Perturbación de conjuntos de sampling en espacios generados por traslaciones

José Luis Romero

Tesis de licenciatura en Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

dirigida por la Dra. Úrsula Molter

Marzo de 2006

Índice general

Capítulo 1

Introducción

El problema del sampling es el de recontruir una cierta señal continua a partir de una muestra tomada sólo en algunos instantes. Por supuesto, es imposible inferir solamente de la muestra el valor completo de una señal arbitraria: se requiere de alguna suposición general que complemente los datos.

La suposición tradicional y ampliamente estudiada es una restricción sobre el posible espectro de la señal.

El resultado más clásico, atribuido a veces a Shannon o Whittaker y otras a Kotelnikov sostiene que una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier está soportada en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ puede recuperarse a partir de sus muestras en los enteros $\{f(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Más aún provee una fórmula de recontrucción explícita

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\frac{sin(\pi(x-k))}{\pi(x-k)}$$

Esta situación puede querer generalizarse principalmente en tres posibles sentidos. Una posible dirección es cambiar el tipo de suposición general que se hace sobre las señales a muestrear. Otra, es generalizar la distribución temporal de las muestras admitiendo configuraciones no regulares. La tercera es mejorar la fórmula de reconstrucción desde el punto de vista numérico.

La suposición de que la señal es de *banda limitada*, es decir que su transformada de Fourier está soportada en cierto intervalo, tiene amplia justificación al modelar algunos fenómenos como las señales sonoras. Sin embargo, para otros resulta inadecuada. Si bien a la hora de discretizar las señales y procesarlas mecánicamente el espectro se vuelte a fortiori finito, la fórmula de reconstrucción depende de alguna restricción sobre el espectro uniforme sobre toda la familia de señales. Así, si bien una señal en términos prácticos puede suponerse de banda limitada, la correcta estimación de su espectro y en cosecuencia la necesaria frecuencia de muestreo no pueden fijarse a priori (sin conocer del todo la señal).

Desde el punto de vista matemático, puede verse que toda función de banda limitada se extiende analíticamente al plano complejo; es decir, es entera. Más aún, un famoso teorema de Paley y Wiener [14, 15, 16], caracteriza las funciones cuya transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-a, a]$ como aquellas funciones enteras f que verifican $|f(z)| \leq Ce^{a|Im(z)|}$ para alguna constante $C > 0$. Esto permite, por lo menos en el caso de espectro convexo, aplicar los inmensos recursos del análisis complejo.

Modernamente, se trata de llevar el modelo del sampling a espacios generados por algunas traslaciones de un cierto generador con propiedades de decaimiento, pero bajo suposiciones de regularidad mucho menos restrictivas que la analiticidad. En el capítulo siguiente mostramos brevemente cómo este modelo trata de retener algunas de las propiedades del espacio de Paley-Wiener (el espacio de las funciones de L^2 cuya transformada de Fourier está soportada en cierto intervalo). Aquí, se reemplaza la condición de concentración en la frecuencia por una condición de estructura espacial. El ejemplo prototípico es el espacio de los splines lineales. Éste está generado por las traslaciones enteras de una función triangular.

Para ser estrictos, este modelo para el sampling no es una generalización del de banda limitada. Si bien el espacio de Paley-Wiener está generado por las traslaciones enteras de una función (el seno cardinal), ésta no tiene buen decaimiento. De todos modos, teniendo a disposición las herramientas del análisis complejo, no se necesitan las desarrolladas para espacios generados por traslaciones.

Respecto a la distribución de los puntos, las técnicas de análisis armónico se aplican naturalmente a subgrupos de $\mathbb{R}^d$. De hecho, el teorema clásico del sampling sólo transforma la información de una función f sobre un subgrupo discreto (reticulado) en información sobre la *periodización* de $\hat{f}$ sobre el reticulado dual. A esto se le agrega la suposición de que esta información determina completamente $\hat{f}$ requiriendo que esté soportada en un sistema de representantes del correspondiente cociente.

En el caso de señales de banda limitada, la caracterización de Paley-Wiener permite usar teoremas muy finos de interpolación de funciones enteras y técnicas de variable compleja en general. Para esta clase de funciones los conjuntos de instantes donde deben tomarse las muestras están casi completamente caracterizados por su *densidad de Beurling*. La densidad inferior de Beurling de un conjunto de puntos $X \subset \mathbb{R}$ se define como

$$D^{-}(X) := \underset{r\to\infty}{lim} \underset{x\in\mathbb{R}}{inf} \frac{\#(X \bigcap (x+[0,r]))}{r},$$

y la condición $D^{-}(X) > 1$ es suficiente para que las funciones de espectro en $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ puedan ser reconstruidas robustamente a partir de sus valores en X mientras que la condición $D^{-}(X) \geq 1$ es necesaria [3] [12].

En el escenario general de los espacios generados por traslaciones no hay un teorema equivalente. Para configuraciones regulares de puntos, las técnicas de análisis armónico todavía son aplicables; en el capítulo 5 damos unos ejemplos sencillos.

Para configuraciones irregulares el panorama es mucho más arduo. Para generadores particulares se buscan condiciones geométricas específicas que permitan el muestreo. Por ejemplo en el caso de los splines generados por las traslaciones enteras de la burbuja $\chi_{[0,1]} * \ldots * \chi_{[0,1]}$ (n veces) un conjunto de puntos $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto de sampling [1] (i.e. las señales se pueden reconstruir establemente por sus valores en él) si

$$0 < \underset{k\neq j}{inf} |x_k - x_j| \leq \underset{k\in\mathbb{Z}}{sup} |x_k - x_{k+1}| < 1.$$

La demostración de este resultado se basa en la estructura algebraica local de las señales (polinomios a trozos).

Sin embargo hay un enfoque medianamente general para obtener conjuntos de sampling irregulares: estudiar perturbaciones de conjuntos regulares. Esto permite cierto grado de irregularidad aunque está lejos de atacar globalmente el problema.

Las técnicas de perturbación son clásicas en el análisis de señales. En el caso de banda limitada, un resultado de Paley y Wiener [14, 15, 16] sobre perturbaciones de bases de exponenciales se traduce fácilmente en el siguiente hecho.

Teorema. *Existe $\rho > 0$ tal que si $X \equiv \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subseteq \mathbb{R}$ es tal que $sup_k |x_k - k| < \rho$, el conjunto de puntos X resulta un conjunto de sampling para el espacio de Paley-Wiener.*

Más adelante los resultados combinados de Kadek [11] y Levinson [13] mostraron que el valor óptimo de ρ es $\frac{1}{4}$.

El propósito de esta tesis es probar un resultado similar en el contexto de los espacios generados por traslaciones. En el capítulo 3 introducimos formalmente este modelo para el sampling haciendo hincapié en cómo intenta generalizar algunos fenómenos del caso de banda limitada e introducimos algunas herramientas básicas. En el capítulo 4 probamos que, en este escenario, todo conjunto de sampling admite perturbaciones pequeñas pero arbitrarias en la forma sin perder esta condición. Luego, estimamos este *radio de perturbación* en función de los parámetros del problema. Finalmente probamos un resultado de interés teórico sobre la existencia de configuraciones óptimas.

Nuestras técnicas son totalmente elementales y se basan solamente en las condiciones de decaimiento y estructura espacial de la clase de señales a muestrear.

En el capítulo 5 analizamos algunos ejemplos sencillos calculando explícitamente el radio de perturbación de algún conjunto de sampling y comparándolo con la estimación dada en el capítulo 4. Cada ejemplo requiere una técnica propia.

Este trabajo no trata explícitamente la tercer cuestión de la eficiencia numérica de las fórmulas de reconstrucción. Sin embargo, haciendo de necesidad virtud, lo elemental de nuestro enfoque permite tener un control explícito de las constantes involucradas en todas las estimaciones. Si se conocen explícitamente los parámetros de un conjunto de sampling (v. gr. las constantes de los operadores involucrados) un seguimiento detenido de los cálculos del capítulo 4 permite estimar los respectivos parámetros de los conjuntos perturbados. Este conocimiento es decisivo a la hora de la implementación numérica ya que los mejores algoritmos de reconstrucción iterativos dependen de esto no sólo para estimar la velocidad de convergencia sino simplemente para ejecutarse (cf. capítulo 3, apartado 3.5.1).

Capítulo 2

Preliminares y notación

En este capítulo definimos algunos objetos e introducimos la notación pertinente. No se tratarán en detalle los conceptos involucrados; sólo estableceremos algunas convenciones para lo que sigue.

Definición 2.0.1. *Sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos su* techo $\lceil x \rceil$ *y* piso $\lfloor x \rfloor$ *como,*

$$\lceil x \rceil := \text{ínf}\,\{y \in Z : y \geq x\}\,,$$
$$\lfloor x \rfloor := \sup\,\{y \in Z : y \leq x\}\,.$$

Observación 2.0.1. $\lceil x \rceil, \lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ *y* $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lceil x \rceil$

Definición 2.0.2. *Si A es un conjunto arbitrario, notamos con Id_A a la función identidad de A,*

$$Id_A : A \longrightarrow A,\;\; Id_A(a) = a.$$

Definición 2.0.3. *Sea $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$. Definimos la* distancia euclídea *entre A y B como*

$$d(A,B) := \text{ínf}\,\{\|a - b\|_2 : a \in A, b \in B\}\,.$$

Definición 2.0.4. *Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ es una función y $A \subseteq \mathbb{R}^d$, notemos con* $\sup_A |f|$ *al supremo de los valores absulutos de f sobre A.*

$$\sup_A |f| := \sup\,\{|f(x)| : x \in A\}\,.$$

Definición 2.0.5. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ definimos su transformada de Fourier como*

$$\hat{f}(w) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i w x} dx.$$

Un resultado conocido afirma que esta transformación preserva la norma de L^2.

