



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Abanicos de Gröbner y Variedades Tropicales

Juan Manuel Mareso

Directora: Dra. Alicia Dickenstein

21/07/09

A mi abuela Zulema,
promesa cumplida.

Agradecimientos

A mis padres, que me dieron la posibilidad de estudiar.

A mis hermanos y mis abuelos por apoyarme y alegrarse por mis pequeños logros a lo largo de todos estos años.

A Mame por su amor, su paciencia y su aliento constante sin el cual el trabajo hubiera sido doblemente duro.

A Alicia Dickenstein por dirigirme en esta tesis, por el tiempo y el esfuerzo dedicado y principalmente por transmitir su conocimiento con tanta pasión y amor por la matemática.

A aquellos compañeros con los que compartí buenos momentos en alguna o varias materias y seguro me olvido de alguien si empiezo a mencionar.

A mis amigos de siempre: Patty, Pablo, Niky, Chouch, Fede, Nico, Lizandro, Maxi, Hernán y Julián por haber sido mi cable a tierra durante tantos años de estudio.

A la familia Nardi, por su constante apoyo.

A mis compañeros del CBC y la UTN por hacer del trabajo algo tan placentero.

A todos, muchas gracias.

Juan Manuel Mareso

Índice general

Agradecimientos	5
0.1. Introducción	9
Capítulo 1. El abanico de Gröbner de un ideal	11
1.1. Complejos Poliedrales	11
1.2. Bases de Gröbner	14
1.3. El abanico de Gröbner de un ideal. Definición y ejemplos	17
1.4. El abanico de Gröbner es un abanico	19
Capítulo 2. Geometría Tropical	27
2.1. El semianillo tropical	27
2.2. Polinomios	28
2.3. Raíces de un polinomio tropical	30
2.4. Valuaciones	32
2.5. Tropicalización de un polinomio	34
2.6. Tropicalización de un ideal y teorema de Kapranov	38
Capítulo 3. Variedades Tropicales	41
3.1. Tropicalización de un ideal en $\mathbb{C}[x]$	41
3.2. Bases tropicales	44
3.3. Cálculo de prevariedades tropicales y bases tropicales	48
Capítulo 4. Variedades Tropicales por proyecciones regulares	53
4.1. Proyecciones y el teorema principal	53
4.2. El teorema de extensión tropical	60
Bibliografía	63

0.1. Introducción

Encontrar las soluciones de un sistema de ecuaciones polinomiales es un problema clásico de la matemática. El caso particular en que las ecuaciones son lineales se resuelve mediante eliminación Gaussiana. En el caso general de ecuaciones polinomiales, el método análogo para su resolución es el algoritmo de Buchberger. Este algoritmo computa una base de Gröbner reducida del ideal generado por estos polinomios (Definición 1.2.6), es decir, un sistema de generadores apropiado para cálculos algorítmicos con el ideal. Ver [CLO] para un tratamiento detallado del tema.

La base de Gröbner reducida es única una vez que fijamos el orden monomial. Si $n \geq 2$ se sabe que existen infinitos órdenes monomiales, sin embargo, hay finitas bases de Gröbner reducidas posibles. Qué orden monomial está en correspondencia con qué base de Gröbner reducida es parte del estudio hecho en este trabajo. Esta información se encuentra implícita en el abanico de Gröbner del ideal polinomial generado por el sistema. Este objeto fue definido por Mora y Robbiano en el paper [MR] en 1988.

El abanico de Gröbner es un complejo poliedral en \mathbb{R}^n , es decir, una colección de poliedros de \mathbb{R}^n con ciertas propiedades. Si todos los poliedros son conos llamamos al complejo un abanico. Los conos de dimensión máxima del abanico de Gröbner de un ideal I están en biyección con las bases de Gröbner reducidas de I .

En la primera parte de este trabajo introduciremos el concepto de abanico de Gröbner de un ideal. Para esto recordamos definición y propiedades de los complejos poliedrales y bases de Gröbner. También demostraremos que el abanico de Gröbner de un ideal es un abanico, es decir, un complejo poliedral compuesto por conos.

No solo los conos de dimensión máxima serán de nuestro interés. Cada uno de los conos del abanico de Gröbner de un ideal I tiene asociado un objeto algebraico denominado ideal inicial de I . Para los conos de dimensión máxima el ideal inicial es el ideal monomial generado por los términos iniciales de la base de Gröbner asociada. En general, los ideales iniciales no son ideales monomiales. Los conos cuyos ideales iniciales no contienen monomios forman un conjunto de sumo interés en

este trabajo denominado variedad tropical de I . Esto se formalizará en el tercer capítulo.

Comenzaremos el segundo capítulo definiendo el semianillo tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Introduciremos también los conceptos de polinomio tropical, raíz de un polinomio tropical y tropicalización de un polinomio. Esto nos permitirá definir el concepto de tropicalización de un ideal (Definición 2.6.1).

En este capítulo también veremos otra definición posible para la variedad tropical de un ideal $I \subseteq K[x]$ si K es un cuerpo provisto de una valuación no trivial. Si consideramos la variedad V que define I sobre la clausura algebraica de K , la variedad tropical de I es igual a la clausura de la imagen de V por la función de valuación. Este hecho se conoce con el nombre de "Teorema de Kapranov" [EKL]. Esta definición será útil para realizar demostraciones mientras que la anterior nos da una mejor idea intuitiva del problema.

En el tercer capítulo daremos una nueva formulación de la tropicalización de un ideal, introduciremos el concepto de base tropical y demostraremos que todo ideal $I \subseteq K[x]$ tiene una siguiendo [BJSST], [J] y [J2]. Mostraremos también que si las bases tropicales están compuestas por formas lineales estas pueden ser muy extensas aún para ideales lineales. Por último destacamos los métodos fundamentales para el cálculo efectivo de prevariedades tropicales y bases tropicales de variedades algebraicas.

En el último capítulo de este trabajo, mejorando los argumentos presentados en [HT], demostraremos que si eliminamos la hipótesis de que la base esté compuesta por formas lineales podemos encontrar bases tropicales con considerablemente menos elementos. Este hecho es consecuencia de la técnica de proyecciones regulares introducida por Bieri y Groves [BG]. Para terminar daremos una demostración del teorema de extensión en su versión tropical.

CAPÍTULO 1

El abanico de Gröbner de un ideal

En este capítulo recordaremos los conceptos de complejo poliedral (Definición 1.1.4), cono normal de un poliedro (Definición 1.1.6) y bases de Gröbner (Definición 1.2.6). Esto nos posibilitará definir el *abanico de Gröbner* de un ideal (Definición 1.3.8). Terminaremos el capítulo con la demostración del Teorema 1.4.12 el cual afirma que el abanico de Gröbner de un ideal es un complejo poliedral compuesto íntegramente por conos, es decir, un abanico.

1.1. Complejos Poliedrales

Llamamos *poliedro* a una intersección finita de semiespacios cerrados en \mathbb{R}^n . Así un poliedro P puede ser expresado como

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\},$$

para alguna matriz A con n columnas.

Si $b = 0$ entonces existen vectores $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$P = \text{pos}(\{u_1, \dots, u_m\}) := \{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}_+\}$$

donde \mathbb{R}_+ representa el conjunto de los reales no negativos. A un poliedro de esta forma se lo llama *cono poliedral*. Decimos que un poliedro Q es un *polígono* si es acotado.

Si P es un poliedro en \mathbb{R}^n y $w \in \mathbb{R}^n$ una *cara* de P respecto a w es el subconjunto de P donde se minimiza la forma lineal $\langle w, x \rangle = \sum_{i=1}^n w_i x_i$ sobre P . Usaremos la siguiente notación

$$\text{face}_w(P) := \{u \in P : \langle w, u \rangle \leq \langle w, v \rangle \forall v \in P\}.$$

Llamamos *facetas* a las caras de codimensión 1.

Observación 1.1.1. $\text{face}_w(P)$ puede ser vacía si P no es acotado.

Observación 1.1.2. $\text{face}_0(P) = P$ para todo poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ejemplo 1.1.3. Sea $P = \text{pos}(\{(1, 1); (1, 0)\})$.

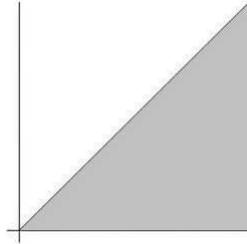


FIGURA 1.1. Poliedro del Ejemplo 1.1.3

- Si $w = 0 \implies \text{face}_w(P) = P$
- Si $w = (0, 1) \implies \text{face}_w(P) = \text{pos}\{(1, 0)\}$
- si $w = (1, -1) \implies \text{face}_w(P) = \text{pos}\{(1, 1)\}$
- si $w = \lambda_1(0, 1) + \lambda_2(1, -1)$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}_{>0} \implies \text{face}_w(P) = \{(0, 0)\}$
- Para cualquier otro $w \in \mathbb{R}^n$, $\text{face}_w(P) = \emptyset$.

Definición 1.1.4. Un *Complejo Poliedral* Δ es una colección finita de poliedros en \mathbb{R}^n tal que:

1. Si $P \in \Delta$ y F es una cara de P entonces $F \in \Delta$.
2. Si $P_1, P_2 \in \Delta$ entonces $P_1 \cap P_2$ es una cara de P_1 y de P_2 .

El *soporte* de un complejo Δ es $|\Delta| := \bigcup_{P \in \Delta} P$. Un complejo Δ constituido íntegramente por conos se denomina *abanico*. Un abanico Δ se dice *completo* si $|\Delta| = \mathbb{R}^n$. Un abanico se dice *puro* si todos sus conos maximales tienen la misma dimensión.

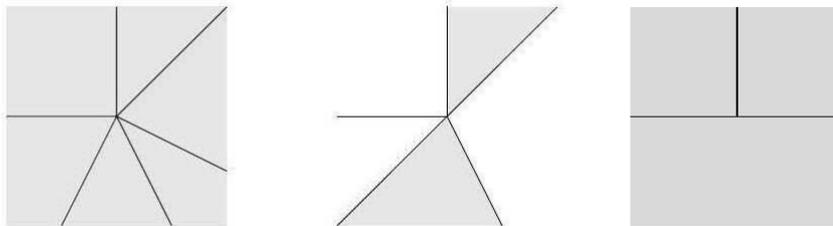


FIGURA 1.2. Las tres colecciones de conos del Ejemplo 1.1.5

Ejemplo 1.1.5. La Figura 1.2 muestra tres colecciones de conos en el plano.

- La primera colección está constituida por 1 cono de dimensión cero, 6 conos de dimensión uno y 6 conos de dimensión dos. Este es un abanico puro y completo.
- La segunda colección está constituida por 1 cono dimensión cero, 5 de dimensión uno y 2 de dimensión dos. Este es un abanico no puro y no completo.
- La tercera colección está constituida por un cono de dimensión cero, 3 de dimensión uno y 3 de dimensión dos uno de los cuales es un semiespacio. Esta colección no es un abanico poliedral ya que la intersección del semiespacio con una de las otras regiones no es una cara del semiespacio.

Una manera simple de construir un abanico es tomar el *abanico normal* de un poliedro.

Definición 1.1.6. Sea $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un poliedro. Para una cara F de P definimos su *cono normal*

$$N_P(F) := \overline{\{w \in \mathbb{R}^n : \text{face}_w(P) = F\}}$$

con la clausura tomada con la topología usual. El *abanico normal* de P es el abanico constituido por todos los conos normales $N_P(F)$ con F recorriendo todas las caras no vacías de P .

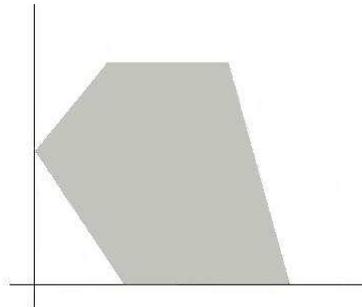
Toda cara F de un poliedro P satisface la ecuación

$$(1.1.7) \quad \dim(N_P(F)) = n - \dim(F)$$

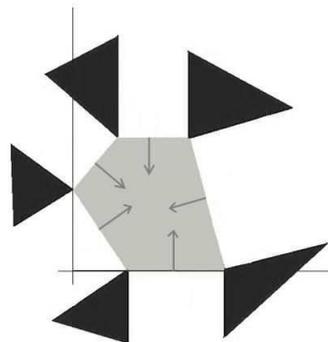
en particular $\dim(N_P(F)) = n \Leftrightarrow F$ es un vértice.

Si P es un polítopo su abanico normal es completo y sus conos están en biyección con las caras de P .

Ejemplo 1.1.8. Supongamos que tenemos el Polítopo



Para cada una de sus caras tenemos un cono normal:



Estos conos conforman el abanico normal de P .

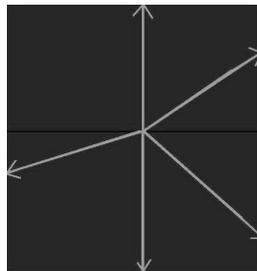


FIGURA 1.3. Serie de gráficos para el Ejemplo 1.1.8

1.2. Bases de Gröbner

En esta sección haremos un recorrido rápido por los conceptos más importantes de la teoría de bases de Gröbner asumiendo un conocimiento básico del tema como ser el algoritmo de división para polinomios

multivariados, la noción de S-polinomio y el algoritmo de Buchberger. Si no son conocidos estos temas recomendamos [CLO] para una comprensión general de lo mismos.

Sea $R = k[x_1, \dots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre el cuerpo k y sea $I \subseteq R$ un ideal. Dado $\alpha \in \mathbb{N}^n$ usaremos la notación $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ para un monomio en R .

Llamamos *orden monomial* en R a un orden total \prec sobre todos los monomios en R tal que:

1. Para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\} : 1 \prec x^\alpha$.
2. Para $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n : x^\alpha \prec x^\beta \Rightarrow x^\alpha x^\gamma \prec x^\beta x^\gamma$.

Dados un vector $w \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ y un orden monomial \prec , definimos un nuevo orden monomial \prec_w como sigue:

$$x^\alpha \prec_w x^\beta \iff \langle w, \alpha \rangle < \langle w, \beta \rangle \vee (\langle w, \alpha \rangle = \langle w, \beta \rangle \wedge x^\alpha \prec x^\beta).$$

Observación 1.2.1. \prec_w define un orden monomial $\Leftrightarrow w \geq 0$. De lo contrario existe un $\alpha \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ tal que $x^\alpha \prec_w 1$.

Definición 1.2.2. Sean \prec un orden monomial y $f = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha x^\alpha \in R$ con $\Gamma \subseteq \mathbb{N}^n$ finito, un polinomio no nulo.

- (i) Llamamos a a_α el *coeficiente* del monomio x^α .
- (ii) Si $a_\alpha \neq 0$, llamamos a $a_\alpha x^\alpha$ un *término* de f .
- (iii) El *término inicial* de f con respecto al orden monomial \prec , denotado por $in_\prec(f)$, es el único término maximal de f con respecto a \prec .

Del mismo modo dado $w \in \mathbb{R}^n$ definimos la *forma inicial* $in_w(f)$ como la suma de todos los términos de $f \in R$ cuyos exponentes maximizan la forma lineal $\langle w, \cdot \rangle$.

Observación 1.2.3. Para un polinomio no nulo $f \in R$ tenemos que

$$in_{\prec_w}(f) = in_\prec(in_w(f)).$$

Ejemplo 1.2.4. Sean $f = \sum_{i+j \leq 2} a_{ij} x^i y^j = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$, $w = (1, 1)$ y \prec el orden monomial lexicográfico con $x < y$. Entonces $in_w(f) = a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2$ y el $in_{\prec_w}(f) = a_{02}y^2 = in_\prec(in_w(f))$.

