UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Multiplicidad de soluciones para ecuaciones elípticas no lineales con exponente crítico.

Analía Silva

Director: Julián Fernández Bonder

Mayo 2008

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Julián Fernández Bonder, por su ayuda incondicional, por su paciencia y ternura, por hacer que lo difícil sea fácil, por valorar hasta los esfuerzos más pequeños, por motivarme a nunca bajar los brazos y a seguir luchando, por sus consejos (que fueron imprescindibles en este último tiempo), por hacerme sentir cómoda para hacer cualquier pregunta, por todo el tiempo que me dedicó para la realización de esta tesis y por su buen humor. Pero, por sobre todo, porque soy muy feliz cuando trabajo con él.

Quiero agradecer a todo el grupo de ecuaciones por darme la oportunidad de empezarlos a conocer. Pero especialmente quisiera agradecer a Sandra Martínez, por ser mi angelito de la guarda dentro de la facu, por ser una verdadera guía para mi, porque me acompaño y contuvo en todos los momentos difíciles. También, quiero agradecerle a Noemí, por la calidez con la que siempre me trata.

Quiero agradecerle a todos mis profes de análisis, quienes me enseñaron mis materias favoritas y me hicieron divertir mucho en sus clases. Gracias por contestar todas mis dudas. Quiero agradecer a: Carlos Cabrelli, Silvia Lassalle, Daniel Carando y Pablo de Napoli, por el afecto que siempre me demuestran cuando los veo.

Quiero agradecer a todos mis compañeros y amigos, por compartir el día a día, por todos los apuntes que me prestaron, por todas las explicaciones por teléfono, por todos los buenos momentos que pasamos juntos, porque todos ocupan un lugar en mi corazón. En especial quisiera mencionar a mis amigos:Caro, Lau B, Magui, Dani, Mer, Eze M, Lean, Isa, Pau, Kari, Julián, Geo, Sol, Nico S, Manu, David, Pablo T, Pablo S, Marce, Eze E, Rocío, Lucas, Santi, Manuela y Yami.

Quisiera agradecer a toda mi familia, por acompañarme siempre, por estar en las buenas y en la malas, por escucharme y por todo su amor.

CAPíTULO 1

Introducción

1. Resumen

En esta Tesis se estudian algunas ecuaciones diferenciales elípticas que aparecen en diversas aplicaciones que comentaremos más adelante.

Más precisamente los problemas a los que nos dedicaremos, son los de determinar condiciones suficientes que garanticen la existencia de (una o múltiples) soluciones de ecuaciones del tipo

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es una región abierta, conexa y acotada de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función y $\mathcal{A}$ es un operador diferencial *elíptico* de segundo orden.

2. Motivaciones

Las ecuaciones que nos dedicaremos a estudiar en esta Tesis aparecen en un sinnúmero de aplicaciones. Haremos ahora una deducción muy general de las mismas a partir de lo que se conoce como *Leyes de Conservación*.

Consideremos una porción del espacio físico $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ fija y para un volumen arbitrario $U \subset \Omega$ de material se plantea como válida la siguiente relación de *balance energético* o *principio de conservación*:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{Q}(U) = -\Phi(\partial U) + \mathcal{F}(U),$$

donde $\mathcal{Q}(U)$ representa la energía contenida en U a tiempo t, $\Phi(\partial U)$ es el flujo de energía saliente por unidad de tiempo a través de la frontera ∂U y $\mathcal{F}(U)$ es la energía creada (o gastada) dentro de U por unidad de tiempo.

De estas cantidades asumiremos que vienen dadas por las relaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(U) &= \int_U e(x,t)\rho(x,t)\,dx \\ \Phi(\partial U) &= \int_{\partial U} \phi(x,t)\cdot \mathbf{n}\,dS \\ \mathcal{F}(U) &= \int_U f(x,t)\,dx \end{aligned}$$

donde $e(x,t)$ representa una densidad de energía por unidad de masa, $\rho(x,t)$ es la densidad de masa del material, $\phi(x,t)$ es la tasa del flujo por unidad de superficie por unidad de tiempo y $f(x,t)$ es la densidad de energía creada por unidad de tiempo.

Asumiremos que estamos en una situación de equilibrio con lo que la variación de energía es cero (i.e. $\frac{d}{dt}\mathcal{Q}(U) = 0$). Por ende se tiene

$$0 = -\int_{\partial U} \phi(x) \cdot \mathbf{n}\, dS + \int_U f(x)\, dx.$$

Aplicando el Teorema de la Divergencia, se obtiene

$$\int_U \Big[\operatorname{div}\phi + f\Big]\, dx = 0, \qquad \text{para todo } U \subset \Omega.$$

de donde se deduce que

$$\operatorname{div}\phi + f = 0, \qquad \text{en } \Omega.$$

Esta es la llamada *Ecuación de Continuidad*.

Para estudiar esta ecuación, se utilizan las *Leyes constitutivas*. La más usual es la llamada *Ley de Fourier* que establece que el flujo ϕ viene dado como un múltiplo del gradiente de un cierto potencial u, i.e.

$$\phi = -k\nabla u, \tag{1.1}$$

donde $k \geq 0$ es la llamada constante de difusividad térmica.

Esta ley constitutiva aparece en distintas ramas de la física y lleva diferentes nombre de acuerdo a la interpretación que se haga de las variables. Por ejemplo

- Si u representa una concentración química, (1.1) es la Ley de difusión de Fick.
- Si u representa una temperatura, (1.1) es la Ley de conducción térmica de Fourier.
- Si u representa un potencial electrostático, (1.1) es la Ley de conducción eléctrica de Ohm.

Ver [**17**] para una discusión más detallada de estas aplicaciones.

Tanto la constante de difusividad k como la densidad de energía f pueden depender de diversas cantidades. La suposición más amplia es que ambas dependan tanto de la ubicación espacial x, como del valor de la temperatura en ese punto $u(x)$ y del valor del gradiente de temperaturas $\nabla u(x)$. Es decir, que

$$k = k(x, u, \nabla u), \qquad f = f(x, u, \nabla u).$$

Luego, llegamos a la siguiente ecuación

$$-\operatorname{div}(k(x, u, \nabla u)\nabla u) + f(x, u, \nabla u) = 0, \qquad \text{en } \Omega.$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden elíptica cuasilineal en forma de divergencia.

La *elipticidad* significa que el coeficiente k es no negativo. Si $0 < \inf k \leq \sup k < \infty$ la ecuación se dice *uniformemente elíptica*. Si $\inf k = 0$ se dice elíptica *degenerada* y si $\sup k = \infty$ se dice elíptica *singular*.

El término *cuasilineal*, hace referencia a que la ecuación es lineal en las derivadas segundas de u, pero los coeficientes que aparecen junto a esas derivadas segundas dependen (de manera no lineal) tanto de u como de ∇u.

Del término de reacción f, nosotros haremos la suposición adicional de que es independiente de ∇u. Es decir que

$$f = f(x, u).$$

Al estudiar cierto tipo de fluidos, se observa que el coeficiente de difusión k depende exclusivamente del gradiente ∇u. Estos son los llamados *Fluidos No Newtonianos* (ver, por ejemplo, [**2**]). Dentro de estas dependencias, la más simple es asumir que k viene dado por una potencia del valor absoluto del gradiente, i.e.

$$k(x, u, \nabla u) = |\nabla u|^{\alpha}.$$

Con estas hipótesis, la ecuación a estudiar se reduce a

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{\alpha}\nabla u) + f(x, u) = 0, \qquad \text{en } \Omega.$$

Lo usual en la literatura matemática es llamar $\alpha = p-2$ con lo que la ecuación se re escribe como

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x, u) = 0, \qquad \text{en } \Omega.$$

Este operador, $\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, se lo denomina el $p-$Laplaciano y se lo nota como $\Delta_p u$.

Observemos que cuando $p = 2$ coincide con el Laplaciano usual y es uniformemente elíptica. Si $p > 2$ la ecuación resulta elíptica degenerada, mientras que si $1 < p < 2$ la ecuación resulta elíptica singular.

3. Historia del Problema

Es de imaginar que, visto la inmensa variedad de aplicaciones que tiene, este problema posee una extensa historia y la lista de autores que han hecho contribuciones al mismo es interminable. Por lo tanto, nos limitaremos a comentar sobre los resultados que más se relacionan con los de esta Tesis.

Los métodos variacionales para el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales, se remontan a los trabajos de Euler del siglo XVIII. Sin embargo, los teoremas de min-max que se van a utilizar en esta Tesis, pueden rastrearse al trabajo fundacional de L. Ljusternick y L. Schnirelman de 1934 [**20**].

Este Teorema fue luego ampliamente utilizado y generalizado en innumerables direcciones. Quizás el artículo más importante sobre el tema es de V. Benci y P.H. Rabinowitz de 1979 [**4**].

En directa relación con nuestro trabajo, no podemos dejar de mencionar el Teorema de J.T. Schwartz de 1963 [**22**] en la que se generaliza el Teorema de Ljusternick-Schirelman a variedades completas en un espacio de Banach.

En el capítulo 2 y subsiguientes damos muestra de la relación existente entre los problemas variacionales y las soluciones de las ecuaciones diferenciales descritas en la sección anterior.

Los métodos variacionales que describimos, precisan que las no-linealidades tengan un crecimiento limitado por las inmersiones de Sobolev (cf. Capítulo 2, sección 1). Más precisamente, se necesita que, entre otras hipótesis,

$$|f(x, t)| \leq C(1 + |t|^{p^*-1}),$$

donde $p^* = np/(n-p)$.

Para el caso modelo, $f(x, t) = t^r$, es bien sabido que si $r \geq p^*$ y el dominio Ω es estrellado con respecto a un punto, la ecuación

$$-\Delta_p u = u^{r-1}$$

no tiene soluciones positivas (ver [**10**], Capítulo 9, sección 4.2). Por lo cual el estudio del problema cuando la no linealidad $f(x, t)$ presenta un crecimiento crítico posee una dificultad extra e intrínseca.

Los trabajos fundamentales en el estudio de problemas con crecimiento crítico son los de H. Brézis y L. Nirenberg [**5**] y P.L. Lions [**19**] de 1983 y 1985 respectivamente. Ver también el trabajo de J. García-Azorero e I. Peral [**18**] de 1991.

Queremos volver a remarcar que esta lista es sólo un listado, muy incompleto por cierto, de los trabajos más relevantes para esta Tesis. Seguramente estamos olvidando muchas colaboraciones fundamentales en el estudio de este problema.

4. Descripción de la Tesis

Esta Tesis, después de este capítulo introductóreo, se divide en 5 capítulos que pasamos a describir.

En el capítulo 2, damos los preliminares necesarios para la comprensión de esta Tesis. Muchos de los temas que ahí se incluyen son vistos en algunas materias de grado, pero hemos decidido incluirlos para hacer que este trabajo sea lo más autocontenido posible.

En el capítulo 3, demostramos uno de los teoremas fundamentales en el Cálculo de Variaciones, el Teorema de Paso de la Montaña. Luego damos algunas extensiones y aplicaciones del mismo.

En el capítulo 4, probamos un teorema debido a M. Struwe de 1981 [**23**] donde se dan condiciones en la función $f(x,t)$ para la existencia de, al menos, tres soluciones no triviales para la ecuación

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + f(x,u) = 0, \qquad \text{en } \Omega,$$

complementada con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas.

En el capítulo 5, estudiamos lo que hoy es conocido como el *Método de Compacidad por Concentración* que fuera introducido por P.L. Lions en 1995, [**19**] (ver también el artículo clásico de H. Brézis y L. Nirenberg [**5**] de 1983). Finalizando este capítulo damos una primera aplicación del método a la resolución de un problema semilineal con crecimiento crítico (ver sección 2).

Finalmente, en el capítulo 6, combinamos las ideas del Teorema de Struwe visto en el capítulo 4 y el Método de Compacidad por Concentración visto en el capítulo 5 para estudiar el problema

$$-\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |u|^{p^*-2}u + \lambda f(x,u), \qquad \text{en } \Omega,$$

complementado con condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas, donde $p^* = np/(n-p)$ es el exponente crítico en la inmersión de Sobolev (cf. Capítulo 2, sección 1) y la no linealidad $f(x,t)$ tiene crecimiento subcrítico.

En este capítulo, en la sección 3, probamos la existencia de al menos tres soluciones no triviales. Una positiva, una negativa y otra que cambia de signo.

Los resultados de este último capítulo son originales de esta Tesis.

CAPíTULO 2

Preliminares

1. Espacios de Sobolev

Para desarrollar el tema de Espacios de Sobolev, nos guiaremos del libro de Evans. Veamos primero algunas definiciones básicas de los espacios de Sobolev.

DEFINICIÓN 2.1 (Derivada débil). *Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ decimos que u tiene derivada débil con respecto de x_i si existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\phi_{x_i}\,dx = -\int_\Omega v\phi\,dx \quad \forall\,\phi \in C^1_c(\Omega)$$

Dicho v es único y lo notamos $v = u_{x_i}$.

Por inducción dada $\alpha \in \mathbb{N}^n$ definimos $D^\alpha u$, si existe, a la única función en $L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega uD^\alpha\phi\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u\phi\,dx \quad \forall\,\phi \in C^1_c(\Omega)$$

DEFINICIÓN 2.2. *Sea $k \in \mathbb{N}$ y $1 \le p \le \infty$. Definimos el espacio de Sobolev*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall\,|\alpha| \le k\}$$

Notamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$.

La norma de este espacio es:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha|\le k}\int_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si $p = \infty$ definimos la norma como:

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le k}\|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

DEFINICIÓN 2.3. *Decimos que u_n converge a u en $W^{k,p}(\Omega)$. Si $\|u - u_n\| \longrightarrow 0$.*

DEFINICIÓN 2.4. *Notamos con $W^{k,p}_0(\Omega)$ a la clausura de $C^\infty_c(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$.*

Enunciaremos un par de propiedades básicas la demostración queda como ejercicio para el lector.

TEOREMA 2.5. *Sean $u, v \in W^{k,p}(\Omega)$ tenemos que:*

1. $D^\alpha u \in W^{k-|\alpha|,p}(\Omega)$ *y además*
$$D^\beta(D^\alpha u) = D^\alpha(D^\beta u) = D^{\alpha+\beta}u$$
2. $\lambda u + \mu v \in W^{k,p}(\Omega)$ *y además*
$$D^\alpha(\lambda u + \mu v) = \lambda D^\alpha u + \mu v$$

3. *$V \subset \Omega$ abierto, entonces $u \in W^{k,p}(V)$*
4. *Dada $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ entonces $\phi u \in W^{k,p}(\Omega)$ y además vale que*

$$D^\alpha(\phi u) = \sum_{\beta \leq \alpha} \left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array} \right) D^\beta \phi D^{\alpha-\beta} u$$

TEOREMA 2.6. *$W^{k,p}(\Omega)$ es una espacio de Banach. Más aún, si $p = 2$ es un Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN. Queremos ver que si $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{k,p}(\Omega)$ entonces existe $u \in W^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$.

Como $\{u_n\}$ es de Cauchy entonces

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u_n - D^\alpha u_m\|^p_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Esto nos dice que $\{D^\alpha u_n\}$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$. Como $L^p(\Omega)$ es completo podemos afirmar que existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $D^\alpha u_n \longrightarrow v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ y existe $u \in L^p(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$. Alcanza con ver que $v_\alpha = D^\alpha u$. Para ver que $v_\alpha = D^\alpha u$ tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx &= \lim \int_\Omega u_n D^\alpha \varphi \, dx \\ &= \lim (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx \end{aligned}$$

. Es decir,

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = \lim (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha u_n \varphi \, dx$$

Concluimos, que $v_\alpha = D^\alpha u$, que era lo que queríamos probar. □

Veamos ahora un teorema que nos permite aproximar una función en un espacio de Sobolev por funciones regulares.

DEFINICIÓN 2.7. *Dado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $\varepsilon > 0$, definimos el siguiente conjunto*

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in U : d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$$

DEFINICIÓN 2.8. *Consideramos la siguiente función*

$$\eta(x) = \begin{cases} c e^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & en\ |x| > 1 \\ 0 & en\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

Donde c es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\, dx = 1$. Notemos que $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que $Sop(\eta) = B_1(0)$.

Dado $\varepsilon > 0$ definimos $\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$.

DEFINICIÓN 2.9. *Decimos que V esta compactamente contenido en Ω si $\overline{V} \subset \Omega$ y además $\overline{V}$ es compacto. La notación que utilizaremos es $V \subset\subset \Omega$.*

DEFINICIÓN 2.10. *Decimos que $u_m \longrightarrow u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ si $u_m \longrightarrow u$ en $W^{k,p}_{loc}(V)$ para cada $V \subset\subset \Omega$.*

TEOREMA 2.11 (Aproximación local por funciones regulares). *Sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para algún $1 \leq p < \infty$ y $u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ en . Entonces:*

1. *$u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ para cada $\varepsilon > 0$.*
2. *$u^\varepsilon \longrightarrow u$ en $W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Para ver 2, vamos a probar primero que si $|\alpha| \leq k$ entonces $D^\alpha u^\varepsilon = \eta_\varepsilon * D^\alpha u$ en Ω_ε. Dado $x \in \Omega_\varepsilon$

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon =& D^\alpha \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\ =& \int_\Omega D_x^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \\ =& (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy \end{aligned}$$

Para $x \in \Omega_\varepsilon$ la función $\phi(y) := \eta_\varepsilon(x-y)$ pertenece a $C_c^\infty(\Omega)$. Entonces tenemos que

$$\int_\Omega D_y^\alpha \eta_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)Du(y)\,dy$$

Juntando las dos nos queda

$$\begin{aligned} D^\alpha u^\varepsilon(x) =& (-1)^{|\alpha|+|\alpha|}\int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)D^\alpha u(y)\,dy \\ =& [\eta_\varepsilon * D^\alpha u](x) \end{aligned}$$

Sea $V \subset\subset \Omega$ entonces $D^\alpha u^\varepsilon \longrightarrow D^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$,para cada $|\alpha| \leq k$. Concluimos

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \longrightarrow 0$$

Esto prueba el item 2. □

TEOREMA 2.12 (Aproximación global por funciones regulares). *Sea Ω acotado y sea $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Entonces existen funciones $u_m \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ en $W^{k,p}(\Omega)$

DEMOSTRACIÓN. Tenemos la siguiente descomposición $\Omega = \bigcup \Omega_i$, donde

$$\Omega_i := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \frac{1}{i}\} \text{ para } (i = 1, 2, \cdots)$$

Escribimos $V_i = \Omega_{i+3} - \overline{\Omega}_{i+1}$. Elegimos un conjunto abierto $V_0 \subset \Omega$ tal que $\Omega = \bigcup_{i=0}^\infty V_i$. Ahora tomamos $\{\zeta_i\}$ una partición de la unidad subordinada a los conjuntos abiertos $\{V_i\}$, es decir,

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta_i \leq 1 & \zeta_i \in C_c^\infty(V_i) \\ \sum_{i=0}^\infty \zeta_i = 1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Por las propiedades 2.5 sabemos $\zeta_i \in W^{k,p}(\Omega)$, además $sop(\zeta_i u) \subset V_i$.

Fijo $\delta > 0$, elegimos $\varepsilon_i > 0$ suficientemente pequeño para que $u^i := \eta_{\varepsilon_i} * (\zeta_i u)$ cumpla que

$$\begin{cases} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \frac{\delta}{2^{i+1}} & (i = 0, 1, \cdots) \\ sop\, u^i \subset W_i & (i = 1, \cdots) \end{cases}$$

Para $W_i := \Omega_{i+4} - \overline{\Omega}_i \supset V_i (i = 1, \cdots)$

Escribimos $v := \sum_{i=0}^{\infty} u^i$, esta función es $C^\infty(\Omega)$ pues cada x esta en finitos sumandos. Como $u = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i u$, para cada $V \subset\subset \Omega$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \|u - v\|_{W^{k,p}(V)} &\leq \sum_{i=0}^{\infty} \|u^i - \zeta_i u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ &\leq \delta \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = \delta \end{aligned}$$

Tomando supremo sobre todos los conjuntos $V \subset\subset \Omega$, concluimos entonces $\|v - u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \delta$ □

Observación 2.13. u_m en general no son regulares hasta $\partial\Omega$

Definición 2.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, decimos que $\partial\Omega$ es C^k, si para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existe $B = B_r(x_0)$ y $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^k tal que*

$$\Omega \cap B = \{x \in B : x_n > \gamma(x_1 \cdots x_{n-1})\}$$

Teorema 2.15. *sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto acotado y $\partial\Omega$ de clase C^1, $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$ entonces existe $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega}) \cap W^{k,p}(\Omega)$ tal que $\|u - u_n\|_{W^{k,p}(\Omega)} \longrightarrow 0$*

Demostración. Fijo un punto $x^0 \in \partial\Omega$. Como $\partial\Omega$ es C^1, existe $r > 0$ y una función $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\Omega \cap B(x^0, r) = \{x \in B(x^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \cdots, x_{n-1})\}$$

Sea $V := \Omega \cap B(x^0, \frac{r}{2})$.

Por otro lado, definimos $x^\varepsilon := x + \varepsilon e_n \quad (x \in V, \varepsilon > 0)$, para un λ fijo tenemos que $B(x^\varepsilon, \varepsilon)$ vive en $\Omega \cap B(x^0, r)$, para $x \in V$ para $\varepsilon > 0$.

Ahora, definimos $u_\varepsilon(x) = u(x^\varepsilon) \quad (x \in V)$,esta es la función u trasladada $\lambda\varepsilon$ en la dirección de e_n. Luego, $v^\varepsilon = \eta_\varepsilon * u_\varepsilon$ y tenemos que $v_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Veamos que $v^\varepsilon \longrightarrow u$ en $W^{k,p}(V)$. En efecto, $\forall\, |\alpha| \leq k$

$$\|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)} \leq \|D^\alpha v^\varepsilon - D^\alpha u_\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|D^\alpha u_\varepsilon - D^\alpha u\|_{L^p(V)}.$$

El lado derecho del segundo termino tiende a cero con ε debido a que la norma L^p es continua y el primer termino tiende a 0 por argumentos similares a la demostración del Teorema 2.11.

Elegimos $\delta > 0$. Como $\partial\Omega$ es compacta, podemos encontrar una cantidad finita de puntos $x_i^0 \in \partial\Omega$, radio $r_i > 0$, correspondiente a los conjuntos $V_i = \Omega \cap B(x_i^0, \frac{r_i}{2})$ y funciones $v_i \in C^\infty(\overline{V_i})$ $(i = 1, \cdots, N)$ tales que $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^N B^0(x_i^0, \frac{r_i}{2})$ y

$$\|v_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq \delta$$

Elegimos $V_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N V_i$ y usando el Teorema 2.11 tenemos que existe $v_0 \in C^\infty(\overline{V}_0)$ que satisface:

$$\|v_0 - u\|_{W^{k,p}(V_0)} \leq \delta$$

Tomamos $\{\zeta_i\}$ una partición de la unidad subordinada a los conjuntos abiertos $\{V_i\}_{i=0}^N$ en Ω. Definimos $v := \sum_{i=0}^N \zeta_i v_i$. Notemos que $v \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

$$\begin{aligned} \|D^\alpha v - D^\alpha u\| &\leq \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\eta_i u_i) - D^\alpha(\eta_i u)\| = \sum_{i=0}^N \|D^\alpha(\eta_i(u_i - u))\| \\ &= \sum_{i=0}^N \| \sum_{\beta \leq \alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} D^\beta \eta_i D^{\alpha-\beta}(u_i - u)\| \end{aligned}$$

Acotando por $\|D^{\beta}\eta_i\|_{L^\infty(\Omega)}$, nos queda que

$$\|D^\alpha v - D^\alpha u\| \leq \sum_{i=0}^{N} C\|u_i - u\|_{W^{k,p}(V_i)} \leq CN\delta$$

Con esto termina la demostración $\square$

Teorema 2.16 (Teorema de extensión). *Sea Ω un abierto acotado y $\partial\Omega$ es C^1. Sea V un conjunto abierto y acotado tal que $\Omega \subset\subset V$. Entonces existe un operador acotado*

$$E : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$$

Tal que para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$:

1. *$Eu = u$ en casi todo punto de Ω.*
2. *Eu tiene soporte contenido en V*
3. *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ La constante C depende solo de p , Ω y V*

Definición 2.17. *Nosotros llamamos Eu a la extensión de u a $\mathbb{R}^n$*

Demostración. Fijo $x^0 \in \partial\Omega$ y supongo primero que $\partial\Omega$ chata cerca de x^0, podemos asumir que existe una bola B,con centro x^0 y radio r, tal que

$$\begin{cases} B^+ := B \cap \{x_n \geq 0\} \subset \overline{\Omega} \\ B^- := B \cap \{x_n \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n - \Omega \end{cases}$$

Suponemos que $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Definimos

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) \text{ si } x \in B^+ \\ -3u(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) + 4u(x_1, \cdots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2}) \text{ si } x \in B^- \end{cases}$$

Para ver que $\overline{u} \in C^1(B)$. Definimos $u^- = \overline{u}|_{B^-}$, $u^+ := \overline{u}|_{B^+}$. Demostremos primero $u^-_{x_n} = u^+_{x_n}$ en $\{x_n = 0\}$.

Por la definición de $\overline{u}$ tenemos que:

$$\frac{\partial u^-}{\partial x_n} = 3\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, -x_n) - 2\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, -\frac{x_n}{2})$$

Entonces

$$u^-_{x_n}|_{\{x_n=0\}} = u^+_{x_n}|_{\{x_n=0\}} = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_{n-1}, 0)$$

Ahora, como $u^+ = u^-$ en $\{x_n = 0\}$, vimos que:

$$u^-_{x_i}|_{x_n=0} = u^+_{x_i}|_{x_n=0} \text{ para } i = 1, \cdots, n-1$$

Es decir, tenemos que:

$$D^\alpha u^-|_{x_n=0} = D^\alpha u^+|_{x_n=0}$$

y esto vale $|\alpha| \leq 1$ se sigue entonces que $\overline{u} \in C^1(B)$.

Usando esto podemos ver que:

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

Para alguna constante que no depende de u.

Consideramos ahora, la situación tal que $\partial\Omega$ no es necesariamente chata cerca de x^0. Podemos encontrar una función $\Phi \in C^1$, con inversa Ψ, tal que Φ "endereza a la $\partial\Omega$ cerca de x^0".