Proposición 2.0.1 (Identidad de Plancherel)**.** *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \bigcap {}^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y*

$$||\hat{f}||_{L^2} = ||f||_{L^2}.$$

Esto permite extender por densidad la transformada de Fourier a un isomorfismo isométrico sobre $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Definición 2.0.6. *Si V es un espacio vectorial topológico, y $A \subseteq V$, definimos el* subespacio cerrado generado por A *como la intersección de todos los subespacios cerrados que contienen a A y lo notamos con span (A). Luego, span (A) es el menor subespacio cerrado que contiene a A.*

Definición 2.0.7. *Si $L : B \to F$ es un operador entre $\mathbb{C}$-espacios de normados, definimos su espectro $\sigma(L)$ como,*

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} : L - \lambda Id \textit{ no es inversible}\}.$$

Definición 2.0.8. *Si $(B : \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B$, decimos que la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_k, \tag{2.1}$$

converge incondicionalmente *si para toda función biyectiva $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que la serie*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} x_{\sigma(k)},$$

converge en B.

Cuando la serie (2.1) converge en B pero no incondicionalmente decimos que converge *condicionalmente.*

Capítulo 3

El problema del sampling

En este capítulo introducimos la alternativa estándar al modelo de Paley-Wiener para el problema del sampling. Las clases de señales a muestrear serán espacios generados por funciones concentradas en el tiempo en vez de serlo en la frecuencia. El caso prototípico son los espacios Spline. Lo hacemos en un contexto ligeramente más general para servir mejor a los propósitos del capítulo siguiente.

Introduciremos formalmente el problema del sampling en este contexto y el vocabulario estándar del análisis de señales.

No se darán demostraciones de ninguno de los hechos generales, refiriendo al lector a la bilbiografía citada. En la sección 3.6 se dan demostraciones de algunas estimaciones que, aunque elementates, son escenciales para las técnicas del capítulo siguiente. Por completitud, demostramos aquellas proposiciones donde necesitamos un escenario un poco más general que el se encuentra en la bibliografía.

3.1. Separación de conjuntos de puntos

Definición 3.1.1. *Sea* $X \equiv \{x_k\}_{x\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ *un conjunto de puntos indexado, donde el conjuntos de índices* Λ *es numerable. Definimos la* separación *de* X *como*

$$sep\,(X) := \underset{k\neq j}{inf}\,|x_k - x_j|_\infty\,,$$

y decimos que X es separado *si $sep(X) > 0$.*

Para cada $\alpha > 0$, definimos también la separación relativa de orden α *de X como*

$$rel_\alpha(X) := \sup_{b\in\mathbb{R}^d} \#\left\{k \in \Lambda : x_k \in [-\alpha, \alpha]^d + b]\right\},$$

y decimos que X es relativamente separado *si para algún $\alpha > 0$, $rel_\alpha(X) < \infty$.*

A continuación hacemos algunas observaciones pertinentes, cuya demostración se encuentra en la sección 3.6.

Observación 3.1.1.

(i) *Si $\alpha \leq \beta$*

$$rel_\alpha(X) \leq rel_\beta(X) \leq \lceil\frac{\beta}{\alpha}\rceil^d rel_\alpha(X).$$

Luego si X es relativamente separado, para todo $\alpha > 0$ la cantidad de elementos de X en cualquier cubo de lado 2α está acotada por una constante que depende de α.

(ii) *Si X es separado, entonces es relativamente separado y*

$$rel_\alpha(X) \leq \left(\lfloor\frac{2\alpha}{sep(X)}\rfloor + 1\right)^d.$$

(iii) *Si $X = \{x_k\}_{k\in\Lambda}$ es relativamente separado e $Y = \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ es una* perturbación uniforme *de X (i.e. $\delta := sup_{k\in\Lambda}|x_k - y_k|_2 < \infty$), entonces Y es también relativamente separado y*

$$rel_\alpha(Y) \leq rel_{\alpha+\delta}(X).$$

(iv) *La separación y la separación relativa son conceptos invariantes por traslaciones arbitrarias, i.e. para todo $z \in \mathbb{R}^d$*

$$sep(X) = sep(X+z) \text{ y } rel_\alpha(X) = rel_\alpha(X+z).$$

(v) X es relativamente separado si y sólo si es una unión finita de conjuntos separados. Más precisamente, $X \equiv \{x_k\}_{k\in\Lambda}$ es relativamente separado si y sólo si existen $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ tales que $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{n} \Lambda_j$ y para cada $1 \leq j \leq n$, $X_j := \{x_k\}_{k\in\Lambda_j}$ es separado.

3.2. Bases de Riesz y marcos

En esta sección definimos las nociones de bases de Riesz y marco y damos algunas de sus propiedades más elementales. Durante esta sección $\mathcal{H}$ denotará un $\mathbb{C}$-espacio de Hilbert separable. Notaremos con $\|\cdot\|$ a la norma inducida por el producto interno. Casi todos los resultados de esta sección pueden verse en [5] o [18].

3.2.1. Bases de Riesz

Definición 3.2.1. *Una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ se dice una* Base de Riesz *de $\mathcal{H}$ si existen $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal continuo e inversible y $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tales que $L(e_k) = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.*

Observación 3.2.1. *Como L es inversible, las bases de Riesz son acotadas por arriba y abajo (i.e. $0 < inf_k \|x_k\| \leq sup_k \|x_k\| < \infty$).*

Las bases de Riesz proveen expansiones únicas de una manera robusta ya que la norma en $\mathcal{H}$ de cada vector es equivalente a la norma l^2 de sus coeficientes. Las bases ortonormales son el caso límite en el que se da la igualdad de dichas normas.

Proposición 3.2.1. *Si $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de Riesz de $\mathcal{H}$ entonces para todo $v \in \mathcal{H}$ existen una única $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N})$ tales que*

$$v = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\, x_k.$$

Además la convergencia es incondicional (i.e. cualquier reordenamiento de los términos da otra suma convergente a v) y existen constantes $A, B > 0$ (independientes de v) tales que:

$$A\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2} \leq \|v\| \leq B\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{N}} |a_k|^2}.$$

Observación 3.2.2. *Como la convergencia de las expansiones en una base de Riesz* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es incondicional, podemos tomar cualquier indexación* $\{x_k\}_{k\in\Lambda}$ *por un conjunto numerable* Λ *sin ambigüedades. Desde ahora escribiremos* $\{x_k\}$ *sobreentendiendo alguna indexación numerable.*

Si L es el operador de la definición 3.2.1, cada elemento $v \in \mathcal{H}$ se desarrolla

$$v = \sum_k \langle v, y_k \rangle \, x_k.$$

donde $y_k = (L^*)^{-1}(e_k)$. $\{y_k\}$ se llama el sistema dual o *biortogonal* de $\{x_k\}$, ya que está caracterizado por la propiedad: $\langle x_k, y_j \rangle = \delta_{k,j}$. En el lenguaje del análisis de señales se dice que v se *analiza* a través de $\{y_k\}$ y se *sintetiza* mediante $\{x_k\}$.

Como $(L^*)^{-1}$ es un operador inversible, $\{y_k\}$ resulta también una base de Riezs (con sistema biortogonal $\{x_k\}$). Luego se tienen las dos expansiones

$$v = \sum_k \langle v, y_k \rangle \; x_k = \sum_k \langle v, x_k \rangle \; y_k.$$

Una vez más las bases ortonormales se caracterizan como el caso límite en el que $x_k = y_k$. En efecto, como $x_k = L(e_k)$ e $y_k = (L^*)^{-1}(e_k)$, $x_k = y_k$ sólo dice que $L = (L^*)^{-1}$. Esto ocurre sí y sólo sí L es una isometría y como $\{e_k\}$ es ortonormal sí y sólo sí $\{x_k\}$ lo es.

Hay varias caracterizaciones de las bases de Riesz. Una de las más produndas, las caracteriza como cierto tipo de bases de Schauder.

Definición 3.2.2. *Una sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *se dice una* base de Schauder *de* $\mathcal{H}$ *si para todo* $v \in \mathcal{H}$ *existe una única sucesión de escalares* $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ *tal que*

$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k \, x_k$$

Proposición 3.2.2. *Sea* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *una base de Schauder en* $\mathcal{H}$*. Entonces,* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una Base de Riesz sí y sólo sí es acotada (i.e.* $0 < inf_{\,k} \|x_k\| \leq sup_{\,k} \|x_k\| < \infty$*) e incondicional (i.e. las expansiones en esta base convergen incondicionalmente).*

Para nuestros fines sólo necesitaremos alguna sencilla caracterización que nos ahorre probar la existencia del operador involucrado.

Proposición 3.2.3. *Sea* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *una sucesión en* $\mathcal{H}$*. Entonces* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es una base de Riesz sí y sólo sí es* completa *(i.e.* $\overline{\langle\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}\rangle_{\mathbb{C}}} = \mathcal{H}$*) y existen constantes* $A, B > 0$ *tales que*

$$\forall c \equiv (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}),\ \ A\sum_{k\in\mathbb{N}}|c_k|^2 \leq \left\|\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k\, x_k\right\|^2 \leq B\sum_{k\in\mathbb{N}}|c_k|^2.$$

3.2.2. Marcos

Ahora introducimos el concepto de *marco* de un espacio de Hilbert. Los marcos son sistemas de generadores que proveen expansiones robustas pero no únicas. En las secciones siguientes abordaremos problemas que por su naturaleza conducen a representaciones múltiples de los elementos involucrados. Los marcos servirán para encontrar entre todos estos posibles desarrollos, los que son robustos, proveyendo convergencia incondicional y coeficientes en l^2.

