \longrightarrow G$ es un pullback de prehaces, entonces

$$\begin{array}{ccc} T & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow k_G \\ F & \longrightarrow & \#G \end{array}$$

F es isomorfo a $\#T$.

(5) es inmediato usando que vale para prehaces, el lema 3.38 y que $\#$ conmuta con límites finitos.

(7) se debe a que los haces de la forma $\#C$ con $C \in \mathcal{C}$ generan (el funtor ϵ es denso).

(4) y (6) no los demostramos. No son triviales pero tampoco presentan grandes complicaciones.

Veamos el punto (3). Sea $F_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} F$ una familia epimorfa de haces. Llamamos J al prehaz imagen (la imagen lugar a lugar). Las f_α se factorizan $F_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} J \xrightarrow{l} F$ donde (s_α) es epimorfa en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ y l es monomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} F_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & F \\ \downarrow s_\alpha & \nearrow l & \uparrow \exists! t \\ J & \xrightarrow{k} & \#J \end{array}$$

t se debe a la adjunción $\# \dashv i$. Como l es monomorfismo, t es monomorfismo (se usa el lema 3.15). (f_α) epimorfa implica t epimorfismo (de haces). Por otra parte, es fácil chequear que ks_α es una familia epimorfa estricta de haces. Luego, basta con chequear que t es isomorfismo. Para ello, veremos que un morfismo de haces que es monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo.

Sea $F \xrightarrow{u} G$ monomorfismo y epimorfismo en $\tilde{\mathcal{C}}$. Consideremos el siguiente pushout en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{u} & G \\ \downarrow u & & \downarrow i_1 \\ G & \xrightarrow{i_2} & H \end{array}$$

Usando que u es monomorfismo de prehaces, se puede ver que el diagrama también es un pullback, pues lo es lugar a lugar. Aplicándole el funtor $\#$ al diagrama obtenemos un cuadrado que es pullback y pushout en $\tilde{\mathcal{C}}$. Como u es epi las identidades nos dan un pushout. Luego, $\#i_1 = \#i_2$ y son isomorfismos. Al ser estables por cambio de base, u resulta isomorfismo. \square

3.5. Definición de topos - Teorema de Giraud

3.40 Definición. Se dice que una categoría es un topos si es equivalente a $\tilde{\mathcal{C}}$ para algún sitio pequeño \mathcal{C} .

El siguiente teorema da otras definiciones equivalentes, entre las que se destaca la segunda.

3.41 Teorema. *Teorema de Giraud.*

Sea \mathcal{E} una categoría. Son equivalentes:

- I) \mathcal{E} es equivalente a la categoría de haces sobre un sitio pequeño.
- II) \mathcal{E} posee las siguientes propiedades:
 - a) Tiene límites finitos.
 - b) Tiene todos los coproductos pequeños y son universales y disjuntos.
 - c) Las relaciones de equivalencia son efectivas y universales.
 - d) Admite un conjunto generador.
- III) Los haces sobre \mathcal{E} con la topología canónica son representables ($\tilde{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}$) y \mathcal{E} posee un conjunto de generadores.
- IV) Existen una categoría pequeña \mathcal{C} y un funtor plenamente fiel $\mathcal{E} \xrightarrow{i} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}op}$ que admite un adjunto a izquierda que preserva límites finitos.

3.42 Observación. Para probar que (II) implica (I) se procede como sigue. Se toma un conjunto de generadores \mathcal{C} con límites finitos (ver lema 3.54) y se le da a \mathcal{C} la topología formada por las familias $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ que son epimorfos estrictos universales en \mathcal{E} . Es fácil comprobar que dichas familias también resultan epimorfos estrictos universales en \mathcal{C} , de modo que obtenemos una topología subcanónica. Se demuestra que $\tilde{\mathcal{C}}$ es equivalente como categoría a \mathcal{E} .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\epsilon} & \tilde{\mathcal{C}} \\ & \searrow \phi & \uparrow \psi \\ & & \mathcal{E} \end{array}$$

Como ϵ es denso, ϕ se obtiene extendiendo la inclusión, mientras que ψ le asigna a cada $E \in \mathcal{E}$ el funtor $[-, E]_{\mathcal{E}}$ restringido a \mathcal{C} , que es un haz.

3.5.1. Algunos ejemplos de topos

3.43 Definición. Sea \mathcal{C} una categoría y X un objeto. Se define \mathcal{C}/X como la categoría cuyos objetos son las flechas $C \xrightarrow{f} X$ en \mathcal{C} y las flechas son los triangulos conmutativos:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{h} & D \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & X \end{array}$$

Por ejemplo, Top/X es la categoría de los espacios topológicos sobre un espacio dado. $\mathcal{E}tal/X$ será la subcategoría plena de Top/X cuyos objetos son los homeomorfismos locales (o espacios etales) sobre X .

Ejemplo. Sea X un espacio topológico. Consideramos la categoría $\mathcal{O}(X)$ de los conjuntos abiertos ordenados por la inclusión. Los cubrimientos abiertos usuales nos dan una topología en el sentido de la definición 3.1. Se define entonces el topos asociado a X : $Top(X) = \widetilde{\mathcal{O}(X)}$.

La construcción de Godement es un funtor $\mathcal{E}ns^{\mathcal{O}(X)^{op}} \xrightarrow{G} \mathcal{E}tal/X$ que, al restringirlo a $Top(X)$ establece una equivalencia de categorías:

$$Top(X) \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{\Gamma} \end{array} \mathcal{E}tal/X$$

Donde Γ es el funtor que asigna el haz de secciones.

$$\Gamma(Y \xrightarrow{f} X)(U) := \{U \xrightarrow{\sigma} X/f\sigma = id_U\}$$

$\mathcal{O}(X)$ tiene límites finitos y los cubrimientos son las familias epimorfias estrictas (son universales). Es decir que la topología considerada es la canónica.

Los topos de la forma $Top(X)$ tienen la siguiente propiedad: los subobjetos⁴ del objeto final forman un conjunto generador.

Esto se debe a que todas las flechas de $\mathcal{O}(X)$ son monomorfismos y el funtor $\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\epsilon} Top(X)$, al preservar límites finitos, induce una biyección entre los abiertos de X y los subobjetos del haz final, biyección que además es un isomorfismo de categorías (ϵ es plenamente fiel). Esta observación motiva que se pueda reconstruir el espacio X a partir de $Top(X)$, lo cual es cierto si y sólo si X es *sobrio*.⁵

Por otra parte, a un espacio topológico X se le puede asociar otro topos, denominado “topos grande de X ”. Como sitio tomamos Top/X donde los cubrimientos son las familias suryectivas $Y_\alpha \xrightarrow{g_\alpha} Y$ tales que las g_α son subespacios con imagen abierta. Dado que no se trata de un sitio pequeño, el topos generado será un \mathcal{V} -topos donde \mathcal{V} es un universo tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$.

Los dos topos asociados a un espacio topológico están fuertemente relacionados.

Ejemplo. Para toda categoría \mathcal{C} , $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ es un topos. Además de verificar las condiciones de exactitud de Giraud, es la categoría de haces sobre \mathcal{C} con la topología indiscreta.

Los topos de la forma $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ se caracterizan por la propiedad de poseer un conjunto de generadores S tales que para todo $X \in S$ el funtor $[X, -]$ preserva epimorfismos y coproductos. Los prehaces representables verifican estas condiciones.

Algunos casos interesantes son $\mathcal{E}ns^{\mathcal{O}(X)^{op}}$, la categoría de conjuntos simpliciales $\mathcal{E}ns^{\Delta^{op}}$ (Δ es la categoría de ordinales finitos con los morfismos de orden), la categoría de los multigrafos dirigidos (tomando \mathcal{C} la categoría con dos objetos y dos flechas entre ellos), $\mathcal{E}ns^G$ donde G es una categoría con un solo elemento. En este último ejemplo, la categoría G se identifica con un monoide (eventualmente un grupo). $\mathcal{E}ns^G$ es la categoría de conjuntos munidos con una acción de G , y las flechas son las funciones que preservan la acción. Se la denomina “topos clasificante de G ”.

⁴En una categoría, los subobjetos de un objeto M dado, son las clases de isomorfismo de los monomorfismos $N \longrightarrow M$. En este caso (pero no en lo que sigue) cometemos el abuso de llamar subobjetos a los objetos con un monomorfismo.

⁵Un espacio topológico se dice sobrio si todo cerrado irreducible es clausura de exactamente un punto. Un cerrado es irreducible si es no vacío y no es unión de dos subconjuntos cerrados propios.

Los espacios Hausdorff, por ejemplo, son sobrios.

Ejemplo. Si \mathcal{E} es un topos y $X \in \mathcal{E}$, \mathcal{E}/X resulta un topos. Se pueden chequear las propiedades de Giraud o bien probar que si \mathcal{C} es un conjunto de generadores que contiene a X , $\mathcal{E}/X \simeq \widetilde{\mathcal{C}/X}$

Ejemplo. Al topos $\mathcal{E}ns$ se lo denomina topos puntual o final. $\mathcal{E}ns$ se puede generar como la categoría de haces sobre el espacio topológico puntual $X = \{*\}$, $\mathcal{O}(X) = \{\phi, \{*\}\}$. Para ver esto hay tener en cuenta que el vacío (o sea ninguna flecha) es un cubrimiento de ϕ . De esta forma, si F es un haz, $F(\phi)$ debe ser un singleton.

La categoría puntual es el topos inicial o vacío, y es equivalente a la categoría de haces sobre el espacio topológico vacío. En realidad cualquier sitio con la topología discreta genera el topos inicial.

3.6. Morfismos geométricos

3.44 Definición. Un morfismo geométrico o morfismo de topos $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ es una terna (f_*, f^*, φ) donde f_* y f^* son funtores $\mathcal{E} \xrightleftharpoons[f^*]{f_*} \mathcal{F}$ tales que $f^* \dashv f_*$, φ es un isomorfismo de adjunción $[f^*C, D] \xrightarrow{\varphi} [C, f_*D]$ y f^* preserva límites finitos.

A f_* se lo llama “imagen directa de f ” y a f^* “imagen inversa”.

Los morfismos geométricos se componen y se tienen morfismos identidad $\mathcal{E} \xrightarrow{id} \mathcal{E}$.

3.45 Definición. Una transformación $\mathcal{E} \xrightarrow[\downarrow \gamma]{f} \mathcal{F}$ entre los morfismos geométricos f y g

es una transformación natural $\mathcal{E} \xrightarrow[\downarrow \gamma]{f_*} \mathcal{F}$.

Equivalentemente se puede definir como una transformación natural de g^* a f^* , ya que se tiene un isomorfismo canónico entre los conjuntos $hom(f_*, g_*)$ y $hom(g^*, f^*)$ (ver [MCL], capítulo IV).

3.46 Observación. Dados dos topos \mathcal{E} y \mathcal{F} se tiene la categoría $[\mathcal{E}, \mathcal{F}]_{TOP}$ en la que los objetos son los morfismos geométricos y los morfismos son las transformaciones recién

definidas. Dado que una transformación natural $\mathcal{F} \xrightarrow[\uparrow \gamma]{f^*} \mathcal{E}$ queda determinada al definirla

en un conjunto pequeño de generadores de \mathcal{F} (lema 2.31), $[f, g]_{[\mathcal{E}, \mathcal{F}]_{TOP}}$ es un conjunto pequeño. Por lo tanto, $[\mathcal{E}, \mathcal{F}]_{TOP}$ es una \mathcal{U} -categoría.

Si consideramos un universo \mathcal{V} tal que $\mathcal{U} \in \mathcal{V}$, los \mathcal{U} -topos son categorías \mathcal{V} -pequeñas, por lo tanto $[\mathcal{E}, \mathcal{F}]_{TOP} \in \mathcal{V}$. Esto dice que los \mathcal{U} -topos forman una \mathcal{V} -categoría. De hecho, forman una \mathcal{V} -2-categoría (que llamaremos TOP), estructura que es más relevante en la práctica. Normalmente interesan los diagramas que conmutan “salvo isomorfismo”. Además, dos topos se consideran esencialmente el mismo, no cuando son isomorfos como categorías, sino cuando son equivalentes.

3.47 Observación. Un morfismo de topos $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ queda determinado, salvo isomorfismo, por cualquiera de los dos funtores f^* y f_* ya que si dos funtores son adjuntos de un mismo functor resultan naturalmente isomorfos (ver [MCL], capítulo IV, sec. 1, cor. 1).

Luego de los ejemplos probaremos que un funtor entre topos $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{E}$ que preserva colímites pequeños posee un adjunto a derecha. Por lo tanto, si además preserva límites finitos es la imagen inversa de un morfismo de topos.

Observación. Las propiedades de exactitud de los topos permiten definir la noción de objeto grupo, anillo, módulo, comódulo, etc. Las propiedades de la imagen inversa de un morfismo de topos garantizan que se preservan las estructuras algebraicas que se definen mediante límites finitos y colímites (además respeta construcciones tales como objetos libres y productos tensoriales), mientras que las imágenes directas preservan sólo aquellas estructuras definidas por límites.

3.6.1. Ejemplos de morfismos geométricos

Ejemplo. Si \mathcal{C} es un sitio, $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow[\#]{i} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ es un morfismo de topos $\tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$.

Ejemplo. Sea $X \xrightarrow{f} Y$ una función continua entre dos espacios topológicos. Tenemos la función $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{O}(X)$. Más adelante veremos que por ser un morfismo entre los sitios nos da un morfismo $Top(X) \xrightarrow{f} Top(Y)$ entre los topos. La imagen directa está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}ns^{\mathcal{O}(X)} &\xrightarrow{f_*} \mathcal{E}ns^{\mathcal{O}(Y)} \\ F &\longmapsto F \circ f^{-1} \end{aligned}$$

que se restringe bien a los haces.