El w -peso de un término cx^α es $\langle \alpha, w \rangle$ y el w -peso de un polinomio no nulo f es el máximo w -peso de los términos de f . El *ideal inicial* de un ideal I con respecto a un orden monomial \prec y a un peso $w \in \mathbb{R}^n$ se definen como:

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(f) : f \in I \setminus \{0\} \rangle \quad \text{y} \quad in_w(I) = \langle in_w(f) : f \in I \rangle.$$

Un monomio en $R \setminus in_{\prec}(I)$ (con coeficiente 1) se denomina *monomio standard* de $in_{\prec}(I)$.

Es importante observar que $in_{\prec}(I)$ es un ideal monomial mientras que $in_w(I)$ puede no serlo.

Observación 1.2.5. Si $f = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha x^\alpha \in R$ con $\Gamma \subseteq \mathbb{N}^n$ finito es un polinomio no nulo y $w \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\text{máx}\{\langle w, \alpha \rangle : \alpha \in \Gamma\} = -\text{mín}\{\langle -w, \alpha \rangle : \alpha \in \Gamma\}.$$

Esto motiva otra definición posible para $in_w(f)$ como la suma de todos los términos de f cuyos exponentes minimizan la forma lineal $\langle w, \cdot \rangle$. Utilizaremos esta definición en el Capítulo 3.

Definición 1.2.6. Sea $I \subseteq \mathbb{R}^n$ un ideal y \prec un orden monomial sobre R . Un conjunto de generadores $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_m\}$ de I se denomina una *base de Gröbner* para I con respecto a \prec si

$$in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g_1), \dots, in_{\prec}(g_m) \rangle.$$

La base de Gröbner \mathcal{G} se dice *minimal* si $\{in_{\prec}(g_1), \dots, in_{\prec}(g_m)\}$ es un sistema mínimo de generadores de $in_{\prec}(I)$. Una base de Gröbner minimal se dice *reducida* si para todo $g \in \mathcal{G}$ el término inicial tiene coeficiente 1 y todos los otros monomios de g son monomios standard de $in_{\prec}(I)$.

Dada una base de Gröbner y $f \in R$ el algoritmo de división produce el polinomio resto de f módulo \mathcal{G} . Dicho polinomio es independiente del orden en el que hagamos la división y cumple que la diferencia entre f y él es un elemento del ideal. Llamamos a este resto *forma normal* de f módulo \mathcal{G} y lo notaremos $f^{\mathcal{G}}$.

Para un orden monomial \prec y un ideal I , el algoritmo de Buchberger garantiza la existencia de una única base de Gröbner reducida. Notaremos a esta base $\mathcal{G}_{\prec}(I)$.

1.3. El abanico de Gröbner de un ideal. Definición y ejemplos

En esta sección definiremos el concepto de *abanico de Gröbner* de un ideal $I \subseteq R$. Para esto seguiremos [J] que clarifica el concepto del abanico de Gröbner para ideales no necesariamente homogéneos.

Dado un ideal $I \subseteq R$ se induce una relación de equivalencia natural sobre \mathbb{R}^n tomando ideales iniciales:

$$u \sim v \iff in_u(I) = in_v(I).$$

Introducimos la siguiente notación para la clausura de las clases de equivalencia:

$$C_{\prec}(I) = \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : in_u(I) = in_{\prec}(I)\}} \text{ y}$$

$$C_v(I) = \overline{\{u \in \mathbb{R}^n : in_u(I) = in_v(I)\}}.$$

Observación 1.3.1. En general las clases de equivalencia no son convexas si permitimos tomar cualquier vector de \mathbb{R}^n y cualquier ideal.

Ejemplo 1.3.2. Sea $I = \langle x - 1, y - 1 \rangle$. El ideal I tiene cinco ideales iniciales posibles: $\langle x - 1, y - 1 \rangle$, $\langle x, y \rangle$, $\langle x, y - 1 \rangle$, $\langle x - 1, y \rangle$ y $\langle 1 \rangle$. En particular, para $u = (-1, 3)$ y $v = (3, -1)$ tenemos que $in_u(I) = in_v(I) = \langle 1 \rangle$ pero $in_{\frac{1}{2}(u+v)}(I) = \langle x, y \rangle$

Observación 1.3.3. Es sabido que para un ideal fijo I hay solamente finitos conjuntos $C_{\prec}(I)$ y por definición cubren $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, ver [MR] Teorema 1.2. Por otra parte, todo ideal inicial $in_{\prec}(I)$ es de la forma $in_w(I)$ para algún $w \in \mathbb{R}_{> 0}^n$, ver [S] Proposición 1.11. Por lo tanto, toda $C_{\prec}(I)$ es de la forma $C_w(I)$.

La siguiente proposición, que demostraremos en la próxima sección, es muy importante ya que describe clases de equivalencia en términos de ecuaciones e inecuaciones.

Proposición 1.3.4. Sea \prec un orden monomial y $v \in C_{\prec}(I)$. Para $u \in \mathbb{R}^n$

$$in_u(I) = in_v(I) \iff \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I), in_u(g) = in_v(g)$$

A partir de esta proposición podemos concluir que para un orden monomial fijo \prec y $v \in C_{\prec}(I)$ tenemos que $C_v(I)$, la clausura de la clase de equivalencia de v , es un cono poliedral ya que cada $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$ genera la ecuación $in_u(g) = in_v(g)$, lo cual es equivalente a decir que u tiene que satisfacer un conjunto de ecuaciones lineales e inecuaciones lineales estrictas, ver Ejemplo 1.3.6. La clausura se obtiene tomando las inecuaciones estrictas como no estrictas. Si asumimos la Proposición 1.3.4 podemos escribir esto de la siguiente manera:

$$(1.3.5) \quad u \in C_v(I) \iff \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I), in_v(in_u(g)) = in_v(g).$$

Ejemplo 1.3.6. Sea $I = \langle x + y + z, x^3z + x + y^2 \rangle \subseteq \mathbb{Q}[x, y, z]$ y sea \prec el orden monomial lexicográfico con $x \prec y \prec z$. Entonces $\mathcal{G}_{\prec}(I) = \{\underline{y^2} + x - x^3y - x^4, \underline{z} + y + x\}$ donde hemos subrayado los términos iniciales. Si $v = (1, 4, 5)$ entonces $in_v(I) = in_{\prec}(I) = \langle y^2, z \rangle$ y $C_v(I) = C_{\prec}(I)$. Por la Proposición 1.3.4, $in_u(I) = in_v(I)$ si y solo si las siguientes ecuaciones se satisfacen:

$$in_u(z + y + x) = z \quad (\Leftrightarrow u_z > \max\{u_x, u_y\}), \text{ y}$$

$$in_u(y^2 + x - x^3y - x^4) = y^2 \quad (\Leftrightarrow 2u_y > \max\{u_x, 3u_x + u_y, 4u_x\})$$

Introduciendo desigualdades no estrictas obtenemos una descripción de $C_{\prec}(I)$.

Como vimos en el Ejemplo 1.3.2, las clases de equivalencia no son necesariamente convexas. El siguiente Lema nos da condiciones para poder asegurar que lo sean.

Lema 1.3.7. *Para un $u \in \mathbb{R}^n$ arbitrario, si $C_u(I)$ contiene un vector estrictamente positivo en cada una de sus coordenadas entonces $C_u(I)$ es un cono poliedral convexo.*

DEMOSTRACIÓN. Notemos que si el cono

$$C_u(I) = \overline{\{w \in \mathbb{R}^n : in_w(I) = in_u(I)\}}$$

contiene un vector con cada una de sus coordenadas estrictamente positivas debe existir un vector $p \in \mathbb{R}_{>0}^n$ con $in_p(I) = in_u(I)$ y, por Lema 1.4.7 que veremos más adelante, $p \in C_{\prec_p}(I)$ para todo orden monomial \prec . Por lo tanto la clase de equivalencia de u es de la forma requerida en la Proposición 1.3.4; y por lo tanto convexa. \square

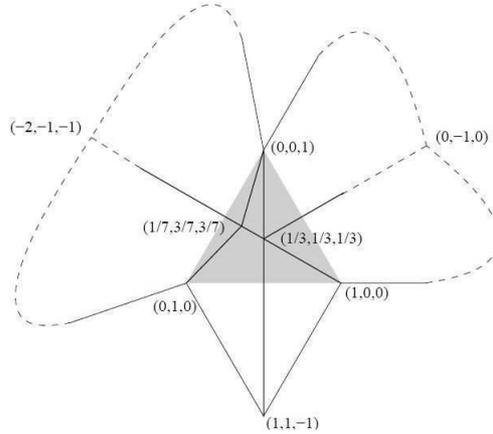


FIGURA 1.4. El abanico de Gröbner del ideal del Ejemplo 1.3.6 tiene 7 conos de dimensión tres, 14 de dimensión dos y 8 de dimensión uno. La intersección de los conos de dimensión dos con el hiperplano $x + y + z = 1$ se dibujaron como líneas. El triángulo gris indica el ortante positivo.

Definición 1.3.8. El *abanico de Gröbner* de un ideal $I \subseteq R$ es el conjunto formado por las clausuras de todas las clases de equivalencia que intersecan $\mathbb{R}_{>0}^n$ junto con sus caras propias.

Esta no es la definición más usual en la literatura pero la misma tiene una gran ventaja. Esta definición hace que, tanto en el caso homogéneo como en el no homogéneo, todos los conos de este abanico son clausuras de clases de equivalencia. No es claro a priori que el abanico de Gröbner sea un complejo poliedral. Veremos una demostración de esto en la próxima sección en el Teorema 1.4.12.

Ejemplo 1.3.9. El abanico de Gröbner del ideal principal $\langle x^4 + x^4y - x^3y + x^2y^2 + y \rangle$ no es completo y está compuesto por un cono de dimensión 0, tres conos de dimensión 1 y dos conos de dimensión 2.

1.4. El abanico de Gröbner es un abanico

En esta sección demostraremos que el abanico de Gröbner es un abanico, es decir, un complejo poliedral formado por conos. Notar que,

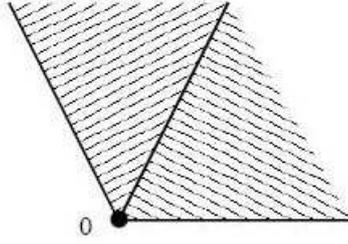


FIGURA 1.5. El abanico de Gröbner del ideal del Ejemplo 1.3.9

en general, el abanico de Gröbner no es completo y su soporte contiene a $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$.

El paso más importante es demostrar la Proposición 1.3.4 que nos dice que la clausura de una clase de equivalencia es un cono poliedral. Para demostrar esta Proposición comenzaremos estudiando algunos resultados previos.

Para los teoremas que siguen fijamos un ideal $I \subseteq R$.

Lema 1.4.1. *Sea \prec un orden monomial. Para $v \in \mathbb{R}^n$,*

$$in_v(I) = in_{\prec}(I) \iff \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I), in_v(g) = in_{\prec}(g).$$

DEMOSTRACIÓN. \Rightarrow) Sea $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Como $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ es reducida, solo un término de g , $in_{\prec}(g)$, puede estar en $in_{\prec}(I) = in_v(I)$. El ideal inicial $in_v(I)$ es un ideal monomial, por lo tanto todos los términos de un polinomio en este ideal deben también estar en $in_v(I)$. Luego la forma inicial $in_v(g) \in in_v(I)$ debe ser igual a $in_{\prec}(g)$.

\Leftarrow) Debemos mostrar que $in_v(I) = in_{\prec}(I)$ donde $in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g) \rangle_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$. La contención " \supseteq " es clara ya que $in_{\prec}(g) = in_v(g) \in in_v(I)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$.

Para demostrar la inclusión " \subseteq ", como $in_v(I) = \langle in_v(f), f \in I \rangle$, es suficiente mostrar que $in_v(f) \in in_{\prec}(I)$ para todo $f \in I$. Tomemos $f \in I$ y reduzcámoslo a cero usando el algoritmo de división con $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ y \prec . Podemos escribir

$$(1.4.2) \quad f = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r},$$

donde m_j es un monomio y g_{i_j} es un elemento de $\mathcal{G}_{\prec}(I)$. El algoritmo de división garantiza que $in_{\prec}(f) \geq m_j in_{\prec}(g_{i_j})$ con respecto a $\prec \forall i =$

$1, \dots, r$, ya que los monomios son substituidos por monomios menores que los originales con respecto a \prec en el proceso de división. Lo mismo es cierto para v -pesos ya que v y \prec coinciden sobre $\mathcal{G}_\prec(I)$. De esta manera, cualquier monomio del lado derecho en (1.4.2) tiene v -peso menor o igual que el v -peso del lado izquierdo. Por lo tanto,

$$in_v(f) = \sum_{j \in J} m_j in_v(g_{i_j})$$

con j recorriendo un subconjunto tal que $m_j in_v(g_{i_j})$ tenga el mismo v -peso que $in_v(f)$. Como $in_v(g) \in in_\prec(I)$, la forma inicial $in_v(f) \in in_\prec(I)$. \square

Como $in_\prec(I)$ es de la forma $in_v(I)$ para algún $v \in \mathbb{R}_{>0}^n$ (ver Observación 1.3.3), el conjunto $\{u \in \mathbb{R}^n : in_u(I) = in_\prec(I)\}$ es no vacío y abierto por el Lema 1.4.1; por lo tanto de dimensión máxima. De esta manera hemos demostrado que la clase de equivalencia de cualquier vector v tal que $in_v(I) = in_\prec(I)$ es un cono poliedral abierto de dimensión máxima.

Corolario 1.4.3. *Sea \prec un orden monomial y $v \in \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$v \in C_\prec(I) \Leftrightarrow \forall g \in \mathcal{G}_\prec(I) : in_\prec(in_v(g)) = in_\prec(g).$$

DEMOSTRACIÓN. El Lema 1.4.1 nos dice que v está en el interior de $C_\prec(I)$ si y solo si $in_v(g) = in_\prec(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$. Tomando las desigualdades estrictas obtenidas como no estrictas, obtenemos una descripción de $C_\prec(I)$. Esta relajación de las inecuaciones es precisamente la dada por $in_\prec(in_v(g)) = in_\prec(g)$ para toda $g \in \mathcal{G}_\prec(I)$. \square

Lema 1.4.4. *Un polinomio $f \in in_v(I)$ puede ser escrito de la forma $f = \sum_i in_v(c_i)$ donde $c_i \in I$ y todos los sumandos tengan distinto v -peso.*

DEMOSTRACIÓN. El ideal inicial $in_v(I)$ está generado por polinomios v -homogéneos entonces todas las componentes v -homogéneas de f están dentro de $in_v(I)$. Sea h una componente de f de v -peso maximal. Necesitamos mostrar que h es la forma inicial de un elemento de I con respecto a v . Podemos escribir $h = in_v(a_1) + \dots + in_v(a_s)$ para algunos polinomios a_1, \dots, a_s en I . Como h es v -homogéneo podemos

escribir h como la suma $\sum_{j \in J} in_v(a_j)$ de formas que tengan el mismo v -peso que h . Con lo cual podemos concluir que $h = in_v(\sum_{j \in J} a_j)$. \square

Lema 1.4.5. *Sea \prec un orden monomial. Si $v \in C_{\prec}(I)$ entonces $in_{\prec}(in_v(I)) = in_{\prec}(I)$*

DEMOSTRACIÓN. Sea $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Como $v \in C_{\prec}(I)$, por el Corolario 1.4.3, tenemos la igualdad $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_v(g))$ y por lo tanto $in_{\prec}(I) = \langle in_{\prec}(g) \rangle_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} \subseteq in_{\prec}(in_v(I))$.