Definición 3.2.3. *Una sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *se dice un* marco *de* $\mathcal{H}$ *si existen* $\mathcal{H}'$ *un espacio de Hilbert separable,* $\{e_k\}_{k\in N}$ *una base ortonormal de* $\mathcal{H}'$ *y un operador sobreyectivo* $L : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ *tal que* $L(e_k) = x_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Luego un marco se diferencia de una base de Riesz en que no se requiere que el opeador L sea inversible, sólo sobreyectivo.

Observación 3.2.3. *Como L es acotado, los elementos de un marco están uniformemente acotados por arriba. Pero a diferencia de las bases de Riesz pueden no estar acotados por abajo (porque no requerimos que L sea acotado por abajo). Por ejemplo, si* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es la base canónica de* $\ell^2(\mathbb{N})$, $\{\frac{1}{k}\, e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *resulta un marco de* ℓ^2*. Para ver esto basta considerar el operador diagonal* $L : \ell^2 \to \ell^2,\ L(e_k) = \frac{1}{k}\, e_k$.

Observación 3.2.4. *Como un reordenamiento de una base ortonormal, es una base ortonormal, se sigue que cualquier reordenamiento de un marco es todavía un marco.*

Observación 3.2.5.

- *Si* $dim(\mathcal{H}) < \infty$*, todo sistema finito de generadores es un marco. En efecto, dado un sistema de generadores* $x_1 \dots x_n \subseteq \mathcal{H}$*, consideramos*

$L : \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}$, $L(e_k) = x_k$, extendido linealmente. Observemos que $n \geq dim(\mathcal{H})$.

- *Si $dim(\mathcal{H}) = \infty$ y $\{x_k\}$ es un marco de $\mathcal{H}$, el espacio $\mathcal{H}'$ de la definición debe ser necesariamente de dimensión infinita. Como todos los Hilberts separables de dimensión infinita son isométricamente isomorfos, se puede conseguir un operador sobreyectivo $L : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ que aplique alguna base ortonormal en $\{x_k\}$.*

Supongamos que $\{x_k\}$ es un marco de $\mathcal{H}$ y sean $L : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}$ y $\{e_k\}$ como en la definición. Como L es sobreyectivo (y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert) L es una retracción. Esto quiere decir que existe un operador $K : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tal que $L\,K = Id_{\mathcal{H}}$. Por ejemplo, $L' := L|ker(L)^{\perp}$ resulta un operador inversile y podemos tomar $K = L'^{-1} : \mathcal{H} \to \ker(L)^{\perp} \hookrightarrow \mathcal{H}'$. Cada elección de un tal operador K provee una fórmula de expansión en $\{x_k\}$ de la siguiente manera. Para cada $v \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} K(v) &= \sum_k \langle K(v), e_k \rangle \; e_k, \\ v = LK(v) &= \sum_k \langle K(v), e_k \rangle \; L(e_k) = \sum_k \langle v, K^*(e_k) \rangle \; x_k. \end{aligned}$$

Al igual que hicimos con bases de Riesz, ahora damos una caracterización de la noción de marco que nos ahorrará probar la existencia del operador de la definición.

Proposición 3.2.4. *Una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ es un* marco *de $\mathcal{H}$ si y sólo si existen constantes $A, B > 0$ tales que se verifica la siguiente identidad* pseudo-Parseval*:*

$$\forall v \in \mathcal{H}, \; A \; \|v\|^2 \leq \sum_k |\, \langle v, x_k \rangle \,|^2 \leq B \; \|v\|^2 \qquad (3.1)$$

Nomenclatura 3.2.1. *Si $\{x_k\}$ verifica (3.1) decimos que es un marco con constantes A y B.*

- $U : \mathcal{H} \to l^2(\mathbb{N}), \; U(v) := (\langle v, x_k \rangle)_k$ *se llama* operador de análisis.

- $U^* : l^2(\mathbb{N}) \to \mathcal{H},\ U^*(c) = \sum_k c_k\, x_k$ *se llama* operador de síntesis.

Definición 3.2.4. *Si* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es un marco, definimos el* operador de marco *por:*

$$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H},\ T(v) = U^*\, U(v) = \sum_k \langle v, x_k\rangle\ x_k. \tag{3.2}$$

Observación 3.2.6. *El operador* T *así definido es autoadjunto y la ecuación (3.1) dice que* $A\, Id \leq T \leq B\, Id$ *(i.e.* $\sigma(T) \subseteq [A, B]$*)*

Esta observación nos permite dar una tercera caracterización de los marcos.

Corolario 3.2.1. *Una sucesión* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es un marco de* $\mathcal{H}$ *si y sólo si el operador* $T(v) = \sum_k \langle v, x_k\rangle\ x_k$ *está bien definido y es inversible (i.e. acotado con un inverso acotado).*

Definición 3.2.5. *Sea* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ *un marco. Definimos su* marco dual canónico $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *por*

$$y_k := T^{-1}(x_k)$$

donde T *es el operador de marco de* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Proposición 3.2.5. *Sea* $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *un marco de* $\mathcal{H}$ *con constantes* A *y* B*. Sea* $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *su marco dual canónico. Entonces* $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *es efectivamente un marco y tiene constantes* B^{-1} *y* A^{-1}.

Además para cada $v \in \mathcal{H}$ *se tienen las siguientes expansiones:*

$$v = \sum_k \langle v, y_k\rangle\ x_k = \sum_k \langle v, x_k\rangle\ y_k$$

con convergencia incondicional en la norma de $\mathcal{H}$.

Además, entre todas las posibles expansiones, ésta hace mínima la norma ℓ^2 *de los coeficientes.*

Observación 3.2.7. *Como* $T^{-1}(v) = \sum_k \langle T^{-1}(v), x_k\rangle\, y_k = \sum_k \langle v, y_k\rangle\, y_k$*, el operador de marco de* $\{y_k\}$ *es* T^{-1} *y luego su marco dual es* $\{x_k\}$.

Comentario 3.2.1. *Las expansiones en un marco pueden no ser únicas. Las de la Proposición 3.2.5 convergen incondicionalmente, pero otras expansiones pueden converger sólo condicionalmente.*

En general, la convergencia incondicional está garantizada cuando se utilizan coeficientes en l^2. Si queremos independizar el concepto de marco de la indexación, como hicimos con las bases de Riesz, debemos comprometernos a sólo usar expansiones con coeficientes en l^2.

Finalmente, podemos caracterizar a las bases de Riesz como los marcos sin redundancia.

Proposición 3.2.6. *Una sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{H}$ es un base de Riesz de $\mathcal{H}$ si y sólo si es un marco que deja de ser completo al quitarle cualquier elemento.*

3.2.3. Bases de Riesz y marcos en dimensión finita

En esta sección damos algunas caracterizaciones útiles en espacios de dimensión finita.

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$.

Definición 3.2.6. *La matriz gramiana de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la matriz $G \in \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por $G_{i,j} = \langle x_j, x_i\rangle$.*

Observemos que esta matriz es hermitiana y positiva. De hecho, si consideramos los operadores de análisis y síntesis asociados a $\{x_k\}$, $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$, $U(v) := (\langle v, x_1\rangle, \ldots, \langle v, x_n\rangle)$ y $U^* : \mathbb{C}^n \to \mathcal{H}$, $U^*(c_1, \ldots, c_n) = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$ resulta que G es la matriz en la base canónica del operador UU^*.

Mientras que el operador de marco U^*U caracteriza la propiedad de ser marco de $\mathcal{H}$, el operador gramiano no contiene información sobre la completitud del sistema $\{x_k\}$, sino sobre su estabilidad.

Proposición 3.2.7. *Sean $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$ y $V := span\,(x_1, \ldots, x_n)$. Entonces,*

(a) *$\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Riesz de V con constantes A, B si y sólo si $\sigma(G) \subseteq [A, B]$.*

En particular $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Riesz de V si y sólo si G es inversible.

(b) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es un marco de* V *con constantes* A, B *si y sólo si* $\sigma(G) \subseteq \{0\} \bigcup [A, B]$.

La demostración se encuentra en la sección 3.6.

3.3. Espacios de amalgama

En esta sección introducimos formalmente los llamados *espacios de amalgama* o espacios de Wiener y enumeramos algunas de sus propiedades básicas. La técnica de amalgamar espacios puede desarrollarse muy en general y es una herramienta provechosa para varias aplicaciones. Nos limitaremos a los casos más sencillos que son los relevantes para lo que sigue y les daremos un tratamiento bastante parcial (a la luz de la teoría general). Para un tratamiento general véase [9], para una introducción a los casos más sencillos véase [6].

Definición 3.3.1. *Para* $1 \leq p, q \leq \infty$ *y* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ *medible definimos,*

$$\|f\|_{W(L^p,L^q)(\mathbb{R}^d)} := \left\| \Big(\|f\|_{L^q\left([0,1]^d+j\right)} \Big)_{j\in\mathbb{Z}^d} \right\|_{l^p(\mathbb{Z}^d)},$$

y llamamos $W(L^p, L^q)(\mathbb{R}^d)$ *a la clase de funciones con norma finita (identificando las que difieren sólo en un conjuto de medida nula)*

$$W(L^p, L^q)(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \text{ medibles} : \|f\|_{W(L^p,L^q)} < \infty \Big\} / \equiv_{a.e.} \quad .$$

Munidos con las respectivas normas, cada uno de estos espacios resulta ser un espacio de Banach.

