UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

La definición de la Transformada de Fourier y sus desigualdades en norma con pesos

Mariana Valeria Pérez

Director: Dr. Carlos Cabrelli

-Noviembre 2009-

Agradecimientos

"Te agradeceré eternamente por lo que has hecho, y proclamaré la bondad de tu Nombre delante de tus fieles". Sal. 52,11.

En primer lugar dedico y agradezco a la persona que más amo y amaré por siempre, a mi papá, por todos los años que me llenó de su amor y me enseñó a ser lo que soy hoy, por sus tantas horas de no dormir acompañándome en la escritura de esta tesis y por todos los ánimos y las fuerzas que me dió para seguir adelante con esta carrera. Sé que desde un lugar del cielo, me abraza y se alegra por la culminación de esta etapa.

También quiero agradecer, a mi director, Carlos Cabrelli, por su ayuda cuando no me salía alguna demostración, por su fuerza impulsándome cuando me trababa en la realización de esta tesis y por todo lo que aprendí junto a él.

A mi amigo Juan Medina; primeramente porque gracias a él conocí a Carlos y también porque me ayudó a entender muchos de los conceptos que requiere esta tesis, por sus horas dedicadas colaborando al lado mío.

A mi familia, a mi abu, a mi mamá, a mi tía, a mi hermano porque sin ellos, sin su amor y su entrega, no hubiera podido hacer nada.

A Marina, mi amiga, por todos los años que pasamos juntas, entre nervios, materias, logros y fracasos; porque aprendimos a ser mejores personas y porque seguimos recorriendo el camino juntas.

También quiero agradecer a mi hermana del alma, a Roxi, por todo el amor que me da siempre, por su hermandad en los momentos más difíciles de mi vida y la de mi familia.

De un modo especial quiero agradecer a Melina por toda su fuerza en estos últimos meses, a Nino y Guillermo por la oportunidad que me dieron de seguir estudiando y de volver a amigarme con la matemática, y por todo lo que estoy aprendiendo al lado de ellos.

A todos mis amigos de la facultad, a mi hermano Eze, a María Marta, a Mercedes, a Ale, por todos los momentos que compartimos y seguiremos compartiendo.

A Magui, porque sin su ayuda no hubiera podido arrancar con el latex.

Por último, agradezco a Dios haberme reencontrado con Mauri, el amor de mi vida, porque a su lado aprendo lo maravilloso que es caminar de a dos.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El Análisis de Fourier, que es el estudio de las series, de las integrales y de la Transformada de Fourier; se llama así en honor a Joseph Fourier (1768-1830), un matemático francés que vivió durante la época napoleónica.

Aunque Fourier ha sido justamente reconocido al darle su nombre a esta importante rama del análisis, muchos de sus contemporáneos y predecesores inmediatos contribuyeron a sus logros. Es por ello que podemos encontrar a la transformada en los primeros escritos de Cauchy y Laplace, a partir de 1782.

Para comenzar con su estudio, podemos decir que las series de Fourier representan funciones definidas en un intervalo de la recta, o equivalentemente, funciones periódicas en la recta. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas, se sustituye por la *Transformada de Fourier.*

Formalmente se puede deducir la expresión de la Transformada de Fourier a partir de la serie. Supongamos que f es una función periódica de período $2l$, entonces su serie de Fourier en forma compleja se escribe en la forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) e^{\frac{-\pi nit}{l}}\, dt \right) e^{\frac{\pi nix}{l}} \tag{1.1}$$

LLamando $\xi_n = \frac{n}{2l}$ y

$$h(\xi) = \int_{-l}^{l} f(t)\; e^{-2\pi \xi ti}\; dt$$

La ecuación (1.1) se escribe en la forma:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} (\xi_{n+1} - \xi_n)\ h(\xi_n)\ e^{2\pi\xi_n xi}.$$

que tiene el aspecto de una suma de Riemann. En el límite tendríamos la igualdad formal

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\ e^{-2\pi\xi ti}\ dt \Big]\ e^{2\pi\xi ix}\ d\xi.$$

que contiene, en la expresión interior de la fórmula, lo que llamaremos la Transformada de Fourier de f y también la fórmula de inversión que dará f a partir de la transformada.

Todo lo que hicimos anteriormente fue puramente formal y con el único objetivo de sugerir la definición de la Transformada de Fourier. A continuación daremos una definición precisa:

Siendo f una función integrable en el sentido de la integral de Lebesgue definida en $\mathbb{R}$, su *Transformada de Fourier* será la función definida también en $\mathbb{R}$ y con valores complejos, que representaremos como $\hat{f}$, dada por:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix\xi}\ dx$$

Igual que las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la Transformada de Fourier realiza una descomposición o análisis de f en *componentes*, ahora en lugar de presentar sólo frecuencias discretas formando una sucesión aparece un rango continuo de frecuencias (todo $\mathbb{R}$). A cada *frecuencia* ξ le corresponde un coeficiente $\hat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo. Su módulo es la *amplitud* y su argumento es la *fase*. La reconstrucción de f a partir de $\hat{f}$ es la *síntesis.*

Veremos en el capítulo 2 las propiedades fundamentales que goza la Transformada de Fourier y la extensión de esta definición a otros espacios e incluso a espacios de funciones generalizadas.

Sólo para mencionar algunas aplicaciones, digamos que la Transformada de Fourier se aplica en el estudio de señales y sistemas, así como en óptica, aparece en los aparatos sofisticados modernos como los que se usan para tomar una tomografía, también surgen en las técnicas analíticas como la resonancia magnética nuclear, y en general, en todo tipo de instrumentación científica que se use para el análisis y la presentación de datos. También tiene muchas aplicaciones en la teoría de probabilidad, en la teoría de los números, en la combinatoria, en el estudio de las ecuaciones diferenciales, en la física y en la propagación de ondas.

La rama de la matemática que estudia la Transformada de Fourier y sus generalizaciones es denominada el *Análisis armónico.*

Otro estudio que realizó esta importante rama del ánalisis, y que desarrollaremos a lo largo de todo este trabajo, fue el de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la validez de las desigualdades en norma con peso para la Transformada de Fourier. Generalmente los problemas de pesos se enunciaron y se trabajaron a lo largo de los años, de la siguiente manera:

"Dados p, q tales que $1 < p, q < \infty$*, se trata de encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre los pares de funciones* (u, v) *definidas sobre* $\mathbb{R}^d$ *y no negativas, de modo que sea válida la desigualdad:*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x)|^q\ u(x)\ dx\Big)^{1/q} \leq\ C\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\ v(x)\ dx\Big)^{1/p} \tag{1.2}$$

donde $\hat{f}$ *es la Transformada de Fourier de* f *y* C *es una constante independiente de* f*".*

A continuación exponemos algunos resultados importantes que surgieron a lo largo de la historia del Análisis Armónico.

Una desigualdad clásica que surge en el año 1912 fue la denominada *"desigualdad de Hausdorff-Young"* para la Transformada de Fourier:

$$\Big(\int |\hat{f}(y)|^{p'}\ dy\Big)^{1/p'} \leq \Big(\int |f(x)|^p\ dx\Big)^{1/p},$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$*,* $1 \leq p \leq 2$ *y* $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ *y donde* $\hat{f}$ *denota la Transformada de Fourier de f.*

Esta desigualdad tiene sus orígenes en los esfuerzos de W.H. Young al querer generalizar el Teorema de Parseval para series en otras clases L^p y querer extenderlo naturalmente en el contexto del análisis sobre grupos abelianos localmente compactos. La desigualdad de Hausdorff-Young sigue valiendo para el grupo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y además resulta óptima, es decir que dicha desigualdad se alcanza tomando las funciones exponenciales en la forma $f(x) = Ae^{2\pi mix}$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Pero para la Transformada de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R})$, el matemático K.I. Babenko probó en 1961 una desigualdad fuerte para una clase especial de valores de p. Demostró usando las funciones gaussianas en la forma $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ $\alpha > 0$, que la desigualdad resulta óptima, es decir se realiza. El resultado básicamente dice lo siguiente:

$$\Big(\int |\hat{f}(y)|^{p'}\ dy\Big)^{1/p'} \leq A_p\Big(\int |f(x)|^p\ dx\Big)^{1/p},$$

donde la desigualdad es óptima, siendo $A_p = \left[\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\right]^{1/2}$, *con* $f \in L^1 \cap L^p(\mathbb{R})$, *para el caso especial donde el exponente superior es par, es decir* $p' = 2k$ *y* $p = \frac{2k}{2k-1}$ *y* $k \in \mathbb{N}$.

Por su parte William Beckner **[Be]** describe en el año 1975 una desigualdad de Hausdorff- Young óptima para la Transformada de Fourier sobre $L^p(\mathbb{R}^d)$ extendiendo el resultado expuesto años atrás por Babenko, es decir:

"La Transformada de Fourier en $L^1 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ *se puede extender a un operador lineal y acotado*

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

con $1 < p \leq 2$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *y*

$$\Big(\int |\hat{f}(y)|^{p'}\ dy\Big)^{1/p'} \leq (A_p)^d\Big(\int |f(x)|^p\ dx\Big)^{1/p},$$

con $A_p = \left[\frac{p^{1/p}}{p'^{1/p'}}\right]^{1/2}$*".*

B. Muckenhoupt, por su parte **[Mu]** planteó en su artículo *"Weighted norm inequalities for classical operators"* que data del año 1979, primeramente el problema de determinar todos los pares de funciones no negativas $(u(x), v(x))$ tales que:

$$\int |Sf(x)|^p\ u(x)\ dx \leq\ C\ \int |Tf(x)|^p\ v(x)\ dx$$

donde $1 \leq\ p < \infty$, S y T son dos operadores y C es una constante independiente de f.

Típicamente los operadores S o T eran las identidades o bien la integral indefinida $\int_0^x f(t)\ dt$ o la función maximal de Hardy-Littlewood

$$f^*(x) = \sup_{y \neq\ x} \frac{1}{y-x} \int_x^y |f(t)|\ dt,$$

o la transformada de Hilbert $\tilde{f}(x) = \text{lím}_{\varepsilon \to\ 0^+} \frac{1}{\pi} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y}\ dy$ o bien varios operadores de Littlewood-Paley.

También en su artículo incluyó variaciones sobre el problema básico, considerando la desigualdad

$$\left[\int |Sf(x)|^q\ u(x)\ dx \right]^{1/q} \leq C\ \left[\int |Tf(x)|^p\ v(x)\ dx \right]^{1/p}$$

donde $p \neq q$.

Finalmente Benjamín Muckenhoupt, planteó en **[Mu]** el problema de pesos para la Transformada de Fourier, es decir, caracterizar aquellas funciones no negativas $u(x)$ y $v(x)$, las cuales para algún p, donde $1 \leq p < \infty$, la desigualdad:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(x)|^p\ u(x)dx \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\ v(x)\ dx$$

tiene validez, para toda función $f(x)$ y donde $\hat{f}(x)$ denota la Transformada de Fourier.

Los antecedentes más conocidos de este problema son dos desigualdades de Paley y un teorema de Pitt, que datan del año 1936 **[Hos]** y **[Pi]**.

Si $u(x)$ y $v(x)$ son potencias de $|x|$ los resultados son conocidos como las desigualdades de Pitt.

Las desigualdades de Paley, **[Hos]** se pueden enunciar del siguiente modo:

1) *"Sea $1 < p \leq 2$, $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, entonces*

$$\Big(\int |\hat{f}(y)|^p\ |y|^{d(p-2)}\ dy \Big)^{1/p} \leq C \Big(\int |f(y)|^p\ dy \Big)^{1/p},$$

con C una constante independiente de f"

2) *"Sea* $2 \leq q < \infty$ *y* $g \in L^q_{|y|^{d(q-2)}}\ (\mathbb{R}^d)$ *entonces,*

$$\Big(\int |\hat{g}(y)|^q\ dy\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int |g(y)|^q |y|^{d(q-2)}\ dy\Big)^{1/q}".$$

Para las demostraciones de estos teoremas se requieren teoremas de interpolación que describiremos en el capítulo 2, como ser el Teorema de Marcinkiewicz o el Teorema de Riesz.

En cuanto al aporte de Pitt podemos enunciar que en 1937, probó el siguiente teorema denominado el *"Teorema de Pitt"* **[Pi]**:

"Sea $1 < p \leq q < \infty$ *eligiendo* $0 < b < 1/p'$, *sea* $\beta = 1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} - b < 0$, *y definiendo* $\upsilon(x) = |x|^{bp}$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$. *Entonces existe* $C > 0$ *tal que*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|^q\ |y|^{\beta q}\ dy\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ |x|^{bp}\ dx\Big)^{1/p},$$

para todo $f \in L^p_\upsilon(\mathbb{R})$*".*

Una primera demostración de este conocido resultado se halla en el trabajo **[Hos]**. Para su demostración se utilizan las desigualdades de Paley descriptas anteriormente más un teorema de interpolación debido a Stein, que data del año 1956.

Otra estimación que surgió a partir de estas desigualdades fue la siguiente :

"Si $1 < p \leq 2$ *y* $p \leq q \leq p'$ *con* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, *entonces se tiene:*

$$\Big(\int |\hat{f}(y)|^q\ |y|^{d(\frac{q}{p'}-1)}\ dy\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int\ |f(x)|^p\ dx\Big)^{1/p}".$$

Más adelante, en un trabajo posterior de B. Muckenhoupt, publicado en el año 1983 **[Mu1]**, se dan nuevas condiciones suficientes para la validez de la desigualdad en norma con pesos para la Transformada de Fourier y también condiciones necesarias.

Un primer resultado muestra una condición suficiente para la desigualdad en norma con peso (1.2) cuando $q = p'$,

1) *"Si $1 < p \leq 2$, $u(x)$ y $v(x)$ son funciones no negativas sobre $\mathbb{R}^d$ y A y B son constantes positivas independientes de r, y tal que:*

$$\Big[\int_{u(x)>Br} u(x)\ dx\Big]\Big[\int_{v(x)<r^{p-1}} v(x)^{\frac{-1}{p-1}}\ dx\Big] \leq A, \tag{1.3}$$

para $r > 0$, entonces para toda f integrable, se tiene que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(x)|^{p'}\ u(x)\ dx\Big)^{1/p'} \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p\ v(x)\ dx\Big)^{1/p} \tag{1.4}$$

donde C depende sólo de A, de B y de p".

Otros resultados que expone en su trabajo fueron condiciones suficientes para la desigualdad (1.2) cuando $q \neq p'$, para ello usó las llamadas funciones de reordenamiendo no creciente para una cierta función g definidas sobre $[0, +\infty)$ mediante la expresión $g^*(x) = \text{ínf}\{s : m(\{t : |g(t)| > s\}) < x\}$.

Ya que por el Teorema de Pitt se tiene que $q \geq p$, los casos analizados por B. Muckenhoupt fueron cuando $p \leq q < p'$ y luego cuando $q' \leq p' < q$.

2)" *Si $1 < p < 2$, $p \leq q < p'$, $u(x)$ y $v(x)$ son funciones no negativas sobre $\mathbb{R}^d$ y existen constantes positivas A y B, independientes de r, tales que,*

$$\Big[\int_{[xu^*(x)]^{p'/q}>Brx} u^*(x)\ dx\Big]\Big[\int_{v(x)<r^{p-1}} v(x)^{\frac{-1}{p-1}}\ dx\Big]^{q/p'} \leq A, \tag{1.5}$$

para todo $r > 0$, entonces para toda f integrable, la desigualdad (1.4) tiene validez con C que depende sólo de A, B, p y q".

3)"*Si $2 < q < \infty$, $q' \leq {}'p < q$, $u(x)$ y $v(x)$ son funciones no negativas sobre $\mathbb{R}^d$, $w(x) = [v(x)^{-1/(p-1)}]^*$ y existen constantes A y B, independientes de r, tales que,*

$$\Big[\int_{[xw(x)]^{q/p'}>Brx} w(x)\ dx\Big]\Big[\int_{ru(x)>1} u(x)\ dx\Big]^{p'/q} \leq A, \tag{1.6}$$

para todo $r > 0$, entonces para toda f integrable, la desigualdad (1.4) tiene validez con C que depende sólo de A, B, p y q."

Las condiciones necesarias que encontró B. Muckenhoupt, a partir de las condiciones suficientes descriptas arriba fueron:

Para el caso $q = p'$,

4) *"Si* $1 < p < \infty$, $u(x)$ *y* $v(x)$ *son dos funciones radiales no negativas sobre* $\mathbb{R}^d$, *tales que, como funciones de* $|x|$, $u(x)$ *es no creciente y* $v(x)$ *es no decreciente y (1.4) tiene validez para toda* f *integrable con* C *independiente de* f, *entonces existen constantes* A *y* B *tales que (1.3) vale para todo* $r > 0$*".*

Y para el caso $q \neq p'$,

5) *"*$1 < p < \infty$ *y* $1 < q < \infty$, $u(x)$ *y* $v(x)$ *son funciones radiales no negativas sobre* $\mathbb{R}^d$, *tales que, como funciones de* $|x|$, $u(x)$ *es no creciente y* $v(x)$ *es no decreciente y (1.4) tiene validez para toda* f *integrable con* C *independiente de* f, *entonces si* $q < p'$ *existen constantes* A *y* B *tales que (1.5) tiene validez para* $r > 0$, *y si* $q > p'$ *existen constantes* A *y* B *tales que (1.6) vale también para* $r > 0$*."*

Por otro lado, J.J.Benedetto y H.P.Heinig, en su trabajo *"Weighted Hardy spaces and the Laplace transform"*, en el año 1983 **[BeHe]** dieron una extensión de la definición de la Transformada de Fourier a los espacios $L^p_v(\mathbb{R})$ donde v es una funcion no negativa localmente integrable, estableciendo también nuevas condiciones para la desigualdad (1.2).

Primeramente dieron las siguientes definiciones que nos parece oportunas explicitar:

Definición 1.0.1. *Para una función (peso)* $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *y un* $p \in [1, +\infty)$, *el espacio pesado* $L^p_v(\mathbb{R})$ *corresponde a las funciones localmente integrables* f *sobre* $\mathbb{R}$ *para las cuales*

$$\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} = \big(\int_{-\infty}^{\infty} \ |f(t)|^p \ v(t) \ dt \big)^{1/p} < \infty.$$

Definición 1.0.2. *Supongamos que* u *y* v *son funciones no negativas sobre* $\mathbb{R}$ *tales que* u *es decreciente y* v *es creciente para* $t > 0$. *Decimos que* $(u, v) \in F(p, q)$, *con* $1 < p \leq q < \infty$ *si y solo si*

$$\sup_{s>0} \big(\int_0^{1/2s} \ u(t)^q \ dt \big)^{1/q} \big(\int_0^{s/2} \ v(t)^{-p'} \ dt \big)^{1/p'} < \infty \tag{1.7}$$

Más adelante encontramos en su trabajo el siguiente teorema de extensión, que corresponde a un Teorema de Plancherel general, junto con una condición suficiente para la desigualdad (1.2):

Teorema 1.0.1. *Supongamos que* $(u, v) \in F(p, q)$, $1 \leq p \leq q < \infty$ *y* $f \in L_v^p(\mathbb{R})$. *entonces se tienen,*

i) Si $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L_v^p(\mathbb{R})} = 0$ *para una sucesión* $\{f_n\}$ *de funciones simples, luego* $\{\hat{f}_n\}$ *converge en* $L_u^q(\mathbb{R})$ *a una función* $\mathcal{G}(f) = \hat{f} \in L_u^q(\mathbb{R})$. *La función* $\mathcal{G}(f)$ *es independiente de la sucesión* $\{f_n\}$ *y la llamaremos* ***"la Transformada de Fourier de f"***.

ii) $\mathcal{G}(f)$ *tiene una representación puntual definida por*

$$\mathcal{G}(f) = \frac{d}{dy} \int \frac{1 - e^{-2\pi i y t}}{2\pi i t} \; f(t) \; dt \quad \text{en casi todo punto.}$$

iii) Existe una constante $C > 0$ *tal que para toda* $f \in L_v^p(\mathbb{R})$ *tenemos que,*

$$\|\mathcal{G}(f)\|_{L_u^q(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L_v^p(\mathbb{R})} \tag{1.8}$$

iv) Si $g \in L_{1/u}^{q'}(\mathbb{R})$ *y* $q > 1$ *entonces la fórmula de Parseval generalizada,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y) g(y) \; dy = \int_{-\infty}^{\infty} \; f(t) \hat{g}(t) \; dt$$

es válida.

Luego demostraron una condición necesaria para la desigualdad en norma con pesos para la Transformada de Fourier.

Teorema 1.0.2. *Supongamos que* u *y* v *son funciones no negativas sobre* $\mathbb{R}$ *tales que* u *es decreciente y* v *es creciente para* $t > 0$. *Si la desigualdad (1.8) es válida para* $1 < p, q < \infty$, *entonces (1.7) vale.*

Otros trabajos que estudian condiciones suficientes para la validez de las desigualdades en normas con peso para la Transformada de Fourier y que involucran ajustes en los pesos considerados se deben a Jurkat y Sampson **[JS]**, Heinig **[He]** y **[He1]** y también al trabajo de J.J Benedetto y H. Heinig y R. Johnson **[BHJ]**, entre otros.

Nuevas condiciones necesarias y suficientes para las desigualdades en normas con peso para la Transformada de Fourier fueron descriptas en los trabajos de Cora Sadosky y Richard L. Wheeden **[SW]** en el año 1987, quienes generalizaron el Teorema de Pitt para pesos de la forma $|x|^\gamma$, donde los valores de γ caen afuera del rango establecido por dicho teorema. Es decir, una versión del Teorema de Pitt plantea la validez de la desigualdad:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \ |x|^{-\gamma+p-2}\ dx\Big) \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ |x|^\gamma \ dx\Big), \qquad (1.9)$$

si $1 < p < \infty$ y $\max\{0, p-2\} \leq \gamma < p-1$.

Sadosky y Wheeden mostraron que la desigualdad (1.9) vale también cuando $\gamma > p-1$ y para $\gamma \neq (kp-1)$ con $k \in \mathbb{N}$ siempre que f tenga momentos nulos; también dieron un contraejemplo que muestra que la desigualdad (1.9) no es verdadera si $\gamma = p-1$.

Para terminar esta introducción podemos decir que, más adelante, en 1990, Wheeden en colaboración con Jan-Olov Stömberg **[StW]**, y continuando el trabajo de Sadosky y Wheeden; desarrollaron nuevas condiciones suficientes para la desigualdad (1.9).

1.1. Organización de la Tesis

En este trabajo estudiaremos dos puntos fundamentales:

- Condiciones necesarias y suficientes para la validez de la desigualdad:

$$\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v},$$

  donde la desigualdad se establece sobre un subespacio de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$ contenido en el espacio de pesos $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y donde $\hat{f}$ es la Transformada de Fourier y μ y v son pesos, siendo en un primer estudio funciones no negativas y en un segundo estudio la primera una medida positiva y la segunda una función no negativa.

- El problema de la extensión de la definición de la Transformada de Fourier $\hat{f}$ sobre todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

Este trabajo está desarrollado de la siguiente manera:

En el ***capítulo 2*** haremos un repaso de la definición de la Transformada de Fourier en los espacios conocidos que se estudian en el análisis armónico y las desigualdades que surgen; como ser, por ejemplo, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$ para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ o el Teorema de Plancherel que dice que para $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ se tiene la igualdad $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$, o también la desigualdad de Hausdorff- Young.

En el ***capítulo 3*** se estudian condiciones necesarias y suficientes para la validez de la desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)\ dx,$$

donde u y v son funciones no negativas y $f \in L^1(\mathbb{R})$ y donde $\hat{f}$ corresponde a la transformada de Fourier de f.

En este capítulo estudiamos el caso cuando $v = 1$, encontrando para el caso $1 < p < 2$, una condición necesaria:

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \Big(\int_{kr}^{(k+1)r} u(x)\ dx\Big)^b\Big)^{1/b} \leq Cr^{p-1},$$

donde $b = \frac{2}{2-p}$.

Y para el caso $v = 1$ y $p \geq 1$ y cualquier conjunto medible E, la condición suficiente $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)^{p-1}$. Todo este trabajo se encuentra en **[AgHa]**.

En el ***capítulo 4*** se estudian las desigualdades en norma con pesos para la Transformada de Fourier cuando éstos corresponden a μ una medida no negativa y v una función no negativa. Presentamos un teorema de densidad y un resultado de extensión para la definición de la Transformada de Fourier en todo el espacio $L^p_v(\mathbb{R})$. El desarrollo de estas propiedades se encuentra en el trabajo de Benedetto and Heinig **[BeHe1]**, que data del año 1992.

Cabe mencionar en esta introducción que nuevas desigualdades se pueden encontrar en el trabajo de Carton-Lebrun publicado el mismo año. En el mismo tomando $\mathcal{G}f(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\gamma x} - 1)\ f(x)\ dx$ con $d > 1$ y u, v funciones no negativas, se estudian condiciones suficientes para la validez de la desigualdad $\|\mathcal{G}f\|_{L^q_u(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$, para toda $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$. También se desarrollan aproximaciones puntuales y en norma de $\mathcal{G}(f)$. Resultados similares son obtenidos cuando u es reemplazado por una medida no negativa. El desarrollo de todo esto se encuentra en **[Le]**.

Por último, en el **capítulo 5** se describe y se muestra la solución al problema de definir la extensión $\mathcal{G} : L^p_v(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ de la Transformada de Fourier $\hat{f}$ a través de diferentes casos, escribiendo explícitamente expresiones para $\mathcal{G}$ e indicando en este estudio nuevas condiciones necesarias y suficientes para las desigualdades en norma con pesos estudiadas a lo largo de todo este trabajo.

Presentamos cuestiones técnicas y trabajamos básicamente dos casos importantes, como ser la Transformada de Fourier de funciones que no son localmente integrables y también la Transformada de Fourier de las funciones temperadas. Para ello es importante distinguir entre el caso que $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y el caso en que $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

1.2. Notaciones y definiciones previas

Por último y antes de comenzar con el desarrollo de este trabajo quisiera describir a modo de repaso algunas notaciones y definiciones que usaremos y nos parece conveniente describir en este punto.

- $\mathbb{R}^d$ espacio euclideano d- dimensional de d- uplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ de números reales.
- $x \cdot y$ denota el producto interno de $x \in \mathbb{R}^d$ con $y \in \mathbb{R}^d$, es decir $x \cdot y = \sum_{j=1}^d x_j y_j$.
- $|x|$ denota el módulo de $x \in \mathbb{R}^d$, es decir; $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.
- $dx = dx_1, \ldots, dx_d$ denota el elemento ordinario de la medida de Lebesgue.
- $L^p = L^p(\mathbb{R}^d)$=$\{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow K$ funciones medibles tal que $\|f\|_p = \big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\big)^{1/p} < \infty\}$, donde $\|f\|_p$ es la norma L^p de f.

  Observemos que $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 < p \leq \infty$ es un espacio de Banach.

- $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ={ $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow K$ funciones esencialmente acotadas sobre $\mathbb{R}^d$.}

  Sea $f:\mathbb{R}^d \longrightarrow K$ una función medible. Definimos el supremo esencial de $|f|$ sobre E de la siguiente manera:

  Si $m\big(\{x\in\mathbb{R}^d : |f(x)|>\alpha\}\big)>0$ $(\forall\alpha\in\mathbb{R})$ entonces, $\sup\mathrm{ess}|f| = +\infty$.

  $\sup\mathrm{ess}_{\mathbb{R}^d}|f|$=$\inf\{\alpha : m\big(\{x\in\mathbb{R}^d : |f(x)|>\alpha\}\big)=0\}$.

  Entonces $\sup\mathrm{ess}|f|$ es el número más pequeño α con $\alpha\in\mathbb{R}$ tal que $|f(x)|\leq\alpha$, excepto en un conjunto de $\mathbb{R}^d$ de medida nula.

  Una función f se dice *esencialmente acotada* sobre $\mathbb{R}^d$ si $\sup\mathrm{ess}_{\mathbb{R}^d}|f|<\infty$. Notamos $\|f\|_\infty = \sup\mathrm{ess}_{\mathbb{R}^d}|f|$.

- Observamos que, si $f\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces se tiene la siguiente desigualdad: $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$ $(x\in\mathbb{R}^d)$ en casi todo punto.

- $C_0(\mathbb{R}^d)$={ $f:\mathbb{R}^d\longrightarrow K$ funciones continuas tal que $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty} f(x)=0$.}

- $C_c(\mathbb{R}^d)$={$f:\mathbb{R}^d\longrightarrow K$ funciones continuas tal que $f(x)=0$ $(\forall x\in\mathbb{R}^d\backslash K)$, en casi todo punto y donde K es un compacto en $\mathbb{R}^d$}. Es decir, son las funciones continuas con soporte compacto.

- Se tiene los siguientes resultados de densidad:

  1) $\overline{C_c(\mathbb{R}^d)}$=$L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1\leq p<\infty$.

  2) $\overline{C_c(\mathbb{R}^d)}$=$C_0(\mathbb{R}^d)$.

- En general en el capítulo 5, usamos la siguiente notación. Sea Υ cualquier espacio se tiene:

  1) Υ={funciones o distribuciones sobre $\mathbb{R}^d$.}

  2)Υ_c={elementos de Υ que tienen soporte compacto}.

  3)Υ_{loc}={ elementos de Υ cuyas restricciones a un compacto pertenecen a Υ}.

  Por ejemplo, $L^p_{loc}(\mathbb{R}^d)$={$f:\mathbb{R}^d\longrightarrow K$ tal que $f|_K\in L^p(\mathbb{R}^d)$ para todo compacto $K\in\mathbb{R}^d$.}

- sop(f)=$\overline{\{x : f(x)\neq 0\}}$.

- Una medida μ sobre $\mathbb{R}^d$ es una funcional lineal continua sobre $C_c(\mathbb{R}^d)$, es decir que satisface: $\lim_{j\longrightarrow+\infty} <\mu, f_j>=0$ $(\forall$ sucesión $(f_j)\subseteq C_c(\mathbb{R}^d))$ que tiene la propiedad que: $\lim_{j\longrightarrow+\infty}\|f_j\|_\infty=0$, sop$(f_j)\subseteq K$ donde $K\subseteq\mathbb{R}^d$ un compacto fijo y $\|.\|_\infty$ es la norma del supremo usual.

- $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$=$\{\mu$: μ es una medida sobre $\mathbb{R}^d\}$.
- $<\mu, f>$=$\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\ d\mu(\xi)$.
- Un *peso* es un elemento positivo de $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ o una función no negativa (no necesariamente localmente integrable).
- Dados $1 \leq p < \infty$ y un peso μ, $L^p_\mu(\mathbb{R}^d)$ denota el espacio de las funciones definidas en casi todo punto respecto de μ para los cuales la norma:

$$\|f\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^d)} = \Big(\int |f(\xi)|^p\ d\mu(\xi)\Big)^{1/p} < \infty$$

- Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la Transformada de Fourier de f es la función

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x}\ dx.$$

- Dado un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}$, la función $\chi_E(x)$ es la función:

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

- Si $R > 0$, $B(x, R)$ denota la bola de centro x y radio R y $B(0, R) = B_0(R)$.
- $L^p_v(\mathbb{R}^d)$, donde $v \geq 0$ es una función no negativa (no necesariamente localmente integrable) corresponde al siguiente conjunto:

$$L^p_v(\mathbb{R}^d) = \{f : \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = \Big(\int |f(t)|^p\ v(t)\ dt\Big)^{1/p} < \infty\}.$$

- Si $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ con $v \geq 0$, entonces $d\mu(t) = v(t)dt$ define una medida positiva μ donde

$$\mu(A) = \int_A v(t)\ dt.$$

- La función Gamma se define de la siguiente manera: $\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t}\ dt$ con $p > 0$.

- **Desigualdad de Minkowsky para integrales.**

  Sea f una función medible no negativa, $E \subseteq \mathbb{R}^d$, $F \subseteq \mathbb{R}^d$ y $1 \leq p < \infty$, entonces se tiene que:

$$\Big(\int_F \big(\int_E f(x,y)dx\big)^p dy\Big)^{1/p} \leq \int_E \Big(\int_F f^p(x,y)dy\Big)^{1/p} dx$$

- Sean (f_n) una sucesión de funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_p = 0$, entonces existe una subscesión (f_{nk}) de (f_n) tal que:

  a) $\lim_{k \longrightarrow +\infty} f_{nk}(x) = f(x)$ para casi todo punto x.

  b) $|f_{nk}(x)| \leq h(x)$ para todo k y para casi todo x, con $h \in L^p(\mathbb{R}^d)$.

- **Teorema de Diferenciación.**

  Para cualquier $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ se tiene que:

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} f(y)\ dy = f(x),$$

  para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo expondremos la definición de la Transformada de Fourier en distintos espacios conocidos y de algunos resultados importantes que surgieron a partir de su estudio a lo largo de la historia del análisis armónico. La parte básica del desarrollo de esta teoría puede verse por ejemplo en el libro **[StWe]**.

Comenzamos con la teoría de la Transformada de Fourier sobre el espacio $L^1(\mathbb{R}^d)$ y luego en el espacio $L^2(\mathbb{R}^d)$. Más adelante enunciamos la definición de la Transformada de Fourier debido a Titchmarsh **[Ti]**, quien estableció la existencia de $\hat{f} \in L^{p'}$ para $f \in L^p$ con $1 < p < 2$ y finalmente desarrollamos brevemente la teoría de la Transformada de Fourier en las distribuciones temperadas, más específicamente ya que $L^p \subseteq \mathcal{S}'$, donde $\mathcal{S}'$ es el espacio de las distribuciones temperadas, y para cada $p \in [1, +\infty)$, tenemos que para cada $f \in L^p$ la Transformada de Fourier $\hat{f} \in \mathcal{S}'$.

A lo largo de este capítulo enunciaremos también los resultados más conocidos, que surgieron a lo largo de la historia del análisis armónico donde aparecen las desigualdades de la Transformada de Fourier en norma con pesos, como ser por ejemplo el Teorema de Hausdorff-Young cuya primera demostración se publicó en 1926 por Marcel Riesz, pero una elegante demostración fue dada usando el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin por el estudiante de Riesz, G.Olof Thorin publicado en 1939.

2.1. La teoría de la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$

Dada una función $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Se define la *Transformada de Fourier* de f, como la función $\hat{f} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por:

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i x t} f(t)\ dt.$$

Exponemos a continuación algunas propiedades conocidas e importantes correspondientes a la Transformada de Fourier, demostraremos solamente aquellas que nos parece que aportan alguna técnica que se considere importante para el avance de este trabajo.

Proposición 2.1.1. ***Propiedades analíticas de la transformada.***

1) La aplicación $\mathcal{F}$ definida por

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F} & : & L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^\infty(\mathbb{R}^d) \\ & & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

es una transformación lineal acotada y vale además que $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

2) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\hat{f}$ es uniformemente continua.

Demostración. 1) Como:

$$|\mathcal{F}(f)(x)| = |\hat{f}(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|\ dt = \|f\|_1,$$

entonces $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$, $(\forall x \in \mathbb{R}^d)$ y así, $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

Además se tiene que,

$$\mathcal{F}(a.f + g) = \widehat{a.f + g} = a.\hat{f} + \hat{g} = a\mathcal{F}(f) + \mathcal{F}(g).$$

2) Como $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $R = R(\varepsilon) > 0$ tal que $\int_{\|t\| \geq R} |f(t)| dt < \varepsilon$

Por la continuidad de $e^{-2\pi i z}$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $|z| < \delta$ entonces $|e^{-2\pi i z} - 1| < \varepsilon$.

Tomemos $\eta \in \mathbb{R}^d$ tal que $\|\eta\| < \frac{\delta}{R}$(que depende de ε pero no de x) Por Cauchy-Schwarz si $\|t\| < R$, entonces $|\eta \cdot t| \leq \|t\|\|\eta\| < R \cdot \frac{\delta}{R} = \delta$ y por lo tanto $|e^{-2\pi i\eta \cdot t} - 1| < \varepsilon$.

Así resulta que,

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(x+\eta) - \hat{f}(x)| &= |\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i(x+\eta)t} \ f(t) \ dt - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi ixt} \ f(t) \ dt| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi ixt}(e^{-2\pi i\eta t} - 1) \ f(t) \ dt| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi ixt}||e^{-2\pi i\eta t} - 1||f(t)|dt \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-2\pi i\eta t} - 1||f(t)|dt \\
&\leq \int_{\|t\| \geq R} |e^{-2\pi i\eta \cdot t} - 1||f(t)|dt + \int_{\|t\| < R} |e^{-2\pi i\eta \cdot t} - 1||f(t)|dt \\
&\leq I + II
\end{aligned}$$

Como $e^{-2\pi i\eta \cdot t} \in \mathbf{S^1}$ entonces $|e^{-2\pi i\eta \cdot t} - 1| \leq 2$, y así obtenemos que

$$I \leq 2 \int_{\|t\| \geq R} |f(t)|dt < 2\varepsilon$$

Por otro lado si $\|t\| < R$ entonces $|\eta \cdot t| \leq \delta$, y por lo tanto $|e^{-2\pi i\eta \cdot t} - 1| < \varepsilon$. Mediante la cuenta anterior podemos acotar II de la siguiente manera:

$$II \leq \varepsilon \|f\|_1$$

.