También se puede obtener una definición del morfismo de topos inducido por una función continua en términos de espacios etales, aunque no demostraremos la compatibilidad entre las definiciones. Dado un homeo local $Z \xrightarrow{g} Y$, tomamos el pullback

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \longrightarrow & Z \\ h \downarrow & & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

obteniendo un homeo local h . Esto define el funtor imagen inversa $\mathcal{E}tal/Y \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}tal/X$.

Si tenemos dos funciones continuas $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ se tiene un isomorfismo $Top(g)Top(f) \simeq Top(gf)$, de modo que queda definido un pseudo-functor de la categoría de espacios topológicos a la de topos.

Ahora supongamos que tenemos un morfismo de topos dados por espacios topológicos, $Top(X) \xrightarrow{f} Top(Y)$. La imagen inversa, al preservar límites finitos, preserva subobjetos. Como los representables se identifican con los subobjetos del haz final, existe una única forma de definir un morfismo de orden $\mathcal{O}(Y) \xrightarrow{f^{-1}} \mathcal{O}(X)$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathcal{O}(X) \\
\uparrow & \simeq & \uparrow \\
\mathcal{O}(Y) & \xrightarrow{f^*} & \mathcal{O}(X)
\end{array}$$

Por las propiedades de exactitud de f^* , f^{-1} preserva uniones arbitrarias e intersecciones finitas. Si Y es sobrio, f^{-1} es imagen inversa de una única función continua $X \xrightarrow{f} Y$, que inducirá el morfismo de topos f .

Ejemplo. Sea $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{E}ns$ un morfismo de topos. La imagen inversa debe enviar un objeto final $*$ a un objeto final, y como también preserva las uniones disjuntas, resulta que f^* está unívocamente determinado salvo isomorfismo. Por esta razón $\mathcal{E}ns$ es el topos puntual o final, y a los morfismos de topos $\mathcal{E}ns \rightarrow \mathcal{E}$ se los denomina puntos de \mathcal{E} .

También se puede ver que hay esencialmente un único morfismo de topos $\phi_{\mathcal{E}ns} \rightarrow \mathcal{E}$, donde $\phi_{\mathcal{E}ns}$ es el topos vacío. La imagen directa del “único” objeto debe ser un objeto final. Si hay un morfismo $\mathcal{E} \rightarrow \phi_{\mathcal{E}ns}$, la imagen inversa envía los objetos a objetos finales e iniciales, por lo que \mathcal{E} es también el topos vacío.

Ejemplo. Un functor $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ induce un functor $\mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ que conmuta con límites y colímites pequeños (es consecuencia inmediata de la construcción de límites y colímites lugar a lugar). Por lo tanto, es imagen inversa de un morfismo geométrico $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \rightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}}$.

Ejemplo. Una flecha $X \xrightarrow{f} Y$ en un topos \mathcal{E} induce un morfismo de topos $\mathcal{E}/X \rightarrow \mathcal{E}/Y$ llamado morfismo de localización asociado a f . La imagen inversa está dada por el pull-back tal como en la construcción de $Top(f)$ para espacios etales.

3.6.2. Construcción de un adjunto a derecha

Queremos demostrar el siguiente resultado: sea \mathcal{C} una categoría con colímites pequeños y un conjunto de generadores \mathcal{S} . Si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ preserva colímites, entonces F es adjunto a izquierda de un functor G . Para esto, definiremos G en los objetos como: $GD = \underset{FC \xrightarrow{\gamma} \mathcal{D}}{colim} C$,

dicho de otra forma

$$\Gamma_D^F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$$

$GD := colim \pi$.

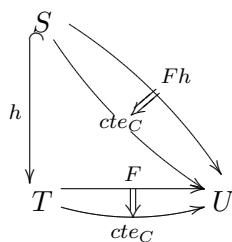
Sin embargo, el diagrama de D a través de F no es en general pequeño, con lo cual no está justificada la existencia de dicho colímite. Para superar este inconveniente, se considera el diagrama mirando sólo objetos de \mathcal{S} . El colímite del diagrama de D a través de $F|_{\mathcal{S}}$ existe por ser pequeño. Esto implica la existencia del colímite grande y la igualdad entre ambos.

Una vez hecho esto, G se puede definir en las flechas sin dificultad, y se probará la adjunción.

3.48 Observación. Dado un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$, un cono desde F es un $D \in \mathcal{D}$ junto con una transformación natural $\mathcal{C} \xrightarrow[\text{cte}_D]{F} \mathcal{D}$. Los conos desde F forman una categoría que

denotaremos $\text{con}(F)$. Una flecha $(D, \eta) \xrightarrow{g} (D', \eta')$ es una flecha $D \xrightarrow{g} D'$ tal que $\eta' = g\eta$. Los colímites de F no son otra cosa que los objetos iniciales de esta categoría.

3.49 Lema. Sea $T \xrightarrow{F} U$ un funtor, $S \xrightarrow{h} T$ un funtor denso. El funtor $\text{con}(F) \xrightarrow{h^*} \text{con}(Fh)$ es un isomorfismo de categorías.



En particular $\text{colim } F$ existe si y sólo si $\text{colim } Fh$ existe, y en caso de existir son iguales.

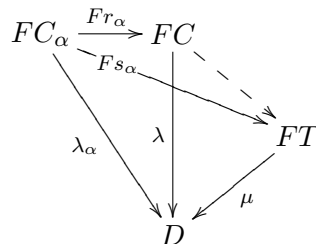
Demostración. El lema 2.31 nos dice que para todo $(C, \eta) \in \text{con}(Fh)$ existe un único $(C, \bar{\eta}) \in \text{con}(F)$ tal que $h^*(C, \bar{\eta}) = (C, \eta)$, es decir, h^* es biyectivo en los objetos.

Veamos que h^* es plenamente fiel. Una flecha entre dos conos $(C, \eta), (D, \gamma) \in \text{con}(Fh)$ está dada por una $C \xrightarrow{g} D$, de manera que $\gamma = g\eta$. Ahora bien, tenemos dos conos $(D, \bar{\gamma}), (D, g\bar{\eta}) \in \text{con}(F)$. El lema 2.31 dice que son iguales por coincidir en su restricción a S . Por lo tanto, g da un morfismo entre los conos $(C, \bar{\eta}) \rightarrow (D, \bar{\gamma}) \in \text{con}(F)$ que es la preimagen buscada. \square

3.50 Lema. Si \mathcal{C} tiene colímites y $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ preserva colímites, entonces para todo $D \in \mathcal{D}$, Γ_D^F tiene colímites que son preservados por $\Gamma_D^F \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}$.

Demostración. Supongamos que tenemos un diagrama en Γ_D^F dado por $(C_\alpha, \lambda_\alpha)$. El mismo nos da un cono hacia D en \mathcal{D} : $FC_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} D$. Debemos construir el colímite en Γ_D^F . Sea $C_\alpha \xrightarrow{r_\alpha} C$ colímite de la proyección del diagrama en \mathcal{C} .

$FC_\alpha \xrightarrow{Fr_\alpha} FC$ es colímite, por lo tanto $\exists! \lambda$ tal que $\lambda Fr_\alpha = \lambda_\alpha$. Probaremos que el cono $(C_\alpha, \lambda_\alpha) \xrightarrow{r_\alpha} (C, \lambda)$ es universal. Sea $(C_\alpha, \lambda_\alpha) \xrightarrow{s_\alpha} (T, \mu)$ otro cono.



Aplicando π a $(C_\alpha, \lambda_\alpha) \xrightarrow{s_\alpha} (T, \mu)$ tenemos un cono $C_\alpha \xrightarrow{s_\alpha} T$. Como C es colímite, $\exists! t(C \xrightarrow{t} T)$ tal que $tr_\alpha = s_\alpha$. Sólo resta ver que $\mu Ft = \lambda$.

$$\mu Ft Fr_\alpha = \mu Fs_\alpha = \lambda_\alpha = \lambda Fr_\alpha. \text{ Como } FC \text{ es colímite, } \mu Ft = \lambda.$$

Por último, π preserva colímites por como se han construido. \square

3.51 Observación. Si construimos el diagrama de D a través de $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ restringido a un conjunto de generadores $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$, obtenemos una subcategoría plena de Γ_D^F .

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_D^{F|\mathcal{S}} & & \\ \downarrow & \searrow \tilde{\pi} & \\ \Gamma_D^F & \xrightarrow{\pi} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} \mathcal{D} \end{array}$$

Además $\Gamma_D^{F|\mathcal{S}}$ es pequeña y genera Γ_D^F .

Aplicando el lema anterior concluimos que colim π existe.

Demostración. Se ve que es una subcategoría plena y pequeña. Resta ver que el funtor $\Gamma_D^{F|\mathcal{S}} \hookrightarrow \Gamma_D^F$ es denso.

Tomamos un $(C, \alpha) \in \Gamma_D^F$. El diagrama a través de la inclusión está dado por los objetos de la forma $(S, \beta) \xrightarrow{g} (C, \alpha)$ con $S \in \mathcal{S}$, $S \xrightarrow{g} C$ tales que

$$\begin{array}{ccc} FS & \xrightarrow{Fg} & FC \\ & \searrow \beta & \downarrow \alpha \\ & & D \end{array}$$

o sea que β queda determinada: $\beta = \alpha Fg$. Esto hace que la proyección a \mathcal{C} del diagrama $(S, \beta) \xrightarrow{g} (C, \alpha)$ sea el diagrama de C a través de la inclusión $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$. C es colímite de este diagrama porque \mathcal{S} es un conjunto de generadores. Luego, por como se construyen los colímites en Γ_D^F , (C, α) es colímite. \square

3.52 Proposición. Sea \mathcal{C} una categoría con colímites pequeños y un conjunto de generadores. Si $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$ preserva colímites, entonces F es adjunto a izquierda de un funtor G .

Demostración. Ya tenemos definido G en los objetos como la proyección sobre \mathcal{C} del diagrama a través de F . En una flecha $D \xrightarrow{t} D'$ se define inmediatamente usando el lema 2.7, ya que t da un funtor entre los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_D^F & & \\ t_* \downarrow & \searrow \pi_D & \\ \Gamma_{D'}^F & \xrightarrow{\pi_{D'}} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} \mathcal{D} \end{array}$$

$$t_*(C, \alpha) = (C, t\alpha)$$

$$FC \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{t} D'$$

La functorialidad es trivial. Probaremos la adjunción mediante la counidad $FG(D) \xrightarrow{\sigma} D$. Para cada flecha $FC \xrightarrow{\gamma} D$ tenemos la inclusión en el colímite $C \xrightarrow{j_\gamma} \text{colim}_{FA \xrightarrow{\alpha} D} A = GD$. Si aplicamos F seguimos teniendo un colímite $FC \xrightarrow{F(j_\gamma)} \text{colim}_{FA \xrightarrow{\alpha} D} FA = FG(D)$. Las flechas $FC \xrightarrow{\gamma} D$ forman un cono hacia D en \mathcal{D} :

$$\begin{array}{ccc} FC & & \\ \downarrow F(j_\gamma) & \searrow \gamma & \\ FG(D) = \text{colim}_{FA \xrightarrow{\alpha} D} FA & \xrightarrow{\exists! \sigma} & D \end{array}$$

Existe un único σ tal que $\sigma F(j_\gamma) = \gamma$. Esto ya prueba que para cada flecha $FC \xrightarrow{\gamma} D$ existe una flecha $C \xrightarrow{t} G(D)$ tal que $\sigma Ft = \gamma$, pero debemos probar la unicidad.

La clave está en que $(GD, \sigma) \in \Gamma_D^F$. Para toda $FC \xrightarrow{\gamma} D$, resulta que j_γ es una flecha en Γ_D^F pues $\sigma F(j_\gamma) = \gamma$. Usando que j es un cono, $j_\sigma j_\gamma = j_\gamma$

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow j_\gamma & \searrow j_\gamma & \\ GD & \xrightarrow{j_\sigma} & GD \end{array}$$

Como las j_γ forman una familia epimorfa, $j_\sigma = id_{GD}$.

Si tenemos una flecha $C \xrightarrow{t} G(D)$ tal que $\sigma Ft = \gamma$, entonces a t la podemos pensar como una flecha en Γ_D^F , y obtenemos $j_\gamma = j_\sigma t = t$. La naturalidad de σ no presenta ninguna dificultad. \square

3.7. Sitios con límites finitos

3.53 Observación. Si \mathcal{C} es una categoría, $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}$ una subcategoría plena y se tiene un diagrama $I \rightarrow \mathcal{R}$ tal que el límite en \mathcal{C} es un objeto de \mathcal{R} , entonces también es límite en \mathcal{R} .

3.54 Lema. Dado un topos \mathcal{E} y una subcategoría plena y pequeña \mathcal{C} , existe una subcategoría plena y pequeña (de \mathcal{E}) $\overline{\mathcal{C}}$, tal que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{C}} \subset \mathcal{E}$ y es cerrada por límites finitos.

Demostración. Llamamos \mathcal{C}_0 a $\mathcal{C} \cup \{1\}$ siendo 1 un objeto final de \mathcal{E} . A partir de \mathcal{C}_i , construimos \mathcal{C}_{i+1} añadiendo un objeto pullback por cada diagrama de pullback en \mathcal{C}_i . \mathcal{C}_{i+1} resulta pequeña. La unión $\bigcup_n \mathcal{C}_n$ es pequeña, es cerrada por productos fibrados y tiene objeto final. Por lo tanto tiene límites finitos. \square

3.55 Definición. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son sitios con límites finitos, un morfismo de sitios de \mathcal{C} a \mathcal{D} es un functor $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ que manda cubrimientos en cubrimientos y preserva límites finitos.