En $W(L^p, L^\infty)$ distinguimos el subespacio (cerrado) de funciones continuas $W(L^p, C_0)$,

$$W(L^p, C_0) := \{ f \in W(L^p, L^\infty) : \text{ f es continua} \}$$

Decimos que L^p es la *componente global* de $W(L^p, L^q)$ mientras que L^q es su *componente local.*

En los espacios de amalgamas se verifican las siguientes inclusiones:

Si $1 \leq p \leq t \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, $W(L^p, L^q) \subseteq W(L^t, L^q)$.
Si $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq s \leq \infty$, $W(L^p, L^s) \subseteq W(L^p, L^q)$.

En la teoría general, se construye una amalgama $W(E, B)$ a partir de una componente local B y una componente global E. La componente local es un espacio de Banach continuamente inmerso en las distribuciones temperadas (o más generalmente en la distribuciones extremales sobre un grupo localmente compacto que tiene una base de entornos de la identidad invariantes por los automorfismos interiores) y es invariante por traslaciones (en el sentido de la inmersión), además de algunas condiciones técnicas. La componente global es un espacio de Banach de funciones invariante por traslaciones, con algunos requerimientos técnicos como la solidez.

Para el análisis de señales puede usarse como componente local algún espacio de funciones suaves y como componente global algún espacio L^p. En nuestro caso, utilizaremos el espacio $W(L^1, C_0)$.

La amalgama $W(B, E)$ pretende ser un espacio de distribuciones que se comporta localmente como E y globalmente como B y se lo equipa con una *norma continua* que da cuenta de esto. Un resultado importante es que cada una de estas normas continuas es equivalente a una cierta *norma discreta*. En el caso $B = L^p, E = L^q$ la norma discreta es la recién definida mientras que la continua es

$$\|f\|_{W(L^p,L^q)} = \|x \mapsto \|f(\cdot)k(\cdot - x)\|_{L^q}\|_{L^p}$$

donde la ventana k es una función suave de soporte compacto.

Luego, en nuestra definición de las normas $W(L^p, L^q)$ tomamos un atajo respecto del caso general.

Esta equivalencia de normas permite probar que si se tiene un teorema de convolución entre componentes globales $B * B' \to B''$ y otro entre las componentes locales $E * E' \to E''$, se consigue un teorema de convolución entre las respectivas amalgamas

$$W(B, E) * W(B', E') \to W(B'', E''). \tag{3.3}$$

En nuestro caso los espacios involucrados serán espacios de funciones o sucesiones. El enfoque distribucional está oculto en la manera de particularizar la teoría general. Para eso hay que hacer convivir todos estos objetos en un mismo espacio, donde las convoluciones discretas, semidiscretas y continuas sean casos particulares de la misma operación. Esto se logra fácilmente considerando como componente local el espacio $\mathcal{R}$ de las medidas de Radon con signo (medidas Borel-regulares donde los compactos miden finito) y como componente global algún espacio L^p.

Una sucesión $c \equiv (c_k)_k \in l^p$ puede considerarse como una medida identificándola con el *peine de deltas* $\sum_k c_k \delta_{x_k}$. Si el conjunto de puntos $\{x_k\}_k$ es relativamente separado, este peine tiene comportamiento global L^p y luego define un elemento de la amalgama $W(L^p, \mathcal{R})$. Las funciones pueden verse como medidas con signo absolutamente continuas.

Aunque en el caso $B = L^p, E = L^q$ todo puede demostrarse por un cálculo directo, la teoría general ayuda a conjeturar qué tipo de desigualdades buscar. En el capítulo siguiente nuestro tratamiento será absolutamente elemental, aún en detrimento de la claridad. La razón principal para esto es que se llevará la relación 3.3 un poco más lejos de su enunciado formal para hacerla adecuada a un contexto irregular. En vez de enunciar una tal extensión en general, simplemente reproduciremos los cálculos que la justifican reemplazando las igualdades que dependen de la estructura de grupo por desigualdades.

3.4. Espacios generados por traslaciones

Dada una familia de funciones $\{f_j\}_{j\in I} \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ y subconjuntos de $\mathbb{R}^d$ relativamente separados, $\left\{\{x_k^j\}_{k\in\Lambda}\right\}_{j\in I}$ consideramos el espacio generado por las respectivas traslaciones

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\{f_j\}_{j\in I}) = span\left(\{f_j(\cdot - x_k^j)\}_{k\in\Lambda, j\in I}\right)$$

donde la clausura es en $L^p(\mathbb{R}^d)$ y los conjuntos de puntos están implícitos en la notación.

Cuando todos los conjuntos de puntos son un mismo reticulado, el espacio $\mathcal{S}$ adquiere la propiedad adicional de ser invariante por un grupo de traslaciones. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que el reticulado es $\mathbb{Z}^d$. El caso $p = 2$ puede tratarse mediante técnicas de *fibración* que se vuelven especialmente útiles cuando la familia de funciones es finita. Las consecuencias más importantes están resumidas en el siguiente teorema (véase [4], [17]).

Teorema 3.4.1. *Sea* $\{f_j\}_{j\in I} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ *una familia numerable. Entonces, la familia* $\{f_j(\cdot - k)\}_{j\in I, k\in\mathbb{Z}^d}$ *es una base de Riesz (resp. marco) con constantes* A *y* B *de* $\mathcal{S}$*, el subespacio cerrado que genera si y sólo si para casi todo* $x \in [0,1]^d$*, la familia* $\left\{(\hat{f}_j(x+k))_{k\in\mathbb{Z}^d}\right\}_{j\in I} \subseteq \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ *es una base de Riesz (resp. marco) con constantes* A *y* B *de* $\mathcal{S}_x$*, el subespacio cerrado que genera.*

Además,

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : (\hat{f}(x+k))_{k\in\mathbb{Z}^d} \in S_x \text{ para casi todo } x \in [0,1]^d \right\}.$$

Corolario 3.4.2. *Dada una familia finita* $\mathcal{F} \equiv \{f_j\}_{1\le j\le n} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$*, consideramos la* matriz gramiana *asociada* $G(x) \in \mathbb{C}^{n\times n}, x \in [0,1]^d$*, definida por*

$$G(x)_{i,j} := \left\langle (\hat{f}_j(x+k))_{k\in\mathbb{Z}^d}, (\hat{f}_i(x+k))_{k\in\mathbb{Z}^d} \right\rangle_{l^2(\mathbb{Z}^d)} =: [f_j, f_i](x)$$

Entonces (con la notación del teorema) las traslaciones enteras de $\mathcal{F}$ *son una base de Riesz de* $\mathcal{S}$ *con constantes* A *y* B *si y sólo si*

$$AId \le G(x) \le BId, \text{ para casi todo } x \in [0,1]^d,$$

y son un marco de $\mathcal{S}$ *si y sólo si*

$$AG(x) \le G^2(x) \le BG(x), \text{ para casi todo } x \in [0,1]^d.$$

Además,

$$dim(\mathcal{S}_x) = rango(G(x)), \text{ para casi todo } x \in [0,1]^d.$$

En el caso de traslaciones generales, no hay un criterio tan sencillo para determinar cuándo la familia $\{f_j(\cdot - x_k^j)\}_{k\in\Lambda, j\in I}$ resulta una base de Riesz de $\mathcal{S}$. Si este es el caso, cada $f \in S$ tiene una representación única,

$$f = \sum_{j\in I}\sum_{k\in\Lambda} c_k^j f_j(\cdot - x_k^j) \tag{3.4}$$

con $c \equiv (c_k^j)_{j\in I, k\in\Lambda} \in l^p(I\times\Lambda)$ y convergencia incondicional en L^p.

La importancia de esta representación es que es una versión irregular de una convolución semidiscreta. Las normas amalgama están diseñadas para el estudio de los módulos de convolución o más generalmente de las *ternas de Banach*, es decir las ternas de espacios tales que la convolución es una oparación bien definida y acotada de los dos primeros en el tercero.

Hay motivaciones intuitivas para asumir que la familia de funciones a muestrear está generada por traslaciones, pero además esta elección está motivada por el deseo de reproducir un fenómeno que ocurre en el caso de banda limitada.

El muestreo en espacios de banda limitada puede encararse por varios caminos, siendo el más fructífero el análisis complejo. Sin embargo, con la esperanza de llevar las técnicas a clases de funciones no necesariamente analíticas conviene ensayar otros caminos. Una observación elemental es que el proyector ortogonal de L^2 sobre el espacio de las funciones con espectro en cierto intervalo (el espacio de Paley-Wiener) es un operador de convolución (con núcleo alguna modulación del seno cardinal). Es decir, cada función f de la familia se describe como $f = f * k$ donde k es un núcleo suave (el seno cardinal). Más aún, antitransformando una función suave de soporte compacto que vale 1 sobre el intervalo de frecuencias, obtenemos un núcleo en la clase de Schwarz que actua por convolución sobre el espacio de Paley-Wiener como la identidad. Esto implica propiedades de regularidad y decaimiento uniforme sobre toda la familia.