Finalmente conseguimos que

$$|\hat{f}(x+\eta) - \hat{f}(x)| \leq 2\varepsilon + \varepsilon\|f\|_1 = C\varepsilon,$$

donde C es una constante (depende de f pero no de ε) concluyendo así que $\hat{f}$ es uniformemente continua.

□

Enunciamos ahora el conocido Lema de Riemann-Lebesgue que concluye que $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ **[StWe]**.

Teorema 2.1.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces se tiene que:* $\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} \hat{f}(x) = 0$.

Además de las operaciones de espacios vectoriales, $L^1(\mathbb{R}^d)$ es dotado con una multiplicación, que hace de este espacio un álgebra de Banach. Esta operación llamada *convolución* se define de la siguiente manera:

Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, su convolución $h = f * g$ es la función cuyo valor en $x \in \mathbb{R}^d$ es:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Uno puede demostrar por un argumento elemental que la función $f(x-y)g(y)$ es una función medible de dos variables x e y. Entonces se sigue inmediatamente por el Teorema de Fubini sobre el intercambio del orden de integración que $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y además $\|h\|_1 \leq \|f\|_1.\|g\|_1$ **[StWe]**.

Podemos observar, también que la convolución cumple las siguientes propiedades:

Proposición 2.1.2. *Si f, g y $h \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces:*

1) $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1.\|g\|_1$.

2) $f * g = g * f$.

3) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

4) $(f + g) * h = f * h + g * h$.

Por lo tanto, se tiene que $L^1(\mathbb{R}^d)$ es un álgebra de Banach conmutativa con el producto dado por la convolución.

Más generalmente, $h = f * g$ está definido siempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. En efecto se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.1.2. *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces, $h = f * g$ está bien definido y pertenece a $L^p(\mathbb{R}^d)$. Además $\|h\|_p \leq \|f\|_p.\|g\|_1$.*

Observemos que el espacio $C_0(\mathbb{R}^d)$ es un álgebra de Banach con el producto dado por la multiplicación de funciones punto a punto:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

con $x \in \mathbb{R}^d$ y $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$.

Por lo tanto se puede enunciar el siguiente teorema:

Teorema 2.1.3. *La Transformada de Fourier*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F} & : & L^1(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & C_0(\mathbb{R}^d) \\ & & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

es un homomorfismo de álgebras de Banach, con norma igual a 1.

A modo de observación podemos decir que la función;

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$$

es inyectiva pero no sobreyectiva.

Para ver que no es sobreyectiva, supongamos que $d = 1$ y sea

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq 1 \\ \frac{sg(x)}{1+log|x|} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Observar que $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ y además suponiendo que existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $\phi = \hat{f}$, llegamos a un absurdo.

En efecto, dado $a > 1$

$$\int_{1<|x|<a} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{1<|x|<a} \frac{\hat{f}(x)}{x}\, dx$$
$$\int_{1<|x|<a} \frac{1}{x} \int e^{-2\pi iyx} f(y)\, dydx = \int f(y) \int_{1<|x|<a} \frac{e^{-2\pi iyx}}{x}\, dx\, dy$$
$$= \int f(y)\big(-2i \int_1^a \frac{\operatorname{sen}(2\pi yx)}{x}\, dx\big)\, dy$$

Tomando $\Delta(a, y) = \int_1^a \frac{\operatorname{sen}(2\pi yx)}{x}\, dx$ entonces se tiene, usando integración por partes dos veces, que $|\Delta(a, y)| \leq M$ para toda $a > 1$ y para todo $y \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto $\left|\int_{1<|x|<a} \frac{\phi(x)}{x}\, dx\right| \leq 2M\|f\|_1$.

Por otra parte,

$$\int_{1<|x|<a} \frac{\phi(x)}{x}\, dx = \int_{1<|x|<a} \frac{1}{|x|(1+\log|x|)}\, dx$$
$$= 2\int_1^a \frac{1}{1+log(|x|)}\frac{1}{x}\, dx = 2\int_0^{\log(a)} \frac{1}{1+u}\, du = 2\log(1+u)|_0^{\log(a)}$$

Tomando límite cuando $a \longrightarrow +\infty$ se tiene que la última igualdad tiende a $+\infty$, llegando así al absurdo.

Enunciamos a continuación el siguiente teorema:

Teorema 2.1.4. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\widehat{f * g} = \hat{f} \cdot \hat{g}$.*

También se tiene las siguientes propiedades algebraicas de la transformada.

Proposición 2.1.3. *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$*

1) Linealidad: $\widehat{af + bg} = a\hat{f} + b\hat{g}$.

2) Conjugación: $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.

3) Traslación: Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ entonces $\widehat{\tau_h f}(x) = e^{-2\pi i h x}\hat{f}(x)$.

4) Modulación: Si $g(x) = e^{2\pi i x h} f(x)$ entonces $\hat{g}(\xi) = (\tau_h \hat{f})(x)$.

5) Dilatación: Si $a > 0$ y $\delta_a(f)(x) = f(a.x)$ entonces $a^n\widehat{\delta_a(f)}(x) = \hat{f}(a^{-1}x)$

El siguiente teorema muestra la relación entre la Transformada de Fourier y la diferenciación. Afirma que la aplicación de la Transformada de Fourier después de la multiplicación por la función de k-coordenada es equivalente (salvo una constante multiplicativa), a tomar la derivada parcial con respecto a la k-ésima variable de la Transformada de Fourier. Es también verdad que la Transformada de Fourier de tales derivadas parciales son obtenidas facilmente (otra vez, salvo una constante multiplicativa), multiplicando la Transformada de Fourier por las correspondientes funciones de coordenadas.

Teorema 2.1.5. *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $x_k f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ donde x_k es la k-función coordenada. Entonces $\hat{f}$ es diferenciable con respecto a x_k y además $\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(x) = -\widehat{2\pi i t_k f}(t)(x)$.*

En efecto, dado $h = (0, ..., h_k, ..., 0)$ un vector no nulo donde la coordenada k-ésima $h_k \neq 0$, se tiene por el teorema de la Convergencia Mayorada que,

$$\frac{\hat{f}(x+h) - \hat{f}(x)}{h_k} = \Big\{ \big(\frac{e^{-2\pi i t \cdot h} - 1}{h_k} \big) f(t) \Big\}\widehat{\ }(x) \longrightarrow (-2\pi i t_k f(t))\widehat{\ }(x)$$

cuando h_k tiende a cero.

Encontraremos muchas versiones del resultado anterior. Daremos a continuación una de ellas (quizás la más simple de demostrar) y para eso introduciremos el siguiente concepto:

Definición 2.1.1. *Decimos que f es diferenciable en la norma L^p respecto a x_k si dado $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ existe $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ tal que:*

$$\lim_{h_k \longrightarrow 0} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \big| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \big|^p \, dx \Big)^{1/p} = 0,$$

(donde la notación usada corresponde a la establecida en la demostración del teorema anterior.)

La función g es llamada la *derivada parcial de f respecto a x_k, en la norma L^p.*

Podemos enunciar ahora el siguiente teorema:

Teorema 2.1.6. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y g es la derivada parcial de f con respecto a x_k en la norma L^1, entonces se tiene que:*

$$\hat{g}(x) = (2\pi i x_k \hat{f})(x)$$

Ambos teoremas enunciados anteriormente pueden extenderse a derivadas de orden superior. Sin entrar en detalles, se tiene que:

i) $P(D)\hat{f}(x) = \widehat{P(-2\pi i t)}f(t)(x)$.

ii) $\widehat{P(D)}f(x) = P(2\pi i x)\hat{f}(x)$;

donde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ y $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$ y $D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_d^{\alpha_d}}$, $P = \Sigma_\alpha a_\alpha x^\alpha$ un polinomio en las d variables $x_1, \ldots, x_d$ con $a_\alpha \in \mathbb{R}$.

$P(D) = \Sigma_\alpha a_\alpha D^\alpha$ es el *operador diferencial asociado a D.*

El principal problema en la teoría de la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}^d)$, es la obtención de la función f a partir de su Transformada de Fourier. Como dijimos antes, la Transformada de Fourier es una aplicación lineal de $L^1(\mathbb{R}^d)$ en el espacio $C_0(\mathbb{R}^d)$; pero no toda función con esas características es la Transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^d)$. Es más, uno esperaría que $f(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi itx}\, dx$, pero lamentablemente $\hat{f}$ no tiene por qué ser integrable (por ejemplo, basta tomar $d = 1$ y f la función característica de un intervalo finito).

Para responder la pregunta anterior usamos métodos de sumabilidad de integrales, por ejemplo, el método de sumabilidad de Abel o el método de sumabilidad de Gauss.

Para cada $\varepsilon > 0$ definimos la *media de Abel*, $A_\varepsilon = A_\varepsilon(f)$ como la integral:

$$A_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx. \tag{2.1}$$

Es claro que si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$

Por otro lado, esa *media de Abel* está bien definida cuando f no es integrable (por ejemplo, si asumimos que f está acotada, luego $A_\varepsilon(f)$ está definida para toda $\varepsilon > 0$).

Además su límite $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx$ puede existir incluso cuando f no es integrable.

Siempre que el límite $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx$ exista y sea finito decimos que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$ es *sumable en el sentido de Abel* hacia ese límite.

Definición 2.1.2. *Decimos que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$ es sumable y su suma es l, en el sentido de Abel, si:*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} A_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\varepsilon|x|}\, dx$$

existe y es igual a l.

Otro método de sumabilidad es la *sumabilidad de Gauss*, este método está definido mediante *la media de Gauss* (a veces llamada Gauss-Weierstrass):

$$G_\varepsilon(f) = G_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-\varepsilon|x|^2}\, dx \tag{2.2}$$

Definición 2.1.3. *Decimos que $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx$ es sumable y su suma es l, en el sentido de Gauss, si:*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} G_\varepsilon(f) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\ e^{-\varepsilon|x|^2}\, dx$$

existe y es igual a l.

Las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden expresar en una forma más general:

$$M_{\varepsilon,\phi}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\varepsilon x) f(x) dx$$

donde $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ y $\phi(0) = 1$.

Luego $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ es *sumable* y de suma l si $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} M_\varepsilon(f) = l$

LLamamos $M_{\varepsilon,\phi}(f)$ la media ϕ de esa integral. Para contestar la pregunta antes formulada, necesitamos la Transformada de Fourier de las funciones $e^{-\varepsilon|x|^2}$ y $e^{-\varepsilon|x|}$; para ello enunciamos los siguientes teoremas:

Teorema 2.1.7. *Para toda $\alpha > 0$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi\alpha|y|^2} e^{-2\pi ity}\ dy = \alpha^{-d/2} e^{-\pi|t|^2/\alpha}.$$

Notar que este teorema nos muestra que $e^{-\pi|x|^2}$ es su propia Transformada de Fourier.

Teorema 2.1.8. *Para toda $\alpha > 0$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi|y|\alpha} e^{-2\pi ity}\ dy = C_d \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{\frac{d+1}{2}}}$$

donde $C_d = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\pi^{\frac{d+1}{2}}}$.

Para $\alpha > 0$ denotamos la Transformada de Fourier de las funciones $e^{-4\pi^2\alpha|y|^2}$ y $e^{-2\pi\alpha|y|}$ por W y P, respectivamente.

Esto es,

$$W(t,\alpha) = (4\pi\alpha)^{-(d/2)}e^{-|t|^2/4\alpha}$$

y

$$P(t,\alpha) = C_d \frac{\alpha}{(\alpha^2 + |t|^2)^{\frac{d+1}{2}}}.$$

La función $W(t,\alpha)$ es llamada el *núcleo de Gauss-Weierstrass* y $P(t,\alpha)$ es llamada el *núcleo de Poisson*.

Podemos mostrar en particular que la media de Abel y la media de Gauss de la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)e^{2\pi itx}\, dx$ converge en casi todo punto y en norma a f.

La idea es expresar esas medias en términos de la convolución de f con los núcleos $W(t,\alpha)$ y $P(t,\alpha)$ y a continuación usar la teoría de la aproximación de la identidad.

En orden a obtener esas expresiones usaremos un importante resultado:

Teorema 2.1.9. ***Fórmula de multiplicación.***

Sea $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Supongamos ahora que la función ϕ en

$$M_{\varepsilon,\phi}(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(\varepsilon x)f(x)dx$$

donde $\phi \in C_0(\mathbb{R}^d)$ y $\phi(0) = 1$ es integrable y su Transformada de Fourier es $\hat{\phi} = \varphi$.

Si tenemos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$, entonces $\widehat{\delta_\varepsilon\phi}(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}) = \varphi_\varepsilon(x)$.

Por el Teorema (2.1.7) se tiene, tomando $\phi(x) = e^{-4\pi^2|x|^2}$, que $\varphi_\varepsilon(x) = W(x,\varepsilon^2)$. En cambio por el Teorema (2.1.8) se tiene, tomando $\phi(x) = e^{-2\pi|x|}$, que $\varphi_\varepsilon(x) = P(x,\varepsilon)$.

Aplicando la fórmula de multiplicación a $f(x)$ y a $e^{2\pi itx}\delta_\varepsilon\phi(x)$ y usando la propiedad de modulación de la Transformada de Fourier, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.1.10. *Si $f, \phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\varphi = \hat{\phi}$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} \phi(\varepsilon x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_\varepsilon(x-t) dx \quad .$$

En particular, para todo $\varepsilon > 0$ se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} e^{-2\pi\varepsilon|x|} \; dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) P(x-t, \varepsilon) dx$$

y para toda $\alpha > 0$ tenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} e^{-4\pi^2\alpha|x|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) W(x-t, \alpha) dx \; .$$

A continuación veremos que la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} dx$ es sumable a f para una clase mayor de métodos de sumabilidad, que incluyen la sumabilidad de Abel y de Gauss.

Mostraremos que $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} \phi(\varepsilon x) dx$ converge a f en la norma $L^1(\mathbb{R}^d)$ bajo las siguientes condiciones muy generales:

- $\phi \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
- $\hat{\phi} = \varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
- $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$

Se puede ver que el núcleo de Poisson y el núcleo de Gauss-Weierstrass cumplen esas condiciones.

Enunciamos ahora el teorema de la aproximación de la identidad.

Teorema 2.1.11. *Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ con $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$, y para $\varepsilon > 0$ sea $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$ o $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$, entonces:*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon - f\|_p = 0.$$

En particular, $u(x, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) P(x-t, \varepsilon) dt$ y $s(x, \varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) W(x-t, \varepsilon) dt$ convergen a f en norma L^p cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Observación 2.1.1. *La función $u(x,\varepsilon)$ definida sobre $\mathbb{R}^d$ con $\varepsilon > 0$ se llama* la integral de Poisson de f. *En cambio, la función $s(x,\varepsilon)$ es conocida como la* integral de Gauss-Weierstarss de f.

Demostración. Tenemos por un simple cambio de variables,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d} \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{t}{\varepsilon})dt = \int_{R^d} \varphi(u)du = 1.$$

Así, sea $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$

$$(f*\varphi_\varepsilon)(x)-f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)\varphi_\varepsilon(t)dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi_\varepsilon(t)dt = \int_{\mathbb{R}^d}(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

Entonces, usando la desigualdad de Minkowsky para integrales se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\|(f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt\Big|^p dx\Big)^{1/p} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \big|(f(x-t)-f(x))\varphi_\varepsilon(t)\big|^p dx\Big)^{1/p} dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} |\varphi_\varepsilon(t)|dt
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\|(f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} |\varphi_\varepsilon(t)|dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} \varepsilon^{-d}|\varphi(\frac{t}{\varepsilon})|dt
\end{aligned}$$

Tomando como cambio de variable $u = \frac{t}{\varepsilon}$ y $du = \frac{1}{\varepsilon^d}dt$ tenemos que:

$$\|(f*\varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon u)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} |\varphi(u)|du$$

Por otro lado, la expresión

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^p dx\Big)^{1/p} = \omega_{p,f}(h) = \omega(h)$$

es conocida como el módulo de continuidad en L^p de f.

Observar que $\omega(h)$ es una función acotada como función en h usando la desigualdad de Minkowsky;

$$\omega(h) = \big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)-f(x)|^p dx\big)^{1/p} \leq \big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x+h)|^p dx\big)^{1/p} + \big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx\big)^{1/p}.$$

Así $\omega(h) \leq 2\|f\|_{L^p}^p$.

Además, se tiene que $\lim_{|h|\longrightarrow 0} \omega(h) = 0$

En efecto, tomemos una función $g \in C_0 \cap L^p(\mathbb{R}^d)$ y sea $K = \operatorname{sop}(g)$ y $K_1 = \{x : d(x, K) \leq 1\}$.

Supongamos que $|h| < \delta$ entonces como g es continua en el compacto K_1, se tiene que es uniformemente continua;

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x+h) - g(x)|^p dx = \int_{K_1} |g(x+h) - g(x)|^p dx \leq \varepsilon^p m(K_1),$$

es decir que, si $|h| < \delta$ entonces se tiene que $\|g(x+h) - g(x)\|_p < \varepsilon$.

Tomemos ahora $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $g \in C_0$ tal que $\|f - g\|_p < \varepsilon$, ya que C_0 es denso en $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Probaremos que $\lim_{|h|\longrightarrow 0} \|f(x+h) - f(x)\|_p = 0$

En efecto,

$$\|f(x+h) - f(x)\|_p \leq \|f(x+h) - g(x+h)\|_p + \|g(x+h) - g(x)\|_p + \|g(x) - f(x)\|_p$$
$$= 2\|f(x) - g(x)\|_p + \|g(x+h) - g(x)\|_p < 3\varepsilon \quad si\ |h| < \delta.$$

Entonces si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $\lim_{|h|\longrightarrow 0} |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$.

Por lo tanto,

$$\|f * \varphi_\varepsilon(x) - f(x)\|_p \leq \int_{\mathbb{R}^d} \big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-\varepsilon t) - f(x)|^p dx\big) |\varphi(t)| dt = \int_{\mathbb{R}^d} w(-\varepsilon t)|\varphi(t)| dt.$$

Esta última igualdad tiende a cero cuando ε tiende a cero, debido al Teorema de convergencia Mayorada, ya que:

$$|w(-\varepsilon t)\varphi(t)| \leq 2\|f\|_p |\varphi(t)|$$

$$2\|f\|_p|\varphi(t)| \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} w(-\varepsilon t)|\varphi(t)| = 0$$

En cambio si $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ se tiene que:

$$(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-t) - f(x))\varphi_\varepsilon(t)dt,$$

entonces

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)||\varphi_\varepsilon(t)|dt.$$

Como f es continua en x, entonces dado $(\eta > 0)$ $(\exists \delta > 0)$ tal que $|f(x-t) - f(x)| < \eta$ si $|t| < \delta$.

Por lo tanto,

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)||\varphi_\varepsilon(t)|dt$$
$$\leq \int_{|t|<\delta} |f(x-t) - f(x)||\varphi_\varepsilon(t)|dt + \int_{|t|>\delta} |f(x-t) - f(x)||\varphi_\varepsilon(t)|dt$$

Como $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$ se tiene que:

$$|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)| \leq \eta \int_{|t|<\delta} |\varphi_\varepsilon(t)|dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\delta} |\varphi_\varepsilon(t)|dt.$$

Observemos que:

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \int_{|t|>\delta} |\varphi_\varepsilon(t)|dt = 0.$$

En efecto, usando el cambio de variable $y = \frac{t}{\varepsilon}$ se tiene que;

$$\int_{|t|>\delta} |\varphi_\varepsilon(t)|dt = \varepsilon^{-d} \int_{|t|>\delta} |\varphi(\frac{t}{\varepsilon})|dt = \int_{|y|>\delta/\varepsilon} |\varphi(y)|dy.$$

Por el Teorema de convergencia mayorada, ya que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ se tiene que:

$$\int_{|t|>\delta} |\varphi_\varepsilon(t)|dt$$

tiende a cero cuando ε tiende a cero.

Se concluye así que,

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0^+} \|(f * \varphi_\varepsilon)(x) - f(x)\|_\infty = 0.$$

$\square$

Un corolario que se sigue inmediatamente de este teorema es el siguiente:

Corolario 2.1.1. *Supongamos que $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(t)dt = 0$, entonces $\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \|f * \varphi_\varepsilon\|_p = 0$ siempre que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$ o $f \in C_0(\mathbb{R}^d) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Del Teorema (2.1.10) y del Teorema (2.1.11) obtenemos la siguiente solución al problema de la inversión de Fourier.

Teorema 2.1.12. *Si ϕ y su transformada de Fourier $\hat{\phi} = \varphi$ son integrables y $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)dx = 1$, entonces la media ϕ de la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f} e^{2\pi i t x} dt$ converge a $f(x)$ en la norma $L^1(\mathbb{R}^d)$*

En particular, la media de Abel y la media de Gauss de esa integral converge a $f(x)$ en la norma $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Enunciamos ahora el siguiente corolario, también llamado ***el Teorema de inversión de la Transformada de Fourier***.

Ya que $S(x,\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)W(x-t,\alpha)dt = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{2\pi i t x}e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}dt$ converge a $f(x)$ en $L^1(\mathbb{R}^d)$ cuando $\alpha \longrightarrow 0^+$, podemos encontrar una sucesión $\alpha_k \longrightarrow 0$ tal que $S(x,\alpha_k) \longrightarrow f(x)$ en casi todo punto de x. Si además asumimos que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, por el Teorema de convergencia mayorada tenemos:

Corolario 2.1.2. *Si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{2\pi i x t}dt$$

en casi todo punto de x.

Observación 2.1.2. *Ya que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces $\hat{f}$ es continua. Si además $\hat{f}$ es integrable, la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(t)e^{2\pi ixt}dt$ también define una función continua, en efecto la función $\hat{\hat{f}}(-x)$. De esta manera cambiando f en un conjunto de medida cero podemos obtener la igualdad en el corolario, para toda x. En otras palabras, f se puede convertir en una función continua, cambiando sus valores en un conjunto de medida cero.*

Observación 2.1.3. *Del Teorema (2.1.12) se puede deducir que si $\hat{f}(x) = 0$ para casi todo punto x, entonces $f(t) = 0$ para casi todo t.*

A partir de esta observación podemos afirmar que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow C_0(\mathbb{R}^d)$ es inyectiva.

A modo de cierre de esta sección podemos decir que:

Definición 2.1.4. *El operador definido por*

$$\mathcal{F}^{-1}(F)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi ix\xi} F(x)dx$$

se llama la Transformada de Fourier inversa.

Observación 2.1.4. *Por el teorema de inversión, si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(f) = f$ en casi todo punto.*

El problema de la inversión de Fourier también tiene solución en el sentido puntual. Para ello introducimos algunos conceptos. Primeramente enunciamos un resultado de la teoría de diferenciación de integrales de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^d$.

Proposición 2.1.4. *Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces para casi todo punto x se tiene que:*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{|t|<r} (f(x-t) - f(x))dt = 0$$

En particular vale para $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Llamaremos al conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^d : \lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{r^d} \int_{|t|<r} |f(x-t) - f(x)|dt = 0\}$$

el *Conjunto de Lebesgue* e incluye casi todos los puntos de $\mathbb{R}^d$.

Enunciamos un hecho más general, un resultado puntual que corresponde a una versión del teorema de aproximación a la identidad.

Teorema 2.1.13. *Supongamos que* $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$. *Sea* $\psi(x) = \sup \mathrm{ess}_{|t|\geq|x|}|\varphi(t)|$ *y sea* $\varepsilon > 0$, $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. *Si* $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *con* $1 \leq p < \infty$, *entonces*

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0}(f * \varphi_\varepsilon)(x) = f(x)\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(t)dt$$

siempre que x *pertenezca al conjunto del Lebesgue de* f.

En particular, la integral de Poisson $\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\ P(x-t,\varepsilon)\ dt$ *y la integral de Gauss- Weierstrass* $\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\ W(x-t,\varepsilon)\ dt$ *convergen a* $f(x)$ *cuando* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *para casi todo punto* $x \in \mathbb{R}^d$.

Se sabe que si x es un punto de continuidad de f, entonces x pertenece al conjunto de Lebesgue de f, y por lo tanto el teorema anterior vale también para todo punto de continuidad de f. Si además asumimos que $\hat{f} \geq 0$, se sigue por el Lema de Fatou que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Así la integral $\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)e^{2\pi itx}dx$ define una función continua de t que es igual a $f(t)$ para casi todo punto x, por el Corolario (2.1.2). Por lo tanto obtenemos el siguiente resultado útil:

Corolario 2.1.3. *Supongamos que* $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $f \geq 0$.

Si f *es continua en el 0, entonces* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *y*

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)e^{2\pi itx}dx$$

para casi todo t *(es decir en cada punto de Lebesgue* f*). En particular,* $f(0) = \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(x)dx$.

Una consecuencia inmediata del corolario anterior y las fórmulas del teorema (2.1.10) es:

Corolario 2.1.4. *Para todo* $\alpha > 0$ *tenemos que*

a) $\int_{\mathbb{R}^d} W(x,\alpha)e^{2\pi itx}dx = e^{-4\pi^2\alpha|t|^2}$

b) $\int_{\mathbb{R}^d} P(x,\alpha)e^{2\pi itx}dx = e^{-2\pi\alpha|t|}$

2.2. La teoría de la Transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y el Teorema de Plancherel

Las funciones de cuadrado integrables no tienen por qué ser integrables, por lo tanto la definición de la Transformada de Fourier podría no tener sentido. Sin embargo, la Transformada de Fourier tiene una definición natural sobre $L^2(\mathbb{R})$ y una teoría en particular elegante.

Vamos a presentar los resultados más importantes y solamente demostraremos aquellos que nos aporten alguna técnica para el desarrollo de los capítulos siguientes.

Si además de ser integrable, asumimos que f es de cuadrado integrable, entonces $\hat{f}$ debe ser también de cuadrado integrable. En efecto tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.2.1. *Si $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Este teorema afirma que la Transformada de Fourier es un operador lineal acotado sobre el subespacio denso $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Además existe una extensión acotada, $\mathcal{F}$ de este operador a todo $L^2(\mathbb{R}^d)$. $\mathcal{F}$ se llamará *la Transformada de Fourier sobre* $L^2(\mathbb{R}^d)$. Usaremos la notación $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$ siempre que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, existe una sucesión $(f_n)_{n\geq 1} \subseteq L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{n\longrightarrow +\infty} f_n = f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, esto se debe a que $\overline{L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Por ejemplo:

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{si } |x| > n \end{cases}$$

En efecto,

$$\|f_n - f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_{|x|>n} |f(x)|^2 dx$$

tiende a cero cuando n tiende a más infinito.

Como $(f_n) \subseteq L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces será (f_n) una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Además se tiene que $\lim_{n,m\longrightarrow+\infty}\|\hat{f_n}-\hat{f_m}\|_2=\|f_n-f_m\|_2=0$ Por lo que se tiene que $(\hat{f_n})$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces como $L^2(\mathbb{R}^d)$ es un espacio completo, existe $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\hat{f_n}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Sea $\hat{f}=\lim_{n\longrightarrow+\infty}\hat{f_n}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Es decir, $\hat{f}$ es el límite en $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la sucesión $\hat{f_n}$ definida por:

$$\hat{f_n}(x)=\int_{|t|\leq n}f(t)e^{-2\pi ixt}dt=\int_{\mathbb{R}^d}f_n(t)e^{-2\pi ixt}dt$$

Como dijimos antes, $\hat{f}=\mathcal{F}(f)$ se llamará la Transformada de Fourier de f.

Observar también que:

1) $\|\hat{f_n}\|_2=\|f_n\|_2$ para todo $n\in\mathbb{N}$ implica que $\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2$

2) $\hat{f}$ no depende de la sucesión elegida.

En efecto, sea $(g_n)\subseteq L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{n\longrightarrow+\infty}g_n=f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned}
&\|\hat{g_n}-\hat{f}\|_2\leq\|\hat{g_n}-\hat{f_n}\|_2+\|\hat{f_n}-\hat{f}\|_2=\|g_n-f_n\|_2+\|\hat{f_n}-\hat{f}\|_2\\
&\leq\|g_n-f\|_2+\|f-f_n\|_2+\|\hat{f_n}-\hat{f}\|_2
\end{aligned}$$

Esta última igualdad tiende a cero cuando n tiende a más infinito, por lo tanto se tiene que: $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\hat{g_n}=\hat{f}$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Observar que si $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$, la nueva definición no cambia la Transformada de Fourier porque se puede tomar $f_n=f$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por lo tanto, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2. ***Teorema de Plancherel.***

La Transformada de Fourier definida en $L^1\cap L^2(\mathbb{R}^d)$ se extiende univocamente a $L^2(\mathbb{R}^d)$ y verifica para toda función $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ que:

$$\|\hat{f}\|_2=\|f\|_2.$$

Un operador lineal sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$ que es una isometría y una función sobreyectiva en $L^2(\mathbb{R}^d)$ es llamado un **operador unitario.**

Es una consecuencia inmediata del Teorema (2.2.2) que $\mathcal{F}$ sea una isometría. Además tenemos la propiedad de que $\mathcal{F}$ es sobreyectiva.

Teorema 2.2.3. *a) La Transformada de Fourier es un operador unitario sobre* $L^2(\mathbb{R}^d)$.

b) La inversa de la Transformada de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ *puede obtenerse escribiendo:*

$$\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \mathcal{F}(g)(-x) \qquad \text{para toda } g \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Demostración. Ya que $\mathcal{F}$ es una isometría, es decir

$$\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|f\|_2$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces su rango, $R(\mathcal{F}) = \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ es un subespacio cerrado en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si este subespacio no fuera todo $L^2(\mathbb{R}^d)$, como $R(\mathcal{F})$ es cerrado, entonces $L^2(\mathbb{R}^d) = R(\mathcal{F}) \oplus R(\mathcal{F})^{\perp}$ y como $R(\mathcal{F}) \neq L^2(\mathbb{R}^d)$, podríamos encontrar una función g tal que $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx = 0$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y tal que $\|g\|_2 \neq 0$.

Por la fórmula de multiplicación se tiene que para toda función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, se verifica que

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x)dx = 0,$$

ya que la fórmula de multiplicación se extiende a $L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces se concluye que, $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x)dx = 0$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto $\hat{g} = 0$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Contradice así que $\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 \neq 0$.

Para la parte b) notar que, ya que $\mathcal{F}$ es un operador unitario, preserva el producto interno $< u, v >= \int_{\mathbb{R}^d} u(x)\bar{v}(x)dx$.

Sea g cualquier función en $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Sea f_n la sucesión dada por $f_n(x) = \int_{|t| \leq n} \hat{f}(t)e^{2\pi ixt}dt$.

Claramente cada $f_n \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y f_n converge en $L^2(\mathbb{R}^d)$ a la función $\tilde{f}$ dada por $\tilde{f}(x) = \mathcal{F}(\hat{f})(-x)$ Luego,

$$
\begin{aligned}
< g, \tilde{f} > &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} < g, f_n > \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \Big(\int_{|t| \leq n} \overline{\hat{f}}(t) e^{-2\pi i t x} dt \Big) dx \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{|t| \leq n} \overline{\hat{f}}(t) \Big(\int_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-2\pi i t x} dx \Big) dt \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{|t| \leq n} \hat{g}(t) \overline{\hat{f}}(t) dt = < \hat{g}, \hat{f} > = < g, f >
\end{aligned}
$$

Esto claramente implica que,

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x) = \tilde{f}(x) = (\mathcal{F} \hat{f})(-x)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

Vemos que el problema de invertir la Transformada de Fourier tiene una simple y elegante solución en $L^2(\mathbb{R}^d)$. En vista a lo desarrollado en la sección anterior, es lógico preguntarse si existe una solución que implique conceptos de sumabilidad también.

Por ejemplo ya que $e^{-\delta|x|}$, como una función de x, es de cuadrado integrable; la media de Abel de la integral $\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x) e^{2\pi i t x} dx$ está bien definida. Nos podemos preguntar entonces ¿Es verdad que converge a f en $L^2(\mathbb{R}^d)$ o en casi todo punto? La respuesta es afirmativa y se sigue inmediatamente de los teoremas (2.1.11) y (2.1.13), una vez que la identidad en el teorema (2.1.10) se establece para funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pero este resultado puede ser demostrado de la misma manera que el teorema (2.1.10) usando la extensión en $L^2(\mathbb{R}^d)$ de la fórmula de multiplicación. A modo de conclusión enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.4. *Si f está definida en $L^2(\mathbb{R}^d)$, se tiene que $\widehat{\hat{f}}(x) = f(-x)$ como funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y, por tanto en casi todo punto. En particular,*

$$f(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-n}^{n} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi$$

como límite en L^2.

2.3. La Transformada de Fourier en $L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$ y la desigualdad de Hausdorff-Young

Teniendo definida la Transformada de Fourier para funciones en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y para funciones en $L^2(\mathbb{R}^d)$, podemos definir la Transformada de Fourier sobre la clase $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$, que consiste de todas las funciones $f = f_1 + f_2$ donde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

En efecto, tomamos $\widehat{f_1 + f_2} = \hat{f_1} + \hat{f_2}$ y veamos que está bien definida la Transformada de Fourier sobre $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$.

Si $g_1 + g_2 = f_1 + f_2$ con $g_i \in L^i(\mathbb{R}^d)$ con $i = 1, 2$; entonces $g_1 - f_1 = g_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ya que las dos definiciones de la Transformada de Fourier coinciden sobre $L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, tenemos que $\hat{g_1} - \hat{f_1} = \hat{f_2} - \hat{g_2}$; por lo tanto $\hat{f_1} + \hat{f_2} = \hat{g_1} + \hat{g_2}$.

Observar que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$ se puede descomponer en suma de dos funciones, una en $L^1(\mathbb{R}^d)$ y otra en $L^2(\mathbb{R}^d)$. Una manera de hacerlo es la siguiente:

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, el conjunto $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ tiene medida finita porque en otro caso la integral $|f|^p$ sería infinita; por lo tanto definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin E \\ 0 & \text{si } x \in E \end{cases}$$

Está claro que $f = f_1 + f_2$ y además que,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)|dx = \int_E |f(x)|dx \leq \big(\int_E |f(x)|^p dx\big)^{1/p} \big(m(E)\big)^{1/p'}$$

utilizando la desigualdad de Hölder, por lo que $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, y

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_2(x)|^2 dx = \int_{E^c} |f(x)|^2 dx \leq \int_{E^c} |f(x)|^p dx < \infty$$

esto se debe a que $|f(x)| \leq 1$ en E^c y por lo tanto, $|f(x)|^2 \leq |f(x)|^p$. Así se concluye que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definimos $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ donde $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y como ya vimos la definición no depende de la descomposición. Por lo tanto, la Transformada de Fourier está bien definida sobre $L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$.

Como se tiene que $L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d) + L^2(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$, se sigue que la Transformada de Fourier está definida para todo $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$.

Observar que el problema de la inversión puede ser visto, también en este caso, en términos de la media de Abel y/ o de la media de Gauss. Además el Teorema (2.1.4) tiene la siguiente extensión:

Teorema 2.3.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$, entonces $h = f * g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{h} = \hat{f}.\hat{g}$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$.*

Aunque la definición sólo nos dice que la Transformada está en $L^1 + L^2$, en realidad existe un resultado más preciso, que dice que $\hat{f}$ está en $L^{p'}$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Teorema 2.3.2. ***Teorema de Hausdorff-Young.***

Si $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < 2$, entonces $\hat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ y

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \qquad \text{para toda } f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

Para realizar la demostración de este teorema debemos enunciar un Teorema de interpolación **[StWe]**.

Teorema 2.3.3. ***Teorema de interpolación de Riesz-Thorin.***

Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ con $0 < \theta < 1$ y p, q tal que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

Si T es un operador lineal de $L^{p_0} + L^{p_1}$ en $L^{q_0} + L^{q_1}$ tal que:

$$\|Tf\|_{q_0} \leq M_0 \|f\|_{p_0}$$

para toda función $f \in L^{p_o}(\mathbb{R}^d)$ *y*

$$\|Tf\|_{q_1} \leq M_1 \|f\|_{p_1}$$

para toda función $f \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$

Entonces:

$$\|Tf\|_q \leq M_0^{1-\theta}\ M_1\ \|f\|_p$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$

A partir de este resultado demostramos a continuación el Teorema de Hausdorff- Young.

Demostración. **Demostración del teorema de Hausdorff-Young.**

Sabemos que

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F} & : & L^1 & \longrightarrow & L^\infty \\ & & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

tal que $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F} & : & L^2 & \longrightarrow & L^2 \\ & & f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

tal que $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Además todo $1 < p < 2$ se puede escribir de la forma: $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{\theta}{2}$ con $0 < \theta < 1$. Además

$$\frac{1-\theta}{\infty} + \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{p'} = 1 - \frac{1}{p}.$$

Por lo tanto, por el Teorema de Riesz-Thorin se tiene que,

$$\mathcal{F} : L^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

y

$$\|\hat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p \qquad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^d).$$

□

El proceso visto en esta sección, nos dice que podemos definir la Transformada de Fourier para funciones en $L^1 + L^2$ y para funciones en $L^p(\mathbb{R}^d)$ donde $1 < p < 2$; pero no permite hacerlo en L^p si $p > 2$. De hecho, no a toda función en esos espacios L^p se le puede asignar una Transformada de Fourier que sea una función y, por lo tanto la definición trabaja con objetos más generales que las funciones, a ser las distribuciones.