Escribimos $y = \Phi(x), x = \Psi(y), u'(y) := u(\Psi(y))$. Elegimos B una bola pequeña para que cumpla lo pedido. Luego, como antes extendemos u' de B^+ a $\overline{u}'$ que esta definida en toda la bola y como antes tenemos la acotación:

$$\|\overline{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq C\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}$$

Sea $W := \Psi(B)$, regresando con el cambio de variables, obtenemos una extensión $\overline{u}$ de u a W, con

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Como $\partial\Omega$ es compacta, existen finitos puntos $x_i^0 \in \partial\Omega$, conjuntos abiertos W_i y extensiones $\overline{u_i}$ de u a W_i, tal que $\Gamma \subset \bigcup_{i=0}^N$. Tomemos $W_0 \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega \subset \bigcup_{i=0}^N W_i$ y tenemos una partición de la unidad asociada. Escribimos $\overline{u} := \sum_{i=0}^N \zeta_i \overline{u}_i$, donde $\overline{u}_0 = u$. Y usando las estimaciones anteriores, para $u_i, \overline{u}_i$ obtenemos que

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$$

Para alguna constante C que no depende de u. Además podemos arreglar el soporte de $\overline{u}$ para que este contenido en $V \supset\supset \Omega$.

Vamos a notar $Eu := \overline{u}$ y observamos que las funciones $u \longmapsto Eu$ es lineal.

Hasta acá, teníamos $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Suponemos ahora que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ y elegimos $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ que converge a u. Por la estimación que ya hicimos y por linealidad, tenemos que:

$$\|Eu_m - Eu_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Por lo tanto, sabemos que $\{Eu_m\}$ es una sucesión de Cauchy y converge a $\overline{u} := Eu$. Esta extensión, no depende de la elección de la sucesión que aproxima y satisface las condiciones del teorema. $\square$

TEOREMA 2.18 (De trazas). *Suponemos Ω es acotado y $\partial\Omega$ es C^1. Entonces existe un operador lineal acotado.*

$$T : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$$

tal que:

1. $Tu = u|_{\partial\Omega}$ *si* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.
2. $$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

   Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con la constante C depende solo de p y Ω.

DEFINICIÓN 2.19. *Llamamos Tu a la traza de u en $\partial\Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Suponemos primero $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Suponemos $x^0 \in \partial\Omega$ y $\partial\Omega$ es chata cerca x^0. Elegimos una bola abierta B como en la prueba anterior y $\widehat{B}$ es la bola de concentración con radio $\frac{r}{2}$.

Elegimos $\zeta \in C_c^\infty(B)$, con $\zeta \geq 0$ en B, $\zeta = 1$ en $\widehat{B}$. Notamos Γ a la porción $\partial\Omega$ dentro de $\widehat{B}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |u|^p\,dx' \leq \int_{x_n=0} \zeta|u|^p\,dx' &= -\int_{B^+} (\zeta|u|^p)_{x_n}\,dx \\ &= -\int_{B^+} |u|^p\zeta_{x_n} + p|u|^{p-1}(sgnu)u_{x_n}\zeta\,dx \\ &\leq C\int_{B^+} |u|^p + |\nabla u|^p\,dx\end{aligned}$$

En la última acotación estamos desigualdad de Young.

Si $x^0 \in \partial\Omega$, pero $\partial\Omega$ no es chata cerca de x^0, entonces la enderezamos como hicimos antes. Aplicando la acotación anterior tenemos que

$$\int_\Gamma |u|^p \, ds \leq C \int_\Omega |u|^p + |\nabla u|^p \, dx$$

Como $\partial\Omega$ es compacta, existen finitos $x_i^0 \in \partial\Omega$ y conjuntos abiertos $\Gamma_i \subset \partial\Omega \, (i = 1, \cdots, N)$ tal que $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i$ y

$$\|u\|_{L^p(\Gamma_i)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad (i = 1, \cdots, N)$$

Por lo tanto, si notamos

$$Tu := u|_{\partial\Omega}$$

Entonces

$$\|Tu\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Para alguna constante C apropiada, que no depende de u.

Hasta acá, suponíamos $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Ahora, suponemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces existen funciones $u_m \in C^\infty(\overline{\Omega})$ que convergen a u en $W^{1,p}(\Omega)$.Por lo anterior tenemos,

$$\|Tu_m - Tu_l\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Esto nos dice que $\{Tu_m\}$ es una sucesión de Cauchy. Podemos definir, entonces

$$Tu := \lim_{m \longrightarrow \infty} Tu_m$$

Esta definición no depende de la sucesión que aproxima. $\square$

Teorema 2.20. *Sea Ω acotado y $\partial\Omega \in C^1$. Suponemos $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Entonces,*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ si y solo si } Tu = 0 \text{ en } \partial\Omega$$

Demostración. Dada $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sabemos que existe un sucesión de funciones $\{u_m\} \subset C_c^\infty(\Omega)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Es claro que, $Tu_m = 0$ y por la continuidad del operador traza, que vimos en el Teorema 2.18 concluimos que $Tu = 0$. La otra implicación es más complicada y puede verse en el libro de Evans. $\square$

Al estudiar los Espacios de Sobolev,surge una pregunta: ¿Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ podemos asegurar que automáticamente u pertenece a otro espacio?. La respuesta es que si y a que espacio, depende de p.

1. $1 \leq p < n$
2. $p = n$
3. $n < p \leq \infty$

Primero veremos la Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, para esto vamos a suponer $1 \leq p < n$. El objetivo es obtener una acotación del tipo

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Para alguna $C > 0$, $1 \leq q < \infty$ y para toda función $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nos interesa que la constante C y q no dependa de u.

Primero vamos a ver que para una desigualdad como la que propusimos, q no puede ser arbitrario. Para esto, elijamos $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$ y definimos para $\lambda > 0$

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x) \quad (x \in \mathbb{R}^n)$$

Si aplicamos la desigualdad a u_λ, tenemos:

$$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Además,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q\, dx = \frac{1}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q\, dy$$

Y también

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda|^p\, dx = \lambda^p\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p\, dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p\, dy$$

Reemplazando en la desigualdad para u_λ nos queda

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Es decir,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Pero si $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} \neq 0$ y hacemos tender λ a 0 o a ∞, según corresponda, obtenemos una contradicción, con el hecho de que $u \not\equiv 0$. Por lo tanto, necesitamos que $1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q} = 0$. Es decir, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, $q = \frac{np}{n-p}$.

Este razonamiento motiva la siguiente definición.

Definición 2.21. *Si $1 \leq p < n$, el conjugado de Sobolev de p es*

$$p^* := \frac{np}{n-p}$$

Notemos que

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}, \quad p^* > p$$

Teorema 2.22 (Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev). *Suponemos $1 \leq p < n$. Entonces existe una constante C, que depende solo de p y n, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$

Demostración. Observemos que si vale la desigualdad para $p = 1$ entonces vale para $1 \leq p < n$. En efecto, si tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \quad u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

Si aplicamos la desigualdad para $v := |u|^\gamma$ nos queda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla |u|^\gamma|\, dx$$

Por otro lado usando que $\nabla(|u|^\gamma) = \gamma|u|^{\gamma-1}sgn(u)\nabla u$ y Hölder, sabemos que:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq C\gamma\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1}|\nabla u|\, dx \\ &\leq C\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)p'}\, dx\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Elegimos γ tal que $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)p'$, donde $p' = \frac{p}{p-1}$. Es decir $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p}$ y $\frac{\gamma n}{n-1} = p^*$.

Reemplazando nos queda

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C\frac{p(n-1)}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Si pasamos dividiendo obtenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C\frac{p(n-1)}{n-p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Veamos el caso $p = 1$. Recordemos la Desigualdad de Hölder generalizada

Observación 2.23 (Hölder generalizado). Si $p_i > 1\, i = 1, \cdots, n$ y $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$.

Entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod u_i\,dx \leq \prod_{i=1}^{n} \|u_i\|_{L^{p_i}(\mathbb{R}^n)}$$

Consideramos

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} u_{x_i}(x_1, \cdots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)\,dy_i \quad 1 \leq i \leq n$$

Entonces tenemos la siguiente acotación

$$|u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\cdots, y_i, \cdots)|\,dy_i$$

Luego,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\cdots, y_i, \cdots)|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}$$

Integrando respecto de la variable x_1 obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\,dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}\,dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}
\end{aligned}$$

La última desigualdad proviene de aplicar la desigualdad de Hölder generalizada.

Ahora, integramos respecto a x_2

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} I_i^{\frac{1}{n-1}}\,dx_2
\end{aligned}$$

Donde

$$I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dy_1$$

$$I_i := \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\,dx_1\,dy_i \quad (i = 3, \cdots, n)$$

Aplicando otra vez Desigualdad de Hölder generalizada, obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx_1\,dx_2$$
$$\leq\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\,dy_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dy_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\,dx_2\,dy_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Continuamos integrando respecto de las otras variables $x_3,\cdots,x_n$ y notamos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}\,dx &\leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|\,dx_1\cdots dy_i\cdots dx_n\right)^{\frac{1}{n-1}}\\ &=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|\,dx\right)^{\frac{n}{n-1}}.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.24. *Sea $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ abierto acotado, $\partial\Omega\in C^1$, $1\leq q\leq p^*$ y $1\leq p<n$. Entonces $W^{1,p}(\Omega)\subset L^q(\Omega)$ y existe una constante $C=C(n,p,q,\Omega)$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Demostración. Sea $u\in W^{1,p}(\Omega)$ entonces por Teorema de Extensión 2.16 existe $\overline{u}\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, con *sop*$\overline{u}$ compacto tal que $\overline{u}|_\Omega=u$ y además

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Sean $u_m\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tales que $u_m\longrightarrow\overline{u}$ entonces $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Luego por la desigualdad 2.22 tenemos que:

$$\|u_m-u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\nabla u_m-\nabla u_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leq C\|u_m-u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Como el último termino tiende a 0, podemos concluir que $\{u_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$. Luego, tenemos que $u_n\longrightarrow\overline{u}$ en $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$.

Por otra parte, usando nuevamente la desigualdad 2.22, sabemos que:

$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Pasando al limite, tenemos que

$$\|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\nabla\overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Juntando esto con la cota dada por el Teorema de extensión 2.16 podemos construir la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)}\leq&\|\overline{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leq C\|\nabla\overline{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ \leq& C\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\Omega)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Hasta acá probamos la desigualdad para p^*, veamos que vale para $1\leq q\leq p^*$. Usando Hölder resulta que

$$\left(\int_\Omega|u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\leq\left(\int_\Omega|u|^{q\alpha}\,dx\right)^{\frac{1}{q\alpha}}\left(\int_\Omega 1^{\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}}$$

Si elegimos $\alpha=\frac{p^*}{q}$ obtenemos la desigualdad buscada □

TEOREMA 2.25 (Desigualdad de Poincaré). *Si* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *entonces*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ sabemos que existe $\{u_n\} \in C_c^\infty(\Omega) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Si aplicamos la desigualdad 2.22 tenemos que

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Como la constante C no depende del dominio y las funciones poseen soporte compacto contenido en Ω, podemos reescribir la desigualdad anterior de la siguiente forma:

$$\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}$$

Usando las mismas técnicas que utilizamos en la demostración anterior podemos concluir que $u_n \longrightarrow u$ en $L^{p^*}(\Omega)$. Esto nos permite pasar al limite en la desigualdad anterior y así obtener:

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Que era lo que queríamos probar. □

OBSERVACIÓN 2.26. La desigualdad de Poincaré, nos dice que en $W_0^{1,p}(\Omega)$, las normas $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ y $\|\nabla\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ son equivalentes. Esto sera usado en muchas de las demostraciones que incluiremos en esta tesis.

Antes de ver la desigualdad de Morrey, que es el caso $n < p < \infty$ debemos introducir una definición.

DEFINICIÓN 2.27. *Sea* Ω *un abierto acotado definimos el espacio*

$$\begin{aligned} C^\alpha(\overline{\Omega}) = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) =& \{u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuas tales que } |u(x) - u(y)| < C|x-y|^\alpha\} \\ =& \{u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continuas tales que } \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\} \end{aligned}$$

La norma en este espacio esta definida de la siguiente forma:

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + [u]_{\alpha,\Omega}$$

Donde $[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{x\neq y} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$

OBSERVACIÓN 2.28. $(C^\alpha(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})})$ es completo

DEFINICIÓN 2.29.

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) : D^\beta u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \quad \forall\, |\beta| \leq k\}$$

La norma de este espacio es:

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\beta|\leq k} \|D^\beta u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

TEOREMA 2.30 (Desigualdad de Morrey). *Sea* $n < p \leq +\infty$. *Entonces existe una constante* $C = C(n,p)$ *tal que*

$$\|u\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \quad \alpha = 1 - \frac{n}{p} \quad \forall\, u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $B = B_r(x)$ entonces existe $C = C(n)$ tal que:

$$\fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy \tag{2.1}$$

La desigualdad (2.1) la probaremos más adelante.

Por otro lado, por desigualdad triangular sabemos que:

$$|u(x)| \leq |u(x) - u(y)| + |u(x)|$$

Si integramos en $B_1(x)$ y dividimos por la medida de B_1 a los dos lados de la desigualdad anterior obtenemos:

$$|u(x)| \leq \fint_{B_1(x)} |u(x) - u(y)|\, dy + \fint_{B_1(x)} |u(y)|\, dy$$

Notemos $I_1 = \fint_{B_1(x)} |u(x) - u(y)|\, dy$ e $I_2 = \fint_{B_1(x)} |u(y)|\, dy$. Acotemos primero I_2, usando Hölder

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{|B_1(x)|} \int_{B_1(x)} |u(y)|\, dy \leq & \frac{1}{|B|} \left(\int_B |u(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} |B|^{\frac{1}{p'}} \\ \leq & \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |B(x,1)|^{\frac{1}{p'}-1} \end{aligned}$$

Acotemos I_1 usando la desigualdad (2.1) y Hölder

$$\begin{aligned} I_2 = & \fint_{B(x,r)} |u(y) - u(x)|\, dy \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|Du(y)|}{|y-x|^{n-1}}\, dy \\ \leq & C \left(\int_{B_1(x)} |\nabla u(y)|^p\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Observemos que $\left(\int_{B_1(x)} \frac{1}{|x-y|^{(n-1)p'}}\, dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$ si y solo si $(n-1)p' < n$, es decir $p > n$.

Juntando la acotación de I_1 e I_2 tenemos que:

$$|u(x)| \leq C(n,p) \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Luego,

$$\|u\|_\infty \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Por otro lado, usando desigualdad triangular tenemos

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u(z)| + |u(z) - u(y)|$$

Llamamos $r = |x-y|$ y definimos $W = B_r(x) \cap B_r(y)$. Luego, si integramos sobre W y dividimos por la medida del mismo resulta que:

$$|u(x) - u(y)| \leq \fint_W |u(x) - u(z)|\, dz + \fint_W |u(z) - u(y)|\, dz$$

Llamaremos $I_1 = \fint_W |u(x) - u(z)|\, dz$ e $I_2 = \fint_W |u(z) - u(y)|\, dz$. Vamos a acotar I_1 usando la desigualdad (2.1).

$$\begin{aligned} \fint_W |u(x) - u(z)|\, dz \leq & \frac{|B(x,r)|}{|W|} \fint_{B(x,r)} |u(x) - u(z)|\, dz \leq C \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(z)|}{|x-z|^{n-1}}\, dz \\ \leq & C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(z)|^p\, dz \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)p'}}\, dz \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

Además tenemos que:

$$\left(\int_{B(x,r)} \frac{1}{|x-z|^{(n-1)p'}}\, dz \right)^{\frac{1}{p'}} = C \left(r^{n-(n-1)p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = C r^{1-\frac{n}{p}}$$

De manera análoga se acota I_2. Por lo tanto, obtenemos que:

$$|u(x) - u(y)| \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} |x-y|^{1-\frac{n}{p}}$$

Es decir,

$$[u]_{1-\frac{n}{p}} = \sup_{x\neq y}\left\{\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{1-\frac{n}{p}}}\right\} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Entonces hemos probado lo que necesitamos, pues juntando las acotaciones anteriores tenemos

$$\|u\|_{C^{1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_\infty + [u]_{1-\frac{n}{p}} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Probemos ahora, la desigualdad (2.1). Sea $w \in \partial B(0,1)$, $0 < s < r$, $y = x + sw$, entonces

$$\begin{aligned}|u(y)-u(x)| \leq& |u(x+sw)-u(x)| = \left|\int_0^s \frac{d}{dt}u(x+tw)\,dt\right|\\ =& \left|\int_0^s \nabla u(x+tw)w\,dt\right| \leq \int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,dt\end{aligned}$$

En la última desigualdad estamos usando Cauchy Schwartz y que $|w| = 1$. Integrando sobre $\partial B(0,1)$ en la desigualdad anterior y usando el siguiente cambio de variables $y = x+tw$ y $t = |x-y|$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw)-u(x)|\,dw \leq& \int_{\partial B(0,1)}\int_0^s |\nabla u(x+tw)|\,dtdw\\ =& \int_{\partial B(0,1)}\int_0^s |\nabla u(x+tw)|\frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\,dtdw\\ =& \int_{B(x,s)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\\ \leq& \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\end{aligned}$$

Observemos que de acá se deduce fácilmente la desigualdad que queremos probar. En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\,dy =& \int_0^r\int_{\partial B(0,1)} |u(x+sw)-u(x)|s^{n-1}\,dw\,ds\\ \leq& \int_0^r s^{n-1}\,ds\int_{B(x,r)}\frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\\ \leq& \frac{r^n}{n}\int_{B(x,r)}\frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy\end{aligned}$$

□

Teorema 2.31 (Estimaciones para $W^{1,p}$, $n < p \leq \infty$). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado y suponemos $\partial\Omega \in C^1$. Sea $n < p \leq \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Existe entonces $u^* \in C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})$, con $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$, un representante de u tal que se tiene la estimación*

$$\|u^*\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

La constante C depende sólo de p, n y Ω.

Demostración. Como $\partial\Omega$ es C^1, por el Teorema de extensión 2.16 existe $Eu = \overline{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\begin{cases}\overline{u} = u \text{ en } \Omega\\ \overline{u} \text{ tiene soporte compacto}\\ \|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{cases}$$

Como $\overline{u}$ tiene soporte compacto, sabemos que existen funciones $u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_m \longrightarrow u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora por la desigualdad de Morrey 2.30, tenemos que

$$\|u_m - u_l\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Luego u_m es de Cauchy en $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$, por lo tanto, existe u^* tal que $u_m \longrightarrow u$ en $C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)$. Podemos concluir entonces que $\overline{u} = u^*$ y como $\overline{u} = u$ en casi todo punto, tenemos que $u^* = u$ en casi todo punto de Ω.

Además, por Desigualdad de Morrey 2.30 también sabemos que

$$\|u_m\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Pasando al limite obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\|u^*\|_{C^{0,1-\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Esto completa la demostración. □

El Teorema que enunciaremos a continuación no lo vamos a utilizar, lo enunciamos por completitud. La demostración del mismo puede verse en el Evans.

Teorema 2.32 (Desigualdad general de Sobolev). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Suponemos $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*

- *Si $k < \frac{n}{p}$, entonces $u \in L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{n}$. Además tenemos la siguiente acotación*

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

  La constante C depende solo de k, p, n y de Ω.
- *Si $k > \frac{n}{p}$, entonces $u \in C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$, donde:*

$$\gamma = \begin{cases} [\frac{n}{p}] + 1 - \frac{n}{p}, & si\ \frac{n}{p} \text{ no es entero} \\ \text{Cualquier numero positivo } < 1, & si\ \frac{n}{p} \text{ no es entero} \end{cases}$$

  Además tenemos la acotación

$$\|u\|_{C^{k-[\frac{n}{p}]-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}$$

  Donde la constante C depende solo de k, p, n, γ y Ω.

Al probar el Teorema de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 2.22 sabemos que $W^{1,p}(\Omega)$ esta incluido en $L^{p^*}(\Omega)$ para $1 \leq p < n$, $p^* = \frac{np}{n-p}$. Ahora vamos a demostrar que $W^{1,p}(\Omega)$ esta compactamente contenido en $L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$.

Teorema 2.33 (Teorema de compacidad de Rellich-Kondrachov). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $\partial\Omega \in C^1$ para $1 \leq p < n$. Entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ para $1 \leq q < p^*$.*

Demostración. Sea $\{u_m\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ acotada. Por teorema 2.24 tenemos que

$$\|u_m\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < C < \infty \quad \forall\, n \text{ para } 1 \leq q < p^*$$

Queremos ver que existe $\{u_{m_j}\}$ una sucesión de Cauchy en $L^q(\Omega)$.

Por el Teorema de extensión 2.16 podemos suponer que $u_m \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ y sop $u_m \subset V$ acotado, para todo m. Además $\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty$.

Sea $u_m^\varepsilon = \rho_\varepsilon * u_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, podemos suponer que $sopu_m^\varepsilon \subset V$. Veamos que $u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m$ en $L^q(V)$ uniformemente en m. Suponemos $u_m \in C^1$

$$\begin{aligned}
u_m^\varepsilon(x) - u_m(x) =& \int_{B_\varepsilon} \rho_\varepsilon (u_m(x-y) - u_m(x))\, dy \\
=& \int_{B_1(0)} \rho(y)(u_m(x-\varepsilon y) - u_m(x))\, dy \\
=& \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \frac{d}{dt} u_m(x-\varepsilon t y)\, dt\, dy \\
=& - \varepsilon \int_{B_1} \rho(y) \int_0^1 \nabla u_m(x-\varepsilon t y) y\, dt\, dy
\end{aligned}$$

Ahora integramos sobre V y hacemos la siguiente sustitución: $z = x - \varepsilon t y$

$$\begin{aligned}
\int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx \leq& \varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \int_V |\nabla u_m(x-\varepsilon t y)|\, dx\, dt\, dy \\
\leq& \varepsilon \int_{B_1(0)} \rho(y) \int_0^1 \|\nabla u_m\|_{L^1(V)}\, dt\, dy \\
=& \varepsilon \|\nabla u_m\|_{L^1(V)}
\end{aligned}$$

Si $\{u_m\}$ no es C^1, obtenemos la desigualdad anterior por densidad. Resumiendo, nos queda:

$$\begin{aligned}
\int_V |u_m^\varepsilon(x) - u_m(x)|\, dx \leq& \varepsilon \int_V |\nabla u_m(y)|\, dy \\
\leq& \varepsilon C \|\nabla u_m\|_{L^p(V)} \leq \varepsilon C
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad proviene del hecho que $\sup_m \|u_m\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty$. Entonces como C no depende de m, sabemos que $u_m^\varepsilon \longrightarrow u_m$ en $L^1(V)$, uniformemente en m.

Por otro lado, recordemos la desigualdad de interpolación:

$$\|v\|_{L^\theta(V)} \leq \|v\|_{L^s(V)}^\theta \|v\|_{L^r(V)}^{1-\theta} \text{ para } \frac{1}{q} = \frac{\theta}{s} + \frac{\theta}{r}\, ,\, 0 < \theta < 1$$

Como $1 \leq q < p^*$, usando la desigualdad de interpolación, sabemos que:

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leq \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}$$

Donde $\frac{1}{q} = \theta + \frac{(1-\theta)}{p^*}$, $0 < \theta < 1$.

Además, por Desigualdad de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 2.22 tenemos que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)} \leq C \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{W^{1,p}(V)} \leq C$$

Como C es uniforme en m y $\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \longrightarrow 0$. Podemos concluir que

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \longrightarrow 0 \tag{2.2}$$

Por otra parte, si logramos ver que para todo $\varepsilon > 0$ fijo, la sucesión $\{u_m^\varepsilon\}$ es equicontinua y equiacotada, por el teorema de Arzela-Ascoli podemos garantizar que existe una subsucesión $\{u_{m_j}^\varepsilon\}$ uniformemente de Cauchy, es decir,

$$\|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_l}^\varepsilon\|_{L^\infty(V)} \longrightarrow 0$$

Luego, se deduce fácilmente que

$$\limsup_{j,l \longrightarrow \infty} \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)} = 0$$

Notemos que por desigualdad triangular

$$\|u_{m_j} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} \leq \|u_{m_j} - u_{m_j}^\varepsilon\|_{L^q(V)} + \|u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_l}^\varepsilon\|_{L^q(V)} + \|u_{m_l}^\varepsilon - u_{m_l}\|_{L^q(V)}$$

Además, por (2.2) sabemos que, dado $\delta > 0$ podemos elegir $\varepsilon > 0$ tal que:

$$\|u_{m_j} - u^{\varepsilon}_{m_j}\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{2} \text{ y } \|u^{\varepsilon}_{m_l} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} < \frac{\delta}{2}$$

Juntando todo nos queda que

$$\limsup_{jl \longrightarrow \infty} \|u_{m_j} - u_{m_l}\|_{L^q(V)} < \delta \quad \forall\, \delta > 0$$

Resumiendo para terminar la demostración resta ver que $\{u^{\varepsilon}_m\}$ es equiacotada y equicontinua. Veamos primero que es equiacotado, para esto vamos a usar Hölder y el Teorema 2.24.

$$\begin{aligned} |u^{\varepsilon}_m(x)| \leq & \int_{B_\varepsilon(x)} \rho_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\, dy \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ \leq & C\frac{1}{\varepsilon^n}\|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} \end{aligned}$$

Veamos ahora equicontinuidad

$$|\nabla u^{\varepsilon}_m(x)| \leq \int_{B_\varepsilon(x)} |\nabla \rho_\varepsilon(x-y)||u_m(y)|\, dy$$

Recordando que $\nabla \rho_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\nabla\rho(\frac{z}{\varepsilon})$. Obtenemos así la siguiente acotación.

$$|\nabla u^{\varepsilon}_m(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon^{n+1}}\|\nabla\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)} \leq \frac{C}{\varepsilon^{n+1}}$$

Con esto nos alcanza para probar la equicontinuidad.

□

2. Operadores de Nemitzki

Definición 2.34 (función de Carathéodory). *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea g satisfaciendo:*

1. $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. *Existen constantes $r, s \geq 1$ y $a_1, a_2 \geq 0$ tales que*

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^{\frac{r}{s}} \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Entonces decimos que g es una función de Carathéodory.

Dada una función de Carathéodory, se define el siguiente operador: $N_g : \varphi(x) \longmapsto g(x, \varphi(x))$.

Respecto a este operador, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.35. *Sea g una función de Carathéodory. Eentonces la aplicación N_g definida por $\varphi(x) \mapsto g(x,\varphi(x))$ verifica que $N_g \in C(L^r(\Omega), L^s(\Omega))$.*

Demostración. Si $u \in L^r(\Omega)$ entonces,

$$\int_\Omega |g(x,u(x))|^s\, dx \leq \int_\Omega (a_1 + a_2|u|^{\frac{r}{s}})^s\, dx \leq a_3 \int_\Omega (1 + |u|^r)\, dx$$

Esto nos muestra que $g : L^r(\Omega) \longrightarrow L^s(\Omega)$.

Para probar la continuidad observamos que g es continua en φ si y solo si $f(x, z(x)) = g(x, z(x) + \varphi(x)) - g(x, \varphi(x))$ es continua en $z = 0$.