En escenarios más generales que el espacio de Paley-Wiener puede no contarse con un operador de convolución que actue como la Identidad. El motivo para considerar espacios generados por traslaciones enteras es que las funciones a muestrear tengan, desde el esqueleto, apariencia de convolución contra cierto núcleo y luego extrapolar por técnicas elementales las propiedades de regularidad y decaimiento de los generadores hacia toda la clase $\mathcal{S}$.

A continuación enunciamos el hecho básico bien conocido que justifica el uso de los espacios generados por traslaciones como modelo para el sampling. Si se tiene una sucesión de Riesz en L^P generada por traslaciones enteras de finitas funciones de la amalgama $W(L^1, C_0)$, el subespacio cerrado que generan estas traslaciones también está contenido en $W(L^1, C_0)$. Más aún, sobre este espacio hay una equivalencia entre las normas L^p y $W(L^p, C_0)$. Lo enunciaremos en el contexto ligeramente más general de traslaciones irregulares. En este caso la expansión (3.4) es una convolución sólo en espíritu, pero las técnicas de la versión clásica se adaptan con los mismos argumentos que usaremos en el capítulo siguiente.

Sin embargo, la diferencia importante es que en el caso de traslaciones regulares hay un criterio para decidir cuándo los generadores son una base de Riesz, incluso para $p \neq 2$ [1].

Teorema 3.4.3. *Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in W(L^1, C_0)$ y $\{x_k^1\}_{k\in\Lambda}, \ldots, \{x_k^n\}_{k\in\Lambda}$ conjuntos de puntos relativamente separados.*

Supongamos que $\left\{\varphi_j(\cdot - x_k^j)\right\}_{k\in\Lambda, 1\leq j\leq n}$ es una base de Riesz de $\mathcal{S}$, el subespacio cerrado que genera en $L^p(\mathbb{R}^d)$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces existe una constante C tal que para toda $f \in S$,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{W(L^p, C_0)} \leq C \|f\|_{L^p}$$

En particular, $S \subseteq W(L^p, C_0)$ y cada función de S es continua.

La demostración se encuentra en la sección 3.6 pero se apreciará mejor después de haber leido el capítulo 4. Para la versión regular véase [1].

3.5. El problema del sampling

En esta sección presentamos el problema del sampling y damos las definiciones y propiedades pertinentes. Por sencillez, lo hacemos en el contexto de un espacio principal (es decir, con un solo generador). Todo puede generalizarse al caso de finitos generadores.

Sea $X \equiv \{x_k\}_{k\in\Lambda}$ un conjunto de puntos relativamente separado y $\varphi \in W(L^1, C_0)$. Supongamos que φ genera por traslaciones en X una base de Riesz de $\mathcal{S}$. Según el Teorema 3.4.3 la norma L^p es equivalente sobre S a la norma $W(L^1, L^p)$ y luego las evaluaciones $f \mapsto f(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$ están bien definidas. Mas aún,

Lema 3.5.1. *Sea $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de puntos relativamente separado. El operador*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to l^p(\Lambda) \\ f &\mapsto (f(y_k))_{k\in\Lambda} \end{aligned}$$

efectivamente toma valores en $l^p(\Lambda)$ y es acotado.

Definición 3.5.1. *Un conjunto* $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ *se dice de sampling si existen* $A, B > 0$ *tales que para toda* $f \in \mathcal{S}$*,*

$$A\,\|f\|_{L^p} \leq \|(f(y_k))_{k\in\Lambda}\|_{\ell^p} \leq B\,\|f\|_{L^p} \tag{3.5}$$

Observación 3.5.1. *Luego,* Y *es un conjunto de sampling si y sólo si el operador del lema 3.5.1 es también acotado por abajo.*

En el caso $p = 2$, como cada evaluación $f \mapsto f(x)$ es un funcional continuo sobre $\mathcal{S}$, debe estar representado en el sentido del teorema de Riesz por algún (único) vector $K_x \in \mathcal{S}$, llamado *núcleo reproductor en x*. De la ecuación (3.5) observamos que $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ es un conjunto de sampling si y solo si, la familia de núcleos reproductores $\{K_{y_k}\}_{k\in\Lambda}$ es un marco de S.

Como la expansión en la base $\{\varphi(\cdot - x_k)\}_{k\in\Lambda}$ da un isomorfismo entre $\mathcal{S}$ y el espacio de sucesiones l^p, podemos considerar en vez del operador de Lema 3.5.1 su composición con el operador de síntesis de la base. Este resulta acotado por abajo si y sólo si Y es un conjunto de sampling.

Definición 3.5.2. *Sea* $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ *un conjunto de puntos relativamente separado. Definimos su* operador de sampling $S : l^p(\Lambda) \to l^p(\Lambda)$ *así:*

$$S(c)_j := \sum_{k\in\Lambda} c_k \varphi(y_j - x_k) \tag{3.6}$$

Cuando deseemos destacar la dependencia en Y *escribiremos* $S = \Upsilon(Y)$*.*

En resumen, tenemos la siguiente proposición

Proposición 3.5.1. *Son equivalentes:*

- $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ *es un conjunto de sampling.*
- *El operador de sampling de* Y*,* $\Upsilon(Y)$ *es acotado por abajo.*
- *(si p=2) El conjunto de núcleos reproductores* $\{K_{y_k}\}_{k\in\Lambda}$ *es un marco de* S*.*

3.5.1. La importancia numérica de conocer las cotas

Dado un conjunto de sampling $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$, el operador $f \mapsto (f(y_k))_{k\in\Lambda}$ es acotado por abajo y luego cuando es correstringido a su rango tiene un inverso continuo. Entonces es posible, en teoría, recomponer f continuamente a partir de sus muestras. Existen varios algoritmos para hacer esto efectivamente [10].

Uno de ellos consiste en interpolar cualquier función a partir de las muestras y luego proyectar el resultado sobre $\mathcal{S}$. El resultado de esta operación f_1 es computable y también lo son las muestras del error $f - f_1$ en el conjunto Y. El algoritmo consiste en iterar este proceso calculando la proyección sobre $\mathcal{S}$ de una cierta función que interpola al error del paso anterior. Una vez calculadas suficientes aproximaciones, solo hay que sumarlas.

La convergencia de este algoritmo depende del método de interpolación usado. Construir el interporlante adecuado involucra el conocimiento explícito de las cotas del operador de sampling de Y. En la práctica, muchas veces se introduce un *parámetro de relajación* en el método de interpolación y se determina su valor empíricamente.

Cuando convergen, estos algoritmos lo hacen a ritmo geométrico y más velozmente cuanto más grande sea la cota inferior del operador de sampling. Luego, desde el punto de vista numérico, los conjuntos de sampling se aprecian por el tamaño de su cota inferior.

Cuando $p = 2$ existe también una técnica general usando sólo la teoría de marcos (en realidad en el caso en que X es un reticulado puede usarse para $p \neq 2$ [1]). Si Y es un conjunto de sampling, el conjunto de núcleos reproductores $\{K_{y_k}\}_{k\in\Lambda}$ es un marco de S. Si calculamos el marco dual $\left\{\widetilde{K}_{y_k}\right\}_{k\in\Lambda}$, tenemos una fórmula de reconstrucción

$$f = \sum_{k\in\Lambda} f(y_k)\widetilde{K}_{y_k}$$

Si T es el operador de marco, sabemos que $\widetilde{K}_{y_k} = T^{-1}(K_{y_k})$. La manera general de invertir T es mediante *seires de Neumann*. Esto simplemente consiste en desarrollar en series la función x^{-1} alrededor de 1 y aplicársela al operador T. Esta serie tiene radio de convergencia 1 y luego no siempre es posible aplicársela directamente a T. Hace falta considerar alguna homotecia conveniente que acerque T a la Identidad. Si A y B son las cotas de marco, inferior y superior respectivamente, la homotecia $\frac{2}{A+B}T$ está suficientemente cerca de la Identidad y de hecho es la que provee la velocidad de convergencia óptima entre todas las posibles homotecias.

Por esto, el conocimiento de las cotas es crucial para ejecutar el algoritmo, no sólo para estimar su desempeño.

3.6. Algunas demostraciones

3.6.1. De la Observación 3.1.1

Observación.

(i) *Si* $\alpha \leq \beta$

$$rel_\alpha\,(X) \leq rel_\beta\,(X) \leq \lceil \frac{\beta}{\alpha} \rceil^d rel_\alpha\,(X)$$

Luego si X *es relativamente separado, para todo* $\alpha > 0$ *la cantidad de elementos de* X *es cualquier cubo de lado* 2α *está acotada por una constante que depende de* α*.*

(ii) *Si* X *es separado, entonces es relativamente separado y*

$$rel_\alpha\,(X) \leq \left(\lfloor \frac{2\alpha}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d$$

(iii) *Si* $X = \{x_k\}_{k\in\Lambda}$ *es relativamente separado e* $Y = \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ *es una* perturbación uniforme *de* X *(i.e.* $\delta := sup_{k\in\Lambda} |x_k - y_k|_2 < \infty$*), entonces* Y *es también relativamente separado y*

$$rel_\alpha\,(Y) \leq rel_{\alpha+\delta}\,(X).$$

(iv) La separación y la separación relativa son conceptos invariantes por traslaciones arbitrarias, i.e. para todo $z \in \mathbb{R}^d$

$$sep\,(X) = sep\,(X+z) \;\; y \;\; rel_\alpha\,(X) = rel_\alpha\,(X+z)$$

(v) X *es relativamente separado si y sólo si es una unión finita de conjuntos separados. Más precisamente,* $X \equiv \{x_k\}_{k\in\Lambda}$ *es relativamente separado si y sólo si existen* $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ *tales que* $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{n} \Lambda_j$ *y para cada* $1 \leq j \leq n$, $X_j := \{x_k\}_{k\in\Lambda_j}$ *es separado.*

Demostración.
(i) La primera desigualdad surge de considerar cada cubo de lado 2α dentro de algún cubo de lado 2β. Para la segunda, sea $N := \lceil \frac{\beta}{\alpha} \rceil$. Si Q es un cubo de lado 2β arbitrario, dividimos cada uno de sus lados en N partes iguales, obteniendo una subdivisión de Q es N^d cubos más pequeños cada uno de estos de lado $\frac{2\beta}{N} \leq 2\alpha$. En cada uno de ellos hay entonces a lo sumo $rel_\alpha\,(X)$ elementos de X (o más precisamente para a lo sumo $rel_\alpha\,(X)$ índices, el respectivo elemento pertenece al sub cubo en cuestión). Luego,

$$\#\,\{k \in \Lambda : x_k \in Q\} \leq N^d rel_\alpha\,(X) = \lceil \frac{\beta}{\alpha} \rceil^d rel_\alpha\,(X),$$

y la desigualdad se sigue tomando supremos sobre todos los posibles Q.