En efecto, si existe $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ (para algún $p > 2$), cuya Transformada de Fourier, como una distribución, fuera una función; por el Teorema del gráfico cerrado se tendría que es válida la desigualdad:

$$\int_{|x|\leq 1} |\hat{f}(x)|dx \leq A\|f\|_p \quad \text{para toda } f \in L^p(\mathbb{R}^d) \ \ \textit{con } p > 2. \tag{2.3}$$

Para contradecir esta desigualdad tomamos $d = 1$ y $f(x) = \frac{e^{-\pi x^2(1+i\delta)}}{\sqrt{1+i\delta}}$ y obtenemos por el teorema 2.1.7 que $\hat{f}(x) = e^{-\pi(1+i\delta)x^2}$. Pero, $\int_{|x|\leq 1} |\hat{f}(x)|dx = A_1$ y $\|f\|_p \leq A_2\delta^{1/p-1/2}$, y cuando tomamos $\delta \longrightarrow \infty$ contradecimos la desigualdad (2.3) si $p > 2$.

2.4. La Transformada de Fourier y el espacio de las distribuciones temperadas

En esta última sección del capítulo 2 extendemos la definición de la Transformada de Fourier al espacio de las distribuciones temperadas.

Empezamos con el concepto de distribución, para ello definimos:

Dado un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ definimos

$$C^\infty(K) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)/\mathrm{sop}(u) \subseteq K\}$$
$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \bigcup \{C^\infty(K) \ \ \textit{con } K \subseteq \mathbb{R}^d \textit{ compacto}\}$$

Definición 2.4.1. *$(u_j)_{j\geq 1}$ en $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ converge en $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $u_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ si y solo si:*

a) Existe $K \subseteq \mathbb{R}^d$ compacto tal que sop$(u_j) \subseteq K$ para toda $j \geq 1$.

b) Para toda $\alpha \in \mathbb{N}_0(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $D^\alpha(u_j) \rightrightarrows D^\alpha(u_0)$ cuando $j \longrightarrow +\infty$.

Definición 2.4.2. *Una funcional lineal* $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una* ***distribución*** *si y solo si* $T(u_j) \longrightarrow 0$ *cuando* $j \longrightarrow +\infty$.

Notamos

$$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) = \{T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}/\ T \text{ es una distribución}\}.$$

Definición 2.4.3. *Dados* $K \subseteq \mathbb{R}^d$ *compacto,* $m \in N_0(\mathbb{R}^d)$ *se define la seminorma* $p_{m,K}(u)$ *como:*

$$p_{m,K}(u) = \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)|$$

con $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 2.4.1. *Sea* $T : C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funcional lineal. Entonces:*

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *si y solo si* $(\forall K \subseteq \mathbb{R}^d)$ *compacto* $\exists m \in \mathbb{N}_0,\ c = c(m, K) > 0$ *tal que :*
$| < T, u > | = |T(u)| \leq c.p_{m,K}(u) \quad \forall u \in C_c^\infty(K)$.

Observación 2.4.1. *Definiendo una topología apropiada en* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *compatible con la definición (2.4.1) y denotando* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *al conjunto* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *con la topología comentada, se tiene que una sucesión* $(u_j)_{j\geq 1} \subseteq \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *converge a* u_0 *en* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ *si y solo si lo hace en* $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ *en el sentido de la definición (2.4.1).*
Con esta notación una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ *es una funcional lineal y continua sobre* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Dos ejemplos de distribuciones que vamos a usar en el último capítulo son los siguientes:

1)

$$\begin{array}{rcl} T \ : \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ < T, u > & = & u(0) \end{array}$$

T define una distribución, observar que $T = \delta$, la Delta de Dirac.

2) Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, sea

$$\begin{array}{rcl} T_f : \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ < T_f, u > & = & \int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(x)dx \end{array}$$

T define una distribución.

Antes de definir el espacio de las funciones test, daremos la definición del soporte de una distribución.

Definición 2.4.4. *El **soporte de una distribución** $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es el menor conjunto cerrado $K \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que "$u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y $\mathrm{sop}(u) \subseteq K^c$, entonces $< T, u >= 0$".*

La idea básica en la teoría de las distribuciones es considerar como funcionales lineales en un espacio de funciones regulares, las llamadas "funciones test". En este espacio se comportan bien : la diferenciación, la Transformada de Fourier, la convolución, la traslación, la dilatación, etc.

A continuación definimos tal espacio,

Definición 2.4.5. *Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la colección de funciones $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ y tal que $\sup_x |x^\alpha D^\beta u(x)| < \infty$ $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d)$.*

*$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se llama el **espacio de Schwartz o el espacio de las funciones test.***

Enunciamos algunas observaciones con respecto a este espacio, pero sin realizar las demostraciones:

1) Este conjunto no es vacío, pues la familia de funciones $\varphi_\alpha(x) = e^{-\alpha|x|^2}$ pertenecen a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Observar que si tomamos $\varphi_1(x) = e^{-|x|^2}$ pertenece al espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ pero no al espacio $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

2) Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ son rapidamente decrecientes (en el sentido que ella y todas sus derivadas decrecen más rápido que la inversa de cualquier polinomio).

3) Sean $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \textit{u es de soporte compacto}\}$ y $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) = \{u \in C^\infty : \lim_{|x| \longrightarrow +\infty} u(x) = 0\}$, entonces se tiene:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^d).$$

4) Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ definimos la seminorma $p_{\alpha,\beta}(u) = \sup_x |x^\alpha D^\beta u(x)|$. Resulta así que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un espacio vectorial topológico.

Resulta que si $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $p_{\alpha,\beta}(u) < \infty$ para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$.

Definición 2.4.6. *Una sucesión $(u_j)_{j\geq 1}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ converge en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ a u_0 si y solo si $p_{\alpha,\beta}(u_j - u_0) \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow +\infty$ para toda $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$.*

Otras observaciones que podemos decir con respecto al espacio de las funciones test son las siguientes:

1)Para cada $1 \leq p \leq \infty$ resulta que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$.

2)La inclusión $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ es continua para $1 \leq p \leq \infty$.

Definición 2.4.7. *Una funcional lineal T sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua si $T(u_j) \longrightarrow 0$ cuando $j \longrightarrow +\infty$ cada vez que $u_j \longrightarrow 0$ siempre que $j \longrightarrow +\infty$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.*

Definimos a continuación el espacio de las distribuciones temperadas:

Definición 2.4.8. *Una funcional lineal y continua sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se llama* ***distribución temperada****.*

La clase formada por todas las distribuciones temperadas se denota $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Enunciamos un teorema que muestra cuando una funcional sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua:

Teorema 2.4.2. *Una funcional lineal T sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua si y solo si existe $c > 0$ y $m \in N_0$ tal que:*

$$| < T, u > | \leq c \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} p_{\alpha,\beta}(u) \quad \text{para toda } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Podemos enunciar las siguientes observaciones:

1) Si $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ entonces se tiene que $u|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$.

2) No vale en general que dada una distribución se la pueda extender a una distribución temperada.

3) Toda distribución de soporte compacto es una distribución temperada.

4) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en el espacio $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

5) Sea $(T_j)_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.Para cada $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene que $(< Tu_j, u >)_{j\geq 1}$ es convergente si y solo si existe $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{j\longrightarrow+\infty} < T_j, u >=< T, u >$ para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

6) Cualquier $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p < \infty$ se identifica con una distribución temperada T_f definida por:

$$< T_f, u >= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)u(x)dx \quad \textit{con } u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Veamos ahora **la Transformada de Fourier en el espacio de las funciones Schwartz**:

Para un polinomio $p(x) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ y $a_{\alpha} \in \mathbb{R}$, tomamos el operador diferencial asociado a D, es decir $P(D) = \Sigma_{\alpha} a_{\alpha} D^{\alpha}$.

Si tomamos $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y $p(x)u(x)$, podemos considerar $P(D)u(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$. Tenemos el siguiente lema:

Lema 2.4.1. *Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y P un polinomio. Se tiene que:*

a) $\widehat{P(D)u}(\xi) = P(2\pi i \xi)\hat{u}(\xi)$

b) $[P(D)\hat{u}](\xi) = P(\widehat{-2\pi i x)u(x)}(\xi)$

Veamos el siguiente teorema,

Teorema 2.4.3. *La aplicación*

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ & u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$$

es una biyección continua.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ con $\alpha, \beta \in N_0^d$, por lo tanto por el lema anterior ítem b) tenemos que:

$$(2\pi i \xi)^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(\xi) = (2\pi i \xi)^{\alpha} [\widehat{(-2\pi i x)^{\beta} u(x)}](\xi),$$

y por el mismo lema ítem a) obtenemos,

$$(2\pi i \xi)^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(\xi) = [\widehat{D_x^{\alpha}((-2\pi i x)^{\beta} u(x))}](\xi).$$

Entonces

$$p_{\alpha,\beta}(\hat{u}) = \sup_{\xi} |\xi^{\alpha} D^{\beta} \hat{u}(\xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \| D^{\alpha}[(\widehat{-2\pi i x)^{\beta}} u] \|_1 < \infty.$$

Así se tiene que $\hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, y por lo tanto se concluye que $\mathcal{F}$ está bien definida.

Por otro lado, debido a que las aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d): & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ u & \mapsto & D^\alpha[(-2\pi i x)^\beta u(x)] \end{array}$$

y

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$$

son continuas, tenemos que la aplicación

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ & u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$$

es continua también.

Resta ver que la función $\mathcal{F}$ es biyectiva para ello, por el Teorema de inversión se sabe que si $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \xi x} \hat{f}(\xi) d\xi \ en\ c.t.p\ x.$$

Como $u, \hat{u} \in \mathcal{S} \subseteq L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces,

$$\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}(u) = u$$

y

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}) = u$$

(donde $\mathcal{F}^{-1}(\hat{u})(\xi) = \mathcal{F}(u)(-\xi)$). Así,

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \\ & u & \mapsto & \hat{u} \end{array}$$

resulta biyectiva. □

Definimos,

Definición 2.4.9. *Dada una distribución $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definimos su Transformada de Fourier $\hat{T}$ como:*

$$< \hat{T}, u > = < T, \hat{u} >$$

para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Por el teorema anterior, se tiene que

$$\begin{array}{rccc} \hat{T}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \\ & u & \mapsto & < T, \hat{u} > \end{array}$$

es continua y por lo tanto $\hat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Observación 2.4.2. *Dada $\alpha \in N_0^d$. Se tiene que:*

1) $\widehat{D^\alpha(T)} = (2\pi i x)^\alpha \hat{T}$ para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

2)$D^\alpha \hat{T} = [(-\widehat{2\pi i x)^\alpha} T]$ para toda $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Un ejemplo que podemos dar es el siguiente:

Sean $a \in \mathbb{R}^d$ y $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces

$$< \hat{\delta_a}, u >=< \delta_a, \hat{u} >= \hat{u}(a) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i a x} u(x) dx$$

para toda $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Así se tiene que $\hat{\delta_a} = e^{-2\pi i a x}$

Observación 2.4.3. *Puesto que el operador $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es sobreyectivo y como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces se tiene que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ es también sobreyectivo.*

Concluimos este capítulo enunciando el siguiente teorema:

Teorema 2.4.4. *La transformada de Fourier es una aplicación lineal, biyectiva y continua de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, con inversa continua.*

Sabemos que $L^p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, o sea que toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 \leq p \leq \infty$, define una distribución en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

En consecuencia tiene sentido $\hat{f} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Si para $R > 0$ se tiene que $f_R(x) = \chi_{B(0,R)}(x) f(x)$. Entonces $\lim_{R \longrightarrow +\infty} f_R(x) = f(x)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, por lo que por el teorema anterior se tiene que $\lim_{R \longrightarrow +\infty} \hat{f}_R(x) = \hat{f}(x)$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Como cada $f_R(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos $\hat{f}(\xi) = \lim_{R \longrightarrow +\infty} \int_{B(0,R)} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Capítulo 3

Desigualdades en norma con pesos para la Transformada de Fourier. Parte 1

Como dijimos anteriormente, B. Munckenhoupt estudió el problema de caracterizar aquellas funciones no negativas u y v, para las cuales existe algún p, con $1 \leq p < \infty$, tal que la desigualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \leq C \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \ v(x) \ dx \tag{3.1}$$

tiene validez para toda función f integrable, donde $\hat{f}$ denota la transformada de Fourier de f.

En este capítulo estudiamos las desigualdades en norma con pesos para la Transformada de Fourier cuando dichos pesos son funciones no negativas, más precisamente, encontraremos algunas condiciones necesarias y suficientes para la validez de la desigualdad (3.1) cuando $v = 1$. (El caso $u = 1$ se puede encontrar en **[AgHa]** y los resultados son obtenidos de manera similar a los estudiados en este capítulo).

Si $v = 1$ y $1 < p < 2$, obtenemos una condición necesaria en la forma

$$\Big(\sum_{-\infty}^{+\infty} \ \big(\int_{rk}^{r(k+1)} \ u(x) \ dx \big)^b \Big)^{1/b} \leq cr^{p-1}$$

donde $r > 0$ y $b = \frac{2}{2-p}$.

Si $v = 1$ y $1 \leq p$, obtenemos una condición suficiente en la forma

$$\int_E u(x)\ dx \leq cm(E)^{p-1}$$

donde E es cualquier conjunto medible.

Observaremos también que las condiciones suficientes halladas resultan generalizaciones de las desigualdades de Paley y del Teorema de Pitt.

Cabe destacar que se trabajará en una dimensión, y que los pesos u y v, corresponden a funciones medibles no negativas y la constante C que aparecerá en los teoremas y demostraciones dependerá del exponente p y no de las funciones generales consideradas. Por último la Transformada de Fourier de f se denotará $\hat{f}$ y su inversa correspondiente con $\check{f}$.

3.1. Comentario preliminar

Cuando consideramos desigualdades del tipo (3.1) es evidente que el comportamiento particular de las traslaciones y dilataciones bajo la Transformada de Fourier se reflejará sobre las propiedades de u y v.

Recordemos que en el capítulo anterior vimos que entre las propiedades algebraicas que goza la Transformada de Fourier, se tienen:

- 1) Si $\tau_h f(x) = f(x-h)$ entonces $\widehat{\tau_h f}(x) = e^{-2\pi i h x}\hat{f}(x)$.
- 2) Si $g(x) = e^{2\pi i x h} f(x)$ entonces $\hat{g}(\xi) = (\tau_h \hat{f})(x)$.
- 3) $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1}\ f(\frac{x}{\varepsilon})$ para $\varepsilon > 0$, tenemos que $\widehat{f_\varepsilon}(x) = \hat{f}(\varepsilon x)$

Además se tiene usando el Teorema de inversión, que:

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x).$$

Supongamos ahora que $u = v$ es localmente integrable y veamos entonces que si $u \neq 0$ el operador $\mathcal{T} : L^p_u(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p_u(\mathbb{R})$ definido por $\mathcal{T}(f) = \hat{f}$ no está acotado cuando $p \neq 2$.

En efecto, supongamos que $\mathcal{T}$ está acotado, es decir que vale la desigualdad (3.1) y que $u = v$ es localmente integrable, veamos que si $u \neq 0$ necesariamente $p = 2$.

Usando 2) y 3) y dos veces la desigualdad (3.1) es fácil de ver que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(-x+a)|^p u(x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x+b)|^p u(x) dx$$

para cualquier a y b.

En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(-x+a)|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |f(-(x-a))|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\hat{f}}(x-a)|^p \ u(x) \ dx$$

Por otro lado, tomando $g(x) = f(x-a)$, se tiene que

$$\hat{g}(x) = e^{-2\pi iax} \hat{f}(x).$$

Así,

$$\hat{\hat{g}}(x) = \left\{e^{-2\pi iax} \hat{f}(x)\right\}\widehat{}$$

Continuando la cuenta, obtenemos que:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} |f(-x+a)|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\hat{f}}(x-a)|^p \ u(x) \ dx \\ &= \int |\left\{e^{-2\pi iax} \hat{f}(x)\right\}\widehat{}|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\hat{g}}(x)|^p \ u(x) \ dx. \end{aligned}$$

Usando ahora la desigualdad (3.1) resulta que,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\hat{g}}(x)|^p \ u(x) \ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(x)|^p \ u(x) \ dx$$

Siguiendo con la cuenta anterior tenemos que,

$$\begin{aligned} &C \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(x)|^p \ u(x) \ dx = C \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi iax} \hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi ibx} e^{-2\pi ix(b+a)} \hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}} |e^{-2\pi i(b+a)x}|^p \ |e^{2\pi ibx} \hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi ibx} \hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \end{aligned}$$

Luego usando nuevamente la desigualdad (3.1) obtenemos que

$$C\int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi ibx}\hat{f}(x)|^p\ u(x)\ dx = C\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x+b)|^p\ u(x)\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x+b)|^p\ u(x)\ dx.$$

Concluimos asi que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(-x+a)|^p u(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x+b)|^p u(x)dx$$

Si ahora tomamos $f(x) = \chi_{(-\varepsilon,\ \varepsilon)}(x)$, podemos concluir que para todo $\varepsilon > 0$ y para todas a y b:

$$\frac{1}{2\varepsilon}\int_{|x-a|<\varepsilon} u(x)\ dx \leq \frac{C}{2\varepsilon}\int_{|x-b|<\varepsilon} u(x)\ dx$$

esto es lo mismo que decir que, para todo $\varepsilon > 0$ y para todas a y b:

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(a)|}\int_{B_\varepsilon(a)} u(x)\ dx \leq \frac{C}{|B_\varepsilon(b)|}\int_{B_\varepsilon(b)} u(x)\ dx$$

Como u es localmente integrable, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue se tiene que:

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{|B_\varepsilon(b)|}\int_{B_\varepsilon(b)} u(x)\ dx = u(b) \quad \textit{para casi todo } b.$$

Entonces existe b_0 tal que $0 < M(b_0) = \sup_{0<\varepsilon<1}\frac{1}{|B_\varepsilon(b_0)|}\int_{B_\varepsilon(b_0)} u(x)\ dx < \infty$ y

$$\lim_{\varepsilon\longrightarrow 0}\frac{1}{|B_\varepsilon(b_0)|}\int_{B_\varepsilon(b_0)} u(x)\ dx = u(b_0).$$

Además $u(b_0) \leq M(b_0) < \infty$.

Por otro lado, $\frac{1}{|B_\varepsilon(a)|}\int_{B_\varepsilon(a)} u(x)\ dx \leq \frac{C}{|B_\varepsilon(b_0)|}\int_{B_\varepsilon(b_0)} u(x)\ dx$.

Entonces nuevamente por el Teorema de diferenciación se tiene que, para casi todo a:

$$u(a) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(a)|} \int_{B_\varepsilon(a)} u(x)\ dx \leq C \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(b_0)|} \int_{B_\varepsilon(b_0)} u(x)\ dx$$
$$\leq C\ u(b_0) \leq C\ M(b_0) < \infty.$$

Por lo tanto, para casi todo a se tiene que $u(a) \leq C\ u(b_0) < \infty$

Si $u \neq 0$ (es decir el conjunto donde u es distinto de cero tiene medida positiva), entonces existe a_0 tal que:

$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(a_0)|} \int_{B_\varepsilon(a_0)} u(x)\ dx \neq 0 > 0.$

En efecto, por el Teorema de Diferenciación se tiene que

$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_\varepsilon(a)|} \int_{B_\varepsilon(a)} u(x)\ dx = u(a)$ para casi todo a y como $u \neq 0$, resulta que existe a_0 tal que $u(a_0) > 0$.

Además, para casi todo b tenemos que

$$\frac{1}{|B_\varepsilon(a_0)|} \int_{B_\varepsilon(a_0)} u(x)\ dx \leq \frac{C}{|B_\varepsilon(b)|} \int_{B_\varepsilon(b)} u(x)\ dx.$$

Así tomando límite cuando ε tiende a 0, obtenemos que $0 < u(a_0) \leq Cu(b)$.

Concluimos así que para casi todo a, $\quad u(a) \leq C\ u(b_0) < \infty$ y para casi todo b, $\ 0 < u(a_0) \leq Cu(b)$.

Entonces existen constantes $A \neq 0$ y $B \neq 0$ tal que:

$$A \leq u(x) \leq B \ \ para\ casi\ todo\ x.$$

Ahora si tomamos $f(x) = e^{-\pi x^2}$, sabemos que $\hat{f}(x) = f(x)$. Como $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon})$ entonces $\hat{f}_\varepsilon(x) = \hat{f}(\varepsilon x)$.

Resulta así que:

1) $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\varepsilon(x)|^p dx = \frac{C_1}{\varepsilon}$.

2) $\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^p\ dx = \frac{C_2}{\varepsilon^{p-1}}$.

En efecto como $\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\ du = \sqrt{\pi}$, se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\varepsilon(x)|^p \; dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\varepsilon x)|^p \; dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{-\pi(\varepsilon x)^2}|^p \; dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\varepsilon^2 x^2 p} \; dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-(\sqrt{\pi p} \; \epsilon \; x)^2} \; dx.$$

Usando el cambio de variables $u = \sqrt{\pi p} \; \varepsilon x$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_\varepsilon(x)|^p \; dx = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi p}} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \; du = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi p}}\sqrt{\pi} = \frac{C_1}{\varepsilon}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^p \; dx = \int_{\mathbb{R}} |\frac{1}{\varepsilon} f(\frac{x}{\varepsilon})|^p \; dx = \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} |e^{-\pi(\frac{x}{\varepsilon})^2}|^p \; dx$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} e^{-(\frac{\sqrt{\pi p}}{\varepsilon} x)^2} \; dx.$$

Tomando el cambio de variables $u = \frac{\sqrt{\pi p}}{\varepsilon} x$, entonces se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^p \; dx = \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2} \; du = \frac{1}{\varepsilon^p} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi p}}$$
$$= \frac{C_2}{\varepsilon^{p-1}}$$

Aplicando la desigualdad (3.1) y usando que $A \leq u(x) \leq B$ en c.t.p x y que $u = v$, tenemos que para todo $\varepsilon > 0$

$$\frac{C_1}{\varepsilon} \leq C \frac{C_2}{\varepsilon^{p-1}} \tag{3.2}$$

De modo que si $u \neq 0$ necesariamente se tiene que $p = 2$. En efecto, si $p < 2$ y $\varepsilon < 1$, entonces $\varepsilon < \varepsilon^{p-1}$ implica que $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} < \frac{1}{\varepsilon}$, llegando a un absurdo debido a la desigualdad (3.2), en cambio si $p > 2$ y $\varepsilon > 1$, entonces $\varepsilon < \varepsilon^{p-1}$ implica que $\frac{1}{\varepsilon^{p-1}} < \frac{1}{\varepsilon}$, que resulta por la misma desigualdad, un absurdo.

3.2. Una condición necesaria simple

En esta sección trabajaremos el caso cuando $v = 1$ y u es cualquier función no negativa. Deseamos obtener características sobre la función no negativa u si la desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ dx \tag{3.3}$$

es válida, donde $1 \leq p < \infty$.

Recordando el comportamiento de las traslaciones y de las dilataciones bajo la Transformada de Fourier tenemos , si tomamos $f(x) = \chi_{(-1/2r,1/2r)}(x)e^{2\pi iax}$, donde $\chi_E(x)$ denota la función característica del conjunto E, que:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-1/2r}^{1/2r} e^{-2\pi i\xi x} e^{2\pi iax} \ dx \\ &= \int_{-1/2r}^{1/2r} e^{-2\pi ix(\xi-a)} \ dx.\end{aligned}$$

Usando el cambio de variables $u = -2\pi xi(\xi - a)$ y sabiendo que $\mathrm{sen}(b) = \frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}$, entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{\frac{\pi}{r}i(\xi-a)}^{\frac{-\pi}{r}i(\xi-a)} \frac{e^u}{-2\pi i(\xi-a)} du = \frac{-1}{2\pi i(\xi-a)} e^u \Big|_{\frac{\pi}{r}i(\xi-a)}^{\frac{-\pi}{r}i(\xi-a)} \\ &= \frac{-1}{2\pi i(\xi-a)} \left[e^{\frac{-\pi}{r}i(\xi-a)} - e^{\frac{\pi}{r}i(\xi-a)}\right] \\ &= \frac{1}{\pi(\xi-a)} \mathrm{sen}(\frac{\pi}{r}(\xi-a))\end{aligned}$$

Así si $|\xi - a| \leq \frac{r}{\pi}$, se tiene que $|\hat{f}(\xi)| \geq \mathrm{sen}(1)/r$.

En efecto probar que

$$|\hat{f}(\xi)| = \Big|\frac{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{r}(\xi-a))}{\pi(\xi-a)}\Big| \geq \mathrm{sen}(1)/r,$$

es lo mismo que probar que

$$|\hat{f}(\xi)| = |\frac{\mathrm{sen}(\frac{\pi}{r}(\xi - a))}{\frac{\pi}{r}(\xi - a)}| \geq \mathrm{sen}(1)$$

y por un cálculo simple de análisis se puede demostrar que $|\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}| \geq \mathrm{sen}(1)$ si $|x| \leq 1$, concluyendo así que $|\hat{f}(\xi)| \geq \mathrm{sen}(1)/r$.

Tomando $I = \{x : |x - a| \leq \frac{r}{\pi}\}$ obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\int_I u(x)dx \leq \frac{r^p}{\mathrm{sen}(1)^{\mathrm{p}}} \int_I |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq Cr^p \int_I |f(x)|^p\ dx = Cr^{p-1}$$

En efecto, usando la desigualdad (3.3) se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\int_I u(x)\ dx = r^p \int_I \frac{1}{r^p} u(x)\ dx \leq r^p \int_I \frac{|\hat{f}(x)|^p}{\mathrm{sen}(1)^{\mathrm{p}}}\ u(x)\ dx \\
&\leq Cr^p \int_I |f(x)|^p\ dx = Cr^p \int_I |\chi_{(-1/2r,1/2r)}(x) e^{2\pi i a x}|^p\ dx \\
&= Cr^p \int_{-1/2r}^{1/2r} |e^{2\pi i a x}|^p\ dx = Cr^p(\frac{1}{2r} + \frac{1}{2r}) = Cr^{p-1}.
\end{aligned}$$

Entonces $\int_I u(x)\ dx \leq Cr^{p-1}$, donde $I = \{x : |x - a| \leq \frac{r}{\pi}\}$. Concluyendo así que u es localmente integrable.

Denotando $m(E)$, la medida del conjunto medible E, tenemos:

$$\int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}\ \textit{para cualquier intervalo } I.$$

En efecto, dado cualquier intervalo $I = (a, b)$ con $a < b$, la desigualdad se obtiene tomando el intervalo $I_c = (c - \frac{b-a}{2}, c + \frac{b-a}{2})$ con $c = \frac{a+b}{2}$.

Observemos que para $p = 1$, esta condición implica que u es integrable sobre todo $\mathbb{R}$. En efecto, si $\int_I u(x)\ dx \leq C$ para todo intervalo $I = (a, b)$ entonces $\int_{\mathbb{R}} u(x)\ dx \leq C$, y así u es integrable en $\mathbb{R}$.

Además para $p = 2$ se tiene usando el Teorema de diferenciación que u está acotada, ya que decir que $\int_{I_t} u(x)\ dx \leq C\ m(I_t)$ es lo mismo que decir

$$\frac{1}{m(I_t)} \int_{I_t} u(x)\ dx \leq C.$$

Así, como u es localmente integrable, tomando $m(I_t)$ tendiendo a 0 se tiene que el término izquierdo de la desigualdad anterior tiende a $u(t)$ con $t \in I_t$ en casi todo punto. Concluyendo asi que u debe ser acotada.

En cambio si $p > 2$ se tiene que $u(t) = 0$ *para casi todo punto.*

En efecto, $\int_{I_t} u(x)\ dx \leq Cm(I_t)^{p-1}$, por lo tanto, tomando límites en ambos lados $\lim_{m(I_t)\longrightarrow 0} \frac{1}{m(I_t)} \int_{I_t} u(x)\ dx \leq \lim_{m(I_t)\longrightarrow 0} Cm(I_t)^{p-2}$ se tiene para casi todo t que $u(t) \leq C \cdot 0$, y entonces $u(t) = 0$ para casi todo t.

3.3. Una condición suficiente cuando $v = 1$ y $1 \leq p \leq 2$

En esta sección queremos hallar condiciones suficientes para la validez de la desigualdad (3.1) considerando el caso que $1 \leq p \leq 2$ y que $v = 1$ y donde u es una función localmente integrable.

Una modificación de la demostración dada en el libro de Zygmund's **[Zy]** del Teorema de Paley descripta en el capítulo 1 de la introducción, mostrará que el siguiente teorema vale:

Teorema 3.3.1. *Sea $1 \leq p \leq 2$. Si la función u localmente integrable satisface la desigualdad $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)^{p-1}$ para cualquier conjunto medible E, entonces se tiene que:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p\ u(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx.$$

De este teorema se puede observar los siguientes hechos:

Observación 3.3.1. *1) La demostración del teorema resulta trivial si $p = 1$ o $p = 2$.*

En efecto, si $p = 1$, la condición $\int_E u(x)\ dx \leq C$ para todo conjunto medible E, implica que $u \in L^1(\mathbb{R})$. Como $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$, tenemos que:

$$\int |\hat{f}(x)|u(x)\ dx \leq \|f\|_1 \int u(x)\ dx = C \int |f(x)|\ dx.$$

En cambio si $p = 2$*, la condición* $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)$ *implica que* $\frac{1}{m(E)} \int_E u(x)\ dx \leq C$ *y tomando el límite cuando* $m(E)$ *tiende a cero, se tiene por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue que* $u(x) \leq C$ *para casi todo* x.

Por lo tanto usando el Teorema de Parseval, tenemos para casi todo x *que*

$$\int |\hat{f}(x)|^2 u(x)\ dx \leq C \int |\hat{f}(x)|^2 dx = C \int |f(x)|^2 dx,$$

2) Es interesante observar que para $p = 1$ *o* $p = 2$ *la condición simple necesaria de la sección (3.2) y la condición suficiente del Teorema (3.3.1) son equivalentes:*

En efecto, queremos ver que si $p = 1$ *ó* $p = 2$*, con* $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *se verifica*

$$\int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1} \text{ para todo intervalo } I \tag{3.4}$$

si y solo si se verifica

$$\int_E u(x)dx \leq Cm(E)^{p-1} \text{ para todo medible } E. \tag{3.5}$$

Si $p = 1$ *tenemos que* $\int_I u(x)\ dx \leq C$ *para todo intervalo* I*. Tomando* I_0 *tal que* $E \subseteq I_0$*, (por ejemplo* $I_0 = \mathbb{R}$*), obtenemos que* $\int_E u(x)\ dx \leq \int_{I_0} u(x)\ dx \leq C$ *para todo conjunto medible* E.

En cambio, si $p = 2$*, tenemos que:* $\frac{1}{m(I_t)} \int_{I_t} u(t)\ dt \leq C$ *y tomando el límite cuando* $m(I_t)$ *tiende a cero, obtenemos que* $u(t) \leq C$ *(para casi todo* t*).*

Entonces, $\frac{1}{m(E)} \int_E u(x)\ dx \leq \frac{C}{m(E)} m(E) = C.$

Reciprocamente, como vale para todo E *medible, en particular vale para todo intervalo* I.

En cambio, veremos en la siguiente sección que no podemos interpolar y obtener que ellos sean equivalentes para $1 < p < 2$.

Para realizar la demostración del **teorema 3.3.1** cuando $1 < p < 2$ necesitamos el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz más un resultado que muestra diferentes condiciones equivalentes para u. Sólo los enunciaremos, las demostraciones se encuentran en los trabajos de **[StWe]** y **[AgHa]**, respectivamente.

Teorema 3.3.2. ***Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz***

Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$ *y sea un operador* T *que transforma funciones de* $L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ *a funciones* v*-medibles, que satisfacen:*

1) T *es subaditivo:*

Para toda $f, g \in L^{p_0}(\mu) + L^{p_1}(\mu)$ *implica que*

$$|T(f+g)(x)| \leq |T(f)(x)| + |T(g)(x)|$$

para casi todo punto.

2) T *es de tipo débil* (p_0, p_0)*:*

$v(x : |Tf(x)| > \lambda) \leq \frac{C_0}{\lambda^{p_0}} \int |f(x)|^{p_0}\ d\mu$ *con* $C_0 > 0$ *constante independiente de* f *y* $\lambda > 0$

3) T *es de tipo débil* (p_1, p_1) *con constante* $C_1 > 0$.

Entonces,

Para todo p, $p_0 < p < p_1$, *existe* $C_p > 0$ *tal que*

$$\|Tf\|_{L^p(v)} \leq C_p \|f\|_{L^p(\mu)},$$

(es decir T *es de tipo fuerte* (p, p) *respecto a* (v, μ)*).*

Teorema 3.3.3. *Sea $1 < p < 2$ y sea $b = \frac{2}{2-p}$ y supongamos que u es localmente integrable. Entonces son equivalentes los siguientes hechos:*

i) $m(\{x : u(x) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^{b/2}}$ *para toda* $\lambda > 0$.

ii) $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)^{p-1}$ *para todo conjunto medible* E.

iii) Para $\alpha > b/2$, $\int_{\{x:u^{b/2}(x)\leq\lambda\}} u^{\alpha}(x)\ dx \leq C_{\alpha}\lambda^{\frac{2\alpha}{b}-1}$ *para toda* $\lambda > 0$

iv) Para cualquier $r > 0$, $\lambda > 0$,

$$\sharp(\{k : \int_{kr}^{(k+1)r} u(x)\ dx > \lambda\}) \leq C[\frac{r^{p-1}}{\lambda}]^{b/2}.$$

donde $\sharp(A)$ *denota el número de elementos del conjunto* A.

A continuación realizaremos la demostración del **teorema 3.3.1**.

Demostración. **Demostración del teorema 3.3.1**

Usaremos el teorema de interpolación de Marcinkiewicz interpolando con los exponentes $p_0 = 1$ y $p_1 = 2$.

Sea T un operador definido para $f \in L^p \cap L^1(\mathbb{R})$ mediante la fórmula:

$$Tf(x) = \begin{cases} u^{-b/2}(x)\hat{f}(x) & \text{si } u(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) = 0 \end{cases}$$

donde $b = \frac{2}{2-p}$ y $1 < p < 2$.

Fijando p, se puede ver que:

a) $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{u^b}(\mathbb{R})$ es de tipo fuerte $(2, 2)$.

En efecto, por la definición de T se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^p u^b(x)\ dx.$$

Como $|Tf(x)|^p = |u^{\frac{1}{p-2}}(x)\hat{f}(x)|^p = u^{\frac{1}{p-2}}(x)|\hat{f}(x)|^p$, entonces

$$\begin{aligned} &|Tf(x)|^p u^{\frac{2}{2-p}}(x) = u^{\frac{p}{p-2}}(x)u^{\frac{2}{2-p}}(x)|\hat{f}(x)|^p \\ &= u^{\frac{p-2}{p-2}}|\hat{f}(x)|^p = u(x)|\hat{f}(x)|^p \end{aligned}$$

Sabiendo que si $p_1 = 2$, entonces $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)$ implica que $\frac{1}{m(E)} \int_E u(x)\ dx \leq C$, y tomando límite cuando $m(E)$ tiende a 0, tenemos por el Teorema de Diferenciación que $u(x) \leq C$ para casi todo x. Sabiendo además que, en L^2 se puede usar la desigualdad de Plancharel, vista en el capítulo anterior, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^2 u^b(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 u(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\, dx = C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx.$$

Así $\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^2 u^b(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx$, por lo que se concluye:

$$\|Tf\|_{u^b}^2 \leq C\|f\|^2.$$

Por lo tanto se tiene que T es de tipo fuerte (2,2), concluyendo así que T es de tipo débil $(2, 2)$.

b) $T : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1_{u^b}(\mathbb{R})$ es de tipo débil (1,1).