Podemos suponer sin perdida de generalidad que $g(x, 0) = 0$. Queremos ver que, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \delta$ entonces $\|g(\cdot, u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon$.

Debido a la continuidad de g y que $g(x,0) = 0$, tenemos que dado $\hat{\varepsilon} > 0$ existe $\hat{\delta} > 0$ tal que $|g(x,\xi)| \leq \hat{\varepsilon}$ si $x \in \overline{\Omega}$ y $|\xi| \leq \hat{\delta}$.

Sea $u \in L^r(\Omega)$ con $\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$ y definimos el siguiente conjunto

$$\Omega_1 = \{x \in \overline{\Omega} : |u(x)| \leq \hat{\delta}\}$$

Luego,

$$\int_{\Omega} |g(x,u(x))|^s \, dx \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega_1| \leq \hat{\varepsilon}^s |\Omega|$$

Elegimos $\hat{\varepsilon}$ tal que $\hat{\varepsilon}^s|\Omega| \leq \frac{\varepsilon}{2}^s$.

Sea $\Omega_2 = \overline{\overline{\Omega}} - \Omega_1$ acotando, nos queda

$$\int_{\Omega} |g(x,u(x))|^s \, dx \leq a_3(|\Omega_2| + \delta^r) \tag{2.3}$$

Además

$$\delta^r \geq \int_{\Omega_2} |u|^r \, dx \geq \hat{\delta}^r |\Omega_2|$$

Es decir $|\Omega_2| \leq (\delta \frac{1}{\hat{\delta}})^r$. Combinando con (2.3)

$$\int_{\Omega_2} |g(x,u(x))|^s \, dx \leq a_3(1 + \hat{\delta}^{-r})\delta^r$$

Elegimos δ tal que $a_3(1 + \hat{\delta}^{-r})\delta^r < \frac{\varepsilon}{2}$.

Esto implica que

$$\|g(\cdot,u)\|_{L^s(\Omega)} \leq \varepsilon \text{ si } \|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta$$

$\square$

Corolario 2.36. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio acotado y sea g satisfaciendo:*

1. $g \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. *Existen constantes $s \geq 1$ y $a_1, a_2 \geq 0$ tales que*

$$|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s \quad \forall\, x \in \overline{\Omega} \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Si $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ entonces $g(x,u_k(x)) \longrightarrow g(x,u(x))$ en $L^{\frac{r}{s}}(\Omega)$ para todo $r < p^*$.

Demostración. Podemos reescribir $|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$ como $|g(x,\xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^{\frac{\alpha s}{\alpha}}$ .Por el teorema 2.35 sabemos que $N_g \in C(L^{\alpha s}(\Omega), L^{\alpha}(\Omega))$.

Por otra parte , sea $u_n \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ usando el Teorema 2.33 tenemos que $u_n \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega)$ para $r < p^*$.

En particular, si elegimos $\alpha = \frac{r}{s}$, nos queda que $N_g \in C(L^r(\Omega), L^{\frac{r}{s}}(\Omega))$.

Concluimos por la continuidad de N_g, que $g(x,u_n(x)) \longrightarrow g(x,u(x))$ en $L^{\frac{r}{s}}(\Omega)$. $\square$

3. Cálculo de variaciones

Suponemos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado con borde regular. Definimos la siguiente función:

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Llamaremos a L Lagrangiano.

Notaremos $L = L(p, z, x) = L(p_1, \cdots, p_n, z, x_1, \cdots, x_n)$. Donde p es el nombre de la variable que sera sustituida por $Dw(x)$ y z es la variable que sera sustituida por $w(x)$. Supongamos

$$\Phi[w] = \int_\Omega L(Dw(x), w(x), x)\, dx$$

Para w una función regular que satisface la condición de borde $w = g$ en $\partial\Omega$.

Supongamos u un punto crítico de Φ, queremos ver que ecuación diferencial verifica u. Dada $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, definimos $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i(t) = \Phi(u + t\varphi)$. Como u es mínimo sabemos que $i(u) \leq i(t) \quad \forall\, t$ luego $i'(0) = 0$. Por otro lado,

$$i(t) = \int_\Omega L(\nabla u + t\nabla\varphi, u + t\varphi, x)\, dx$$

Derivando, nos queda

$$i'(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x)v\, dx$$

Reemplazando $t = 0$

$$0 = i'(0) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)v\, dx$$

Como v tiene soporte compacto podemos usar partes y obtenemos

$$0 = \int_\Omega \left(-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right) v\, dx$$

Como vale para toda función test, obtenemos la siguiente ecuación

$$-\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \text{ en } \Omega$$

Esta es la ecuación de Euler Lagrange. Veamos algunos ejemplos de estas ecuaciones:

1. Si $L(p, z, x) = \frac{1}{p}|p|^p - f(x)z$, su ecuación es $-\Delta_p u = f$.
2. Si $L(p, z, x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}p_ip_j - f(x)z$, su ecuación es
$$-\sum_{ij=1}^n (a_{ij}p_ip_ju_{x_i})_{x_j} = f(x).$$
3. Si $L(p, z, x) = \frac{1}{p}|z|^p - F(z)$ con $F' = f$ su ecuación es $-\Delta_p u = f(u)$

¿Cuando podemos garantizar que el funcional posee un mínimo?

La respuesta la obtenemos del siguiente teorema.

Teorema 2.37. *Sea E espacio de Banach reflexivo, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ coerciva y acotada inferiormente, si f es secuencialmente semicontinua inferiormente para la topología débil, es decir, si $u_k \rightharpoonup u_0$ entonces $f(u_0) \leq \liminf f(u_k)$. Entonces existe $u_0 \in E$ tal que $f(u_0) \leq f(u) \quad \forall\, u$.*

Demostración. Como f es acotada inferiormente tenemos que $m = \inf_{\mathbb{R}^n} f > -\infty$. Sea $\{u_k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ una sucesión minimizante $f(u_k) \longrightarrow m$. Podemos suponer que $\{u_k\}$ es acotado, pues si no lo fuera, existiría una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ tal que $\|u_{k_j}\| \longrightarrow \infty$ entonces, por coercividad $f(u_{k_j}) \longrightarrow \infty$. Esto es una contradicción ya que $f(u_{k_j}) \longrightarrow m$. Como $\{u_k\}$ es acotada sabemos que existe $\{u_{k_j}\}$ tal que $u_{k_j} \rightharpoonup u_0$ usando que f es secuencialmente semicontinua inferiormente para la topología débil, nos queda que $f(u_o) \leq \liminf f(u_{k_j}) = m$. Concluimos entonces que $f(u_0) \leq f(u) \quad \forall\, u$. $\square$

Veamos como garantizamos que Φ cumpla las hipótesis del teorema. Necesitamos $L(p,z,x) \geq \alpha|p|^q - \beta$ para algunos $\alpha, \beta > 0$, $q > 1$. Veamos que es acotado inferiormente:

$$\Phi(u) = \int_\Omega L(\nabla u, u, x)\,dx \geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^q\,dx - \beta|\Omega| = \alpha\|\nabla u\|^q_{L^q(\Omega)} - B \geq -B$$

Verifiquemos la coercividad, en la cuenta anterior vimos que $\Phi(u) \longrightarrow \infty$ cuando $\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow \infty$. Sea $\mathcal{A} = \{v \in W^{1,q}(\Omega) : v = g \text{ en } \partial\Omega\}$ queremos ver que si $u \in \mathcal{A}$ y $\|u\| \longrightarrow \infty$ entonces $\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} \longrightarrow \infty$. En efecto, se a $w \in \mathcal{A}$ fijo

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^q(\Omega)} &= \|\nabla u - \nabla w + \nabla w\|_{L^q(\Omega)} \geq \|\nabla(u-w)\|_{L^q(\Omega)} - \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)} \\ &\geq C\|u-w\|_{W^{1,q}(\Omega)} - \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)} \\ &\geq C(\|u\|_{W^{1,q}(\Omega)} - \|w\|_{W^{1,q}(\Omega)}) - \|\nabla w\|_{L^q(\Omega)}\end{aligned}$$

Concluimos que Φ es coerciva, notemos que un momento de la acotación anterior usamos Poincaré y esto se puede porque $u - w \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Veamos un lema

Lema 2.38. *Si $p \longmapsto L(p,z,x)$ es convexo entonces Φ es débil semicontinuo inferiormente.*

Demostración. Sea $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ lo primero que hay que chequear es que $u \in \mathcal{A}$. En efecto, $\mathcal{A}$ es cerrado fuerte porque el operador traza es continuo y además es convexo. Por lo tanto, es cerrado débil y eso nos garantiza que $u \in \mathcal{A}$.

Sea $l = \liminf_k \Phi(u_k)$ queremos ver que $\Phi(u) \leq l$.

Pasando a una subsucesión podemos suponer que $\Phi(u_k) \longrightarrow l$.Por otro lado , como $u_k \rightharpoonup u$ entonces $\{u_k\}$ es acotada y por teorema de (R-K) tenemos que $u_k \longrightarrow u$ en $L^q(\Omega)$ via otra subsucesión tenemos que $u_k \longrightarrow u$ en casi todo punto. Dado $\varepsilon > 0$ existe $E_\varepsilon > 0$ tal que $u_k \longrightarrow u$ uniformemente en E_ε y $|\Omega - E_\varepsilon| < \varepsilon$.

Sea $F_\varepsilon = \{x \in \Omega : |u(x)| + |\nabla u(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}\}$ y $|\Omega - F_\varepsilon| \longrightarrow 0$. Sea $G_\varepsilon = E_\varepsilon \cap F_\varepsilon \subset \Omega$ y $|\Omega - G_\varepsilon| \longrightarrow 0$. Podemos $L \geq 0$

$$\Phi(u_k) = \int_\Omega L(\nabla u_k, u_k, x)\,dx \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u_k, u_k, x)\,dx \tag{2.4}$$

Por convexidad

$$L(p,z,x) \geq L(p_0,z,x) + L_p(p_0,z,x)(p-p_0)$$

Entonces podemos acotar de la siguiente forma

$$(2.4) \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u_k, x)\,dx + \int_{G_\varepsilon} L_p(\nabla u, u_k, x)(\nabla u_k - \nabla u)\,dx$$

Usando convergencia uniforme, resulta que

$$\Phi(u_k) \geq \int_{G_\varepsilon} L(\nabla u, u, x)\,dx \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

Tomando limite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

$$\Phi(u_k) \geq \Phi(u)$$

Concluimos entonces que

$$l \geq \Phi(u)$$

$\square$

Definamos una solución débil para la ecuación de Euler Lagrange.

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^{n}(L_{p_i}(\nabla u,u,x))_{x_i}+L_z(\nabla u,u,x)=0 & \text{en } \Omega \\ u=g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.5}$$

Definición 2.39 (Solución Débil). *Sea* $u\in W^{1,q}_g(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u,u,x)\varphi_{x_i}+L_z(\nabla u,u,x)\varphi\,dx=0 \quad \forall\,\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$$

Buscamos condiciones para que los minimizantes del funcional sobre $W^{1,q}_g(\Omega)$ sean soluciones débiles de la ecuación (2.5).

1. Necesitamos que $L(\nabla v,v,x)\in L^1(\Omega) \quad \forall v\in\mathcal{A}$. Alcanza con pedir
$$|L(p,z,x)|\le C(|p|^q+|z|^{q^*}+1)$$
2. Necesitamos que $\int_\Omega L_p(\nabla u,u,x)\varphi_{x_i}\,dx \quad \forall\,\varphi\in W_0^{1,q}(\Omega)$.Es suficiente con pedir
$$L_{p_i}(\nabla u,u,x)\in L^{q'}(\Omega)$$
Dicho de otra forma
$$|L_{p_i}(\nabla u,u,x)|\le C(|p|^{q-1}+|z|^{\frac{q^*}{q'}}+1)$$
3. Necesitamos que $L_z(\nabla u,u,x)\in L^{q'}$. Alcanza con pedir
$$|L_z(\nabla u,u,x)|\le C(|p|^{q-1}+|z|^{\frac{q^*}{q'}}+1)$$

Ahora si, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema

Teorema 2.40. *Si u es minimizante de $\Phi(v)=\int_\Omega L(\nabla v,v,x)\,dx$ en $\mathcal{A}$ y L verifica 1,2 y 3. Entonces u es solución débil de la ecuación* (2.5)

Demostración. Sea $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ y definimos $i(t)=\Phi(u+t\varphi)$, por ser u un minimizante tenemos que $i'(0)=0$.

Por otro lado, por la condición 1 sabemos que $|i(t)|<\infty$.

$$\frac{i(t)-i(0)}{t}=\int_\Omega \frac{L(\nabla u+t\nabla\varphi,u+t\varphi,x)-L(\nabla u,u,x)}{t}\,dx$$

Notemos $L_t(x)=\frac{L(\nabla u+t\nabla\varphi,u+t\varphi,x)-L(\nabla u,u,x)}{t}$, tomando limite cuando $t\longrightarrow 0$ vemos que

$$L_t(x)\longrightarrow \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u,u,x)\varphi_{x_i}+L_z(\nabla u,u,x)\varphi\,dx \text{ en casi todo punto de } \Omega$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} L_t(x)&=\frac{1}{t}\int_0^t \frac{d}{ds}L(\nabla u+s\nabla\varphi,u+s\varphi,x)\,ds \\ &=\frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u+s\nabla\varphi,u+s\varphi,x)\varphi_{x_i}+L_z(\nabla u+s\nabla\varphi,u+s\varphi,x)\varphi\,ds \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}|L_t(x)| \leq \frac{1}{t}\int_0^t \Big(\sum_{i=1}^n |L_{p_i}(\nabla u + s\nabla\varphi, u+s\varphi, x)||\varphi_{x_i}| \\ + |L_z(\nabla u + s\nabla\varphi, u+s\varphi, x)||\varphi|\Big)\,ds \\ \leq \frac{1}{t}\int_0^t \sum_{i=1}^n (|\nabla u + s\nabla\varphi|^{q-1} + |u+s\varphi|^{\frac{q^*}{q'}} + 1)|\varphi_{x_i}| \\ + (|\nabla u + s\nabla\varphi|^{q-1} + |u+s\varphi|^{\frac{q^*}{q'}} + 1)|\varphi|\,ds \\ \leq \frac{C}{t}t(|\nabla u|^{q-1}|\nabla\varphi| + |\nabla\varphi|^q + |\nabla\varphi| + |u|^{\frac{q^*}{q'}}|\nabla\varphi| + |\varphi|^{\frac{q^*}{q'}}|\nabla\varphi| + |\nabla u|^{q-1}|\varphi| \\ + |\nabla\varphi||\varphi| + |\varphi| + |u|^{\frac{q^*}{q'}}|\varphi| + |\varphi|^{\frac{q^*}{q'}}|\varphi|)\end{aligned}$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que el último termino es integrable, luego por convergencia mayorada terminamos la demostración. □

Veamos una aplicación.

$$\begin{cases} -\Delta_q u = f(x) & x \text{ en } \Omega \\ u = 0 & x \text{ en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.6}$$

El funcional asociado a esta ecuación resulta

$$J(u) = \frac{1}{q}\int_\Omega |\nabla u|^q\,dx - \int_\Omega f(x)u\,dx$$

Queremos ver que J tiene un punto crítico. Para esto vamos a verificar que cumple las hipótesis del Teorema 2.37. J es acotado inferiormente, en efecto, como por Poincaré podemos hacer la siguiente acotación

$$\left|\int_\Omega f(x)u\,dx\right| \leq \|f\|_{L^{q'}(\Omega)}\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Podemos acotar inferiormente el funcional

$$J(u) \geq \frac{1}{q}\|u\|^q_{W_0^{1,q}(\Omega)} - C\|u\|_{W_0^{1,q}(\Omega)} \tag{2.7}$$

Es fácil ver que $\psi(t) = \frac{1}{q}t^q - Ct$ es acotado inferiormente, más aún el mínimo lo alcanza en $t = C^{\frac{1}{q-1}}$.

Además la ecuación (2.7) nos muestra claramente que J es coerciva. Es decir, si $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow \infty$ entonces $J(u) \longrightarrow +\infty$. Para probar que J es débil semicontinua inferiormente, por Teorema 2.38 tenemos que ver que $p \longmapsto L(p,z,x)$ es convexo, lo que es inmediato. Hasta aquí, vimos que el funcional tiene un punto crítico. Ahora, nos interesa probar que el punto crítico es solución débil de la ecuación, para esto vamos a utilizar el teorema 2.40. Veamos que L satisface las hipótesis de integrabilidad. Sea $v \in \mathcal{A}$

1. Como $|f(x)z| \leq \frac{|f|^{q'}}{q'} + \frac{|z|^q}{q}$ tenemos que

$$|L(p,z,x)| \leq \frac{1}{q}|p|^q + |f|^{q'}\frac{1}{q'} + |z|^q\frac{1}{q}$$

   Por lo tanto, $L(\nabla v, v, x) \in L^1(\Omega)$
2. Como $L_{p_i} = |p|^{q-2}p_i$ podemos acotar $|L_{p_i}|^{q'} \leq |p|^{(q-1)q'=q}$ entonces $L(\nabla v, v, x) \in L^{q'}(\Omega)$
3. $L_z(\nabla v, v, x) = f(x) \in L^{q'}(\Omega)$

Resumiendo, probamos que la ecuación (2.6) tiene una solución débil.

Veamos ahora un resultado que nos permite decidir cuando las soluciones débiles son puntos críticos del funcional

TEOREMA 2.41. *Si el mapa* $(p,z) \longmapsto L(p,z,x)$ *es convexo en casi todo* x *y* $u \in \mathcal{A}$ *es solución débil de* (2.5) *entonces* u *es un mínimo de* Φ

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis tenemos que

$$L(p,z,x) \geq L(p_0,z_0,x) + L_p(p_0,z_0,x)(p-p_0) + L_z(p_0,z_0,x)(z-z_0)$$

Sea $w \in \mathcal{A}$ elegimos: $p_0 = \nabla u$ y $z_0 = u$; $p = \nabla w$ y $z = w$ nos queda que

$$\Phi(w) \geq \Phi(u) + \int_\Omega \sum_{i=1}^n L_{p_i}(\nabla u, u, x)(w-u)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)(z-z_0)\, dx$$

Como $w - u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y u es solución débil tenemos que

$$L_{p_i}(\nabla u, u, x)(w-u)_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)(z-z_0) = 0$$

Concluimos entonces que

$$\Phi(w) \geq \Phi(u)$$

Que era lo que queríamos probar. □

No todas las ecuaciones pueden resolverse encontrando mínimos del funcional. Mostremos el siguiente ejemplo,

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.8}$$

El funcional asociado a la ecuación (2.8) es

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \frac{1}{q}\int_\Omega |u|^q\, dx$$

Fija $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$

$$\Phi(tu_0) = \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\, dx - \frac{t^q}{q}\int_\Omega |u_0|^q\, dx$$

Si notamos $C_1 = \int_\Omega |\nabla u_0|^p\, dx$ y $C_2 = \int_\Omega |u_0|^q\, dx$. Nos queda que

$$\Phi(tu_0) = \frac{C_1}{p}t^p - \frac{C_2}{q}t^q$$

Esto nos dice que si $q > p$ el funcional Φ no esta acotado inferiormente.

Veamos ahora unas definiciones previas al Teorema de paso de la montaña.

DEFINICIÓN 2.42. *Decimos que* Φ *es diferenciable en* u *si existe* $v \in E$ *tal que*

$$\Phi(w) = \Phi(u) + (v, w-u) + O(\|v-w\|) \quad \forall\, w$$

Donde $(v, w-u)$ *es el producto de dualidad. Notemos* $v = \Phi'(u)$

DEFINICIÓN 2.43. *Decimos que* $u \in E$ *es un punto crítico si* $\Phi'(u) = 0$.

Consideramos los siguientes conjuntos:

$$A_c = \{u \in E : \Phi(u) \leq c\}$$
$$K_c = \{u \in E : \Phi(u) = c \text{ y } \Phi'(u) = 0\}$$

Definición 2.44. $c \in \mathbb{R}$ *es un valor crítico si* $K_c \neq 0$

CAPíTULO 3

El Teorema de paso de la montaña y algunas generalizaciones

En este capítulo revisaremos el ya clásico Teorema del paso de la montaña. Veremos una aplicación del mismo a la resolución de una ecuación elíptica cuasilineal y luego estudiaremos dos generalizaciones del Teorema.

1. El Teorema de paso de la montaña

1.1. El Teorema.

TEOREMA 3.1 (Teorema de paso de la montaña). *Sea $\Phi \in C$ que satisface (P-S) tal que:*

1. $\Phi(0) = 0$
2. *Existe* $r, a > 0$ *tal que* $\Phi(u) \geq a \quad \|u\| = r$
3. *Existe* $v \in H \quad \|v\| > r \quad$ *tal que* $\quad \Phi(v) \leq 0$

Entonces

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{0\leq t\leq 1} \Phi(g(t))$$

Es un valor crítico

Donde $\Gamma = \{g : [0,1] \longrightarrow H \, continua \quad g(0) = 0 \quad g(1) = v\}$

OBSERVACIÓN 3.2. Pensemos en el gráfico de $\Phi(\cdot)$ como un paisaje. Supongamos, que estamos parados en el fondo de un valle ubicado en el 0 y hay un anillo de montañas que nos rodea. Más allá del mismo, hay otro valle y ahí está la ubicación v a la que queremos llegar. ¿Qué camino nos conviene elegir?.

Respuesta: Elegimos, entre todos los pasos de la montaña posibles, aquél que sea el más bajo de todos.

1.2. Una aplicación. Veamos una aplicación. Consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(u) & \text{en}\Omega \\ u = 0 & \text{en}\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

Donde $|f(s)| \leq C(1 + |s|^q)$ y $|f'(s)| \leq C(1 + |s|^{q-1})$. Definimos $F(s) = \int_0^s f(t)\, dt$. Pedimos que $0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s$ con $\gamma < \frac{1}{p}$ y que existan a, A tales que $a|s|^{q+1} \leq |F(s)| \leq A|s|^{q+1}$. Recordemos que estamos considerando $W_0^{1,p}(\Omega)$ y su norma es $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$. Queda definido entonces el siguiente funcional,

$$\Phi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \int_\Omega F(u)\, dx$$

Queremos que nuestro funcional este definido de $W_0^{1,p}$ en $\mathbb{R}$, para eso necesitamos que $q+1 \leq p^* = \frac{pn}{n-p}$, es decir, $q \leq \frac{n(p-1)+p}{n-p}$.

Sea

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx$$

Podemos reescribir Φ como

$$\Phi(u) = J(u) - \mathfrak{F}(u)$$

Donde $\mathfrak{F}(u) = \int_\Omega F(u)\, dx$, por la condiciones que cumple F podemos asegurar que

$$F(a+b) = F(a) + f(a)b + \int_0^1 (1-s)f'(a+sb)\, ds b^2$$

. Integrando, nos queda que

$$\mathfrak{F}(u+v) = \mathfrak{F}(u) + \int_\Omega f(u)v\, dx + \int_\Omega \int_0^1 (1-s)f'(u+sv)\, ds\, |v|^2\, dx$$

Por otro lado, usando la acotación para f', notamos que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \int_0^1 (1-s)f'(u+sv)\, ds\, |v|^2\, dx\right| &\leq C_p \int_\Omega (|u|^{q-1} + |v|^{q-1})|v|^2\, dx \\ &= C_p\left(\int_\Omega |u|^{q-1}|v|^2\, dx + \int_\Omega |v|^{q+1}\, dx\right)\end{aligned}$$

Además, usando Hölder y Poincaré,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u|^{q-1}|v|^2\, dx &\leq \left(\int_\Omega |u|^{q+1}\, dx\right)^{\frac{q-1}{q+1}} \left(\int_\Omega |v|^{q+1}\, dx\right)^{\frac{2}{q+1}} \\ &= \|u\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\|v\|^2_{L^{q+1}(\Omega)} \leq \|u\|^{q-1}_{L^{q+1}(\Omega)}\|v\|^2_{W_0^{1,p}(\Omega)} \\ &= o(\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)})\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos que

$$(\mathfrak{F}'(u), v) = \int_\Omega f(u)v\, dx$$

Por otra parte, $\Phi'(u) = J'(u) - \mathfrak{F}'(u)$.

Veamos que $\mathfrak{F}'$ es Lipschitz

$$\|\mathfrak{F}'(u_1) - \mathfrak{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)\, ;\, \|v\|=1} |(\mathfrak{F}'(u_1) - \mathfrak{F}'(u_2), v)|$$

Además, usando la acotación de f' podemos obtener que

$$\begin{aligned}(\mathfrak{F}'(u_1) - \mathfrak{F}'(u_2), v) = (\mathfrak{F}'(u_1), v) - (\mathfrak{F}'(u_2), v) &= \int_\Omega f(u_1)v\, dx - \int_\Omega f(u_2)v\, dx \\ \int_\Omega f'(\zeta)(u_1 - u_2)v\, dx &\leq \int_\Omega C_p(1 + |\zeta|^{q-1})(u_1 - u_2)v\, dx \\ &\leq \int_\Omega C_p(1 + |u_1|^{q-1} + |u_2|^{q-1})(u_1 - u_2)v\, dx \\ &\leq \int_\Omega C_p(u_1 - u_2)v\, dx + \int_\Omega C_p(|u_1|^{q-1} + |u_2|^{q-1})(u_1 - u_2)v\, dx\end{aligned}$$

Acotemos la segunda integral usando Hölder, la cuenta de la primera es análoga

$$\int_\Omega C_p(|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})(u_1-u_2)v\,dx$$
$$\leq \|v\|_{L^{p^*}(\Omega)}\left(\int_\Omega (|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})^{\frac{np}{n(p-1)+p}}|u_1-u_2|^{\frac{np}{n(p-1)+p}}\,dx\right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}}$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (|u_1|^{q-1}+|u_2|^{q-1})^{\frac{n(p-2)+2p}{n(p-1)+p}}\,dx\right)^{\frac{n(p-1)+p}{n(p-2)+2p}}\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Podemos concluir entonces que

$$\|\mathfrak{F}'(u_1)-\mathfrak{F}'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq C\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

También se puede probar que

$$\|J'(u_1)-J'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq C\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

En efecto,

$$\|J'(u_1)-J'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=\sup_{v\in W_0^{1,p}(\Omega)\,;\,\|v\|=1}|(J'(u_1)-J'(u_2),v)|$$

Es claro que $J'(u)=|\nabla u|^{p-2}\nabla u$, luego

$$|(J'(u_1)-J'(u_2),v)|\leq \int_\Omega |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1-|\nabla u_2|^{p-2}\nabla u_2||v|\,dx$$
$$\leq \int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}+|\nabla u_2|^{p-2})(\nabla(u_1-u_2))|v|\,dx$$
$$\leq \left(\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}+|\nabla u_2|^{p-2})^{\frac{np}{n(p-1)+p}}|\nabla(u_1-u_2)|^{\frac{np}{n(p-1)+p}}\,dx\right)^{\frac{n(p-1)+p}{np}}\|v\|_{L^{p^*}(\Omega)}$$
$$\leq C\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|^{p-2}+|\nabla u_2|^{p-2})^{\frac{np}{n(p-2)+p}}\,dx\right)^{\frac{n(p-2)+p}{np}}\|\nabla(u_1-u_2)\|_{L^p(\Omega)}$$

Resumiendo

$$\|\Phi'(u_1)-\Phi'(u_2)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\leq C\|u_1-u_2\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Acabamos de probar que el funcional es continuo.