(ii) Sean $N := \lfloor \frac{2\alpha}{sep(X)} \rfloor + 1$ y Q un cubo arbitrario de lado 2α. Si como recién, subdividimos cada lado de Q en N partes iguales, habremos descompuesto Q en N^d subcubos de lado $\frac{2\alpha}{N} < sep\,(X)$. Para cada uno de estos subcubos, no hay más que un índice k tal que x_k pertenece a ese subcubo. Luego,

$$\#\,\{k \in \Lambda : x_k \in Q\} \leq N^d = \left(\lfloor \frac{2\alpha}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d,$$

y la desigualdad se sigue también esta vez tomando supremos sobre todos los posibles Q.

(iii) Dados $\alpha > 0$ y Q un cubo de lado 2α, llamemos Q^δ al cubo que resulta de alargar simétricamente en 2δ cada lado de Q. Cada vez que $y_k \in Q$, se tiene que $x_k \in Q^\delta$. Luego

$$\#\,\{k \in \Lambda : y_k \in Q\} \leq \#\,\left\{k \in \Lambda : x_k \in Q^\delta\right\} \leq rel_{\alpha+\delta}\,(X)$$

Por lo tanto, $rel_{\alpha}(Y) \leq rel_{\alpha+\delta}(X) < \infty$.

(iv) La traslación en z de un cubo es otro cubo cuyo lado mide lo mismo.

(v) Sea $I := [0,1]^d$. Si partimos en dos el intervalo unitario $[0,1] = [0,\frac{1}{2}]\bigcup[\frac{1}{2},1]$, habremos partido I en 2^d subcubos

$$I = \bigcup_{J\in\{0,1\}^d} I_j, \text{ con } I_J := \prod_{h=1}^{d}[\frac{j_h}{2}, \frac{j_h+1}{2}].$$

Supongamos que X es relativamente separado y descompongamoslo en finitos subconjuntos separados. Sea $M := rel_{\frac{1}{4}}(X)$.

Sea $J \in \{0,1\}^d$. Consideremos las subfamilias de índices,

$$\{k : x_k \in I_J + l\}, \ (l \in \mathbb{Z}^d).$$

Para cada valor de l la respectiva subfamilia contiene a lo sumo M índices. Además si k es un índice de una subfamilia y j es uno de otra distinta, $|x_k - x_j|_{\infty} \geq \frac{1}{2}$.

Construimos Λ_1^J un conjunto formado por un índice de cada una de estas subfamilias que resulte no vacía. En general construimos recursivamente Λ_h^J, $2 \leq h \leq M$ tomando un índice de cada una de las siguientes subfamilias que resulte no vacía,

$$\{k : x_k \in I_J + l\} \setminus \bigcup_{t=1}^{h-1} \Lambda_t^J, \ (l \in \mathbb{Z}^d).$$

Como

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} I + l = \bigcup_{l\in\mathbb{Z}^d} \bigcup_{J\in\{0,1\}^d} I^J + l,$$

Dado $x_k \in \Lambda$, existen $l \in \mathbb{Z}^d$ y $J \in \{0,1\}^d$ tales que $x_k \in I^J + l$. Como la familia $\{k' : x_{k'} \in I_J + l\}$ no contiene más que M elementos, en el proceso de selección de arriba, el ínidice k fue elegido en algún paso y luego, existe h, $1 \leq h \leq M$ tal que $x_k \in \Lambda_h^J$.

Luego, resulta que

$$\Lambda = \bigcup_{J\in\{0,1\}^d} \bigcup_{h=1}^{M} \Lambda_h^J.$$

Además para cada $J \in \{0,1\}^d$ y $1 \leq h \leq M$ cada índice de Λ_h^J proviene de un miembro distinto de la siguiente colección de familias de índices,

$$\{k : x_k \in I_J + l\}, \ (l \in \mathbb{Z}^d),$$

y el respectivo conjunto

$$X_h^J \equiv \{x_k\}_{(J,h)\in\{0,1\}^d \times \{1,\ldots,h\}},$$

es relativamente separado (y la separación es por lo menos $\frac{1}{2}$).

Veamos la otra implicación. Supongamos que existen $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n$ tales que $\Lambda = \bigcup_{j=1}^n \Lambda_j$ y para cada $1 \leq j \leq n$, $X_j := \{x_k\}_{k\in\Lambda_j}$ es separado. Veamos que X es relativamente separado.

Cada X_j es separado y luego, por (ii) es relativamente separado. Sea $M := n \max_{1\leq j\leq n} rel_{\frac{1}{2}}(X_j)$. Sea Q un cubo de lado 1 arbitrario. Para cada j, $1 \leq j \leq n$, existen a lo sumo $rel_{\frac{1}{2}}(X_j)$ índices de Λ_j tales que el respectivo elemento de X_j pertenece a Q. Luego, existen a lo sumo M índices de Λ tales que el respectivo elemento de X pertenece a Q. Por lo tanto, $rel_{\frac{1}{2}}(X) \leq M < \infty$ y X es separado. □

3.6.2. De la Proposición 3.2.7

Proposición. *Sean* $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \mathcal{H}$ *y* $V := span\,(x_1, \ldots, x_n)$. *Entonces,*

(a) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es una base de Riesz de* V *con constantes* A, B *si y sólo si* $\sigma(G) \subseteq [A, B]$.

En particular $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es una base de Riesz de* V *si y sólo si* G *es inversible.*

(b) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *es un marco de* V *con constantes* A, B *si y sólo si* $\sigma(G) \subseteq \{0\} \bigcup [A, B]$.

Demostración. (a) $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base de Riesz de V con constantes

A, B si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{array}{rcl} A\|\lambda\|^2 \leq & \|U^*(\lambda)\|^2 & \leq B\|\lambda\|^2 \\ \langle AId(\lambda), \lambda\rangle \leq & \langle U^*(\lambda), U^*(\lambda)\rangle & \leq \langle BId(\lambda), \lambda\rangle \\ \langle AId(\lambda), \lambda\rangle \leq & \langle G(\lambda), \lambda\rangle & \leq \langle BId(\lambda), \lambda\rangle \end{array}$$

y como G es autoadjunto, esto último ocurre sí y sólo si $\sigma(G) \subseteq [A, B]$.

(b) Observemos que $rango(U^*) = V$, de modo que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es un marco de V con constantes A, B si y sólo si para todo $\lambda \in \mathbb{C}^n$

$$\begin{array}{rcl} A\|U^*(\lambda)\|^2 \leq & \|U(U^*(\lambda))\|^2 & \leq B\|U^*(\lambda)\|^2 \\ A\langle U^*(\lambda), U^*(\lambda)\rangle \leq & \langle U(U^*(\lambda)), U(U^*(\lambda))\rangle & \leq B\langle U^*(\lambda), U^*(\lambda)\rangle \\ A\langle G(\lambda), \lambda\rangle \leq & \langle G^2(\lambda), \lambda\rangle & \leq B\langle G(\lambda), \lambda\rangle \end{array}$$

Veamos que esto último ocurre si y sólo si $\sigma(G) \subseteq \{0\} \bigcup [A, B]$.

Si $G \leq G^2 \leq G$ y $\lambda \in \sigma(G)$, existe $x \in \mathbb{C}^n$ de norma 1 tal que $G(x) = \lambda x$. Como $\langle G(x), x\rangle = \lambda$ y $\langle G^2(x), x\rangle = \lambda^2$ tenemos que $A\lambda \leq \lambda^2 \leq B\lambda$ y luego, $\lambda \in \{0\} \bigcup [A, B]$.