En efecto,

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} = \{x : u^{\frac{1}{p-2}}(x)|\hat{f}(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : u^{\frac{1}{p-2}}(x)\|f\|_1 > \lambda\}.$$

Sabemos que $|\hat{f}(x)| \leq \|f\|_1$ implica que $u^{\frac{1}{p-2}}(x)|\hat{f}(x)| \leq u^{\frac{1}{p-2}}(x)\|f\|_1$. Entonces tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : u^{\frac{1}{p-2}}(x)\|f\|_1 > \lambda\} \\
&= \{x : u^{\frac{1}{p-2}}(x) > \frac{\lambda}{\|f\|_1}\} \\
&= \{x : u^{-b/2}(x) > \frac{\lambda}{\|f\|_1}\} = \{x : u^{b/2}(x) < \frac{\|f\|_1}{\lambda}\}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\{x : |Tf(x)| > \lambda\} \subseteq \{x : u^{b/2}(x) < \frac{\|f\|_1}{\lambda}\}.$$

Así concluimos usando la condición $ii) \Longrightarrow iii)$ del Teorema (3.3.3), que:

$$m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\})_{u^b(x)} = \int_{\{x:|Tf(x)|>\lambda\}} u^b(x)\ dx \leq \int_{\{x:u^{b/2}(x)<\frac{\|f\|_1}{\lambda}\}} u^b(x)\ dx$$
$$\leq C_b(\frac{\|f\|_1}{\lambda})^{\frac{2b}{b}-1}$$

Entonces $m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C_b}{\lambda}\|f\|_1$, y así T es de tipo débil (1,1).

Por a) y b) y usando el teorema de Interpolación de Marcinkiewcz, tenemos que para todo p, tal que $1 < p < 2$, existe una constante $C_p > 0$ tal que verifica

$$\|Tf\|_{L^p_{u^b}(\mathbb{R})} \leq C_p\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Esto es lo mismo que decir,

$$\int |Tf(x)|^p u^b(x)\ dx = \int |\hat{f}(x)|^p\ u(x)\ dx \leq C_p \int |f(x)|^p\ dx.$$

Por lo que, para todo p con $1 < p < 2$ se tiene que

$$\int |\hat{f}(x)|^p\ u(x)\ dx \leq C \int |f(x)|^p dx.$$

demostrando, junto con la observación dada anteriormente, el teorema para todo p, con $1 \leq p \leq 2$. □

3.4. No equivalencia de las condiciones anteriores cuando $1 < p < 2$

En esta sección veremos que la condición necesaria **(3.4)** y la condición suficiente **(3.5)** no son equivalentes para todo p con $1 < p < 2$. Para ello antes veamos un ejemplo donde muestra que el operador $T : f \longrightarrow \chi_E \hat{f}$, donde $E = \cup_{k=1}^{N}(2^k, 2^{k+1})$ tiene norma esencialmente equivalente (dependiendo de p) a $N^{\frac{2-p}{2p}}$.

Sea $1 < p < 2$ y sea F un conjunto medible tal que $m(F) < +\infty$. Si $u(x) = \chi_F(x)$, entonces tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}\cap F} |\hat{f}(x)|^p\ dx \leq Cm(F)^{2-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx. \qquad (3.6)$$

En efecto, tomando el operador:

$$T : L^p(\mathbb{R}) \longrightarrow L^p(\mathbb{R})$$

definido por:

$$T(f)(x) = \frac{\chi_F(x)}{m(F)^{2-p}} \hat{f}(x) \quad \text{con } f \in L^p(\mathbb{R}) \ y \ 1 < p < 2,$$

y usando el teorema de interpolación de Marcinkiewicz con $p_0 = 1$ y $p_1 = 2$, demostramos la **desigualdad 3.6**.

En efecto tenemos que:

a) $T : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ es de tipo fuerte (2,2).

Para ello usando el Teorema de Plancherel, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^2\ dx = \int |\frac{\chi_F(x)}{m(F)^{2-p}} \hat{f}(x)|^2\ dx \\
&= \frac{1}{m(F)^{(2-p)2}} \int_{\mathbb{R}\cap F} |\hat{f}(x)|^2\ dx \leq \frac{1}{m(F)^{(2-p)2}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2\ dx \\
&= \frac{1}{m(F)^{(2-p)2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\ dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\|Tf\|_2 \leq \frac{1}{m(F)^{2-p}} \|f\|_2$, concluyendo así que T es de tipo fuerte $(2,2)$.

b) T es de tipo débil (1,1).

En efecto, usando la desigualdad de Chebychev:

$$m(\{x : |Tf(x)| > \lambda\}) = m(\{x : \frac{1}{m(F)^{2-p}}|\chi_F(x)||\hat{f}(x)| > \lambda\})$$
$$\leq m(\{x : |\chi_F(x)|\|f\|_1 > \lambda m(F)^{2-p}\})$$
$$= m(\{x : |\chi_F(x)| > \frac{\lambda m(F)^{2-p}}{\|f\|_1}\}) \leq \frac{\|f\|_1}{\lambda m(F)^{2-p}} \int_{\mathbb{R}} |\chi_F(x)| \; dx = \frac{m(F \cap \mathbb{R})}{m(F)^{2-p}\lambda}\|f\|_1.$$

Por lo tanto, T es de tipo débil $(1,1)$.

Así obtenemos que, para todo p con $1 < p < 2$ existe $C_p > 0$ tal que:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |Tf(x)|^p \; dx\Big)^{1/p} \leq C_p\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \; dx\Big)^{1/p},$$

que es equivalente a decir que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \frac{\chi_F(x)}{m(F)^{2-p}} \; dx \leq C_p^p \int |f(x)|^p \; dx$$

o sea que,

$$\int_{\mathbb{R}\cap F} |\hat{f}(x)|^p \frac{1}{m(F)^{2-p}} \; dx \leq C_p^p \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \; dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x) \; dx = \int_{\mathbb{R}\cap F} |\hat{f}(x)|^p \; dx \leq C_p^p m(F)^{2-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \; dx.$$

Para algunos conjuntos podemos afinar la **desigualdad 3.6**, para ello necesitamos un resultado conocido, cuya demostración se encuentra en **[St1]**.

Sea ρ un rectángulo arbitrario en $\mathbb{R}^d$, es decir el producto cartesiano de d-intervalos en $\mathbb{R}$.

Para cada rectángulo ρ definimos el operador *suma parcial* S_ρ como:

$$\widehat{S_\rho}(f) = \chi_\rho \cdot \hat{f} \text{ con } f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^p(\mathbb{R}^d).$$

Descomponemos a $\mathbb{R}$ como la unión de intervalos disjuntos (cuyos interiores son disjuntos) $[2^k, 2^{k+1}]$ con $k \in \mathbb{R}$ y $[-2^{k+1}, -2^k]$ con $k \in \mathbb{R}$. Esta colección se llamará la descomposición diádica de $\mathbb{R}$. La familia de los rectángulos resultantes se denotará por $\Delta = \{[n2^k, (n+1)2^k]\}_{\{n\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}}$.

Teorema 3.4.1. *Supongamos que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ con $1 < p < \infty$.*

Entonces:

$\big(\sum_{I\in\Delta} |S_I f(x)|^2\big)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^d)$ *y el radio* $\frac{\|\big(\sum_{I\in\Delta} |S_I f(x)|^2\big)^{1/2}\|_p}{\|f\|_p}$ *está contenido entre dos cotas independientes de f.*

Es decir,

$$\int \big(\sum_{I\in\Delta} |S_I f(x)|^2\big)^{p/2} dx \cong \int |f(x)|^p \, dx.$$

Tomemos ahora el conjunto $E = \bigcup_{k=1}^N (2^k, 2^k + 1)$, se puede ver en este caso, que la función $T : f \longrightarrow \chi_E \hat{f}$ tiene norma esencialmente equivalente (dependiendo de p) a $N^{\frac{2-p}{2p}}$. Es decir que,

$$\int_E |\hat{f}(x)|^p \, dx \simeq N^{\frac{2-p}{2p}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.$$

A continuación probaremos que $\int_E |\hat{f}(x)|^p \, dx \leq C N^{\frac{2-p}{2p}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.$

En efecto, sea $A_k = (2^k, 2^k + 1)$ y sea $I_k = (2^k, 2^{k+1})$, entonces $E = \bigcup_{k=1}^N A_k$, es decir E es unión disjunta de A_k y donde $A_k \subseteq I_k$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\int_E |\hat{f}(x)|^p \, dx = \int_{\bigcup_{k=1}^N A_k} |\hat{f}(x)|^p \, dx \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{A_k} |(\chi_{I_k}\hat{f})(x)|^p \, dx = \sum_{k=1}^N \int_{A_k} |\widehat{S_{I_k} f}(x)|^p \, dx \\
&\le C \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} |S_{I_k} f(x)|^p \, dx
\end{aligned}
$$

Esta última desigualdad se tiene por la **desigualdad 3.6** que se encuentra al principio de esta sección , tomando $A_k = F$ y $u(x) = \chi_{A_k}(x)$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |\widehat{S_{I_k} f(x)}|^p \chi_{A_k}(x) \, dx = \int_{A_k} |\widehat{S_{I_k} f(x)}|^p \, dx \\
&\le C m(A_k)^{2-p} \int_{\mathbb{R}} |S_{I_k} f(x)|^p \, dx = C \int_{\mathbb{R}} |S_{I_k} f(x)|^p \, dx
\end{aligned}
$$

Usando ahora la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$
\sum_{k=1}^N |S_{I_k} f(x)|^p \le \Big(\sum_{k=1}^N \big(|S_{I_k} f(x)|^p\big)^{2/p} \Big)^{p/2} \Big(\sum_{k=1}^N 1 \Big)^{\frac{2-p}{2}}
$$

Por lo tanto,

$$
\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^N |S_{I_k} f(x)|^p \, dx \le \int_{\mathbb{R}} \Big(\sum_{k=1}^N \big(|S_{I_k} f(x)|^p\big)^{2/p} \Big)^{p/2} N^{\frac{2-p}{2}} \, dx \le C_1 N^{\frac{2-p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.
$$

Entonces,

$$
\int_E |\hat{f}(x)|^p \, dx \le C_1 N^{\frac{2-p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx.
$$

Tomando $T(f) = \chi_E \hat{f}$ obtenemos que:

$$\|T(f)\|_p^p = \|\chi_E \hat{f}\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |\chi_E \hat{f}(x)|^p \ dx = \int_E |\hat{f}(x)|^p \ dx \leq C_1 N^{\frac{2-p}{2}} \|f\|_p^p.$$

Entonces

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)} = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_p}{\|f\|_p} \leq C_1 N^{\frac{2-p}{2p}}.$$

Para ver que la norma del operador T no es más pequeña que $N^{\frac{2-p}{2p}}$ basta tomar la función f tal que $\hat{f} = \chi_E$. La demostración se encuentra en **[AgHa]**.

Como una aplicación de este ejemplo tenemos los siguientes corolarios:

Corolario 3.4.1. *La condición $\int_E u(x) \ dx \leq Cm(E)^{p-1}$ para todo conjunto E medible no es necesaria para la validez de la desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x) \ dx \leq \ C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ dx \quad \text{con } 1 < p < 2.$$

Demostración. Sea $E(\varepsilon, N) = \bigcup_{k=1}^N (\varepsilon 2^k, \varepsilon(2^k + 1)) = \bigcup_{k=1}^N A(\varepsilon, k)$ donde $I(\varepsilon, k) = (\varepsilon 2^k, \varepsilon 2^{k+1})$ y por lo tanto $A(\varepsilon, k) \subseteq I(\varepsilon, k)$.

Usando el comportamiento de las dilataciones bajo la Transformada de Fourier y el ejemplo anterior obtenemos que:

$$\int_{E(\varepsilon,N)} |\hat{f}(x)|^p \ dx = \sum_{k=1}^N \int_{A(\varepsilon,k)} |\chi_{I(\varepsilon,k)} \hat{f}(x)|^p \ dx$$
$$\leq Cm(A(\varepsilon, k))^{2-p} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}} |S_{I(\varepsilon,k)} f|^p \ dx$$

Usando Hölder obtenemos que:

$$\sum_{k=1}^N |S_{I(\varepsilon,k)} f|^p \leq \Big(\sum_{k=1}^N \big(|S_{I(\varepsilon,k)} f|^p\big)^{2/p} \Big)^{p/2} \Big(\sum_{k=1}^N 1^{\frac{2}{2-p}} \Big)^{\frac{2-p}{2}}$$

Así concluimos que:

$$\int_{E(\varepsilon,N)} |\hat{f}(x)|^p \ dx \leq C\varepsilon^{2-p} N^{\frac{2-p}{2}} \int \Big(\sum_{k=1}^{N} \big(|S_{I(\varepsilon,k)} f|^p\big)^{2/p}\Big)^{p/2}$$
$$\leq \widetilde{C}\varepsilon^{2-p} N^{\frac{2-p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ dx = \widetilde{C}(\varepsilon^2 N)^{\frac{2-p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ dx \tag{3.7}$$

Sea ahora $\varepsilon_n = 2^{-n}$ y $N_n = 2^n$, entonces se tiene que:

$$E_n = 2^{N_n+1} + E(\varepsilon_n, N_n) = \bigcup_{k=1}^{2^n} (2^{2^n+1} + 2^{k-n}, 2^{2^n+1} + (2^k+1)2^{-n}).$$

Observemos primeramente que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que E_n son disjuntos, tomemos la función $u = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$ que es independiente de p y veamos que u es localmente integrable.

En efecto, para cualquier compacto K :

$$\int_K u(x) \ dx = \int_K \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \ dx$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_K \chi_{E_n}(x) \ dx = \sum_{n=1}^{\infty} m(K \cap E_n) < \infty$$

Como los conjuntos E_n son disjuntos, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}(x) \ dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \chi_{E_n}(x) \ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} |\hat{f}(x)|^p \ dx$$

Usando la desigualdad (3.7) obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|\hat{f}(x)|^p\ dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} C_2\Big((\frac{1}{2^n})^2 2^n\Big)^{1/b}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\ dx$$

$$=C_2\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-2n+n})^{1/b}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\ dx$$

$$= C_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n/b}}\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\ dx \leq C_3\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\ dx$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}}|\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq C_3\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p\ dx.$$

Pero por otro lado, para $\lambda < 1$ tenemos:

$$m(\{x : u(x) > \lambda\}) = m(\{x : \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x) > \lambda\})$$

Y como los conjuntos En son disjuntos, obtenemos que

$$m(\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x) > \lambda\}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

y ya que

$m(E_n) = m(\bigcup_{k=1}^{2^n}(2^{2^n+1} + 2^{k-n}, 2^{2^n+1} + (2^k+1)2^{-n})) = \sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{2^n} = 1,$

entonces se tiene que:

$$m(\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty}\chi_{E_n}(x) > \lambda\}) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n) = \infty.$$

Así se demuestra que la condición i) del **Teorema (3.3.3)** no vale, y por lo tanto no vale $\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)^{p-1}$ para todo conjunto medible E. $\square$

Corolario 3.4.2. *La condición* $\int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}$ *para todo intervalo* I *no es suficiente para la validez de la desigualdad:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx \quad \text{si } 1 < p < 2.$$

Demostración. Tomemos la función $u(x) = \chi_E(x)$ independiente de p, con $E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(2^k, 2^k + 1)$.

Veamos que, tomando esta función u, no es válida la desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx$$

En efecto, teniendo en mente el ejemplo de la sección anterior y tomando $N \longrightarrow +\infty$ obtenemos el absurdo:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \chi_E(x)\ dx =$$
$$\int_E |\hat{f}(x)|^p\ dx \cong N^{\frac{1-p}{2}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx \longrightarrow +\infty$$

Por otro lado veamos que se satisface la condición $\int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}$ para todo I.

En efecto, sea $I = (a, b)$ entonces $m(I) = b - a > 0$, así se tiene que existe $j > 0$ tal que $2^j < m(I) \leq 2^{j+1}$. Por lo tanto obtenemos que:

$$\int_I u(x)\ dx \leq C \int_0^{2^{j+1}} u(x)\ dx = C \int_0^{2^{j+1}} \chi_E(x)\ dx$$
$$C \int_0^{2^{j+1}} \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty}(2^k, 2^k+1)}(x)\ dx = C \int_{(0,2^{j+1}) \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}(2^k,2^k+1)} 1\ dx$$
$$Cm((0, 2^{j+1}) \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}(2^k, 2^k + 1)) = Cm(\bigcup_{k=1}^{\infty}(2^k, 2^k + 1) \cap (0, 2^{j+1}))$$
$$Cm(\bigcup_{k=1}^{j}(2^k, 2^k + 1) \cap (0, 2^{j+1})) = Cj$$

Como $2^j < m(I) \leq 2^{j+1}$ entonces $\log(2^j) < \log(m(I)) \leq \log(2^{j+1})$, que es lo mismo que $j \leq \frac{\log(m(I))}{\log(2)} \leq j+1$.

Por lo tanto se concluye que,

$$\int_I u(x)\ dx \leq \widetilde{C}\log(m(I)).$$

Además sabemos que si $1 < p < 2$ entonces $\log(m(I)) \leq m(I)^{p-1}$, obteniendo así que:

$$\int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}$$

para todo intervalo I. $\square$

3.5. Una condición necesaria más fuerte

En la sección anterior mostramos que la condición $\int_E u(x)\,dx \leq Cm(E)^{p-1}$ para todo conjunto medible E no es una condición necesaria para la **desigualdad 3.3**, pero también vimos que la condición $\int_I\ u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}$ para todo intervalo I no es una condición suficiente. Por lo tanto debemos conseguir una condición intermedia para $1 < p < 2$. El siguiente teorema nos aporta esa condición intermedia:

Teorema 3.5.1. *Si $1 < p < 2$ y u satisface:*

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x)\ dx \leq C\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ dx$$

Entonces u debe satisfacer la desigualdad:

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_{kr}^{(k+1)r} u(x)\ dx\big)^b\Big)^{1/b} \leq Cr^{p-1}$$

para todo $r > 0$, donde $b = \frac{2}{2-p}$.

Demostración. Sea $g(x) = \sum_k a_k\chi_{(k,k+1)}(x)$ donde $a_k = 0$ para casi todo k (excepto para un número finito de k).

Sea f definido mediante $\hat{f}(x) = g(x)$. Por el Teorema de inversión tenemos que $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \hat{f}(y)\ dy$ para casi todo x. Así,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \hat{f}(y)\ dy = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x y} \big(\sum_k a_k \chi_{(k,k+1)(y)} \big)\ dy \\
&= \int_k^{k+1} \big(\sum_k a_k \big) e^{2\pi i x y}\ dy = \sum_k a_k \frac{e^{2\pi i y x}}{2\pi i x} \Big|_k^{k+1} \\
&= \sum_k a_k \frac{e^{2\pi i x (k+1)} - e^{2\pi i x k}}{2\pi i x} = \sum_k a_k e^{2\pi i x k} \big(\frac{e^{2\pi i x} - 1}{2\pi i x} \big)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$f(x) = \sum_k a_k e^{2\pi i x k} \big(\frac{e^{2\pi i x} - 1}{2\pi i x} \big)$$

para casi todo x.

Estimemos en primer lugar la norma L^p de f:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|^p\ dx + \sum_{n \neq 0, n \in \mathbb{Z}} \int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p\ dx.$$

Para $n \neq 0$ tenemos usando el cambio de variables $y = x - 2n$ que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p\ dx &= \int_{-1+2n}^{1+2n} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i x k} \big(\frac{e^{2\pi i x} - 1}{2\pi i x} \big) \big|^p\ dx \\
&= \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i k (y+2n)} \frac{e^{2\pi i (y+2n)} - 1}{2\pi i (y+2n)} \big|^p\ dy \\
&= \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i k y} e^{4\pi i k n} \frac{e^{2\pi i y} e^{4\pi i n} - 1}{2\pi i (y+2n)} \big|^p\ dy
\end{aligned}$$

Como $e^{4\pi i k n} = 1$ tenemos que:

$$\int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p\ dx = \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i k y} \frac{e^{2\pi i y} - 1}{2\pi i (y+2n)} \big|^p\ dy$$

Para $n \neq 0$ tenemos que:

$$\int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p \, dx = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{-1}^{1} \frac{\left| \sum_k a_k e^{2\pi i k y}(e^{2\pi i y} - 1)\right|^p}{|y+2n|^p} \, dy.$$

Como $|y+2n| > |n|$ y $|e^{2\pi i y} - 1|^p \leq (|e^{2\pi i y}| + 1)^p \leq 2^p$, obtenemos que:

$$\int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p \, dx \leq \frac{C}{|n|^p} \int_{-1}^{1} |\sum_k a_k e^{2\pi i k x}|^p \, dx \quad \text{con } n \neq 0.$$

Por otro lado,

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \, dx = \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i x k} (\frac{e^{2\pi i x} - 1}{2\pi i x})\big|^p \, dx$$

Observemos la siguiente cuenta:

$$\begin{aligned}
&e^{2\pi i x} - 1 = (\cos(2\pi x) + i \operatorname{sen}(2\pi x)) - 1 \\
&= (\cos^2(\pi x) - \operatorname{sen}^2(\pi x) - 1) + i 2 \operatorname{sen}(\pi x) \; cos(\pi x) \\
&= (-2\operatorname{sen}^2(\pi x)) + i2 \operatorname{sen}(\pi x) \cos(\pi x) = 2i \operatorname{sen}(\pi x)(\cos(\pi x) + i \operatorname{sen}(\pi x)) \\
&= 2i \operatorname{sen}(\pi x) e^{\pi i x}
\end{aligned}$$

Entonces

$$|\frac{e^{2\pi i x} - 1}{x}| = 2|\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}|$$

Si $|x| < 1$ con $x \neq 0$, se tiene que

$$2|\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}| \leq 2\pi,$$

pues por el teorema del Valor Medio, tomando la función $h(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$, que resulta continua y derivable en $(0, x)$, se tiene que existe $c \in (0, x)$ tal que $\frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(c)$, y por lo tanto, $\left|\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{x}\right| = |\pi \cos(c)| \leq \pi$.

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^{1} |f(x)|^p \ dx \leq \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i x k} \big|^p \ dx.$$

Por consiguiente,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = \int_{-1}^{1} |f(x)|^p \ dx + \sum_{n\neq 0, n\in\mathbb{Z}} \int_{-1+2n}^{1+2n} |f(x)|^p \ dx$$
$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{p-1}} \int_{-1}^{1} \big| \sum_k a_k e^{2\pi i x k} \big|^p \ dx + \sum_{n\neq 0} \frac{C}{|n|^p} \int_{-1}^{1} | \sum_k a_k e^{2\pi i k x} |^p \ dx$$

Como $\sum_{n\neq 0} \frac{C}{|n|^p}$ converge porque $p > 1$, entonces:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \ dx \leq C \int_{-1}^{1} | \sum_k a_k e^{2\pi i k x} |^p \ dx. \tag{3.8}$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} \big| \sum_k a_k \chi_{(k,k+1)}(x) \big|^p u(x) \ dx.$$

Observemos que si $k = k_0$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} \big| a_{k_0} \chi_{(k_0,k_0+1)}(x) \big|^p \ u(x) \ dx = \int_{k_0}^{k_0+1} |a_{k_0}|^p \ u(x) \ dx.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} \big| \sum_k a_k \chi_{(k,k+1)}(x) \big|^p \ u(x) \ dx = \sum_k |a_k|^p \int_k^{k+1} u(x) \ dx.$$

Concluimos así,

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p \ u(x) \ dx = \sum_k |a_k|^p \int_k^{k+1} u(x) \ dx. \tag{3.9}$$

Luego usando la hipótesis que $\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^p u(x) \ dx \leq C \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx$ y utilizando los resultados **(3.8)** y **(3.9)** y la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\sum_k |a_k|^p \int_k^{k+1} u(x) \ dx \leq C \int_{-1}^{1} |\sum_k a_k e^{2\pi ikx}|^p \ dx$$
$$\leq C\big(\int_{-1}^{1} |\sum_k a_k e^{2\pi ikx}\big|^{p\frac{2}{p}} \ dx\big)^{\frac{p}{2}} \big(\int_{-1}^{1} 1^{\frac{2}{2-p}}\big)^{\frac{2-p}{2}}$$
$$\leq C\big(\int_{-1}^{1} \sum_k |a_k|^2 |e^{2\pi ikx}|^2 \ dx\big)^{\frac{p}{2}} 2^{\frac{2-p}{2}} \leq C\big(\sum_k |a_k|^2\big)^{\frac{p}{2}}$$

Por lo tanto concluimos que:

$$\sum_k |a_k|^p \int_k^{k+1} u(x) \ dx \leq C\big(\sum_k |a_k|^2\big)^{\frac{p}{2}} \tag{3.10}$$

para cualquier elección de la sucesión finita (a_k).

Veamos que vale la tesis del teorema para $r = 1$, es decir que es válida la siguiente desigualdad:

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \big(\int_k^{k+1} u(x) \ dx\big)^{\frac{2}{2-p}} \leq C.$$

En efecto, tomemos (c_k) y (b_k) de tal manera que $|a_k| = |b_k|^{1/p}$ y $c_k = \int_k^{k+1} u(x) \ dx$ y reemplazando en **(3.10)**, nos queda que

$$\sum_k |b_k||c_k| \leq C\big(\sum_k |b_k|^{\frac{2}{p}}\big)^{\frac{p}{2}} = C\|b_k\|_{2/p}. \tag{3.11}$$

Usando la propiedad que $\|f\|_p = \sup_{g\in L^{p'},\|g\|=1} \int fg$ para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, tenemos que

$$\sup_{(b_k)\in L^{2/p},\|b_k\|_{2/p}=1} \sum_k |c_k||b_k| = \|c_k\|_{\frac{2}{2-p}} = \Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_k^{k+1} u(x)\ dx\big)^{\frac{2}{2-p}}\Big)^{\frac{2-p}{2}}$$

Entonces, como $b = \frac{2}{2-p}$ y por la desigualdad **(3.11)** tenemos que :

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_k^{k+1} u(x)\ dx\big)^b\Big)^{1/b} \leq C \sup_{(b_k)\in L^{2/p},\|b_k\|_{2/p}=1} \|b_k\|_{2/p} = C.$$

Concluyendo así que:

$$\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_k^{k+1} u(x)\ dx\big)^{\frac{2}{2-p}} \leq C.$$

Para probar el caso general, usamos las desigualdades **(3.8), (3.9) y (3.10)**, considerando dilataciones. Si $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})$ entonces $\hat{f}_\varepsilon(x) = \hat{f}(\varepsilon x)$.

Por lo tanto, usando el cambio de variables $y = \frac{x}{\varepsilon}$ y **(3.8)** tenemos que,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^p\ dx = \int_{\mathbb{R}} \big|\frac{1}{\varepsilon}f(\frac{x}{\varepsilon})\big|^p\ dx = \varepsilon^{-p}\int |f(y)|^p \varepsilon\ dy \\
&\varepsilon^{-p+1}\int |f(x)|^p\ dx = (\varepsilon^{p-1})^{-1}\int |f(x)|^p\ dx \\
&\leq C(\varepsilon^{p-1})^{-1}\int_{-1}^{1}\big|\sum_k a_k e^{2\pi i x k}\big|^p\ dx
\end{aligned}$$

Por otro lado, por **(3.9)** se tiene que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_{\varepsilon}(x)|^p \ u(x) \ dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\varepsilon x)|^p u(x) \ dx = \sum_k |a_k|^p \int_{\frac{k}{\varepsilon}}^{\frac{k+1}{\varepsilon}} u(x) \ dx$$

Sabemos por hipótesis que $\int |\hat{f}_{\varepsilon}(x)|^p u(x) \ dx \leq C \int |f_{\varepsilon}(x)|^p \ dx$ y por la misma cuenta que hicimos en el caso $r = 1$, obtenemos que:

$$\sum_k |a_k|^p \int_{\frac{k}{\varepsilon}}^{\frac{k+1}{\varepsilon}} u(x) \ dx \leq C(\varepsilon^{p-1})^{-1} \big(\sum_k |a_k|^2 \big)^{p/2}.$$

Tomando b_k y c_k tal que $|a_k| = |b_k|^{1/p}$ y $c_k = \int_{\frac{k}{\varepsilon}}^{\frac{k+1}{\varepsilon}} u(x) \ dx$, tenemos que

$$\sum_k |b_k||c_k| \leq C(\varepsilon^{p-1})^{-1} \big(\sum_k |b_k|^{2/p} \big)^{p/2}.$$

Por lo tanto:

$$\sup_{\{(b_k) \in L^{2/p}, \|b_k\|_{2/p} = 1\}} \sum_k |b_k||c_k| \leq C(\varepsilon^{p-1})^{-1} \sup_{\{(b_k) \in L^{2/p}, \|b_k\|_{2/p} = 1\}} \|b_k\|_{2/p}.$$

Luego nos queda la siguiente cuenta:

$$\|c_k\|_{\frac{2}{2-p}} \leq C(\varepsilon^{p-1})^{-1}.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{r}$ y sabiendo que $b = \frac{2}{2-p}$ obtenemos que:

$$\Big(\sum_k \big(\int_{kr}^{(k+1)r} u(x) \ dx \big)^b \Big)^{\frac{1}{b}} \leq C \Big(\big(\frac{1}{r}\big)^{p-1} \Big)^{-1}.$$

$\square$

Para terminar este capítulo daremos la siguiente observación, cuya demostración se encuentra en **[AgHa].**

Observación 3.5.1. *La condición necesaria vista en el teorema anterior se encuentra entre las dos primeras condiciones necesarias analizadas, es decir:*

a)

$$\Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_{kr}^{(k+1)r} u(x)\ dx\big)^b\Big)^{1/b} \leq Cr^{p-1} \text{ implica} \int_I u(x)\ dx \leq Cm(I)^{p-1}.$$

para todo intervalo I.

b)

$$\int_E u(x)\ dx \leq Cm(E)^{p-1} \quad \text{implica } \Big(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\big(\int_{kr}^{(k+1)r} u(x)\ dx\big)^b\Big)^{1/b} \leq Cr^{p-1}.$$

para todo conjunto medible E.

Capítulo 4

Desigualdades en norma con pesos para la Transformada de Fourier. Parte 2

Probaremos en este capítulo desigualdades en norma con pesos en la forma:

$$\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v}, \tag{4.1}$$

donde la desigualdad se establece sobre un subespacio $X = M_0(\mathbb{R})$ de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^p_v(\mathbb{R})$ contenido en el espacio de pesos $L^p_v(\mathbb{R})$ y donde $\hat{f}$ es la Transformada de Fourier con μ un peso correspondiente a una medida no negativa y v una función no negativa localmente integrable.

Estudiaremos bajo qué condiciones el espacio $M_0(\mathbb{R})$ es denso en $L^p_v(\mathbb{R})$ permitiendo así extender la desigualdad en norma con pesos a todo el espacio $L^p_v(\mathbb{R})$ y la definición de la Transformada al espacio $L^p_v(\mathbb{R})$.

Empezamos definiendo el espacio $M_0(\mathbb{R})$ como el conjunto de todas las funciones $f \in L^\infty_c(\mathbb{R})$ tal que $\hat{f}(0) = 0$ y observando que $M_0(\mathbb{R}) \subseteq L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R})$.

En efecto si $f \in M_0(\mathbb{R})$ entonces $f \in L^\infty_c(\mathbb{R})$ y $\hat{f}(0) = 0$, por lo tanto, $\text{sop}(f) \subseteq K$ donde $K \subseteq \mathbb{R}$ compacto y $\|f/_K\|_\infty < \infty$ y $\hat{f}(0) = 0$. Además se tiene que v es una función no negativa tal que $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Queremos ver que $f \in L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R})$. Para ello, veamos primero que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Como $f \in L^\infty_c(\mathbb{R})$ y $m(K) < \infty$, obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\ dx = \int_K |f(x)|\ dx \leq \|f|_K\|_\infty\ m(K) < \infty,$$

y entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Resta ver que $f \in L^p_v(\mathbb{R})$. Como $f \in L^\infty_c(\mathbb{R})$ y $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, obtenemos usando la desigualdad de Hölder que,

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\ v(x)\ dx = \int_K |f(x)|^p\ v(x)\ dx \leq \big(\|f|_K\|^p_\infty\big)^{1/p}\big(\int_K v(x)\ dx\big)^{1/p},$$

y por lo tanto tenemos que

$$\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} \leq \|f|_K\|^p_\infty\ \|v|_K\|_\infty < \infty.$$

Damos a continuación el siguiente teorema que estudia bajo qué condiciones la desigualdad en norma con pesos es válida:

Teorema 4.0.2. *Dados pesos $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $v \geq 0$ para casi todo punto y $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Asumiendo que $1 < p \leq q < \infty$ y que $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}\backslash[-y,y])$, para cada $y > 0$*

i) Si

$$B_1 = \sup_{y>0}\ \big(\int_{|\xi|<y} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\ \big(\int_{|x|<1/y} |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p'} < \infty \quad (4.2)$$

ii)

$$B_2 = \sup_{y>0}\ \big(\int_{|\xi|>y} d\mu(\xi)\big)^{1/q}\ \big(\int_{|x|>1/y} v^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p'} < \infty \quad (4.3)$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ se verifica que

$$\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v} \quad (4.4)$$

Para realizar la demostración de este teorema necesitamos dos lemas previos, que lo enunciaremos sin demostración. Las demostraciones se encuentran en **[BeHe1].**

Lema 4.0.1. *Dados $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $v > 0$ para casi todo punto y $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Asumiendo que $1 < p \leq q < \infty$ y que $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, existe una constante $C > 0$ tal que toda función $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, con $h \geq 0$ verifica que*

$$\Big(\int \big(\int_{|t|>|\xi|} h(t)\ dt\big)^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq C\big(\int h(t)^p\ v(t)\ dt\big)^{1/p}$$

si y solo si

$$\sup_{y>0} \big(\int_{|\xi|<y} d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_{|x|>y} v(x)^{1-p'}\ dx\big)^{1/p'} < \infty$$

Lema 4.0.2. *Dados $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $v > 0$ para casi todo punto y $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Asumiendo que $1 < p \leq q < \infty$ y $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, existe una constante $C > 0$ tal que toda función $h \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ con $h \geq 0$ verifica que*

$$\Big(\int \big(\int_{|t|<|\xi|} h(t)\ dt\big)^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq C\big(\int h(t)^p\ v(t)\ dt\big)^{1/p}$$

si y solo si

$$\sup_{y>0} \big(\int_{|\xi|>y} d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_{|x|<y} v(x)^{1-p'}\ dx\big)^{1/p'} < \infty$$

Demostración. **Demostración del teorema 4.0.2.**

Ya que $f \in M_0(\mathbb{R})$ tenemos que $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}}(e^{-2\pi i\xi t} - 1)f(t)\ dt$.

En efecto como $\hat{f}(0) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \big(\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi t}f(t)\ dt\big) - 0\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi t}f(t)\ dt - \int f(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}}(e^{-2\pi i\xi t} - 1)f(t)\ dt\end{aligned}$$

Por lo tanto como $e^{-2\pi i\xi t}-1=-2i\text{sen}(\pi\xi t)e^{-\pi i\xi t}$, tenemos que:

$$\hat{f}(\xi)=-2i\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi i\xi t}(\frac{\text{sen}(\pi\xi t)}{\pi\xi t})(\pi\xi t)f(t)\ dt$$

Por lo tanto obtenemos que:

$$\begin{aligned}&|\hat{f}(\xi)|=|-2i\int_{\mathbb{R}}e^{-\pi i\xi t}(\frac{\text{sen}(\pi\xi t)}{\pi\xi t})(\pi\xi t)f(t)\ dt|\\&\leq 2\pi|\xi|\int_{\pi|\xi t|\leq 1}|e^{-\pi i\xi t}||\frac{\text{sen}(\pi\xi t)}{\pi\xi t}||tf(t)|\ dt\\&+2\int_{\pi|t\xi|>1}|e^{-\pi i\xi t}|\frac{|\text{sen}(\pi\xi t)|}{|\pi\xi t|}|\pi\xi t||f(t)|\ dt\end{aligned}$$

Sabiendo que $|e^{-\pi i\xi t}|=1$ y que para $t\neq 0$ $|\frac{\text{sen}(\pi\xi t)}{\pi\xi t}|\leq 1$, entonces obtenemos que:

$$|\hat{f}(\xi)|\leq 2\pi|\xi|\int_{\pi|\xi t|\leq 1}|tf(t)|dt+2\int_{\pi|\xi t|>1}|f(t)|\ dt$$

Tomando el cambio de variable $t=\frac{1}{x}$ y usando que $\pi|\xi t|\leq 1$ es lo mismo que $\frac{\pi}{|x|}\leq\frac{1}{|\xi|}$, obtenemos:

$$|\hat{f}(\xi)|\leq 2\pi|\xi|\int_{\frac{\pi}{|x|}\leq\frac{1}{|\xi|}}|x^{-3}f(\frac{1}{x})|\ dx+2\int_{\frac{\pi}{|x|}>\frac{1}{|\xi|}}|x^{-2}f(\frac{1}{x})|\ dx$$

Consecuentemente por la Desigualdad de Minkowsky, realizamos la siguiente estimación:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^q \, d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big|2\pi|\xi| \int_{\frac{\pi}{|x|}\leq\frac{1}{|\xi|}} |x^{-3} f(\frac{1}{x})| \, dx \\
&+ 2\int_{\frac{\pi}{|x|}>\frac{1}{|\xi|}} |x^{-2} f(\frac{1}{x})| \, dx\Big|^q \, d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&\leq 2\pi\Big(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^q \Big(\int_{\frac{\pi}{|x|}\leq\frac{1}{|\xi|}} |x^{-3} f(\frac{1}{x})| \, dx\Big)^q \, d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&+ 2\Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\frac{\pi}{|x|}>\frac{1}{|\xi|}} |x^{-2} f(\frac{1}{x})| \, dx\Big)^q \, d\mu(\xi)\Big)^{1/q} = 2\pi J_1 + 2J_2
\end{aligned}
$$

Empezamos acotando J_1 y para ello usando el Lema (4.0.1), reemplazando en el mismo $d\mu(\xi)$ por $|\xi|^q d\mu(\xi)$ y $v(t)$ por $|t|^{3p-2}v(\frac{1}{t})$.