Verifiquemos que Φ satisface (P-S).

Sea $\{u_k\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que:

1. $|\Phi(u_k)|\leq c \quad \forall\, k$
2. $\Phi'(u_k)\longrightarrow 0$

Queremos ver que tiene una subsucesión convergente.

Dado $\varepsilon>0$ existe un k_0 tal que $\|\Phi'(u_k)\|<\varepsilon \quad \forall\, k\geq k_0$.Como $\|\Phi'(u_k)\|=\sup_{v\neq 0}\frac{(\Phi'(u_k),v)}{\|v\|}$. Esto nos dice que, $|(\Phi'(u_k),v)|\leq\varepsilon\|v\|$.Entonces

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_k|^{p-1}\nabla v\,dx-\int_\Omega f(u_k)v\,dx\right|\leq\varepsilon\|v\| \quad \forall\, v$$

Elegimos $v=u_k$, nos queda

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_k|^p\,dx-\int_\Omega f(u_k)u_k\,dx\right|\leq\varepsilon\|u_k\|$$

Como $\Phi(u_k)=\int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u_k|^p-F(u_k)\,dx\leq C$.

Recordemos $0 \leq F(s) \leq \gamma f(s)s \quad \gamma < \frac{1}{p}$. Multiplicando la ecuación por $\frac{1}{\gamma}$ nos queda

$$\int_\Omega \frac{1}{p}\frac{1}{\gamma}|\nabla u_k|^p - \frac{1}{\gamma}F(u_k)\,dx \leq C.$$

Sumando la dos ecuaciones, tenemos que

$$\int_\Omega (\frac{1}{p}\frac{1}{\gamma} - 1)|\nabla u_k|^p\,dx + \int_\Omega f(u_k)u_k - \frac{1}{\gamma}F(u_k)\,dx \leq C + \varepsilon\|u_k\|$$

Como $\int_\Omega f(u_k)u_k - \frac{1}{\gamma}F(u_k)\,dx \leq 0$, eligiendo $\varepsilon = 1$ tenemos que

$$\int_\Omega (\frac{1}{p}\frac{1}{\gamma} - 1)|\nabla u_k|^p\,dx \leq C + \|u_k\|$$

Es decir,

$$C\|u_k\|^p \leq c + \|u_k\|$$

Acabamos de probar que $\{u_k\}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_k \rightharpoonup u$, podemos afirmar que $u_k \longrightarrow u$ en $L^{q+1}(\Omega)$ pedimos que $q+1 < p^*$ para poder aplicar R-K. Tenemos que $f(u_k) \longrightarrow f(u)$ en $L^{p^*}(\Omega)$.

Sea $w = \mathfrak{F}'(u)$, veamos que $\mathfrak{F}'(u_k) \longrightarrow w$.

$$\begin{aligned}\|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\|^2 = (\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u), w_k - w) &= \int_\Omega (f(u_k) - f(u))(w_k - w)\,dx \\ &\leq \left(\int_\Omega (f(u_k) - f(u))^{\frac{q+1}{q}}\,dx\right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_\Omega |w_k - w|^{q+1}\,dx\right)^{\frac{1}{q+1}}\end{aligned}$$

Además

$$\|w_k - w\|_{L^{q+1}(\Omega)} \leq \|w_k - w\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Simplificando la norma a ambos lados de la desigualdad, nos queda que

$$\|\mathfrak{F}'(u_k) - \mathfrak{F}'(u)\| \leq \|f(u_k) - f(u)\|_{L^{\frac{q+1}{q}}(\Omega)} \leq C\|f(u_k) - f(u)\|_{L^{p^*}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Veamos que Φ satisface las hipótesis geométricas del teorema.

Que $\Phi(0) = 0$ es claro. Si $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = r$ entonces $\Phi(u) = \frac{1}{p}r^p - \int_\Omega F(u)\,dx$. Por otro lado, usando que $a|s|^{q+1} \leq F(s) \leq A|s|^{q+1}$

$$\int_\Omega F(u)\,dx \leq \int_\Omega A|u|^{q+1}\,dx \leq C\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx\right)^{\frac{q+1}{p}} = Cr^{q+1}$$

Reemplazando, nos queda que

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p}r^p - Cr^{q+1} = r^p(\frac{1}{p} - Cr^{q+1-p})$$

Si elegimos, por ejemplo r tal que $\frac{1}{2p} = \frac{1}{p} - Cr^{q+1-p}$, despejando resulta que $r = (\frac{1}{2p\,C})^{\frac{1}{q+1-p}}$ y para este r se verifica que $\Phi(u) \geq (\frac{1}{2p\,C})^{\frac{p}{q+1-p}}\frac{1}{2p}$. Si definimos $a = (\frac{1}{2p\,C})^{\frac{p}{q+1-p}}\frac{1}{2p}$ nos construimos a y r que satisfacen lo pedido.

Sea $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $\|u_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$. Entonces

$$\begin{aligned}\Phi(tu_0) &= \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx - \int_\Omega F(t\,u_0)\,dx \\ &\le \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx - a\int_\Omega |t\,u_0|^{q+1}\,dx \\ &\le \frac{t^p}{p} - C\,t^{q+1} = t^p(\frac{1}{p} - C\,t^{q+1-p})\end{aligned}$$

Si elegimos $t > 0$ y $(\frac{1}{p} - C\,t^{q+1-p}) < 0$ despejando t nos queda que $t > (\frac{1}{p\,C})^{\frac{1}{q+1-p}}$. Resumiendo, vimos que si $\|u\| = t$ con $t > (\frac{1}{p\,C})^{\frac{1}{q+1-p}}$ $t > (\frac{1}{p\,C})^{\frac{1}{q+1-p}}$ entonces $\Phi(u) < 0$.

Acabamos de verificar que el funcional satisface las hipótesis del Teorema de paso de la montaña. Concluimos, entonces que c es un valor crítico.

2. El método de Ljusternik-Schnirelman

En esta sección, estudiaremos el método de Ljusternik–Schnirelman. El mismo consiste en encontrar distintos valores críticos de energía para los cuales se tenga un punto crítico asociado y, por consecuencia, una solución débil de la ecuación. Este método es una extensión no lineal e infinito-dimensional de la fórmula de min-max para el cálculo de autovalores de matrices simétricas de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

2.1. Una herramienta topológica. En esta sub-sección, definiremos una herramienta topológica, *el género*, que nos será de utilidad para la demostración del teorema de existencia de multiplicidad de soluciones.

Comencemos con la definición.

Definición 3.3. *Sea E un espacio de Banach Real, sea $\mathcal{A}$ la siguiente clase de conjuntos:*

$$\mathcal{A} = \{A \subset E - \{0\} : A \textit{ es cerrado en } E \textit{ y simétrico respecto del } 0\}$$

Para $A \in \mathcal{A}$ decimos que el género de A es n, si existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$, impar, y n es el mínimo con esa propiedad. Lo notamos $\gamma(A) = n$

Si no existe tal n, entonces $\gamma(A) = \infty$ y definimos $\gamma(\emptyset) = 0$.

Demostremos ahora algunas propiedades básicas del género.

Lema 3.4. *Propiedades del género*

1. *Si existe f impar, $f \in C(A, f(A))$ entonces $\gamma(A) \le \gamma(f(A))$*
2. *Si $A \subset B$ entonces $\gamma(A) \le \gamma(B)$*
3. $\gamma(A \cup B) \le \gamma(A) + \gamma(B)$
4. *Sea A un conjunto compacto de M. Entonces $\gamma(A) \le k$ y existe un entorno $N_\delta(A) \in \xi$ tal que $\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A)$*

Demostración. Veamos 1 si $\gamma(f(A)) = \infty$ listo.

Si $\gamma(f(A)) = n$, entonces existe φ impar, $\varphi \in C(f(A), \mathbb{R}^n - \{0\})$. Considero $\varphi \circ f$, $\varphi \circ f \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$ y $\varphi \circ f$ es impar. Podemos concluir que $\gamma(A) \le \gamma(f(A))$.

Para ver 2 tomamos $f = id$ y aplicamos el item 1.

Ahora, demostremos 3, sabemos que φ impar $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^m - \{0\})$ y ψ impar $\psi \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$. Usando el Teorema de extensión de Tietze, tenemos que $\hat{\varphi} \in C(E, \mathbb{R}^m)$, $\hat{\varphi}|_A = \varphi$ y $\hat{\psi} \in C(E, \mathbb{R}^n)$, $\hat{\psi}|_B = \psi$.

Reemplazando $\hat{\varphi}$ y $\hat{\psi}$ por sus partes impares. Entonces, puedo suponerlas impares, defino $f = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ que cumple que $f \in C(A \cup B), \mathbb{R}^{n+m} - \{0\})$ e impar. Acabamos de probar que $\gamma(A \cup B) \leq m + n = \gamma(A) + \gamma(B)$

Por último demostremos 4. Para cada $x \in A$ defino $Tx = B_{\frac{1}{2}\|x\|}(x) \cup B_{\frac{1}{2}\|x\|}(-x)$. Es fácil ver que, $\gamma(Tx) = 1$.Por otra parte, $A \subset \bigcup_{x \in A} Tx$, por compacidad de A podemos suponer que $A \subset \bigcup_{i=1}^{k} Tx_i$ entonces por 3 concluimos que $\gamma(A) < \infty$.

Si $\gamma(A) = n$ entonces existe $\varphi \in C(A, \mathbb{R}^n - \{0\})$ impar extiendo φ a $\hat{\varphi}$ una función impar como en 3. Como A es compacto entonces existe $\delta > 0$ tal que $\hat{\varphi} \neq 0$ en $N_\delta(A)$ entonces $\gamma(N_\delta(A)) \leq n = \gamma(A)$.

Por 2 vale $\gamma(A) \leq \gamma(N_\delta(A))$. □

Veamos ahora que $\gamma(S^{n-1}) = n$.

Sea $h : \mathbb{R}^n - 0 \longrightarrow S^{n-1}$ tal que $x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$. Consideramos $\varphi = h^{-1}$, notemos que $\varphi \in C(S^{n-1}, \mathbb{R}^n - \{0\})$ e impar. Esto nos dice $\gamma(S^{n-1}) \leq n$. Veamos que no puede ser menor que n, para esto vamos a usar el Teorema de Borsuk-Ulam, que dice que dada una aplicación continua $f : S^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ existe un $x \in S^{n+1}$ tal que $f(-x) = f(x)$.

Supongamos $\gamma(S^{n-1}) < n$ entonces podemos construirnos una $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} - \{0\}$ continua e impar, pero por el Teorema de Borsuk-Ulam, existe x tal que $f(x) = f(-x)$ lo cual es una contradicción.

2.2. Primera generalización del TPM.

Definición 3.5. *Sea $E = \mathbb{R}^n$ para $1 \leq j \leq n$ definimos*

$$\gamma_j = \{A \in \mathcal{A} : A \subset S^{n-1} y\, \gamma(A) \geq j\}$$

Veamos algunas propiedades de los conjuntos definidos en 3.5.

Lema 3.6 (Propiedades).
1. $\gamma_j \neq \emptyset$
2. $\gamma_1 \supset \gamma_2 \supset ... \supset \gamma_n$
3. *Supongo $\varphi \in C(S^{n-1}, S^{n-1})$ e impar, entonces $\varphi : \gamma_j \longrightarrow \gamma_j$*
4. *Sean $A \in \gamma_j$ y $B \in \mathcal{A}$ con $\gamma(B) \leq s < j$ entonces $\overline{A - B} \in \gamma_{j-s}$*

Demostración. Para demostrar 1 alcanza con elegir $A = S^{n-1}$. La propiedad 2 es inmediata de la definición. Demostremos 3, sea $A \in \gamma_j$, sabemos que $\varphi \in C(A; \varphi(A))$, si $\gamma(\varphi(A)) = \infty$ listo. Si $\gamma(A) = k$, entonces, existe $h \in C(\varphi(A), \mathbb{R}^k - \{0\})$ e impar. Consideramos $h \circ \varphi$ dicha función resulta impar y continua. Esto nos dice que $\gamma(\varphi(A)) \leq k = \gamma(A)$. Como $A \in \gamma_j$ tenemos que $j \leq \gamma(A) \leq \gamma(\varphi(A))$, además como $A \subset S^{n-1}$ entonces $\varphi(A) \subseteq S^{n-1}$. Por lo tanto, $\varphi(A) \in \gamma_j$. Veamos 4, necesitamos la propiedad del Lema 3.4 item 3. Usando esto, tenemos que

$$\gamma(A) = \gamma(\overline{A - B} \cup B) \leq \gamma(\overline{A - B}) + \gamma(B)$$

Es decir,

$$\gamma(\overline{A - B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B) \geq j - s$$

Esto concluye la demostración. □

Definición 3.7. *Sea $c_j = \inf_{A \in \gamma_j} \max_{u \in A} \Phi(u)$ para $1 \leq j \leq n$*

Observemos que por la propiedad 3.6 item 2 tenemos que:

$$c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_n$$

Ahora estamos en condiciones de ver el teorema.

TEOREMA 3.8. *Supongo $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ y par entonces $\Phi|_{S^{n-1}}$ tiene por lo menos n pares distintos de puntos críticos.*

Lo primero que queremos es saber porque los $c_j' s$ son valores críticos.Para esto necesitamos recordar el siguiente teorema de deformación

TEOREMA 3.9. *Sea E un espacio de Banach real, $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ y que satisface (P-S). Si $c \in \mathbb{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ y $\mathcal{O}$ es un entorno de K_c entonces existe $a_n \in (0, \bar{\varepsilon})$ y $\eta \in ([0,1]xE, E)$, tales que:*

1. $\eta(0,u) = u \quad \forall\, u \in E$
2. $\eta(t,u) = u \quad \forall t \in [0,1] \quad \Phi(u) \notin [c - \bar{\varepsilon}, c + \bar{\varepsilon}]$
3. *$\eta(t,u)$ es un homeomorfismo de E en E para cada $t \in [0,1]$.*
4. *$\|\eta(t,u) - u\| \leq 1 \quad \forall\, t \in [0,1]$ y $u \in E$.*
5. *$\Phi(\eta(t,u)) \leq \Phi(u) \quad \forall\, t \in [0,1]$ y $u \in E$*
6. $\eta(1, A_{c+\varepsilon} - \mathcal{O}) \subset Ac - \varepsilon$
7. *Si $K_c = \emptyset$ entonces $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subset A_{c-\varepsilon}$*
8. *Si $\Phi(u)$ es par en u entonces $\eta(t,u)$ es impar en u.*

Por el item 7 si $\hat{K}_c = \emptyset$ entonces $\eta(1, \hat{A}_{c_j+\varepsilon}) \subset \hat{A}_{c_j-\varepsilon}$. Por definición 3.7 sabemos que existe $A \in \gamma_j$ tal que $\max_{u\in A} \Phi(u) \leq c_j + \varepsilon$. Esto nos dice que $A \subset \hat{A}_{c_j+\varepsilon}$. Esto nos dice que $\eta(1,A) \subseteq \hat{A}_{c_j-\varepsilon}$. Por lo tanto, $\max_{\eta(1,A)} \Phi(u) \leq c_j - \varepsilon$. Como $\eta(1,.)$ es continua e impar, usando el lema 3.6 item 3 sabemos que $\eta(1,A) \in \gamma_j$. Esto resulta una contradicción.

Nuestro problema radica en responder las dos preguntas siguientes:

- ¿Cómo sé que tengo suficientes puntos críticos?
- ¿Qué pasa si los minimax coinciden?

Para responder estas propiedades vamos a formular el siguiente lema.

LEMA 3.10. *Si $c_1 = c_2 = \cdots = c_{j+p} = c$ entonces $\gamma(\hat{K}_c) \geq p + 1$*

DEMOSTRACIÓN. Supongo $\gamma(\hat{K}_c) \leq p$ usando la propiedad 4 de 3.4, como $\hat{K}_c$ es compacto podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(N_\delta(\hat{K}_c)) \leq p$. Vamos a notar $\hat{N} = N_\delta(\hat{K}_c)$, por 3.6 item 2 sabemos que $\gamma(\hat{N}) \leq p$. Aplicando el teorema 3.9 con $\mathcal{O} = \text{int}\hat{N}$ y $\bar{\varepsilon} = 1$. Tenemos que existe un $\varepsilon \in (0,1)$ y $\eta \in C([0,1]xS^{n-1}, S^{n-1})$ con $\eta(t,u)$ impar en u, satisfaciendo que $\eta(1, \hat{A}_{c+\varepsilon} - \mathcal{O}) \subset \hat{A}_{c-\varepsilon}$.

Elegimos $A \in \gamma_{j+p}$ tal que $\max_A \Phi \leq c + \varepsilon$, esto se puede pues

$$c = \inf_{A \in \gamma_{j+p}} \max_{u \in A} \Phi(u)$$

, esto nos dice que $A \subseteq \hat{A}_{c+\varepsilon}$.

Por otro lado, usando 3.6 item 4, para $\gamma(\hat{N}) \leq p$ y $A \in \gamma_{j+p}$ tenemos que $\overline{A - \hat{N}} \in \gamma_j$. Además por la propiedad de 3.6 item 3 sabemos que $\eta(1, \overline{A - \hat{N}}) \in \gamma_j$ y como $\overline{A - \hat{N}} \subseteq \overline{\hat{A}_{c+\varepsilon} - \mathcal{O}}$ sabemos que $\eta(1, \overline{A - \hat{N}}) \subseteq \hat{A}_{c-\varepsilon}$. Resumiendo, nos queda

$$c \leq \max_{u \in \eta(1, \overline{A - \hat{N}})} \Phi(u) \leq c - \varepsilon$$

Esto es una contradicción. □

Para entender porque el lema anterior responde las pregunta debemos hacer la siguiente observación.

OBSERVACIÓN 3.11. Si $\gamma(A) > 1$ entonces A tiene infinitos puntos distintos.

DEMOSTRACIÓN. Si A tuviera finitos puntos escribo $A = B \cup -B$ con B cerrado y $B \cap -B = \emptyset$.

Defino

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x \in B \\ -1 & x \in -B \end{cases}$$

Entonces, φ es impar y continua entonces $\gamma(A) = 1$. □

OBSERVACIÓN 3.12. Si $p \geq 1$ entonces $\gamma(\hat{K}_c) \geq 2 > 1$ y por la observación anterior concluimos que $\hat{K}_c$ tiene infinitos puntos distintos.

Veamos una generalización del teorema 3.8

TEOREMA 3.13. *Sea E un espacio de Hilbert de dimensión infinita y tenemos $\Phi \in C^1(E, \mathbb{R})$ par. Supongo $r > 0$, $\Phi|_{\partial B_r}$ satisface (P-S) y $\Phi|_{\partial B_r}$ es acotado inferiormente. Entonces $\Phi|_{\partial B_r}$ posee infinitos pares distintos de puntos críticos.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos los conjuntos γ_j como antes reemplazando S^{n-1} por ∂B_r. Valen las mismas propiedades que en 3.6, con las mismas demostraciones cambiando S^{n-1} por ∂B_r.

Ahora, definimos $c_j = \operatorname{ínf}_{A \in \gamma_j} \sup_{u \in A} \Phi(u)$ como $\Phi|_{\partial B_r}$ es acotado inferiormente $c_1 > -\infty$.

Además, (P-S) implica que $\hat{K}_c$ es un conjunto compacto $\forall\, c \in \mathbb{R}$. Con esto, análogamente probamos : que si $c_j = \cdots = c_{j+p} = c$ y $\hat{K}_c = \{x \in \partial B_r : \Phi(x) = c \quad y \quad \Phi|'_{\partial B_r}(u) = 0\}$ entonces $\gamma(\hat{K}_c) \geq p + 1$. Por lo tanto, $\hat{K}_c$ contiene infinitos puntos distintos. □

2.3. Una aplicación. Consideramos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda p(x, u) & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.10}$$

Donde p satisface:

1. $p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. Existen constantes $a_1, a_2 > 0$ tales que $|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$ donde $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ si $n \geq 3$.
3. $\xi p(x, \xi) > 0$ si $\xi \neq 0$.
4. $p(x, \xi)$ es impar en ξ.

Definimos

$$\Phi(u) := -\int_\Omega P(x, u)\, dx$$

Donde

$$P(x, \xi) = \int_0^\xi p(x, t)\, dt$$

El funcional Φ verifica:

- $\Phi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$
- $\Phi'(u)\varphi = \int_\Omega -p(x, u)\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega)$
- Φ es par pues p es impar.
- u es punto crítico de $\Phi|_{S^{n-1}}$

El último item nos dice que $(\Phi|_{S^{n-1}})'(u) = 0$. Sea $\varphi \in E = H_0^1(\Omega)$, tomamos $\psi = \varphi - \langle \varphi, u\rangle u$.Luego,

$$\begin{aligned} 0 = \langle (\Phi|_{S^{n-1}})'(u), \psi\rangle &= \frac{d}{dt}\Phi(\gamma(t))|_{t=0} = \Phi'(\gamma(t))\gamma'(t)|_{t=0} \\ &= \Phi'(u)\psi = \Phi'(u)(\varphi - \langle \varphi, u\rangle u) \\ &= \Phi'(u)\varphi - \langle \varphi, u\rangle \Phi'(u)u \end{aligned}$$

Donde $|\gamma(t)| = 1$, $\gamma(0) = u$ y $\gamma'(0) = \psi$. Notemos $\langle \psi, u\rangle = 0$. Sea $\mu = \Phi'(u)u$, nos queda que

$$0 = \Phi'(u)\varphi - \mu(u, \varphi) = -\int_\Omega p(x, u)\varphi\, dx - \mu \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx$$

Esto nos dice que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi\, dx = \frac{-1}{\mu}\int_\Omega p(x, u)\varphi\, dx$$

Es decir, u es solución del problema (3.10) con $\lambda = -\frac{1}{\mu}$.

Por otro lado, usando la propiedad 3 que cumple p, sabemos que:

$$\mu = \Phi'(u)u = -\int_\Omega p(x, u)u\, dx < 0$$

Para aplicar el Teorema 3.8 necesitamos hacer previamente la siguiente observación.

Observación 3.14. Observemos que Φ resulta débil continuo y que Φ' resulta compacto.

Demostración. Como $|p(x, \xi)| \le a_1 + a_2|\xi|^s$ entonces $|P(x, \xi)| \le a_1 + a_2|\xi|^{s+1}$ con $s+1 < 2^*$.Por el teorema 2.35 sabemos que $N_P \in C(L^{s+1}(\Omega), L^1(\Omega))$.

Veamos que Φ es débil continuo, sea $u_n \rightharpoonup u$ en $H_0^1(\Omega)$ usando el Teorema (R-K) tenemos que $u_n \longrightarrow u$ en $L^{s+1}(\Omega)$. Concluimos entonces, por la continuidad de N_P, que $\Phi(u_n) \longrightarrow \Phi(u)$.

Demostremos que Φ' es compacto.

$$\begin{aligned} \|\Phi'(u_n) - \Phi'(u)\| &= \sup_{\|\varphi\|\le 1}\left|\int_\Omega (p(x, u_n(x)) - p(x, u(x)))\varphi(x)\, dx\right| \\ &\le a_7\|p(\cdot, u_n) - p(\cdot, u)\|_{L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega)} \end{aligned}$$

Análogamente, sabemos que $N_p \in C(L^{s+1}(\Omega), L^{\frac{s+1}{s}}(\Omega))$. Sea $\{u_n\}$ acotada, entonces existe u tal que para una subsucesión $u_n \rightharpoonup u$, luego $u_n \longrightarrow u$ en $L^{s+1}(\Omega)$. Nuevamente por continuidad de N_p, concluimos que $\Phi'(u_n) \longrightarrow \Phi'(u)$. Resumiendo, vimos que $\{\Phi'(u_n)\}$ tiene una subsucesión convergente. □

Suponemos que $\Phi|_{\partial B_1}$ no es acotado inferiormente, entonces existe $\{u_m\} \subseteq \partial B_1$ tal que $\Phi(u_m) < -m$ pero u_m tiene una subsucesión tal que $u_m \rightharpoonup u$ con $u \in \overline{B_1}$. Como Φ es débil continuo sabemos que $\Phi(u_m) \longrightarrow \Phi(u) = -\infty$, lo que es una contradicción pues $\Phi \in C(E, \mathbb{R})$.

Veamos que Φ verifica (P-S). Sea $\{u_n\} \subset \partial B_1$ tal que

- $\Phi(u_n)$ es acotada
- $\Phi|'_{\partial B_1}(u_n) \longrightarrow 0$

Este último item nos dice que:

$$\Phi|'_{\partial B_1}(u_n) = \Phi'(u_n) - (\Phi'(u_n)u_n)u_n \longrightarrow 0$$

Como $\{u_n\}$ es acotada, sabemos que $u_n \rightharpoonup u$ y Φ es débil continuo, tenemos que $\Phi(u_n) \longrightarrow \Phi(u)$. Si $\Phi(u) \neq 0$ entonces $u \neq 0$. Además, como vimos que $u_n \rightharpoonup u$ y Φ' es compacto tenemos que

$\Phi'(u_n) \longrightarrow \Phi'(u)$, se sigue entonces que $(\Phi'(u_n), u_n) \longrightarrow (\Phi'(u), u)$, usando que $\Phi'(u)u \neq 0$ podemos asegurar que a partir de un n grande $\Phi'(u_n)u_n \neq 0$. Despejando nos queda

$$u_n = (\Phi'(u_n)u_n)^{-1}(\Phi|'_{\partial B_1}(u_n) - \Phi'(u_n)).$$

Usando que Φ' es compacto, sabemos que para una subsucesión $\Phi'(u_n)$ converge. Podemos concluir que, si $\Phi(u) \neq 0$ entonces $\{u_n\}$ posee una subsucesión convergente, es decir, tenemos probado que verifica (P-S).

Notemos que el Teorema 3.8 vale también si en vez de pedir (P-S) pedimos que Φ verifique (P-S)$_{c_j}$ para cada c_j. Alcanza con probar que $c_j < 0$ para todo j. Por el item 3 de las propiedades de p, sabemos que:

$$\begin{cases} p(s) > 0 & \text{si } s > 0 \\ p(s) < 0 & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Luego,

$$P(u) = \int_0^u p(s)\,ds > 0$$

Por lo tanto, $\Phi(u) < 0$ entonces $c_j < 0 \quad \forall\, j$.