Si $\sigma(G) \subseteq \{0\} \bigcup [A, B]$, sea $x \in \mathbb{C}^n$ arbitrario, veamos que $A\langle G(x), x\rangle \leq \langle G^2(x), x\rangle \leq B\langle G(x), x\rangle$. Como G es hermitiana y positva existe $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$ y $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \subseteq \{0\} \bigcup [A, B]$ tales que $G(e_k) = \lambda_k e_k$. Si expandimos x en esta base tenemos,

$$\begin{array}{rcl} x & = & \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, \\ G(x) & = & \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \lambda_k e_k, \\ G^2(x) & = & \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \lambda_k^2 e_k. \end{array}$$

Como cada $\lambda_k \in \{0\} \bigcup [A, B]$, $A\lambda_k \leq \lambda_k^2 \leq B\lambda_k$ y luego,

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 A\lambda_k \leq & \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 \lambda_k^2 & \leq \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k\rangle|^2 B\lambda_k \\ \langle AG(x), x\rangle \leq & \langle G^2(x), x\rangle & \leq \langle BG(x), x\rangle \end{array}$$

$\square$

3.6.3. Del Teorema 3.4.3

Teorema. *Sean* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in W(L^1, C_0)$ *y* $\{x_k^1\}_{k\in\Lambda}, \ldots, \{x_k^n\}_{k\in\Lambda}$ *conjuntos de puntos relativamente separados.*

Supongamos que $\left\{\varphi_j(\cdot - x_k^j)\right\}_{k\in\Lambda, 1\leq j\leq n}$ *es una base de Riesz de* $\mathcal{S}$*, el subespacio cerrado que genera en* $L^p(\mathbb{R}^d)$*, con* $1 \leq p < \infty$*. Entonces existe una constante* C *tal que para toda* $f \in S$*,*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{W(L^p,C_0)} \leq C\,\|f\|_{L^p}$$

En particular, $S \subseteq W(L^p, C_0)$ *y cada función de* S *es continua.*

Para probar el teorema, requeriremos el siguiente lema.

Lema 3.6.1. *Si* $f \in W(L^1, C_0)(\mathbb{R}^d)$ *e* $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ *es un conjunto de puntos relativamente separado, entonces*

$$\sum_{k\in\Lambda} \sup_{I+y_k} |f| \leq 2^d rel_{\frac{1}{2}}(Y)\,\|f\|_{W(L^1,C_0)}$$

donde $I := [0,1]^d$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda} \sup_{I+y_k} |f| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k:\, y_k\in I+j} \sup_{I+y_k} |f| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} rel_{\frac{1}{2}}(Y) \sup_{I+I+j} |f| \\
&\leq rel_{\frac{1}{2}}(Y) \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{h\in(I\bigcap\mathbb{Z})^d} \sup_{I+h+j} |f| \\
&\leq rel_{\frac{1}{2}}(Y) \sum_{h\in(I\bigcap\mathbb{Z})^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I+h+j} |f| \\
&= rel_{\frac{1}{2}}(Y) 2^d \,\|f\|_{W(L^1,C_0)}.
\end{aligned}$$

□

Ahora probemos el Teorema 3.4.3

Demostración. Dada $f \in S$, la expandimos con convergencia incondicional en L^p

$$f = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda} c_k^h \varphi^h(\cdot - x_k) \tag{3.7}$$

con $c \equiv (c_k^h)_{(k,h) \in \Lambda \times \{1,\ldots,n\}} \in l^p$.

Para cada $j \in \mathbb{Z}^d$ y $x \in I + j$, Observemos que para cada $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito,

$$\left| \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda_0} c_k^h \varphi^h(x - x_k) \right| \leq \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda_0} \left| c_k^h \right| \sup_{I+j-x_k} \left| \varphi^h \right| \leq \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda} \left| c_k^h \right| \sup_{I+j-x_k} \left| \varphi^h \right|$$

La serie (3.7) converge en $L^p(I+j)$ y luego tiene una subsucesión que converge en casi todo punto. Luego, también vale la estimación,

$$\left| \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda} c_k^h \varphi^h(x - x_k) \right| \leq \sum_{h=1}^{n} \sum_{k \in \Lambda} \left| c_j^h \right| \sup_{I+j-x_k} \left| \varphi^h \right|$$

para casi todo $x \in I + j$.

Llamemos $M := max_{1 \leq h \leq n} \left\| \varphi^h \right\|_{W(L^1, C_0)}$.

Para $j \in \mathbb{Z}^d$ y $1 \leq h \leq n$, usando el lema anterior con $Y^j := \{j - x_k\}_{k \in \Lambda}$

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \Lambda} \sup_{I+j-x_k} \left| \varphi^h \right| &\leq 2^d rel_{\frac{1}{2}} (Y_j) \left\| \varphi^h \right\|_{W(L^1, C_0)} \\ &= 2^d rel_{\frac{1}{2}} (X) \left\| \varphi^h \right\|_{W(L^1, C_0)} \\ &\leq 2^d M rel_{\frac{1}{2}} (X). \end{aligned}$$

y para para $k \in \Lambda$ y $1 \leq h \leq n$, usando el lema con $Y'_k : \{j - x_k\}_{j \in \mathbb{Z}^d}$,

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \Lambda} \sup_{I+l-x_k} \left| \varphi^h \right| &\leq 2^d rel_{\frac{1}{2}} (Y'_k) \left\| \varphi^h \right\|_{W(L^1, C_0)} \\ &= 2^d \left\| \varphi^h \right\|_{W(L^1, C_0)} \\ &\leq 2^d M. \end{aligned}$$

Con esto, distinguiendo el caso $p = 1$ y usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{W(L^p,L^\infty)} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \underset{I+j}{supess} \, |f(\cdot)|^p \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{h=1}^{n} \sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right| \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \right)^p \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} n^{\frac{p}{p'}} \sum_{h=1}^{n} \left(\sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right| \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \right)^p \\
&= n^{\frac{p}{p'}} \sum_{h=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right| \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right|^{\frac{1}{p}} \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right|^{\frac{1}{p'}} \right)^p \\
&\leq n^{\frac{p}{p'}} \sum_{h=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \left(\sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right|^p \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \right) \left(\sum_{k\in\Lambda} \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&\leq n^{\frac{p}{p'}} \left(2^d M rel_{\frac{1}{2}}(X) \right)^{\frac{p}{p'}} \sum_{h=1}^{n} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right|^p \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \\
&= n^{\frac{p}{p'}} \left(2^d M rel_{\frac{1}{2}}(X) \right)^{\frac{p}{p'}} \sum_{h=1}^{n} \sum_{k\in\Lambda} \left|c_k^h\right|^p \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I+j-x_k} \left|\varphi^h\right| \\
&\leq n^{\frac{p}{p'}} \left(2^d M rel_{\frac{1}{2}}(X) \right)^{\frac{p}{p'}} 2^d M \|c\|_p^p .
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{W(L^p,L^\infty)} \leq 2^{\frac{d}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} rel_{\frac{1}{2}}(X)^{\frac{1}{p'}} M \|c\|_p \leq Cte \|f\|_{L^p} ,$$

Donde la última desigualdad de sigue de la equivalencia entre la norma L^p de una función de S y sus coeficientes. Luego, $f \in W(L^p, L^\infty)$ y se tiene la equivalencia sobre S de las normas $W(L^p, L^\infty)$ y L^p. Resta ver que f es continua.

Considerando la equivalencia de normas recién probada, la expansión (3.7) converge en $W(L^p, L^\infty)$ y luego en L^∞_{loc}. Como φ es continua, también lo es f. $\square$

3.6.4. Del Lema 3.5.1

Lema. *Sea* $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ *un conjunto de puntos relativamente separado. El operador*

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\to l^p(\Lambda) \\ f &\mapsto (f(y_k))_{k\in\Lambda} \end{aligned}$$

efectivamente toma valores en $l^p(\Lambda)$ *y es acotado.*

Demostración. Si $I := [0,1]^d$,

$$\begin{aligned} \|(f(y_k)_{k\in\Lambda}\|_p^p &= \sum_{k\in\Lambda} |f(y_k)|^p \le \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{y_k\in I+j} |f(y_k)|^p \\ &\le \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} rel_{\frac{1}{2}}(Y) \left(\sup_{I+j} |f| \right)^p = rel_{\frac{1}{2}}(Y) \, \|f\|^p_{W(L^p,C_0)} . \end{aligned}$$

Luego, por el Teorema 3.4.3

$$\|(f(y_k)_{k\in\Lambda}\|_p \le rel_{\frac{1}{2}}(Y)^{\frac{1}{p}} \, \|f\|_{W(L^p,C_0)} \le Cte \, \|f\|_{L^p} .$$

$\square$

Capítulo 4

Perturbación de conjuntos de sampling

4.1. Introducción e hipótesis generales

El objetivo de este capítulo es estudiar la posibilidad de perturbar arbitrariamente un conjunto de sampling.

Hipótesis general

A lo largo de este capítulo supondremos que

- $\varphi \in W(L^1, C_0)(\mathbb{R}^d)$ y $1 \leq p < \infty$.

- $X \equiv \{x_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto de puntos relativamente separado, donde el conjunto de índices Λ es numerable.

- El conjunto $\{\varphi(\cdot - x_k)\}_{k\in\Lambda}$ es una base de Riesz del subespacio cerrado que genera, $S := S(\varphi)$.

Según los capítulos anteriores, cuando el conjunto de puntos X es un reticulado, esta última condición puede reformularse sencillamente en términos de la periodización de su transformada de Fourier (cf. teorema 3.4.1 y corolario 3.4.2).

Consideraremos conjuntos de sampling $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ y nos preguntamos si es posible perturbarlos levemente sin perder esta propiedad.

Definición 4.1.1. *Si $Y = \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ es un conjunto de sampling para S (relativamente separado), definimos su* radio de perturbación $\rho(X)$ *como el supremo de los $L \geq 0$, tales que todo conjunto de puntos $\{z_k\}_{k\in\Lambda}$ con $sup_{k\in\Lambda} |z_k - y_k|_2 \leq L$ es un conjunto de sampling para S.*

Observemos que el conjunto sobre el que se toma el supremo es un intervalo que contiene al 0 (quizás es sólo 0). Si $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda}$ es tal que $sup_{k\in\Lambda} |z_k - y_k|_2 < \rho(Y)$ entre ambas cantidades existe un elemento L de dicho conjunto y luego Z es también un conjunto de sampling para S.