Sea $\mathcal{E} \xrightarrow{f} \mathcal{F}$ la imagen inversa de un morfismo de topos. Tomemos conjuntos de generadores \mathcal{C} y \mathcal{D} de \mathcal{E} y \mathcal{F} . \mathcal{C} con límites finitos. Podemos agregar a \mathcal{D} los objetos $f(C)$ con $C \in \mathcal{C}$ y completar por límites finitos. Consideramos en \mathcal{C} y \mathcal{D} las topologías dadas por las familias epimorfas en \mathcal{E} y \mathcal{F} . Restringiendo f tenemos un morfismo de sitios $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$. Es decir que todo morfismo de topos proviene de un morfismo de sitios. A continuación veremos que dado un morfismo de sitios con límites finitos se puede extender a un morfismo entre los topos generados.

3.8. Lema de Gröthendieck

Los topos poseen una estructura canónica de sitio en la que los cubrimientos son las familias epimorfas. Si \mathcal{C} es un sitio pequeño con límites finitos, el funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\epsilon} \tilde{\mathcal{C}}$ es morfismo de sitios (proposición 3.25).

3.56 Definición. Si \mathcal{C} y \mathcal{D} son dos sitios con límites finitos, notamos con $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{Sit}$ a la categoría cuyos objetos son los morfismos de sitios de \mathcal{C} a \mathcal{D} y cuyas flechas son las transformaciones naturales. Sit será la 2-categoría de sitios pequeños con límites finitos.

En lo que sigue demostraremos el siguiente teorema.

3.57 Teorema. *Si \mathcal{C} es un sitio pequeño con límites finitos, el funtor $[\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{E}]_{TOPop} \xrightarrow{\epsilon^*} [\mathcal{C}, \mathcal{E}]_{Sit}$ es una equivalencia de categorías.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\epsilon} & \tilde{\mathcal{C}} \\ & \searrow f^* \epsilon & \downarrow f^* \\ & & \mathcal{E} \end{array}$$

El hecho de que ϵ^* sea plenamente fiel se desprende de que ϵ es denso (proposición 2.31). Por lo tanto sólo debemos ocuparnos de extender un morfismo de sitios $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ a un funtor $\tilde{\mathcal{C}} \xrightarrow{f^*} \mathcal{E}$ tal que $f^* \epsilon \simeq f$ y que preserve límites finitos y colímites.

El teorema se deducirá de la proposición 3.67. En principio necesitaremos la siguiente proposición, cuya demostración está dividida en los dos lemas que le siguen.

3.58 Proposición. *Un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{E}ns$ preserva límites finitos si y sólo si es colímite filtrante de representables.*

3.59 Observación. *Sea \mathcal{C} una categoría. Los funtores representables $[C, -]$ preservan límites.*

3.60 Lema. *Un colímite filtrante de funtores $\mathcal{C} \xrightarrow{p_\alpha} \mathcal{E}ns$ que preservan límites finitos, preserva límites finitos.*

Demostración. Consideremos un colímite filtrante $p_\alpha \xrightarrow{\mu_\alpha} p$ en $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}}$ tal que los funtores p_α preservan límites finitos y sea $C \xrightarrow{\lambda_i} C_i$ un límite finito en $\mathcal{E}ns$. Debemos probar que se tiene un isomorfismo entre $\lim_i pC_i$ y pC que preserve los morfismos de los conos, es decir:

$$\begin{array}{ccc}
 \lim_i pC_i & \xrightarrow{\pi_i} & pC_i \\
 \left. \begin{array}{c} \text{\textcircled{~}} \\ \text{\textcircled{~}} \\ \text{\textcircled{~}} \end{array} \right\} & \nearrow p\lambda_i & \\
 pC & &
 \end{array}$$

Tenemos un funtor $\Gamma \times I \rightarrow \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}} \times \mathcal{C} \xrightarrow{ev} \mathcal{E}ns$ que nos permitirá aplicar el lema 2.17: “en $\mathcal{E}ns$, colímites filtrantes conmutan con límites finitos”.

El diagrama de la observación 2.16 en este caso es:

$$\begin{array}{ccccc}
 p_\alpha C = \lim_i p_\alpha C_i & \xrightarrow{p_\alpha \lambda_i} & p_\alpha C_i & \xrightarrow{\mu_{\alpha, C_i}} & \text{colim}_\alpha p_\alpha C_i = pC_i \\
 \mu_{\alpha, C} \downarrow & & & \nearrow (*) & \uparrow \pi_i \\
 pC = \text{colim}_\alpha \lim_i p_\alpha C_i & \xrightarrow{u} & \lim_i \text{colim}_\alpha p_\alpha C_i = \lim_i pC_i & &
 \end{array}$$

$\lim_i p_\alpha C_i = p_\alpha C$ se debe a que los funtores p_α conmutan con límites finitos.

Las igualdades $\text{colim}_\alpha p_\alpha C_i = pC_i$ y $\text{colim}_\alpha p_\alpha C = pC$ valen porque la evaluación en cualquier objeto preserva colímites.

u es isomorfismo. Además, al haber una única flecha $(*)$ tal que el triángulo superior conmuta (observación 2.16), $\pi_i u = p\lambda_i$. \square

3.61 Lema. Si \mathcal{C} es una categoría con límites finitos y $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{E}ns$ preserva los límites finitos, entonces el diagrama de p es filtrante. Por el lema de Yoneda II, p resulta ser colímite filtrante de representables.

Demostración. Podemos pensar que $p \in \mathcal{E}ns^{(\mathcal{C}^{op})^{op}}$. Para probar que el diagrama de p es filtrante (considerando a p como funtor contravariante que sale de \mathcal{C}^{op}), como las flechas de Γ_p van en la misma dirección que en \mathcal{C}^{op} , tiene sentido probar que la categoría opuesta es cofiltrante. Las flechas de esta categoría (que notaremos con Γ en esta demostración) son simplemente las $C \xrightarrow{f} D$ tales que $pf(x) = y$.

Condición F0 dados dos objetos (C, x) y (D, y) , tomemos $C \times D$ en \mathcal{C} con las proyecciones π_C y π_D . Como p preserva límites, en particular productos, se tiene un isomorfismo $p(C) \times p(D) \xrightarrow{j} p(C \times D)$ que preserva las proyecciones. Por lo tanto tenemos:

$$\begin{array}{ccc}
 & & (C, x) \\
 & \nearrow \pi_C & \\
 (C \times D, j(x, y)) & & \\
 & \searrow \pi_D & \\
 & & (D, y)
 \end{array}$$

Condición PS2 Se repite la técnica usada para la primera condición. Dadas dos flechas $(C, x) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} (D, y)$ debemos encontrar una flecha h en Γ que llegue a (C, x) tal que $fh = gh$.

Sea $E \xrightarrow{h} C \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} D$ un egalizador de f y g en \mathcal{C} . Aplicando p obtenemos un egalizador en $\mathcal{E}ns$. Sea $S = \{t \in p(C) / pf(t) = pg(t)\}$ el egalizador canónico. Tenemos:

$$\begin{array}{ccccc} & S & & & \\ & \wr & \searrow & & \\ p(E) & \xrightarrow{p(h)} & p(C) & \begin{array}{c} \xrightarrow{p(f)} \\ \xrightarrow{p(g)} \end{array} & p(D) \end{array}$$

Como $x \in S$, si $x' \in p(E)$ es su imagen por el isomorfismo, conseguimos

$$(E, x') \xrightarrow{h} (C, x) \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} (D, y)$$

con $fh = gh$. □

3.62 Lema. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ un funtor. Si \mathcal{D} tiene colímites entonces p se puede extender a la categoría de prehaces.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & & \\ \uparrow h & \searrow \bar{p} & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathcal{D} \end{array}$$

Demostración. Definamos $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{\bar{p}} \mathcal{E}ns$ en los objetos: Para cada $F \in \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$ vale $F = colim_{C \xrightarrow{\alpha} F} [-, C]$. Es razonable definir $\bar{p}(F) = colim_{C \xrightarrow{\alpha} F} p(C)$. Más técnicamente se puede pensar así:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & \\ & \uparrow h & \searrow \bar{p} \\ \Gamma_F & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D} \end{array}$$

$F = colim (h\pi_F)$, definimos $\bar{p}(F) = colim (p\pi_F)$. Cualquier elección de los objetos colímite sirve. Para que valga la igualdad $\bar{p}h = p$ elegimos $\bar{p}([-, C]) = p(C)$. Debemos probar que efectivamente $p(C) = colim p\pi_{[-, C]}$, pero esto es inmediato pues el diagrama de C posee la flecha id_C .

Ahora definamos \bar{p} en las flechas. Sea $F \xrightarrow{\sigma} G$ una flecha de $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}}$. Veamos que σ induce un funtor ς entre los diagramas de manera que el siguiente triángulo conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_F & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{C} \\ \downarrow \varsigma & \nearrow \pi_G & \\ \Gamma_G & & \end{array}$$

Simplemente hay que definir $\varsigma(C, x) = (C, \sigma_C(x))$,
 $\varsigma((C, x) \xrightarrow{f} (D, y)) = ((C, \sigma_C x) \xrightarrow{f} (D, \sigma_D y))$. Por la naturalidad de σ esta última f es una flecha en Γ_G , y la asignación es funtorial.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & & \\ & & \uparrow h & \searrow \bar{p} & \\ \Gamma_F & \xrightarrow{\pi_F} & \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathcal{D} \\ \downarrow \varsigma & \nearrow \pi_G & & & \\ \Gamma_G & & & & \end{array}$$

Por el lema 2.7 se induce la flecha buscada $colim (p\pi_F) \xrightarrow{\bar{p}\sigma} colim (p\pi_G)$. $\bar{p}\sigma$ es la única flecha que hace conmutar los diagramas:

$$\begin{array}{ccc} pC & & \\ \lambda_{(C, \alpha)} \searrow & \mu_{(C, \sigma\alpha)} \searrow & \\ & colim pC & \xrightarrow{\bar{p}\sigma} & colim pC \\ & C \xrightarrow{\alpha} F & & C \xrightarrow{\beta} G \end{array}$$

□

3.63 Lema. *Bajo las condiciones del lema anterior, si $\mathcal{D} = \mathcal{E}ns$, vale que $\bar{p} = colim_{[C, -] \xrightarrow{x} p} ev_C$.*

Como consecuencia, si p preserva límites finitos, \bar{p} también los preserva.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & & \\ \uparrow h & \searrow \bar{p} & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathcal{E}ns \end{array}$$

Veamos primero una motivación. Es bastante sencillo comprobar que para todo objeto C de \mathcal{C} vale $\overline{[C, -]} = ev_C$ (de hecho está demostrado en la siguiente observación). Como $p = colim_{[C, -] \xrightarrow{x} p} [C, -]$, asumiendo que aplicar la extensión preserva colímites obtenemos

$$\bar{p} = colim_{[C, -] \xrightarrow{x} p} ev_C.$$

Según nuestra definición de \bar{p} ,

$$\bar{p}(F) = colim_{[-, C] \xrightarrow{\alpha} F} pC = \coprod_{\alpha \in FC} pC / \sim = \coprod_C pC \times FC / \sim.$$

Los generadores de la relación de equivalencia son los pares $((x, \alpha), (y, \beta))$ que están relacionados por una f del diagrama de F , o sea que se escriben $(x, Ff(\beta)) \sim (pf(x), \beta)$ con $x \in pC$, $C \xrightarrow{f} D$, $\beta \in FD$. Se observa una simetría entre p y F .

Por otra parte:

$$\operatorname{colim}_{[C, -] \xrightarrow{x} p} \operatorname{ev}_C(F) = \operatorname{colim}_{[C, -] \xrightarrow{x} p} FC = \coprod_{x \in pC} FC / \sim = \coprod_C pC \times FC / \sim$$

y los generadores de la relación son exactamente los mismos.

Resta comprobar que coinciden también en las flechas. Dada $F \xrightarrow{\sigma} G$, se tiene una flecha

$$\begin{array}{ccc} \coprod_C pC \times FC / \sim & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \coprod_C pC \times GC / \sim \\ \overline{(x, \alpha)} \vdash & \longrightarrow & \overline{(x, \sigma_C \alpha)} \end{array}$$

Como $(x, \sigma(Ff(\beta))) = (x, Gf(\sigma\beta)) \sim (pf(x), \sigma\beta)$, la aplicación está bien definida, pues es coherente en los generadores de la relación de equivalencia. Se comprueba fácilmente que esta flecha satisface las propiedades que definen a $\bar{p}(\sigma)$ y a $\operatorname{colim}_{[C, -] \xrightarrow{x} p} \operatorname{ev}_C(\sigma)$, es decir que conmutan los siguientes diagramas.

$$\begin{array}{ccc} pC & & \\ \lambda_{(C, \alpha)} \searrow & & \mu_{(C, \sigma\alpha)} \searrow \\ & \coprod_C pC \times FC / \sim & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \coprod_C pC \times GC / \sim \\ & & & \\ FC & \xrightarrow{\sigma_C} & GC & \\ r_{(C, x)} \searrow & & t_{(C, x)} \searrow & \\ & \coprod_C pC \times FC / \sim & \xrightarrow{\bar{\sigma}} & \coprod_C pC \times GC / \sim \end{array}$$

Como p preserva límites finitos, su diagrama es filtrante (3.61). Por lo tanto \bar{p} es colímite filtrante de los funtores evaluación, que preservan límites finitos. Por el lema 3.60, \bar{p} también preserva límites finitos. \square

3.64 Observación. La evaluación $\mathcal{E}ns^{C^{op}} \xrightarrow{\operatorname{ev}_C} \mathcal{E}ns$ da una extensión del funtor representable $\mathcal{C} \xrightarrow{[C, -]} \mathcal{E}ns$ en el sentido del lema 3.62.