Ahora demostraremos que $in_{\prec}(in_v(I)) \subseteq in_{\prec}(I)$. Notar que $in_{\prec}(in_v(I))$ está generado por términos iniciales de elementos $f \in in_v(I) \setminus \{0\}$ con respecto a \prec . Supongamos que $f \in in_v(I) \setminus \{0\}$. Es suficiente mostrar que $in_{\prec}(f) \in in_{\prec}(I)$. Usando el Lema 1.4.4 podemos escribir $f = \sum_{i=1}^s in_v(c_i)$ donde $c_1, \dots, c_s \in I$ e $in_v(c_1), \dots, in_v(c_s)$ son v -homogéneos, cada uno con distinto grado, con lo cual no ocurre ninguna cancelación. Consecuentemente $in_{\prec}(f)$ es igual a $in_{\prec}(in_v(c_j))$ para algún j . Queremos probar que $in_{\prec}(in_v(c_j)) \in in_{\prec}(I)$. Usamos el algoritmo de división con $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ y \prec para reescribir c_j

$$c_j = m_1 g_{i_1} + \dots + m_r g_{i_r},$$

donde m_1, \dots, m_r son monomios y g_{i_1}, \dots, g_{i_r} pertenecen a $\mathcal{G}_{\prec}(I)$. Sea M el v -peso de c_j . En el algoritmo de división reducimos c_j a cero. En cada paso, el v -peso de c_j decrece o permanece igual ya que restamos el producto de un monomio y un elemento de $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ donde el v -peso del producto ya aparecía en c_j por el Corolario 1.4.3. Equivalentemente, el producto del monomio y el elemento de $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ están “agregados” al lado derecho de la ecuación. Terminaremos cuando $c_j = 0$ y o, equivalentemente, el c_j original quede escrito como como la suma anterior con todos los términos de v -peso menor o igual que M . Por lo tanto tenemos que

$$in_v(c_j) = \sum_{j' \in J'} in_v(m_{j'} g_{i_{j'}})$$

para un J' adecuado. El algoritmo de división garantiza que los vectores exponentes de $in_{\prec}(m_1 g_{i_1}), \dots, in_{\prec}(m_r g_{i_r})$ son distintos. Como $v \in C_{\prec}(I)$, estos iniciales son iguales a $in_{\prec}(in_v(m_1 g_{i_1})), \dots, in_{\prec}(in_v(m_r g_{i_r}))$, respectivamente. El maximal de estos con respecto a \prec no puede cancelarse en la suma. Luego $in_{\prec}(in_v(c_j)) = in_{\prec}(m_{j'} g_{i_{j'}})$ para algún j' lo cual implica que $in_{\prec}(in_v(c_j)) \in in_{\prec}(I)$ como necesitábamos. \square

Un Corolario inmediato es un método para calcular bases de Gröbner para ideales iniciales respecto de un peso.

Corolario 1.4.6. *Sea \prec un orden monomial. Si $v \in C_{\prec}(I)$ entonces*

$$\mathcal{G}_{\prec}(in_v(I)) = \{in_v(g)\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Corolario 1.4.3, $\langle in_{\prec}(in_v(g)) \rangle_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)} = in_{\prec}(I)$. Por el Lema 1.4.5, $in_{\prec}(I)$ es igual a $in_{\prec}(in_v(I))$. Así tenemos la igualdad de ideales $in_{\prec}(in_v(I)) = \langle in_{\prec}(in_v(g)) \rangle_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$. Esto demuestra que $\{in_v(g)\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$ es una base de Gröbner de $in_v(I)$ con respecto a \prec . Es reducida ya que $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ es minimal y reducida. \square

Estamos ahora en condiciones de demostrar la Proposición 1.3.4 que afirma que dados $v \in C_{\prec}(I)$ y $u \in \mathbb{R}^n$, $in_u(I) = in_v(I) \iff \forall g \in \mathcal{G}_{\prec}(I), in_u(g) = in_v(g)$.

DEMOSTRACIÓN. (de la Proposición 1.3.4) \Leftarrow) Como $in_u(g) = in_v(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$, tenemos que $in_{\prec}(in_u(g)) = in_{\prec}(in_v(g))$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Como $v \in C_{\prec}(I)$, por el Corolario 1.4.3, $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_v(g))$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$ y por lo tanto $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_u(g))$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$ y $u \in C_{\prec}(I)$ por el Corolario 1.4.3. La base de Gröbner $\mathcal{G}_{\prec}(I)(in_u(I))$ es entonces $\{in_u(g)\}_{g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)}$ por el Corolario 1.4.6. Obtenemos la misma bases de Gröbner para $in_u(I) = in_v(I)$. \Rightarrow) Sea $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$. Debemos mostrar que $in_u(g) = in_v(g)$. Como la base es reducida, solo un término de g , a saber $in_{\prec}(g)$, está en $in_{\prec}(I)$. Comenzamos probando que el término $in_{\prec}(g)$ es un término en $in_{\prec}(g)$ y un término en $in_u(g)$. Para $in_v(g)$ aplicamos el Corolario 1.4.3 el cual dice que $in_{\prec}(g) = in_{\prec}(in_v(g))$. Para $in_u(g)$ aplicamos el Lema 1.4.5 y obtenemos que $in_{\prec}(in_u(g)) \in in_{\prec}(in_u(I)) = in_{\prec}(in_v(I)) = in_{\prec}(I)$. Solo un término de g está en $in_{\prec}(I)$, entonces $in_{\prec}(in_u(g)) = in_{\prec}(g)$. Si la diferencia $in_u(g) - in_v(g)$, perteneciente a $in_u(I) = in_v(I)$, es no nula inmediatamente obtenemos una contradicción ya que la diferencia no contiene ningún término de $in_{\prec}(I) = in_{\prec}(in_v(I))$. \square

Ya hemos demostrado que cada clase de equivalencia de un vector $v \in C_{\prec}(I)$ es un cono poliedral abierto y convexo. Por la Definición 1.3.8 y el argumento posterior a la Proposición 1.3.4 en la sección previa, todos los conjuntos en el abanico de Gröbner son conos convexos.

Ahora demostraremos que el interior relativo de cada cono en el abanico de Gröbner es una clase de equivalencia.

Lema 1.4.7. *Sea \prec un orden monomial. Si $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ entonces $v \in C_{\prec_v}(I)$.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue del Corolario 1.4.3 ya que $in_{\prec_v}(in_v(g)) = in_{\prec_v}(g)$ para todo $g \in \mathcal{G}_{\prec_v}(I)$. \square

Corolario 1.4.8. *Si \prec es un orden monomial y $v \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ entonces*

$$in_{\prec_v}(I) = in_{\prec}(in_v(I)).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.4.7 $v \in C_{\prec_v}(I)$. Por el Lema 1.4.5, $in_{\prec_v}(I) = in_{\prec_v}(in_v(I))$. La base de Gröbner $\mathcal{G}_{\prec_v}(in_v(I))$ es v -homogénea y por lo tanto también una base de Gröbner con respecto a \prec con los mismos términos iniciales los cuales generan el ideal inicial $in_{\prec_v}(in_v(I)) = in_{\prec}(in_v(I))$. \square

Proposición 1.4.9. *El interior relativo de un cono del abanico de Gröbner es una clase de equivalencia (con respecto a la relación $u \sim u' \Leftrightarrow in_u(I) = in_{u'}(I)$.)*

DEMOSTRACIÓN. Por definición todo cono en el abanico es la cara de la clausura de una clase de equivalencia para un vector positivo $v \in \mathbb{R}_{> 0}^n$. Sea \prec' un orden monomial arbitrario y definimos \prec como \prec'_v . De acuerdo al Lema 1.4.7 el vector v pertenece a $C_{\prec}(I)$. Notar que por la ecuación 1.3.5, $C_v(I) \subseteq C_{\prec}(I)$ ya que para todo $u \in C_v(I)$ y $g \in \mathcal{G}_{\prec}(I)$, la condición $in_{\prec}(in_u(g)) = in_{\prec}(in_v(in_u(g))) = in_{\prec}(in_v(g)) = in_{\prec}(g)$ del Corolario 1.4.3 se satisface. Por 1.3.5 el conjunto cerrado $C_v(I)$ está definido por ecuaciones e inecuaciones no estrictas. El interior relativo de cualquier cara de $C_v(I)$ puede ser construido a partir de este sistema de inecuaciones cambiando un subconjunto de las inecuaciones a estrictas y las restantes a ecuaciones. Por lo tanto sea u un vector en el interior relativo de alguna cara de $C_v(I)$. El vector u está en $C_v(I) \subseteq C_{\prec}(I)$. Podemos utilizar la Proposición 1.3.4 para concluir que el vector $u' \in \mathbb{R}^n$ es equivalente a u si y solo si satisface el sistema de inecuaciones mencionado anteriormente, es decir, si y solo si está en el interior relativo de la cara. \square

Nos resta mostrar que la intersección de dos conos en el abanico de Gröbner es una cara de ambos conos. Necesitamos previamente el siguiente resultado.

Corolario 1.4.10. *Sea C un cono en el abanico de Gröbner. Si $v \in C$ entonces para todo $u \in \mathbb{R}^n$,*

$$in_u(I) = in_v(I) \Rightarrow u \in C.$$

DEMOSTRACIÓN. El vector v está en el interior relativo de alguna cara de C . Esta cara está también en el abanico de Gröbner. Por la Proposición 1.4.9 u está en el interior relativo de la misma cara y, por lo tanto, también en C . \square

Sabemos que existen finitos ideales iniciales posibles dados por órdenes monomiales; por lo tanto solo existen finitas bases de Gröbner reducidas para I . Se sigue que solo puede existir una cantidad finita de clases de equivalencia del tipo descriptas en la Proposición 1.3.4 y Proposición 1.4.9.

Proposición 1.4.11. *Sean C_1 y C_2 dos conos en el abanico de Gröbner de I . Entonces la intersección $C_1 \cap C_2$ es una cara de C_1 .*

DEMOSTRACIÓN. La intersección $C_1 \cap C_2$ es un cono. Por el Corolario 1.4.10, C_1 y C_2 son uniones de clases de equivalencia. Más aún, si $v \in C_1 \cap C_2$, entonces otra vez por el Corolario 1.4.10, la clase de equivalencia entera de v está contenida tanto en C_1 como en C_2 por lo tanto también en $C_1 \cap C_2$. Luego $C_1 \cap C_2$ es una unión de clases de equivalencia.

Sea u un vector en una clase de equivalencia E contenida en $C_1 \cap C_2$. Entonces u está en el interior relativo de una de las caras de C_1 que es un cono del abanico de Gröbner. Por la Proposición 1.4.9 el conjunto de vectores en el interior relativo de esta cara es exactamente E . Luego cada clase de equivalencia como esta es el interior relativo de una cara de C_1 y su clausura es la cara.

Consideremos al \mathbb{R} -espacio vectorial generado por cada clase de equivalencia contenida en $C_1 \cap C_2$. Estos conjuntos deben ser diferentes para cada cara de C_1 . Afirmamos que solo puede haber un cono

de dimensión maximal. Si hubiera dos conos entonces su cápsula convexa estaría dentro de $C_1 \cap C_2$ y tendría dimensión como mínimo uno más y así no podría ser cubierta por una cantidad finita de clases de equivalencia de menor dimensión.

Sea E una clase de equivalencia de dimensión maximal contenida en $C_1 \cap C_2$. Demostraremos que $\overline{E} = C_1 \cap C_2$. La inclusión $\overline{E} \subseteq C_1 \cap C_2$ es clara pues $C_1 \cap C_2$ es cerrado. Para demostrar la otra inclusión supongamos que $w \in C_1 \cap C_2 \setminus \overline{E}$. Entonces $\text{conv}(\overline{E}, w) \setminus \overline{E}$ está contenido en $C_1 \cap C_2$ y tiene como mínimo igual dimensión que E . Esto es una contradicción ya que $\text{conv}(\overline{E}, w) \setminus \overline{E}$ no puede ser cubierto por una cantidad finita de clases de equivalencia de menor dimensión. \square

Teorema 1.4.12. *El abanico de Gröbner es un complejo poliedral compuesto íntegramente por conos y por lo tanto un abanico.*

DEMOSTRACIÓN. Ya demostramos, usando la Proposición 1.3.4 y el Lema 1.4.7 que el abanico de Gröbner está compuesto por conos poliedrales. La primera condición para ser un complejo poliedral se satisface por definición. La segunda condición es la Proposición 1.4.11. \square

CAPÍTULO 2

Geometría Tropical

Comenzaremos este capítulo dando algunas definiciones básicas y propiedades del semianillo tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Introduciremos luego los conceptos de raíz de un polinomio tropical (Definición 2.3.2) y tropicalización de un polinomio (Definición 2.5.1). Esto nos permitirá definir la tropicalización de un ideal (Definición 2.6.1). En este capítulo también veremos otra definición posible para la variedad tropical de un ideal (Teorema 2.6.3). Para demostrar este hecho será importante el Teorema 2.5.6.

2.1. El semianillo tropical

El conjunto $\mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con las operaciones:

$$w_1 \oplus w_2 := \min(w_1, w_2) \quad \text{y} \quad w_1 \odot w_2 := w_1 + w_2$$

es el *semianillo tropical*. El término semianillo se debe a que \mathbb{T} satisface los axiomas:

1. (\mathbb{T}, \oplus) es un monoide conmutativo con elemento identidad $0_{\mathbb{T}} = \infty$:
 - a) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
 - b) $0_{\mathbb{T}} \oplus a = a \oplus 0_{\mathbb{T}} = a$
 - c) $a \oplus b = b \oplus a$
2. (\mathbb{T}, \odot) es un monoide con elemento identidad $1_{\mathbb{T}} = 0$:
 - a) $(a \odot b) \odot c = a \odot (b \odot c)$
 - b) $1_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 1_{\mathbb{T}}$
3. La multiplicación se distribuye sobre la adición:
 - a) $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$
 - b) $(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$
4. $0_{\mathbb{T}} \odot a = a \odot 0_{\mathbb{T}} = 0_{\mathbb{T}}$

Observamos también que \mathbb{T} es idempotente porque $w \oplus w = w$ para cada $w \in \mathbb{T}$. Por esta razón las operaciones algebraicas se simplifican. Por ejemplo consideramos la potencia de un binomio:

$$(w_1 \oplus w_2)^{\odot n}$$

donde la notación exponencial indica el producto tropical n veces. Por la idempotencia de \mathbb{T} tenemos que $(w_1 \oplus w_2)^{\odot 2} = w_1^{\odot 2} \oplus w_1 \odot w_2 \oplus w_2^{\odot 2}$. El mínimo entre los tres números: $2w_1, w_1 + w_2, 2w_2$ será siempre o bien $2w_1$ o bien $2w_2$. Por lo tanto hemos probado que $(w_1 \oplus w_2)^{\odot 2} = w_1^{\odot 2} \oplus w_2^{\odot 2}$.

Para tener una mayor comodidad en la escritura de ahora en adelante notaremos $a^{\odot n}$ simplemente a^n .

Proposición 2.1.1. *Para cualquier entero positivo n vale la igualdad:*

$$(w_1 \oplus w_2)^n = w_1^n \oplus w_2^n$$

DEMOSTRACIÓN. La demostración es por inducción sobre n , siendo el caso $n = 1$ trivial. Supongamos que la afirmación es cierta en el caso $n - 1$:

$$\begin{aligned} (w_1 \oplus w_2)^n &= (w_1 \oplus w_2) \odot (w_1 \oplus w_2)^{n-1} \\ &= (w_1 \oplus w_2) \odot (w_1^{n-1} \oplus w_2^{n-1}) \\ &= w_1^n \oplus w_2 \odot w_1^{n-1} \oplus w_1 \odot w_2^{n-1} \oplus w_2^n \\ &= w_1^n \oplus w_2^n \end{aligned}$$

donde la última igualdad es debida al hecho que el mínimo es asumido en una de las dos potencias. \square

2.2. Polinomios

En geometría algebraica solemos trabajar con polinomios y en geometría tórica es natural trabajar con polinomios de Laurent, es decir, polinomios con exponentes enteros. En geometría tropical, “tropicalizaremos” estos polinomios, lo cual los convertirá en funciones lineales a trozos.