Resumiendo, hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 3.15. *Si p satisface:*

1. $p(x, \xi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. *Existen constantes $a_1, a_2 > 0$ tales que $|p(x, \xi)| \leq a_1 + a_2|\xi|^s$ donde $0 \leq s < \frac{n+2}{n-2}$ si $n \geq 3$.*
3. *$\xi p(x, \xi) > 0$ si $\xi \neq 0$.*
4. *$p(x, \xi)$ es impar en ξ.*

Entonces (3.10) *posee una sucesión de pares distintos de soluciones débiles $(\lambda_k, \pm u_k)$ en $\mathbb{R} \times \partial B_r$, donde $\lambda_k = -(\Phi'(u_k)u_k)^{-1}$.*

3. Un teorema de Schwartz

En esta sección veremos una generalización del Teorema 3.8 debida a J.T. Schwartz [**22**] que extiende el teorema al caso de variedades diferenciales en espacios de Banach.

3.1. Un poco de geometría. Sea E un espacio de Banach y $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Definimos M el conjunto de nivel 0 de φ,

$$M := \{x \in E \colon \varphi(x) = 0\}.$$

Como es sabido, para que M sea una variedad diferenciable, necesitamos que 0 sea un *valor regular.*

Definición 3.16. *Sea $\varphi : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1. Decimos que 0 es un valor regular de φ si $\nabla\varphi(x) \neq 0$ para todo $x \in M$.*

Recordemos que $\nabla\varphi : E \to E'$.

Si 0 es un valor regular de φ y $x \in M$ se define el *espacio tangente* a M en x como el conjunto

$$M_x := \{v \in E \colon \langle \nabla\varphi(x), v\rangle = 0\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es la aplicación de dualidad entre E' y E.

Tenemos el siguiente Lema

Lema 3.17. *Con las notaciones de esta sección, se tiene que*

$$M_x = \{v \in E\colon \text{ existe } \gamma : (-\delta, \delta) \to M \text{ con } \gamma(0) = x \text{ y } \gamma'(0) = v\}.$$

Demostración. Esta demostración es una aplicación inmediata del Teorema de la Función Implícita. En efecto, sea $v \in M_x$ y consideremos $w \in E$ tal que

$$\langle \nabla\varphi(x), w\rangle \neq 0.$$

Sea $g(t, s) := \varphi(x + tv + sw)$. Observemos que $g(0, 0) = \varphi(x) = 0$ y

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0, 0) = \langle \nabla\varphi(x), w\rangle \neq 0.$$

Luego, por el Teorema de la Función Implícita, existe $\alpha : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = 0$, $g(t, \alpha(t)) \equiv 0$ para $t \in (-\delta, \delta)$ y

$$\alpha'(0) = -\frac{\langle \nabla\varphi(x), v\rangle}{\langle \nabla\varphi(x), w\rangle} = 0.$$

Luego, si definimos $\gamma(t) := x + tv + \alpha(t)w$, γ verifica que $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = v$.

Recíprocamente, si existe $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ y $\gamma'(0) = v$ se tiene que $\varphi(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in (-\delta, \delta)$. Derivando y evaluando en $t = 0$ se obtiene

$$0 = \langle \nabla\varphi(x), v\rangle.$$

Esto completa la demostración. $\square$

En lo que resta de esta sección trabajaremos en un espacio de Hilbert dado que la estructura hilbertiana simplifica muchos de los argumentos. Fundamentalmente, en un espacio de Hilbert, el gradiente de una aplicación C^1 es un elemento del mismo espacio.

En el caso general, es decir cuando se trabaja en espacios de Banach, se debe reemplazar el uso del gradiente por el llamado *pseudo-gradiente*. Dado que no va a ser esencial en lo que resta de la Tesis, preferimos dejar la demostración en el contexto de espacios de Hilbert.

Sea M una variedad C^2 Riemanniana en un espacio de Hilbert separable. Si $u \in M$, obtenemos M_u el espacio tangente a M en u y $\langle , \rangle$ el producto interno en este espacio tangente con $|v| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$ su norma. Si $u, w \in M$ definimos una distancia $\rho(u, w) = \text{ínf} \int_0^1 |\sigma'(t)|\, dt$ donde el ínfimo esta tomado sobre todos los caminos que conectan a u con w.En el caso de dimensión finita ρ es una métrica en M que me da una variedad topológica en M. Si M es completo con esta métrica, M es llamada una variedad Riemanniana Completa.

Sea Φ una función a valores reales definida en M. Vamos a interpretar los vectores tangentes a M como funcionales lineales definidos en el espacio $C^1(M)$, el gradiente de Φ notado $\nabla\Phi$ debe ser definido como el único vector de M tal que $v(\Phi) = \langle v, \nabla\Phi\rangle$ para cada $v \in M_u$.

Como las variedades de un Hilbert no son necesariamente localmente compactas, vamos a centrar nuestra atención en los pares (M, Φ) que satisfacen la condición de compacidad formulada a continuación.

Decimos que (M, Φ) satisface $(P - S)_c$ si:

1. M es una variedad C^2 Riemanniana completa de borde regular en un espacio de Hilbert separable.
2. Si $\{u_n\} \subset M$ es una sucesión de puntos tal que $\Phi(u_n)$ es acotado y $(\nabla\Phi)(u_n)$ converge a 0; entonces $\{u_n\}$ contiene una sucesión convergente.

DEFINICIÓN 3.18. *Sea v un campo de vectores tangentes a M. Una curva solución σ de v, es una función de un intervalo abierto a M tal que $\sigma'(t) = v(\sigma(t))$.*

Si 0 esta en el dominio de σ nosotros llamamos el valor inicial de la curva solución al valor $\sigma(0)$.

Veamos ahora algunos lemas sobre las propiedades de la curva solución.

LEMA 3.19. *Sea v un campo C^1 de vectores tangentes a M para cada u hay una curva solución σ_u de v con valor inicial u. Tal que cada curva solución de v con valor inicial u es una restricción de σ_u.*

La curva solución de σ_u que existe por el lema es llamada la curva solución maximal para v con valor inicial u.

Definimos $t^-(u) < 0$ y $t^+(u) > 0$ los bordes del intervalo que es el dominio de σ_u.

LEMA 3.20. *Si $t^-(u) < s < t^+(u)$ y $w = \sigma_u(s)$ entonces $\sigma_w(t) = \sigma_u(t+s)$ y en particular $t^\pm(w) = t^\pm(u) - s$.*

LEMA 3.21. *La función t^+ es semi-continua superiormente y t^- es semicontinua inferiormente. Si $t^+(u) < \infty$ entonces $\sigma_u(t)$ no tiene punto limite cuando $t \longrightarrow t^+(u)$. Si $t^-(u) > -\infty$ entonces $\sigma_u(t)$ no tiene punto limite cuando $t \longrightarrow t^-(u)$.*

LEMA 3.22. *Supongo que M es C^{k+1} variedad y que v es C^k campo de vectores, la función $(u,t) \longmapsto \sigma_u(t)$ (con dominio $t^-(u) < s < t^+(u)$) es una función C^k.*

Si v es como en los lemas anteriores un campo de vectores C^1 tangentes y σ_u la curva solución con valor inicial u, nosotros vamos a notar $\varphi_t(u) = \sigma_u(t)$ para $t^-(u) < t < t^+(u)$. La familia de funciones φ_t constituyen el flujo definido por v. Por lema 3.20 tenemos que $\varphi_{s+t}(u) = \varphi_s(\varphi_t(u))$ cuando los dos lados de la desigualdad anterior están definidos.

LEMA 3.23. *Supongo (M, Φ) satisface la condición de (P-S). Tenemos $\alpha(t)$ una función a valores reales definida para $t \geq 0$, tal que $\alpha(t) = 1$ para $0 \leq t \leq 1$, $t^2\alpha(t)$ es monótona creciente para $t > 0$ y tal que $t^2\alpha(t) = 2$ para $t > 2$. Si $V(u) = -\alpha(|\nabla\Phi(u)|)\nabla\Phi(u)$ entonces V es un campo de vectores tangentes a M y obtenemos $\eta_t(u)$ el flujo definido por V. Entonces $\eta_t(u)$ es definido $\forall \quad u \in M$ y $\forall \quad -\infty < t < +\infty$*

Esto me dice que el flujo resulta completo.

DEMOSTRACIÓN. Por la definición de α el campo de vectores $V(u)$ resulta uniformemente acotado.

Por otro lado, $\frac{d\eta_t(u)}{dt} = V(\eta_t(u))$ y ahora usando la definición de distancia en la variedad M podemos concluir que $\rho(\eta_t(u), \eta_s(u)) \leq |s-t|$ para $t^-(u) < s, t < t^+(u)$. En efecto, sea $\sigma(t) = \eta_{t(s-t)+t}(u)$, notemos que $\sigma(0) = \eta_t(u)$ y $\sigma(1) = \eta_s(u)$. Entonces,

$$\begin{aligned}\rho(\eta_t(u), \eta_s(u)) &\leq \int_0^1 |\sigma'(\tau)|\, d\tau = \int_0^1 \big|\frac{d}{d\tau}(\eta_{\tau(s-t)+\tau}(u))\big|\, d\tau \\ &= \int_0^1 \big|\frac{d}{d\tau}\eta_{\tau(s-t)+\tau}(u)(s-t)\big|\, d\tau \leq K|s-t|\end{aligned}$$

Ahora, si $t^+(u) < \infty$ y $\{t_n\}$ es una sucesión que aproxima a $t^+(u)$ por izquierda. Por la acotación anterior tenemos que $\{\eta_{t_n}(u)\}$, en otras palabras, me dice que $\{\sigma_u(t_n)\}$ es una sucesión de Cauchy, pero esto contradice el Lema 3.21.Por lo tanto, acabamos de ver que $t^+(u) = \infty$. Análogamente, se prueba que $t^-(u) = \infty$. □

Lema 3.24. *Tenemos $\eta_t(u)$ como en el lema anterior. Sea c un número real y un conjunto*

$$K_c = \{u \in M : \Phi(u) = 0, (\nabla\Phi)(u) = 0\} \tag{3.11}$$

Entonces K_c es compacto. Además para cada $\varepsilon > 0$ tenemos el conjunto

$$N_\varepsilon = \{u \in M : |\Phi(u) - c| < \varepsilon \, y \, |(\nabla\Phi)(\eta_t(u))| < \varepsilon \quad \textit{para algún } t \textit{ tal que} \quad 0 \leq t \leq 1\} \tag{3.12}$$

Entonces cualquier entorno U de K contiene a cualquier entorno N_ε de K.

Demostración. La afirmación que K_c es compacto se sigue inmediato de la condición de (P-S), entonces solo hay que demostrar la segunda afirmación.

Supongo que la segunda afirmación es falsa. Entonces existe un entorno U de K_c que no contiene ninguno de los conjuntos N_ε, y existe una sucesión de puntos $u_n \in M$ y una sucesión de números, $0 \leq t_n \leq 1$ tales que $\Phi(u_n) \longrightarrow 0$ y $\nabla\Phi(\eta_{t_n}(u_n)) \longrightarrow 0$ cuando $t \longrightarrow \infty$.

Pasando a una subsucesión, podemos suponer sin perdida de generalidad, que $t_n \longrightarrow t^*$ cuando $n \longrightarrow \infty$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(\eta_t(u)) &= \nabla\Phi(\eta_t(u))\frac{d}{dt}\eta_t(u) = \nabla\Phi(\eta_t(u))V(\eta_t(u)) \\
&= \nabla\Phi(\eta_t(u)) - \alpha(|\nabla\Phi(\eta_t(u))|)\nabla\Phi(\eta_t(u)) \\
&= -\alpha(|\nabla\Phi(\eta_t(u))|)|\nabla\Phi(\eta_t(u))|^2
\end{aligned}$$

De la cuenta anterior y de la definición de α podemos concluir que $\frac{d\Phi(\eta_{t_n}(u))}{dt}$ es uniformemente acotada $\forall\, u \in M$ y $t \in \mathbb{R}$.

Entonces existe una constante finita K tal que

$$|\Phi(\eta_t(u)) - \Phi(\eta_0(u))| = |\Phi(\eta_t(u)) - \Phi(u)| \leq K|t|$$

Como $\Phi(u_n) \longrightarrow c$, podemos concluir que $\Phi(\eta_{t_n}(u_n))$ es uniformemente acotado porque $\Phi(u_n)$ y t_n son acotados.

Por la condición de (P-S), $\{\eta_{t_n}(u_n)\}$ tiene una subsucesión convergente y podemos suponer sin perdida de generalidad que $\{\eta_{t_n}(u_n)\}$ converge a un punto $w \in M$. Como $(\nabla\Phi)(\eta_{t_n}(u_n)) \longrightarrow 0$, w es evidentemente un punto crítico.

Tenemos que

$$u_n = \eta_{-t_n}(\eta_{t_n}(u_n)) \longrightarrow \eta_{-t^*}(w) = w$$

Como $w \in K_c$ es el limite de u_n y $u_n \notin U$, tenemos una contradicción que completa la prueba. □

Corolario 3.25. *Sea $0 < \varepsilon < 1$, sea η_t y N_ε como en el Lema 3.24. Entonces si $\Phi(u) \leq c + \frac{\varepsilon^2}{2}$ y $u \notin N_\varepsilon$ tenemos que $\Phi(\eta_1(u)) \leq c - \frac{\varepsilon^2}{2}$.*

Demostración. Por el calculo de la derivada, hecho en el lema anterior, podemos afirmar que

$$\Phi(\eta_1(u)) - \Phi(u) = -\int_0^1 \alpha(|\nabla\Phi(\eta_t(u))|)|\nabla\Phi(\eta_t(u))|^2\, dt$$

Si $\Phi(u) < c - \varepsilon$ no tenemos nada que probar. Podemos suponer sin perdida de generalidad que $|\Phi(u) - c| < \varepsilon$ entonces si $u \notin N_\varepsilon$ implica que $|\nabla\Phi(\eta_t(u))| \geq \varepsilon \quad 0 \leq t \leq 1$ y como $t^2\alpha(t)$ es monótona creciente podemos concluir que

$$\Phi(\eta_1(u)) - \Phi(u) = -\int_0^1 \alpha(|\nabla\Phi(\eta_t(u))|)|\nabla\Phi(\eta_t(u))|^2\, dt \leq -\alpha(\varepsilon)|\varepsilon|^2 = -\varepsilon^2$$

Pero entonces,

$$\Phi(\eta_1(u)) \leq c + \frac{\varepsilon^2}{2} - \varepsilon^2 \leq c - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

Que era lo que queríamos probar □

3.2. La demostración del Teorema.

DEFINICIÓN 3.26. *Sea N un espacio topológico y Φ una función continua en N. Sea*

$$c_m(\Phi) = \inf_{\gamma(A)\geq m}[\sup\{\Phi(u) : u \in A\}] \quad m \leq \gamma(N)$$

TEOREMA 3.27. *Sea (M, Φ) que satisface (P-S) y $c_m(\Phi)$ definida como en 3.26. Supongo que $m \leq n$ y $-\infty < c = c_m(\Phi) = c_n(\Phi) < +\infty$. Entonces el conjunto K_c de puntos críticos es de genus por lo menos $n - m + 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongo $n > m$ y $\gamma(K_c) \leq n - m$ usando 3.4 item 4 podemos encontrar un entorno de K_c tal que $\gamma(U) \leq n - m$. Usando 3.4 item 2 y el Lema 3.24 podemos suponer sin perdida de generalidad que U es un entorno de N_ε. Por definición de c_n existe un conjunto A cerrado $\gamma(A) \geq n$ y tal que $\sup\{\Phi(u) : u \in A\} \leq c + \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $A_0 = A - N_\varepsilon$, calculemos $\gamma(A_0)$.

$$\gamma(A) \leq \gamma(A_0) + \gamma(N_\varepsilon)$$

Reemplazando, nos queda

$$\gamma(A_0) \geq n - (n - m) = m$$

Por el Lema 3.4 item 1 sabemos que $\gamma(\eta_1(A_0)) \geq m$.

Por otro lado, como $\sup\{\Phi(u) : u \in A\} \leq c + \frac{\varepsilon}{2}$. Usando el Corolario 3.25 tenemos que $\Phi(\eta_1(u)) \leq c - \frac{\varepsilon^2}{2}$ esto contradice la definición de c_m. Esto completa la prueba en el caso $n > m$.Si $n = m$ y K_c es vacío, podemos obtener U y llegamos a la misma contradicción. □

4. El principio variacional de Ekeland

La presentación de esta sección, sigue las notas de [**21**], Apéndice C. El resultado original, se debe a I. Ekeland y se encuentra en [**8**].

La idea del principio variacional de Ekeland es la siguiente: Suponemos Φ una función a valores reales definida en un espacio métrico $(\mathcal{M}, d)$ semicontinua inferiormente tal que $\Phi(x) \geq \beta$ para toda $x \in \mathcal{M}$.

El principio asegura la construcción de una sucesión minimizante con algún control, más precisamente, la sucesión verifica

$$\inf_{x\in\mathcal{M}}\{\Phi(x)\} + \varepsilon > \Phi(x_\varepsilon)$$

Y

$$\Phi(y) \geq \Phi(x_\varepsilon) - \varepsilon d(x_\varepsilon, y)$$

TEOREMA 3.28. *Sea $\mathcal{M}$ un espacio métrico y tenemos*

$$\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow (-\infty, \infty]$$

una función tal que:

1. $\Phi(y) \geq \beta$
2. Φ *es semicontinuo inferiormente*

Dado $\varepsilon > 0$ y $u \in \mathcal{M}$ tal que:

$$\Phi(u) \leq \inf_{\mathcal{M}} \Phi + \varepsilon$$

Entonces existe una $v \in \mathcal{M}$ tal que:

1. $\Phi(u) \geq \Phi(v)$,
2. $d(u, v) \leq 1$
3. *Si $v \neq w \in \mathcal{M}$ entonces $\Phi(w) \geq \Phi(v) - \varepsilon d(v, w)$.*

Demostración. Fijado $\varepsilon > 0$ definimos la relación de orden en $\mathcal{M}$, decimos:

$$w \leq v, \text{ si y solo si } \Phi(w) + \varepsilon d(v, w) \leq \Phi(v).$$

Consideramos $u_0 = u$ y por recurrencia definimos la sucesión $\{u_n\}$, como sigue:

$$S_n = \{w \in \mathcal{M} : w \leq u_n\},$$

Eligiendo $u_{n+1} \in S_n$ tal que

$$\Phi(u_{n+1}) \leq \inf_{S_n}\{\Phi\} + \frac{1}{n+1},$$

Esto es posible por la definición de ínf, además tenemos que $u_{n+1} \leq u_n$ y $S_{n+1} \subset S_n$. Por la semi-continuidad inferior de Φ sabemos que S_n es un conjunto cerrado. Ahora, si $w \in S_{n+1}$, tenemos que $w \leq u_{n+1} \leq u_n$ y entonces por la relación de orden tenemos que,

$$\varepsilon d(w, u_{n+1}) \leq \Phi(u_{n+1}) - \Phi(w) \leq \inf_{S_n}\{\Phi\} + \frac{1}{n+1} - \inf_{S_n}\{\Phi\} = \frac{1}{n+1}.$$

Llamamos δ_{n+1} al diámetro de S_{n+1}. Nos queda que,

$$\delta_{n+1} \leq \frac{2}{\varepsilon(n+1)}$$

Claramente,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \delta_{n+1} = 0$$

Como $\mathcal{M}$ es completo $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n = \{v\}$ para alguna $v \in \mathcal{M}$.

En particular si $v \in S_0$, tenemos que $v \leq u_0$,entonces $v \leq u_0$, es decir, $\Phi(v) \leq \Phi(v) + \varepsilon d(u, v) \leq \Phi(u)$ y

$$d(u, v) \leq \frac{\Phi(u) - \Phi(v)}{\varepsilon} \leq \frac{1}{\varepsilon}(\inf_{\mathcal{M}}\{\Phi\} + \varepsilon - \inf_{\mathcal{M}} \Phi) = 1$$

Entonces,

$$d(u, v) \leq 1$$

Para obtener 3, suponemos que $w \leq v$.Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$, $w \leq u_n$, es decir,

$$w \in \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

Entonces $w = v$.Por lo tanto sabemos que si $w \neq v$ entonces $v \leq w$ luego

$$\Phi(w) \geq \Phi(v) - \varepsilon d(v, w)$$

□

Los resultados que explicaremos a continuación nos mostraran como usar el principio variacional para encontrar puntos críticos del funcional.

COROLARIO 3.29. *Sea E un espacio de Banach y $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y acotada inferiormente en E. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para toda $u \in E$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_E \varphi + \varepsilon,$$

existe $v \in E$ que verifica:

- $\varphi(v) \leq \varphi(u)$
- $\|u - v\|_E \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$
- $\|\varphi'(v)\|_{E'} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN. Si en el teorema 3.28 tomamos $\mathcal{M} = E, \Phi = \varphi, \varepsilon > 0, \lambda = \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}, d = \|\cdot\|$. Tenemos que $v \in E$ tal que:

- $\varphi(v) \leq \varphi(u)$
- $\|u - v\|_E \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$

Y para toda $w \neq v$

$$\varphi(w) > \varphi(v) - \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|(v - w)\|.$$

En particular, tomando $w = v + th$ con $t > 0$ y $h \in E, \|h\| = 1$, entonces

$$\varphi(v + th) - \varphi(v) > -\varepsilon^{\frac{1}{2}} t$$

Que implica que

$$-\varepsilon^{\frac{1}{2}} \leq \langle \varphi'(v), h \rangle \quad \text{para toda } h \in E$$

Luego,

$$\|\varphi'(v)\|_{E'} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$$

□

COROLARIO 3.30. *Sea M una variedad diferenciable en un espacio de Banach y $\varphi : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable y acotada inferiormente en M. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y para toda $u \in M$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_M \varphi + \varepsilon,$$

existe $v \in M_u$ que verifica:

- $\varphi(v) \leq \varphi(u)$
- $\|u - v\|_M \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$
- $\|\varphi'(v)\|_{M'_u} \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}}$.

DEMOSTRACIÓN. La demostración es análoga a la del corolario anterior. Sólo se debe tomar, en lugar de $w = v + th$ a $w = \gamma(t)$ con $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$, $\gamma(0) = v$ y $\gamma'(0) = h$. □

COROLARIO 3.31. *Si M y φ son como en el corolario 3.30, entonces para toda sucesión minimizante de φ, $\{u_k\} \subset E$ existe una sucesión minimizante $\{v_k\} \subset E$ tal que:*

- $\varphi(v_k) \leq \varphi(u_k)$
- $\|u_k - v_k\|_M \longrightarrow 0$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$
- $\|\varphi'(v_k)\|_{M'_{u_k}} \longrightarrow 0$ *cuando* $k \longrightarrow \infty$

DEMOSTRACIÓN. Si $\varphi(u_k) \longrightarrow c = \inf_M \varphi$ considerando $\varepsilon_k = \varphi(u_k) - c$ si es positiva y $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ si $\varphi(u_k) = c$. Entonces para ε_k tomamos v_k como en el corolario 3.30. □

CAPíTULO 4

Caso subcrítico

Consideraremos el siguiente problema elíptico no lineal

$$(4.1)\qquad \begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio suave y acotado en $\mathbb{R}^N$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el $p-$laplaciano.

Entendemos como solución débil del problema

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p-2}uv - f(x,u)v\,dx = 0 \quad \forall\, v \,\epsilon\, W_0^{1,p}(\Omega)$$

Nos interesa encontrar puntos críticos del funcional de energía asociado, actuando en el espacio de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$\Phi(v) = \int_\Omega \frac{1}{p}(|\nabla v|^p + |v|^p) - F(x,v)dx$$

En donde $F(x,u) = \int_o^u f(x,z)dz$.

Nuestro objetivo es ver que bajo ciertas condiciones, hay tres soluciones débiles del problema (4.1) no triviales. Más aún,una positiva,una negativa y una que cambia de signo.

Vamos a construir tres conjuntos disjuntos $K_i \neq \emptyset$ que no contienen al 0 tales que $\Phi\,|_{K_i}$ tenga un punto crítico.

Sean M_i conjuntos,$M_i \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ construidos imponiéndole un restricción de signo y una condición de normalización.

Definición 4.1. *Definimos los siguientes conjuntos en el espacio de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$M_1 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_+ > 0 \ y \ \int_\Omega |\nabla u_+|^p + |u_+|^p dx = \int_\Omega f(x,u)u_+ dx \right\},$$

$$M_2 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_- > 0 \ y \ \int_\Omega |\nabla u_-|^p + |u_-|^p dx = \int_\Omega f(x,u)u_- dx \right\},$$

$$M_3 = M_1 \cap M_2.$$

Donde $u_+ = \max\{u,0\}$ *y* $u_- = \max\{-u,0\}$ *son las partes positivas y negativas de u, respectivamente.*

Observación 4.2. El hecho de que estos conjuntos son no vacíos es una consecuencia más o menos inmediata de la definición y de la hipótesis **F3** del Teorema 4.9. En efecto, para ver que M_1 es no vacío, se toma una función $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$ y se calcula:

$$\int_\Omega |\nabla t u_0|^p + |t u_0|^p dx = t^p \|u_0\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

$$c_3 \|u_0\|^q_{L^q(\Omega)} t^q \leq \int_\Omega f(x,tu_0)tu_0\,dx \leq c_4 \|u_0\|^q_{L^q(\Omega)} t^q$$

donde las desigualdades son consecuencia de la hipótesis **F3** del Teorema 4.9.

Ahora, es inmediato a partir del Teorema de Bolzano, dado que $q > p$, que existe $\bar{t}$ tal que $\bar{t}u_0 \in M_1$.

De manera completamente análoga se ve que $M_2 \neq \emptyset$.

Para ver que $M_3 \neq \emptyset$, se toma $u_1 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_{1,+}, u_{1,-} \not\equiv 0$ y se toman $\bar{t}$ y $\underline{t}$ tales que $\bar{t}u_{1,+} \in M_1$ y $\underline{t}u_{1,-} \in M_2$. Luego, $u = \bar{t}u_{1,+} - \underline{t}u_{1,-} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $u \in M_3$.

Finalmente, definimos los siguientes conjuntos.

Definición 4.3.

$$K_1 = \{u \in M_1 \colon u \geq 0\}, \quad K_2 = \{u \in M_2 \colon u \leq 0\}, \quad K_3 = M_3.$$

1. Algunos lemas técnicos

Necesitamos ahora, ver un par de lemas previos, para poder verificar la condición de Palais-Smale.