Demostración.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & & \\ \uparrow h & \searrow ev_C & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{[C, -]} & \mathcal{E}ns \end{array}$$

La conmutatividad del triángulo es trivial: $ev_C h(D) = ev_C([-, D]) = [C, D] = [C, -](D)$. En las flechas: sea $D \xrightarrow{f} E$, $ev_C h(f) = ev_C(f_*) = [C, D] \xrightarrow{f_*} [C, E] = [C, f]$. La definición de la extensión surgió de suponer que el functor extendido preservaría ciertos colímites. Como ev_C preserva colímites, satisface la definición:

$$ev_C(F) = ev_C(\operatorname{colim}_{D \xrightarrow{\alpha} F} [-, D]) = \operatorname{colim}_{D \xrightarrow{\alpha} F} ([C, -](D))$$

y las flechas son las inducidas por el colímite, ya que si tenemos un morfismo de prehaces $F \xrightarrow{t} G$, para cada $[-, D] \xrightarrow{\alpha} F$ conmuta el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} [C, D] & & \\ \searrow \alpha_C & \searrow (t\alpha)_C & \\ FC & \xrightarrow{t_C} & GD \end{array}$$

□

3.65 Proposición. Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías con límites finitos, y $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ un functor que los preserva. Componiendo con la inclusión de Yoneda correspondiente a \mathcal{D} podemos extender p a un functor $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{p^*} \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}}$ que preserva límites finitos.

Demostración.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} & \xrightarrow{p^*} & \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}} & \xrightarrow{ev_D} & \mathcal{E}ns \\ \uparrow h & & \uparrow h & \nearrow [D, -] & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathcal{D} & & \end{array}$$

p^* se obtiene levantando hp . Como ev_D preserva colímites, $ev_D p^*$ es un levantamiento de $ev_D hp = [D, -]p$.

Por el lema anterior, $ev_D p^*$ preserva límites finitos, ya que $[D, -]$ y p los preservan. Como esto vale para todo objeto $D \in \mathcal{D}$, y los límites se calculan lugar a lugar, resulta que p^* preserva límites finitos. □

3.66 Proposición. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ un functor y $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xrightarrow{p^*} \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}}$ como en la proposición anterior. Definimos el functor $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}^{op}} \xleftarrow{p_*} \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}^{op}}$ a partir de p por composición: $p_*(F) = F \circ p$ (interpretando $\mathcal{C}^{op} \xrightarrow{p} \mathcal{D}^{op}$)⁶. Vale $p^* \dashv p_*$.

Demostración. Sólo daremos la idea. $p^*F = \operatorname{colim}_{\alpha \in FC} [-, pC]_{\mathcal{D}}$. Una flecha $p^*F \rightarrow G$ equivale a un cono

$$[-, pC] \xrightarrow{r_\alpha} G$$

o sea que equivale a tener una asignación coherente $\alpha \mapsto r_\alpha$. A cada elemento $\alpha \in FC$ le corresponde un elemento $r_\alpha \in G(pC)$. Esto no es otra cosa que tener una flecha $F \rightarrow G \circ p = p_*(G)$. □

3.67 Proposición. *Sea ahora $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ un morfismo de sitios con límites finitos.*

a) p_* se restringe bien a las categorías de haces: $\tilde{\mathcal{C}} \xleftarrow{p^*} \tilde{\mathcal{D}}$. Para distinguir esta restricción, la denotaremos con \tilde{p}_* .

b) Definiendo $\tilde{p}^* = \#p^*i$, se tiene $\tilde{p}^* \dashv \tilde{p}_*$, dando un morfismo geométrico.

c) $\tilde{p}^*\# \simeq \#p^*$, por lo tanto $\tilde{p}^*\epsilon_{\mathcal{C}} \simeq \epsilon_{\mathcal{D}p}$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\tilde{p}^*} & \\
 \tilde{\mathcal{C}} & \xleftarrow{\tilde{p}_*} & \tilde{\mathcal{D}} \\
 \# \uparrow i & & \# \uparrow i \\
 \mathcal{E}ns^{\mathcal{C}op} & \xrightleftharpoons[p_*]{p^*} & \mathcal{E}ns^{\mathcal{D}op} \\
 h \uparrow & & h \uparrow \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{p} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

Demostración. a) Debemos probar que para todo haz $F \in \tilde{\mathcal{D}}$, $p_*(F)$ es también un haz. Sea $C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C$ un cubrimiento en \mathcal{C} y $C_\alpha \xrightarrow{\tau_\alpha} p_*(F)$ una familia compatible. La adjunción entre p^* y p_* nos dice que los siguientes dos hechos son equivalentes:

$$\begin{array}{ccc}
 C_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} C & & pC_\alpha \xrightarrow{p\lambda_\alpha} pC \\
 \tau_\alpha \searrow & \exists! \downarrow & \tilde{\tau}_\alpha \searrow & \exists! \downarrow \\
 & p_*F & & F
 \end{array}$$

y el de la derecha se sigue de que F es un haz, puesto que p preserva cubrimientos. Pero aún debemos probar que la familia $(\tilde{\tau}_\alpha)$ es compatible con $(p\lambda_\alpha)$. Para esto alcanza con comprobar la compatibilidad para los pull-backs.

Sean

$$\begin{array}{ccc}
 P_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\pi_\beta} & C_\beta \\
 \pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \lambda_\beta \\
 C_\alpha & \xrightarrow{\lambda_\alpha} & C
 \end{array}$$

pull-backs en \mathcal{C} . Por la compatibilidad de (τ_α) con (λ_α) conmutan los cuadrados

⁶El asterisco abajo se debe a que jugará el rol de imagen directa de un morfismo de topes.

$$\begin{array}{ccc}
P_{\alpha\beta} & \xrightarrow{\pi_\beta} & C_\beta \\
\pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \tau_\beta \\
C_\alpha & \xrightarrow{\tau_\alpha} & p^*(F)
\end{array}$$

Aplicando nuevamente la adjunción tenemos que conmutan los cuadrados

$$\begin{array}{ccc}
p(P_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{p\pi_\beta} & pC_\beta \\
p\pi_\alpha \downarrow & & \downarrow \widetilde{\tau}_\beta \\
pC_\alpha & \xrightarrow{\widetilde{\tau}_\alpha} & F
\end{array}$$

y $(p(P_{\alpha\beta}), p\pi_\alpha, p\pi_\beta)$ son los pull-backs correspondientes al cubrimiento $pC_\alpha \xrightarrow{p\lambda_\alpha} pC$ porque tanto p como la inclusión de Yoneda preservan límites finitos.

b) La adjunción $\#p^*i \dashv \widetilde{p}_*$ se comprueba directamente:

$$[\#p^*i(F), G]_{\widetilde{\mathcal{D}}} \simeq [p^*(F), iG]_{\mathcal{E}_{ns}^{\mathcal{D}^{op}}} \simeq [F, p_*G]_{\mathcal{E}_{ns}^{\mathcal{C}^{op}}} \simeq [F, p_*G]_{\widetilde{\mathcal{C}}}$$

El funtor $\widetilde{p}^* = \#p^*i$ preserva límites finitos porque cada uno de los funtores $\#, p^*, i$ los preservan.

c) Sabemos que $\#p^* \dashv p_*i$, pues $\# \dashv i$ y $p^* \dashv p_*$. También componiendo adjunciones tenemos $\widetilde{p}^* \# \dashv i\widetilde{p}_* = p_*i$. Esto implica $\widetilde{p}^* \# \simeq \#p^*$ porque dos adjuntos a izquierda de un mismo funtor son naturalmente isomorfos (ver [MCL], capítulo IV). □

Por último, si tenemos un morfismo de sitios $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{E}$ donde \mathcal{C} es pequeño (con límites finitos) y \mathcal{E} es un topos podemos tomar un conjunto de generadores de \mathcal{E} con límites finitos que contenga a $f(\mathcal{C})$ y aplicar la proposición anterior para conseguir un morfismo geométrico $\mathcal{E} \xrightarrow{\bar{f}} \widetilde{\mathcal{C}}$ tal que $\bar{f}^*\epsilon \simeq f$.

4. 2-categorías

Una 2-categoría \mathcal{C} es una categoría tal que para todo par de objetos C y D , el conjunto $[C, D]$ es una categoría pequeña. A las flechas entre flechas las denominamos "dobles flechas". Además se pide la existencia de una composición horizontal. O sea, si tenemos

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{l} \end{array} C$$

podemos componer γ y δ obteniendo una doble flecha $\delta \circ \gamma$ entre kf y lg .

Las propiedades que esta composición debe satisfacer se resumen pidiendo que

$$[B, C] \times [A, B] \xrightarrow{\circ} [A, C]$$

sea un functor. Notar que a la izquierda tenemos la categoría producto.

Hagamos algunas observaciones acerca de las operaciones en 2-categorías.

Teniendo en cuenta la identificación entre los objetos y sus identidades podemos escribir $\delta \circ f$ en lugar de $\delta \circ id_f$. Como $(l, \gamma)(\delta, f) = (\delta, \gamma)$ en $[B, C] \times [A, B]$, la functorialidad implica que $(l \circ \gamma)(\delta \circ f) = \delta \circ \gamma$. Análogamente $\delta \circ \gamma = (\delta \circ g)(k \circ \gamma)$. Es decir que es lo mismo aplicar primero γ y luego δ que aplicar primero δ y luego γ .

De la functorialidad también se sigue, mirando el siguiente diagrama, que $(g \circ \delta)(g \circ \gamma) = g \circ (\delta \gamma)$.

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \Downarrow \gamma \\ \Downarrow \delta \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} B \xrightarrow{g} C$$

Notación. A partir de ahora, para expresar dobles flechas usaremos puntos para separar los términos que se componen horizontalmente, e irán entre paréntesis las dobles flechas que se componen verticalmente.

4.1 Definición. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos 2-categorías. Un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ es un functor que además está definido sobre las dobles flechas:

$$\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \gamma \\ \xrightarrow{g} \end{array} B \quad FA \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff} \\ \Downarrow F\gamma \\ \xrightarrow{Fg} \end{array} FB$$

de manera que la asignación $[A, B] \xrightarrow{F} [FA, FB]$ es un functor (o sea que F respeta dobles identidades y composición vertical) y además F preserva la composición horizontal.

4.2 Definición. Un pseudocono de un diagrama dado por un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ hacia un objeto $K \in \mathcal{B}$ consta de una flecha $FA \xrightarrow{h_A} K$ para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ y una doble flecha inversible h_f para cada flecha $A \xrightarrow{f} B$ en \mathcal{A} :

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 & \searrow h_A & \nearrow h_f \\
 & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \downarrow h_B \\
 K
 \end{array}$$

de modo que se cumplen las siguientes tres propiedades:

C1) $h_{id_A} = id_{h_A}$.

C2) Dadas $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ en \mathcal{A} , h_{gf} es igual a la composición entre h_g y h_f .

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB & \xrightarrow{Fg} & FC \\
 & \searrow h_A & \nearrow h_f & \downarrow h_B & \nearrow h_g \\
 & & K & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow h_C \\
 K
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB & \xrightarrow{Fg} & FC \\
 & \searrow h_A & & \nearrow h_{gf} & \\
 & & K & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow h_C \\
 K
 \end{array}$$

La ecuación es: $(h_g \cdot Ff)(h_f) = h_{gf}$

C3) Para cada doble flecha $A \xrightleftharpoons[g]{f} B$, es lo mismo aplicar h_g y luego $F\gamma$ que aplicar h_f .

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 & \searrow h_A & \nearrow h_g \\
 & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \xrightarrow{F\gamma} \\
 \downarrow h_B \\
 K
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 & \searrow h_A & \nearrow h_f \\
 & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \downarrow h_B \\
 K
 \end{array}$$

$(h_B \cdot F\gamma)(h_g) = h_f$

4.3 Definición. Dado un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ y dos pseudoconos h y l de F hacia $K \in \mathcal{B}$, un morfismo de pseudoconos $h \xRightarrow{\rho} l$ es una familia de dobles flechas $FA \xrightleftharpoons[l_A]{h_A} K$ tales

que para cada $A \xrightarrow{f} B$ vale la igualdad

MC)

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 & \searrow h_A & \nearrow l_A \\
 & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow l_f \\
 \downarrow l_B \\
 K
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 & \searrow h_A & \nearrow h_f \\
 & & K
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \downarrow h_B \\
 \xRightarrow{\rho_B} \\
 K
 \end{array}$$

$(l_f)(\rho_A) = (\rho_B \cdot Ff)(h_f)$

4.4 Observación. Los pseudoconos desde un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ hacia un objeto $K \in \mathcal{B}$ junto con los morfismos recién definidos forman una categoría, que denotaremos con (F, K) .

Componiendo un pseudocono $h \in \text{con}(F, K)$ con una flecha $K \xrightarrow{t} J$ se obtiene un pseudocono $th \in \text{con}(F, J)$. Esta composición define un functor $[K, J] \times \text{con}(F, K) \rightarrow \text{con}(F, J)$. Dejando fijo un pseudocono $h \in \text{con}(F, K)$ se obtiene un functor $[K, J] \xrightarrow{h^*} \text{con}(F, J)$.

4.5 Definición. Un pseudocono h de un diagrama dado por un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ hacia un objeto $K \in \mathcal{B}$ es un bicolímite si para todo objeto $J \in \mathcal{B}$ vale que el functor $[K, J] \xrightarrow{h^*} \text{con}(F, J)$ es una equivalencia de categorías.

4.6 Observación. Si \mathcal{B} se reduce a una categoría esta definición coincide con la de colímite usual, pues $[K, J]$ y $\text{con}(F, J)$ son categorías discretas (conjuntos), para las cuales una equivalencia es una biyección.