Sean w_1, w_2, \dots, w_n variables que representan elementos en el semi-anillo tropical $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot)$. Un *monomio* es un producto cualquiera de estas variables, donde las repeticiones están permitidas. Por la conmutatividad podemos ordenar el producto y escribir los monomios con la notación usual con las variables elevadas a exponentes:

$$w_2 \odot w_1 \odot w_3 \odot w_1 \odot w_4 \odot w_2 \odot w_3 \odot w_2 = w_1^2 w_2^3 w_3^2 w_4.$$

Un monomio representa una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Cuando evaluamos esta función en la aritmética clásica obtenemos una función lineal:

$$w_2 + w_1 + w_3 + w_1 + w_4 + w_2 + w_3 + w_2 = 2w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4.$$

Los monomios tropicales son funciones lineales con coeficientes enteros. Un *polinomio tropical* es una combinación lineal finita de monomios tropicales:

$$p(w_1, \dots, w_n) = a \odot w_1^{i_1} w_2^{i_2} \dots w_n^{i_n} \oplus b \odot w_1^{j_1} w_2^{j_2} \dots w_n^{j_n} \oplus \dots$$

donde los coeficientes a, b, \dots son números reales y los exponentes i_1, j_1, \dots son enteros. Todo polinomio tropical representa una función $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Cuando evaluamos estas funciones en la aritmética clásica, obtenemos el mínimo de una colección finita de funciones lineales:

$$\bar{p}(w_1, \dots, w_n) = \min(a + i_1 w_1 + \dots + i_n w_n, b + j_1 w_1 + \dots + j_n w_n, \dots)$$

Esta función $\bar{p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y lineal a trozos.

Ejemplo 2.2.1. Consideremos un polinomio genérico de grado tres en una variable w .

$$\bar{p}(w) = a \odot w^3 \oplus b \odot w^2 \oplus c \odot w \oplus d$$

Para graficar esta función dibujamos cuatro líneas en el plano de coordenadas $(w_1, w_2) : w_2 = 3w_1 + a, w_2 = 2w_1 + b, w_2 = w_1 + c$ y la línea horizontal $w_2 = d$. El valor de $p(w)$ es el mínimo w_2 tal que (w_1, w_2) pertenece a alguna de estas líneas. Las cuatro líneas contribuyen si

$$b - a \leq c - b \leq d - c$$

Estos tres valores de w son exactamente los puntos en los cuales el gráfico de p es singular. La Figura 2.1 ilustra esta situación.

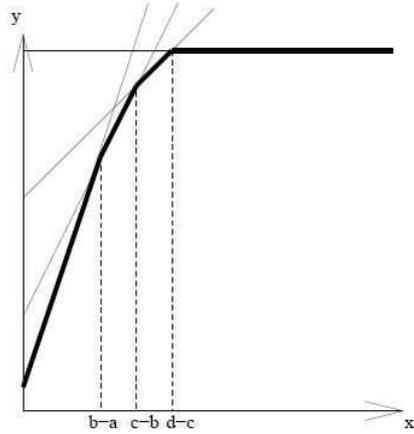


FIGURA 2.1. Gráfico de la función definida por el polinomio tropical del Ejemplo 2.2.1.

Observación 2.2.2. Polinomios distintos pueden representar la misma función.

Ejemplo 2.2.3. : Sean los polinomios $f(w) = w^2 \oplus 17 \odot w \oplus 2$ y $g(w) = w^2 \oplus 1 \odot w \oplus 2$. Es claro que como objetos estos dos polinomios son distintos sin embargo definen la misma función.

$$\bar{f}(w) = w^2 \oplus 17 \odot w \oplus 2 = w^2 \oplus 1 \odot w \oplus 2 = \bar{g}(w)$$

En general notaremos al polinomio tropical como f indistintamente si estamos viéndolo como polinomio tropical o como la función lineal a trozos que define siempre que esto mismo se entienda por su contexto.

2.3. Raíces de un polinomio tropical

Dado un polinomio tropical f queremos definir sus raíces. Consideramos el polinomio en una variable:

$$f(w) := a \odot w \oplus b$$

y observamos que la ecuación $a \odot w \oplus b = 0_{\mathbb{T}}$ no tiene solución si $b \neq 0_{\mathbb{T}}$. Entonces tenemos que buscar otra definición de los ceros de f . La igualdad

$$a \odot w \oplus b = a \odot (w \oplus (b - a))$$

sugiere definir, así como en el caso clásico, el número $b - a$ como cero de f .

Ejemplo 2.3.1. Sea $f := 2 \odot w \oplus 3$, de acuerdo con la definición precedente, $w = 1$ es cero de f . El gráfico de $f(w)$ es singular para este valor de w puesto que en ese punto el mínimo entre $2 + w$ y 3 se alcanza dos veces, Figura 2.2.

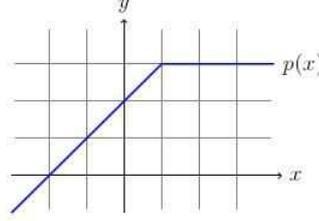


FIGURA 2.2. Gráfico de la función definida por el polinomio tropical del Ejemplo 2.3.1.

Esto nos motiva a dar la siguiente definición:

Definición 2.3.2. Llamamos *conjunto de ceros* de un polinomio tropical $f = \bigoplus_{\alpha} c_{\alpha} \odot w^{\alpha}$ al conjunto $Z(f) = Z(\bar{f})$ de todos los puntos $w \in \mathbb{R}^n$ donde el $\min_{\alpha} \{c_{\alpha} + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\}$ en \bar{f} se alcanza al menos dos veces.

Observación 2.3.3. Notar que si f es un monomio tropical su conjunto de ceros es vacío.

Observación 2.3.4. Sean $l_1, \dots, l_n, g_1, \dots, g_r$ formas lineales en \mathbb{R}^n si $x \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$\min\{l_1(x), \dots, l_n(x)\} + \min\{g_1(x), \dots, g_r(x)\} =$$

$$\min\{l_i(x) + g_j(x) : i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, r\}.$$

Corolario 2.3.5. Sea $\bar{p} = \bigoplus_{\alpha \in A} a_{\alpha} \odot w^{\alpha}$ entonces para todo polinomio tropical $\bar{g} = \bigoplus_{\beta \in B} b_{\beta} w^{\beta}$ se cumple que $Z(\bar{p}) \subseteq Z(\overline{\bar{p} \odot \bar{g}})$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in Z(\bar{p})$. Por definición sabemos que

$$\begin{aligned} \overline{p \odot g}(w) &= \bigoplus_{\alpha \in A, \beta \in B} a_\alpha \odot b_\beta \odot w^{\alpha+\beta} \\ &= \min\{a_\alpha + b_\beta + \langle \alpha + \beta, w \rangle : \alpha \in A, \beta \in B\} \\ &= \min\{a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle + b_\beta + \langle \beta, w \rangle : \alpha \in A, \beta \in B\}. \end{aligned}$$

Entonces por la observación anterior podemos obtener que

$$\overline{p \odot g}(w) = \min_{\alpha \in A} \{a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle\} + \min_{\beta \in B} \{b_\beta + \langle \beta, w \rangle\}.$$

Como $w \in Z(\bar{p})$ sabemos que el $\min_{\alpha \in A} \{a_\alpha + \langle \alpha, w \rangle\}$ se alcanza al menos dos veces con lo cual $w \in Z(\overline{p \odot g})$. \square

2.4. Valuaciones

Sea K un cuerpo. Denotaremos por K^* al conjunto de elementos no nulos de K . Una *valuación* sobre K es una función $val : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ que satisface:

- (1) $val(a) = \infty$ si y solo si $a = 0$
- (2) $val(ab) = val(a) + val(b)$
- (3) $val(a + b) \geq \min\{val(a), val(b)\}$ para todo $a, b \in K^*$

Observación 2.4.1. Podemos asumir siempre que $1 \in im(val)$ ya que $(\lambda val) : K \rightarrow \mathbb{R} \cup \infty$ es una valuación para cualquier valuación val y $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Por lo cual esto no es una restricción seria.

Lema 2.4.2. Sean $a, b \in K$ with $val(a) \neq val(b)$. Entonces

$$val(a + b) = \min(val(a), val(b)).$$

DEMOSTRACIÓN. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $val(b) > val(a)$. Como $1^2 = 1$ tenemos que $val(1) = 0$. Por otra parte como $(-1)^2 = 1$ tenemos que $val(-1) = 0$ también. Así $val(-b) = val(b)$ entonces $val(a) \geq \min(val(a + b), val(-b)) = \min(val(a + b), val(b))$, y por lo tanto $val(a) \geq val(a + b)$. Pero $val(a + b) \geq \min(val(a), val(b)) = val(a)$ entonces $val(a + b) = val(a)$ \square

Ejemplo 2.4.3. $K = k(x)$, el anillo de funciones racionales. Podemos escribir cualquier función $f/g \in K$ como una serie de Laurent $h = \sum h_i x^i$ donde $h_i = 0$ para $i \ll 0$. Podemos definir $val(f/g) = \min\{i : h_i \neq 0\}$. Si i es el menor exponente en f y j es el menor exponente en g , entonces $val(f/g) = i - j$.

Ejemplo 2.4.4. Si $K = \mathbb{Q}$ y $val_p(q) = j$ cuando $q = p^j a/b$ donde p no divide a a ni a b . Por ejemplo $val_2(12/5) = 2$, mientras que $val_2(1/10) = -1$. Esta es la valuación p -ádica.

Ejemplo 2.4.5. Series Formales de Laurent:

$$K((x)) = \left\{ \sum a_\alpha x^\alpha, a_\alpha = 0 \text{ si } \alpha \ll 0 \right\}$$

Si $f \neq 0$, $f \in K((x))$, $f = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} a_\alpha x^\alpha$ definimos $val(f) := \alpha_0$ si $a_{\alpha_0} \neq 0$, o sea

$$val(f) = \min\{\alpha : a_\alpha \neq 0\}.$$

Notemos que $K(x) \subseteq K((x))$ y la valuación es la misma del ejemplo anterior.

Ejemplo 2.4.6. Se conocen con el nombre de *Series de Puiseux* al conjunto:

$$K\{\{x\}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K((x^{1/n}))$$

Notemos que existe una inyección natural de $K((x^{1/n})) \hookrightarrow K((x^{1/nm}))$ $\forall m \in \mathbb{N}$. Luego dadas dos series $f, g \in K\{\{x\}\}$ podemos suponer que $f, g \in K((x^{1/n}))$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto podemos definir $f+g \in K((x^{1/n}))$ sumando término a término y $f.g \in K((x^{1/n}))$ extendiendo la definición usual de multiplicación de series de Laurent.

Estas dos operaciones definen una estructura de cuerpo para $K\{\{x\}\}$. Este cuerpo admite la siguiente valuación no trivial: Si $f \neq 0$, $f \in K\{\{x\}\}$, $f = \sum_{\alpha \geq \alpha_0} a_\alpha x^{\alpha/n}$ podemos definir $val(f) := \alpha_0/n$ si $a_{\alpha_0} \neq 0$.

Teorema 2.4.7. Sea K algebraicamente cerrado, $car(K) = 0$ entonces $K\{\{x\}\}$ es algebraicamente cerrado.

La demostración de este Teorema es constructiva y se sigue del algoritmo de Newton-Puiseux [W].

Notaremos \mathbb{K} al conjunto $\mathbb{K}\{\{t\}\}$.

2.5. Tropicalización de un polinomio

Para un cuerpo \mathbb{K} y una función de valuación $ord : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ podemos extender la función de valuación a su clausura algebraica \bar{K} (ver [EKL]) y a \bar{K}^n definiendo

$$ord : \bar{K}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty, \quad (a_1, \dots, a_n) \mapsto (ord(a_1), \dots, ord(a_n)).$$

Definición 2.5.1. Para un polinomio $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, la *tropicalización de f* es el polinomio tropical definido por:

$$trop(f) = \bigoplus_{\alpha} ord(a_{\alpha}) \odot w^{\alpha} = \min_{\alpha} \{ord(a_{\alpha}) + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\}$$

y la *hipersuperficie tropical de f* es el conjunto de ceros $\mathcal{T}(f)$ del polinomio tropical $trop(f)$, o sea:

$$\mathcal{T}(f) = \{w \in \mathbb{R}^n : \text{el mínimo de } trop(f) \text{ se alcanza al menos dos veces en } w\}.$$

En adelante notaremos $\gamma t^w := (\gamma_1 t^{w_1}, \dots, \gamma_n t^{w_n})$.

Lema 2.5.2. Sea $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ entonces $\forall w \in \mathbb{Q}^n$ y para $\gamma \in \mathbb{C}^n$ genérico, tenemos que

$$\overline{trop(f)}(w) = ord(f(\gamma t^w)).$$

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que según la Definición 2.5.1 si $f = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_{\alpha} x^{\alpha}$ entonces definimos $trop(f)(w) = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} ord(a_{\alpha}) \odot w^{\alpha} = \min_{\alpha \in \Gamma} \{ord(a_{\alpha}) + \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n\}$.

Con esta notación tenemos que $f(\gamma t^w) = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_{\alpha} \gamma^{\alpha} t^{\langle w, \alpha \rangle}$. Por otra parte $ord(a_{\alpha} \gamma^{\alpha} t^{\langle w, \alpha \rangle}) = ord(a_{\alpha}) + \langle w, \alpha \rangle$. Si llamamos Γ' al conjunto de todos los $\alpha \in \Gamma$ para los cuales $\overline{trop(f)}(w) = ord(a_{\alpha}) + \langle w, \alpha \rangle$ entonces

$$f(\gamma t^w) = \sum_{\alpha \in \Gamma'} a_{\alpha} \gamma^{\alpha} t^{\langle w, \alpha \rangle} + O(t^{\langle w, \alpha \rangle + \epsilon}).$$

Entonces tomando $\gamma \in \mathbb{C}^n$ genérico tal que $\sum_{\alpha \in \Gamma'} a_{\alpha} \gamma^{\alpha} t^{\langle w, \alpha \rangle} \neq 0$, podemos asegurar que $\overline{trop(f)}(w) = ord(f(\gamma t^w))$. \square

Corolario 2.5.3. Sean $f, g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $f, g \neq 0$ entonces $\text{trop}(fg)$ y $\text{trop}(f) \odot \text{trop}(g)$ definen la misma función es decir

$$\overline{\text{trop}(fg)} = \overline{\text{trop}(f) \odot \text{trop}(g)}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de una función de valuación sabemos que

$$\text{ord}((fg)(\gamma t^w)) = \text{ord}(f(\gamma t^w)g(\gamma t^w)) = \text{ord}(f(\gamma t^w)) \odot \text{ord}(g(\gamma t^w)).$$

Por el Lema anterior tenemos que $\text{ord}((fg)(\gamma t^w)) = \overline{\text{trop}(fg)}(w)$, $\text{ord}(f(\gamma t^w)) = \overline{\text{trop}(f)}(w)$ y $\text{ord}(g(\gamma t^w)) = \overline{\text{trop}(g)}(w)$.

Luego, utilizando otra vez la Observación 2.3.4, podemos concluir que

$$\overline{\text{trop}(fg)}(w) = \overline{\text{trop}(f)}(w) \odot \overline{\text{trop}(g)}(w) = \overline{(\text{trop}(f) \odot \text{trop}(g))}(w).$$

□

Definición 2.5.4. Sea $f = \sum_{i \in \Gamma} a_i x^i \in \mathbb{K}[x]$ con $x = x_1, \dots, x_n$, $i = i_1, \dots, i_n$ y $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}^n$ un conjunto finito.