Lema 4.4. *Existen constantes $C_j > 0$ tales que, dada $u \in K_i$ para $i = 1, 2, 3$ se tienen las siguientes desigualdades*

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C_1 \left(\int_\Omega f(x,u)u\,dx \right) \leq C_2 \Phi(u) \leq C_3 \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Demostración. Para probar la primera desigualdad podemos suponer que $u \,\epsilon\, K_1$,pues el resto de los casos son analogos.Tenemos que $u \geq 0$, por lo que $u_+ = u$ y que u_+ verifica la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^p + |u_+|^p\,dx = \int_\Omega f(x,u)u_+\,dx$$

Es inmediato entonces que

$$\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x,u)u\,dx$$

Esto prueba la primera desigualdad con $C_1 = 1$.

Para probar la tercera desigualdad necesitamos que $\exists\, c_2$ tal que

$$\int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{1}{c_2} \int_\Omega f(x,u)udx$$

Recordemos que la definición de Φ es la siguiente:

$$\Phi(v) = \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla v|^p + \frac{1}{p}|v|^p - F(x,v)dx$$

Además, notamos que,

$$\left| \int_\Omega F(x,u)\,dx \right| = \int_\Omega F(x,u)\,dx \leq \frac{1}{c_2} \int_\Omega f(x,u)u\,dx = \frac{1}{c_2} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Entonces, esto me dice que,

$$-\int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{1}{c_2} \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{4.2}$$

Por lo tanto, de (4.2), tenemos la siguiente acotación:

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&\leq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{1}{c_2}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \\
&\leq \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{p}\right)\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} dx
\end{aligned}
$$

Notemos que $C_3 = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{p}$.

Para probar la desigualdad del medio necesitamos que:

$$
\int_\Omega F(x,u)dx \leq \frac{1}{c_2}\int_\Omega f(x,u)u\,dx \quad \text{y} \quad \frac{1}{c_2} \leq \frac{1}{p} \tag{4.3}
$$

Recordemos, que como $u \in K_i$, podemos afirmar que

$$
\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x,u)u\,dx
$$

Utilizando esto y (4.3) nos queda que:

$$
\begin{aligned}
\Phi(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&\geq \frac{1}{p}\int_\Omega f(x,u)u\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx \\
&\geq (\frac{1}{p} - \frac{1}{c_2})\int_\Omega f(x,u)u\,dx
\end{aligned}
$$

□

Lema 4.5. *Existen constantes positivas tales que:*

$$
\|u_+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_1
$$

$$
\|u_-\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_2
$$

$$
\|u_+\|_{W^{1,p}(\Omega)}\,, \|u_-\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_3
$$

Demostración. Por definición de K_i tenemos que:

$$
\|u_\pm\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f(x,u)u_\pm\,dx
$$

Necesitamos que:

$$
\int_\Omega f(x,u)u_\pm\,dx \leq C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p^* \geq q > p
$$

Entonces, nos queda que:

$$
\|u_\pm\|^p_{w^{1,p}(\Omega)} \leq C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)}
$$

Como $q > p$ dividiendo a los dos lados de la desigualdad anterior por la norma a la p,obtenemos la acotación que queríamos probar. □

Lema 4.6. *Existe una constante $C > 0$ tal que $\Phi(u) \geq C\|u\|^p_{w^{1,p}(\Omega)}$ para toda*

$u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ suficientemente pequeña.

Demostración. Para probar este lema necesitamos que:

$$\int_\Omega F(x,u)\,dx \leq C\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p^* \geq q > p$$

Usando esto podemos realizar la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - \int_\Omega F(x,u)dx \geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - C\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} - C_1\|\nabla u\|^q_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

En la segunda desigualdad estamos usando Poincaré pues $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$.

Si $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ es suficientemente pequeño podemos acotar el último termino por $C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}$ dado que $p < q$. □

El siguiente lema describe las propiedades de las variedades M_i.

Lema 4.7. *M_i es una subvariedad de $W^{1,p}_0(\Omega)$ de codimensión 1, si $i = 1, 2$ y 2, si $i = 3$ respectivamente. Los conjuntos K_i son completos. Además $\forall\, u \in M_i$ tenemos la descomposición $T_u W^{1,p}_0(\Omega) = T_u M_i \bigoplus span\{u_+, u_-\}$ donde $T_u M$ es el espacio tangente a la variedad M en u. Finalmente, la proyección a la primer coordenada es uniformemente continua en conjuntos acotados de M_i.*

Demostración. Definamos,

$$\begin{aligned}\overline{M}_1 &= \left\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) \colon \int_\Omega u_+\,dx > 0\right\} \\ \overline{M}_2 &= \left\{u \in W^{1,p}_0(\Omega) \colon \int_\Omega u_-\,dx > 0\right\} \\ \overline{M}_3 &= \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2\end{aligned}$$

Observemos que $M_i \subseteq \overline{M}_i$

Como los conjuntos $\overline{M}_i$ son abiertos en $W^{1,p}_0(\Omega)$, es suficiente con probar que M_i es una subvariedad regular de $\overline{M}_i$.

Vamos a construir una función $C^{1,1}$, $\varphi_i \colon \overline{M}_i \to \mathbb{R}^d$ con $d = 1$ si $i = 1, 2$ o $d = 2$ si $i = 3$ tal que M_i sea la imagen inversa del valor regular de φ_i. Dicho de otra manera, lo que queremos es que $M_i = \varphi_i^{-1}(0)$.

De hecho, definamos para $u \in \overline{M}_1$

$$\varphi_1(u) = \int_\Omega |\nabla u_+|^p + |u_+|^p - f(x,u)u_+\,dx.$$

Para $u \in \overline{M}_2$

$$\varphi_2(u) = \int_\Omega |\nabla u_-|^p + |u_-|^p - f(x,u)u_-\,dx.$$

Para $u \in \overline{M}_3$

$$\varphi_3(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$$

Obviamente, tenemos que $M_i = \varphi_i^{-1}(0)$. Necesitamos mostrar que 0 es un valor regular de φ_i pues en ese caso M_i resulta una subvariedad.

Calculemos $\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle$ para $u \in M_1$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_+) = \\
&\qquad =\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla(u+\varepsilon u_+)_+|^p + |(u+\varepsilon u_+)_+|^p \\
&\qquad\qquad - f(x,u+\varepsilon u_+)(u+\varepsilon u_+)_+\,dx \\
&\qquad =\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega (1+\varepsilon)^p|\nabla u_+|^p + (1+\varepsilon)^p|u_+|^p \\
&\qquad\qquad - f(x,u+\varepsilon u_+)(1+\varepsilon)u_+\,dx \\
&\qquad =\int_\Omega p(1+\varepsilon)^{p-1}|\nabla u_+|^p + p(1+\varepsilon)^{p-1}|u_+|^p - f(x,u+\varepsilon u_+)u_+ \\
&\qquad\qquad - f_u(x,u+\varepsilon u_+)u_+(1+\varepsilon)u_+\,dx
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_+)\Big|_{(\varepsilon=0)} = \int_\Omega p|\nabla u_+|^p + p|u_+|^p - f(x,u)u_+ - f_u(x,u)u_+^2\,dx.
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla\varphi_1(u),u_+\rangle &= p\|\nabla u_+\|^p + p\|u_+\|^p - \int_\Omega f(x,u)u_+ - f_u(x,u)u_+^2\,dx \\
&\le p\left(\|\nabla u_+\|^p + \|u_+\|^p\right) - \int_\Omega f(x,u)u_+ - f_u(x,u)u_+^2\,dx
\end{aligned}
$$

Como $u\in M_1$, el último termino se puede acotar por

$$
(p-1)\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx - \int_\Omega f_u(x,u)u_+^2\,dx.
$$

Necesitamos que:

$$
\int_\Omega f(x,u)u\,dx \le C_1\int_\Omega f_u(x,u)u^2\,dx \le C_4\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \tag{4.4}
$$

Usando (4.4) y que $u\in M_1$ nos queda que:

$$
\begin{aligned}
&(p-1)\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx - \int_\Omega f_u(x,u)u_+^2\,dx \le (p-1-\frac{1}{C_1})\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx \\
&= \left(p-1-\frac{1}{C_1}\right)\left(\|\nabla u_+\|^p_{L^p(\Omega)} + \|u_+\|^p_{L^p(\Omega)}\right) \\
&\le \left(p-1-\frac{1}{C_1}\right)\|\nabla u_+\|^p_{L^p(\Omega)}
\end{aligned}
$$

Nos interesa que:

$$
\left(p-1-\frac{1}{C_1}\right) < 0
$$

Para que se cumpla esto, necesitamos que:

$$
C_1 < \frac{1}{p-1}
$$

Usando ahora el Lema 4.5 sabemos que $\langle\nabla\varphi_1(u),u_+\rangle$ es estrictamente negativo y por lo tanto, $\nabla\varphi_1(u)\neq 0$.

El mismo argumento se aplica a M_2.

Notemos, que si probamos que $\langle\nabla\varphi_1(u),u_-\rangle = \langle\nabla\varphi_2(u),u_+\rangle = 0$ para $u\in M_3$ entonces por lo anterior sabemos que $\langle\nabla\varphi_1(u),u\rangle < 0$ y $\langle\nabla\varphi_2(u),u\rangle < 0$. Razón por la cual podemos afirmar que $\nabla\varphi_3(u)\neq 0$ para $u\in M_3$.

Veamos que $\langle\nabla\varphi_1(u),u_-\rangle = 0$ para $u\in M_3$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_-) =\\
=&\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla(u+\varepsilon u_-)_+|^p + |(u+\varepsilon u_-)_+|^p - f(x,u+\varepsilon u_-)(u+\varepsilon u_-)_+\,dx\\
=&\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla u_+|^p + |u_+|^p - f(x,u+\varepsilon u_-)u_+\,dx\\
=&-\int_\Omega f_u(x,u+\varepsilon u_-)u_+u_-\,dx\\
=&0
\end{aligned}
$$

Por lo que

$$\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_-)\Big|_{(\varepsilon=0)} = 0.$$

Análogamente $\langle\nabla\varphi_2(u),u_+\rangle = 0$. Por lo tanto,$M_3$ resulta una subvariedad regular.

Veamos ahora que,K_i es completo. Lo vamos a probar para K_1,los otros casos son análogos.

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es completo, sabemos que $u_k\longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y además $(u_k)_\pm\longrightarrow u_\pm$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\nabla(u_k)_+\longrightarrow\nabla u_+$ en $L^p(\Omega)$ y esto me dice que

$$\int_\Omega |\nabla(u_k)_+|^p\,dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_+|^p\,dx$$

Además usando la continuidad de la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\Omega)$ tenemos que $(u_k)_+\longrightarrow u_+$ en $L^p(\Omega)$ y por lo tanto,

$$\int_\Omega |(u_k)_+|^p\,dx \longrightarrow \int_\Omega |u_+|^p\,dx.$$

Necesitamos que

$$\int_\Omega f(x,u_k)u_{k_+}\,dx \longrightarrow \int_\Omega f(x,u)u_+\,dx.$$

Alcanza con pedir que:

$$\int_\Omega f(x,u)u_\pm dx \le C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p<q\le p^*,$$

porque sabemos que $(u_k)_+\longrightarrow u_+$ en $L^q(\Omega)$.

Como $u_k\in K_1$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_+}|^p + |u_{k_+}|^{p^*}\,dx = \int_\Omega f(x,u_k)u_{k_+}\,dx$$

y pasando al límite obtenemos que como $u_k\in K_1$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^p + |u_+|^{p^*}\,dx = \int_\Omega f(x,u)u_+\,dx$$

Resta ver que $\int_\Omega u_+ \, dx > 0$ pero por el Lema 4.5 sabemos que $\|(u_k)_+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C$ entonces $\|u_+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C$ y por esto $u_+ \not\equiv 0$. Esto me dice que $\int_\Omega u_+ \, dx > 0$ y por lo tanto $u \in M_1$.

Además, $u_k \geq 0 \quad \forall k$ y como $u_{k_j} \longrightarrow u$ en casi todo punto concluimos que $u \geq 0$.

Resumiendo, acabamos de probar que M_1 es completo.

Falta ver que $T_u W_0^{1,p}(\Omega) = T_u M_1 \oplus \langle u_+ \rangle$, donde $M_1 = \{u \colon \varphi_1(u) = 0\}$ y $T_u M_1 = \{v \colon \langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle = 0\}$.

Sea $v \in T_u W_0^{1,p}(\Omega)$ y escribimos $v = v_1 + v_2$, donde $v_2 = \alpha u_+$ y $v_1 = v - v_2$. Nos interesa elegir α de manera tal que $v_1 \in T_u M_1$.

$$0 = \langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle = \langle \nabla\varphi_1(u), \alpha u_+\rangle = \langle \nabla\varphi_1(u), v_1\rangle.$$

Si elegimos

$$\alpha = \frac{\langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle}{\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle},$$

reemplazando en la ecuación anterior nos queda que

$$\langle \nabla\varphi_1(u), v_1\rangle = 0.$$

Análogamente, $T_u W^{1,p}(\Omega) = T_u M_2 \oplus \langle u_-\rangle$ y $T_u W^{1,p}(\Omega) = T_u M_3 \oplus \langle u_+, u_-\rangle$. □

2. La condición de Palais-Smale

LEMA 4.8. *El funcional $\Phi|_{K_i}$ satisface la condición de Palais-Smale.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u_k \subset K_i$ una sucesión tal que:

1. $\Phi(u_k)$ es uniformemente acotada
2. $\nabla\Phi|_{K_i}(u_k) \longrightarrow 0$ fuertemente

Necesitamos mostrar que existe una subsucesión que converge fuerte en K_i.

Sea $v_j \in T_{u_j} W^{1,p}(\Omega)$ un vector unitario tal que:

$$\langle \nabla\Phi(u_j), v_j\rangle = \|\nabla\Phi(u_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Ahora por el Lema 4.7, $v_j = w_j + z_j$ con $w_j \in T_{u_j} M_i$ y $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$.

Además, los z_j son uniformemente acotados y como los v_j también lo son, podemos concluir que los w_j también son uniformemente acotados.

Por otro lado,

$$\|\nabla\Phi(u_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \langle \nabla\Phi(u_j), v_j\rangle = \langle \nabla\Phi|k_i(u_j), w_j\rangle$$

La desigualdad anterior proviene de que $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$ y al demostrar el Lema 4.7 vimos que $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$ es ortogonal a $T_{u_j} M_i$. Y recordando que, w_j es uniformemente acotado y que u_k verifica la condición 2 que mencionamos al principio, notamos que la igualdad anterior tiende fuertemente a 0.

Ahora, estamos bajo las condiciones de (P-S) para el funcional Φ. □

3. Fin de la demostración

TEOREMA 4.9. *Suponiendo que f cumple:*

F1: $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *es una función medible respecto de la primer variable y continua respecto de la segunda variable para casi todo $x \in \Omega$. Además, $f(x, 0) = 0$ para cada $x \in \Omega$.*

F2: *Existen constantes $p < q < p^* = \frac{Np}{(N-p)}$, $s > \frac{p^*}{p^*-q}$, $t = \frac{sq}{(2+(q-2)s)}$ y funciones $a \in L^s(\Omega)$, $b \in L^t(\Omega)$, tal que para $x \in \Omega$, $u, v \in \mathbb{R}$.*

$$|f_u(x, u)| \leq a(x)|u|^{q-2} + b(x)$$

F3: *Existen constantes $c_1 \in (0, \frac{1}{p-1})$, $k_2 > p$, $0 < c_3 < c_4$ tal que $\forall\, u \in L^q(\Omega)$ para $p < q < p^*$*

$$\begin{aligned} c_3\|u\|^q_{L^q(\Omega)} &\leq k_2 \int_\Omega F(x, u)\, dx \leq \int_\Omega f(x, u)u\, dx \\ &\leq c_1 \int_\Omega f_u(x, u)u^2\, dx \leq c_4\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Existen tres soluciones no triviales débiles del problema.

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(x, u) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

Donde Ω es un dominio regular y acotado, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$.

Más aún, estas soluciones son una negativa, una positiva y una que cambia de signo.

DEMOSTRACIÓN. Para probar el Teorema, verificaremos que el funcional $\Phi\ |_{K_i}$ verifica las hipótesis del Principio Variacional de Ekeland 3.28.

El hecho de que Φ sea acotado inferiormente sobre K_i es una consecuencia inmediata de la construcción de la variedad K_i.

Luego, por el Corolario 3.31, existe $v_k \in K_i$ tal que

$$\Phi(v_k) \to \inf_{K_i} \Phi \qquad \text{y} \qquad (\Phi\ |_{K_i})'(v_k) \to 0.$$

Como $(K_i, \Phi\ |_{K_i})$ verifica (P-S), se tiene que v_k posee una subsucesión convergente, que denominamos v_k.

Luego Φ posee un punto crítico en K_i, $i = 1, 2, 3$ y, por construcción de las variedades K_i, uno de ellos resulta positivo, otro negativo y el último cambia de signo. □

CAPíTULO 5

Compacidad por concentración

1. El método de compacidad por concentración

En este capitulo mostraremos el método de compacidad por concentración, basado en dos lemas de Lions.Que nos permitirá verificar que un funcional satisface la condición de Palais Smale (la que generaliza la propiedad que tiene $\mathbb{R}^n$ de que cualquier sucesión acotada posee una subsucesión convergente) para el caso crítico.Es decir, esta técnica se aplica en los casos en los que la inclusión de Sobolev no resulta compacta.

Dada una sucesión acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tomando una subsucesión conveniente podemos suponer que:

1. $u_j \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$
2. $u_j \longrightarrow u$ en $L^r(\Omega) \quad \forall 1 \leq r < p^*$
3. $|u_j|^{p^*} \rightharpoonup d\nu$ débil*
4. $|\nabla u_j|^p \rightharpoonup d\mu$ débil*

Donde ν y μ son medidas finitas. Con estas suposiciones y considerando que extiendo las funciones u_j por 0 a todo $\mathbb{R}^n$ y para fijar ideas suponemos que $\mu = 0$. Podemos obtener la desigualdad inversa de Hölder.

$$\left(\int_{R^n} |\phi|^{p^*} \, d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^n} |\phi|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

En donde S es la mejor constante en la inclusión de Sobolev, es decir:

$$S = \text{ínf}\left\{\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ tales que } \|u\|_{p^*} = 1 \, y \, \nabla u \in L^p(\Omega)\right\}$$

Notemos que dicha desigualdad me esta diciendo que las medidas μ y ν están relacionadas.

Para la prueba, usamos que por la desigualdad de Sobolev, aplicada a ϕu_j, tenemos que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi u_j|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \phi u_j|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Por 3 obtenemos que

$$\text{lím}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi u_j|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^{p^*} \, d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Por otra parte

$$\left(\int_\Omega |\nabla(\phi u_j)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\nabla \phi u_j + \phi \nabla u_j|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Por lo que tenemos que:

$$|\, \|\nabla(\phi u_j)\|_{L^p(\Omega)} - \|\phi \nabla u_J\|_{L^p(\Omega)}| \leq \|u_j \nabla \phi\|_{L^p(\Omega)}$$

Usando que $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ y que $u_j \longrightarrow 0$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$ podemos afirmar que:

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\phi u_j)|^p \, dx = \lim \int_{\mathbb{R}^n} |\phi \nabla u_j|^p \, dx$$

Por 4 sabemos que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p |\nabla u_j|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \, d\mu$$

Podemos concluir entonces que

$$\lim \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\phi u_j)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\phi|^p \, d\mu$$

Pasando al limite en la Desigualdad de Sobolev ya mencionada, obtenemos la desigualdad inversa de Hölder.

LEMA 5.1. *Si ν y μ son dos medidas finitas y no negativas tales que para $1 \leq q < r < \infty$.Existe $C > 0$ tal que*

$$\left(\int_\Omega |\phi|^r \, d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_\Omega |\phi|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \, \phi \in C_c^\infty$$

Entonces existe $\{x_i\}_{i \in I}$ y $\{\nu_i\}_{i \in I}$ $\nu_i \in R$ $\quad \nu_i > 0$ con I a lo sumo numerable tal que

$$\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i} \quad y \quad \mu \geq C^{-p} \sum_{i \in I} \nu_i^{\frac{p}{r}} \delta_{x_i}$$

Para entender la demostración del Lema 5.1 vamos a utilizar algunos lemas previos.

LEMA 5.2. *Sea ν una medida finita y no negativa que cumple que para todo $\delta > 0$ tal que para todo A Boreliano se tiene que $\nu(A) = 0 \, o \, \nu(A) \geq \delta$. Entonces existe $\{x_i\}_{i \in I}$ y $\nu_i > 0$ donde I es a lo sumo numerable tal que $\nu = \sum_{i \in I} \nu_i \delta_{x_i}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea A tal que $\nu(A) \geq \delta$ veamos que existe x_i tal que $\nu(x_i) \geq \delta$.En efecto, cubro A por cubos, existe un cubo al que denominamos Q_1 tal que $\nu(Q_1) \geq \delta$. Pues, si todos los cubitos miden 0 entonces $\nu(A) = 0$, que seria una contradicción.

Repitamos el mismo procedimiento con Q_1, lo dividimos en 2^n cubitos y alguno de ellos tiene medida mayor que $\delta > 0$. Llamemos Q_2 a uno de esos cubos.

Repitiendo este proceso obtenemos una sucesión de cubitos encajados

$$Q_1 \subset Q_2 \subset ... \subset Q_n \subset ...$$

que cumplen que $\nu(x_i) \geq \delta \, \forall \, i$. Por otro lado, sabemos que existe $x_i = \bigcap_{i \in N} Q_i$ y además

$$\nu(x_i) = \lim \nu(Q_i) \geq \delta$$

Sea $\{x_i\}$ el conjunto de todos los puntos de R^n tales que $\nu(x_i) \geq \delta$. Descomponemos A de la siguiente forma

$$A = A \cap \bigcup x_i \cup A \setminus \bigcup x_i$$

Si $A \cap \bigcup x_i = \emptyset$ entonces $\nu(A) = 0$. En efecto, si $\nu(A) \geq \delta$ por la parte anterior existe $x \in A$ tal que $\nu(x) \geq \delta$. Contradicción.

Si usamos esto y notamos $\nu_i = \nu(x_i)$. Nos queda la siguiente igualdad

$$\nu(A) = \nu \left(A \cap \bigcup x_i \right) + \nu \left(A \setminus \bigcup x_i \right) = \sum_{i \in I} \nu_i.$$

Observemos que I es a lo sumo numerable porque

$$\delta \sharp I \leq \sum_{i \in I} \nu(x_i) \leq \nu(R^n) < \infty.$$

Esto termina la demostración. $\square$

LEMA 5.3. *Sea ν una medida que cumple que*

$$\left(\int_\Omega |\psi|^r \, d\nu \right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_\Omega |\psi|^p \, d\nu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\Omega) \tag{5.1}$$

Podemos asegurar que existe $\delta > 0$ tal que para todo A Boreliano se cumple que $\nu(A) = 0$ o $\nu(A) \geq \delta$

DEMOSTRACIÓN. Sea $\psi = \chi_A$ para A Boreliano.

Por (5.1) tenemos que

$$\nu(A)^{\frac{1}{r}} \leq C \nu(A)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $\nu(A) = 0$ listo. Si no, tengo la siguiente desigualdad

$$\frac{1}{C} \leq \nu(A)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}.$$

Es decir

$$\nu(A) \geq \left(\frac{1}{C} \right)^{\frac{pr}{r-p}} = \delta,$$

como queríamos demostrar. $\square$

Veamos ahora la demostración del Lema 5.1

DEMOSTRACIÓN. Es claro que por Hölder inversa sabemos que $\mu(A) = 0$ entonces $\nu(A) = 0$, es decir, $\nu \ll \mu$. Por Teorema de Radon Nikodyn sabemos que existe $f \in L^1(d\mu)$ tal que $d\nu = f \, d\mu$.

Por otra parte, por Hölder inversa tenemos que para A Boreliano $\nu(A) \leq C^r \mu(A)^{\frac{r}{p}}$ y ahora realizamos la siguiente acotación.

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \nu(A) \leq C^r \mu(A)^{\frac{r}{p}-1} \leq C^r \mu(\mathbb{R}^n)^{\frac{r}{p}-1} < \infty.$$

Notemos que esto me dice que $f \in L^\infty(d\mu)$, pues por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue sabemos que

$$\text{lím} \frac{1}{\mu(Q_x)} \int_{Q_x} f \, d\mu = f(x)$$

Entonces $f(x) \leq C^r \mu(\mathbb{R}^n)^{\frac{r}{p}-1}$ en casi todo punto.

Por otro lado, por Teorema de descomposición de Lebesgue tenemos que μ se puede escribir como $\mu = g\nu + \sigma$ con $g \in L^1(d\nu) \, g \geq 0$ y $\sigma \perp \nu$.

Aplicando Hölder inverso a $\phi = g^{\frac{1}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\psi \quad \forall\psi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^r\,d\nu\right)^{\frac{1}{r}} &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{p}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{p}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^p\,(gd\nu+d\sigma)\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^p\,d\nu\right.\\
&\qquad\left.+\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{p}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^p\,d\sigma\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Usando que $\sigma\perp\nu$, concluimos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^r\,d\nu\right)^{\frac{1}{r}} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}|\psi|^p\,d\nu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si definimos $d\nu_n = g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}d\nu$, la desigualdad anterior nos dice que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\psi|^r\,d\nu_n\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}|\psi|^p\,d\nu_n\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall\psi\in C_c^\infty$$

Ahora, aplicando los Lemas 5.2 y 5.3 respectivamente podemos afirmar que existen x_i^n $i\in I_n$ y $K_i^n>0$ tales que $\nu_n=\sum_{i\in I_n}K_i^n\delta_{x_i}^n$.

Por otra parte, sabíamos que $\nu_n = g^{\frac{r}{r-p}}\chi_{\{g\leq n\}}\nu$, notemos que, ν_n tiende en forma monótona a $g^{\frac{r}{r-p}}\nu$. Esto, además, nos dice que

$$I_1\subseteq I_2\subseteq I_3\subseteq\cdots\subseteq I_n\subseteq\cdots$$

y que

$$K_i^n = K_i^j \quad \forall j\geq n \quad \text{siempre que } x_i\in I_n.$$

En otras palabras, sabemos que I_{n+1} tiene los mismos x_i que tenia I_n y eventualmente alguno más y que K_i^n tiende a K_i, pues a partir de un momento la sucesión es constante.

Sea $I=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}I_n$, es claro, por unicidad del limite, que $g^{\frac{r}{r-p}}\nu=\sum_{i\in I}K_i\delta_{x_i}$. Más aún, se tiene que $K_i = g^{\frac{r}{r-p}}(x_i)\nu(x_i)$. □

Por último, necesitamos el siguiente Lema.