Comprobemos que los bicolímites son únicos salvo equivalencia.

4.7 Lema. Sea $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ un functor plenamente fiel y $a, b \in \mathcal{C}$. Si $f(a)$ y $f(b)$ son isomorfos entonces a y b también lo son.

4.8 Proposición. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ un 2-functor y $(C, h), (D, k)$ dos bicolímites (C y D son los objetos y h, k los pseudoconos universales). Entonces C y D son equivalentes, es decir, existen $C \xrightleftharpoons[g]{f} D$ tales que $fg \simeq id_D$ y $gf \simeq id_C$.

Demostración. Por la propiedad universal de h , existe una $C \xrightarrow{f} D$ tal que $k \simeq fh$. Análogamente, existe $D \xrightarrow{g} C$ tal que $gk \simeq h$.

$$fh \simeq k \Rightarrow gfh \simeq gk \simeq h$$

.

Como h^* es plenamente fiel, el lema anterior dice que $id_C \simeq gf$. Análogamente se tiene $id_D \simeq fg$. \square

4.1. Bicolímites en \mathcal{Cat}

Veremos en esta sección que en \mathcal{Cat} existen todos los bicolímites indexados por una 2-categoría pequeña. En realidad comprobaremos que dicha existencia resulta evidente utilizando como herramientas la categoría libre generada por un grafo y los cocientes de categorías.

4.1.1. Categoría libre generada por un multigrafo dirigido

4.9 Definición. Un multigrafo dirigido G consiste en un conjunto de objetos, $ob(G)$, y conjuntos $[A, B]_G$ de flechas para cada par de objetos A y B . Si $f \in [A, B]$, decimos que A es el dominio de f y B su codominio.

Nota. En lugar de “multigrafo dirigido” diremos simplemente “grafo”.

4.10 Definición. Un morfismo de grafos $G \xrightarrow{m} H$ es una función $ob(G) \xrightarrow{m} ob(H)$ junto con funciones $[A, B] \xrightarrow{m} [mA, mB]$ para cada par de objetos $A, B \in ob(G)$.

4.11 Observación. Los grafos pequeños (o \mathcal{U} -grafos) forman una categoría que denotaremos \mathcal{Grf} . Las categorías son grafos y se tiene un funtor olvido $\mathcal{Cat} \xrightarrow{\mathcal{O}} \mathcal{Grf}$.

4.12 Proposición. Todo grafo G genera una categoría $\mathcal{L}(G)$ (categoría libre generada por G) junto con un morfismo de grafos $G \xrightarrow{\lambda_G} \mathcal{L}(G)$ que satisface la siguiente propiedad universal. Para toda categoría pequeña \mathcal{D} y todo morfismo de grafos $G \xrightarrow{r} \mathcal{D}$ existe un único funtor $\mathcal{L}(G) \xrightarrow{s} \mathcal{D}$ tal que $s\lambda = r$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{L}(G) \\ & \searrow r & \downarrow \exists! s \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

La propiedad universal da la adjunción $\mathcal{L} \dashv \mathcal{O}$ ($[\mathcal{L}(G), \mathcal{D}]_{\mathcal{Cat}} \simeq [G, \mathcal{O}(\mathcal{D})]_{\mathcal{Grf}}$).

Demostración. Los objetos de $\mathcal{L}(G)$ son los objetos de G . Las flechas son las identidades y las secuencias finitas $f = (f_n, f_{n-1}, \dots, f_1)$ de flechas de G tales que $\text{cod}(f_i) = \text{dom}(f_{i+1})$ ($\text{dom}(f) = \text{dom}(f_1)$, $\text{cod}(f) = \text{cod}(f_n)$).

La composición se define por yuxtaposición (en el caso de que las dos flechas en cuestión sean secuencias) y trivialmente si alguna de las dos es una identidad⁷. La asociatividad es evidente. El morfismo λ_G se define mediante $\lambda_G(A) = A$ en los objetos y $\lambda_G(f) = (f)$ en las flechas.

La propiedad universal se verifica fácilmente. En los objetos, s sólo puede definirse por $s(A) = r(A)$ y en las flechas, $s(f_n, f_{n-1}, \dots, f_1) = r(f_n)r(f_{n-1})\dots r(f_1)$. Además esta definición funciona.

La funtorialidad de \mathcal{L} se define gracias a la propiedad universal, y automáticamente se tiene la naturalidad de λ .

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\lambda_G} & \mathcal{L}(G) \\ g \downarrow & & \downarrow \mathcal{L}(g) \\ H & \xrightarrow{\lambda_H} & \mathcal{L}(H) \end{array}$$

□

4.1.2. Cociente de categorías

4.13 Definición. Una relación entre las flechas de una categoría \mathcal{C} consistirá en una relación en $[A, B]_{\mathcal{C}}$ para cada $A, B \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

4.14 Definición. Una relación de equivalencia en las flechas de una categoría \mathcal{C} está dada por una relación de equivalencia en cada $[A, B]_{\mathcal{C}}$, estables por composición, es decir:

Si $f \sim g$ en $[B, C]$ y $h \in [C, D]$ entonces $hf \sim hg$.

Si $f \sim g$ en $[B, C]$ y $h \in [A, B]$ entonces $fh \sim gh$.

⁷Para evitar separar entre las identidades y las secuencias, las flechas se pueden definir como las cadenas $A_1 \xrightarrow{f_1} A_2 \rightarrow \dots \xrightarrow{f_n} A_{n+1}$. Si $n = 0$ se trata de una identidad.

4.15 Proposición. Si \mathcal{C} es una categoría con una relación de equivalencia en las flechas, entonces se puede definir la categoría cociente \mathcal{C}/\sim .

Se tiene un funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}/\sim$ que identifica las flechas relacionadas y cumple la siguiente propiedad universal. Para todo funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ que identifica flechas relacionadas existe un único $\mathcal{C}/\sim \xrightarrow{q} \mathcal{D}$ tal que $q\pi = p$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C}/\sim \\ & \searrow p & \downarrow \exists! q \\ & & \mathcal{D} \end{array}$$

Demostración. Simplemente se define $ob(\mathcal{C}/\sim) = ob(\mathcal{C})$ y $[A, B]_{\mathcal{C}/\sim} = [A, B]_{\mathcal{C}}/\sim$. La composición $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab}$ está bien definida gracias a la compatibilidad entre las relaciones y la composición en \mathcal{C} . Las identidades son las clases de las identidades de \mathcal{C} . π se define como la identidad en los objetos y $\pi(f) = \bar{f}$. La propiedad universal es inmediata pues q debe coincidir con p en los objetos y en las flechas $q(\bar{f}) = p(f)$. La buena definición se debe a que p identifica flechas relacionadas. \square

4.16 Observación. Si se tiene una familia de relaciones de equivalencia en las flechas de \mathcal{C} , la intersección de todas también resulta una relación de equivalencia en las flechas (dos flechas están relacionadas si y sólo si lo están para todas las relaciones de la familia).

Además si en cada $[A, B]_{\mathcal{C}}$ consideramos la relación de equivalencia máxima (todo par de elementos está en la relación) se obtiene una relación de equivalencia en $\mathcal{Fl}(\mathcal{C})$ que contiene a cualquier relación en $\mathcal{Fl}(\mathcal{C})$.

Esto permite definir la “relación de equivalencia generada por una relación en $\mathcal{Fl}(\mathcal{C})$ ” como la intersección de todas las relaciones de equivalencia que contienen a la relación original.

Ejemplo. Localización (ver [GZ]).

Si $\mathcal{C} \in \mathcal{Cat}$ y $S \subset \mathcal{Fl}(\mathcal{C})$ podemos armar la categoría \mathcal{C}_S que se obtiene decretando inversibles a las flechas de S .

Consideramos el grafo \mathcal{G} cuyos objetos son los objetos de \mathcal{C} y tiene como flechas las flechas de \mathcal{C} más, para cada $f \in S$ ($f \in [A, B]_{\mathcal{C}}$), una $\bar{f} \in [B, A]_{\mathcal{G}}$.

Tomamos $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ y cocientamos por la relación de equivalencia en $\mathcal{Fl}(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$ generada por las siguientes identificaciones:

$$(I) \quad id_A^{\mathcal{L}(\mathcal{G})} \sim id_A^{\mathcal{C}}$$

$$(II) \quad (f_2, f_1) \sim (f_2 f_1)$$

$$(III) \quad f\bar{f} = id, \bar{f}f = id$$

Las primeras dos son necesarias para restablecer las propiedades de las flechas de \mathcal{C} .

\mathcal{C}_S cumple una propiedad universal. La flecha $\mathcal{C} \xrightarrow{l} \mathcal{C}_S$, definida mediante $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{G}}} \mathcal{L}(\mathcal{G}) \xrightarrow{\pi} \mathcal{C}_S$ satisface que la imagen de toda flecha de S es un isomorfismo. Para todo funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{p} \mathcal{D}$ con la misma propiedad existe un único funtor $\mathcal{C}_S \rightarrow \mathcal{D}$ tal que el triángulo conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} & \xrightarrow{l} & \mathcal{C}_S \\
 & \searrow p & \downarrow \exists! \\
 & & \mathcal{D}
 \end{array}$$

Observación. Estas herramientas generalizan las construcciones de monoide libre, grupo libre, presentación de un grupo y producto libre de grupos. En todas ellas se utilizan categorías con un solo objeto.

4.17 Definición. Para la demostración de la siguiente proposición nos será de utilidad la noción de “transformación entre morfismos de grafos”.

Dados dos morfismos de grafos $G \xrightarrow[g]{f} H$ una transformación γ es simplemente una flecha $fx \xrightarrow{\gamma_x} gx$ para cada $x \in ob(G)$.

Si bien no existe la composición vertical ni la horizontal, para el caso particular $G \xrightarrow[g]{f} H \xrightarrow{h} K$ hay una forma natural de definir la composición horizontal $h\gamma$, obteniendo una transformación entre los morfismos de grafos hf y hg . También se puede componer e con γ en el caso $J \xrightarrow{e} G \xrightarrow[g]{f} H$.

4.18 Lema. Sea \mathcal{G} un grafo, \mathcal{D} una categoría y $\mathcal{G} \xrightarrow[g]{f} \mathcal{D}$ una transformación de morfismos de grafos. Consideremos \bar{f} y \bar{g} las extensiones de f y g a $\mathcal{L}(\mathcal{G})$. Existe una única transformación $\mathcal{L}(\mathcal{G}) \xrightarrow[\bar{g}]{\bar{f}} \mathcal{D}$ tal que $\bar{\theta}\lambda = \theta$ que resulta ser una transformación natural si y sólo si para toda $x \xrightarrow{r} y \in \mathcal{G}$ conmuta el diagrama de la derecha (en \mathcal{D}).

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & \xrightarrow{\lambda} & \mathcal{L}(\mathcal{G}) \\
 & \searrow \theta & \downarrow \bar{\theta} \\
 & & \mathcal{D} \\
 & \swarrow g & \downarrow \bar{g} \\
 & & \mathcal{D}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 fx & \xrightarrow{fr} & fy \\
 \downarrow \theta_x & & \downarrow \theta_y \\
 gx & \xrightarrow{gr} & gy
 \end{array}$$

Demostración. $\bar{\theta}$ debe definirse como $\bar{\theta}_x = \theta_x$ para que $\bar{\theta} = \theta\lambda$. Para que valga la naturalidad de $\bar{\theta}$ la conmutatividad del cuadrado es claramente necesaria. También es suficiente porque al ubicar varios cuadrados conmutativos uno a continuación del otro se obtiene un rectángulo conmutativo. □

4.19 Proposición. *Cat* tiene bicolímites.

Demostración. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ un 2-functor.

El bicolímite se formará a partir de la unión disjunta de las categorías FA agregando flechas $x \xrightleftharpoons[h_{f,x}]{\overline{h_{f,x}}} Ff(x)$ por cada $f \in \mathcal{F}l(\mathcal{A})$ y $x \in F(\text{dom}(f))$, y cocientando apropiadamente.

Sea entonces \mathcal{G} el grafo tal que su conjunto de objetos es $ob(\mathcal{G}) = \coprod_{A \in \mathcal{A}} ob(FA)$ y sus flechas están dadas por:

$$\mathcal{F}l(\mathcal{G}) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{F}l(FA) \cup \bigcup_{\substack{A \xrightarrow{f} B \\ x \in FA}} \{h_{f,x}, \overline{h_{f,x}}\}$$

definiendo las funciones “dominio” y “codominio” como corresponde.

Consideramos en $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ la relación de equivalencia en las flechas generada por:

- (1) $id_x^{\mathcal{L}(\mathcal{G})} \sim id_x^{\mathcal{G}}$ con $x \in FA$ para algún $A \in \mathcal{A}$
- (2) $(f_2, f_1) \sim (f_2 f_1)$ donde $f_1, f_2 \in \mathcal{F}l(FA)$ para algún $A \in \mathcal{A}$.
- (3) $Ff(t)h_{f,x} \sim h_{f,y}t$ para $A \xrightarrow{f} B, x \xrightarrow{t} y \in FA$.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h_{f,x}} & Ff(x) \\ t \downarrow & & \downarrow Ff(t) \\ y & \xrightarrow{h_{f,y}} & Ff(y) \end{array}$$

$$(4) \overline{h_{f,x}}h_{f,x} \sim id_x, h_{f,x}\overline{h_{f,x}} \sim id_{Ff(x)} \quad A \xrightarrow{f} B, x \in FA.$$

$$(5) h_{id,x} \sim id_x \quad A \xrightarrow{id} A, x \in FA.$$

$$(6) h_{gf,x} \sim h_{g,Ff(x)}h_{f,x} \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C, x \in FA.$$

$$\begin{array}{ccccc} x & \xrightarrow{h_{f,x}} & Ff(x) & \xrightarrow{h_{g,Ff(x)}} & FgFf(x) \\ & \searrow h_{gf,x} & & & \parallel \\ & & & & F(gf)(x) \end{array}$$

$$(7) \gamma_x h_{f,x} \sim h_{g,x} \quad A \xrightarrow[\underset{g}{\downarrow \gamma_x}]{f} B, x \in FA.$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{h_{f,x}} & Ff(x) \\ & \searrow h_{g,x} & \downarrow \gamma_x \\ & & Fg(x) \end{array}$$

El pseudocono universal lo formamos componiendo:

$$\begin{array}{ccccccc}
A & & & & & & \\
\downarrow f & \searrow i_A & \searrow j_A & \searrow h_A & & & \\
B & \xrightarrow{i_B} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{G}}} & \mathcal{L}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C} \\
& \downarrow i_f & \downarrow \bar{i}_f & & & & \\
& & & & & &
\end{array}$$

Las flechas i_A son inclusiones, i_f e \bar{i}_f están dadas por las flechas $h_{f,x}$ y $\overline{h_{f,x}}$ respectivamente. j se define como $\lambda_{\mathcal{G}}i$ y $h = \pi j$.