Notaremos $cp(a_i) = c_i$ al coeficiente principal de a_i , $\text{ord}(a_i) = v_i$, es decir

$$a_i = c_i t^{v_i} + \text{términos de orden mayor que } v_i.$$

También notaremos $\bar{f}(w) = \text{trop}(f)(w) = \min_{i \in \Gamma} \{v_i + iw\}$.

Si $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{Q}^n$ definimos

$$f_w(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i \in \Gamma'} c_i x^i \in K[x]$$

donde Γ' es el conjunto de todos los $i \in \Gamma$ tales que $v_i + i_1 w_1 + \dots + i_n w_n = \bar{f}(w_1, \dots, w_n)$. Notar que si escribimos $f(xt^w)$ en potencias de t tenemos que

$$f(xt^w) = \sum_{i \in \Gamma'} c_i x^i t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon}) = f_w(x) t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$$

para algún $\epsilon > 0$ donde $O(t^{\bar{f}(w)+\epsilon})$ representa términos de orden mayor o igual a $\bar{f}(w) + \epsilon$ en t .

Observación 2.5.5. Por su construcción, los monomios de f_w corresponden con los índices i donde se alcanza $\bar{f}(w)$. Es inmediato entonces que las siguientes condiciones son equivalentes:

- $w \in \mathcal{T}(f)$ ($w \in \mathbb{Q}^n$).
- f_w tiene al menos dos monomios.
- f_w tiene una raíz en $(K^*)^n$.

Este es un caso particular del Teorema 3.1.6 que veremos en la próxima sección.

Teorema 2.5.6. (*Newton-Puiseux en varias variables*)

Sea $w \in \mathcal{T}(f) \cap \mathbb{Q}^n$ y $\gamma \in (K^*)^n$ tal que $f_w(\gamma_1, \dots, \gamma_n) = 0$. Entonces $\exists z = (z_1, \dots, z_n) \in V_{\mathbb{K}^*}(f)$ tal que $z_i = \gamma_i t^{w_i} + O(t^{w_i + \epsilon})$ para algún $\epsilon > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Seguiremos la demostración constructiva presentada en [T].

Haremos la demostración por inducción en n siendo verdadera para el caso $n = 1$ por el Teorema de Newton-Puiseux clásico [W]. Notemos primero que si $f(\gamma t^w) = 0$, ya tenemos una raíz. Por otra parte si alguna variable x_j no aparece en f_w , se puede sustituir la misma por $x_j = \gamma_j t^{w_j}$ sin modificar las hipótesis. Así, sin pérdida de la generalidad, podemos suponer que las variables que aparecen en f_w son exactamente x_1, \dots, x_n . En esta situación hay dos casos posibles:

- Si hay un j , con $1 \leq j \leq n$, tal que $f_w(x_1, \dots, \gamma_j, \dots, x_n) \neq 0$ entonces después de reordenar las variables si fuera necesario, podemos suponer que $j = 1$. Escribimos $w = (w_1, w')$, $x = (x_1, x')$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma')$. Las condiciones necesarias para aplicar inducción sobre $g(x') = f(\gamma_1 t^{w_1}, x')$ son:

$$w' = (w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(g) \text{ y } g_{w'}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0.$$

Es posible que $\bar{g} \neq \bar{f}(w_1, x)$ (ver Ejemplo 2.5.7) pero como $g(x') = f(\gamma_1 t^{w_1}, x')$, trivialmente verificamos que

$$g(x' t^{w'}) = f(\gamma_1 t^{w_1}, x' t^{w'}) = f_w(\gamma_1, x') t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w) + \epsilon})$$

donde, por hipótesis, $f_w(\gamma_1, x') \neq 0$.

De la ecuación anterior obtenemos que $g_{w'}(\gamma') = f_w(\gamma_1, \gamma') = 0$ con lo cual se cumple la segunda condición. Por la Observación 2.5.5, como $\gamma' \in (K^*)^{n-1}$ tenemos que $(w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(g)$. Luego, por nuestra

hipótesis inductiva, sabemos que $\exists z' \in V_{\mathbb{K}^*}(g)$ tal que $z'_i = \gamma'_i t^{w'_i} + O(t^{w'_i + \epsilon})$ con lo cual $z = (\gamma_1 t^{w_1}, z')$ es raíz de f y cumple todo lo que queríamos.

• Supongamos ahora que para $1 \leq i \leq n$, $f_w(x_1, \dots, \gamma_i, \dots, x_n) = 0$. Para poder hacer el paso inductivo recordemos que $f(xt^w) = f_w(x)t^{\bar{f}(w)} + O(t^{\bar{f}(w) + \epsilon})$. Escribamos

$$f_w = (x_1 - \gamma_1)^k (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) q(x_1, \dots, x_n); q(\gamma_1, x') \neq 0.$$

Notar que como $n \geq 2$ existe al menos un término de la forma $(x_i - \gamma_i)$ con $i \neq 1$.

Sustituir x_1 por $\gamma_1 t^{w_1}$ como antes rompería con la estructura deseada para la inducción. Sustituiremos x_1 por $(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}})t^{w_1}$ y aplicaremos inducción sobre $g(x') = f((\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}})t^{w_1}, x')$. Igual que en el caso anterior debemos ver que

$$w' = (w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(g) \text{ y } g_{w'}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0.$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} g(x't^{w'}) &= f((\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}})t^{w_1}, x't^{w'}) = t^{\bar{f}(w)} f_w(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x') + O(t^{\bar{f}(w) + \epsilon}) = \\ &= t^{\bar{f}(w) + \frac{\epsilon}{2}} (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) q(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x_2, \dots, x_n) + O(t^{\bar{f}(w) + \epsilon}). \end{aligned}$$

donde q es un polinomio con coeficientes en K , por lo tanto

$$q(\gamma_1 + t^{\frac{\epsilon}{2k}}, x') = q(\gamma_1, x') + O(t^{\frac{\epsilon}{2k}}).$$

Entonces de la igualdad anterior obtenemos que

$$g(x't^{w'}) = t^{\bar{f}(w) + \frac{\epsilon}{2}} (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) q(\gamma_1, x_2, \dots, x_n) + O(t^{\bar{f}(w) + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2k}}).$$

Los cálculos anteriores muestran que $g_{w'} = (x_2 - \gamma_2) \dots (x_n - \gamma_n) q(\gamma_1, x_2, \dots, x_n)$ tiene al menos dos monomios y $g_{(w_2, \dots, w_n)}(\gamma_2, \dots, \gamma_n) = 0$ por lo tanto $(w_2, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(g)$. Con lo cual podemos continuar con el siguiente paso inductivo. □

Ejemplo 2.5.7. Consideremos el polinomio

$$f = -3t^2 + 3tx - t^2y + txy - t^3xy^4 + (t^4 + t^5)y^4 + x^5,$$

$\bar{f} = \min\{2, 1+x, 2+y, 1+x+y, 3+x+4y, 4+4y, 0+5x\}$. Tomemos $w = (1, 0) \in \mathcal{T}(f)$, $f(tx, y) = (-3 + 3x - y + xy)t^2 + O(t^4)$ y por lo

tanto $f_w = -3 + 3x - y + xy$, $f_w(1, -3) = 0$. Entonces, por el Teorema 2.5.6, existe una raíz en $(\mathbb{K}^*)^2$ cuyo término principal es $(t, -3)$.

Como $f_w(1, y) = f_w(x, -3) = 0$, estamos en el segundo caso del teorema, luego hacemos la sustitución $x = t + t^2$ en f .

$$f(t + t^2, y) = g(y) = 3t^3 + t^5 + 5t^6 + 10t^7 + 10t^8 + 5t^9 + t^{10} + t^3y,$$

$\bar{g}(y) = \min\{3, 3 + y\}$. Notar que $\bar{g}(y) \neq \bar{f}(1, y) = \min\{2, 2 + y, 4 + 4y\}$ pero, como se afirmó en el teorema, $0 \in \mathcal{T}(g)$. Ahora utilizando el método de Newton-Puiseux para calcular una raíz de $g(y)$ cuyo término principal el -3 el punto es:

$$(x, y) \simeq (t + t^2, -3 - t^2 - 5t^3 - 10t^4 - 10t^5 - 5t^6 - t^7).$$

2.6. Tropicalización de un ideal y teorema de Kapranov

Extendemos ahora la noción de tropicalización de un polinomio al caso de ideales.

Definición 2.6.1. Para un ideal $I \triangleleft \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ y un cuerpo \mathbb{K} se define la *variedad tropical de I* como

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{f \in I} \mathcal{T}(f)$$

Es decir que $w \in \mathbb{R}^n$ está en la tropicalización $\mathcal{T}(I)$ si y solo si el mínimo de $\text{trop}(f)$ se alcanza al menos dos veces en w para todo polinomio no nulo $f \in I$.

Lema 2.6.2. Para un ideal principal $I = \langle f \rangle \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que

$$\mathcal{T}(\langle f \rangle) = \mathcal{T}(f).$$

DEMOSTRACIÓN. La inclusión " \subseteq " es clara por definición. Para la otra inclusión, si $w \in \mathcal{T}(f)$ entonces el mínimo de $\text{trop}(f)$ se alcanza al menos dos veces en w . Sea $h \in \langle f \rangle$ entonces $h = gf$ para algún $g \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Por el Corolario 2.5.3 sabemos que $\overline{\text{trop}(fg)} = \overline{\text{trop}(f)} \odot \overline{\text{trop}(g)}$. Con lo cual el mínimo en $\overline{\text{trop}(fg)}(w)$ se alcanza al menos dos veces puesto que esto sucede en $\overline{\text{trop}(f)}$. \square

El siguiente teorema nos da otra definición posible para la tropicalización de un ideal si es que K es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero.

Teorema 2.6.3. (Kapranov) *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado con $\text{car}(K) = 0$ e $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Entonces*

$$\mathcal{T}(I) = \overline{\{(ord(z_1), \dots, ord(z_n)) : z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veremos \subseteq en el caso particular en el que I es un ideal principal. Si $I = \langle f \rangle$ sabemos por el Lema 2.6.2 que $\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f)$. Con lo cual si $w \in \mathcal{T}(f) \cap \mathbb{Q}^n$ la Observación 2.5.5 nos dice que f_w tiene una raíz en $(K^*)^n$. Entonces por el Teorema 2.5.6 sabemos que existe $z = (z_1, \dots, z_n) \in V_{\mathbb{K}^*}(f)$ tal que $ord(z_i) = w_i$. Por lo tanto $\mathcal{T}(I) \cap \mathbb{Q}^n \subseteq ord(V_{\mathbb{K}^*}(I))$. Con lo cual tenemos que $\mathcal{T}(I) = \overline{\mathcal{T}(I) \cap \mathbb{Q}^n} \subseteq \overline{\{(ord(z_1), \dots, ord(z_n)) : z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}}$.

\supseteq : Como $\mathcal{T}(I)$ es cerrado, basta ver que $\forall z \in V_{\mathbb{K}^*}(I), w = ord(z) \in \mathcal{T}(I)$.

Sea $f \in I, f \neq 0$. Sabemos que $f(z) = 0$ y que $z \in \mathbb{K}^*$ por lo tanto f no puede ser un monomio. Si $f = \sum c_\alpha x^\alpha$ tenemos que $\sum c_\alpha z^\alpha = 0$ entonces $ord(\sum c_\alpha z^\alpha) = \infty$. Luego si existiera un único α tal que $ord(c_\alpha z^\alpha)$ sea mínimo entonces no podría haber cancelaciones de término inicial. Como da ∞ , existe al menos otro β con $ord(c_\alpha z^\alpha) = ord(c_\beta z^\beta)$. Por lo tanto existen al menos dos términos para los cuales es mínimo $ord(c_\alpha z^\alpha) = ord(c_\alpha) + \langle \alpha, ord(z) \rangle$. Es decir, $w = ord(z) \in \mathcal{T}(I)$. \square

Comentario 2.6.4. Más generalmente el Teorema 2.6.3 se aplica a cualquier cuerpo K provisto de una función de valuación no trivial. En ese caso para un ideal $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ se tiene que

$$\mathcal{T}(I) = \overline{ord \mathcal{V}(I)} = \overline{\{(ord(z_1), \dots, ord(z_n)) : z \in \mathcal{V}(I)\}} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

donde $\mathcal{V}(I)$ representa el conjunto de ceros de I en $(\bar{K}^*)^n$ siendo como antes \bar{K} la clausura algebraica de K [EKL].

Corolario 2.6.5. *Sea $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ y K un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces*

$$\mathcal{T}(I) = \emptyset \Leftrightarrow \text{existe un monomio } x^\alpha \in I \Leftrightarrow V_{K^*}(I) = \emptyset$$

DEMOSTRACIÓN. Primero veamos que existe un monomio $x^\alpha \in I \Leftrightarrow V_{K^*}(I) = \emptyset$. Esta es una consecuencia del Nullstellensatz de Hilbert para K^n :

\Rightarrow) Si $\alpha = 0$ entonces $x^\alpha = 1$ con lo cual $V(I) = \emptyset$.

Si no, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ con $\alpha_i > 0$ para algún $1 \leq i \leq n$. Si $z \in V(I)$, $z^\alpha = 0$ entonces $z_i = 0$ para algún $1 \leq i \leq n$ y por lo tanto I no tiene ceros en $(K^*)^n$.

\Leftarrow) Como $V_{K^*}(I) = \emptyset$ el ideal $J \subseteq K[x_1, \dots, x_n, y]$ definido por $J = IK[x_1, \dots, x_n, y] + \langle x_1 \dots x_n y - 1 \rangle$ cumple que $V_K(J) = \emptyset$. Entonces por el teorema de los ceros de Hilbert (ver [CLO] página 168) tenemos que $J = K[x_1, \dots, x_n, y]$. Por lo tanto existen polinomios $g, g_1, \dots, g_s \in K[x_1, \dots, x_n, y]$ tales que

$$1 = \sum_{i=1}^s g_i f_i + g(x_1 \dots x_n y - 1).$$

Reemplazando $y = \frac{1}{x_1 \dots x_n}$ tenemos que

$$1 = \sum_{i=1}^s g_i(x_1, \dots, x_n, \frac{1}{x_1 \dots x_n}) f_i(x_1, \dots, x_n).$$

Sea $N = \max_{1 \leq i \leq s} \{deg_y(g_i)\}$ entonces $(x_1 \dots x_n)^N g_i \in K[x_1, \dots, x_n] \forall 1 \leq i \leq s$ con lo cual $(x_1 \dots x_n)^N = \sum_{i=1}^s ((x_1 \dots x_n)^N g_i) f_i \in I$.

Para demostrar la primera equivalencia, observemos que existe un monomio en $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n] \Leftrightarrow$ existe un monomio en $I \subseteq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ con lo cual $V_{K^*}(I) = \emptyset \Leftrightarrow V_{\mathbb{K}^*}(I) = \emptyset$. Entonces por el Teorema 2.6.3 tenemos que

$$\mathcal{T}(I) = \overline{\{ord(z), z \in V_{\mathbb{K}^*}(I)\}} = \emptyset \Leftrightarrow V_{\mathbb{K}^*}(I) = \emptyset \Leftrightarrow V_{K^*}(I) = \emptyset.$$

□

CAPÍTULO 3

Variedades Tropicales

En este capítulo fijaremos el anillo ambiente como el anillo de polinomios sobre los números complejos, $\mathbb{C}[x] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ (que posee la valuación trivial $\text{ord}(z) = 0$ para todo $z \neq 0$). Para polinomios en este anillo daremos en el Teorema 3.1.6 una formulación equivalente a la Definición 3.1.7 de tropicalización de un ideal. Definiremos también el concepto de base tropical (Definición 3.2.2) y demostraremos que todo ideal admite una (Teorema 3.2.9). Veremos que en ocasiones estas bases pueden ser muy extensas (Teorema 3.2.10). En la Sección 3.3 indicamos los métodos básicos para el cálculo de bases tropicales.