Lema 5.4. *$f_n\longrightarrow f$ en casi todo punto y $f_n\rightharpoonup f$ en $L^p(\Omega)$ entonces*

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\|f_n\|^p_{L^p(\Omega)}-\|f-f_n\|^p_{L^p(\Omega)}\right)=\|f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Demostración. Observemos primero que, dados $a,b\in\mathbb{R}$, dado $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que se verifica la siguiente desigualdad:

$$\big|\,|a+b|^p-|a|^p\big|\leq\varepsilon|a|^p+C_\varepsilon|b|^p. \tag{5.2}$$

La demostración de esta desigualdad es elemental y la dejamos para el lector.

Definimos

$$W_{\varepsilon,n}(x)=\left(||f_n(x)|^p-|f(x)-f_n(x)|^p-|f(x)|^p|-\varepsilon|f_n(x)|^p\right)_+.$$

Notemos que $W_{\varepsilon,n}(x)\longrightarrow 0$ en casi todo punto.

Por otro lado, por (5.2),

$$\begin{aligned} \big|\, |f_n(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p - |f(x)|^p \big| &\leq \big|\, |f_n(x)|^p - |f_n(x) - f(x)|^p \big| + |f(x)|^p \\ &\leq \varepsilon |f_n(x)|^p + C_\varepsilon |f(x)|^p + |f(x)|^p. \end{aligned}$$

Es decir, tenemos que

$$\big||f_n(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p - |f(x)|^p\big| - \varepsilon |f_n(x)| \leq (C_\varepsilon + 1)|f(x)|^p.$$

Como el lado derecho de la desigualdad es no negativo podemos asegurar que:

$$0 \leq W_{\varepsilon,n}(x) \leq (C_\varepsilon + 1)|f(x)|^p$$

Por lo tanto usando el Teorema de Convergencia Mayorada podemos asegurar que $\int_\Omega W_{\varepsilon,n}(x)\,dx \longrightarrow 0$.

Por otro lado,

$$\big|\, |f_n(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p - |f(x)|^p \big| \leq W_{\varepsilon,n}(x) + \varepsilon |f_n(x)|^p,$$

entonces, si notamos

$$I_n = \int_\Omega \big|\, |f_n(x)|^p - |f(x) - f_n(x)|^p - |f(x)|^p \,dx,$$

resulta que

$$I_n \leq \int_\Omega W_{\varepsilon,n}(x)\,dx + \varepsilon \|f_n(x)\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \int_\Omega W_{\varepsilon,n}(x)\,dx + C\varepsilon$$

Podemos concluir que $\limsup I_n \leq C\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ □

Con estos preliminares, ya estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección. Es decir, el Principio de Compacidad por Concentración.

TEOREMA 5.5 (Principio de Compacidad por Concentración). *Sea $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión débil convergente en $W_0^{1,p}(\Omega)$ con limite débil u, tal que:*

- $|\nabla u_j|^p \rightharpoonup \mu$ *débil * en el sentido de las medidas.*
- $|u_j|^{p^*} \rightharpoonup \nu$ *débil * en el sentido de las medidas.*

Entonces para un conjunto finito de indices I tenemos que:

1. $\nu = |u|^{p^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j} \quad \nu_j > 0$
2. $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j} \quad \mu_j > 0 \quad x_j \in \overline{\Omega}$
3. $\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq \frac{\mu_j}{S}$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v_j = u_j - u$. Aplicando el lema 5.4 a ϕu_j obtenemos que

$$\lim \left(\int_\Omega |\phi|^{p^*} |u_j|^{p^*}\,dx - \int_\Omega |\phi|^{p^*} |v_j|^{p^*}\,dx \right) = \int_\Omega |\phi|^{p^*} |u|^{p^*}\,dx \tag{5.3}$$

Por otro lado, por hipótesis,tenemos que $|v_j|^{p^*} \rightharpoonup^* \nu_1$ y$|\nabla v_j|^p \rightharpoonup^* \mu_1$.Además, tenemos la desigualdad de Hölder Inversa que relaciona a ν_1 y μ_1.Es decir

$$\left(\int_{R^n} |\phi|^{p^*}\,d\nu \right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{R^n} |\phi|^p\,d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

Aplicando el lema 5.1 podemos asegurar que:

$$\nu_1 = \sum_{i\in I} \nu_i \delta_{x_i} \quad \text{y} \quad \mu_1 \geq \sum_{i\in I} \mu_i \delta_{x_i}$$

. Además

1. $\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_\Omega |\phi|^{p^*}|u_j|^{p^*}\,dx = \int_\Omega |\phi|^{p^*}\,d\nu$
2. $\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_\Omega |\phi|^{p^*}|v_j|^{p^*}\,dx = \int_\Omega |\phi|^{p^*}\,d\nu_1$

Pasando al limite en 5.3 concluimos entonces que

$$\int_\Omega |\phi|^{p^*}\,d\nu = \int_\Omega |\phi|^{p^*}\,d\nu_1 + \int_\Omega |\phi|^{p^*}|u|^{p^*}\,dx$$

Esto me dice $\nu = |u|^{p^*} + \nu_1$.

Por otra parte,

$$\left(\int_\Omega |\phi u_j|^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p^*}} \leq \left(\int_\Omega |\nabla\phi u_j|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

El lado derecho de la desigualdad, calculando $\nabla\phi u_j$, lo podemos acotar por

$$\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|u_j|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\phi|^p|\nabla u_j|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Notemos que

$$\lim\left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|u_j|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Pues como $u_j \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ podemos suponer que $u_j \longrightarrow u$ en $L^p(\Omega)$ y sabemos que

$$\lim\left(\int_\Omega |\phi|^p|\nabla u_j|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega |\phi|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Resumiendo, nos queda

$$\left(\int_\Omega |\phi|^{p^*}\,d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |\phi|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla\phi|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi(0) = 1$ y $sop\,\phi \subset B_1(0)$. Consideremos $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi(\frac{x-x_i}{\varepsilon})$.Claramente $\phi_{i,\varepsilon}$ satisface que $sop\,\phi_{i,\varepsilon} \subseteq B_\varepsilon(x_i)$ y $\phi_{i,\varepsilon}(x_i) = 1$.Puedo considerar que ε tal que $B_\varepsilon(x_i)$ si $i \neq j$.Usando que $\nu = |u|^{p^*} + \nu_1$. Nos queda que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\phi_{i_0,\varepsilon}|^{p^*}\,d\nu &= \int_\Omega |\phi_{i_0,\varepsilon}|^{p^*}\,dx + \int_\Omega |\phi_{i_0,\varepsilon}|^{p^*}\,d\nu_1\\ &= \int_\Omega |\phi_{i_0,\varepsilon}|^{p^*}|u|^{p^*}\,dx + \sum_{i\in I}\nu_i\phi_{i_0,\varepsilon}(x_i) \geq \nu_{i_0}\end{aligned}$$

Por esto podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\nu_i^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_\Omega |\phi_{i,\varepsilon}|^{p^*}\,d\nu\right)^{\frac{1}{p^*}} S^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_\Omega |\phi_{i,\varepsilon}|^{p^*}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\end{aligned}$$

Acotando el lado derecho de la desigualdad usando Hölder obtenemos que:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\Omega}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\int_{B_{\varepsilon(x_i)}}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\leq \left(\int_{B_\varepsilon(x_i)}|u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^n\right)^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Notemos que

$$\nabla\phi_{i,\varepsilon}(x) = \nabla\phi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right) = \nabla\phi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}$$

Entonces

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} &= \left(\int_{B_\varepsilon(x_i)}\left|\nabla\phi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)\right|^n\frac{1}{\varepsilon^n}\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \left(\int_{B_1(0)}|\nabla\phi(y)|^n\,dy\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= C\end{aligned}$$

Gracias a esto podemos realizar la siguiente acotación

$$\left(\int_{\Omega}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p|u|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)}u^{p^*}\,dx\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

Observemos que el termino de la derecha tienda a 0, cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Por otro lado,

$$\left(\int_{\Omega}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \mu(B_\varepsilon(x_i))^{\frac{1}{p}}$$

Además $\lim \mu(B_\varepsilon(x_i))^{\frac{1}{p}} = \mu(x_i)^{\frac{1}{p}} = \mu_i^{\frac{1}{p}}$.

Concluimos juntando ambas acotaciones que $\nu_i^{\frac{1}{p^*}}S^{\frac{1}{p}} \leq \mu_i^{\frac{1}{p}}$.

Veamos ahora que $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}$.

Teníamos que $\mu \geq \sum \mu_i\delta_{x_i}$. Por otro lado, como $u_j \rightharpoonup u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ en $L^p(A)\quad \forall A\subset\Omega$ y usando que la norma es débil semicontinua inferiormente tenemos que $\|\nabla u\|^p_{L^p(A)} \leq \liminf \|\nabla u_j\|^p_{L^p(\Omega)}$.

Es decir,

$$\int_A |\nabla u|^p\,dx \leq \liminf \int_A |\nabla u_j|^p\,dx = \mu(A).$$

Esto me dice que $d\mu \geq |\nabla u|^p\,dx$. Además $|\nabla u|^p \perp \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}$ entonces $\mu \geq |\nabla u|^p + \sum_{i\in I}\mu_i\delta_{x_i}$. Así finaliza la demostración. □

2. Una aplicación

Estudiemos la existencia de soluciones para el siguiente problema

$$\begin{cases}-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda f(x,u) & \text{en } \Omega\\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega,\end{cases} \tag{5.4}$$

donde Ω es un dominio regular y acotado.

Para esto nos interesa buscar puntos críticos del siguiente funcional.

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,u)\,dx$$

Donde $F(x,u) = \int_0^u f(x,z)\,dz$.

Nuestro problema es que en el caso crítico la inclusión de Sobolev ya no resulta compacta.

Vamos a decir que $u_j \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión de Palais-Smale de nivel c, que abreviaremos (P-S)$_c$ si:

1. $J(u_j) \longrightarrow c$
2. $J'(u_j) \longrightarrow 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$

Decimos que J satisface la condición de Palais-Smale si para cualquier sucesión de Palais-Smale de nivel c, verifica que tiene una subsucesión convergente en sentido fuerte.

Lo primero que observamos es el siguiente lema.

Lema 5.6. *Si $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ es una sucesión de* (P-S)$_c$. *Entonces $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Tenemos que v_j que cumple que

1. $J(v_j) \longrightarrow c$
2. $J'(v_j) \longrightarrow 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$

Entonces,

$$c + 1 \geq J(v_j) = J(v_j) - \frac{1}{k_2}\langle J'(v_j), v_j\rangle + \frac{1}{k_2}\langle J'(v_j), v_j\rangle \tag{5.5}$$

Además

$$\langle J'(v_j), v_j\rangle = \int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2}\nabla v_j^2\,dx - \int_\Omega |v_j|^{p^*-2}v_j^2\,dx - \lambda\int_\Omega f(x,v_j)v_j\,dx$$

Reemplazando nos queda

$$\begin{aligned}(5.5) = {} & \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k_2}\right)\int_\Omega |\nabla v_j|^p\,dx + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |v_j|^{p^*}\,dx \\ & - \lambda\int_\Omega F(x,v_j)\,dx + \frac{\lambda}{k_2}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\,dx + \frac{1}{k_2}\langle J'(v_j), v_j\rangle\end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega F(x;v_j)\,dx \leq \frac{1}{k_2}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\,dx.$$

Afirmamos que

$$-\lambda\int_\Omega F(x;v_j)\,dx + \frac{\lambda}{k_2}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\,dx \geq 0.$$

Además como $\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |v_j|^{p^*}\,dx$ es positivo puedo acotarlo de las siguiente manera.

$$(5.5) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k_2}\right)\|v_j\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{k_2}|\langle J'(v_j), v_j\rangle| \tag{5.6}$$

Por otro lado

$$|\langle J'(v_j), v_j\rangle| \leq \|J'(v_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq C\|v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

Porque $\|J'(u_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$ es acotado.

Acotando resulta que

$$(5.6) \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{k_2}\right) \|v_j\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - \frac{1}{k_2} C \|v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$$

De esto se deduce que v_j es acotado en $W_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Sea $\{v_j\}$ una sucesión de Palais-Smale de nivel de energía c. Por el lema anterior podemos asegurar que $\{v_j\}$ es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y por lo tanto, posee una subsucesión débil convergente.Aplicando el Lema de compacidad por concentración, obtenemos que:

1. $|v_j|^{p^*} \rightharpoonup d\nu = |v|^{p^*} + \sum_{j\in I} \nu_j \delta_{x_j}$ débil-*
2. $|\nabla v_j|^p \rightharpoonup d\mu \geq |\nabla v_j|^p + \sum_{j\in I} \mu_j \delta_{x_j}$ débil-*
3. Además, $\frac{\mu_j}{S} > \nu_j^{\frac{p}{p^*}}$

Observemos que si $I = \emptyset$ tenemos que $v_j \longrightarrow v$ en $L^{p^*}(\Omega)$. Veamos que si $c < \frac{1}{n} S^{\frac{n}{2}}$ y $\{v_j\}$ satisface $(P-S)_c$ entonces $I = \emptyset$.

Supongamos $I \neq \emptyset$ y sea $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $sop\, \phi \subset B_1(0)$. Consideramos $\phi_{i,\varepsilon}(x) = \phi\left(\frac{x-x_i}{\varepsilon}\right)$. Es claro que $sop\, \phi_{i,\varepsilon} \subset B_\varepsilon(x_i)$.

Notemos que, por un lado $\langle J'(v_j), \phi_{i,\varepsilon} v_j\rangle$ esta acotado por $\|J'(v_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|\phi_{i,\varepsilon} v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ y, por otro lado $\|\phi_{i,\varepsilon} v_j\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ esta acotado uniformemente en j y $\|J'(v_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \longrightarrow 0$. Luego, podemos concluir que,

$$\lim_{j\to\infty} \langle J'(v_j), \phi_{i,\varepsilon} v_j\rangle = 0.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}\langle J'(v_j), \phi_{i,\varepsilon} v_j\rangle = &\int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2} \nabla v_j \nabla(\phi_{i,\varepsilon} v_j)\, dx - \lambda \int_\Omega f(x, v_j) v_j \phi_{i,\varepsilon}\, dx \\ &- \int_\Omega |v_j|^{p^*} \phi_{i,\varepsilon}\, dx\end{aligned}$$

Por lo visto antes sabemos que

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega |v_j|^{p^*} \phi_{i,\varepsilon}\, dx = \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\nu$$

Necesitamos que

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \lambda \int_\Omega f(x, v_j) v_j \phi_{i,\varepsilon}\, dx = \lambda \int_\Omega f(x, v) v \phi_{i,\varepsilon}\, dx$$

Además, calculando $\nabla(\phi_{i,\varepsilon} v_j)$, tenemos que:

$$\int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2} \nabla(\phi_{i,\varepsilon} v_j) \nabla v_j\, dx = \int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2} \nabla \phi_{i,\varepsilon} \nabla v_j v_j\, dx + \int_\Omega |\nabla v_j|^p \phi_{i,\varepsilon}\, dx$$

Usando que $\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega |\nabla v_j|^p \phi_{i,\varepsilon}\, dx = \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\mu$. Obtenemos que

$$\begin{aligned}0 = &\left(\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2} \nabla v_j \nabla \phi_{i,\varepsilon} v_j\, dx\right) + \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\mu - \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\nu \\ &- \lambda \int_\Omega f(x, v) v \phi_{i,\varepsilon}\, dx\end{aligned}$$

Observemos que $\lim_{j\longrightarrow\infty}\int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2}\nabla v_j \nabla\phi_{i,\varepsilon} v_j\, dx = 0$. En efecto,

$$
\begin{aligned}
0 &\le \limsup \Big| \int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2}\nabla v_j \nabla\phi_{i,\varepsilon} v_j\, dx\Big| \le \limsup \int_\Omega |\nabla v_j|^{p-1}|\nabla\phi_{i,\varepsilon}||v_j|\, dx \\
&\le \limsup \left(\int_\Omega |\nabla v_j|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p |v_j|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \limsup \left(\int_\Omega |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p |v_j|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^p |v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |\nabla\phi_{i,\varepsilon}|^n\, dx\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |v|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&\le C\frac{1}{\varepsilon}|B_\varepsilon|^{\frac{1}{n}} \left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |v|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \\
&= C\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |v|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}
$$

Como $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\int_{B_\varepsilon(x_i)} |v|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} = 0$. Podemos concluir que

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\left(\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\mu - \int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\nu - \lambda\int_\Omega f(x,v) v\phi_{i,\varepsilon}\, dx\right) = 0$$

Notemos que:

- $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0} -\lambda\int_\Omega f(x,v)v\phi_{i,\varepsilon}\, dx = 0$
- $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\mu = \mu(\{x_i\})\phi(\{0\}) = \mu_i\phi(0)$
- $\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\int_\Omega \phi_{i,\varepsilon}\, d\nu = \nu(\{x_i\})\phi(\{0\}) = \nu_i\phi(0)$

Tenemos que $(\mu_i - \nu_i)\phi(0) = 0$, es decir, $\mu_i = \nu_i$. Como sabíamos que $\nu_i^{\frac{p}{p^*}} S \le \mu_i$ podemos concluir que $\mu_i^{\frac{p}{p^*}} S \le \mu_i$ por lo que se deduce que $\mu_i = 0$ o $S \le \mu_i^{1-\frac{p}{p^*}} = \mu_i^{\frac{p}{n}}$.

Por otro lado, si pedimos que $\frac{1}{p} > \frac{1}{k_2}$ podemos obtener la siguiente acotación

$$
\begin{aligned}
c &= \lim_{j\longrightarrow\infty} J(v_j) = \lim_{j\longrightarrow\infty} J(v_j) - \frac{1}{p}\langle J'(v_j), v_j\rangle \\
&= \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |v_j|^{p^*}\, dx - \lambda\int_\Omega F(x,v_j)\, dx + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\, dx \\
&\ge \lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |v_j|^{p^*}\, dx - \lambda\int_\Omega F(x,v_j)\, dx + \frac{\lambda}{k_2}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\, dx
\end{aligned}
$$

Recordando que pedimos que

$$-\lambda\int_\Omega F(x,v_j)\, dx + \frac{\lambda}{k_2}\int_\Omega f(x,v_j)v_j\, dx \ge 0$$

Podemos acotar el último termino de la siguiente forma

$$\lim_{j\longrightarrow\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)\int_\Omega |v_j|^{p^*}\, dx = \frac{1}{n}\left(\int_\Omega |v|^{p^*}\, dx + \sum_{i\in I}\nu_i\delta_{x_i}\right) \ge \frac{1}{n}\nu_{i_0} \ge \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$$

Resumiendo, probamos que $c \ge \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$. Ahora estamos en condiciones de ver el siguiente teorema.

Teorema 5.7. *Sea $\{v_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ una sucesión de $(P-S)_c$ con $c < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$ y $p < q < p^*$. Entonces existe $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y $\{v_{j_k}\} \subset \{v_j\}$ subsucesión tal que $v_{j_k} \longrightarrow v$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Demostración. Sabemos que $\{v_j\}$ es acotada y $v_j \longrightarrow v$ en $L^{p^*}(\Omega)$.

Definimos $J'(v_j) := \phi_j$, notemos que como $\{v_j\}$ satisface $(P-S)_c$ tenemos que $\phi_j \longrightarrow 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Por definición $\langle J'(v_j), z\rangle = \langle \phi_j, z\rangle \quad \forall\, z \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Es decir,

$$\int_\Omega |\nabla v_j|^{p-2}\nabla v_j \nabla z\, dx - \int_\Omega |v_j|^{p^*-2} v_j z\, dx - \lambda \int_\Omega f(x, v_j) z\, dx = \langle \phi_j, z\rangle$$

Por lo tanto $\{v_j\}$ es solución débil de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_p v_j = |v_j|^{p^*-2} v_j + \lambda f(x, v_j) + \phi_j & \text{en } \Omega \\ v_j = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.7}$$

Vamos a notar $f_j = |v_j|^{p^*-2} v_j + \lambda f(x, v_j) + \phi_j$.

Definimos $S : W^{-1,p'}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$ como $S(f) := u$ donde u es solución débil de la siguiente ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.8}$$

Notemos que el operador S esta bien definido pues la existencia y unicidad de solución de la ecuación (5.8) esta garantizada.

En efecto, las soluciones de la misma son los puntos críticos del funcional

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx - \langle f, u\rangle$$

El mismo verifica que es secuencialmente semicontinuo inferiormente para la topología débil, estrictamente convexo y acotado inferiormente. Con estas propiedades, es fácil ver que todo punto crítico de I es un mínimo y que I posee un único mínimo. Ver [**10**], Teorema 3, página 449 y el Remark de la página 452.

Por otro lado, S resulta continuo. Para probarlo vamos a necesitar la siguiente desigualdad, que quedara como ejercicio para el lector.

$$\left(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x - y\right) \geq \begin{cases} C_p |x-y|^p & \text{si } p \geq 2 \\ C_p \frac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{si } p \leq 2 \end{cases}$$

Sean $\phi_1, \phi_2 \in W^{-1,p'}(\Omega)$ consideramos $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$, las correspondientes soluciones del problema (5.8). Entonces tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i(\nabla u_1 - \nabla u_2) - \phi_i(u_1 - u_2)\, dx = 0 \quad i = 1, 2$$

Si restamos y usamos la desigualdad para $p \geq 2$ obtenemos que

$$C_p \int_\Omega |\nabla u_1 - \nabla u_2|^p\, dx \leq \langle (\phi_1 - \phi_2), (u_1 - u_2)\rangle \leq \|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Se deduce que,

$$\|S(\phi_1) - S(\phi_2)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\left(\|\phi_1 - \phi_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

Para el caso $p \leq 2$ observamos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx &= \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{(2-p)p}{2}}}(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{(2-p)p}{2}}\,dx\\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^p}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{\frac{(2-p)p}{2}}}\,dx\right)^{\frac{p}{2}}\\ &\quad\times\left(\int_\Omega (|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p\,dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\end{aligned}$$

Igual que antes restando las dos ecuaciones y utilizando la desigualdad tenemos que

$$\begin{aligned}C_p\int_\Omega \frac{|\nabla u_1-\nabla u_2|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}\,dx &\leq \langle(\phi_1-\phi_2),(u_1-u_2)\rangle\\ &\leq \|\phi_1-\phi_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|u_1-u_2\|_{W^{1,p}(\Omega)}\end{aligned}$$

Como

$$\left(\frac{\int_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^p\,dx}{\left(\int_\Omega(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^p\,dx\right)^{\frac{2-p}{p}}}\right)^{\frac{2}{p}} \leq \int_\Omega \frac{|\nabla(u_1-u_2)|^2}{(|\nabla u_1|+|\nabla u_2|)^{2-p}}\,dx$$

Obtuvimos que

$$\frac{\|u_1-u_2\|_{W^{1,p}(\Omega)}}{\left(\|u_1\|_{W^{1,p}(\Omega)}+\|u_2\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)^{2-p}} \leq C\|\phi_1-\phi_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$$

Por otra parte como u_i es solución débil de la ecuación sabemos que

$$\|u_i\|^p_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|\phi_i\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}\|u_i\|_{w^{1,p}(\Omega)}$$

Juntando las dos acotaciones, tenemos que

$$\|S(\phi_1)-S(\phi_2)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\left(\|\phi_1\|^{\frac{1}{p-1}}_{W^{-1,p'}(\Omega)}+\|\phi_2\|^{\frac{1}{p-1}}_{W^{-1,p'}(\Omega)}\right)^{2-p}\|\phi_1-\phi_2\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}$$

Podemos concluir que el operador S es continuo. Sabiendo esto y usando que $v_j = S(f_j)$ nos alcanza con probar que f_j converge en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Como al comienzo vimos que $\phi_j \longrightarrow 0$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$, pidiendo que $\lambda f(x,v_j) \longrightarrow \lambda f(x,v)$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$, lo único que tenemos que ver es que $|v_j|^{p^*-2}v_j \longrightarrow |v|^{p^*-2}v$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\left\langle |v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v,\psi\right\rangle &= \int_\Omega\left(|v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v\right)\psi\,dx\\ &\leq \left(\int_\Omega|\psi|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}\left(\int_\Omega\left(|v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v\right)^{(p^*)'}\right)^{\frac{1}{(p^*)'}}\end{aligned}$$

Usando la desigualdad $||a|^{p^*-2}a-|b|^{p^*-2}b| \leq C|a-b|$, notamos que

$$\begin{aligned}&\||v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_A\langle|v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v,\psi\rangle\\ &\leq \left(\int_\Omega\left(|v_j|^{p^*-2}v_j-|v|^{p^*-2}v\right)^{(p^*)'}\right)^{\frac{1}{(p^*)'}} \leq C\|v_j-v\|^{\frac{p^*}{(p^*)'}}_{L^{p^*}(\Omega)}\end{aligned}$$

Donde $A = \{\psi\in W^{1,p}_0(\Omega) : \|\psi\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} = 1\}$.

Por lo tanto, $|v_j|^{p^*-2}v_j$ converge a $|v|^{p^*-2}v$ en $W^{-1,p'}(\Omega)$ que era lo que queríamos probar $\square$

Veamos que tan grande debe ser λ para que podamos garantizar que $(P-S)_c$ se satisface para $c < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$.

Por la caracterización de minimax de c sabemos que $c \leq \sup_{t\in[0,1]} J(tw_0)$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} J(tw_0) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla tw_0|^p\,dx - \lambda\int_\Omega F(x,tw_0)\,dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |tw_0|^{p^*}\,dx \\ &\leq \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla tw_0|^p\,dx - \lambda\frac{C_3}{k_2}\int_\Omega |tw_0|^q\,dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega |tw_0|^{p^*}\,dx \\ &\leq \frac{1}{p}t^p\int_\Omega |\nabla w_0|^p\,dx - \lambda\frac{C_3}{k_2}t^q\int_\Omega |w_0|^q\,dx \end{aligned}$$

Observemos, que para hacer esta cuenta, necesitamos que valga la siguiente acotación

$$C_3\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \leq K_2\int_\Omega F(x,u)\,dx$$

Notemos $a_1 = \int_\Omega |\nabla w_0|^p\,dx$ y $a_2 = \frac{C_3}{K_2}\int_\Omega |w_0|^q\,dx$. Por lo tanto $J(tw_0)$ se acota por $\frac{t^p}{p}a_1 - \lambda a_2 t^q$.

Además $J'(t) = a_1t^{p-1} - \lambda a_2 q t^{q-1} = t^{p-1}(a_1 - \lambda a_2 t^{q-p})$ y esto me dice que el máximo se alcanza en $t_\lambda = \left(\frac{a_1}{\lambda a_2}\right)^{\frac{1}{q-p}}$ y notemos que $\lim_{\lambda\longrightarrow\infty} J(t_\lambda) = 0$, razón por la cual, puedo asegurar que existe un λ_0 tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0 \quad J(t) < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$. Como $c \leq \max_{t\in[0,1]} J(tw_0)$ podemos concluir que $c < \frac{1}{n}S^{\frac{n}{2}}$ pidiendo que $\lambda > \lambda_0$ donde $\lambda_0 = \lambda_0(n,q,w_0)$.