Observemos primeramente que:

$$
B = \sup_{y>0} \Big(\int_{|\xi|<\frac{y}{\pi}} |\xi|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} \big(|t|^{3p-2} v(\frac{1}{t})\big)^{1-p'} \, dt\Big)^{1/p'} < \infty.
$$

En efecto, teniendo las cuentas:

- $p' = \frac{p}{p-1}$ implica que $p'p = p + p'$.
- $(3p-2)(1-p') = 3p - 2 - 3pp' + 2p' = 3p - 2 - 3(p+p') + 2p' = -2 - p' = -(2+p')$.

Obtenemos que:

$$
\Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} \big(|t|^{3p-2} v(\frac{1}{t})\big)^{1-p'} \, dt\Big)^{1/p'} = \Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} |t|^{-(2+p')} v(\frac{1}{t})^{1-p'} \, dt\Big)^{1/p'}.
$$

Como $|t| > \frac{y}{\pi}$ entonces $t > \frac{y}{\pi}$ ó $t < \frac{-y}{\pi}$. Por lo tanto, tomando $t = \frac{1}{x}$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} |t|^{-(2+p')}\ v(\frac{1}{t})^{1-p'}\ dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{\frac{-y}{\pi}} (-t)^{-(2+p')}\ v(\frac{1}{t})^{1-p'}\ dt + \int_{\frac{y}{\pi}}^{+\infty} t^{-(2+p')} v(\frac{1}{t})\ dt\Big)^{\frac{1}{p'}} \\
&= \Big(\int_{0}^{\frac{-\pi}{y}} (-x^{-1})^{-(2+p')}\ v(x)^{1-p'}(\frac{-1}{x^2})\ dx + \int_{\frac{\pi}{y}}^{0} (x^{-1})^{-(2+p')} v(x)^{1-p'}(\frac{-1}{x^2})\ dx\Big)^{1/p'} \\
&= \Big(\int_{\frac{-\pi}{y}}^{0} \frac{(-x^{-1})^{-2}}{x^2}(-x^{-1})^{-p'} v(x)^{1-p'}\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{y}} \frac{(x^{-1})^{-2}}{x^2}(x^{-1})^{-p'} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'} \\
&= \Big(\int_{\frac{-\pi}{y}}^{0} (-1)^{-2}\frac{(x^{-1})^{-2}}{x^2}(-x^{-1})^{-p'} v(x)^{1-p'}\ dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{y}} \frac{(x^{-1})^{-2}}{x^2}(x^{-1})^{-p'} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'} \\
&= \Big(\int_{|x|<\frac{\pi}{y}} |x^{-1}|^{-p'} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'} = \Big(\int_{|x|<\frac{\pi}{y}} |x|^{p'} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'}
\end{aligned}
$$

Por consiguiente tenemos que:

$$
\Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} |t|^{-(2+p')}\ v(\frac{1}{t})^{1-p'}\ dt\Big)^{\frac{1}{p'}} = \Big(\int_{|x|<\frac{\pi}{y}} |x|^{p'} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'}.
$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
B &= \sup_{y>0}\Big(\int_{|\xi|<\frac{y}{\pi}} |\xi|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{|t|>\frac{y}{\pi}} \big(|t|^{3p-2} v(\frac{1}{t})\big)^{1-p'}\ dt\Big)^{1/p'} \\
&= \sup_{y>0}\Big(\int_{|\xi|<\frac{y}{\pi}} |\xi|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{|x|<\frac{\pi}{y}} |x|^{p'} (v(x))^{1-p'}\ dt\Big)^{1/p'} = B_1
\end{aligned}
$$

y por la hipótesis **(4.2)**, tenemos que $B = B_1 < \infty$. Por consiguiente, por el **lema 4.0.1** se tiene tomando $h(t) = |t^{-3} f(\frac{1}{t})|$ que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ existe una constante $C_1 > 0$ tal que,

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} |\xi|^q \big(\int_{\frac{\pi}{|x|} \leq \frac{1}{|\xi|}} |x^{-3} f(\frac{1}{x})| \; dx \big)^q d\mu(\xi) \Big)^{1/q} \\
&= \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(\int_{|x| \geq \pi |\xi|} h(x) \; dx \big)^q \; d\mu(\xi) \Big)^{1/q} \leq C_1 \big(\int_{\mathbb{R}} |h(x)|^p \; v(x) \; dx \big)^{1/p} \\
&\leq C_1 \big(\int_{\mathbb{R}} |x^{-3} f(\frac{1}{x})|^p |x|^{3p-2} v(\frac{1}{x}) \; dx \big)^{1/p}
\end{aligned}
$$

Así, tomando el cambio de variables $t = \frac{1}{x}$ llegamos a que $J_1 \leq C_1 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$ para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
J_1 &\leq C_1 \big(\int_{\mathbb{R}} |x^{-3} f(\frac{1}{x})|^p |x|^{3p-2} v(\frac{1}{x}) \; dx \big)^{1/p} \\
&= C_1 \big(\int_{\mathbb{R}} |t^3|^p |f(t)|^p |t^{-1}|^{3p-2} v(t) \; (\frac{-dt}{t^2}) \big)^{1/p'} \\
C_1 (-1)^{1/p} &\big(\int_{\mathbb{R}} \frac{|t|^{3p}}{|t|^{3p}} \; |f(t)|^p \; \frac{|t|^2}{|t|^2} \; v(t) \; dt \big)^{1/p} \\
&= C_1 \big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p v(t) \; dt \big)^{1/p} = C_1 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

En cambio para acotar J_2 usamos el lema (4.0.2):

En efecto por la definición de J_2, necesitamos reemplazar en el **lema 4.0.2** $v(t)$ por $|t|^{2p-2} v(\frac{1}{t})$.

Observemos primeramente que

$$
B = \sup_{y>0} \big(\int_{|\xi| > \frac{y}{\pi}} d\mu(\xi) \big)^{1/q} \Big(\int_{|t| < \frac{y}{\pi}} \big(|t|^{2p-2} v(\frac{1}{t}) \big)^{1-p'} \; dt \Big)^{1/p'} < \infty.
$$

En efecto, teniendo en mente la cuenta $(2p-2)(1-p') = 2p - 2 - 2pp' + 2p' = 2p - 2 - 2(p+p') + 2p' = -2$, y tomando el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_{|t|<\frac{y}{\pi}} |t|^{(2p-2)(1-p')} v(\frac{1}{t})^{1-p'}\ dt\Big)^{1/p'}\\
&= \Big(\int_{|t|<\frac{y}{\pi}} |t|^{-2} v(\frac{1}{t})^{1-p'}\ dt\Big)^{1/p'}\\
&= \Big(\int_{|x|>\frac{\pi}{y}} \frac{|x|^2}{x^2}\ v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'} = \Big(\int_{|x|>\frac{\pi}{y}} v(x)^{1-p'}\ dx\Big)^{1/p'}
\end{aligned}
$$

Entonces tenemos por la hipótesis **(4.3)** que,

$$
\begin{aligned}
B &= \sup_{y>0} \Big(\int_{|\xi|>\frac{y}{\pi}} d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{|t|<\frac{y}{\pi}} \big(|t|^{2p-2} v(\frac{1}{t})\big)^{1-p'}\ dt\Big)^{1/p'}\\
&= \sup_{y>0} \Big(\int_{|\xi|>\frac{y}{\pi}} d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{|x|>\frac{\pi}{y}} (v(x))^{1-p'} dt\Big)^{1/p'} = B_2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Por consiguiente, por el **lema 4.0.2** se tiene tomando $h(t) = |t^{-2} f(\frac{1}{t})|$ que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ existe una constante $C_2 > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \Big(\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\frac{\pi}{|x|}>\frac{1}{|\xi|}} |x^{-2} f(\frac{1}{x})|\ dx\Big)^{q}\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\\
&\le C_2 \Big(\int_{\mathbb{R}} |x^{-2} f(\frac{1}{x})|^{p}\ |x|^{2p-2}\ v(\frac{1}{x})\ dx\Big)^{1/p}
\end{aligned}
$$

Así tomando el cambio de variables $x = \frac{1}{t}$ obtenemos que $\|J_2\| \le C_2 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$ para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$.

En efecto,

$$
\begin{aligned}
J_2 &\le C_2 \Big(\int |t^{-2} f(\frac{1}{t})|^{p} |t|^{2p-2}\ v(\frac{1}{t})\ dt\Big)^{1/p}\\
&= C_2 \Big(\int |t|^{-2p} |f(\frac{1}{t})|^{p} |t|^{2p} |t|^{-2}\ v(\frac{1}{t})\ dt\Big)^{1/p}\\
&= C_2 \Big(\int |f(x)|^{p} \frac{|x|^2}{(-1)x^2}\ v(x)\ dx\Big)^{1/p}\\
&= C_2 \Big(\int |f(x)|^{p}\ v(x)\ dx\Big)^{1/p} = C_2 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}
\end{aligned}
$$

Finalmente obtenemos para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ que :

$$
\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{L^q_\mu(\mathbb{R})} &\leq 2\pi J_1 + 2J_2 \\
&\leq 2\pi C_1 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} + 2C_2 \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} \\
&= (2\pi C_1 + 2C_2)\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} = C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})} \ .
\end{aligned}
$$

□

El siguiente teorema muestra un criterio de densidad general que permite extender el **Teorema 4.0.2** a todo el espacio pesado $L^p_v(\mathbb{R})$.

Teorema 4.0.3. *Dados $v \in L^r_{loc}(\mathbb{R})$ para algún $r > 1$, donde $v > 0$ para casi todo punto y eligiendo $p \in (1, +\infty)$ se tiene que:*

a) Si $h \in (L^p_v(\mathbb{R}))'$, el espacio vectorial anulador de $M_0(\mathbb{R})$, entonces h es una función constante.

b) $\overline{M_0(\mathbb{R})} = L^p_v(\mathbb{R})$ ó $L^p_v(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$.

c) Si $v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R})$ entonces $\overline{M_0(\mathbb{R})} = L^p_v(\mathbb{R})$

Para realizar la demostración de este teorema necesitamos un teorema de Carleson-Hunt que data del año 1967, que garantiza la convergencia en casi todo punto de $\mathbb{R}$ de la serie de Fourier de funciones en $L^p(\mathbb{R})$ para $p > 1$. Solamente lo vamos a enunciar, la demostración del mismo se encuentra en **[La]**.

Teorema 4.0.4. *Sea $p \in (1, +\infty)$. Para cada $f \in L^p(\mathbb{R})$ entonces*

$$
\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n(f) = f(x) \quad \text{en casi todo punto,}
$$

donde $S_n(f)(x) = \sum_{j=-n}^{j=n} \ \hat{f}_n(x) \ e^{2\pi i j x}$.

A continuación desarrollamos la demostración del **Teorema 4.0.3**.

Demostración. a) Sea $h \in (L^p_v(\mathbb{R}))'$, el espacio vectorial anulador de $M_0(\mathbb{R})$, y sean las funciones $\chi_{T/2}(x) = \chi_{[-T/2,T/2]}(x)$ con $T > 0$ y $e_\gamma(t) = e^{2\pi i t\gamma}$.

Notemos que $\widehat{e_\gamma f} = \hat{f}(t-\gamma)$ para $f \in L^1(\mathbb{R})$. En efecto, tomando $f \in L^1(\mathbb{R})$ tenemos que,

$$\begin{aligned}\widehat{e_\gamma f}(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x} e_\gamma f(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\lambda x} e^{2\pi i\gamma x}\ f(x)\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x(\lambda-\gamma)}\ f(x)\ dx = \hat{f}(\lambda-\gamma)\end{aligned}$$

Notemos también usando el cambio de variables $-2\pi i\gamma x = u$, que:

$$\begin{aligned}\hat{\chi_{T/2}}(\gamma) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\gamma x}\chi_{T/2}(x)\ dx\\ &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{-2\pi i\gamma x}\ dx = \frac{e^{-2\pi i\gamma x}}{-2\pi i\gamma}\Big|_{-T/2}^{T/2}\\ &= \frac{e^{-\pi i\gamma T}-e^{\pi i\gamma T}}{-2\pi i\gamma} = \frac{\operatorname{sen}(\pi\gamma T)}{\pi\gamma T}T\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\hat{\chi_{T/2}}(\gamma) = 0$ si $\gamma = \frac{n}{T}$ con $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$.

Además tenemos que para todo $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ se cumple que $e_{\frac{n}{T}}\chi_{T/2} \in M_0(\mathbb{R})$.

En efecto tomando el cambio de variables $2\pi i x\frac{n}{T} = u$ tenemos que,

$$\begin{aligned}\widehat{e_{\frac{n}{T}}\chi_{\frac{T}{2}}}(0) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i 0x} e_{\frac{n}{T}}(x)\chi_{T/2}(x)\ dx\\ &= \int_{\mathbb{R}} e_{\frac{n}{T}}(x)\chi_{\frac{T}{2}}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\frac{n}{T}}\chi_{\frac{T}{2}}(x)\ dx\\ &= \int_{-T/2}^{T/2} e^{2\pi i x\frac{n}{T}}\ dx = e^{2\pi i x\frac{n}{T}}\frac{T}{2\pi i n}\Big|_{-T/2}^{T/2}\\ &= \frac{T}{2\pi i n}(e^{\pi i n}-e^{-\pi i n}) = \frac{\operatorname{sen}(\pi n)}{\pi n}T = 0\end{aligned}$$

Veamos ahora que,

$$f(x) = e_{\frac{n}{T}}\chi_{\frac{T}{2}}(x) \in L^p_v(\mathbb{R}):$$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \ v(t) \ dt = \int_{\mathbb{R}} |e_{\frac{n}{T}}(t)\chi_{\frac{T}{2}}(t)|^p \ v(t) \ dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} |e^{2\pi i t \frac{n}{T}}|^p \ |\chi_{[-T/2,T/2]}(t)|^p \ v(t) \ dt = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \ v(t) \ dt$$

Usando ahora la Desigualdad de Hölder con $b = \frac{r}{r-1}$ y $\frac{1}{r} + \frac{1}{b} = 1$ donde $r > 1$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \ v(t) \ dt \leq \Big(\int_{-T/2}^{T/2} (v(t))^r \ dt\Big)^{1/r} \Big(\int_{-T/2}^{T/2} 1^{\frac{r}{r-1}} \ dt\Big)^{\frac{r-1}{r}}$$
$$= \Big(\int_{-T/2}^{T/2} (v(t))^r\Big)^{1/r} \big(\frac{T}{2} + \frac{T}{2}\big)^{\frac{r-1}{r}}$$

Por lo tanto por la hipótesis $\|v\|_{L^r_{loc}(\mathbb{R})}$ y la cuenta anterior, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p \ v(t) \ dt \leq T^{\frac{r-1}{r}} \|v\|_{L^r_{loc}(\mathbb{R})} < \infty$$

Por otro lado, tenemos que $c_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e_{\frac{n}{T}}(t) h(t) \ dt$$
$$= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} e_{\frac{n}{T}} \chi_{\frac{T}{2}}(t) h(t) \ dt$$
$$= \frac{1}{T} < e_{\frac{n}{T}} \chi_{\frac{T}{2}}, h >= 0$$

esto se debe a que $e_{\frac{n}{T}} \chi_{\frac{T}{2}}(t) \in M_0(\mathbb{R})$ y $h(t) \in (L^p_v(\mathbb{R}))'$.

Observemos también que:

$$(L^p_v(\mathbb{R}))' \simeq L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}) \tag{4.5}$$

En efecto, se sabe que si $1 \leq p < \infty$ y v una medida, entonces si $L \in (L_v^p(\mathbb{R}))'$ existe un único $g \in L_v^{p'}(\mathbb{R})$ tal que $L = L_g$ donde $L_g(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\ g(t)\ v(t)\ dt\ (\forall f\ L_v^p(\mathbb{R}))$.

Además $\|L_g\| = \|g\|$, de modo que la correspondencia $g \longleftrightarrow L_g$ es una isometría entre $(L_v^p(\mathbb{R}))'$ y $L_v^{p'}(\mathbb{R})$.

Sea $f \in L_v^p(\mathbb{R})$ tenemos la isometría:

$$\begin{gathered}(L_v^p(\mathbb{R}))' \longleftrightarrow L_v^{p'}(\mathbb{R}) \\ L_g \to g_L\end{gathered}$$

donde $L_g(f) = g_L(f)$, y por lo tanto definimos la isometría:

$$T : L_v^{p'}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow L_{v^{1-p'}}^{p'}(\mathbb{R})$$

$$f \to f\ v$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\|Tf\|_{L_{v^{1-p'}}^{p'}}^{p'} &= \|f\ v\|_{L_{v^{1-p'}}^{p'}}^{p'} = \int_{\mathbb{R}} |f(t)v(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{p'} v^{p'}(t)\ v^{1-p'}(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^{p'}\ v(t)\ dt = \|f\|_{L_v^{p'}}^{p'}\end{aligned}$$

Por otro lado, sea $h_T = h$ sobre $[-T/2, T/2]$ y definimos su T-periodicidad sobre $\mathbb{R}$.

La serie formal de h_T es:

$$\sum_n c_n e_{-n/T}(t) = \sum_n c_n e^{-2\pi i \frac{n}{T}\gamma}.$$

Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $e_{-n/T}$ es T-periódico.

En efecto,

$$\begin{aligned}&e_{-n/T}(t+T) = e^{-2\pi i \frac{n}{T}(t+T)} \\ &= e^{-2\pi i \frac{n}{T}t + (-2\pi i n)} = e^{-2\pi i \frac{n}{T}t} e^{-2\pi i n} \\ &= e^{-2\pi i \frac{n}{T}t} = e_{-n/T}(t)\end{aligned}$$

Veamos que $h_T \in L^a_{loc}(\mathbb{R}/_{T\mathbb{Z}})$ para algún $a > 1$.

En efecto, si nuestra hipótesis fuera $v \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$ en vez de $v \in L^r_{loc}(\mathbb{R})$, resultaría que $h_T \in L^{p'}_{loc}(\mathbb{R}/_{T\mathbb{Z}})$:

En efecto,

$$\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^{p'}\ dt = \int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^{p'} v^{1-p'}(t)\ v(t)^{p'-1}\ dt$$
$$\leq K_T \int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt < \infty,$$

debiéndose la última desigualdad al hecho que $h \in (L^p_v(\mathbb{R}))' \cong L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R})$.

Para el caso general, sabiendo que $v \in l^r_{loc}(\mathbb{R})$, procedemos de la siguiente manera:

Sea $a = \frac{rp'}{p'-1+r}$, es fácil ver que $1 < a < p'$.

En efecto,

$$\frac{rp'}{p'-1+r} > 1 \Longleftrightarrow rp' > p' - 1 + r$$
$$\Longleftrightarrow r(p'-1) > p' - 1 \Longleftrightarrow r > 1$$

$$\frac{rp'}{p'-1+r} < p' \Longleftrightarrow rp' < p'(p' - 1 + r)$$
$$\Longleftrightarrow r < p' - 1 + r \Longleftrightarrow p' > 1$$

Sea $s = \frac{p'}{a} > 1$, consecuentemente usando la Desigualdad de Hölder obtenemos que:

$$\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^a\ v^{\frac{-a}{p}}(t)\ v^{\frac{a}{p}}(t)\ dt$$
$$\leq \Big(\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^{as}\ v^{\frac{-as}{p}}(t)\ dt\Big)^{1/s} \Big(\int_{-T/2}^{T/2}\ v^{\frac{as'}{p}}\ dt\Big)^{1/s'}$$
$$= \Big(\int_{-T/2}^{T/2} |h(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt\Big)^{1/s} \Big(\int_{-T/2}^{T/2} v^r(t)\ dt\Big)^{1/s'} < \infty$$

debiéndose esta última igualdad al hecho que $v \in L^r_{loc}(\mathbb{R})$ y $h \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R})$. Observar también que hemos usado las siguientes cuentas entre los exponentes:

- $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1 \Longrightarrow s' = \frac{s}{s-1} = \frac{p'}{p'-a}$.
- $-as = -a\frac{p'}{a} = -p'$.
- $\frac{-as}{p} = \frac{-p'}{p} = 1 - p'$.
- $\frac{as'}{p} = \frac{ap'}{(p'-a)p} = \frac{rp'}{(p'-1)p} = \frac{rp'}{p'} = r$.

Como $a > 1$ y $h_T \in L^a_{loc}(\mathbb{R}/_{T\mathbb{Z}})$, aplicamos el **Teorema de Carleson-Hunt** y obtenemos que:

$$h_T(t) = \sum_n c_n e_{\frac{-n}{T}}(t)$$

sobre $[-T/2, T/2]$ en casi todo punto.

Observar que:

$$\begin{aligned} c_n =< h_T, e_{\frac{n}{T}} >= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h_T(t)\ e_{\frac{n}{T}}(t)\ dt \\ = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h_T(t)\ e^{2\pi i t\frac{n}{T}}\ dt \end{aligned}$$

Recordemos que para todo $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$ se tiene que $c_n = 0$ y así solo tenemos que:

$$c_0 =< h_T, e_0 >= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h_T(t)\ dt.$$

En conclusión, por la propiedad de (c_n) tenemos que para todo $T > 0$ se verifica que:

$$h(t) = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(u)\ du, \tag{4.6}$$

para casi todo punto sobre $[-T/2, T/2]$.

En efecto, $h = h_T = \sum_n c_n e_{\frac{-n}{T}}$ sobre $[-T/2, T/2]$ en casi todo punto y como para cada $n \neq 0$ se tiene que $c_n = 0$, entonces para cada $T > 0$ se deduce que $h(t) = c_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} h(u)\, du$ en casi todo punto sobre $[-T/2, T/2]$.

Luego podemos observar de la ecuación (4.6), que $h(t) = K_{N+1}$ sobre $[\frac{-(N+1)}{2}, \frac{N+1}{2}]$.

Y así, $K_N = h(t) = \frac{1}{N}\int_{-N/2}^{N/2} K_{N+1}\, du$ en casi todo punto sobre $[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}]$. Por lo tanto, para cada N se verifica que vale la igualdad $K_N = K_{N+1}$ sobre $[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}]$.

Concluyendo así que $h(t) = k \in \mathbb{C}$ en casi todo punto sobre $\mathbb{R}$.

b) Si $h(t) = 0$ entonces se tiene por el Teorema de Hahn- Banach que, $\overline{M_0(\mathbb{R})} = L_v^p(\mathbb{R})$:

En efecto, sabemos que $M_0(\mathbb{R}) \subseteq L_v^p(\mathbb{R})$, si suponemos que $M_0(\mathbb{R})$ no es denso en $L_v^p(\mathbb{R})$, entonces por Hahn-Banach sabemos que existe $h \in (L_v^p(\mathbb{R}))'$, con $h \neq 0$ y tal que $< h, f >= 0$ para toda $f \in M_0(\mathbb{R})$. Pero por el ítem a) probamos que h debía ser una constante, por lo tanto $h(t) = 0$, y llegamos así a un absurdo, por lo tanto concluimos que $\overline{M_0(\mathbb{R})} = L_v^p(\mathbb{R})$.

En cambio, si $h(t) = k \neq 0$ y $f \in L_v^p(\mathbb{R})$, entonces $|f| \in L_v^p(\mathbb{R})$ y por el resultado $(L_v^p(\mathbb{R}))' \simeq L_{v^{1-p'}}^{p'}(\mathbb{R})$ tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f|\overline{h(t)}\, dt \in \mathbb{C}.$$

En efecto como $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ implica por la desigualdad de Hölder que $-1/p = \frac{1-p'}{p'}$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\overline{h}(t)\, dt \leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)| v^{1/p}(t)\ \overline{h}(t)\ v^{\frac{1-p'}{p'}}(t)\, dt$$
$$\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^p\ v(t)\, dt\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}} \overline{h}(t)^{p'} v^{1-p'}(t)\, dt\Big)^{1/p'} < \infty$$

Por lo tanto, $\bar{k}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\ dt \in \mathbb{C}$ y así $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Podemos argumentar que como $h(t) = k \neq 0$ entonces $v^{1-p'} \in L^1(\mathbb{R})$.

En efecto, como $h \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R})$ entonces $\int_{\mathbb{R}}|h(t)|^{p'}v^{1-p'}(t)\ dt < \infty$.
Pero $h(t) = k$ entonces, $|k|^{p'}\int_{\mathbb{R}}v^{1-p'}(t) < \infty$ y así, $\int_{\mathbb{R}}v^{1-p'}(t)\ dt < \infty$.

Y así otra forma de ver que $L^p_v(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$ sería tomando $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ y usando la Desigualdad de Hölder:

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\ dt = \int_{\mathbb{R}}|f(t)|\ v^{1/p}(t)\ v^{\frac{1-p'}{p'}}(t)\ dt\\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}}|f(t)|^p\ v(t)\ dt\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}}v^{1-p'}(t)\ dt\Big)^{1/p'}\\
&\leq \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}(\|v^{1-p'}\|_{L^1})^{1/p'} < \infty
\end{aligned}$$

concluimos que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

c) Sabemos que si $h \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R})$, por ítem a) tenemos que h es una función constante, como $v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R})$, tenemos por ítem b) que $h(t) = k = 0$, y por el Teorema de Hahn- Banach tenemos que $\overline{M_0(\mathbb{R})} = L^p_v(\mathbb{R})$.

$\square$

Combinando los **Teoremas 4.0.2 y 4.0.3** con un argumento estandard obtenemos un resultado para las desigualdades en norma con peso para la Transformada de Fourier junto con una extensión de la definición de Fourier a estos espacios.

Teorema 4.0.5. *Dados $v \in L^r_{loc}(\mathbb{R})$ para algún $r > 1$, donde $v > 0$ en casi todo punto y $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Asumiendo que $1 < p \leq q < \infty$ y $v^{1-p'} \in (L^1_{loc}(\mathbb{R}\backslash[-y,y])\backslash L^1(\mathbb{R}))$ y para cada $y > 0$ y asumiendo que valen las condiciones (4.2) y (4.3).*

Entonces:

a) Si $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{j\longrightarrow+\infty}\ \|f_j - f\|_{p,v} = 0$ para una sucesión $(f_j)_{j\in(\mathbb{N})} \subseteq M_0(\mathbb{R})$, se tiene que $(\hat{f}_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge en $L^q_\mu(\mathbb{R})$ a una función

*$\mathcal{G}(f) = \hat{f} \in L^q_\mu(\mathbb{R})$, con $\mathcal{G}(f)$ independiente de la sucesión $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ y que la llamaremos la **Transformada de Fourier de** f.*

b) Además existe un $C > 0$ tal que para toda función $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ se verifica que

$$\|\mathcal{G}(f)\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v},$$

donde C puede ser elegido como $C = 2^{1+\frac{1}{p'}}\ (\pi B_1 + B_2)(p)^{1/q}\ (p')^{1/p'}$

Observación 4.0.2. *La Transformada de Fourier definida en el **Teorema 4.0.5 a)** es la transformada usual cuando éste último existe sobre todo $L^p_v(\mathbb{R})$. Es más provee una extensión de la definición de la Transformada de Fourier sobre todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$*

*Finalmente daremos un ejemplo que explica la constante en el **Teorema 4.0.5 b)**. Si tomamos como medida $\mu = \delta$ y dado $f \in M_0(\mathbb{R})$, tenemos que la desigualdad $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v}$ se convierte en $|\hat{f}(0)| \leq C\|f\|_{L^p_v}$ para toda $f \in M_0(\mathbb{R})$.*

En efecto, siendo δ la delta de Dirac y tomando $f \in M_0(\mathbb{R})$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} &= \Big(\int |\hat{f}(\xi)|^q \ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&= \Big(\Big|\int e^{-2\pi i\xi t}\ f(t)\ dt\Big|^q \ d\delta(\xi)\Big)^{1/q} \\
&= \Big(\Big|\int \ f(t)\ dt\Big|^q\Big)^{1/q} \\
&= |\hat{f}(0)|.
\end{aligned}$$

Entonces $|\hat{f}(0)| \leq C\|f\|_{L^p_v}$ para $f \in M_0(\mathbb{R})$. Aún más, si $B_1 = B_2 = 0$ entonces $C = 0$.

*Si $v(t) = |t|^p$ entonces $v(t)^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R})$, de modo que se puede aplicar el **Teorema 4.0.3** y obtener la única extensión continua de la Transformada de Fourier$\hat{}$: $M_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R})$ bien definida que es la función nula.*

Capítulo 5

La Transformada de Fourier para las desigualdades en norma con peso

Típicamente y como ya dijimos, una desigualdad en norma con peso para la Transformada de Fourier se podría enunciar:

$$\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v},$$

donde la desigualdad se establece sobre un subespacio denso de $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$ contenido en el espacio de pesos $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y donde $\hat{f}$ es la Transformada de Fourier con μ y v pesos.

Nuestro objetivo en este capítulo, no solo es enunciar y demostrar nuevas condiciones necesarias y suficientes para la validez de dicha desigualdad, sino también describir y solucionar el problema de extensión de la Transformada de Fourier $\hat{f}$ sobre todo el espacio pesado $L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

5.1. Motivación e Introducción

Se quiere establecer la siguiente desigualdad:

$$\Big(\int |Tf(y)|^q \; d\mu(y)\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int |f(x)|^p \; v(x) \; dx\Big)^{1/p}, \tag{5.1}$$

para toda función $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y para el caso en que T es la Transformada de Fourier.

Para ello damos un subespacio $X \subseteq L^p_v(\mathbb{R}^d)$ que cumple:

$$X \subseteq L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R}^d) \tag{5.2}$$
$$\bar{X} = L^p_v(\mathbb{R}^d) \tag{5.3}$$

y la desigualdad;

$$\Big(\int |\hat{f}(\xi)|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int |f(x)|^p \; v(x) \; dx\Big)^{1/p}, \tag{5.4}$$

para toda función $f \in X$.

Si las condiciones (5.2), (5.3) y (5.4) valen extendemos por continuidad la Transformada de Fourier de X a todo el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$, es decir a un operador

$$\mathcal{G} : L^p_v(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$$

tal que cumpla:

$$\Big(\int |\mathcal{G}f(\xi)|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int |f(x)|^p \; v(x) \; dx\Big)^{1/p}, \tag{5.5}$$

para toda función $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

Las condiciones (5.2), (5.3) y (5.4) nos dicen que la Transformada de Fourier define un operador

$$\mathcal{F} : X \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$$

continuo, donde X es un subespacio denso de $L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

Así, si tomamos $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$, debido a que X es denso en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$, podemos elegir una sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ para lo cual $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v} = 0$.

Por lo tanto, $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy y luego, por la desigualdad en norma (5.4) se tiene que $(\hat{f_n})_{n=1}^{\infty}$ es también una sucesión de Cauchy y como $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Banach, esta sucesión $(\hat{f_n})_{n=1}^{\infty}$ converge a un único elemento $\mathcal{G}(f) \in L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$.

Por lo tanto solo sabemos usando argumentos de límites, que $\mathcal{G}(f)$ es un elemento de $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$. Pero queremos encontrar expresiones para $\mathcal{G}(f)$, para ello veremos que es importante distinguir entre los casos:

$$i)\ v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$
$$ii)\ v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

En el caso i) mostraremos en la sección 2 una caracterización de $\mathcal{G}$ en términos de condiciones necesarias y suficientes para la validez de (5.4).

En el caso ii) mostraremos en la sección 3, bajo que condiciones la extensión $\mathcal{G}$ de la Transformada de Fourier de X a todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ coincide con la Transformada de Fourier ordinaria de $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ en el sentido de las distribuciones temperadas, y enunciaremos un teorema que afirma cuando la extensión $\mathcal{G}$ coincide con la transformada de Fourier ordinaria, es decir caracterizaremos cuando $\mathcal{G}(f) = \hat{f}$ c.t.p $[\mu]$; no daremos la demostración de este último resultado debido a la extensión de esta tesis pero la misma se encuentra en el trabajo de Benedetto-Lakey **[BeLa]**.

Para fijar ideas mencionamos qué tipos de pesos tenemos en mente, queremos que $C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p_v(\mathbb{R}^d)$ o más generalmente $L^\infty_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y en vista de la teoría de la restricción **[To]**, los pesos con los que trabajaremos corresponden a v una función no negativa localmente integrable y μ una medida no negativa.

Por lo tanto en este capítulo queremos abordar esencialmente dos cuestiones básicas en cuanto a la definición de la extensión de la Transformada de Fourier en espacios con peso. Las mismas corresponden a los casos donde los pesos duales $v^{1-p'}$ de v son localmente integrables o no lo son.

Antes de comenzar con el desarrollo de los resultados estudiados en cada caso daremos a continuación una breve descripción de las cuestiones técnicas a tener en cuenta.

5.1.1. Caso 1: $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

En la sección 2 de este capítulo se estudiará el caso en que el peso v cumple la condición $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. En este caso $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ contiene funciones que no son localmente integrables (**corolario 5.2.1**). Por lo tanto, estudiaremos en este caso la Transformada de Fourier cuando el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ contiene elementos que no son localmente integrables.

En este contexto, para estudiar las condiciones (5.2) y (5.3), consideraremos el caso donde X es un subespacio de $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ que consiste de funciones con integrales que se anulan, es decir el espacio que consideraremos es:

$$\begin{aligned} M_0(\mathbb{R}^d) &= \{f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d) / \hat{f}(0) = 0\} \\ &= \{f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d) / \int f(x)\ dx = 0\}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Recordemos también que en el capítulo 4 hemos demostrado que $M_0(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

Los principales autores que estudiaron este espacio fueron entre otros: **[He1]**, **[SW]**, **[BeHe1]**, **[Le]** y **[StW]**.

Como hemos enunciado en el capítulo anterior, el estudio de las condiciones (5.2) y (5.3) fueron desarrolladas principalmente por Benedetto y Heinig **[BeHe1]** y luego utilizando métodos diferentes por Carton-Lebrun **[Le]**.

Observemos también, que la conclusión que vimos en el **teorema 4.0.2**, que afirma que existe una constante $C > 0$ tal que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ se verifica que $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v}$, es precisamente la condición (5.4) para el caso en que el espacio X es $M_0(\mathbb{R})$. Notemos también que la condición (4.3) implica que $v^{1-p'}$ es integrable lejos del origen.

Con estas hipótesis y usando la desigualdad de Hölder más la condición (4.2) se tiene el siguiente lema:

Lema 5.1.1. *Sea v cualquier función no negativa tal que $|x|^{p'}v^{1-p'}(x)$ sea localmente integrable y tal que $v^{1-p'}(x)$ sea integrable fuera de un entorno del origen. Entonces para toda $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ f(x)\ dx$$

converge absolutamente para toda ξ.

En este caso la función

$$\mathcal{G}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ f(x)\ dx$$

es en realidad la extensión de la Transformada de Fourier definida en la condición (5.5) y que trabajaremos en el **Teorema 5.2.2**. Aquí el hecho de que $v^{1-p'}$ sea integrable lejos del origen juega un rol fundamental en la definición de la extensión $\mathcal{G}$. Estudiaremos esta situación en el **Teorema 5.2.5**.

A continuación daremos la **demostración del lema**:

Demostración. En efecto, dado $f \in L^p_v(\mathbb{R})$ tenemos que

$$|\int_{\mathbb{R}} \big(e^{-2\pi i\xi x} - 1\big)\ f(x)\ dx| \leq \int_{\mathbb{R}} |(e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ v^{-1/p}(x)\ f(x)\ v^{1/p}(x)|\ dx.$$

Por la desigualdad de Hölder y sabiendo que $|e^{-2\pi i\xi x} - 1| = 2|\mathrm{sen}(\pi\xi x)|$, y además teniendo presente la siguiente cuenta de exponentes $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ implica $\frac{-p'}{p} = 1 - p'$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} |(e^{-2\pi i\xi x} - 1)v^{-1/p}(x)\ f(x)\ v^{1/p}(x)|\,dx \\
&\leq \Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)v^{1/p}(x)|^p\ dx\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}} |(e^{-2\pi i\xi x} - 1)v^{-1/p}(x)|^{p'}\ dx\Big)^{1/p'} \\
&\leq 2\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p v(x)\ dx\Big)^{1/p}\Big(\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sen}(\pi\xi x)|^{p'} v^{-p'/p}(x)\ dx\Big)^{1/p'}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{\mathbb{R}} \big(e^{-2\pi i\xi x}-1\big)\ f(x)\ dx\Big| \leq 2\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}\ \Big(\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sen}(\pi\xi x)|^{p'} v^{-p'/p}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&= 2\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{sen}(\pi\xi x)|^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&\leq 2\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}\Big[\Big(\int_{|x|<1} |\mathrm{sen}(\pi\xi x)|^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)+\Big(\int_{|x|>1} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)\Big]^{1/p'}\\
&\leq 2\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}\Big[\Big(\int_{|x|<1} \big(\pi|\xi||x|\big)^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)+\Big(\int_{|x|>1} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)\Big]^{1/p'}\\
&\leq 2\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}\Big((\pi|\xi|)^{p'}\int_{|x|<1} |x|^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx+\int_{|x|>1} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}
\end{aligned}
$$

Como $|x|^{p'}v^{1-p'}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces $\int_{|x|<1} |x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx < \infty$ y como $v^{1-p'}$ es localmente integrable fuera del origen se tiene que $\int_{|x|>1} v^{1-p'}(x)\ dx < \infty$. Entonces concluimos que

$$
\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i\xi x}-1)\ f(x)\ dx < \infty.
$$

□

5.1.2. Caso 2: $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$

El segundo caso que estudiaremos corresponde al caso en que el peso v cumple la condición $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. En este caso se tiene que $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de distribuciones temperadas. Por lo tanto estudiaremos la definición de la Transformada de Fourier en el caso en que $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de distribuciones temperadas. Este problema se estudiará en la **sección 3**.