3.1. Tropicalización de un ideal en $\mathbb{C}[x]$

Comenzamos recordando la noción de polígono de Newton de un polinomio.

Definición 3.1.1. Sea $f \in \mathbb{C}[x]$. El *polígono de Newton* de f , que notaremos $\text{New}(f)$, es la cápsula convexa en \mathbb{R}^n de los vectores exponentes que aparecen con los coeficientes no nulos de f .

Ejemplo 3.1.2. Sea $f = x^2 + xy + y + 1$. Los exponentes que aparecen con coeficiente no nulo son: $(2, 0)$; $(1, 1)$; $(0, 1)$ y $(0, 0)$. Por tanto el polígono de Newton de f es la cápsula convexa formada por estos cuatro puntos (Figura 3.1).

En la primera parte de este capítulo consideraremos el inicial de un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ respecto a $w \in \mathbb{R}^n$ como la suma de todos los términos de f que minimizan $\langle w, \cdot \rangle$.

Observación 3.1.3. Sea $f = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha x^\alpha \in \mathbb{C}[x]$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Recordemos que según las definiciones dadas en la sección 1.1, $\text{face}_w(\text{New}(f))$ es el conjunto formado por todos los vectores $\alpha \in \text{New}(f)$ que minimizan el producto interno sobre todos los exponentes de los monomios

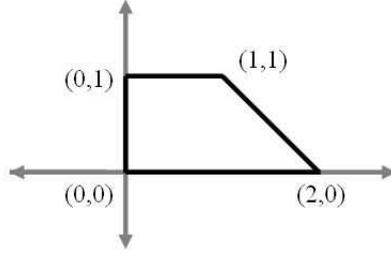


FIGURA 3.1. Polígono de Newton del Ejemplo 3.1.2

presentes en f . Por lo tanto

$$in_w(f) = \sum_{\alpha \in \text{face}_w(\text{New}(f)) \cap \Gamma} a_\alpha x^\alpha.$$

De esta observación podemos concluir que

$$\text{face}_w(\text{New}(f)) = \{\alpha_i\} \iff in_w(f) = a_{\alpha_i} x^{\alpha_i}.$$

Según la Definición 1.1.6 el conjunto formado por los $w \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $\text{face}_w(\text{New}(f)) = \{\alpha_i\}$ forman el cono normal del vértice α_i de $\text{New}(f)$. Como la dimensión del cono normal de una cara F es igual a $n - \dim(F)$ (ecuación 1.1.7) podemos concluir que los vectores $w \in \mathbb{R}^n$ para los cuales el $in_w(f)$ es un monomio se corresponden con los conos de dimensión máxima en el abanico normal de $\text{New}(f)$. Por lo tanto la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es el esqueleto de dimensión $n - 1$ del abanico normal del polígono $\text{New}(f)$.

Ejemplo 3.1.4. Sea $f = x^2 + xy + y + 1$. La hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es por definición el conjunto de todos los $w \in \mathbb{R}^n$ para los cuales $in_w(f)$ no es un monomio (Figura 3.2). Este conjunto coincide con el esqueleto de dimensión 1 del abanico normal del polígono $\text{New}(f)$.

Recordemos que dado un ideal I y $w \in \mathbb{R}^n$ el ideal inicial $in_w(I)$ de I con respecto a w es el ideal generado por todos los polinomios iniciales $in_w(f)$ para todo f no nulo en I .

Lema 3.1.5. Sea $I \subset \mathbb{C}[x]$ y $w \in \mathbb{R}^n$. Si para algún $u \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x^u \in in_w(I)$ entonces $x^u = in_w(f)$ para algún polinomio $f \in I$.

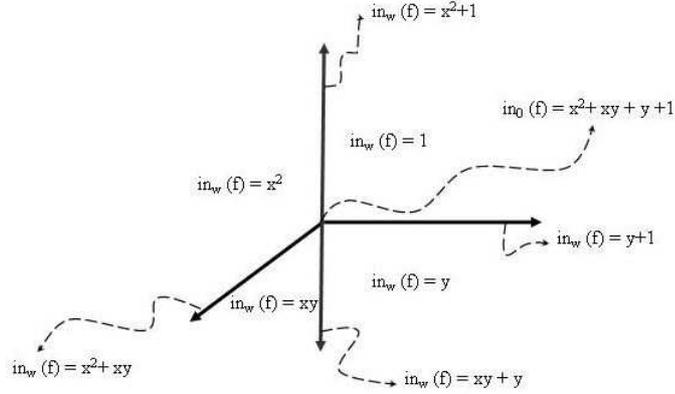


FIGURA 3.2. Hipersuperficie tropical del Ejemplo 3.1.4

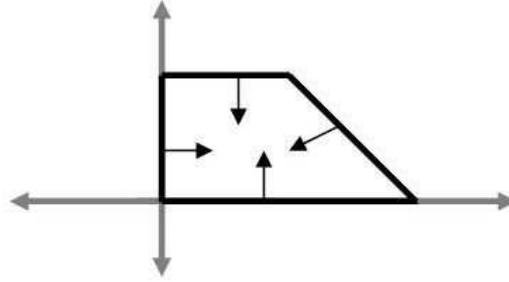


FIGURA 3.3. Esqueleto del abanico normal del polígono de Newton del Ejemplo 3.1.4

DEMOSTRACIÓN. Como $x^u \in in_w(I)$ tenemos que

$$x^u = \sum_{j \in J} n_j in_w(f_j)$$

donde J es un conjunto finito y $f_j \in I \forall j \in J$. Podemos suponer también que los n_j son monomios ya que de lo contrario podemos distribuir $in_w(f_j)$ en cada uno de sus términos. De esta manera tenemos que

$$x^u = \sum_{j \in J} n_j in_w(f_j) = \sum_{j \in J} in_w(n_j f_j) = in_w\left(\sum_{j \in J'} n_j f_j\right)$$

donde $J' = \{j \in J : w\text{-peso}(in_w(n_j f_j)) = w\text{-peso}(x^u) = w \cdot u\}$. Luego tomando $f = \sum_{j \in J'} n_j f_j \in I$ tenemos que $in_w(f) = x^u$. \square

Según la Definición 2.6.1, si I es un ideal en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ entonces su variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ es la intersección de las hipersuperficies tropicales $\mathcal{T}(f)$ donde f recorre todos los polinomios (no nulos) en I . El siguiente teorema da una formulación equivalente de $\mathcal{T}(I)$.

Teorema 3.1.6. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x]$ un ideal. Entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(I) &= \{w \in \mathbb{R}^n : in_w(I) \text{ no contiene monomios}\} \\ &= \{w \in \mathbb{R}^n : V_{(\mathbb{C}^*)^n}(in_w(I)) \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN. Con respecto a la primera igualdad, la contención \supseteq es evidente; la contención inversa \subseteq es una consecuencia del Lema 3.1.5. La segunda igualdad es una reformulación del Corolario 2.6.5 del capítulo anterior. \square

3.2. Bases tropicales

Definición 3.2.1. Llamamos *prevariedad tropical* a una intersección finita de hipersuperficies tropicales.

Un problema básico en geometría tropical es dado un conjunto finito de polinomios $f_1, \dots, f_r \in \mathbb{C}[x]$ calcular la prevariedad $\mathcal{T}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{T}(f_r) \subseteq \mathbb{R}^n$. La geometría de este problema se comprende mejor considerando los polítopos de Newton $New(f_1) \cap \dots \cap New(f_r)$. En esta sección demostraremos que toda variedad tropical es en realidad una prevariedad, es decir, el ideal I tiene un conjunto finito de generadores $\{f_1, \dots, f_r\}$ tal que

$$\mathcal{T}(I) = \mathcal{T}(f_1) \cap \mathcal{T}(f_2) \cap \dots \cap \mathcal{T}(f_r).$$

Definición 3.2.2. Un conjunto de generadores $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_r\}$ de I se denomina una *base tropical* de I si $\bigcap_{i=1}^r \mathcal{T}(f_i) = \mathcal{T}(I)$.

Observación 3.2.3. En todo lo que sigue, para adaptarnos a las notaciones de los artículos [BJSST, HT], consideraremos el polinomio inicial de un polinomio $f \in \mathbb{C}[x]$ respecto a $w \in \mathbb{R}^n$ como la suma de todos los términos de f cuyos exponentes *maximizan* $\langle w, \cdot \rangle$. Esto corresponde simplemente a reemplazar w por $-w$, con lo cual todos los resultados anteriores son válidos (con los cambios obvios) con esta nueva convención.

En principio no está claro por qué todo ideal I tiene una base tropical finita. En [SS] se afirmó que cualquier base de Gröbner universal de I es una base tropical. Desafortunadamente esto no es cierto como lo demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.4. Sea I la intersección de los tres ideales lineales $\langle x + y, z \rangle$, $\langle x + z, y \rangle$, $\langle y + z, x \rangle$ en $\mathbb{C}[x, y, z]$. Entonces I contiene el monomio xyz , por lo tanto $\mathcal{T}(I)$ es vacía. Una base de Gröbner universal de I es

$$\mathcal{U} = \{x + y + z, x^2y + xy^2, y^2z + yz^2, x^2z + xz^2\},$$

y la intersección de las cuatro superficies tropicales correspondientes en \mathbb{R}^3 es la recta $w_1 = w_2 = w_3$. Así \mathcal{U} no es una base tropical de I .

En el Teorema 3.2.9 demostraremos que todo ideal polinomial tiene una base tropical. El siguiente Lema nos dice que es suficiente encontrar algoritmos para calcular variedades tropicales de ideales homogéneos. Sea ${}^hI \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ la homogeinización de un ideal I en $\mathbb{C}[x]$.

Lema 3.2.5. *Sea $I \subset \mathbb{C}[x]$ y un vector $w \in \mathbb{R}^n$. El ideal inicial $in_w(I)$ contiene un monomio si y solo si $in_{(0,w)}({}^hI)$ contiene un monomio.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x^u \in in_w(I)$. Entonces, por el Lema 3.1.5, $x^u = in_w(f)$ para algún $f \in I$. El $(0, w)$ -peso de un término en ${}^h f$ es igual al w -peso del correspondiente término de f . Por lo tanto $in_{(0,w)}({}^h f) = x_0^a x^u \in in_{(0,w)}({}^h I)$ donde a es un entero no negativo.

Ahora supongamos que $x^u \in in_{(0,w)}({}^h I)$ entonces $x^u = in_{(0,w)}(f)$ para algún $f \in {}^h I$. Sustituyendo $x_0 = 1$ en f obtenemos un polinomio en I . El $(0, w)$ -peso de cualquier término de f es igual al w -peso del término correspondiente en $f|_{x_0=1}$. Como $in_{(0,w)}(f)$ es un monomio, solo un término de f tiene mínimo $(0, w)$ -peso. Este término no puede cancelarse durante la sustitución. Por lo tanto pertenece a $in_w(I)$. □

Sea $in_w(I)$ un ideal inicial de I . Si $C_w(I) \not\subseteq \mathcal{T}(I)$ entonces $in_w(I)$ contiene un monomio x^m . Luego, por el Lema 3.1.5 debe existir un

polinomio $f \in I$ tal que $x^m = in_w(f)$. Llamamos a f un *testigo* para $C_w(I)$ si sucede lo siguiente:

$$int\ rel(C_w(I)) \cap \mathcal{T}(f) = \emptyset.$$

El testigo muestra que $C_w(I)$ no está en la variedad tropical.

Lema 3.2.6. *Sean $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, \prec un orden monomial y $v \in \mathbb{R}^n$ con $v \in C_{\prec}(I)$. Si $m \in in_v(I)$ es un polinomio v -homogeneo entonces el polinomio $f = m - m^{\mathcal{G}_{\prec}(I)} \in I$ y además $in_v(f) = m$.*

DEMOSTRACIÓN. El polinomio m se reduce a 0 módulo $\mathcal{G}_{\prec}(in_v(I))$ mediante el algoritmo de división. La base de Gröbner $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ es la misma que $\mathcal{G}_{\prec}(in_v(I))$ por el Corolario 1.4.6 excepto que cada elemento puede tener términos adicionales con menor v -peso. Aplicando el algoritmo de división sobre m módulo $\mathcal{G}_{\prec}(I)$ podemos hacer la misma elección que para $\mathcal{G}_{\prec}(in_v(I))$, reduciendo m a 0 mas términos adicionales de menor v -peso. Como el resto es único, no importa el orden en el que aplicamos el algoritmo, siempre obtenemos un único resto $m^{\mathcal{G}_{\prec}(I)}$ de menor v -peso que el v -peso de m . Concluimos entonces que $in_v(m - m^{\mathcal{G}_{\prec}(I)}) = m$. \square

Proposición 3.2.7. *Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal homogeneo y $w \in \mathbb{R}^n$. Si $in_w(I)$ contiene un monomio entonces $C_w(I)$ tiene un testigo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x^m \in in_w(I)$ y \prec un orden monomial. Por el Lema 3.2.6 y el Lema 1.4.7 el polinomio $f := x^m - (x^m)^{\mathcal{G}_{\prec_w}(I)}$ satisface $f \in I$ y $in_w(f) = x^m$. Para demostrar que f es un testigo simplemente observamos que cualquier w' en el $int\ rel(C_w(I))$ nos hubiera dado la misma f ya que $in_w(I) = in_{w'}(I)$ implica que $in_{\prec_w}(I) = in_{\prec}(in_w(I)) = in_{\prec}(in_{w'}(I)) = in_{\prec_{w'}}(I)$ y $\mathcal{G}_{\prec_w}(I) = \mathcal{G}_{\prec_{w'}}(I)$ \square

Observación 3.2.8. Notar que el proceso realizado en la demostración anterior producirá un testigo homogeneo.

Teorema 3.2.9. *Todo ideal polinomial $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tiene una base tropical finita.*

DEMOSTRACIÓN. Comenzamos considerando el caso en el que I es un ideal homogéneo. Para cada $in_w(I)$ que contenga un monomio tomamos un testigo homogeneo. El conjunto finito formado por estos

testigos junto con un conjunto finito de generadores homogéneos de I forman una base tropical. Si I no es homogéneo podemos considerar su homogeneización ${}^hI \subseteq \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ el cual tiene una base tropical homogénea B . Sustituyendo $x_0 = 1$ en la base ningún término se cancela y por el Lema 3.2.5 tenemos que

$$\{0\} \times \mathcal{T}(I) = \mathcal{T}({}^hI) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n) = \left(\bigcap_{f \in B} \mathcal{T}(f) \right) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n) =$$

$$\bigcap_{f \in B} (\mathcal{T}(f) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^n)) = \bigcap_{f \in B} (\{0\} \times \mathcal{T}(f|_{x_0=1})) = \{0\} \times \bigcap_{f \in B} \mathcal{T}(f|_{x_0=1}).$$

Por lo tanto tenemos una base tropical. \square

En [BJSST] se demostró que las bases tropicales pueden ser muy extensas aún para ideales lineales. Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x]$ el ideal generado por d formas lineales $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ donde $i = 1, \dots, d$ y (a_{ij}) es una matriz de tamaño $d \times n$ con coeficientes enteros y rango d . La variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ depende solamente del matroide asociado a I . Este se conoce como el abanico de Bergman del matroide. Los resultados sobre el abanico de Bergman demostrados en [AK] y [S2] implican que los circuitos de I forman una base tropical. Un *circuito* de I es un polinomio no nulo $f \in I$ de mínimo soporte.