Los morfismos de grafos h_A son funtores gracias a (1) y (2). Por (3) las transformaciones h_f son naturales. (4) dice que h_f es isomorfismo con inversa \bar{h}_f , mientras que (5), (6) y (7) nos dan exactamente las condiciones de pseudocono C1), C2) y C3).

Demostración de la propiedad universal:

Mostraremos que para toda categoría \mathcal{D} el functor $[\mathcal{C}, \mathcal{D}] \xrightarrow{h^*} \text{con}(F, \mathcal{D})$ es un isomorfismo de categorías: es biyectivo en los objetos y plenamente fiel.

Supongamos que tenemos un pseudocono k hacia una categoría \mathcal{D} .

$$\begin{array}{ccccccc}
FA & \xrightarrow{i_A} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\lambda_{\mathcal{G}}} & \mathcal{L}(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{C} \\
\downarrow Ff & \searrow i_B & \searrow k_A & & \downarrow \exists! t & & \\
FB & \xrightarrow{k_B} & \mathcal{D} & & \downarrow \exists! u & & \\
& & & & \downarrow \exists! v & &
\end{array}$$

Existe un único morfismo de grafos t tal que $ti = k$ (esta ecuación resume las condiciones $ti_A = k_A, ti_f = k_f, t\bar{i}_f = k_f^{-1}$) que es el definido por:

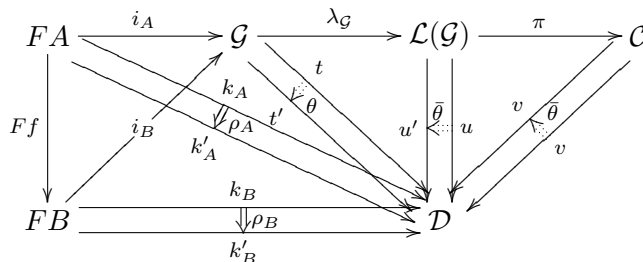
$$t(x) = k_A(x) \quad \text{para } x \in \text{ob}(FA)$$

$$t(r) = k_A(r) \quad \text{para } r \in \mathcal{Fl}(FA)$$

$$t(h_{f,x}) = k_{f,x}, \quad t(\overline{h_{f,x}}) = k_{f,x}^{-1} \quad \text{para } A \xrightarrow{f} B, x \in FA.$$

Por la propiedad universal de $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ existe un único functor u tal que $u\lambda = t$. También vale que existe un único v tal que $v\pi = u$. Para esto, debemos chequear que u identifica a los generadores de la relación de equivalencia. Que identifica a los pares de (1) y (2) se debe a que los k_A son funtores; los de (3) a la naturalidad de k_f ; los de (4) a que k_f y k_f^{-1} compuestos dan la identidad y los de (5), (6) y (7) a que k es un pseudocono.

Ahora veamos que h^* es plenamente fiel. Sea $k \xrightarrow{\rho} k' \in \text{con}(F, \mathcal{D})$ un morfismo de pseudoconos.



t , u y v son las extensiones sucesivas de k obtenidas como vimos recién. t' , u' y v' son las extensiones de k' .

Existe una única transformación $t \xrightarrow{\theta} t'$ tal que $\theta i = \rho$, que es la definida por $\theta_x = \rho_{A,x}$ para $x \in FA$. θ se extiende a una única $\bar{\theta}$. El lema 4.18 dice que para ver que $\bar{\theta}$ es una transformación natural basta con chequear la naturalidad solamente en las flechas generadoras (las flechas de \mathcal{G}). Para las flechas de \mathcal{G} que provienen de flechas de alguna FA , vale gracias a la naturalidad de ρ_A ; Para las flechas agregadas ($h_{f,x}$ y $\overline{h_{f,x}}$) vale por la condición MC (morfismo de pseudocono) que cumple ρ . Finalmente, $\bar{\theta}$ se extiende de una única forma a una transformación natural de v a v' . \square

Observación. Al hacer esta última demostración queda claro que de la misma forma se pueden armar las categorías correspondientes a otras nociones similares a la de bicolímite alterando las condiciones de diversas maneras, por ejemplo sin requerir que las transformaciones naturales de los pseudoconos sean inversibles (“lax colimit”). En ese caso dichas transformaciones pueden apuntar hacia un lado o hacia el otro.

También se puede armar el colímite usual en Cat . Para esto debemos tomar como objetos del grafo \mathcal{G} el colímite de los conjuntos de objetos subyacentes a las categorías (pues en este caso debemos forzosamente identificar objetos) y como flechas solamente las flechas preexistentes. La categoría libre se cocienta de modo que se restablezcan las propiedades originales y se identifiquen las flechas conectadas por morfismos de transición.

Si tenemos un diagrama $\mathcal{A} \rightarrow Cat$ con \mathcal{A} una categoría, no es cierto en general que el colímite usual da una categoría equivalente al bicolímite. Sin embargo sí lo son si \mathcal{A} es filtrante (ver [SGA4-II]).

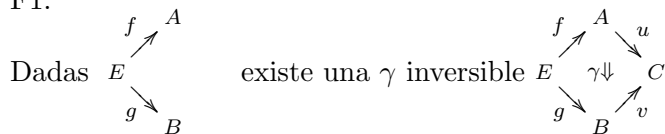
4.2. Bicolímites 2-filtrantes

En [DS] los autores definen la noción de 2-categoría 2-filtrante y dan una construcción para los bicolímites 2-filtrantes en Cat .

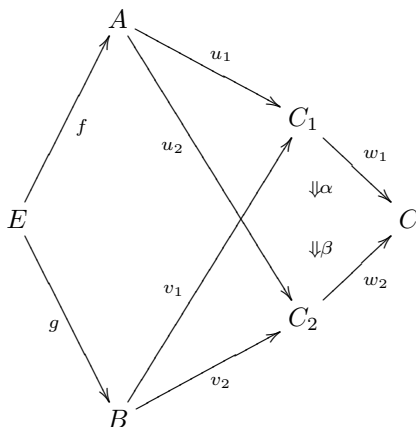
En esta sección reproducimos la definición de [DS], relacionamos la categoría bicolímite construida en [DS] con la de la sección anterior y vemos en qué sentido la 2-filtración generaliza a la noción de categoría filtrante.

4.20 Definición. Una 2-categoría \mathcal{A} se dice “pre-2-filtrante” si satisface los siguientes dos axiomas.

F1.



$w_1 u_1 \xrightarrow{\alpha} w_2 u_2$, $w_1 v_1 \xrightarrow{\beta} w_2 v_2$ tales que en el siguiente diagrama

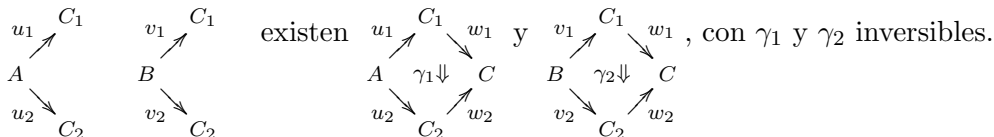


aplicar α y luego γ_2 coincide con aplicar primero γ_1 y luego β . Es decir que conmuta:

$$\begin{array}{ccc} w_1 u_1 f & \xrightarrow{\alpha f} & w_2 u_2 f \\ w_1 \gamma_1 \Downarrow & & \Downarrow w_2 \gamma_2 \\ w_1 v_1 g & \xrightarrow{\beta g} & w_2 v_2 g \end{array}$$

4.21 Definición. Si además de ser pre-2-filtrante, \mathcal{A} satisface el siguiente axioma (se puede ver como una versión más fuerte de F1 pero también guarda una relación con F2), se dice pseudo-2-filtrante.

FF1. Dadas



Una 2-categoría es 2-filtrante cuando es pseudo-2-filtrante, no vacía y satisface el axioma F0 (dados dos objetos A y B , existe un C con flechas $A \rightarrow C \leftarrow B$).

4.22 Observación. La noción de 2-categoría 2-filtrante resulta ser equivalente a la de “2-categoría bifiltrante” definida previamente en J. Kennison, *The fundamental localic groupoid of a topos*, Journal of Pure and Applied Algebra (1992). Los axiomas son:

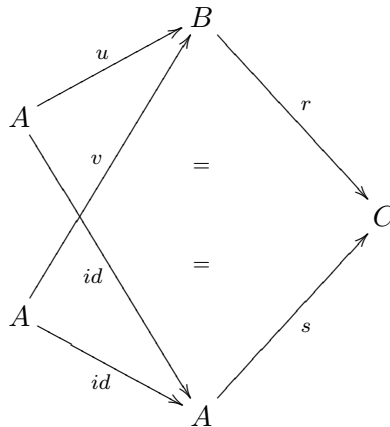
BF0. Igual a F0.

BF1. Dadas dos flechas $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} B$ existe $B \xrightarrow{u} C$ y una doble flecha inversible de uf a ug .

BF2. Dadas dos dobles flechas $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow} \\ \xrightarrow{\quad} \end{smallmatrix} B$ existe una $B \xrightarrow{u} C$ tal que $u\gamma_1 = u\gamma_2$.

4.23 Observación. Si \mathcal{A} es una 2-categoría trivial, en la que las únicas flechas dobles son identidades, es equivalente que sea pseudo-filtrante a que sea pseudo-2-filtrante. En consecuencia también coinciden las nociones de filtrante y 2-filtrante.

Con mayor precisión: el axioma FF1 implica F1 y F2, con lo cual pseudo-2-filtrante equivale a que valga solamente FF1. Verifiquemos que FF1 equivale a PS1+PS2. El diagrama de abajo muestra que FF1 implica PS2 (FF1 implica PS1 trivialmente).



Para probar FF1, dadas $\begin{array}{ccc} & C_1 & \\ u_1 \nearrow & & v_1 \nearrow \\ A & & B \\ u_2 \searrow & & v_2 \searrow \\ & C_2 & \end{array}$ tomamos $C_1 \xrightarrow{f} D \xleftarrow{g} C_2$ tales que

$fu_1 = gu_2$ (PS1) y luego $D \xrightarrow{h} E$ tal que $hf v_1 = hg v_2$ (PS2).

4.24 Observación. En [DS] la categoría bicolímite de un 2-functor $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{C}at$ pre-2-filtrante se construye de la siguiente manera. El conjunto de objetos es también la unión disjunta de los objetos de las categorías del diagrama.

Un premorfismo $(x, A) \rightarrow (y, B)$ ($x \in FA, y \in FB$) es una terna (u, ξ, v) donde $A \xrightarrow{u} C, B \xrightarrow{v} C$ y $F(u)(x) \xrightarrow{\xi} F(v)(y)$.

Una homotopía entre dos premorfismos de (x, A) a (y, B) es una cuaterna $(w_1, w_2, \alpha, \beta) : (u_1, \xi_1, v_1) \Rightarrow (u_2, \xi_2, v_2)$ donde $C_1 \xrightarrow{w_1} C, C_2 \xrightarrow{w_2} C$ y $\alpha : w_1 u_1 \xrightarrow{\cong} w_2 u_2, \beta : w_1 v_1 \xrightarrow{\cong} w_2 v_2$ son dobles flechas inversibles tales que

$$\begin{array}{ccc}
F(w_1u_1)(x) & \xrightarrow{F(\alpha)_x} & F(w_2u_2)(x) \\
F(w_1)(\xi_1) \downarrow & & \downarrow f(w_2)(\xi_2) \\
F(w_1v_1)(y) & \xrightarrow{F(\beta)_y} & F(w_2v_2)(y)
\end{array}$$

conmuta en FC .

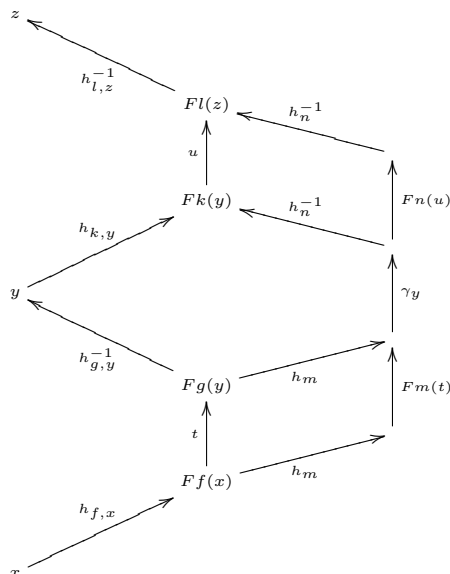
Usando el axioma F1 se prueba que las homotopías definen una relación de equivalencia en el conjunto de premorfismos entre dos objetos. Las flechas en la categoría bicolímite se definen entonces como las clases de equivalencia de dicha relación. La composición se define como una composición de premorfismos representantes: dados (u, ξ, v) y (r, η, s) se usa F1 para obtener $mv \Rightarrow kr$ y el premorfismo resultante es $(mu, F(m)(\xi) F(\gamma)_y F(k)(\eta), ks)$. El axioma F2 dice que dos composiciones distintas entre dos premorfismos dados dan premorfismos equivalentes. Luego se puede probar que la composición en el bicolímite está bien definida.