Recordando que una medida μ se llama *singular* si $\mu(B) = 0$ para cualquier conjunto B compuesto de un punto y si existe un conjunto A de medida de Lebesgue igual a cero tal que la medida μ de su complemento es igual a cero, podemos observar que la cuestión aquí proviene del hecho que la medida μ en (5.4) puede ser singular, por lo tanto tratamos de definir la transformada de Fourier de una distribución temperada sobre un conjunto de medida cero. Este problema es sutil y fue trabajado por la *Teoría de la Restricción*, entre otros podemos citar los trabajos de **[Be1]**, **[LeHe]** y **[To]**.

Para motivar este hecho, estudiaremos versiones triviales de la condición (5.4) donde μ es una *medida singular* y X es un subespacio denso de $L_v^p(\mathbb{R}^d)$ de funciones integrales cuya Transformada de Fourier se hace cero sobre el $\mathrm{sop}(\mu)$. Un ejemplo de ello, es el siguiente **ejemplo**.

Ejemplo 5.1.1. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ y sea v un peso tal que $X = \{f \in L^1 \cap L_v^p(\mathbb{R}^d) : \hat{f}(\xi) = 0 \quad (\forall \xi \in E)\}$ es denso en $L_v^p(\mathbb{R}^d)$.*

Entonces la desigualdad (5.4) resulta válida siempre que μ sea una medida con soporte en E y con $C = 0$.

En efecto sea $f \in X$, es decir que $f \in L^1 \cap L_v^p(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{f}|_E = 0$, entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} = \Big(\int_{E^c} \; |\hat{f}(\xi)|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \leq \|\hat{f}\|_{L^1} \; \mu(E^c)\\ &= 0 \leq 0\big(\int |f(x)|^p v(x) \; dx\big)^{1/p}\end{aligned}$$

Así la transformada de Fourier en (5.4) se extiende a la función trivial de $L_v^p(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L_\mu^q(\mathbb{R}^d)$.

Por otro lado, también daremos versiones no triviales y técnicas de (5.4) donde $L_v^p(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y $X = M_0(\mathbb{R}^d)$, pero donde la extensión $\mathcal{G}$ no coincide con la Transformada de Fourier en el sentido distribucional. Un ejemplo de ello es el ejemplo **5.3.2**, y el teorema **5.3.1** explica por qué puede suceder esto.

Para terminar esta sección damos un ejemplo que muestra como momentos nulos están relacionados a la transformada de Fourier de funciones que no son localmente integrables.

Ejemplo 5.1.2. *Sea el espacio $L_\beta^2(\mathbb{R}) = \{f : \int_{\mathbb{R}} \; |f(x)|^2 \; |x|^\beta \; dx < \infty\}$ con $1 < \beta < 2$, de modo que $v^{1-p'} \notin L_{loc}^1(\mathbb{R})$.*

En efecto, tomando $a, b > 0$ y como $v(x) = |x|^\beta$ entonces

$$\begin{aligned}\int_a^b \; v^{1-p'(x)} \; dx &= \int_a^b \; |x|^{\beta(1-p')} \; dx = \int_a^b \; x^{\beta(1-p')} \; dx\\ &= \frac{x^{\beta(1-p')+1}}{\beta(1-p')+1}\Bigg|_a^b = \lim_{a \longrightarrow 0} \frac{b^{\beta(1-p')+1}}{\beta(1-p')+1} - \frac{a^{\beta(1-p')+1}}{\beta(1-p')+1} = +\infty.\end{aligned}$$

ya que $1 < \beta < 2$ *y como* $p = 2$ *entonces* $p' = 2$ *y por ende* $-1 < \beta(1-p')+1 < 0.$

Además tomemos la función $f(x) = \frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x) \in L^2_\beta \backslash L^1_{loc}(\mathbb{R})$

En efecto,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x)\right|^2 |x|^\beta \ dx &= \int_0^1 \ \frac{1}{|x|^2}|x|^\beta \ dx \\ = \int_0^1 \ x^{\beta-2} \ dx &= \left.\frac{x^{\beta-1}}{\beta-1}\right|_0^1 = \frac{1}{\beta-1} < \infty\end{aligned}$$

Pero , $\int_{\mathbb{R}} \ |\frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x)| \ dx = \int_0^1 \frac{1}{x} \ dx = \ln|x||_0^1 = \text{lím}_{M \longrightarrow +\infty} \ln(1) - \ln(M) = -\infty$

Consideremos también las aproximaciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \ \frac{1}{n} < x < 1 \\ \\ -n\ln(x) & si \ \frac{-1}{n} < x < 0 \\ \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Luego $(f_n) \subseteq M_0(\mathbb{R}) \subseteq L^1 \cap L^2_\beta(\mathbb{R})$ *y* $\text{lím}_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f$ *en* $L^2_\beta(\mathbb{R})$

En efecto,

$$\begin{aligned}\hat{f}_n(0) &= \int_{\mathbb{R}} \ f_n(x) \ dx \\ &= \int_{\frac{-1}{n}}^0 -n\text{ln}(n) \ dx + \int_{\frac{1}{n}}^1 \ \frac{1}{x} \ dx \\ &= -n\text{ln}(n)x|_{\frac{-1}{n}}^0 + \ln(x)|_{\frac{1}{n}}^1 = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(f_n) \subseteq M_0(\mathbb{R})$.

Luego resta ver que, $\text{lím}_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f$ *en* $L^2_\beta(\mathbb{R})$. *En efecto:*

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{L^2_\beta(\mathbb{R})} &= \int_{-\infty}^{\frac{-1}{n}} |0|^2|x|^\beta \, dx + \int_{\frac{-1}{n}}^{0} n^2(\ln(n))^2(-1)^\beta x^\beta \, dx \\
&+ \int_0^{\frac{1}{n}} |0 - f(x)|^2|x|^\beta \, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} |\frac{1}{x} - \frac{1}{x}|^2|x|^\beta \, dx. \\
&= n^2(\ln(n))^2(-1)^\beta \frac{x^{\beta+1}}{\beta+1}\Big|_{\frac{-1}{n}}^{0} + \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{1}{x^2}x^\beta \, dx \\
&= n^2(\ln(n))^2(-1)^{\beta+1}\frac{(-1)^{\beta+1}}{(\beta+1)n^{\beta+1}} + \frac{x^{\beta-1}}{\beta-1}\Big|_0^{\frac{1}{n}} \\
&= n^2(\ln(n))^2\frac{(-1)^{2(\beta+1)}}{(\beta+1)n^{\beta+1}} + \frac{1}{(\beta-1)n^{\beta-1}} \\
&= n^{2-\beta-1}\frac{(\ln(n))^2}{\beta+1} + \frac{1}{(\beta-1)n^{\beta-1}} \\
&= \frac{(\ln(n))^2}{(\beta+1)n^{\beta-1}} + \frac{1}{(\beta-1)n^{\beta-1}} \\
&= \frac{(\beta+1)(\ln(n))^2 + (\beta+1)}{(\beta^2-1)n^{\beta-1}},
\end{aligned}
$$

y esta última cuenta, usando la regla de L'Hospital tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$.

Además podemos ver que:

$$\hat{f_n} = \ln(n)\Big(1 - e^{-2\pi i(\xi/n)}(\frac{\operatorname{sen}(\pi(\xi/n))}{\pi(\xi/n)})\Big) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{kk!}[1 - n^{-k}]$$

En efecto,

$$\hat{f_n}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\xi x} f_n(x) \, dx = \int_{\frac{-1}{n}}^{0} e^{-2\pi i\xi x}(-n\ln(n)) \, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x} \, dx$$

Observemos que $e^{-2\pi i\xi x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi x)^k}{k!}$, *entonces*

$$e^{-2\pi i\xi x} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^k = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^k$$

Por lo tanto,

$$\frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x} = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^{k-1}.$$

Reemplazando esta última cuenta nos queda:

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{e^{-2\pi i\xi x}}{x}\ dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^{k-1}\ dx = \Big(\ln(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ x^k \Big|_{\frac{1}{n}}^{1}$$

$$= \ln(1) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ 1^k - \ln(1/n) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ \frac{1}{n}^k$$

$$= \ln(n) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1 - n^{-k}).$$

Además tenemos mediante un cálculo simple:

$$\int_{\frac{-1}{n}}^{0} e^{-2\pi i\xi x}(-n\ln(n))\ dx = \frac{n\ln(n)}{2\pi i\xi}(1 - e^{\frac{2\pi i\xi x}{n}})$$

Entonces,

$$\hat{f}_n(\xi) = \frac{n\ln(n)}{2\pi i\xi}(1 - e^{\frac{2\pi i\xi}{n}}) + \ln(n) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1 - n^{-k})$$

y por lo tanto,

$$\hat{f}_n(\xi) = \ln(n)\Big(\frac{n}{2\pi i\xi}(1 - e^{\frac{2\pi i\xi}{n}}) + 1\Big) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1 - n^{-k})$$

Observemos que, $\frac{e^{\frac{\pi\xi i}{n}}-e^{\frac{-\pi\xi i}{n}}}{2i}=\operatorname{sen}\big(\frac{\xi\pi}{n}\big)$ *y por ende se tiene que,*

$$\begin{aligned}
\hat{f}_n(\xi) &= \ln(n)\big(\frac{n}{2\pi i\xi}(1-e^{\frac{2\pi i\xi}{n}})+1\big)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1-n^{-k}) \\
&= \ln(n)\big(\frac{n}{\pi\xi}(\frac{1-e^{2\pi i\xi/n}}{2i})+1\big)+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1-n^{-k}) \\
&= \ln(n)\big[\frac{n}{\pi\xi}\big(e^{\pi i\xi/n}\big(\frac{e^{-\pi i\xi/n}-e^{\pi i\xi/n}}{2i}\big)\big)+1\big]+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1-n^{-k}) \\
&= \ln(n)\big[\big(-e^{\pi i\xi/n}\frac{\operatorname{sen}(\pi\xi/n)}{\pi\xi/n}\big)+1\big]+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}\ (1-n^{-k})
\end{aligned}$$

Observemos también que usando $e^{-2\pi i\xi x}=1+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^k$ *y que* $f(x)=\frac{1}{x}\chi_{(0,1)}(x)\in L^2_\beta\backslash L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}(e^{-2\pi i\xi x}-1)\ f(x)\ dx=\int_0^1\frac{e^{-2\pi i\xi x}-1}{x}\ dx=\int_0^1\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\ x^{k-1}\ dx \\
&=\big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!}\frac{x^k}{k}\Big|_0^1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}
\end{aligned}$$

Así uno puede mostrar usando la regla de L'Hospital que $\hat{f}_n(\xi)$ *converge uniformemente sobre un compacto a la función:*

$$\mathcal{G}(f)(\xi)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-2\pi i\xi)^k}{k!k}=\int_{\mathbb{R}}(e^{-2\pi i\xi x}-1)\ f(x)\ dx$$

5.2. La definición de la Transformada de Fourier cuando $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ contiene funciones que no son localmente integrables

Esta sección puede ser vista en parte como la continuación del capítulo anterior, donde estudiamos las condiciones para que resulte válida la desigualdad (4.4), es decir, tomando $X = M_0(\mathbb{R}^d)$ cuando vale la condición (5.4) .

Vemos que el problema de definir la Transformada de Fourier en los espacios L^p pesados está relacionado con el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la condición (5.4). Esta asociación surge por las propiedades de densidad del espacio $M_0(\mathbb{R}^d)$ en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y depende si realmente $v^{1-p'}$ es o no es localmente integrable. Más precisamente, demostraremos en el **corolario 5.2.1** que el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ está incluído en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ si y solo si $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Nos enfocaremos en esta sección sobre el caso en que $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y demostraremos condiciones necesarias y suficientes para la validez de (4.4).

Comenzamos estudiando un teorema que extiende el teorema de densidad planteado en el **Teorema 4.0.3** que afirma:

"Dado un peso $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y sea $1 < p < \infty$. El espacio $M_0(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ si y solo si $v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R}^d)$".

Este teorema clarifica el papel de la condición de momentos en la definición de la transformada de Fourier de ciertas funciones que no son localmente integrables.

Teorema 5.2.1. *Dados $1 < p < \infty$ y un peso v localmente integrable y sea $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$.*

Supongamos que K es cualquier conjunto cerrado cuya frontera tiene medida de Lebesgue nula y para la cual $\int_K v^{1-p'}(x)\, dx = \infty$ y supongamos también que $\operatorname{sop}(f) \subseteq K$.

Entonces existe una sucesión $(f_n)_{n\in N} \subseteq M_0(\mathbb{R}^d)$ con $\operatorname{sop}(f_n) \subseteq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v} = 0$$

Demostración. Recordemos que en el capítulo anterior vimos que cualquier función que anula al espacio $\{f \in M_0(\mathbb{R}^d) : \operatorname{sop}(f) \subseteq K\}$ debe ser equivalente a una función constante sobre K, y así si esta constante es cero puede pertenecer sólo a $(L^p_v(\mathbb{R}^d))' \simeq L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)$.

Sea f dado como en las hipótesis del teorema pero también que pertenezca al espacio $L^\infty_c(\mathbb{R}^d)$. Además supongamos que $\hat{f}(0) \neq 0$.

Definimos las formas $f_{t,\alpha} = f - \hat{f}(0)\phi_{t,\alpha}$ donde $\phi_{t,\alpha}$ es el t-dilatado de la función característica de la bola unitaria centrada en α (normalizada para tener integral 1).

Más precisamente, sea $\phi(x) = \frac{d}{m(S_{d-1})}\chi_{B(0,1)}(x)$ y sea $\phi_t(x) = \frac{1}{t^d}\ \phi(\frac{x}{t})$ con $t > 0$, se define:

$$\phi_{t,\alpha}(x) = \phi_t(x-\alpha) = \frac{1}{t^d}\phi(\frac{x-\alpha}{t}).$$

Observar que $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_t(x-\alpha)\ dx = 1$.

En efecto para toda $\alpha \in \mathbb{R}^d$ y para toda $t > 0$ y tomando el cambio de variables $y = \frac{x-\alpha}{t}$, tenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi_t(x-\alpha)\ dx = \frac{d}{t^d\ m(S_{d-1})}\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B(0,1)}(\frac{x-\alpha}{t})\ dx$$
$$= \frac{d}{m(S_{d-1})}\int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B(0,1)}(y)\ dy = \frac{d}{m(S_{d-1})}m(B(0,1))$$

Y como se tiene usando el cambio de coordenadas polares:

$$m(B(0,1)) = \int_{B(0,1)} 1\ dx = \int_0^1 r^{d-1}\int_{S^{d-1}}\ d\sigma\ dr$$
$$= m(S_{d-1})\frac{r^d}{d}\Big|_0^1 = \frac{m(S_{d-1})}{d}$$

Concluimos que: $\int_{\mathbb{R}^d} \phi_t(x-\alpha)\ dx = 1$.

Demostremos que las formas $f_{t,\alpha} \in M_0(\mathbb{R}^d)$:

En efecto como $\hat{f}(0) \neq 0$, tenemos que para toda $t > 0$ y para toda $\alpha \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\phi_{t,\alpha}}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_{t,\alpha}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t(x-\alpha)\ dx = 1,$$

y por lo tanto, $\widehat{f_{t,\alpha}}(0) = \hat{f}(0) - \hat{f}(0)\widehat{\phi_{t,\alpha}}(0) = \hat{f}(0) - \hat{f}(0) = 0$.

Tomemos una función g que pertenezca a $(L^p_v(\mathbb{R}^d))' \simeq L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)$, es decir una función g que anula al espacio $M_0(\mathbb{R}^d)$ y así obtenemos que:

$$0 =< g, f_{t,\alpha} >=< g, f > -\hat{f}(0) < g, \phi_{t,\alpha} >$$

Por consiguiente para toda $t > 0$ y toda $\alpha \in \mathbb{R}^d$ se verifica que:

$$\begin{aligned}
&< g, f >= \hat{f}(0) < g, \phi_{t,\alpha} >= \hat{f}(0) \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\ \phi_{t,\alpha}(x)\ dx \\
&= \hat{f}(0) \frac{d}{t^d\ m(S_{d-1})} \int_{|x-\alpha| \leq t} g(x)\ dx
\end{aligned}$$

Observemos también que $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. En efecto como $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, $v > 0$ y $g \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)$ y utilizando además la desigualdad de Hölder, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_K g(t)\ dt = \int_K g(t) v^{1/p}(t) v^{\frac{1-p'}{p'}}(t)\ dt \\
&\leq \Big(\int_K |g(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt \Big)^{1/p'} \Big(\int_K v^{\frac{1}{p}p}(t)\ dt \Big)^{1/p} < \infty
\end{aligned}$$

Como $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, tenemos que:

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{d}{t^d\ m(S_{d-1})} \int_{|x-\alpha| \leq t} g(x)\ dx = g(\alpha)$$

para casi todo α, y por consiguiente casi todo punto α es un punto de Lebesgue de g perteneciente al interior de K.

Así para casi todo $\alpha \in \mathbb{R}^d$ fijo se verifica que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(t)f(t)\ dt = < g, f > = \hat{f}(0)g(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t)g(\alpha)\ dt$$

y por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}^d} (g(t) - g(\alpha))f(t)\ dt = 0 \quad \forall f \in L^p_v(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty_c(\mathbb{R}^d).$$

Entonces, $g(t) = g(\alpha)$ y por lo tanto, $g = k$, con k constante.

Observar que si $g = 0$, por el Teorema de Hahn- Banach se tiene que $\overline{M_0(\mathbb{R}^d)} = L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

En cambio si $g(t) = k \neq 0$ y como $g \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)$, es decir $\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt < \infty$, obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^{p'}\ v^{1-p'}(t)\ dt = |k|^{p'} \int_{\mathbb{R}^d} v^{1-p'}(t)\ dt < \infty$$

concluyendo así que $v^{1-p'} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.
Por consiguiente sabiendo que $g \in L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)$ y que por hipótesis $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces se tiene que $g = 0$.
Así demostramos que existe una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M_0(\mathbb{R}^d)$ tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$. $\square$

A partir del teorema anterior podemos enunciar el siguiente corolario que muestra cuando $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ está incluído en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Corolario 5.2.1. *Dado un peso $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Entonces el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ está incluido en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ si y solo si $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*

Este corolario afirma que si $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ no es un espacio de distribuciones, ya que una función no negativa f es localmente una distribución si y solo si f es localmente integrable.

Demostración. Supongamos primero que $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Queremos ver que $L^p_v(\mathbb{R}^d) \subseteq L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Sea cualquier conjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ y sea un función $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$, entonces usando la desigualdad de Hölder obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_K |f(x)|\ dx = \int_K |f(x)| v^{1/p}(x)\ v^{-1/p}(x)\ dx \\
&\leq \big(\int_K |f(x)|^p\ v(x)\ dx\big)^{1/p} \big(\int_K v^{\frac{-1}{p}p'}(x)\ dx\big)^{1/p'}
\end{aligned}$$

Como $\frac{-p'}{p} = 1 - p'$ pues $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_K |f(x)|\ dx \leq \big(\int_K |f(x)|^p v(x)\ dx\big)^{1/p} \big(\int_K v^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p'} \\
&\leq \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} (\|v^{1-p'}|_K\|_{L^1(\mathbb{R}^d)})^{1/p'} < \infty
\end{aligned}$$

Llegando así a que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Por otra parte, la otra dirección del corolario no es trivial porque la condición $v^{1-p'}\chi_K \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ es equivalente a que $v^{1-p'}\chi_K \notin L^p_v(\mathbb{R}^d)$.

En efecto como $p = \frac{p'}{p'-1}$ entonces $p - p'p = -p'$, y así tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\int_K (v^{1-p'})^p(x)\ v(x)\ dx = \int_K v^{p-p'p+1}(x)\ dx \\
&= \int_K v^{1-p'}(x)\ dx
\end{aligned}$$

En realidad no exhibimos un elemento de $L^p_v(\mathbb{R}^d) \backslash L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, más bien usamos el resultado de densidad del **Teorema 5.2.1**, llegando así a una contradicción.

En efecto, supongamos que $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, pero que el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ está incluído en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Observemos que esta última afirmación es equivalente a que para cada compacto K existe una constante C_k tal que, para cualquier función $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$\int_K |f(x)|\ dx \leq C_K \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \tag{5.7}$$

En efecto, si $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ entonces $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \ v(x) \ dx < \infty$, y así para cualquier compacto K se verifica que $\int_K |f(x)| \ dx < \infty$. Por lo tanto se observa que, $\frac{1}{\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}} \int_K |f(x)| \ dx < \infty$, concluyendo así que existe un C_K tal que

$$\int_K |f(x)| \ dx \leq \|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} C_K$$

En particular si el $\mathrm{sop}(f) \subseteq K$ entonces para cualquier función $g \in M_0(\mathbb{R}^d)$ que cumple que $\mathrm{sop}(g) \subseteq K_1 = \{x : \inf_{y \in K} |x - y| \leq 1\}$, se verifica usando que $K \subseteq K_1$, que :

$$|\hat{f}(0)| = |\hat{f}(0) - \hat{g}(0)| = |\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \ dx - \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \ dx| = |\int_K f(x) \ dx - \int_{K_1} g(x) \ dx|$$
$$\leq |\int_{K_1} (f(x) - g(x)) \ dx| \leq \int_{K_1} |f(x) - g(x)| \ dx$$

Como $f - g \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y usando (5.7), tenemos que:

$$|\hat{f}(0)| \leq \int_{K_1} |f(x) - g(x)| \ dx \leq C_{K_1} \|f - g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$$

Por el **Teorema 5.2.1** existe una sucesión $(f_n) \subseteq M_0(\mathbb{R}^d)$ tal que $\mathrm{sop}(f_n) \subseteq K_1$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y tal que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Tomando $g = f_n$ obtenemos que:

$$|\hat{f}(0)| \leq C_{K_1} \|f - f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$$

Como $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$, encontramos que $\hat{f}(0) = 0$. Pero como esto vale para toda función $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$, si f fuera no negativa, llegamos a un absurdo, pues sabemos que si $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \ dx = 0$ se tiene que $f = 0$ para casi todo x.

$\square$

A partir del corolario, observemos que para estudiar propiedades de tales espacios pesados $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ necesitamos un sustituto razonable para la transformada de Fourier. El siguiente teorema nos proporciona tal sustituto, es decir debemos pedir que $v^{1-p'}$ sea localmente integrable en $L^1_{|x|^{p'}}(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 5.2.2. *Dado un peso v localmente integrable tal que:*

$$v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \setminus L^1_{loc}(\mathbb{R}^d) \tag{5.8}$$

Si para cada $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v} \tag{5.9}$$

Entonces para cada $f \in L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)$ se tiene que

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v} \tag{5.10}$$

donde

$$\mathcal{G}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ f(x)\ dx.$$

Demostración. Sea $f \in L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)$, es decir $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y f tiene soporte compacto, o sea que $\mathrm{sop}(f) \subseteq K$.

Por el **Teorema 5.2.1** existe una sucesión $(f_n) \subseteq M_0(\mathbb{R}^d)$ donde $\mathrm{sop}(f_n) \subseteq K$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y donde se verifica que $lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$. Por otro lado usando la desigualdad de Hölder obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{G}f(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| = |\int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ f(x)\ dx - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\xi x} f_n(x)\ dx| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ f(x)\ dx - \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\xi x} f_n(x)\ dx + \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\ dx| \\
&= |\int_{\mathbb{R}^d\cap K} (f(x) - f_n(x))(e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ dx| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d\cap K} |(e^{-2\pi i\xi x} - 1)v^{-1/p}(x)(f(x) - f_n(x))v^{1/p}(x)|\ dx \\
&\leq (\int_{\mathbb{R}^d\cap K} |f(x) - f_n(x)|^p v(x)\ dx)^{1/p} (\int_{\mathbb{R}^d\cap K} |e^{-2\pi i\xi x} - 1|^{p'} v^{\frac{-p'}{p}}(x)\ dx)^{1/p'}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Como $|e^{-2\pi i\xi x}-1| = 2|\text{sen}(\pi\xi x)|$, obtenemos que:

$$|\mathcal{G}f(\xi)-\hat{f}_n(\xi)| \leq 2\|f-f_n\|_{L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)}\big(\int_{\mathbb{R}^d\cap K}|\text{sen}(\pi\xi x)|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p'}$$

$$\leq 2\|f-f_n\|_{L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)}\Big(\int_{\{|x|\leq 1\}\cap K}|\text{sen}(\pi\xi x)|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx+\int_{\{|x|>1\}\cap K}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}$$

$$\leq 2\|f-f_n\|_{L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)}\Big((\pi|\xi|)^{p'}\int_{\{|x|\leq 1\}\cap K}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx+\int_{\{|x|>1\}\cap K}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}$$

Por hipótesis sabemos que $v^{1-p'}\in L^1_{|x|^{p'},loc}\backslash^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto

$$\int_{\{|x|\leq 1\}\cap K}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx<\infty,$$

Así obtenemos que

$$\infty>\int_K v^{1-p'}(x)|x|^{p'}\ dx\geq\int_{\{|x|>1\}\cap K}v^{1-p'}(x)|x|^{p'}\ dx>\int_{\{|x|>1\}\cap K}v^{1-p'}(x)\,dx,$$

Además usando que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\|f-f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}=0$$

concluimos que:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}|\mathcal{G}f(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|=0$$

Por otro lado,

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu}=\big(\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{G}f(\xi)|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}=\big(\int_{\mathbb{R}^d}|(\mathcal{G}f(\xi)-\hat{f}_n(\xi))+\hat{f}_n(\xi)|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}$$

Usando la desigualdad de Minkowsky, tenemos que:

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu}\leq\big(\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{G}f(\xi)-\hat{f}_n(\xi)|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}+\|\hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)}$$

Así obtenemos que:

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu} \leq \|\mathcal{G}(f) - \hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} + \|\hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)}$$

Como $f_n \longrightarrow f$ en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ entonces la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$, pero por la hipótesis **5.9** se tiene que la sucesión $(\hat{f}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ resulta también de Cauchy en $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ y como éste es un espacio completo, entonces existe una función $g \in L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ tal que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\hat{f}_n - g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} = 0$$

Por lo tanto existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (f_n) tal que $\lim_{k\longrightarrow+\infty} \widehat{f_{n_k}} = g$ en casi todo punto.

Por otro lado probamos que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} |\mathcal{G}f(\xi) - \hat{f}_n(\xi)| = 0$$

Así obtenemos que $g = \mathcal{G}(f)$ en casi todo punto, concluyendo así que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|\hat{f}_n - \mathcal{G}(f)\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} = 0$$

Por lo tanto, usando la hipótesis **5.9** se tiene que

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu} &\leq \|\mathcal{G}(f) - \hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} + \|\hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)}\\ &\leq \|\mathcal{G}(f) - \hat{f}_n\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} + C\|f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}\end{aligned}$$

Resulta así tomando el límite cuando n tiende a más infinito que para toda $f \in L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$$

□

El resultado del teorema anterior solo vale para funciones con soporte compacto en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$, ya que solo se sabe que $\mathcal{G}(f)$ converge a priori para tales elementos. Si $v^{1-p'}$ resultara integrable fuera de un entorno del origen, que será el caso si la condición (4.3) es válida, entonces la convergencia absoluta de $\mathcal{G}(f)$ valdría por la desigualdad de Hölder, como hemos estudiado en el **lema 5.1.1**.

Ahora que estudiamos la extensión de $\mathcal{G}$ que deriva de las desigualdades en norma tales como la condición (4.4) o que es lo mismo, la desigualdad (5.4) si el espacio X es $M_0(\mathbb{R}^d)$, podemos enfocarnos en las condiciones necesarias y suficientes derivadas de tales desigualdades.

Probaremos primero que la desigualdad (4.2) es en el caso de una dimensión, una condición necesaria para que valga la condición (4.4).

Teorema 5.2.3. *Dado un peso $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ tal que sop$(\mu\backslash\{0\}) \neq \emptyset$ y sea $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que:*

$$v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \setminus L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

Entonces la condición (4.2) es una condición necesaria para la validez de la desigualdad en norma de la Transformada de Fourier (4.4).

Para demostrar este teorema necesitamos el siguiente resultado:

Lema 5.2.1. *Sean μ,v, q y p como en el* ***teorema 5.2.3*** *y supongamos que se tienen las condiciones:*

$$\sup_{s>0}\Big(\int_0^{1/4s}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_0^s|x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} = C_1 < \infty \tag{5.12}$$

$$\sup_{s>0}\Big(\int_{-1/4s}^0|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_0^s|x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} = C_2 < \infty \tag{5.13}$$

$$\sup_{s>0}\Big(\int_0^{1/4s}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{-s}^0|x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} = C_3 < \infty \tag{5.14}$$

$$\sup_{s>0}\Big(\int_{-1/4s}^0|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{-s}^0|x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} = C_4 < \infty \tag{5.15}$$

Entonces vale la condición (4.2) es decir se tiene que:

$$\sup_{y>0}\Big(\int_{|\xi|<y}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{|x|<1/y}|x|^{p'}v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}<\infty.$$

Demostración. Tomando el cambio de variables $y=\frac{1}{4s}$ y usando la desigualdad de Minkowsky, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
&\sup_{y>0}\Big(\int_{-y}^{y}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{-1/y}^{1/y}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&=\sup_{s>0}\Big(\int_{\frac{-1}{4s}}^{0}|\xi|^q\ d\mu(\xi)+\int_{0}^{\frac{1}{4s}}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\\
&\Big(\int_{-4s}^{0}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx+\int_{0}^{4s}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&\leq\sup_{s>0}\Big[\Big(\int_{\frac{-1}{4s}}^{0}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}+\Big(\int_{0}^{\frac{1}{4s}}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big]\\
&\cdot\Big[\Big(\int_{-4s}^{0}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}+\Big(\int_{0}^{4s}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\Big]\\
&\leq\sup_{s>0}\Big(\int_{\frac{-1}{4s}}^{0}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{-4s}^{0}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&+\sup_{s>0}\Big(\int_{\frac{-1}{4s}}^{0}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{0}^{4s}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&+\sup_{s>0}\Big(\int_{0}^{\frac{1}{4s}}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{-4s}^{0}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&+\sup_{s>0}\Big(\int_{0}^{\frac{1}{4s}}|\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}\Big(\int_{0}^{4s}|x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}\\
&=B_4+B_2+B_3+B_1<\infty
\end{aligned}$$

□

Ahora demostraremos el **Teorema 5.2.3:**

Demostración. Conforme a las hipótesis, mostramos que la primera condición del **Lema 5.2.1** vale.

Sea $g(x) = |x|^{\frac{p'}{p}} v^{1-p'}(x)\ \chi_{(0,s)}(x)$, veamos que $g \in L^p_{v,c}(\mathbb{R})$.

En efecto como $p - p'p = -p'$ tenemos que:

$$\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R})} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \big(|x|^{\frac{p'}{p}} v^{1-p'}(x)\big)^p \chi_{(0,s)}(x)\ v(x)\ dx\Big)^{1/p}$$
$$= \Big(\int_0^s |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p} < \infty$$

esta última desigualdad vale porque $v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \backslash L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Observemos de la cuenta anterior que:

$$\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R})} = \Big(\int_0^s |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p}.$$

Por otra parte tenemos que,

$$\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu} = \big(\int_{\mathbb{R}} |\mathcal{G}g(x)|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)g(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$
$$= \Big(\int_{\mathbb{R}} \big|\int_0^s (e^{-2\pi i\xi x} - 1)|x|^{\frac{p'}{p}} v^{1-p'}(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$
$$\geq \Big(\int_0^{\frac{1}{4s}} \big|\int_0^s (e^{-2\pi i\xi x} - 1)|x|^{\frac{p'}{p}} v^{1-p'}(x)\ dx\big|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$

Luego del hecho que $|z| \geq |\mathrm{Im}(z)|$ con $z \in \mathbb{C}$ y de que $\mathrm{sen}(\theta) \geq (\frac{2}{\pi})\theta$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, se sigue por reducción del dominio de integración que,

$$\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu} \geq \Big(\int_0^{\frac{1}{4s}} \big|\int_0^s \mathrm{sen}(2\pi\xi x)|x|^{\frac{p'}{p}} v^{1-p'}(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$

Como $0 \leq x \leq s$ y $0 \leq \xi \leq \frac{1}{4s}$, por lo tanto se tiene que $0 \leq 2\pi\xi x \leq \frac{\pi}{2}$ y así llegamos a que $\mathrm{sen}(2\pi\xi x) \geq 4\xi x$.

Usando el teorema de Fubini obtenemos que,

$$\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu} \geq 4\Big(\int_0^{\frac{1}{4s}} \big(\int_0^s |x|\ |\xi|\ |x|^{\frac{p'}{p}}\ v^{1-p'}(x)\ dx\big)^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$
$$\geq 4\big(\int_0^{\frac{1}{4s}} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_0^s |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\big)$$

Como por hipótesis sabemos que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ se verifica que $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$, por lo tanto tenemos por el **Teorema 5.2.2** que para toda función $f \in L^p_{v,c}(\mathbb{R})$ se cumple:

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R})}.$$

Tomando $g \in L^p_{v,c}(\mathbb{R})$ obtenemos que $\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R})} \leq C\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$.

Concluimos así que,

$$C\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R})} \geq \|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R})} \geq 4\big(\int_0^{\frac{1}{4s}} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_0^s |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\big)$$

Dividiendo en ambos lados por $\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$ y sabiendo que $\big(\int_0^{\frac{1}{4s}} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q} > 0$, obtenemos que:

$$\frac{C}{4} \geq \big(\int_0^{\frac{1}{4s}} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_0^s |x|^{p'}\ v^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p'}$$

obteniéndose así la primera condición del lema, las demás salen de la misma manera.

$\square$

Observación 5.2.1. *Observemos que hay una pequeña imprecisión en la técnica, que es el hecho que la condición (4.2) contiene una integral de la forma* $\int_0^{1/y} |\xi|^q d\mu(\xi)$ *mientras que en la demostración del teorema está restringida a* $\int_0^{1/4s} |\xi|^q d\mu(\xi)$.

Esto puede ser arreglado añadiendo la hipótesis que existe una constante $C > 0$ tal que para todo $s > 0$ se cumple que

$$\int_0^{1/s} |\xi|^q d\mu(\xi) \leq C \int_0^{1/4s} |\xi|^q d\mu(\xi)$$

o se cumple que

$$\int_0^{4s} |x|^{p'} v^{1-p'}(x) dx \leq C \int_0^{s} |x|^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx.$$

Y esta condición siempre se satisface para los pares de pesos que estamos estudiando.

Observación 5.2.2. *Observemos también que en la demostración del teorema usamos el resultado:*

$$\operatorname{sen}(\theta) \geq (\frac{2}{\pi})\theta \text{ con } \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \tag{5.16}$$

Notemos que si queremos hacer una versión del teorema para d-dimensiones, necesitamos dar una versión del resultado (5.16) para dimensiones más altas pues observemos que $\operatorname{sen}|\xi.x| \geq C|\xi||x|$ *falla ya que el conjunto* $\{(\xi, x) : \xi.x = 0\}$ *resulta una variedad en* $\mathbb{R}^{2d}$.
Sin embargo, podemos dar una versión del teorema para dimensiones más altas, aunque es un resultado más débil que las condiciones necesarias dadas anteriormente.

Lema 5.2.2. *Supongamos que $\mathbb{R}^d$ está simétricamente dividido en subconjuntos $E_1, E_2, ..., E_{n_d}$ de tal modo que para cualquier E_i fijo con $i = 1, 2, ..., n_d$, tenemos que:*

$$\xi.x \geq C_d|\xi||x|,$$

siempre que $(\xi, x) \in E_i \times E_i$.

Demostración. Primero dividamos $\mathbb{R}^d$ en cuadrantes K_j con $j = 1, ..., 2^d$ tal que para cada j, se cumpla que $\xi \cdot x \geq 0$ siempre que $(\xi, x) \in K_j \times K_j$.