CAPíTULO 6

Caso crítico

Consideraremos el siguiente problema elíptico no lineal

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u + \lambda f(x,u) & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.1}$$

donde Ω es un dominio suave y acotado en $\mathbb{R}^N$, $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ es el $p-$laplaciano y $p^* := pN/(N-p)$. Recordar que p^*es el exponente crítico en la inmersión de Sobolev

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

(la inmersión es compacta si $1 \leq q < p^*$ y es continua pero no compacta si $q = p^*$).

Entendemos como solución débil del problema

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v - |u|^{p^*-2}uv - \lambda f(x,u)v\, dx = 0 \quad \forall\, v \,\epsilon\, W_0^{1,p}(\Omega)$$

Nos interesa encontrar puntos críticos del funcional de energía asociado, actuando en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

$$\Phi(v) = \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla v|^p - \frac{1}{p^*}|v|^{p^*} - \lambda F(x,v)dx$$

En donde $F(x,u) = \int_o^u f(x,z)dz$.

Nuestro objetivo es ver que bajo ciertas condiciones, hay tres soluciones débiles del problema (6.1) no triviales. Más aún,una positiva,una negativa y una que cambia de signo.Notar que no impondremos condiciones de imparidad y que estamos considerando el caso de exponente crítico.

Vamos a construir tres conjuntos disjuntos $K_i \neq \emptyset$ que no contienen al 0 tales que $\Phi\mid_{K_i}$ tenga un punto crítico.

Las técnicas que utilizaremos para atacar el problema son dos

1. Principio Variacional de Ekeland (ver Capítulo 3, Sección 4).
2. El principio de compacidad por concentración (ver [**19**]).

Sean M_i conjuntos,$M_i \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ construidos imponiéndole un restricción de signo y una condición de normalización.

Definición 6.1. *Definimos los siguientes conjuntos en el espacio de Sobolev* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$M_1 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_+ > 0 \ y \int_\Omega |\nabla u_+|^p - |u_+|^{p^*}dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)u_+ dx \right\},$$

$$M_2 = \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_- > 0 \ y \int_\Omega |\nabla u_-|^p - |u_-|^{p^*}dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)u_- dx \right\},$$

$$M_3 = M_1 \cap M_2.$$

Donde $u_+ = \text{máx}\{u,0\}$ *y* $u_- = \text{máx}\{-u,0\}$ *son las partes positivas y negativas de u, respectivamente.*

Finalmente, definimos los siguientes conjuntos.

DEFINICIÓN 6.2.

$$K_1 = \{u \in M_1 \colon u \geq 0\}, \quad K_2 = \{u \in M_2 \colon u \leq 0\}, \quad K_3 = M_3.$$

1. Algunos lemas técnicos

Necesitamos ahora, ver un par de lemas previos, para poder verificar la condición de Palais-Smale.

LEMA 6.3. *Existen constantes $C_j > 0$ tales que, dada $u \in K_i$ para $i = 1, 2, 3$ se tienen las siguientes desigualdades*

$$\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \leq C_1 \left(\lambda \int_\Omega f(x,u)u \, dx + \int_\Omega |u|^{p^*} \, dx \right) \leq C_2 \Phi(u) \leq C_3 \left(\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \right)$$

DEMOSTRACIÓN. Para probar la primera desigualdad podemos suponer que $u \, \epsilon \, K_1$,pues el resto de los casos son analogos.Tenemos que $u \geq 0$, por lo que $u_+ = u$ y que u_+ verifica la siguiente desigualdad

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^p - |u_+|^{p^*} dx = \int_\Omega \lambda f(x,u) u_+ dx$$

Es inmediato entonces que

$$\int_\Omega |\nabla u|^p dx = \int_\Omega \lambda f(x,u)u + |u|^{p^*} dx$$

Esto prueba la primera desigualdad con $C_1 = 1$.

Para probar la tercera desigualdad necesitamos que $\exists \, c_2$ tal que

$$\int_\Omega F(x,u) dx \leq \frac{1}{c_2} \int_\Omega \lambda f(x,u) u dx$$

Recordemos que la definición de Φ es la siguiente:

$$\Phi(v) = \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla v|^p - \frac{1}{p^*} |v|^{p^*} - \lambda F(x,v) dx$$

Además, notamos que,

$$\left| \lambda \int_\Omega F(x,u) dx \right| = \lambda \int_\Omega F(x,u) dx \leq \frac{1}{c_2} \int_\Omega \lambda f(x,u) u dx = \frac{1}{c_2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p - |u|^{p^*} dx \right)$$

Entonces, esto me dice que,

$$-\lambda \int_\Omega F(x,u) dx \leq \frac{1}{c_2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p - |u|^{p^*} dx \right) \tag{6.2}$$

Por lo tanto, de (6.2), tenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p - \frac{1}{p^*} |u|^{p^*} - \lambda F(x,u) \, dx \\ &\leq \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u|^p - \frac{1}{p^*} |u|^{p^*} \, dx + \frac{1}{c_2} \left(\int_\Omega |\nabla u|^p - |u|^{p^*} \, dx \right) \\ &\leq \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{p} \right) \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx \end{aligned}$$

Notemos que $C_3 = \frac{1}{c_2} + \frac{1}{p}$.

Para probar la desigualdad del medio necesitamos que:

$$\int_{\Omega} F(x,u)dx \leq \frac{1}{c_2}\int_{\Omega} \lambda f(x,u)u\,dx \quad \text{y} \quad \frac{1}{c_2} \leq \frac{1}{p} \tag{6.3}$$

Ahora,procedemos de la siguiente forma:

$$\Phi(u) = \int_{\Omega} \frac{1}{p}|\nabla u|^p - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*} - \lambda F(x,u)dx \geq \int_{\Omega} \frac{1}{p}(|\nabla u|^p - |u|^{p^*}) - \lambda F(x,u)dx$$

Recordemos, que como $u \in K_i$, podemos afirmar que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p - |u|^{p^*}\,dx = \int_{\Omega} \lambda f(x,u)udx$$

Utilizando esto en la desigualdad anterior y (6.3) nos queda que:

$$\Phi(u) \geq \frac{1}{p}\int_{\Omega} \lambda f(x,u)udx - \lambda\int_{\Omega} F(x,u)dx \geq (\frac{1}{p} - \frac{1}{c_2})\lambda\int_{\Omega} f(x,u)dx$$

□

Lema 6.4. *Existen constantes positivas tales que:*

$$\|\nabla u_+\|_{L^p(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_1$$

$$\|\nabla u_-\|_{L^p(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_2$$

$$\|\nabla u_+\|_{L^p(\Omega)}, \|\nabla u_-\|_{L^p(\Omega)} \geq C \quad \forall\, u \in K_3$$

Demostración. Por definición de K_i tenemos que:

$$\|\nabla u_\pm\|^p_{L^p(\Omega)} = \int_{\Omega} \lambda f(x,u)u_\pm + |u_\pm|^{p^*}dx$$

Necesitamos que:

$$\int_{\Omega} \lambda f(x,u)u_\pm dx \leq C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p^* \geq q > p$$

Entonces, nos queda que:

$$\|\nabla u_\pm\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)} + \|u_\pm\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1\|\nabla u_\pm\|^q_{L^p(\Omega)} + C_2\|\nabla u_\pm\|^{p^*}_{L^p(\Omega)}$$

En la segunda desigualdad, estamos utilizando Poincaré, que en este caso es válido porque $u_\pm \,\epsilon\, W^{1,p}_0(\Omega)$.

Resumiendo, la acotación anterior me dice que:

$$\|\nabla u_\pm\|^p_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u_\pm\|^r_{L^p(\Omega)}$$

En donde,

$$r = q \quad \text{si} \quad \|\nabla u_\pm\|_{L^p(\Omega)} < 1 \quad \text{o} \quad r = p^* \quad \text{si} \quad \|\nabla u_\pm\|_{L^p(\Omega)} \geq 1$$

Como $r > p$ dividiendo a los dos lados de la desigualdad anterior por la norma a la p,obtenemos la acotación que queríamos probar. □

Lema 6.5. *Existe una constante $C > 0$ tal que $\Phi(u) \geq C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}$ para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $\|u\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}$ suficientemente pequeña.*

Demostración. Para probar este lema necesitamos que:

$$\int_\Omega \lambda F(x,u)\,dx \le C\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p^* \ge q > p$$

Usando esto podemos realizar la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
\Phi(u) &= \int_\Omega \frac{1}{p}|\nabla u|^p - \frac{1}{p^*}|u|^{p^*} - \lambda F(x,u)dx \\
&\ge \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{1}{p^*}\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega)} - C\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \\
&\ge \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)} - C_1(\|\nabla u\|^{p^*}_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|^q_{L^p(\Omega)})
\end{aligned}$$

En la segunda desigualdad estamos usando Poincaré pues $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Si $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ es suficientemente pequeño podemos acotar el último término por $C\|\nabla u\|^p_{L^p(\Omega)}$ porque $p < q$ y $p < p^*$. $\square$

El siguiente lema describe las propiedades de las variedades M_i.

Lema 6.6. *M_i es una subvariedad de $W_0^{1,p}(\Omega)$ de codimensión 1, si $i = 1, 2$ y 2, si $i = 3$ respectivamente. Los conjuntos K_i son completos. Además $\forall\, u \in M_i$ tenemos la descomposición $T_u W_0^{1,p}(\Omega) = T_u M_i \bigoplus span\{u_+, u_-\}$ donde $T_u M$ es el espacio tangente a la variedad M en u. Finalmente, la proyección a la primer coordenada es uniformemente continua en conjuntos acotados de M_i.*

Demostración. Definamos,

$$\begin{aligned}
\overline{M}_1 &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_+\,dx > 0 \right\} \\
\overline{M}_2 &= \left\{ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon \int_\Omega u_-\,dx > 0 \right\} \\
\overline{M}_3 &= \overline{M}_1 \cap \overline{M}_2
\end{aligned}$$

Observemos que $M_i \subseteq \overline{M}_i$

Como los conjuntos $\overline{M}_i$ son abiertos en $W_0^{1,p}(\Omega)$, es suficiente con probar que M_i es una subvariedad regular de $\overline{M}_i$.

Vamos a construir una función $C^{1,1}$, $\varphi_i \colon \overline{M}_i \to \mathbb{R}^d$ con $d = 1$ si $i = 1, 2$ o $d = 2$ si $i = 3$ tal que M_i sea la imagen inversa del valor regular de φ_i. Dicho de otra manera, lo que queremos es que $M_i = \varphi_i^{-1}(0)$.

De hecho, definamos para $u \in \overline{M}_1$

$$\varphi_1(u) = \int_\Omega |\nabla u_+|^p - |u_+|^{p^*} - \lambda f(x,u)u_+\,dx.$$

Para $u \in \overline{M}_2$

$$\varphi_2(u) = \int_\Omega |\nabla u_-|^p - |u_-|^{p^*} - \lambda f(x,u)u_-\,dx.$$

Para $u \in \overline{M}_3$

$$\varphi_3(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u))$$

Obviamente, tenemos que $M_i = \varphi_i^{-1}(0)$. Necesitamos mostrar que 0 es un valor regular de φ_i pues en ese caso M_i resulta una subvariedad.

Calculemos $\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle$ para $u \in M_1$.

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_+) = \\
&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla(u+\varepsilon u_+)_+|^p - |(u+\varepsilon u_+)_+|^{p^*} - \lambda f(x,u+\varepsilon u_+)(u+\varepsilon u_+)_+\,dx \\
&=\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega (1+\varepsilon)^p|\nabla u_+|^p - (1+\varepsilon)^{p^*}|u_+|^{p^*} - \lambda f(x,u+\varepsilon u_+)(1+\varepsilon)u_+\,dx \\
&=\int_\Omega p(1+\varepsilon)^{p-1}|\nabla u_+|^p - p^*(1+\varepsilon)^{p^*-1}|u_+|^{p^*} - \lambda f(x,u+\varepsilon u_+)u_+ \\
&\quad - \lambda f_u(x,u+\varepsilon u_+)u_+(1+\varepsilon)u_+\,dx
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_+)\Big|_{(\varepsilon=0)} = \int_\Omega p|\nabla u_+|^p - p^*|u_+|^{p^*} - \lambda f(x,u)u_+ - \lambda f_u(x,u)u_+^2\,dx.
$$

Es decir

$$
\begin{aligned}
\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle &= p\|\nabla u_+\|^p - p^*\|u_+\|^{p^*} - \lambda\int_\Omega f(x,u)u_+ - f_u(x,u)u_+^2\,dx \\
&\le p^*\left(\|\nabla u_+\|^p - \|u_+\|^{p^*}\right) - \lambda\int_\Omega f(x,u)u_+ - f_u(x,u)u_+^2\,dx
\end{aligned}
$$

Como $u \in M_1$, el último termino se puede acotar por

$$
(p^*\lambda - \lambda)\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx - \int_\Omega f_u(x,u)u_+^2\,dx.
$$

Necesitamos que:

$$
\int_\Omega f(x,u)u\,dx \le C_1\int_\Omega f_u(x,u)u^2\,dx \le C_4\|u\|_{L^q(\Omega)}^q \tag{6.4}
$$

Usando (6.4) y que $u \in M_1$ nos queda que:

$$
\begin{aligned}
(p^*\lambda - \lambda)&\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx - \int_\Omega f_u(x,u)u_+^2\,dx \\
&\le (p^*\lambda - \lambda - \frac{\lambda}{C_1})\int_\Omega f(x,u)u_+\,dx \\
&= \left(p^* - 1 - \frac{1}{C_1}\right)\left(\|\nabla u_+\|_{L^p(\Omega)}^p - \|u_+\|_{L^{p^*}(\Omega)}^{p^*}\right) \\
&\le \left(p^* - 1 - \frac{1}{C_1}\right)\|\nabla u_+\|_{L^p(\Omega)}^p
\end{aligned}
$$

Nos interesa que:

$$
\left(p^* - 1 - \frac{1}{c_1}\right) < 0
$$

Para que se cumpla esto, necesitamos que:

$$C_1 < \frac{1}{p^* - 1}$$

Usando ahora el Lema 6.4 sabemos que $\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle$ es estrictamente negativo y por lo tanto, $\nabla\varphi_1(u) \neq 0$.

El mismo argumento se aplica a M_2.

Notemos, que si probamos que $\langle \nabla\varphi_1(u), u_-\rangle = \langle \nabla\varphi_2(u), u_+\rangle = 0$ para $u \in M_3$ entonces por lo anterior sabemos que $\langle \nabla\varphi_1(u), u\rangle < 0$ y $\langle \nabla\varphi_2(u), u\rangle < 0$. Razón por la cual podemos afirmar que $\nabla\varphi_3(u) \neq 0$ para $u \in M_3$.

Veamos que $\langle \nabla\varphi_1(u), u_-\rangle = 0$ para $u \in M_3$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_-) = \\
=&\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla(u+\varepsilon u_-)_+|^p - |(u+\varepsilon u_-)_+|^{p^*} - \lambda f(x, u+\varepsilon u_-)(u+\varepsilon u_-)_+\,dx \\
=&\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega |\nabla u_+|^P - |u_+|^{p^*} - \lambda f(x, u+\varepsilon u_-)u_+\,dx \\
=&-\lambda\int_\Omega f_u(x, u+\varepsilon u_-)u_+u_-\,dx \\
=&0
\end{aligned}$$

Por lo que

$$\frac{d}{d\varepsilon}\varphi_1(u+\varepsilon u_-)\Big|_{(\varepsilon=0)} = 0.$$

Análogamente $\langle \nabla\varphi_2(u), u_+\rangle = 0$. Por lo tanto,$M_3$ resulta una subvariedad regular.

Veamos ahora que,K_i es completo. Lo vamos a probar para K_1,los otros casos son análogos.

Sea $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy. Como $W_0^{1,p}(\Omega)$ es completo, sabemos que $u_k \longrightarrow u$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y además $(u_k)_\pm \longrightarrow u_\pm$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Entonces $\nabla(u_k)_+ \longrightarrow \nabla u_+$ en $L^p(\Omega)$ y esto me dice que

$$\int_\Omega |\nabla(u_k)_+|^p\,dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u_+|^p\,dx$$

Además usando la continuidad de la inclusión $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ tenemos que $(u_k)_+ \longrightarrow u_+$ en $L^{p^*}(\Omega)$ y por lo tanto,

$$\int_\Omega |(u_k)_+|^{p^*}\,dx \longrightarrow \int_\Omega |u_+|^{p^*}\,dx.$$

Necesitamos que

$$\lambda\int_\Omega f(x, u_k)u_{k_+}\,dx \longrightarrow \lambda\int_\Omega f(x, u)u_+\,dx.$$

Alcanza con pedir que:

$$\int_\Omega \lambda f(x, u)u_\pm dx \leq C\|u_\pm\|^q_{L^q(\Omega)} \quad \text{para} \quad p < q \leq p^*,$$

porque sabemos que $(u_k)_+ \longrightarrow u_+$ en $L^q(\Omega)$.

Como $u_k \in K_1$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_{k_+}|^p - |u_{k_+}|^{p^*}\,dx = \lambda\int_\Omega f(x, u_k)u_{k_+}\,dx$$

y pasando al límite obtenemos que Como $u_k \in K_1$, se tiene que

$$\int_\Omega |\nabla u_+|^p - |u_+|^{p^*}\, dx = \lambda \int_\Omega f(x,u)u_+\, dx$$

Resta ver que $\int_\Omega u_+\, dx > 0$ pero por el Lema 6.4 sabemos que $\|(u_k)_+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C$ entonces $\|u_+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \geq C$ y por esto $u_+ \not\equiv 0$. Esto me dice que $\int_\Omega u_+\, dx > 0$ y por lo tanto $u \in M_1$.

Además, $u_k \geq 0 \quad \forall k$ y como $u_{k_j} \longrightarrow u$ en casi todo punto concluimos que $u \geq 0$.

Resumiendo, acabamos de probar que M_1 es completo.

Falta ver que $T_u W_0^{1,p}(\Omega) = T_u M_1 \oplus \langle u_+\rangle$, donde $M_1 = \{u\colon \varphi_1(u) = 0\}$ y $T_u M_1 = \{v\colon \langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle = 0\}$.

Sea $v \in T_u W_0^{1,p}(\Omega)$ y escribimos $v = v_1 + v_2$, donde $v_2 = \alpha u_+$ y $v_1 = v - v_2$. Nos interesa elegir α de manera tal que $v_1 \in T_u M_1$.

$$0 = \langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle = \langle \nabla\varphi_1(u), \alpha u_+\rangle = \langle \nabla\varphi_1(u), v_1\rangle.$$

Si elegimos

$$\alpha = \frac{\langle \nabla\varphi_1(u), v\rangle}{\langle \nabla\varphi_1(u), u_+\rangle},$$

reemplazando en la ecuación anterior nos queda que

$$\langle \nabla\varphi_1(u), v_1\rangle = 0.$$

Análogamente, $T_u W^{1,p}(\Omega) = T_u M_2 \oplus \langle u_-\rangle$ y $T_u W^{1,p}(\Omega) = T_u M_3 \oplus \langle u_+, u_-\rangle$. □

2. La condición de Palais-Smale

Lema 6.7. *El funcional $\Phi|_{K_i}$ satisface la condición de Palais-Smale.*

Demostración. Sea $u_k \subset K_i$ una sucesión tal que:

1. $\Phi(u_k)$ es uniformemente acotada
2. $\nabla\Phi|_{K_i}(u_k) \longrightarrow 0$ fuertemente

Necesitamos mostrar que existe una subsucesión que converge fuerte en K_i.

Sea $v_j \in T_{u_j} W^{1,p}(\Omega)$ un vector unitario tal que:

$$\langle \nabla\Phi(u_j), v_j\rangle = \|\nabla\Phi(u_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)}.$$

Ahora por el Lema 6.6, $v_j = w_j + z_j$ con $w_j \in T_{u_j} M_i$ y $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$.

Además, los z_j son uniformemente acotados y como los v_j también lo son, podemos concluir que los w_j también son uniformemente acotados.

Por otro lado,

$$\|\nabla\Phi(u_j)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \langle \nabla\Phi(u_j), v_j\rangle = \langle \nabla\Phi|k_i(u_j), w_j\rangle$$

La desigualdad anterior proviene de que $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$ y al demostrar el Lema 6.6 vimos que $z_j \in \langle (u_j)_+, (u_j)_-\rangle$ es ortogonal a $T_{u_j} M_i$. Y recordando que, w_j es uniformemente acotado y que u_k verifica la condición 2 que mencionamos al principio, notamos que la igualdad anterior tiende fuertemente a 0.

Ahora, estamos bajos las condiciones de (P-S) para el funcional Φ. □

3. Fin de la demostración

TEOREMA 6.8. *Suponiendo que f cumple:*

F1: $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *es una función medible respecto de la primer variable y continua respecto de la segunda variable para casi todo $x \in \Omega$. Además, $f(x,0) = 0$ para cada $x \in \Omega$.*

F2: *Existen constantes $p < q < p^* = \frac{Np}{(N-p)}$, $s > \frac{p^*}{p^*-q}$, $t = \frac{sq}{(2+(q-2)s)}$ y funciones $a \in L^s(\Omega)$, $b \in L^t(\Omega)$, tal que para $x \in \Omega$, $u, v \in \mathbb{R}$.*

$$|f_u(x,u)| \leq a(x)|u|^{q-2} + b(x)$$

F3: *Existen constantes $c_1 \in (0, \frac{1}{p^*-1})$, $k_2 \in (p, p^*)$, $0 < c_3 < c_4$ tal que $\forall\, u \in L^q(\Omega)$ para $p < q < p^*$*

$$\begin{aligned} c_3\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \leq k_2 \int_\Omega F(x,u)\,dx &\leq \int_\Omega f(x,u)u\,dx \\ &\leq c_1 \int_\Omega f_u(x,u)u^2\,dx \leq c_4\|u\|^q_{L^q(\Omega)} \end{aligned}$$

Existen tres soluciones no triviales débiles del problema.

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(x,u) + |u|^{p^*-2}u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{6.5}$$

Donde Ω es un dominio regular y acotado, $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ y $\lambda \geq \lambda_0$ donde $\lambda_0 = \lambda_0(n, q, w_0)$ y $\|w_0\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = 1$.

Mas aún, estas soluciones son una negativa, una positiva y una que cambia de signo.

DEMOSTRACIÓN. En este punto, la demostración se termina de manera análoga a la del Teorema 4.9. $\square$

Bibliografía

[1] D. Arcoya y J.I. Diaz. *S-shaped bifurcation branch in a quasilinear multivalued model arising in climatology.* J. Differential Equations, **150** (1998), 215–225.

[2] C. Atkinson y K. El Kalli. *Some boundary value problems for the Bingham model.* J. Non-Newtonian Fluid Mech. **41** (1992), 339–363.

[3] C. Atkinson y C.R. Champion. *On some boundary value problems for the equation* $\nabla(F(|\nabla w|)\nabla w) = 0$. Proc. R. Soc. London A, **448** (1995), 269–279.

[4] V. Benci y P.H. Rabinowitz. *Critical point theorems for indefinite functionals*, Invent. Math., **52** (1979), 241–273.

[5] H. Brézis y L. Nirenberg. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents.* Comm. Pure Appl. Math., **36** (1983), no. 4, 437–477.

[6] M. del Pino y C. Flores. *Asymptotic behavior of best constants and extremals for trace embeddings in expanding domains.* Comm. Partial Differential Equations, **26** (11-12) (2001), 2189-2210.

[7] J.I. Diaz. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries.* Pitman Publ. Program 1985.

[8] I. Ekeland. *On the variational principle.* J. Math. Anal.Appl., Vol 47 (1974), 324-353.

[9] J.F. Escobar. *Uniqueness theorems on conformal deformations of metrics, Sobolev inequalities, and an eigenvalue estimate.* Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), 857–883.

[10] L.C. Evans. *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, **19** (1998), American Mathematical Society.

[11] J. Fernández Bonder. *Multiple positive solutions for quasilinear elliptic problems with sign-changing nonlinearities.* Abstr. Appl. Anal., **2004** (2004), no. 12, 1047–1056.

[12] J. Fernńdez Bonder. *Multiple solutions for the* $p-$*laplace equation with nonlinear boundary conditions.* Electron. J. Differential Equations, **2006** (2006), no. 37, pp. 1–7.

[13] J. Fernández Bonder y J.D. Rossi. *Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions.* J. Math. Anal. Appl., **263** (2001), 195–223.

[14] J. Fernández Bonder y J.D. Rossi. *Asymptotic behavior of the best Sobolev trace constant in expanding and contracting domains.* Comm. Pure Appl. Anal. **1** (2002), no. 3, 359–378.

[15] J. Fernández Bonder, E. Lami-Dozo y J.D. Rossi. *Symmetry properties for the extremals of the Sobolev trace embedding.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linèaire, **21** (2004), no. 6, 795–805.

[16] J. Fernández Bonder, S. Martínez y J.D. Rossi. *The behavior of the best Sobolev trace constant and extremals in thin domains.* J. Differential Equations, **198** (2004), no. 1, 129–148.

[17] R. Feynman, R. Leighton y M. Sands. *The Feynman lectures in physics*, Vol. II, Addison–Wesley, 1966.

[18] J. Garcia-Azorero y I. Peral. *Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a non-symmetric term.* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 323 (2) (1991), 877-895.

[19] P.L. Lions. *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1*, Rev. Mat. Iberoamericana. Vol. 1 No.1 (1985), 145-201.

[20] L. Ljusternick y L. Schnirelman. *Méthodes topologiques dans les problèmes variationnels*, **88** (1934), Actualités Sci. Industr. Paris.

[21] I. Peral. *Multiplicity of Solutions for the* $p-$*Laplacian.* Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Differential Equations, 21 April-9 May 1997, ICTP.
Disponible en `http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/ireneo/ICTP.pdf`

[22] J.T. Schwartz. *Generalizing the Lusternik-Schnirelman theory of critical points.* Comm. Pure Appl. Math., **17** (1964), 307–315.

[23] M. Struwe. *Three nontrivial solutions of anticoercive boundary value problems for the Pseudo-Laplace operator.* J. Reine Angew. Math. **325** (1981), 68–74.

[24] P. Tolksdorf. *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* J. Differential Equations, **51** (1984), 126–150.

[25] Z. Zhang, J. Chen y S. Li. *Construction of pseudo-gradient vector field and sign-changing multiple solutions involving p-Laplacian.* J. Differential Equations, **201** (2004), 287–303.