4.25 Lema. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \text{Cat}$ un diagrama pre-2-filtrante, y sea \mathcal{C} el bicolímite construido en 4.19. Toda flecha en \mathcal{C} se puede escribir como $x \xrightarrow{\overline{h_{g,y}^{-1} \bar{t} h_{f,x}}} y$ donde $x \in FA$, $y \in FB$, $A \xrightarrow{f} C$, $B \xrightarrow{g} C$ y $t \in \mathcal{F}l(FC)$.

Demostración. Como las flechas de \mathcal{C} son tiras $\overline{f_1 f_2 \dots f_n}$, podemos proceder por inducción en n . Para las identidades es trivial. Para las tiras de largo uno tenemos tres casos, también triviales. Si $n \geq 2$, separamos la tira en dos grupos, siendo cada uno una tira de longitud menor. Usando la hipótesis inductiva sólo resta probar que la composición $\overline{h_{l,z}^{-1} \bar{u} h_{k,y}} \circ \overline{h_{g,y}^{-1} \bar{t} h_{f,x}}$ también es de la forma propuesta. Por F1, existe γ inversible:

$$\begin{array}{ccc}
& E & \\
k \nearrow & & \searrow n \\
B & \gamma \uparrow & G \\
g \searrow & & \nearrow m \\
& D &
\end{array}$$

se obtiene entonces:



□

4.26 Proposición. *La categoría bicolímite de $[DS]$ es isomorfa a la de 4.19.*

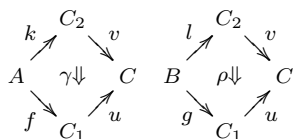
Demostración. Es fácil comprobarlo usando que ambas cumplen la propiedad universal fuerte del bicolímite (el cono universal induce isomorfismos de categorías). Sin embargo, a continuación lo demostraremos de manera más directa, sin usar que son bicolímites.

Llamemos \mathcal{C} a la categoría de 4.19 y \mathcal{C}_{DS} a la de $[DS]$. Definiremos funtores en ambas direcciones. El funtor $\mathcal{C} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}_{DS}$ en los objetos vale la identidad. En las flechas \overline{u} (con u flecha en FA) se define como la clase del premorfismo (id_A, u, id_A) , en $\overline{h_{f,x}}$ como la clase de (f, id, id) y en $\overline{h_{g,x}^{-1}}$ como (id, id, g) . Se chequea sin dificultad que esta definición respeta las relaciones que definen a \mathcal{C} , por lo que φ está bien definido.

$\mathcal{C}_{DS} \xrightarrow{\psi} \mathcal{C}$ es la identidad en los objetos. En la clase de un premorfismo (f, ξ, g) se define como $\overline{h_{g,y}^{-1} \xi h_{f,x}}$. La buena definición se sigue de las relaciones por las que se cocienta para obtener \mathcal{C} (requiere seguir un diagrama con cierto detenimiento). De forma similar se comprueba que ψ respeta la composición (el diagrama que queda es el mismo que el del lema anterior).

Para ver que $\varphi\psi$ es la identidad hay que chequear que $\overline{(f, \xi, g)} = \overline{(id, id, g)(id, \xi, id)(f, id, id)}$, mientras que $\psi\varphi$ es la identidad por dejar fijas a las flechas generadoras de \mathcal{C} . □

4.27 Corolario. *Dos flechas de (x, A) a (y, B) dadas por $\overline{h_{g,y}^{-1} t h_{f,x}}$ y $\overline{h_{l,y}^{-1} s h_{k,x}}$ con $t \in FC_1$ y $s \in FC_2$ son iguales si y sólo si existen $C_1 \xrightarrow{u} C$ y $C_2 \xrightarrow{v} C$ junto con γ y ρ inversibles:*



tales que en FC conmuta el cuadrado:

$$\begin{array}{ccc}
 vk(x) & \xrightarrow{vs} & vl(y) \\
 \gamma_x \downarrow & & \downarrow \rho_y \\
 uf(x) & \xrightarrow{ut} & ug(y)
 \end{array}$$

4.3. Categorías con límites finitos

Aquí mostraremos que la construcción del bicolímite se restringe bien, en el caso 2-filtrante, a Cat_{fl} .

Cat_{fl} es la 2-categoría de categorías con límites finitos, y sus morfismos son los funtores que preservan límites finitos. Las categorías $[C, D]_{Cat_{fl}}$ son subcategorías plenas de $[C, D]_{Cat}$, es decir que consideramos todas las transformaciones naturales.

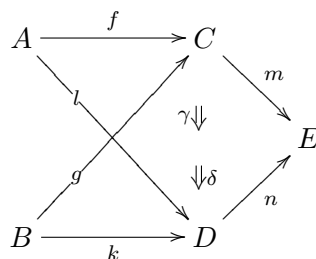
4.28 Proposición. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} Cat_{fl}$ un diagrama 2-filtrante. Sea (\mathcal{C}, h) el bicolímite en Cat . \mathcal{C} tiene límites finitos y los funtores h_A preservan límites finitos.

Observación. Esta proposición se puede probar a partir del teorema 2.4 en [DS]. El teorema afirma que si $\mathcal{A} \xrightarrow{F} Cat$ es un diagrama 2-filtrante cuyo bicolímite es $\mathcal{L}(F)$, y \mathcal{P} una categoría finita, el funtor natural $\mathcal{L}(F^{\mathcal{P}}) \rightarrow \mathcal{L}(F)^{\mathcal{P}}$ es una equivalencia de categorías ($F^{\mathcal{P}}$ es el funtor definido por $F^{\mathcal{P}}(A) = (FA)^{\mathcal{P}}$). Sin embargo, expondremos otra demostración más elemental.

Demostración. Alcanza con probarlo para objetos finales y productos fibrados.

Sea $1_A \in FA$ un objeto final de FA y $x \in FB$ un objeto cualquiera. Para ver que existe una flecha $x \rightarrow 1_A$ en el bicolímite basta con tomar $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$. Como $f(1_A)$ es objeto final en FC existe una flecha $g(x) \rightarrow f(1_A)$ que induce una flecha $x \rightarrow 1_A$ en el bicolímite.

Para ver que esta flecha es única, supongamos que tenemos dos, que se realizan en las categorías FC y FD ($r \in \mathcal{F}l(FC)$, $s \in \mathcal{F}l(FD)$) mediante $A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$ y $A \xrightarrow{l} D \xleftarrow{k} B$. Por el axioma FF1 tenemos



con γ y δ inversibles. De esta forma, en la categoría FE tenemos el cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} mg(x) & \xrightarrow{m(r)} & mf(1_A) \\ \delta_x \downarrow & & \downarrow \gamma_{1_A} \\ nk(x) & \xrightarrow{n(s)} & nl(1_A) \end{array}$$

(omitimos intencionalmente las letras F para no escribir $F(mg)(x)$, $Fm(r)$, etc).

Se deduce que $\overline{h_{f,1_A}^{-1} r h_{g,x}} = \overline{h_{l,1_A}^{-1} s h_{k,x}}$, porque:

$$\begin{aligned} h_{f,1_A}^{-1} r h_{g,x} &\sim h_{mf,1_A}^{-1} m(r) h_{mg,x} \sim \\ &\sim h_{nl,1_A}^{-1} \gamma_{1_A} m(r) \delta_x^{-1} h_{nk,x} \sim \\ &\sim h_{nl,1_A}^{-1} n(s) h_{nk,x} \sim h_{l,1_A}^{-1} s h_{k,x} \end{aligned}$$

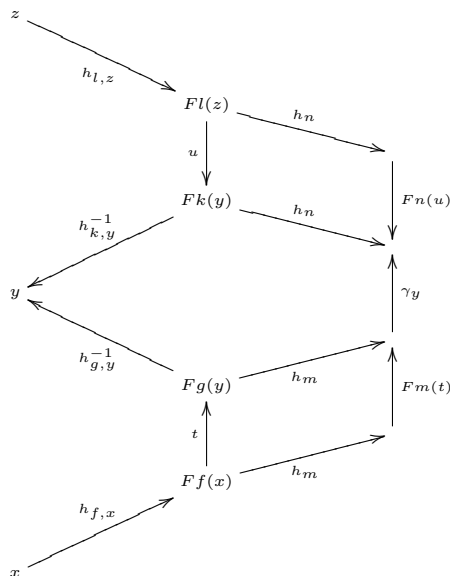
Hemos probado que \mathcal{C} tiene objeto final y los funtores h_A respetan objetos finales. Ahora debemos hacer lo mismo con los productos fibrados. Como primer paso, veremos que todo diagrama correspondiente a un pullback se levanta a una categoría FA (este paso era trivial para el objeto final porque el diagrama correspondiente es vacío). Dicho con más precisión, si el pullback que queremos calcular está dado por el diagrama $I \xrightarrow{T} \mathcal{C}$, conseguiremos un diagrama isomorfo que se factoriza por una FA :

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{T} & \mathcal{C} \\ & \searrow T' & \nearrow h_A \\ & & FA \end{array}$$

\simeq

El límite de T se obtendrá aplicando h_A al límite de T' .

Partamos entonces de $x \rightarrow y \leftarrow z$ en \mathcal{C} . Expresando estas dos flechas como en el lema 4.25 y repitiendo la idea utilizada en la demostración de esa misma proposición, tenemos:



Las flechas $\gamma_y Fm(t)$ y $Fm(u)$ están en la misma categoría FG y dan un diagrama isomorfo al original $x \rightarrow y \leftarrow z$ en \mathcal{C} .

Por último, nos queda ver que los funtores h_A respetan pullbacks. Sea

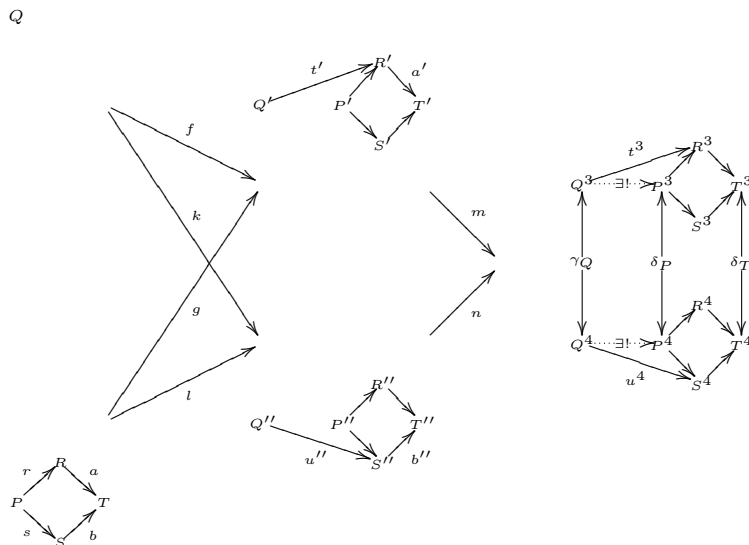
$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{r} & R \\ s \downarrow & & \downarrow a \\ S & \xrightarrow{b} & T \end{array}$$

un pullback en FA , y $Q \xrightarrow{t} R, Q \xrightarrow{u} S$ dos flechas en \mathcal{C} ($Q \in FB$) tales que $\bar{a}t = \bar{b}u$. Las flechas t y u se realizan, en principio, en dos categorías distintas. Podemos escribir:

$$t = \overline{h_{g,R}^{-1} t' h_{f,Q}}$$

$$u = \overline{h_{l,S}^{-1} u'' h_{k,Q}}$$

La ecuación $\bar{a}t = \bar{b}u$ nos dice que $\overline{h_{g,R}^{-1} a' t' h_{f,Q}} = \overline{h_{l,S}^{-1} b'' u'' h_{k,Q}}$ (ver diagrama que sigue para entender quienes son a' y b''). Por el corolario 4.27 podemos igualar las flechas $a' t'$ y $b'' u''$ más adelante:



La flecha que aparece $Q^3 \rightarrow P^3$ (o bien la otra: $Q^4 \rightarrow P^4$) es una realización de la flecha buscada $Q \xrightarrow{v} P$ que hace conmutar el diagrama. Para la unicidad de esa flecha se aplica el mismo argumento. Sin embargo, en este caso hay que aplicar el corolario 4.27 dos veces y luego, para llevar todo a una sola categoría, se usa el axioma F2 (hay que usar el lema 1.15 de [DS] o bien el axioma de Kennison BF2, ver observación 4.22). \square

4.29 Corolario. Si $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \text{Cat}_{fl}$ es un diagrama 2-filtrante y (\mathcal{C}, h) el bicolímite en Cat , entonces resulta ser bicolímite en Cat_{fl} .

Demostración. Sea $\mathcal{D} \in \text{Cat}_{fl}$. El funtor $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}} \xrightarrow{h^*} \text{con}_{\text{cat}}(F, \mathcal{D})$ se restringe bien a $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}_{fl}} \xrightarrow{h^*} \text{con}_{\text{cat}_{fl}}(F, \mathcal{D})$ ya que la composición de dos funtores que preservan límites finitos preserva límites finitos. Como se trata de subcategorías plenas la restricción de h^* sigue siendo plenamente fiel.