Ahora tomemos ε_d razonablemente pequeño y para cada j fijo, dividamos simétricamente a $K_j \cap \Sigma_{d-1}$ en subconjuntos F_{jk} con $k = 1, ..., k_d$, de modo

que siempre que $(\xi', x') \in F_{jk} \times F_{jk}$ tenemos que $|\xi' - x'| < \varepsilon_d$.
Luego hacemos corresponder F_{jk} a las proyecciones de E_i sobre Σ_{d-1} y usamos el hecho que $\xi \cdot x = |\xi||x|\cos(\theta)$ donde θ es el ángulo entre ξ y x.

La condición $|\xi' - x'| < \varepsilon_d$ asegura que $\cos(\theta) \geq C_d$ y así,

$$\xi \cdot x = |\xi||x|\cos(\theta) \geq C_d|\xi||x|$$

□

Usando el lema mostramos que la desigualdad (4.2) resulta también una condición necesaria para la validez de la desigualdad en norma con pesos en el caso en que los pesos μ o v son radiales. Demostraremos con precisión el resultado para v radial. En el capítulo anterior ya observamos que los pesos radiales también juegan un papel importante en el estudio de las desigualdades en norma con peso para la Transformada de Fourier en el caso de d-dimensiones.

Teorema 5.2.4. *Dados $1 < p < \infty$ y $1 < q < \infty$, y sean pesos $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ con sop$(\mu \backslash \{0\}) \neq \emptyset$ y $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ radial que satisface $v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \setminus L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.*

Si además para toda función $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v}$, entonces:

$$\sup_{s>0} \Big(\int_{B(1/4s)} |\xi|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} < \infty \qquad (5.17)$$

Demostración. Demostremos algo más general. Sea v como en la hipótesis excepto que v no necesariamente es radial. Sea E_j como en el **Lema 5.2.2**.

Para $s > 0$ fijo, elegimos un conjunto E_j tal que $\int_{E_j \cap B(\frac{1}{4}s)} |\xi|^q\ d\mu(\xi)$ esté maximizado (sobre j).

Sea $g(x) = |x|^{p'-1}(v_r)^{1-p'}(x)\chi_{E_j \cap B(s)}(x)$, donde v_r es la parte radial de v definido mediante la fórmula:

$$v_r(x) = \frac{1}{w_{d-1}} \int_{\Sigma_{d-1}} v(|x|x')\ dx'$$

donde $r = |x|$ y $x' = \frac{x}{r}$ con $x \neq 0$. Cabe mencionar que w_{d-1} es el área de superficie de la esfera unitaria Σ_{d-1} de $\mathbb{R}^d$. Observemos que si v es radial, entonces $v = v_r$.

Tenemos que:

$$\|g\|^p_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p \ v_r(x) \ dx$$
$$= \int_{B(s)\cap E_j} |x|^{p'} \ (v_r)^{-p'}(x) \ v_r(x) \ dx = \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'} (v_r)^{1-p'}(x) \ dx$$

Por otro lado, observemos la siguiente cuenta,

$$\sum_{k=1}^{n_d} \int_{E_k\cap B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx = \int_{B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx$$

A su vez, por un cálculo elemental que implica la definición de v_r y las simetrías de los conjuntos E_j obtenemos,

$$\sum_{k=1}^{n_d} \int_{E_k\cap B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx$$
$$= \sum_{k=1}^{n_d} \int_{E_k\cap B(s)} |x|^{p'} \big(\frac{1}{w_{d-1}} \int_{\Sigma_{d-1}} v(|x|x') \ dx'\big)^{1-p'} \ dx$$
$$= C_d \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx$$

Y por lo tanto,

$$\int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx = \frac{1}{C_d} \int_{B(s)} |x|^{p'} \ (v_r)^{1-p'}(x) \ dx$$

Por consiguiente, tenemos sabiendo que $(1-p')p + 1 = 1 - p'$ que,

$$\|g\|^p_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{C_d}\int_{B(s)} |x|^{p'}\ (v_r)^{1-p'}(x)\ dx$$
$$\frac{1}{C_d}\int_{B(s)} |x|^{p'}\ (v_r)^{(1-p')p}(x)\ v_r(x)\ dx$$
$$\widetilde{C_d}\||x|^{\frac{p'}{p}}(v_r)^{1-p'}(x)\ \chi_{B(s)}(x)\|^p_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)}$$

También existe una constante K tal que $\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \leq K\|g\|_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)}$.

En efecto, usando coordenadas polares tenemos que:

$$\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |x|^{p'} v_r^{-p'}(x)\chi_{E_j\cap B(s)}(x)\ v(x)\ dx$$
$$= \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'} v_r^{-p'}(x) v(x)\ dx$$
$$= \int_0^s \int_{\Sigma_{d-1}\cap E_j} \rho^{d-1}\rho^{p'} v_r^{-p'}(\rho\theta) v(\rho\theta)\ d_{\sigma_{d-1}}(\theta)\ d\rho$$
$$= \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{-p'}(\rho e_1) \int_{\Sigma_{d-1}\cap E_j} v(\rho\theta)\ d_{\sigma_{d-1}}(\theta)\ d\rho$$
$$\leq \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{-p'}(\rho e_1) \int_{\Sigma_{d-1}} v(\rho\theta)\ d_{\sigma_{d-1}}(\theta)\ d\rho$$
$$= \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{-p'}(\rho e_1) w_{d-1} v_r(\rho e_1)\ d\rho$$
$$= C_1 \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{-p'+1}(\rho e_1)\ d\rho$$

Además, tenemos que,

$$\|g\|_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)} = \int_{Ej\cap B(s)} |x|^{p'} v_r^{1-p'}(x)\ dx$$
$$= \int_0^s \rho^{d-1} \int_{\Sigma_{d-1}\cap E_j} \rho^{p'} v_r^{1-p'}(\rho\theta)\ d_{\sigma_{d-1}}(\theta)\ d\rho$$
$$= \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{1-p'}(\rho e_1) m(\Sigma_{d-1}\cap E_j)\ d\rho$$
$$= C_2 \int_0^s \rho^{d-1+p'} v_r^{1-p'}(\rho e_1)\ d\rho$$

Y así tenemos que

$$\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_1}{C_2}\|g\|_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)},$$

O sea tenemos que

$$\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \leq K\||x|^{p'/p}\ v_r^{1-p'}(x)\chi_{B(s)}(x)\|_{L^p_{v_r}(\mathbb{R}^d)}.$$

Por otro lado, observemos que:

$$\|\mathcal{G}g\|^q_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{G}g(\xi)|^q\ d\mu(\xi)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} \big| \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'-1}(e^{-2\pi i\xi x}-1)(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)$$

y esto se debe a que:

$$\mathcal{G}g(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\xi x}-1)g(x)\ dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}^d} (e^{-2\pi i\xi x}-1)(v_r)^{1-p'}(x)|x|^{p'-1}\chi_{E_j\cap B(s)}(x)\ dx$$
$$= \int_{E_j\cap B(s)} (e^{-2\pi i\xi x}-1)(v_r)^{1-p'}(x)|x|^{p'-1}\ dx$$

Usando el hecho que para todo $z\in\mathbb{C}$ se tiene que $|z|\geq|Im(z)|$, llegamos a que

$$\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \geq \int_{\mathbb{R}^d} \big| \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'-1}(v_r)^{1-p'}(x)\ sen(2\pi\xi x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)$$
$$\geq \int_{E_j} \big| \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'-1}(v_r)^{1-p'}(x)\ \mathrm{sen}(2\pi\xi x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)$$
$$\geq \int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} \big| \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'-1}(v_r)^{1-p'}(x)\ \mathrm{sen}(2\pi\xi x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)$$

Usando el lema anterior, y observando que $0 \leq \xi \leq \frac{1}{4s}$ y que $0 \leq x \leq s$ llegamos a que $0 \leq 2\pi\xi x \leq \frac{\pi}{2}$, y así obtenemos que $\operatorname{sen}(2\pi\xi x) \geq \frac{2(2\pi\xi x)}{\pi} = 4\xi x \geq 4C_d|\xi||x|$.

Continuando con la cuenta anterior tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{G}g\|^q_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} &\geq \int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} \Big| \int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'-1}(x) 4C_d|\xi|\ |x|\ dx \Big|^q\ d\mu(\xi) \\
&= (4C_d)^q \int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q \Big(\int_{E_j\cap B(s)} |x|^{p'}\ (v_r)^{1-p'}(x)\ dx \Big)^q\ d\mu(\xi) \\
&= C\Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi) \Big)\Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx \Big)^q \qquad (5.18)
\end{aligned}
$$

Ahora tomando la raíz q-ésima obtenemos que:

$$
\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \geq C\Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi) \Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx \Big)
$$

Como por hipótesis tenemos que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$ y usando el **Teorema 5.2.2** obtenemos que, para toda función $f \in L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)$ se verifica que:

$$
\|\mathcal{G}f\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}. \qquad (5.19)
$$

Tomando $f = g \in L^p_{v,c}(\mathbb{R}^d)$ obtenemos por (5.18) y (5.19) que:

$$
\|\mathcal{G}g\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \leq C\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}. \qquad (5.20)
$$

Concluimos así que,

$$
C_1\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \geq \|\mathcal{G}g\|_{L^p_\mu(\mathbb{R}^d)} \geq C\Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi) \Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx \Big)
$$

Por lo tanto, dividiendo en ambos lados por $\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$ obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\frac{C_1}{C} &\geq \Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \frac{\big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\big)}{\|g\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}} \\
&\geq \frac{1}{K}\Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \frac{\big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\big)}{\big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\big)^{1/p}}
\end{aligned}
$$

Concluyendo así que,

$$
\widetilde{C_d} \geq \Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}
$$

Como para cada $K = 1, ..., n_d$ se tiene que:

$$
\Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \geq \Big(\int_{E_K\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q}
$$

obtenemos así que

$$
\begin{aligned}
n_d\widetilde{C_d} &= \sum_{k=1}^{n_d} \widetilde{C_d} \geq \sum_{K=1}^{n_d} \Big(\int_{E_j\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} \\
&\geq \sum_{K=1}^{n_d} \Big(\int_{E_K\cap B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'} \\
&\geq \Big(\int_{B(\frac{1}{4s})} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \Big(\int_{B(s)} |x|^{p'}(v_r)^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p'}
\end{aligned}
$$

□

A partir de los teoremas **5.2.2** y **5.2.4** nos preguntamos, si estimaciones no triviales de la Transformada de Fourier con estos dos pesos son posibles para funciones con momentos nulos en el caso donde $v^{1-p'}$ falla en ser integrable fuera del origen.

Sadosky y Wheeden **[SW]** respondieron a esta pregunta demostrando que no se puede tener estimaciones no triviales de la desigualdad (5.4) para $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ si $v(x) = |x|^{p-1}$, es decir tomando $v^{1-p'}(x) = |x|^{-1}$ con $p > 1$.

Ejemplo 5.2.1. *La desigualdad:*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^q u(x)\ dx\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p},$$

con $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $u(x) \neq 0$ *no es válida para toda función* $f \in M_0(\mathbb{R})$.

En efecto, para $N > 1$ *definimos:*

$$f(x) = f_N(x) = \frac{1}{x}\{\chi_{(1/N,1)}(x) - \chi_{(1,N)}(x)\}$$

donde $\chi_{(a,b)}$ *es la función característica del intervalo* (a,b).

Mediante un cálculo de integrales se tiene que $f \in M_0(\mathbb{R})$*:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx = \int_{1/N}^{1} \frac{1}{x}\ dx - \int_{1}^{N} \frac{1}{x}\ dx = 0$$

Además se tiene que:

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p} = (2ln(N))^{1/p}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |\frac{1}{x}\{\chi_{(1/N,1)}(x) - \chi_{(1,N)}(x)\}|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{1/N}^{1} |\frac{1}{x}|^p |x|^{p-1}\ dx + \int_{1}^{N} |\frac{-1}{x}|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{1/N}^{N} |x|^{-p+p-1}\ dx\Big)^{1/p} = \Big(\int_{1/N}^{N} \frac{1}{x}\ dx\Big)^{1/p} = (2ln(N))^{1/p}
\end{aligned}$$

Por otro lado, se tiene que:

$$|\hat{f}(x)|\ln(N) - 2\pi|x| - \frac{3}{2\pi|x|}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
&|\hat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx} f(y)\ dy| \\
&= |\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\{\chi_{(1/N,1)}(y) - \chi_{(1,N)}(y)\}\ dy| \\
&= |\int_{1/N}^{1} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\ dy - \int_{1}^{N} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\ dy| \\
&= |\int_{1/N}^{1} \frac{1}{y}\ dy + \int_{1/N}^{1} \frac{e^{-2\pi iyx} - 1}{y}\ dy - \int_{1}^{N} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\ dy| \\
&\geq \int_{1/N}^{1} \frac{1}{y}\ dy - |\int_{1/N}^{1} \frac{e^{-2\pi iyx} - 1}{y}\ dy| - |\int_{1}^{N} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\ dy|
\end{aligned}$$

Llamamos $A = |\int_{1/N}^{1} \frac{e^{-2\pi iyx}-1}{y}\ dy|$ *y sabiendo que* $|e^{-2\pi iyx}-1| = 2|\mathrm{sen}(\pi yx)| \leq 2\pi|y||x|$, *nos queda:*

$$\begin{aligned}
&A = |\int_{1/N}^{1} \frac{e^{-2\pi iyx} - 1}{y}\ dy| \leq \int_{1/N}^{1} |\frac{e^{-2\pi iyx} - 1}{y}|\ dy \leq \int_{1/N}^{1} \frac{2\pi|x|}{y} y\ dy \\
&= \int_{1/N}^{1} 2\pi|x|\ dy \leq 2\pi|x|
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene que $A \leq 2\pi|x|$.

Llamamos $B = |\int_{1}^{N} e^{-2\pi iyx}\frac{1}{y}\ dy|$ *y haciendo integración por partes se tiene que:*

$$
\begin{aligned}
&B = |\int_1^N e^{-2\pi i y x}\frac{1}{y}\ dy| \\
&= |\int_1^N \frac{1}{y}(\frac{e^{-2\pi i y x}}{-2\pi i x})' dy| = |\frac{1}{y}\ \frac{e^{-2\pi i y x}}{-2\pi i x}\Big|_1^N - \int_1^N \frac{-1}{y^2}\frac{e^{-2\pi i y x}}{-2\pi i x}\ dy| \\
&\leq \frac{1}{N}\frac{|e^{-2\pi i N x}|}{2\pi|x|} + \frac{|e^{-2\pi i x}|}{2\pi|x|} + \int_1^N \frac{|e^{-2\pi i y x}|}{2\pi|x|}\frac{1}{y^2}\ dy \\
&\leq \frac{1}{2\pi N|x|} + \frac{1}{2\pi|x|} + \frac{1}{2\pi|x|}\int_1^N \frac{1}{y^2}\ dy \leq \frac{1}{2\pi N|x|} + \frac{1}{2\pi|x|} + \frac{1}{2\pi|x|}(\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^2}\ dy). \\
&= \frac{1}{2\pi N|x|} + \frac{1}{2\pi|x|} + \frac{1}{2\pi|x|} \leq \frac{3}{2\pi|x|},
\end{aligned}
$$

y esta última cuenta se debe a que $N > 1$ implica $\frac{1}{N} < 1$

Por lo tanto se tiene que $B \leq \frac{3}{2\pi|x|}$

Por A y B concluimos que para todo x se cumple que:

$$
|\hat{f}(x)| \geq \ln(y)|_{1/N}^{1} - 2\pi|x| - \frac{3}{2\pi|x|} = \ln(N) - 2\pi|x| - \frac{3}{2\pi|x|}.
$$

Ahora si $u(x) \geq 0$ y $u(x) \neq 0$, tomando a, b con $0 < a < b < \infty$ y $\int_{a<\pi|x|<b} u(x)\ dx > 0$, se puede conseguir $N = N_{a,b}$ tan grande tal que se cumpla:

$$
|\hat{f}(x)| \geq \frac{1}{2}\ln(N) \text{ con } a < \pi|x| < b
$$

y que se cumpla:

$$
\big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^q\ u(x)\ dx\big) \geq \frac{1}{2}(\ln(N))\big(\int_{a<\pi|x|<b} u(x)\ dx\big)
$$

En efecto, teniendo en mente:

$$
\begin{aligned}
&a < \pi|x| < b \Longleftrightarrow 2a < 2\pi|x| < 2b \Longleftrightarrow -2b < -2\pi|x| < -2a \\
&\frac{3}{2b} < \frac{3}{2\pi|x|} < \frac{3}{2a} \Longleftrightarrow \frac{-3}{2b} > \frac{-3}{2\pi|x|} > \frac{-3}{2a},
\end{aligned}
$$

tenemos que:

$$-2\pi|x| - \frac{3}{2\pi|x|} > -2b - \frac{3}{2a}.$$

Y así tenemos que:

$$|\hat{f}(x)| \geq \ln(N) - 2\pi|x| - \frac{3}{2\pi|x|} \ \geq \ln(N) - 2b - \frac{3}{2a}$$

Además observemos que

$$\ln(N) - 2b - \frac{3}{2a} \geq \frac{1}{2}\ln(N)$$

es lo mismo que

$$\ln(N) \geq \frac{2a^2+3}{a}.$$

Por lo tanto se puede tomar N *tal que* $N \geq e^{\frac{2a^2+3}{a}}$ *y tal que se cumpla:*

$$|\hat{f}(x)| \geq \frac{1}{2} \ \ln(N)$$

para $a < \pi|x| < b$

Y así tenemos que,

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^q u(x)\ dx\Big)^{1/q} \geq \Big(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2^q}(\ln(N))^q u(x)\ dx\Big)^{1/q} \geq (\frac{1}{2}(\ln(N))$$
$$\Big(\int_{a<\pi|x|<b} u(x)\ dx\Big)^{1/q}$$

Por otro lado, sabemos que:

$$\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p|x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p} = (2\ln(N))^{1/p}$$

Entonces para $p > 1$*, contradecimos la desigualdad*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^q u(x)\ dx\Big)^{1/q} \leq C\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p},$$

pues, como $p > 1$ implica que $\frac{1}{p} < 1$ se tiene que $(2\ \ln(N))^{1/p} < 2\ \ln(N)$ y así obtenemos:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}|^q u(x)\ dx\Big)^{1/q} \geq \Big(\frac{1}{2}(\ln(N))\Big(\int_{a<\pi|x|<b} u(x)\ dx\Big)^{1/q}$$
$$> \frac{1}{4}\Big(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p |x|^{p-1}\ dx\Big)^{1/p}\Big(\int_{a<\pi|x|<b} u(x)\ dx\Big)^{1/q}$$

Observación 5.2.3. *Por otro lado, Carton-Lebrum **[Le]** demostraron que el resultado encontrado por Sadosky y Wheeden se preserva para dimensiones mayores.*

Sea $d > 1$, con $0 < q < \infty$ y $1 < p < \infty$. Supongamos que $\mu \in M(\mathbb{R}^d)$, donde μ no es identicamente cero sobre $\mathbb{R}^d$ y $\mu(\{0\}) = 0$.

Entonces no existe $C > 0$ tal que la desigualdad:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\gamma)|^q d\mu(\gamma)\Big)^{1/q} \leq C\Big(|\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p |x|^{d(p-1)}\Big)^{1/p}$$

valga para todo $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$.

Por otra parte, la condición (4.3) parece ser más restrictiva, ya que requiere que $v^{1-p'}$ sea integrable lejos del origen y que μ sea una medida acotada lejos del origen. El siguiente teorema muestra que la condición (4.3) es en algún sentido necesaria para una clase razonable de pesos.

Teorema 5.2.5. *Dados exponentes $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ y pesos $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ donde $sop(\mu\backslash\{0\}) \neq \emptyset$ y $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ que satisface: $v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc}\backslash L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Supongamos además que para todo $s > 0$ se cumple que*

$$v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R}^d \setminus (B(s))) \tag{5.21}$$

*Una condición necesaria para la validez de **(5.9)** es que:*

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \sup_{S>R} \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\frac{\int_{A(1,S)}(1-e^{-2\pi i\xi x})v^{1-p'}(x)dx}{\int_{A(1,S)} v^{1-p'}(x)dx}\Big|^q d\mu(\xi)\Big)^{1/q} = 0 \tag{5.22}$$

donde $A(R,S)$ es la corona circular $\{x : R \leq |x| \leq S\}$.

Demostración. Observemos que como $\sup_{S>R}\left(|\frac{\int_{A(1,S)}(1-e^{-2\pi i\xi x})v^{1-p'}(x)dx}{\int_{A(1,S)}v^{1-p'}(x)dx}|^q d\mu(\xi)\right)^{1/q}$ es decreciente, entonces el límite cuando $R\longrightarrow+\infty$ existe.

Supongamos que el límite (5.22) es distinto de cero y queremos llegar a una contradicción. Asumamos sin pérdida de generalidad, que μ tiene soporte compacto.

Como $v^{1-p'}\in L^1_{|x|^{p'},loc}\backslash L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y además como para todo $s>0$ se tiene que $v^{1-p'}\notin L^1(\mathbb{R}^d\backslash B(s))$, entonces existen sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $a_n\longrightarrow 0$ y $b_n\longrightarrow+\infty$ cuando $n\longrightarrow+\infty$ y tal que:

$$\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx=\int_{A(1,b_n)} w(x)\ dx\longrightarrow+\infty \tag{5.23}$$

cuando $n\longrightarrow+\infty$ y donde $w(x)=v^{1-p'}(x)$.

En efecto, sabemos que existe K_0 compacto tal que $\int_{K_0} w(x)dx=+\infty$

Si $0\notin K_0$, entonces existe $C>0$ tal que $|x|>C$ para todo $x\in K_0$. Por lo tanto,

$$\int_{K_0}|x|^{p'}w(x)\ dx\geq C\int_{K_0} w(x)\ dx=+\infty$$

Pero llegamos a un absurdo porque se sabe que para todo K compacto se tiene que $\int_K|x|^{p'}w(x)\ dx<+\infty$.

Por ende se tiene que $0\in K_0$ y así existe $0<R<1\ /B(0,R)=B_0$ tal que $\int_{B_0} w(x)\ dx=+\infty$.

Tomando una sucesión $(a_n)_n$ que tiende a cero se obtiene que,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\geq\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{A(a_n,1)\cap B_0} w(x)\ dx=\int_{B_0} w(x)\ dx=\infty$$

por lo tanto

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx=\lim_{n\longrightarrow+\infty} M_n=\infty.$$

Para ver la existencia de la sucesión $(b_n)_n$ comenzamos tomando $a_1=b_1=1$, luego para conseguir b_2 construimos la función continua en S y no acotada:

$$F(S) = \int_{A(1,S)} w(x)\ dx$$

que tiende a $+\infty$ cuando $S \longrightarrow +\infty$. Como F es sobreyectiva, entonces existe b_2 tal que $F(b_2) = M_2$, es decir:

$$\int_{A(1,b_2)} w(x)\ dx = F(b_2) = \int_{A(a_2,1)} w(x)\ dx,$$

y así sucesivamente.

Elijamos a continuación una sucesión (b_n) como sigue. Ya que suponemos que (5.22) falla, entonces existe $B > 0$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $b_n > 0$ para lo cual:

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \big|\int_{A(1,b_n)} (1-e^{-2\pi i\xi x}) w(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \geq B \int_{A(1,b_n)} w(x)\ dx. \quad (5.24)$$

Y elijamos la sucesión (a_n) de modo que valga la igualdad (5.23).

Por otro lado, $w_n(x) = w(x)\{\chi_{A(a_n,1)}(x) - \chi_{A(1,b_n)}(x)\}$. Por (5.23) tenemos que $w_n \in M_0(\mathbb{R}^d)$.

En efecto, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\hat{w_n}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} w_n(x)\ dx = \int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx - \int_{A(1,b_n)} w(x)\ dx = 0$$

Además se tiene que,

$$\begin{aligned}
&\|w_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |w_n(x)|^p v(x)\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{A(a_n,1)} |w(x)|^p\ v(x)\ dx + \int_{A(1,b_n)} |w(x)|^p v(x)\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{A(a_n,b_n)} v^{(1-p')p}(x)\ v(x)\ dx\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int_{A(a_n,b_n)} v^{1-p'}(x)\ dx\Big)^{1/p} = 2^{1/p}\Big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\Big)^{1/p}
\end{aligned}$$

Así

$$\|w_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 2^{1/p}\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p}. \tag{5.25}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\hat{w_n}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i\xi x} w_n(x)\ dx\\
&= \int_{A(a_n,1)} e^{-2\pi i\xi x} w(x)\ dx - \int_{A(1,b_n)} e^{-2\pi i\xi x} w(x)\ dx\\
&= \int_{A(a_n,1)} e^{-2\pi i\xi x} w(x)\ dx - \int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\\
&- \int_{A(1,b_n)} e^{-2\pi i\xi x} w(x)\ dx + \int_{A(1,b_n)} w(x)\ dx\\
&= \int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx - \int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx
\end{aligned}$$

Por lo que aplicando la norma en $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ y usando la desigualdad de Minkowsky tenemos que:

$$\begin{aligned}
&\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu}\\
&= \big(\int_{\mathbb{R}^d} \big| \int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx - \int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\\
&\geq \big(\int_{\mathbb{R}^d} \big| \int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1)\ w(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\\
&- \big(\int_{\mathbb{R}^d} \big| \int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx\big|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}
\end{aligned}$$

En efecto, observemos la siguiente cuenta:

Tomando $A = \int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx - \int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx$ y $B = \int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx$, entonces: $A - B = -\int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i\xi x} - 1) w(x)\ dx$ y así,

$$\big(\int_{\mathbb{R}^d} |A-B|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q} \leq \big(\int_{\mathbb{R}^d} |A|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q} + \big(\int_{\mathbb{R}^d} |B|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}$$

y así concluimos que,

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^d} |A|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \geq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |A-B|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} - \Big(\int_{\mathbb{R}^d} |B|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q}$$

que es lo mismo que decir que,

$$\begin{aligned}
&\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu} = \\
&\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx - \int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&\geq \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x) dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&- \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q}
\end{aligned}$$

Por la desigualdad (5.24), la cuenta anterior se sigue de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu} = \\
&\Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(1,b_n)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x) dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&- \Big(\int_{R^d} \Big|\int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&\geq B\Big(\int_{A(1,b_n)} w(x)\; dx\Big) - \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q} \\
&\geq B\Big(\int_{A(1,b_n)} w(x)\; dx\Big) - \Big(\int_{\mathbb{R}^d} \Big|\int_{A(a_n,1)} (e^{-2\pi i \xi x}-1)w(x)\; dx\Big|^q \; d\mu(\xi)\Big)^{1/q}
\end{aligned}$$

Como tenemos que,

$$|e^{-2\pi i \xi x} - 1| = 2|\mathrm{sen}(\pi \xi x)||e^{-\pi \xi x}| \leq 2\pi |\xi||x|$$

entonces:

$$\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu} \geq B\big(\int_{A(1,b_n)} w(x)\ dx\big) - \big(\int_{\mathbb{R}^d} \big(\int_{A(a_n,1)} 2\pi|\xi||x|\ dx\big)^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}$$
$$= B\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big) - \big(\int_{\mathbb{R}^d} |2\pi\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_{A(a_n,1)} |x|w(x)\ dx\big)$$

Observando que $A(a_n,1) \subseteq \overline{B(0,1)}$ obtenemos que $\big(\int_{A(a_n,1)} |x|^{p'}\ w(x)\ dx\big)^{1/p'} \leq \big(\int_{\overline{B(0,1)}} |x|^{p'}\ w(x)\ dx\big)^{1/p'}$ y por lo tanto usando la desigualdad de Hölder, tenemos que:

$$\big(\int_{A(a_n,1)} |x|\ w(x)\ dx\big) = \big(\int_{A(a_n,1)} |x|\ w^{1-\frac{1}{p}}(x)\ w^{\frac{1}{p}}(x)\ dx\big)$$
$$\leq \big(\int_{A(a_n,1)} |x|^{p'}\ w^{(1-\frac{1}{p})p'}(x)\ dx\big)^{1/p'}\big(\int_{A(a_n,1)} w^{\frac{p}{p}}(x)\ dx\big)^{1/p}$$
$$\leq \big(\int_{\overline{B(0,1)}} |x|^{p'}\ w(x)\ dx\big)^{1/p'}\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p}$$

Así continuamos la cuenta de la siguiente manera:

$$\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu} \geq B\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)$$
$$- \big(\int_{\mathbb{R}^d} |2\pi\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_{\overline{B(0,1)}} |x|^{p'}\ w(x)\ dx\big)^{1/p'}\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p}$$

Como el sop(μ) es compacto entonces $2\pi\big(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q} < \infty$ y como $v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \backslash L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces tenemos que $\int_{\overline{B(0,1)}} |x|^{p'}\ w(x)\ dx < \infty$. Con estas dos observaciones obtenemos que:

$$C_{\mu,v} = \big(\int_{\mathbb{R}^d} |2\pi\xi|^q\ d\mu(\xi)\big)^{1/q}\big(\int_{\overline{B(0,1)}} |x|^{p'}\ w(x)\ dx\big)^{1/p'} < \infty.$$

Por lo tanto tenemos que,

$$\|\hat{w_n}(\xi)\|_{L^q_\mu} \geq B\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big) - C_{\mu,v}\ \big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p} \qquad (5.26)$$

Por otro lado, usando la hipótesis que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ se cumple que $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} \leq C\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)}$ a $w_n \in M_0(\mathbb{R}^d)$, obtenemos usando **(5.25)** que:

$$\begin{aligned} \|\hat{w_n}\|_{L^q_\mu(\mathbb{R}^d)} &\leq C\|w_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2^{1/p}C\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p} \end{aligned} \qquad (5.27)$$

Concluyendo así de **(5.26)** y **(5.27)** que,

$$B\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big) - C_{\mu,v}\ \big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p} \leq 2^{1/p}C\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p}$$

Por lo que para todo $n \in \mathbb{N}$ obtenemos que

$$(2^{1/p}C + C_{\mu,v})\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{1/p} \geq B\big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)$$

Llegamos así a un absurdo porque $p > 1$ y $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx = +\infty$, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\frac{B}{2^{1/p}C + C_{\mu,v}} \leq \big(\int_{A(a_n,1)} w(x)\ dx\big)^{\frac{-1}{p'}},$$

y la parte izquierda de la desigualdad tiende a cero cuando n tiende a $+\infty$ porque $\frac{1}{p'} < 1$, pero por hipótesis $B > 0$. $\square$

Enunciamos ahora un corolario que muestra que la condición (4.3) se convierte en una condición necesaria si también asumimos que v satisface una doble condición. La demostración se puede encontrar en **[BeLa]**.

Corolario 5.2.2. *Sea* $d = 1$ *y supongamos que el peso* $w = v^{1-p'}$ *satisface la condición* $v^{1-p'} \in L^1_{|x|^{p'},loc} \backslash L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *y que para todo* $s > 0$ *se cumple que* $v^{1-p'} \notin L^1(\mathbb{R}^d \setminus (B(s)))$*, junto con una condición doble de la forma:*

$$(\forall x > 1) \quad (\forall y > 0) \quad \textit{se cumple} \int_x^{x+y} w(t)dt \geq C \int_x^{x+2y} w(t)dt. \tag{5.28}$$

Entonces la condición que afirma que existe $C > 0$ *tal que para toda función* $f \in M_0(\mathbb{R}^d)$ *se verifica que* $\|\hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C\|f\|_{L^p_v}$ *nunca puede valer para una medida* μ *no trivial.*

Observemos que si $v(x) = |x|^{p-1}$ o sea, $w(x) = |x|^{-1}$, tenemos que $\int_x^{x+y} w(t)\, dt = \ln(\frac{x+y}{x})$.

Por lo tanto, como $\frac{\ln((x+2y)/x)}{\ln((x+y)/x)}$ es uniformemente acotado cuando $x > 1$ y $y > 0$, vemos que el peso $w(x) = |x|^{-1}$ satisface la doble condición del corolario.

Concluimos con este corolario que si la condición doble **(5.28)** es válida y $w(x)$ no es integrable tanto en el cero como en el infinito, entonces la forma trivial de la condición **(5.9)** puede valer. Así mostramos que la condición (4.3) es una condición necesaria para una clase razonable de pesos.

El **Teorema 5.2.5** muestra que la condición (4.4) solamente vale si el par $(\mu, v^{1-p'})$ está en algún sentido mayormente concentrado donde $|1 - e^{-2\pi i\xi x}|$ es pequeño, es decir cerca del conjunto $\{(x, \xi) : \xi x \in \mathbb{Z}\}$.

En este caso puede ser que valga la condición (4.4) aún cuando (4.3) falla (ver el **ejemplo 5.4.2**).

Observación 5.2.4. *Existen versiones de (5.4) para pesos* v *que tienen "órdenes de singularidades más altas".*

Por ejemplo, incluso si $|x|^{p'}v^{1-p'}(x) \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*, se puede encontrar un* r *lo suficientemente grande de modo que* $|x|^{(r+1)p'}v^{1-p'}(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$*. Luego se reemplaza* $M_0(\mathbb{R}^d)$ *en las condiciones* ***(5.2)***, ***(5.3)*** *y* ***(5.4)*** *por un subespacio denso que consiste de las funciones que tienen momentos nulos de órdenes mayores.*

Por ejemplo sea

$M_r(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^\infty_c(\mathbb{R}^d) : (\forall \alpha) \quad |\alpha| \leq r, \ \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha \ f(x)\ dx = 0\}$ *donde* α *es un multíndice de longitud* $|\alpha|$.

*En el trabajo de **[SW]** se estudia que bajo ciertas condiciones $M_r(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y se demuestran versiones correspondientes de **(5.4)**.*

Sabiendo que A_p es la clase de las funciones w no negativas, localmente integrables sobre $\mathbb{R}$, con $1 < p < \infty$ y tal que cumplen la condición

$$\Big(\frac{1}{m(I)}\int_I w(x)\ dx\Big)\Big(\frac{1}{m(I)} w(x)^{\frac{-1}{p-1}}\ dx\Big)^{p-1} \leq A < \infty$$

para todo intervalo I en $\mathbb{R}$ y tomando el peso $W(x) = |x|^{kp}w(x)$, donde k es un entero positivo y w es un peso tal que $w \in A_p$ con $1 < p < \infty$, entonces la función:

$$\mathcal{G}f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big[e^{-2\pi i\xi x} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-2\pi i\xi x)^j}{j!}\big] f(x)\ dx.$$

converge absolutamente para casi todo x para cualquier $f \in L^p_w(\mathbb{R}^d)$.

*En cambio, Strömberg y Wheeden **[StW]** demostraron nuevas versiones de (5.4), donde v es de la forma $v = m(Q)^p w$ donde Q es un polinomio en $\mathbb{R}$ y w es un peso que satisface la condición A_p. En este caso no es claro cómo la Transformada de Fourier debería estar definida. Por ejemplo, uno podría tomar un núcleo para f de la forma:*

$$\sum_j \big[\sum_{k=k_j}^{\infty} \frac{(-2\pi i\xi(x-x_j))^k}{k_j!}\big]\chi_{K_j}$$

donde x_j son los ceros del polinomio Q que tiene multiplicidad k_j y el conjunto K_j corresponde a una partición de $\mathbb{R}^d$.

5.3. La definición de la Transformada de Fourier cuando $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de distribuciones temperadas

Supongamos que las condiciones (5.2), (5.3) y (5.4) valen y que $L^p_v(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Queremos ver cuando la extensión $\mathcal{G}$ de la transformada de Fourier de X a todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ coincide con la Transformada ordinaria de $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ como una distribución temperada.

Para ello, observemos que para que $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ esté incluído en el espacio $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ debemos pedir que $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

En efecto, dado $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ queremos ver que se identifica localmente con una distribución temperada.

Definamos $T_{f,K} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}$ mediante la fórmula:

$$T_{f,K}(\varphi) = \int_K f(x)\varphi(x)\ dx$$

donde $\varphi \in \mathcal{S}$ y donde K es compacto.

Veamos que es continua, para ello debemos encontrar un $C > 0$ y un $m \in \mathbb{N}_0$ tal que: $|T_{f,K}(\varphi)| \leq \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq m} p_{\alpha,\beta}(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}$

En efecto, usando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$|T_{f,K}(\varphi)| = |\int_K f(x)\varphi(x)\ dx| \leq \int_K |f(x)||\varphi(x)|dx$$
$$= \int_K |f(x)|v^{1/p}(x)|\varphi(x)|v^{-1/p}(x)dx$$
$$\leq \big(\int_K |f(x)|^p v(x)\ dx\big)^{1/p}\big(\int_K |\varphi(x)|^{p'} v^{-p'/p}(x)dx\big)^{1/p'}$$

Usando ahora que $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ obtenemos entonces que:

$$|T_{f,K}(\varphi)| \leq \big(\int_K |f(x)|^p v(x)\ dx\big)^{1/p}\big(\int_K |\varphi(x)|^{p'} v^{-p'/p}(x)dx\big)^{1/p'}$$
$$\leq p_{0,0}(\varphi)\|f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \int_K v^{1-p'}(x)\ dx$$

Como $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces se tiene que: $|T_{f,K}(\varphi)| \leq C\ p_{0,0}(\varphi)$.