Teorema 3.2.10. *Para cada $1 \leq d \leq n$ existe un ideal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ generado por d formas lineales tal que cualquier base tropical de formas lineales en I tiene como mínimo $\frac{1}{n-d+1} \binom{n}{d}$ elementos.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que todos los menores de $d \times d$ son distintos de cero. Equivalentemente, el matroide de I es d -uniforme. Entonces hay $\binom{n}{n-d+1}$ circuitos en I , cada uno con soporte en un subconjunto distinto de $(n-d+1)$ elementos $\{x_1, \dots, x_n\}$. Como los circuitos de I forman una base tropical de I y cada circuito tiene soporte de tamaño $n-d+1$, la variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ está compuesta por todos los vectores $w \in \mathbb{R}^n$ tales que sus $n - (n-d+1) + 2 = d+1$ menores componentes son iguales. Esta condición es necesaria y suficiente para asegurar que ninguna variable x_j sea el inicial de un circuito con respecto a w . Consideremos un vector $w \in \mathbb{R}^n$ que satisfaga

$$w_{i_1} = w_{i_2} = \dots = w_{i_d} < \min(w_j : j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_d\}).$$

Como $w \notin \mathcal{T}(I)$ cualquier base tropical de I conformada por formas lineales contiene un polinomio f tal que $in_w(f) \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_d}\}$. Esto implica que f es uno de los d circuitos cuyo soporte contiene las $n - d$ variables x_j con $j \notin \{i_1, \dots, i_d\}$. El soporte de cada circuito tiene tamaño $n - d + 1$ con lo cual contiene $(n - d + 1)$ distintos $(n - d)$ -subconjuntos. Hay $\binom{n}{n-d}$ $(n - d)$ -subconjuntos de $\{x_1, \dots, x_n\}$ para cubrir. Luego cualquier base tropical formada por polinomios lineales tiene como mínimo $\frac{1}{n-d+1} \binom{n}{n-d}$ elementos. \square

3.3. Cálculo de prevariedades tropicales y bases tropicales

En esta sección resumimos y damos indicaciones bibliográficas sobre métodos efectivos para el cálculo de bases tropicales de variedades algebraicas.

Retomamos ahora el problema de calcular una prevariedad tropical $\mathcal{T}(f_1) \cap \dots \cap \mathcal{T}(f_r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definición 3.3.1. Decimos que un conjunto S de poliedros en \mathbb{R}^n *representa* al abanico \mathcal{F} contenido en \mathbb{R}^n si el conjunto de todas las caras de los conos contenidos en S es exactamente \mathcal{F} .

Para calcular una prevariedad tropical recordemos que para un polinomio f la hipersuperficie tropical $\mathcal{T}(f)$ es la unión de los conos normales de las aristas del polítopo de Newton $New(f)$ (ver Ejemplo 3.1.4). Luego si para cada vértice v de $New(f)$ calculamos el conjunto de todas las facetas del cono normal de v , la unión de estos conjuntos es una representación de un abanico poliedral cuyo soporte es $\mathcal{T}(f)$.

Un cono del abanico de Gröbner $C_w(I)$ se puede representar por el par $(\mathcal{G}_{\prec_w}(in_w(I)), \mathcal{G}_{\prec_w}(I))$ formado por bases de Gröbner reducidas marcadas donde \prec es un orden monomial. En una base de Gröbner *marcada* los términos iniciales aparecen resaltados. La ventaja de utilizar bases de Gröbner marcadas es que el peso w no necesita ser almacenado. Esto se debe a que, gracias a la ecuación 1.3.5, para cualquier otro vector $w' \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$w' \in C_w(I) \iff \forall f \in \mathcal{G}_{\prec_w}(I) : in_w(in_{w'}(f)) = in_w(f).$$

Definición 3.3.2. Si \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_2 son abanicos poliedrales en \mathbb{R}^n se define su *refinamiento común* como:

$$\mathcal{F}_1 \wedge \mathcal{F}_2 := \{C_1 \cap C_2\}_{(C_1, C_2) \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2}.$$

Para calcular un refinamiento común simplemente recorremos a través de todos los pares de conos en las presentaciones de los abanicos y calculamos su intersección expresándolas luego en forma canónica. La forma canónica hace más fácil la eliminación de duplicados. Si necesitamos calcular refinamientos de más de dos abanicos podemos aplicar el procedimiento anterior repetidamente. Notar que la intersección de los soportes de los abanicos es el soporte del refinamiento común de los abanicos. Por lo tanto este procedimiento puede ser utilizado para calcular intersecciones de hipersuperficies tropicales.

Calcular testigos es esencial para el problema de calcular bases tropicales. Recordemos que un testigo $f \in I$ para $C_w(I)$ es un polinomio que verifica que $\mathcal{T}(f) \cap \text{int rel}(C_w(I)) = \emptyset$. El primer paso para calcular un testigo es chequear si el ideal $\text{in}_w(I)$ contiene monomios y si los tiene calcular alguno de ellos.

La búsqueda de monomios se puede realizar mediante la saturación del ideal con respecto al producto de las variables.

Definición 3.3.3. Sea $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ un polinomio. La *saturación* de I con f es el ideal definido por

$$(I : f^\infty) := \{g \in K[x_1, \dots, x_n] : gf^m \in I \text{ para algún } m \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que por Noetherianidad de $K[x_1, \dots, x_n]$ tenemos que

$$(I : f^\infty) = (I : f^m) = (I : f^{m+1}) = (I : f^{m+2}) \text{ para algún } m \in \mathbb{N}.$$

Observación 3.3.4. I tiene un monomio $\iff (I : x_1 \dots x_n^\infty) = \langle 1 \rangle$.

Combinando los procedimientos de chequeo de existencia de monomios en un ideal y búsqueda de testigos con métodos conocidos para calcular el abanico de Gröbner (ver [S], algoritmo 3.6) podemos ahora calcular la variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ y una base tropical para I . Simplemente para cada cono C del abanico de Gröbner de I tomamos un vector w en su interior relativo y verificamos si $\text{in}_w(I)$ contiene algún monomio. Si no contiene monomios entonces $C \subseteq \mathcal{T}(I)$. Si tiene algún

monomio entonces buscamos un testigo $f \in I$. Repitiendo este procedimiento con todos los conos obtenemos que la $\mathcal{T}(I)$ es la unión de todos los conos C del abanico para los cuales el $w \in \text{int rel}(C)$ cumple que $\text{in}_w(I)$ no tiene monomios. Por último, una base tropical de I estará formado por un conjunto de generadores de I junto con todos los testigos encontrados.

Este método puede no ser muy práctico en general. La razón es que la amplia mayoría de los conos del abanico de Gröbner típicamente no pertenecen a la variedad tropical $\mathcal{T}(I)$.

Definición 3.3.5. Sea \mathcal{F} un complejo poliedral. Un camino a través de caras de codimensión dos entre dos poliedros $S, T \in \mathcal{F}$ de la misma dimensión es una secuencia de poliedros en \mathcal{F}

$$S = P_0, \dots, P_m = T$$

de alguna longitud $m + 1$ tal que para cada $i = 1, \dots, m$ la intersección $P_{i-1} \cap P_i$ es una faceta de P_{i-1} y de P_i .

En [BJSST] se demostró el siguiente resultado.

Teorema 3.3.6. *Sea $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo. Entonces $\mathcal{T}(I)$ está conectado en codimensión uno, i.e., dos conos maximales en $\mathcal{T}(I)$ se conectan por un camino a través de caras de codimensión dos en $\mathcal{T}(I)$.*

Bieri y Groves [BG] demostraron que la variedad tropical de un ideal primo de dimensión d es un complejo poliedral puro de igual dimensión. Por lo tanto para recorrer la variedad tropical solo necesitamos atravesar sus conos maximales. El paso clave es poder pasar de un cono maximal a otro. Por otra parte también necesitamos tener un cono con el cual comenzar el recorrido.

Empleando el Teorema 3.3.6 y el método de *caminata de Gröbner* Speyer, Bogart, Jensen, Sturmfels y Thomas desarrollaron el primer estudio detallado de algoritmos para calcular la variedad tropical de un ideal primo. Para mayores detalles ver [BJSST].

Estos algoritmos fueron implementados por Anders Jensen en el software *gfan*. El mismo se puede encontrar en la página

www.math.tu-berlin.de/~jensen/software/gfan/gfan.html.

Referimos también a sus artículos [**J**] y [**J2**] para más detalles.

CAPÍTULO 4

Variedades Tropicales por proyecciones regulares

En este capítulo, mejorando los argumentos presentados en [HT], demostraremos que si eliminamos la hipótesis de que la base esté compuesta por formas lineales podemos encontrar bases tropicales con considerablemente menos elementos (Teorema 4.1.1). Terminaremos el capítulo demostrando el Teorema de extensión en su versión tropical (Teorema 4.2.1).

4.1. Proyecciones y el teorema principal

Bogart, Jensen, Speyer, Sturmfels y Thomas iniciaron en [BJSST] y [J] la investigación para el cálculo computacional de bases tropicales. Como vimos en el capítulo anterior ellos demostraron que para $1 \leq d \leq n$ existe un ideal lineal $I \subseteq \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tal que cualquier base tropical de formas lineales en I tiene como mínimo $\frac{1}{n-d+1} \binom{n}{d}$ elementos. Pero ¿hay bases tropicales con menos elementos?

En este capítulo veremos que si eliminamos la hipótesis de que la base esté compuesta por formas lineales, podemos encontrar bases tropicales de I con considerablemente menos elementos. La demostración que seguiremos para esto es la presentada por Kerstin Hept y Thorsten Theobald [HT].

Sea K un cuerpo dotado con una función de valuación no trivial $ord : K \rightarrow \mathbb{T} := \mathbb{R} \cup \infty$. Hemos visto ya en la sección 2.5 que esta función puede extenderse a cualquier clausura algebraica \bar{K} y a \bar{K}^n . Recordemos que por la generalización del Teorema 2.6.3 la variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ de un ideal $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ se puede definir como la clausura del conjunto

$$ord \mathcal{V}(I) = \{(ord(z_1), \dots, ord(z_n)) : z \in \mathcal{V}(I)\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

donde $\mathcal{V}(I)$ representa el conjunto de ceros de I en $(\bar{K}^*)^n$.

El siguiente Teorema es el resultado fundamental de este capítulo.

Teorema 4.1.1. *Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo generado por los polinomios f_1, \dots, f_r . Entonces existen polinomios $g_0, \dots, g_{n-\dim(I)} \in I$ tales que*

$$(4.1.2) \quad \mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=0}^{n-\dim(I)} \mathcal{T}(g_i)$$

y $\mathcal{G} := \{f_1, \dots, f_r, g_0, \dots, g_{n-\dim(I)}\}$ es una base tropical de I de cardinal $r + \text{codim}(I) + 1$.

Observación 4.1.3. En particular esto implica la cota de $n + 1$ polinomios en la representación (4.1.2) independientemente de la dimensión de I .

El Teorema es consecuencia de la técnica de proyecciones regulares introducida por Bieri y Groves [BG]. El mismo puede verse como una analogía tropical del Teorema de Eisenbud-Evans de la geometría algebraica clásica, el cual afirma que todo conjunto algebraico en el espacio n -dimensional es la intersección de n hipersuperficies [EE].

Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo de dimensión m . La idea geométrica principal es considerar $n - m + 1$ diferentes proyecciones racionales $\pi_0, \dots, \pi_{n-m} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$, es decir π_i es una aplicación suryectiva de la forma $\pi_i(x) = Ax$ con $A \in \mathbb{Q}^{(m+1) \times n}$. Veremos que si se eligen estas proyecciones en forma adecuada se puede obtener que:

$$\bigcap_{i=0}^{n-m} \pi_i^{-1}(\pi_i(\mathcal{T}(I))) = \mathcal{T}(I)$$

y cada uno de los conjuntos $\pi_i^{-1}(\pi_i(\mathcal{T}(I)))$ es una hipersuperficie tropical.

Definición 4.1.4. Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal. Consideramos la imagen de la variedad tropical $\mathcal{T}(I)$ por una única proyección racional

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^{m+1}, \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

donde A es una matriz racional de rango máximo cuyas filas notaremos como $a^{(1)}, \dots, a^{(m+1)} \in \mathbb{Q}^n$. Sea $u^{(1)}, \dots, u^{(\ell)} \in \mathbb{Z}^n$ con $\ell := n - (m + 1)$

1) una base del complemento ortogonal del subespacio generado por $\{a^{(1)}, \dots, a^{(m+1)}\}$, es decir, del núcleo de π .

Consideremos ℓ nuevas variables independientes $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ y sea $R = K[x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell]$. Para cualquier polinomio $f \in K[x_1, \dots, x_n]$, sea \hat{f} la composición de f con la función definida por $x_i \mapsto x_i \prod_{j=1}^{\ell} \lambda_j^{u_i^{(j)}}$, es decir,

$$\hat{f}(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_\ell) = f\left(x_1 \prod_{j=1}^{\ell} \lambda_j^{u_1^{(j)}}, \dots, x_n \prod_{j=1}^{\ell} \lambda_j^{u_n^{(j)}}\right) \in R.$$

Se define el ideal $J_\pi \triangleleft R$ como

$$J_\pi = \langle \hat{f} \in R : f \in I \rangle.$$

Lema 4.1.5. *Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal y $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una proyección racional. Entonces*

$$J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n] \subseteq I.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $p = \sum_i h_i \hat{f}_i$ un polinomio en $J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n]$ con $f_i \in I$. Como p es independiente de $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ tenemos que

$$p = p|_{\lambda_1=1, \dots, \lambda_\ell=1} = \sum_i h_i|_{\lambda_1=1, \dots, \lambda_\ell=1} f_i \in I.$$

□

Lema 4.1.6. *Para cualquier $w \in \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$ y u en el subespacio $\langle u^{(1)}, \dots, u^{(\ell)} \rangle$ se tiene que $w + u \in \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $u = \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u^{(j)}$ con $\mu_1, \dots, \mu_\ell \in \mathbb{Q}$. El caso de $\mu_i \in \mathbb{R}$ se sigue tomando clausura.

Sea $w \in \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$. Como $\mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$ es cerrado, basta considerar el caso en que existe $z \in \mathcal{V}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$ con $\text{ord } z = w$.

Definimos $y = (y', y'') \in (\bar{K}^*)^{n+\ell}$ como

$$y = (y', y'') = \left(z_1 t^{\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_1^{(j)}}, \dots, z_n t^{\sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_n^{(j)}}, t^{-\mu_1}, \dots, t^{-\mu_\ell} \right)$$

donde $t \in \bar{K}$ tiene orden 1. Es fácil ver que para cualquier $f \in I$, el punto y es un cero del polinomio \hat{f} en el anillo R y por lo tanto

$y \in \mathcal{V}(J_\pi)$. Luego, $y' \in \mathcal{V}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$. Más aún

$$\text{ord } y' = (w_1 + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_1^{(j)}, \dots, w_n + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u_n^{(j)}) = w + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j u^{(j)} = w + u,$$

lo cual demuestra la afirmación. \square

Definición 4.1.7. Llamamos a una proyección racional *algebraicamente regular* para un ideal I si para cada $i \in \{1, \dots, \ell\}$ el ideal de eliminación $J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_i]$ tiene una base (finita) \mathcal{F}_i con la siguiente propiedad:

en todo polinomio $f \in \mathcal{F}_i$, los coeficientes $h^{(j)}$ de las potencias de λ_i , cuando consideramos a f como un polinomio en λ_i ,

$$(4.1.8) \quad f = \sum_{j=0}^d h^{(j)} \lambda_i^j$$

son *monomios* en $x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_{i-1}$.

Teorema 4.1.9. *Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo y $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una proyección algebraicamente regular. Entonces $\pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I))$ es una variedad tropical con*

$$\pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I)) = \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n]).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $w \in \pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I))$ o sea $\pi(w) \in \pi(\mathcal{T}(I))$. Como $\mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$ es cerrado, podemos asumir sin pérdida de generalidad que existe $z' \in \mathcal{V}(I)$ tal que $\pi(w) = \pi(\text{ord } z')$. Entonces existe $u \in \langle u^{(1)}, \dots, u^{(\ell)} \rangle = \ker(\pi)$ tal que $\text{ord } z' = w + u$.