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}} & \xrightarrow{h^*} & \text{con}_{\text{cat}}(F, \mathcal{D}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ [\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}_{fl}} & \xrightarrow{h^*} & \text{con}_{\text{cat}_{fl}}(F, \mathcal{D}) \end{array}$$

Veamos que $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}_{fl}} \xrightarrow{h^*} \text{con}_{\text{cat}_{fl}}(F, \mathcal{D})$ es biyectivo en los objetos. La inyectividad es inmediata de la inyectividad para $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{\text{cat}} \xrightarrow{h^*} \text{con}_{\text{cat}}(F, \mathcal{D})$. Si $k \in \text{con}_{\text{cat}_{fl}}(F, \mathcal{D})$ tomemos $\mathcal{C} \xrightarrow{f} \mathcal{D}$ el funtor tal que $fh = k$. Sólo debemos probar que f preserva límites finitos, es decir, que preserva objetos finales y productos fibrados. Un objeto final en \mathcal{C} es isomorfo a $h_A(1_A) = 1_A$ para algún $A \in \mathcal{A}$. Como $fh = k$, $f(1_A) = k_A(1_A)$ que es objeto final en \mathcal{D} . Para probar que f respeta pullbacks se puede proceder de la misma manera, ya que, como vimos en la demostración anterior, todo pullback en \mathcal{C} es isomorfo a uno que proviene de una categoría FA . \square

4.4. Bicolímite en Sit

Llamamos Sit a la 2-categoría de sitios pequeños con límites finitos.

4.30 Proposición. *Sit tiene bicolímites y se obtienen como los bicolímites de las categorías subyacentes.*

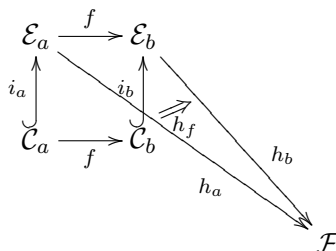
Demostración. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} Sit$ un 2-functor. Sea (\mathcal{C}, h) el bicolímite del diagrama visto en Cat_{fl} . Le damos a \mathcal{C} la topología generada por las familias $c_\alpha \xrightarrow{\lambda_\alpha} c$ (ver 3.3) donde (λ_α) es un cubrimiento en alguna FA con $A \in \mathcal{A}$. Con esta topología, los funtores h_A son morfismos de sitios. Comprobemos la propiedad universal.

Si se tiene un sitio \mathcal{D} con límites finitos, el funtor $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{Sit} \xrightarrow{h^*} con_{Sit}(F, \mathcal{D})$ está bien definido y es plenamente fiel porque tanto $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]_{Sit}$ como $con_{Sit}(F, \mathcal{D})$ son subcategorías plenas de las correspondientes en Cat_{fl} .

De esta forma, lo único que queda por probar es que dado un pseudocono $k \in con_{Sit}(F, \mathcal{D})$, el único funtor f tal que $fh = k$, preserva cubrimientos. Los cubrimientos que hemos elegido como generadores de la topología de \mathcal{C} son preservados porque los k_A son morfismos de sitios y $fh = k$.

El conjunto de familias que van a parar a cubrimientos al aplicarles f da una topología: las condiciones (1), (3) y (4) salen simplemente por la funtorialidad de f . Para la condición (2) (cambio de base) se usa la existencia de productos fibrados y que f los preserva. Esta nueva topología contiene a la topología que le hemos dado a \mathcal{C} , por contener a los generadores. Esto dice que la imagen de todo cubrimiento de \mathcal{C} es un cubrimiento en \mathcal{D} . \square

$$\text{con}_{TOP^{op}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{i^*} \text{con}_{Sit}(\mathcal{C}, \mathcal{F}).$$



Veremos que este functor es una equivalencia de categorías. Este resultado se puede ver como una generalización del lema de Gröthendieck (3.57), que será utilizado en la demostración. El lema que sigue muestra que el functor i^* está bien definido y una recíproca muy útil para probar que es una equivalencia.

5.2 Lema. a) Sean $\mathcal{E}_a \xrightarrow{h_a} \mathcal{F}$ y para cada flecha $a \xrightarrow{f} b$ en \mathcal{A} una doble flecha $h_b f \xrightarrow{h_f} h_a$.

h es un pseudocono si y sólo si hi lo es.

b) Sean $h, l \in \text{con}_{TOP^{op}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dos pseudoconos y supongamos que tenemos para cada objeto $a \in \mathcal{A}$ una doble flecha $h_a \xrightarrow{\rho_a} l_a$. ρ resulta un morfismo de pseudoconos si y sólo si $hi \xrightarrow{i^* \rho} li$ lo es.

5.3 Observación. $hi = i^*(h)$ se define del siguiente modo: $(hi)_a = h_a i_a = i_a^*(h_a)$.

Si $a \xrightarrow{f} b$ es una flecha en \mathcal{A} , tenemos $h_a i_a \xrightarrow{h_f i_a} h_b f i_a = h_b i_b f$.

O sea que efectivamente $i^*(h)$ es un candidato a pseudocono desde \mathcal{C} . Notar que las $h_f i_a$ son inversibles.

Demostración. Demostramos la parte a) del lema. La parte b) es similar. Comprobamos cada condición separadamente.

C1) Teniendo en cuenta que i_a^* es un functor, y que es plenamente fiel, $h_{id_a} = id_{h_a} \Leftrightarrow i_a^*(h_{id_a}) = id_{h_a i_a}$

C2) Dadas $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$, la igualdad $(h_g \cdot f)(h_f) = h_{gf}$ vale si y sólo si vale aplicando i_a^* de los dos lados (de nuevo porque es plenamente fiel). Es decir,

$$\begin{aligned} (h_g \cdot f \cdot i_a)(h_f \cdot i_a) &= (h_{gf} \cdot i_a) \\ ((hi)_g \cdot f)(hi)_f &= (hi)_{gf} \end{aligned}$$

C3) Para cada doble flecha $\mathcal{E}_a \xrightleftharpoons[g]{f} \mathcal{E}_b$ del diagrama, por el mismo argumento que en los otros dos casos, $(h_b \cdot \gamma)(h_g) = (h_f)$ si y sólo si $(h_b \cdot \gamma \cdot i_a)(h_g \cdot i_a) = (h_f \cdot i_a)$, que es lo mismo que $(i^*(h_b) \cdot \gamma)(i^*(h_g)) = i^*(h_f)$

□

5.4 Lema. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{F} \mathcal{B}$ un 2-functor y $h \in \text{con}(F, K)$. Sean $F A \xrightarrow{l_A} K$ morfismos para cada objeto $A \in \mathcal{A}$ que son isomorfos a h_A a través de $h_A \xrightarrow{\rho_A} l_A$.

Conjugando con los isomorfismos ρ se obtiene una estructura de pseudocono para l que además es la única que cumple que ρ es morfismo de pseudoconos (resulta isomorfismo).

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{Ff} & FB \\
 \swarrow \rho_A & \nearrow h_f & \searrow \rho_B \\
 & K & \\
 \swarrow l_A & & \searrow l_B
 \end{array}$$

Demostración. Es fácil comprenderlo aunque las cuentas parezcan complicadas.

Para que ρ sea morfismo de pseudoconos debe cumplirse $(\rho_B.Ff)(h_f) = (l_f)(\rho_A)$ para cada flecha f . Por lo tanto la ecuación $l_f = (\rho_B.Ff)(h_f)(\rho_A^{-1})$ define a l . Verificamos las condiciones de pseudocono, que se siguen inmediatamente de la definición y de las condiciones de pseudocono para h .

$$C1) l_{id_A} = (\rho_A)(h_{id_A})(\rho_A^{-1}) = (\rho_A)(id_{h_A})(\rho_A^{-1}) = id_{l_A}$$

$$C2) \text{ Sean } A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$\begin{aligned}
 (l_g.Ff)(l_f) &= \left((\rho_C.Fg)(h_g)(\rho_B^{-1})Ff \right) (\rho_B.Ff)(h_f)(\rho_A^{-1}) = \\
 &= (\rho_C.F(gf))(h_g.Ff)(\rho_B^{-1}.Ff)(\rho_B.Ff)(h_f)(\rho_A^{-1}) = \\
 &= (\rho_C.F(gf))(h_g.Ff)(h_f)(\rho_A^{-1}) = \\
 &= (\rho_C.F(gf))(h_{gf})(\rho_A^{-1}) = l_{gf}
 \end{aligned}$$

C3) Para $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \uparrow \gamma \\ \xrightarrow{g} \end{array} B$ queremos ver que $(l_B.\gamma)(l_g) = (l_f)$. Que es equivalente a:

$$(l_B.\gamma)(\rho_B.Fg)(h_g)(\rho_A^{-1}) = (\rho_B.Ff)(h_f)(\rho_A^{-1})$$

que a su vez transformamos en

$$(\rho_B.Ff)^{-1}(l_B.\gamma)(\rho_B.Fg)(h_g) = (h_f)$$

Pero $(\rho_B.Ff)^{-1}(l_B.\gamma)(\rho_B.Fg) = (h_B.\gamma)$, y se aplica la propiedad C3 para h . \square

5.5 Proposición. *El funtor $con_{TOPop}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \xrightarrow{i^*} con_{Sit}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ es una equivalencia.*

Demostración.

Es plenamente fiel: Sean $h, l \in con_{TOPop}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ dos pseudoconos, y sea $\tilde{\rho}$ un morfismo entre los pseudoconos hi y li . Veamos que existe un único morfismo de pseudoconos ρ de h a l tal que $\tilde{\rho} = i^*\rho$.

Tenemos transformaciones naturales $h_a i_a \xrightarrow{\tilde{\rho}_a} l_a i_a$. Como las inclusiones i_a son densas, podemos extender las $\tilde{\rho}_a$ de manera única a $h_a \xrightarrow{\rho_a} l_a$. ρ resulta un morfismo de pseudoconos por la parte b) del lema 5.2.

Es cuasisurjectivo: Sea $\tilde{h} \in \text{con}_{\text{Sit}}(\mathcal{C}, \mathcal{F})$. Para cada $a \in \mathcal{A}$, como i_a^* es cuasisurjectivo tomemos $\mathcal{E}_a \xrightarrow{h_a} \mathcal{F}$ tal que $h_a i_a^* \simeq \tilde{h}_a$. La estructura de pseudocono de hi queda determinada si pedimos que ρ sea isomorfismo de pseudoconos (lema previo).

Para cada flecha $a \xrightarrow{f} b$ tenemos $(hi)_a \xrightarrow{(hi)_f} (hi)_b$. Usando nuevamente que i_a^* es plenamente fiel, existe una única $h_a \xrightarrow{h_f} h_b$ que extiende a $(hi)_f$. La estructura h construida es un pseudocono pues $i^*(h)$ lo es. \square

5.6 Teorema. Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{E}} \text{TOP}^{op}$ un diagrama 2-filtrante de topos y $\mathcal{A} \xrightarrow{\mathcal{C}} \text{Sit}$ una restricción a un diagrama de sitios pequeños con límites finitos. Sea $\bar{\mathcal{C}}$ el bicolímite de \mathcal{C} y $\tilde{\mathcal{C}}$ la categoría de haces sobre $\bar{\mathcal{C}}$. $\tilde{\mathcal{C}}$ resulta ser un bicolímite para \mathcal{E} .

Demostración. Sea λ un pseudocono universal $\mathcal{C}_a \xrightarrow{\lambda_a} \bar{\mathcal{C}}$.

$\epsilon\lambda$ es un pseudocono de \mathcal{C} a $\tilde{\mathcal{C}}$. Sea l un pseudocono de \mathcal{E} a $\tilde{\mathcal{C}}$ tal que $li \simeq \epsilon\lambda$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{E}_a & \longrightarrow & \mathcal{E}_b & & \\
 \uparrow & & \uparrow & \searrow^{l_b} & \\
 \mathcal{C}_a & \longrightarrow & \mathcal{C}_b & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{F} \\
 & & \downarrow^{l_a} & \searrow^{\lambda_b} & \uparrow^{\epsilon} \\
 & & & & \bar{\mathcal{C}} \\
 & & & \swarrow^{\lambda_a} & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Esto nos da:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{con}_{\text{TOP}^{op}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) & \\
 l^* \nearrow & & \searrow i^* \\
 [\tilde{\mathcal{C}}, \mathcal{F}]_{\text{TOP}^{op}} & \simeq & \text{con}_{\text{Sit}}(\mathcal{C}, \mathcal{F}) \\
 \epsilon^* \searrow & & \nearrow \lambda^* \\
 & [\bar{\mathcal{C}}, \mathcal{F}]_{\text{Sit}} &
 \end{array}$$

ϵ^* es una equivalencia por el lema de Gröthendieck (3.57). La generalización del lema de Gröthendieck dada por la proposición anterior dice que i^* es una equivalencia. λ^* es una equivalencia porque $\bar{\mathcal{C}}$ es bicolímite de sitios. Notar que se está aplicando la propiedad universal para un sitio que no es pequeño. Esto vale porque la construcción del bicolímite no varía al agrandar el universo.

Como $\epsilon^*, \lambda^*, i^*$ son equivalencias de categorías y $\lambda^* \epsilon^* \simeq i^* l^*$, l^* también es una equivalencia. \square

Referencias

- [SGA4-I] Michael Artin, Alexander Grothendieck, Jean-Louis Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, tome I. Springer-Verlag (1972)
- [SGA4-II] Michael Artin, Alexander Grothendieck, Jean-Louis Verdier. *Théorie des Topos et Cohomologie Étale des Schémas*, tome II. Springer-Verlag (1972)
- [MCL] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag (1971).
- [GZ] P. Gabriel, M. Zisman. *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*. Springer-Verlag (1967).
- [DS] Eduardo J. Dubuc, Ross Street. *A Construction of 2-Filtered Bicolimits of Categories*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques (2006), arXiv:math.CT/0605304 v1 (2006).