Habíamos visto en el corolario (5.2.1) que si $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, entonces el espacio $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ está incluido en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ si y solo si $v^{1-p'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. O sea, si $v^{1-p'} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ entonces $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ no es una distribución, pues una función no negativa f es localmente una distribución si y solo si f es localmente integrable. Por lo tanto en este capítulo nos enfocamos en los problemas que surgen en la definición de la Transformada de Fourier para funciones de $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ incluídas en el espacio $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Por ejemplo, tenemos el siguiente criterio: **"Principio de incertidumbre local".**

Teorema 5.3.1. *Dados $1 < p, q < \infty$. Sea v y $\mu = u$ funciones localmente integrables. Supongamos además que valen **(5.2)**, **(5.3)** y la condición **(5.4)** y que para toda $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se tiene que:*

$$\|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}} \cdot \|\hat{\phi}\|_{L^{p'}_{v^{1-p'}}} < \infty. \tag{5.29}$$

Entonces la extensión $\mathcal{G} : L^p_v(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ coincide con la transformada de Fourier ordinaria en el sentido de las distribuciones temperadas.

Demostración. Sean $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ y $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ y sea una sucesión $(f_n) \subseteq X$ para lo cual $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Queremos ver que $< \mathcal{G}f, \phi > = < \hat{f}, \phi >$.

En efecto,

$$\begin{aligned} | < \mathcal{G}f - \hat{f}, \phi > | &= | < \mathcal{G}f - \hat{f}_n + \hat{f}_n - \hat{f}, \phi > | \\ &\leq | < \mathcal{G}f - \hat{f}_n, \phi > | + | < \hat{f}_n - \hat{f}, \phi > | \end{aligned} \tag{5.30}$$

Observemos que como $\mathcal{G}f - \hat{f}_n \in L^q_u(\mathbb{R}^d)$, podemos definir la funcional continua:

$$\begin{array}{rccc} T_{\mathcal{G}f-\hat{f}_n} : & \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \phi & \mapsto & \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)\phi(x)\, dx \end{array}$$

Esta funcional lineal resulta continua porque, dado un compacto $K \subseteq \mathbb{R}^d$ y dado $\phi \in C^\infty(K)$ obtenemos que:

$$| < T_{\mathcal{G}f-\hat{f}_n}, \phi > | \leq \int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f})(x)||\phi(x)|\, dx \leq \int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)|\; p_{0,K}(\phi)\, dx$$

donde $p_{0,K} = \sup_{x\in K} |\phi(x)|$.

Continuando la cuenta, usando la desigualdad de Hölder y sabiendo que $u^{1-q'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ tenemos que:

$$\int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)| \; dx \leq \big(\int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)|^q \; u(x) \; dx \big)^{1/q} \big(\int_K u^{1-q'}(x) \; dx \big)^{1/q'}$$
$$\leq C \|\mathcal{G}f - \hat{f}_n\|_{L^q_u(\mathbb{R}^d)}$$

Por otro lado observemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}f - \hat{f}_n &= \mathcal{G}(f - f_n) + \mathcal{G}(f_n) - \hat{f}_n \\ &= \mathcal{G}(f - f_n) + \hat{f}_n - \hat{f}_n = \mathcal{G}(f - f_n) \end{aligned}$$

Así tenemos por la cuenta anterior y por la desigualdad (5.5) que,

$$| < T_{\mathcal{G}f - \hat{f}_n}, \phi > | \leq C \|\mathcal{G}f - \hat{f}_n\|_{L^q_u(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f - f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} p_{0,K}(\phi)$$

Usando que $f_n - f$ tiende a 0 cuando n tiende a infinito en $L^p_v(\mathbb{R}^d)$. Concluyendo así que $\mathcal{G}(f) - \hat{f}_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Teniendo en cuenta la observación anterior y usando la desigualdad de Hölder, continuamos la cuenta **(5.24)** de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &| < \mathcal{G}f - \hat{f}_n, \phi > | = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x) \phi(x) \; dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)| \; |\phi(x)| \; dx \\ &\leq \int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)| \; |\phi(x)| \; u^{1/q}(x) \; u^{-1/q}(x) \; dx \\ &\leq \big(\int_K |(\mathcal{G}f - \hat{f}_n)(x)|^q \; u(x) \; dx \big)^{1/q} \big(\int_K |\phi(x)|^{q'} \; u^{(\frac{-1}{q})q}(x) \; dx \big)^{1/q'} \end{aligned}$$

Como tenemos que $\frac{-1}{q} = \frac{1-q'}{q'}$ implica que $\frac{-q'}{q} = 1 - q'$ y nuevamente por la desigualdad (5.5), entonces obtenemos que

$$
\begin{aligned}
&| < \mathcal{G}f - \hat{f}_n, \phi > | \leq \|\mathcal{G}f - \hat{f}_n\|_{L^q_\mu} \big(\int_K |\phi(x)|^{q'} \ u^{1-q'}(x) \ dx \big)^{1/q'} \\
&= \|\mathcal{G}f - \hat{f}_n\|_{L^q_\mu} \|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}} = \|\mathcal{G}(f - f_n)\|_{L^q_\mu} \|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}} \\
&\leq C\|f - f_n\|_{L^p_v} \|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}} \qquad (5.31)
\end{aligned}
$$

Por otro lado como $f - f_n \in L^p_v(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, entonces $f - f_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ y por lo tanto $< \widehat{f - f_n}, \phi >=< f - f_n, \hat{\phi} >$ para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Así tenemos usando la desigualdad de Hölder que para todo $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$,

$$
\begin{aligned}
&| < \hat{f}_n - \hat{f}, \phi > | = | < \widehat{f - f_n}, \phi > | = | < f - f_n, \hat{\phi} > | \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f - f_n)(x) \ \hat{\phi}(x) \ dx \\
&\leq \big(\int_{\mathbb{R}^d} |(f - f_n)(x)|^p \ v(x) \ dx \big)^{1/p} \big(\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{\phi}(x)|^{p'} \ v^{\frac{-1}{p}p'}(x) \ dx \big)^{1/p'} \\
&\leq \|f - f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \|\hat{\phi}\|_{L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)} \qquad (5.32)
\end{aligned}
$$

En consecuencia por **(5.30)** y **(5.31)** obtenemos,

$$
\begin{aligned}
&| < \mathcal{G}f - \hat{f}, \phi > | \leq C\|f - f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}(\mathbb{R}^d)} + \|f - f_n\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} \|\hat{\phi}\|_{L^{p'}_{v^{1-p'}}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leq \|f - f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \big(C\|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}(\mathbb{R}^d)} + \|\hat{\phi}\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}(\mathbb{R}^d)} \big)
\end{aligned}
$$

Por la hipótesis del teorema tenemos que $\|\phi\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}(\mathbb{R}^d)} < \infty$ y que $\|\hat{\phi}\|_{L^{q'}_{u^{1-q'}}(\mathbb{R}^d)} < \infty$ y, además tenemos que $\text{lím}_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^p_v(\mathbb{R}^d)} = 0$. Así concluimos que para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$

$$
| < \mathcal{G}f - \hat{f}, \phi > | = 0
$$

implica que

$$
< \mathcal{G}f, \phi >=< \hat{f}, \phi >
$$

Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, entonces:

$$< \mathcal{G}f, \phi > = < \hat{f}, \phi >$$

para todo $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$\square$

Observación 5.3.1. *Notar que el criterio (5.29) requiere que $u^{1-q'} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. En efecto usando la desigualdad de Hölder obtenemos que,*

$$\int_K u^{1-q'}(x)\ dx = \Big(\int_K u^{(\frac{-q'}{q})\frac{-q}{q'}}\Big)^{\frac{-q'}{q}} \Big(\int_K 1^{\frac{q}{q+q'}}\Big)^{\frac{q+q'}{q}}$$
$$\leq \|u\|_{L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)}^{\frac{-q'}{q}} m(K)^{\frac{q+q'}{q}} < \infty$$

Ya que estudiamos las desigualdades de la Transformada de Fourier con medidas de peso, esta condición excesivamente restrictiva.

Por otro lado, un elemento de $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ no tiene por qué ser una distribución temperada. Nos preguntamos entonces ¿qué significa la Transformada de Fourier de $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ como un elemento de $L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$?

Si definimos $\mathcal{G} : L^p_v(\mathbb{R}^d) \longrightarrow L^q_\mu(\mathbb{R}^d)$ mediante un argumento de límites, entonces al menos debemos exigir que $\mathcal{G}$ esté definida adecuadamente para cualquier $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$ de modo que la Transformada de Fourier ordinaria esté bien definida como un objeto puntual. En particular, si $f \in L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$ decimos que $\mathcal{G}f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ para casi todo punto $[\mu]$.

Un ejemplo trivial, pero que ilustra nuestro punto de vista, es el siguiente.

Ejemplo 5.3.1. *Sean $\mu = m + \delta$, donde m es la medida de Lebesgue y δ es la delta de Dirac y sea $v = m$.*

Sea $X = \{f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) : \hat{f}(0) = 0\}$. Veamos que $\mathcal{G}(f) = \hat{f}$ no coinciden en casi todo punto.

En efecto, tenemos que

$$\|\hat{f}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

para toda función $f \in X$.

Pues si $f \in X$ entonces se tiene que:

$$\begin{aligned}\|\hat{f}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \; d\mu(\xi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \; d_m(\xi) + \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \; d\delta(\xi)\end{aligned}$$

Recordemos que la función $d\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $d\delta(\phi) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi \; d\delta = \phi(0)$.

Por lo tanto, como $\hat{f}(0) = 0$ y usando el Teorema de Plancherel, tenemos que:

$$\|\hat{f}\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\xi)|^2 \; d_m(\xi) + |\hat{f}(0)| = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

Por otro lado, veamos que X es denso en $L^2(\mathbb{R}^d)$.

En efecto, sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, como $\overline{L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)} = L^2(\mathbb{R}^d)$ existe $g \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$.

Por otro lado, teniendo la función,

$$\begin{array}{rcl} \hat{\ }: L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^d) \\ g & \mapsto & \hat{g} \end{array}$$

definimos $\hat{h_n}(\xi) = \hat{g}(\xi)\chi_{(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n})^c}(\xi)$.

Observemos que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \hat{h_n}(\xi) = \hat{g}(\xi)$ para casi todo ξ y además que $|\hat{h_n}(\xi)| \leq |\hat{g}(\xi)|$. Por lo tanto tenemos que $|\hat{h_n} - \hat{g}|^2 \leq 2|\hat{g}|^2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Por el Teorema de la Convergencia mayorada y el Teorema de Plancherel concluimos que:

$$\begin{aligned}&\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|(h_n - g)(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|\widehat{h_n - g}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{h_n - g}(\xi)|^2 \; dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \longrightarrow +\infty} |\widehat{h_n - g}(\xi)|^2 \; dx = 0\end{aligned}$$

Por lo que tenemos que h_n tiende a g cuando n tiende a $+\infty$ en $L^2(\mathbb{R}^d)$, y así $\bar{X} = L^2(\mathbb{R}^d)$.

Como vale las condiciones (5.2), (5.3) y (5.4) entonces para toda función $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$\|\mathcal{G}(f)\|_{L^2_\mu(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Sin embargo no tenemos que $\mathcal{G}f(\xi) = \hat{f}(\xi)$ para casi todo ξ con respecto a $[\mu]$ cuando $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\hat{f}(0) \neq 0$.

En efecto, sea $f \in L^1 \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $\hat{f}(0) \neq 0$. Como $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\bar{X} = L^2$, entonces existe un sucesión $(f_n) \subseteq X$ tal que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$.

Como $\mathcal{G}(f_n) = \hat{f}_n$ y $\hat{f}_n(0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que:

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \hat{f}_n(0) = 0 \neq \hat{f}(0)$ *y $\delta(\{0\}) = 1$. Por lo tanto $\mathcal{G}(f)$ y $\hat{f}$ no coinciden en casi todo punto ya que en el cero no coinciden.*

Consideremos un ejemplo menos trivial de (5.4) motivado por el **Teorema 5.2.5**.

Ejemplo 5.3.2. *Sobre $\mathbb{R}$, tomamos $\mu = \delta_1$, la masa puntual de Dirac concentrada en $\xi = 1$.*

$$\delta_1(A) = \begin{cases} 1 & si\ 1 \in A \\ 0 & si\ 1 \notin A \end{cases}$$

Sea $p = q = 2$ y $1 < \alpha < 2$ y $\frac{2}{3} < \beta \leq 2$ y sean los conjuntos $E_n = \left[n - \frac{1}{2|n|^\beta}, n + \frac{1}{2|n|^\beta}\right]$ y $E = \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} E_n$.

Consideremos el peso:

$$v(x) = \begin{cases} (1 + |x|)^\alpha & si\ x \notin E \\ \frac{1}{|n|} & si\ x \in E_n \end{cases}$$

Entonces para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\|\hat{f}\|_{L^2_{\delta_1}} \leq C\|f\|_{L^2_v}.$$

En efecto, sea $f \in M_0(\mathbb{R})$*, escribimos* $f = f_1 + f_2 = f\chi_E + f\chi_{E^c}$.

Observemos también que $\hat{}: M_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\delta_1}(\mathbb{R})$.

Así, como $|e^{-2\pi ix} - 1| = |-2i\text{sen}(\pi x)e^{-\pi ix}| = 2|\text{sen}(\pi x)|$*, obtenemos que:*

$$
\begin{aligned}
\|\hat{f}\|_{L^2_{\delta_1}(\mathbb{R})} &= \big(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \ d\mu(\xi)\big)^{1/2} = |\hat{f}(1)| = \big|\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi ix} f(x) \ dx - \int_{\mathbb{R}} f(x) \ dx\big| \\
&= \big|\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi ix} - 1) \ f(x) \ dx\big| = \big|\int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi ix} - 1) \ f_1(x) \ dx + \int_{\mathbb{R}} (e^{-2\pi ix} - 1) \ f_2(x) \ dx\big| \\
&\leq 2\big(\int_{\mathbb{R}} |\text{sen}(\pi x)| \ |f_1(x)| \ dx + \int_{\mathbb{R}} |\text{sen}(\pi x)| \ |f_2(x)| \ dx\big) = 2(I_1 + I_2)
\end{aligned}
$$

Estimemos I_2 *usando la desigualdad de Hölder:*

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\text{sen}(\pi x)| \ |f_2(x)| \ dx &\leq \int_{\{|x|\leq 1\}} |\text{sen}(\pi x)| \ |f_2(x)| \ dx + \int_{\{|x|>1\}} |\text{sen}(\pi x)| \ |f_2(x)| \ dx \\
&\leq \pi \int_{\{|x|\leq 1\}} |x| \ v^{1/2}(x) \ v^{-1/2}(x) \ |f_2(x)| \ dx + \int_{\{|x|>1\}} |f_2(x)| \ dx \\
&\leq \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2 v^{-1}(x) \ dx\big)^{1/2}\big(\int_{\{|x|>1\}} |f_2(x)|^2 \ v(x) \ dx\big)^{1/2} + \int_{\{|x|>1\}} |f_2(x)| \ dx \\
&\leq \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2 \ v^{-1}(x) \ dx\big)\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + \int_{\{|x|>1\}} |f_2(x)| \ dx \\
&\leq \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2 \ v^{-1}(x) \ dx\big)\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + \int_{\{|x|>1\}\cap E^c} |f_2(x)| \ dx + \int_{\{|x|>1\}\cap E} |f_2(x)| \ dx \\
&= \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2 \ v^{-1}(x) \ dx\big)\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + \int_{\{|x|>1\}\cap E^c} |f_2(x)| \ dx
\end{aligned}
$$

$$= \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2\ v^{-1}(x)\ dx\big)\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + \int_{\{|x|>1\}\cap E^c} v^{-1/2}(x)\ v^{1/2}(x)\ |f_2(x)|\ dx$$
$$\leq \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2\ v^{-1}(x)\ dx\big)^{1/2}\|f\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$
$$+ \big(\int_{\{|x|>1\}\cap E^c} v^{-1}(x)\ dx\big)^{1/2}\big(\int_{\{|x|>1\}\cap E^c} |f_2(x)|^2\ v(x)\ dx\big)^{1/2}$$
$$\leq \pi\big(\int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2\ v^{-1}(x)\ dx\big)^{1/2}\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + \big(\int_{\{|x|>1\}\cap E^c} v^{-1}(x)\ dx\big)^{1/2}\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$
$$\leq \pi A\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})} + B\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$

Observemos que si $|x| \leq 1$, *tenemos que si* $x \in E_1$, *entonces* $v^{-1}(x) = 1$. *En cambio, si* $x \notin E$ *entonces* $v^{-1}(x) = (1+|x|)^{-\alpha}$ *y así concluimos que,* $(1+|x|)^{-\alpha} \leq |x|^{-\alpha}$ *y* $1 \leq |x|^{-\alpha}$. *Por lo que,*

$$A = \int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^2\ v^{-1}(x)\ dx \leq \int_{\{|x|\leq 1\}} |x|^{2-\alpha}\ dx.$$

y

$$B = \int_{\{|x|>1\}\cap E^c} v^{-1}(x)\ dx \leq \int_{\{|x|>1\}} (|x|+1)^{-\alpha}\ dx \leq \int_{\{|x|>1\}} |x|^{-\alpha}\ dx.$$

Continuando la cuenta obtenemos que:

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sen}(\pi x)|\ |f_2(x)|\ dx \leq \big[\pi\big(\int_{\{|x|<1\}} |x|^{2-\alpha}\ dx\big)^{1/2} + \big(\int_{\{|x|>1\}} |x|^{-\alpha}\ dx\big)^{1/2}\big]\|f_2\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$
$$\leq C_2\|f_2\|_{L^p_v(\mathbb{R})}.$$

Estimemos ahora I_1*:*

Escribamos $f_1(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} g_n(x)$ *donde* $g_n(x) = f(x)\chi_{E_n}(x)$.
Observemos que si:

$$Si\ x \in E_n \text{ entonces } n - \frac{1}{2|n|^\beta} \leq x \leq n + \frac{1}{2|n|^\beta}$$

que es lo mismo que

$$|x-n| \leq \frac{1}{2|n|^{\beta}} \text{ si y solo si } \pi|x-n| \leq \frac{\pi}{2|n|^{\beta}}$$

Además

$$|\mathrm{sen}(\pi(x-n))| = |\mathrm{sen}(\pi x)\cos(\pi n) - \cos(\pi x)\mathrm{sen}(\pi n)| = |(-1)^n \mathrm{sen}(\pi x)| = |\mathrm{sen}(\pi x)|$$

Así usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sen}(\pi x)|\ |f_1(x)|\ dx = \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sen}(\pi x)| \Big| \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} g_n(x) \Big|\ dx \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{E_n} |\mathrm{sen}(\pi x)|\ |f(x)|\ dx \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{E_n} |\mathrm{sen}(\pi(x-n))|\ |f(x)|\ dx \\
&\leq \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{E_n} |x-n|\ |f(x)|\ dx \ \leq \frac{\pi}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|n|^{\beta}} \int_{E_n} |f(x)|\ dx \\
&\leq \frac{\pi}{2} \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{|n|^{\frac{3\beta-1}{2}}} |n|^{\frac{\beta-1}{2}} \int_{E_n} |f(x)|\ dx \\
&\leq \frac{\pi}{2} \big(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{1-3\beta} \big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{\beta-1} \big(\int_{n-\frac{1}{2|n|^{\beta}}}^{n+\frac{1}{2|n|^{\beta}}} |f(x)|\ dx \big)^2 \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

Observemos que $-(1-3\beta) > 1$ *ya que* $\beta > \frac{2}{3}$, *por lo que tenemos la función zeta de Riemann:*

$$\big(\sum_{n\in\mathbb{Z}\{0\}} |n|^{1-3\beta} \big)^{1/2} = 2 \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^{3\beta-1}} = 2\xi(3\beta-1).$$

Entonces usando Hölder,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\pi}{2} (2\xi(3\beta-1))^{1/2} \big[\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{\beta-1} \big(\int_{\frac{n-1}{2|n|^{\beta}}}^{\frac{n+1}{2|n|^{\beta}}} 1^2\ dx \big) \big(\int_{\frac{n-1}{2|n|^{\beta}}}^{\frac{n+1}{2|n|^{\beta}}} |g_n(x)|^2\ dx \big) \big]^{1/2} \\
&= \frac{\pi}{2} (2\xi(3\beta-1))^{1/2} \big[\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{\beta-1} |n|^{-\beta} \big(\int_{\frac{n-1}{2|n|^{\beta}}}^{\frac{n+1}{2|n|^{\beta}}} |f(x)|^2\ dx \big) \big]^{1/2} \\
&= C_1 \big[\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{-1} \big(\int_{\frac{n-1}{2|n|^{\beta}}}^{\frac{n+1}{2|n|^{\beta}}} |f(x)|^2\ dx \big) \big]^{1/2}
\end{aligned}$$

Observar lo siguiente,

$$\|f_1\|^2_{L^2_v(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x)|^2\ v(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}}(x)|^2\ v(x)\ dx$$
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \int_{E_n} |f(x)|^2\ |n|^{-1}\ dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |n|^{-1} \int_{\frac{n-1}{2|n|^\beta}}^{\frac{n+1}{2|n|^\beta}} |f(x)|^2\ dx$$

Por lo tanto tenemos que:

$$I_1 \leq C_1\|f_1\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$$

Concluyendo tenemos que:

$$I_1 \leq C_1\|f_1\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$$
$$I_2 \leq C_2\|f_2\|_{L^p_v(\mathbb{R})}$$

Así,

$$\|\hat{f}\|_{L^2_{\delta_1}(\mathbb{R})} \leq C_1\|f_1\|_{L^p_v(\mathbb{R})} + C_2\|f_2\|_{L^p_v(\mathbb{R})} \leq (C_1 + C_2)\|f\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$

Hemos probado que para toda función $f \in M_0(\mathbb{R})$ *se verifica que*

$$\|\hat{f}\|_{L^2_{\delta_1}(\mathbb{R})} \leq C\|f\|_{L^2_v(\mathbb{R})},$$

donde $\mathcal{F} : M_0(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\delta_1(\mathbb{R})}$.

Entonces extendemos la función $\mathcal{F}$ *mediante la función* $\mathcal{G} : L^2_v(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2_{\delta_1}(\mathbb{R})$, *teniéndose así que:*

$$\|\mathcal{G}f\|_{L^2_{\delta_1}} \leq C\|f\|_{L^2_v(\mathbb{R})}$$

para toda función $f \in L^2_v(\mathbb{R})$.

Los espacios $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ en los ejemplos anteriores son espacios de distribuciones temperadas.

Concluimos este trabajo enunciando un resultado que estudia las condiciones para que la extensión $\mathcal{G}$ de la Transformada de Fourier a todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ coincida con la Transformada de Fourier ordinaria, es decir caracteriza bajo que condiciones $\mathcal{G}f = \hat{f}\ [\mu]$.

En lo que sigue nos restringuiremos a una clase de espacios L^p pesados de distribuciones temperadas, que incluyen los espacios considerados en los ejemplos anteriores. Estos espacios tienen la propiedad que si $f \in L^p_v(\mathbb{R}^d)$, entonces $\hat{f}$, como una distribución temperada, es equivalente a una función localmente integrable.

Comenzamos por la definición de los espacios *Amalgama Wiener.*

Los espacios Amalgama Wiener nos otorgan información sobre el comportamiento local y global de sus elementos.

Definición 5.3.1. *Dados $1 \leq p, q \leq \infty$, el espacio amalgama Wiener $W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Banach de funciones f que son localmente integrables en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y tienen un comportamiento l^q en el infinito, en el sentido que las normas L^p sobre los intervalos $[n, n+1)^d$ forman una sucesión de l^q.*

Más precisamente, para $1 \leq p, q \leq \infty$

$$W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} : \|f\|_{W(L^p,l^q)} = \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \big(\int_{Q_n} |f_n(x)|^p dx \big)^{q/p} \Big)^{1/q} < \infty\}.$$

Aquí Q_n denota la traslación por $n \in Z^d$ del cubo unitario $[0, 1)^d$, es decir, $Q_n = [n, n+1)^d$.

Observar que $f \in W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d)$ si y solo si, $\Big(\big(\int_{Q_n} |f_n(x)|^p dx \big)^{1/p} \Big)_n \in l^q(\mathbb{R}^d)$.

La idea de considerar los espacios amalgama Wiener, en contraposición al espacio de Lebesgue $L^p = W(L^p, l^p)$, es natural porque nos permite separar el comportamiento global de los comportamientos locales de una función. Esta idea se remonta al año 1926 y su primera aparición la encontramos en el trabajo de Norbert Wiener, en su desarrollo de la teoría del análisis armónico generalizado. En particular considera los casos especiales de $W(L^1, l^2)$ y

$W(L^2, l^\infty)$ en **[Wi]** y los espacios $W(L^\infty, l^1)$ y $W(L^1, l^\infty)$ en **[Wi1]**. El primer estudio sistemático de estos espacios se realizó recién en el año 1975 por el matemático Finbarr Holland **[Ho]**.

Entre los resultados más importantes y que se encuentran en el trabajo de Fournier y Stewart **[FoSt]** podemos enunciar los siguientes.

La escala de los espacios amalgama Wiener decrece cuando p crece y crece cuando q disminuye, es decir:

Si $q_1 < q_2$ entonces $W(L^p, l^{q_1}) \subseteq W(L^p, l^{q_2})$.

Si $p_1 < p_2$ entonces $W(L^{p_2}, l^q) \subseteq W(L^{p_1}, l^q)$.

Como dijimos anteriormente, el espacio $W(L^p, l^q)$ es un espacio Banach si $p, q \geq 1$. También se extiende la **desigualdad de Hölder** como es esperado:

Si $f \in W(L^p, l^q)$ y $g \in W(L^{p'}, l^{q'})$, donde $p, q \geq 1$ y $1/p' = 1 - 1/p$, entonces $f.g \in L^1$ y además:

$$\|f.g\|_1 \leq \|f\|_{W(L^p, l^q)} \|g\|_{W(L^{p'}, l^{q'})}.$$

El dual del espacio amalgama $W(L^p, l^q)$ es el espacio $W(L^{p'}, l^{q'})$ decir, si $1 \leq p, q < \infty$ entonces $(W(L^p, l^q))' \simeq W(L^{p'}, l^{q'})$.

Un importante hecho acerca de los espacios amalgamas Wiener es que provee un entorno natural para la generalización del Teorema de Hausdorff-Young.

Teorema 5.3.2. *Dados* $1 \leq p, q \leq 2$.

Si $f \in W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d)$ *entonces* $\hat{f} \in W(L^{q'}, l^{p'})(\mathbb{R}^d)$ *y existe una constante* C *tal que para toda función* $f \in W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d)$ *se verifica que*

$$\|\hat{f}\|_{W(L^{q'},\ l^{p'})(\mathbb{R}^d)} \leq C_{p,q} \|f\|_{W(L^p,\ l^q)(\mathbb{R}^d)}.$$

Además se tiene que si $g \in W(L^q, l^p)(\mathbb{R}^d)$ *y* $f \in W(L^p, l^q)(\mathbb{R}^d)$, *entonces:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\ \hat{f}(x)\ dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(x)\ f(x)\ dx.$$

El espacio Amalgama Wiener más grande que satisface las hipótesis del teorema de Hausdorff -Young es el espacio $W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$.
Definimos a continuación cuando un espacio $\mathcal{B}$ es sólido y veamos que el espacio $W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$ es el espacio sólido de Banach más grande.

Definición 5.3.2. *Un espacio de Banach $\mathcal{B}$ sobre $\mathbb{R}^d$ es* ***sólido*** *si siempre que $f \in \mathcal{B}$ y $|g| \leq |f|$ en casi todo punto, entonces $g \in \mathcal{B}$ y $\|g\|_{\mathcal{B}} \leq \|f\|_{\mathcal{B}}$.*

Ahora supongamos que $\mathcal{B}$ es sólido y que la Transformada de Fourier, definida inicialmente sobre $\mathcal{B} \cap L_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ tiene una extensión a una transformación lineal continua de $\mathcal{B}$ al espacio $\hat{\mathcal{B}}$, de las funciones medibles sobre $\mathbb{R}^d$. Además supongamos que la convergencia en $\hat{\mathcal{B}}$ implica la convergencia local en medida. Bajo estas hipótesis tenemos el siguiente teorema cuya demostración se encuentra en el trabajo de Aronszajn y Szeptycki **[ArSZ]**.

Teorema 5.3.3. *$\mathcal{B} \subseteq W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$ y la inclusión inyectiva $\mathcal{B} \hookrightarrow W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$ es continua.*

Este teorema afirma que el espacio Amalgama $W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$ es el espacio sólido de Banach más grande, que da un mapeo vía la Transformada de Fourier en un espacio de funciones.

Para enunciar el último teorema, que dice en algún sentido, que una desigualdad en norma para la Transformada de Fourier como en (5.4) solo puede fallar en extenderse a la Transformada de Fourier ordinaria si el subespacio denso $X \subseteq L^1 \cap L_v^p(\mathbb{R}^d)$ está definido en términos del conjunto de ceros de la Transformada de Fourier, trabajaremos con espacios L^p pesados cuyos elementos tienen Transformada de Fourier que existen como funciones. Así, asumimos que nuestros espacios L^p pesados están continuamente incluídos en $W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$. Un ejemplo de ello es el caso, si $1 \leq p \leq 2$ y $v^{1-p'} \in W(L^1, l^\infty)(\mathbb{R}^d)$.

La demostración de dicho teorema se encuentra en el trabajo de Benedetto y Lakey **[BeLa]**.

Teorema 5.3.4. *Dados pesos $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ y $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ y exponentes $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. Supongamos que $L_v^p(\mathbb{R}^d) \subseteq W(L^1, l^2)(\mathbb{R}^d)$ (una inclusión continua), y que $X \subseteq L^1 \cap L_v^p(\mathbb{R}^d)$ cumplen las propiedades (5.2), (5.3) y (5.4).*

Sea $\mathcal{G}$ la extensión de la transformada de Fourier a todo $L^p_v(\mathbb{R}^d)$ por continuidad. Luego, $\mathcal{G}$ coincide con la Transformada de Fourier ordinaria en el sentido que para toda función $f \in L^1 \cap L^p_v(\mathbb{R}^d)$ se verifica que

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{G}f(\xi) \text{ en casi todo punto } [\mu].$$

si y solo si, existe una constante $C' > 0$ tal que para toda $f \in X$ y para toda $\eta \in \mathbb{R}^d$ se cumle que

$$\|\tau_\eta \hat{f}\|_{L^q_\mu} \leq C' \|f\|_{L^p_v}.$$

Por último enunciamos un teorema que da una representación (en una dimensión) para la Transformada de Fourier de funciones en $L^p_v(\mathbb{R})$ cuando $L^p_v(\mathbb{R}) \subseteq W(L^1, l^2)(\mathbb{R})$.

Teorema 5.3.5. *Dada $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Supongamos que $L^p_v(\mathbb{R})$ está continuamente incluido en $W(L^1, l^2)(\mathbb{R})$. Entonces la Transformada de Fourier está dada por:*

$$\mathcal{G}(f)(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{-2\pi i \xi x} - 1)}{2\pi i x} \; f(x) \; dx \tag{5.33}$$

en casi todo punto.

Demostración. Sólo necesitamos probar que la ecuación (5.33) es válida para $f \in W(L^1, l^2)(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Hausdorff- Young se tiene que para toda función $g \in W(L^2, l^1)(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x) \; g(x) \; dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \; \hat{g}(x) \; dx.$$

Tomando $g = \chi_{[0,\xi]}$ y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo tenemos que:

$$\int_0^\xi \hat{f}(x) \; dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{-2\pi i \xi x} - 1)}{2\pi i x} \; f(x) \; dx$$

entonces

$$\hat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{-2\pi i \xi x} - 1)}{2\pi i x} \; f(x) \; dx$$

y por lo tanto que

$$\mathcal{G}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{(e^{-2\pi i \xi x} - 1)}{2\pi i x} \, f(x) \, dx$$

en casi todo punto.

$\square$

Bibliografía

[AgHa] Néstor Aguilera y Eleonor O. Harboure *On the search for weighted norm inequalities for the Fourier Transform*, Pacific Journal of Mathematics. **Vol 104**, N° 1 (1983), p.p 1-14.

[ArSZ] N. Aronszajn y P.Szeptycki *On general integral transformations* Math. Ann. **163** (1966), p.p 127-154.

[Be] William Beckner, *Inequalities in Fourier Analysis on* $\mathbb{R}^n$, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **Vol.72, N°2**, (Febrero 1975), p.p 638-641.

[Be1] J. Benedetto *A multidimensional Wiener-Wintner theorem and spectrum estimation*, Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), p.p 833-852.

[Be2] J. Benedetto *Spectral Synthesis.* Academic Press, New York, (1975).

[BeHe] J.J. Benedetto and H.P. Heinig *Weighted Hardy Spaces and The Laplace Transform*,Harmonic Analysis Proceedings, Cortona. Mauceri, G; Ricci,F; and Weiss,G. Eds, Lecture Notes in Mathematics **992** (1982), p.p 240-277. Springer-Verlag.

[BeHe1] John J. Benedetto y Hans Heinig *Fourier transform inequalities with measure weights*, Adv. Math. **96** (1992), p.p 194-225.

[BHJ] J.J. Benedetto, H. Heinig and R. Johnson, *Fourier inequalities with* A_p *weights* General Inequalities, 5 (W. Walter, ed.) Internat. Ser. Numer. Math. **80**(1987), p.p 217-232.

[BeLa] John J. Benedetto and Joseph D. Lakey, *The definition of the Fourier Transform for Weighted Inequalities*, Journal of Functional Analysis **120**. (1994). p.p 403-439.

[FoSt] John J.F Fournier y James Stewart *Amalgams of* L^p *and* l^q. Bulletin of the American Mathematical Society , **Vol. 13**, N°1, (1985), p.p 1-21.

[He] Heinig, H.P., *Weighted norm inequalities for classes of operators*, Indiana Univ. Math. J,**33**, (1984), p.p 573-582.

[He1] Heinig, H.P. *Fourier operators on weighted Hardy spaces.* Math. Proc. Cambrige Philos. Soc. **101**(1987), p.p 103-121.

[He2] C. Herz.*A note on the span of translates in L^p*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), p.p 724-727.

[Ho] Finbarr Holland. *Harmonic Analysis on Amalgams of L^p and l^q.* J. London Math. Soc. **2**, 10 (1975), p.p 295-305.

[Hos] Osvaldo Pio Hossan. Director: Angel Eduardo Gatto *Problemas de Pesos para la Transformada de Fourier.* Tesis de Licenciatura. Diciembre 1985. Universidad de Buenos Aires.

[JS] Jurkat, W and Sampson, G. *On rearrangement and weight inequalities for the Fourier Transform*,Indiana Univ. Math. J,**33**, (1984), p.p 257-270.

[La] M.T.Lacey,*Carleson's Theorem: proof, complements, variations*, publi. Mat. **48**, (2004), p.p 251.307.

[Le] C. Carton Lebrun *Fourier inequalities with nonradial weights*, Transactions of the American Mathematical Society Volumen **333**, N^o 2, (1992), p.p 751-767.

[LeHe] C. Carton- Lebrun and H. Heinig, *Weigthed extensions of restriction theorems for the Fourier transform*, in "Fourier Analysis ans Applications"(J. Byrnes, Ed.), p.p 579-596, Kluwer, Dordrecht, (1989).

[Mu] Benjamín Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for classical operators*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, **Vol XXXV, Pat. I**, (1979), p.p 69-83.

[Mu1] Benjamín Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Fourier Transform*, Transactions Of the American Mathematical Society, **Vol. 276, N^{o}2**, (1983), p.p 729-742.

[Pi] H.R Pitt, *Theorems on Fourier series and power series*, Duke Math. J.,**3** (1937),p.p 747-755.

[StW] Jan-Olov Strömberg and Richard L. Wheeden, *Weighted norm estimates for the Fourier Transform with a pair of weigths* Transactions of the American Mathematical Society, **Volumen 318, N^{o}1**, (1990), p.p 355-372.

[StWe] Stein and Weiss, *Introduction analysis on euclidean spaces* **Cap. 1** Pricenton, New Jersey. Pricenton University Press, **1971**, p.p 1-35.

[SW] Cora Sadosky and Richard L. Wheeden, *Some weighted norm inequalities for the fourier transform of functions with vanishing moments* Transactions of the American Mathematical Society. **volumen 300, N^{o} 2**. (1987), p.p 521-533.

[Ti] E. C. Titchamrsh *Introduction to the theory of Fourier integrals*, second edition, Oxford University Press, (1948).

[To] P. Tomás *A restriction theorem for the Fourier transform*, Bull. Amer. Math. Soc. **1** (1975), p.p 477-478.

[Wi] N.Wiener *On the representation of functions by trigonometrical integrals*, Math.Z **24** (1926),p.p 575-616.

[Wi1] N. Wiener *Tauberian theorems*, Ann. of Math. **33**(1932), p.p 1-100.

[Zy] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, 2^{o} edición, volumen 2, Cambridge University Press, Cambrige, Eng. **1968**.