Para cualquier $f \in I$, el punto $z := (z', 1)$ es un cero del polinomio $\hat{f} \in R$, con lo cual $z \in \mathcal{V}(J_\pi)$. Por lo tanto $z' \in \mathcal{V}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$. Por el Lema 4.1.6 se tiene que $w = \text{ord } z' + (-u) \in \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$ también.

Sea ahora $w \in \mathcal{T}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n])$. Otra vez podemos asumir que existe un $z \in \mathcal{V}(J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n]) \subseteq (\bar{K}^*)^n$ con $w = \text{ord}(z)$. Como la proyección es algebraicamente regular, los generadores del ideal de eliminación $J_\pi \cap K[x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_i]$ tienen solo monomios como coeficientes respecto a cualquier λ_i . Por lo tanto no se anulan en ningún $z \in (\bar{K}^*)^n$. Por el teorema de extensión (ver [CLO]) podemos

extender la raíz z inductivamente, a una raíz $\tilde{z} \in \mathcal{V}(J_\pi)$ con la mismas n primeras coordenadas (z_1, \dots, z_n) . La definición de J_π dice que

$$z' := (z_1 \tilde{z}_{n+1}^{u_1^{(1)}} \cdots \tilde{z}_{n+\ell}^{u_1^{(\ell)}}, \dots, z_n \tilde{z}_{n+1}^{u_n^{(1)}} \cdots \tilde{z}_{n+\ell}^{u_n^{(\ell)}})$$

es una raíz de I con lo que $ord z' \in \mathcal{T}(I)$. Más aún

$$ord(z') = ord(z) + \sum_{i=1}^{\ell} ord(\tilde{z}_{n+i}) u^{(i)}$$

entonces $w = ord z = ord z' + u$ con $u \in \ker(\pi)$, lo cual significa que $ord(z) = w \in \pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I))$. \square

Seguindo a Bieri y Groves [BG], identificaremos dos proyecciones racionales $\pi, \pi' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ si $\ker \pi = \ker \pi'$, ya que coinciden salvo un isomorfismo lineal de \mathbb{R}^{m+1} (definido sobre \mathbb{Q}). El conjunto de todas las clases de equivalencia de proyecciones racionales $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ está entonces en biyección con la Grassmaniana $\mathbb{G}_{n-m-1, n}(\mathbb{Q})$ de subespacios lineales de dimensión $n - m - 1$ en \mathbb{Q}^n (o sea, todos los núcleos posibles, que es una variedad algebraica de dimensión $(n - m - 1) \times (m + 1)$).

El siguiente Lema muestra que el conjunto de las proyecciones algebraicamente regulares es denso en el conjunto de todas las proyecciones reales $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$.

Lema 4.1.10. *El conjunto de las proyecciones racionales algebraicamente regulares $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ es un abierto denso de la Grassmaniana $\mathbb{G}_{n-m-1, n}(\mathbb{Q})$.*

DEMOSTRACIÓN. Es suficiente mostrar que pueden elegirse generadores $u^{(1)}, \dots, u^{(\ell)}$ del ortogonal del subespacio generado por las filas de A en el complemento de una unión finita de hiperplanos. Veamos que para la elección de $u^{(\ell)}$, solo tenemos que evitar una subvariedad lineal de dimensión menor que n . Para $u^{(1)}, \dots, u^{(\ell-1)}$ podemos entonces argumentar inductivamente.

Asumamos que I está generado por f_1, \dots, f_s . Entonces $J_\pi = \langle \hat{f}_j : 1 \leq j \leq s \rangle$. Para cualquier j , el polinomio \hat{f}_j es de la forma

$$\hat{f}_j = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_j} c_\alpha x^\alpha \lambda_1^{\sum \alpha_i u_i^{(1)}} \cdots \lambda_\ell^{\sum \alpha_i u_i^{(\ell)}}$$

con $\mathcal{A}_j \subset \mathbb{Z}^n$ finito. Así si miramos la expansión de \hat{f}_j como en 4.1.8 como un polinomio en λ_ℓ , todos los coeficientes son monomios si

$$\sum \alpha_i u_i^{(\ell)} \neq \sum \beta_i u_i^{(\ell)}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathcal{A}_j$ con $\alpha \neq \beta$. Por lo tanto tenemos que elegir $u^{(\ell)}$ dentro del conjunto

$$\bigcap_j \{u \in \mathbb{R}^n : \sum \alpha_i u_i^{(\ell)} \neq \sum \beta_i u_i^{(\ell)} \text{ para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{A}_j \text{ con } \alpha \neq \beta\}.$$

Luego el conjunto de las proyecciones algebraicas no regulares está contenido en un número finito de hiperplanos. \square

A continuación consideraremos el conjunto de las proyecciones geoméricamente regulares.

Definición 4.1.11. Sea C un complejo poliedral in \mathbb{R}^n . Una proyección $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ se denomina *geoméricamente regular* si cumple las siguientes condiciones:

1. Para cada cara σ de C se tiene que $\dim(\pi(\sigma)) = \dim(\sigma)$.
2. Si $\pi(\sigma) \subseteq \pi(\tau)$ entonces $\sigma \subseteq \tau$ para todo $\sigma, \tau \in C$.

Observación 4.1.12. De manera similar a la demostración del Lema 4.1.10 se ve que las proyecciones geoméricamente regulares son densas en $\mathbb{G}_{n-m-1, n}(\mathbb{Q})$, más aún el conjunto de proyecciones racionales algebraica y geoméricamente regulares es denso.

Bieri y Groves demostraron que si $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ es un ideal primo de dimensión m , entonces $\mathcal{T}(I)$ es un complejo poliedral de la misma dimensión [BG]. Más aún, sus métodos demuestran que:

Teorema 4.1.13. (Bieri, Groves [BG]) *Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo. Para cualquier conjunto denso D de proyecciones racionales geométrica y algebraicamente regulares existen $\text{codim } I + 1$ proyecciones $\pi_0, \dots, \pi_{\text{codim } I} \in D$ tales que*

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=0}^{\text{codim } I} \pi_i^{-1} \pi_i(\mathcal{T}(I)).$$

Lema 4.1.14. *Sea $I \triangleleft K[x_1, \dots, x_n]$ un ideal primo de dimensión m y $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ una proyección racional tal que*

$$\dim \pi(\mathcal{T}(I)) = m$$

entonces $\pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I))$ es una hipersuperficie tropical.

En particular si π es cualquier proyección racional geoméricamente regular, $\pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I))$ es una hipersuperficie tropical.

DEMOSTRACIÓN. $\dim \pi^{-1}\pi(\mathcal{T}(I)) = \dim \pi(\mathcal{T}(I)) + \dim \ker \pi = m + (n - (m + 1)) = n - 1$.

Por [BG] sabemos que $\dim \mathcal{T}(I) = \dim I = m$ entonces si π es una proyección geoméricamente regular tenemos que

$$\dim \pi(\mathcal{T}(I)) = \dim \mathcal{T}(I) = m.$$

□

Estamos ahora en condiciones de demostrar el Teorema 4.1.1.

DEMOSTRACIÓN. (del Teorema 4.1.1) Como el conjunto de las proyecciones racionales algebraica y geoméricamente regulares es denso en el espacio de las proyecciones racionales, por el Teorema 4.1.13 tenemos que existen $\text{codim } I + 1$ proyecciones $\pi_0, \dots, \pi_{\text{codim } I}$ tales que

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=0}^{\text{codim } I} \pi_i^{-1}\pi_i(\mathcal{T}(I)).$$

Por el Teorema 4.1.9 sabemos que $\pi_i^{-1}\pi_i(\mathcal{T}(I))$ es una variedad tropical más aún por el Lema 4.1.14 sabemos que es una hipersuperficie tropical. Luego por el 4.1.5 existe $g_i \in I$ tal que $\pi_i^{-1}\pi_i(\mathcal{T}(I)) = \mathcal{T}(g_i)$. Obtenemos entonces que

$$\mathcal{T}(I) = \bigcap_{i=0}^{n-\dim(I)} \mathcal{T}(g_i).$$

□

4.2. El teorema de extensión tropical

Terminamos este capítulo con un importante resultado de la geometría tropical.

Teorema 4.2.1. *(Teorema de Extensión, versión tropical)*

Sea $I \triangleleft K[x_0, \dots, x_n]$ un ideal y sea $I_1 = I \cap K[x_1, \dots, x_n]$ su primer ideal de eliminación. Para cada $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(I_1)$ existe $w_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\tilde{w} = (w_0, w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(I)$.

DEMOSTRACIÓN. Primeramente supongamos que $w \in \text{ord}(\mathcal{V}(I_1))$. Entonces existe $z \in \mathcal{V}(I_1)$ con $\text{ord}(z) = w$. Sea $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ una base de Gröbner reducida de I con respecto al orden monomial lexicográfico con $x_0 > x_i$, $1 \leq i \leq n$ y escribamos

$$g_i = h_i(x_1, \dots, x_n)x_0^{\deg_{x_0} g_i} + \text{términos de menor orden en } x_0.$$

Hay dos casos posibles a considerar:

Caso 1: $z \notin \mathcal{V}(h_1, \dots, h_s)$. Entonces por el Teorema de Extensión clásico existe una raíz \tilde{z} de I que extiende z , por lo tanto $\text{ord}(\tilde{z}) =: \tilde{w}$ extiende w .

Caso 2: $z \in \mathcal{V}(h_1, \dots, h_s)$. Entonces $w = \text{ord}(z) \in \mathcal{T}(H)$, donde $H = \langle h_1, \dots, h_s \rangle$. Sea $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_t\}$ una base tropical de I .

Si p_j es uno cualquiera de estos polinomios entonces

$$p_j = q_j(x_1, \dots, x_n)x_0^{\deg_{x_0} p_j} + \text{términos de menor orden en } x_0.$$

Como \mathcal{G} es una base de Gröbner para el orden lexicográfico, tenemos que $q_j(x_1, \dots, x_n) =: \sum k_\alpha x^\alpha \in H$. Por lo tanto el mínimo

$$\min_\alpha \{ \text{ord}(k_\alpha) + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \}$$

se alcanza al menos dos veces en w ya que $q_j \in H$ y $w \in \mathcal{T}(H)$.

Podemos tomar $w_0^{(j)} \in \mathbb{R}$ negativo y con módulo suficientemente grande para que todos los términos $x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} x_0^{m_0}$ de p_j con $m_0 < \deg_{x_0} p_j$ tengan una valuación mayor $m_1 w_1 + \dots + m_n w_n + m_0 w_0^{(j)}$. Así el mínimo de todas las valuaciones de todos los términos de p_j se alcanza al menos dos veces; este es

$$\min_\alpha \{ \text{ord}(k_\alpha) + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n \} + \deg_{x_0} p_j \cdot w_0^{(j)}.$$

Por lo tanto $(w_0^{(j)}, w_1, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(p_j)$.

Tomando $w_0 = \min_j \{w_0^{(j)}\}$ tenemos que $\tilde{w} := (w_0, \dots, w_n) \in \mathcal{T}(I)$, ya que \mathcal{P} es una base tropical de I . De esta manera obtenemos la extensión deseada de w . Esto concluye con el caso 2.

Sea ahora $w = \lim_{i \rightarrow \infty} w^{(i)}$ en la clausura de $\text{ord}(\mathcal{V}(I_1))$ y tomemos un entorno compacto U_w de w . Como $\mathcal{T}(I)$ es una unión de *finitos* poliedros *cerrados* F_1, \dots, F_N , existe $R > 0$ tal que para todo $\alpha \in U_w$ se verifica que para todo $j = 1, \dots, N$,

$$F_j \cap \pi^{-1}(\alpha) \neq \emptyset \Rightarrow F_j \cap \pi^{-1}(\alpha) \cap \{\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}^{n+1} / |\alpha_0| \leq R\} \neq \emptyset$$

donde $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida por $\pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$. Podemos suponer que $w^{(i)} \in U_w$ para todo i y más aun, como ya vimos que existe una extensión $\tilde{w}^{(i)} \in \mathcal{T}(I)$, podemos suponer que $\tilde{w}^{(i)} = (w_0^{(i)}, \tilde{w}^{(i)})$ con $|w_0^{(i)}| \leq R$. Existe por lo tanto una subsucesión que converge a un punto $\tilde{w} \in \mathcal{T}(I)$. Por continuidad de la proyección π tenemos que $\pi(\tilde{w}) = w$, como queríamos. \square

Bibliografía

- [AK] Federico Ardilla y Caroline Klivans. *The Bergman complex of a matroid and phylogenetics trees*. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 96 (1), 38-49, 2006.
- [BJSST] T. Bogart, A. N. Jensen, D. Speyer, B. Sturmfels, and R. R. Thomas. *Computing tropical varieties*. J. Symbolic Comput., 42(1-2):54-73, 2007, math.AG/0507563.
- [BG] R. Bieri and J.R.J. Groves, *The geometry of the set of characters induced by valuations*, J. Reine Angew. Math. 347 (1984), 168-195.
- [CLO] David Cox, John Little y Donal O’Shea. *Ideals, varieties and algorithms*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra.
- [EE] D. Eisenbud and E.G. Evans, Jr., *Every algebraic set in n -space is the intersection of n hypersurfaces*, Invent. Math. 19 (1973), 107-112.
- [EKL] M. Einsiedler, M.M. Kapranov, y D. Lind, *Non-archimedean amoebas and tropical varieties*, J. Reine Angew. Math. 601(2006), 139-157.
- [HT] Kerstin Hept and Thorsten Theobald. *Tropical bases by regular projections*, arXiv: 0708.1727v2[math.AG].
- [J] Anders Nedergaard Jensen. *Algorithmic Aspects of Gröbner Fans and Tropical Varieties*. Ph.D. Dissertation July 2007. Department of Mathematical Sciences Faculty of Science, University of Aarhus.
- [J2] Anders Nedergaard Jensen. *A non-regular Gröbner fan*. Department of Mathematical Sciences Faculty of Science, University of Aarhus, arXiv: 0501352v1[math.CO].
- [L] Antonio Laface. *Introduction to tropical Geometry*. Disponible en: www2.udec.cl/~alaface/notes/oct-18.pdf.
- [Mc] Diane Maclagan. *AARMS course on Tropical Geometry*. Disponible en: www.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/AARMS/AARMSschedule.html.
- [Mk] Thomas Markwig. *A field of generalised Puiseux series for tropical geometry*, arXiv:0709.3784.

- [MR] Teo Mora and Lorenzo Robbiano *The Gröbner fan of an ideal*. J. Symbolic Comput, 6(2-3):183-208, 1988. Computational aspects of commutative algebra.
- [RST] Jürgen Richter-Gebert, Bernd Sturmfels and Thorsten Theobald. *First Steps in Tropical Geometry*, arXiv: 0306366v2[math.AG].
- [S] Bernd Sturmfels. *Gröbner bases and convex polytopes*, volume 8 of University Lecture Series. American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.
- [S2] Bernd Sturmfels. *Solving Systems of Polynomial Equations*, American Mathematical Society, CMBS Series, 97, 2002.
- [SS] David Speyer and Bernd Sturmfels. *The tropical Grassmannian*, Advances in Geometry Advances in Geometry 4 (2004) 389-411.
- [SS2] David Speyer and Bernd Sturmfels. *Tropical Mathematics*, arXiv: 0408099v1 [math.CO].
- [T] Luis Felipe Tabera. *Constructive proof of extended Kapranov Theorem*, arXiv: 0810.4907v1 [math.AC].
- [W] R.J. Walker, 1950. *Algebraic Curves*, Springer-Verlag.