En la sección 4.2 probamos que el radio de perturbabilidad recién definido es siempre positivo y luego, cualquier conjunto de sampling puede ser levemente perturbado, en sentido uniforme sin perder esta propiedad.

En la sección 4.3 estudiamos cómo depende ρ de los parámetros del problema, obteniendo estimaciones, bajo condiciones más restrictivas sobre el generador y los conjuntos involucrados.

En la sección 4.4 probamos que, dado un conjunto de sampling, entre todas sus posibles perturbaciones hay alguna que es óptima en el sentido de la cota inferior de su operador de sampling. Más allá del interés que pueda tener en sí mismo este resultado, esperamos extraer algunas otras consecuencias de la técnica involucrada en la demostración.

4.2. Resultados generales

En esta sección probamos que el radio de perturbación de un conjunto de sampling es siempre positivo asumiendo sólo continuidad y decaimiento del generador. La técnica central será imitar la desigualdad de convolución de Young reemplazando las igualdades que dependen de la estructura de grupo por estimaciones que aprovechen el decaimiento de los generadores. Para eso probaremos que el generador posee una cierta propiedad de continuidad uniforme que permitirá estimar su variación en términos de la separación y cercanía de los conjuntos involucrados. La importancia de esto, es que estas estimaciones son invariantes por traslaciones arbitrarias.

Teorema 4.2.1. *Supongamos que* $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ *es un conjunto de sampling para* S *(relativamente separado). Entonces,* $\rho(Y) > 0$.

Luego, si $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda}$ *es tal que* $sup_{k\in\Lambda} |z_k - y_k|_2 < \rho(Y)$, Z *resulta un conjunto de sampling para* S.

Para demostrar esto, estudiaremos la aplicación que envía un conjunto de puntos a su operador de sampling.

Definición 4.2.1. *Sea* Δ *el conjunto de todos los conjuntos indexados por* Λ *que son relativamente separados (en* $\mathbb{R}^d$*).*

$$\Delta := \left\{Z \equiv (z_k)_{k\in\Lambda} : \{z_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d \textit{ un conjunto relativamente separado}\right\}$$

Definimos además para $M > 0$

$$\Delta_M := \left\{Z \in \Delta : rel_{\frac{1}{2}}(Z) \leq M\right\}$$

Es decir Δ_M *es el conjunto de los* $Z \in \Delta$ *tales que todo cubo de medida 1 contiene a lo sumo* M *de sus elementos (o para ser precisos para cualquier cubo de medida 1 hay a lo sumo* M *índices tales que el respectivo elemento de* Z *pertenece a dicho cubo).*

Observemos que $\Delta = \bigcup_{M>0} \Delta_M$.

Consideramos en Δ la distancia uniforme

$$d_\infty(Z, Z') := \sup_{k\in\Lambda} |z_k - z'_k|_2 \text{ con } Z, Z' \in \Delta$$

En rigor, d_∞ no es una distancia para Δ ya que puede valer ∞. Para esquivar este problema consideramos

$$d^*_\infty(Z, Z') := \sup_{k\in\Lambda} min\left\{|z_k - z'_k|_2, 1\right\} \text{ con } Z, Z' \in \Delta$$

Esta es una distancia para Δ y cuando $0 < \delta < 1$, $d_\infty(Z, Z') \leq \delta$ si y sólo si $d^*_\infty(Z, Z') \leq \delta$. Luego, para las consideraciones locales podemos trabajar con d_∞.

Como cada $Z \in \Delta$ es relativamente separado, sabemos que su operador de sampling $\Upsilon(Z)$ está bien definido y es acotado. Esto nos permite considerar la aplicación

$$\Upsilon : \Delta \to B(l^p(\Lambda))$$

que envía cada conjunto (indexado) de puntos Z a su operador de sampling, según la definición (3.6). Acá, $B(l^p(\Lambda))$ denota al conjunto de los operadores acotados sobre $l^p(\Lambda)$. Aunque no se lo destaque en la notación, la aplicación Υ depende de X y φ.

El Teorema 4.2.1 se seguirá facilmente una vez probado que:

Teorema 4.2.2. *La aplicación*

$$\Upsilon : \Delta \to B(l^p(\Lambda))$$

es continua si consideramos Δ con la distancia d_∞ y $B(l^p(\Lambda))$ con la norma de operadoradores.

Proposición 4.2.1. *El Teorema 4.2.2 implica el Teorema 4.2.1.*

Es decir, asumiendo que el Teorema 4.2.2 es verdadero, también es verdadero el Teorema 4.2.1.

Demostración. Supongamos que el Teorema 4.2.2 es verdadero.

Primero observemos que el teorema 4.2.1 simplemente afirma que el subconjunto de los conjuntos de sampling (Λ indexados y relativamente separados) es abierto en (Δ, d_∞). En efecto, con la notación del teorema, ρ es el radio de una bola alrededor de Y. Esto es así porque, según la observación 3.1.1, todo conjunto a distancia uniforme finita de uno relativamente separado es necesariamente relativamente separado.

Dentro de $B(l^p)$ consideramos el subconjunto BB formado por los operadores acotados por abajo. Este subconjunto es abierto en la topología de la norma, puesto que si T es un operador acotado por abajo, cualquier otro operador que diste de T en estrictamente menos que la cota de abajo de T es también acotado por abajo.

Finalmente el conjunto de los conjuntos de sampling es la preimagen de BB por la aplicación Υ y luego es abierto. $\square$

Una función $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ arbitraria induce por aplicación puntual una función sobre Δ que también notamos con f. Es decir,

$$f : \Delta \to \mathbb{C}^\Lambda, \ f(Z) := (f(z_k))_{k\in\Lambda}.$$

Para cada $Z \in \Delta$, su operador de sampling $\Upsilon(Z)$ depende de lo que vale el generador φ en las traslaciones de Z, $\{Z + x_k\}_{k\in\Lambda}$. Para estudiar el comportamiento de Υ cerca de Z, deberemos considerar todas las traslaciones (en X) de los conjuntos cercanos a Z. Cada conjunto cercano a Z tiene una separación relativa parecida y sus traslaciones arbitrarias también.

La importancia de la amalgama $W(L^1, C_0)$ en nuestro estudio de la perturbabilidad es que las funciones que induce sobre Δ presentan un módulo de continuidad uniforme que depende sólo de la separación relativa de los puntos.

Lema 4.2.3. *Dada $f \in W(L^1(\mathbb{R}^d), C_0)$ la aplicación inducida*

$$f : \Delta \to l^1(\Lambda),\ \ f(Z) := (f(z_k))_{k\in\Lambda}$$

efectivamente toma valores en $l^1(\Lambda)$ y es continua. Más aún, f es uniformemente continua sobre cada Δ_M.

Demostración. Llamemos $I := [0,1]^d$ al cubo unitario e $I' := I + [-1,1]^d = [-1,2]^d$, $I'' := I' + [-1,1]^d = [-2,3]^d$.

Veamos primero que la función inducida f está bien definida. Si $Z \in \Delta$,

$$\begin{aligned}
\|f(Z)\|_1 &= \sum_{k\in\Lambda} |f(z_k)| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z_k\in I+j} |f(z_k)| \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I+j} |f| \,\#\{k \in \Lambda : z_k \in I + j\} \\
&\leq rel_{\frac{1}{2}}(Z) \,\|f\|_{W(L^1,C_0)} < \infty
\end{aligned}$$

y luego, $f(Z) \in l^1(\Lambda)$.

Sea $M > 0$ arbitrario, veamos que f es uniformemente continua sobre Δ_M. Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que para todos $Z, Z' \in \Delta_M$ tales que $d_\infty(Z, Z') < \delta$ se verifique que $\|f(Z) - f(Z')\|_1 < \varepsilon$.

Como $f \in W(L^1, C_0)$, existe un cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ de lado $2l$, $l > 0$ tal que:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sup_{I+k} |f| < \frac{\varepsilon}{4M}.$$

Como f es continua y $Q + I''$ es compacto, existe δ, $0 < \delta < 1$, tal que

$$\text{si } x, y \in Q + I'' \text{y } \ |x - y| \leq \delta, \text{ entonces } \ |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\left(\lceil 2l + 3\rceil\right)^d M}$$

Veamos que δ funciona. Sean $Z, Z' \in \Delta_M$ tales que $d_\infty(Z, Z') < \delta$, veamos que $\|f(Z) - f(Z')\|_1 < \varepsilon$.

Sea $\Lambda_0 := \{k \in \Lambda : z_k \in Q + I'\}$ Como $Q + I'$ tiene lado $2l + 3$, según la Observación 3.1.1

$$\#\Lambda_0 \leq rel_{l+\frac{3}{2}}(Z) \leq (\lceil 2l+3 \rceil)^d \, rel_{\frac{1}{2}}(Z) \leq (\lceil 2l+3 \rceil)^d M.$$

Como $d_\infty(Z, Z') < \delta < 1$,

$$\begin{aligned} &\text{si } k \in \Lambda_0, \quad z_k, z'_k \in Q + I'', \\ &\text{si } k \notin \Lambda_0, \quad z_k, z'_k \notin Q + I. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda} |f(z_k) - f(z'_k)| &= \sum_{k\in\Lambda_0} |f(z_k) - f(z'_k)| + \sum_{k\in\Lambda\setminus\Lambda_0} |f(z_k) - f(z'_k)| \\
&\leq \#\Lambda_0 \sup_{\substack{x,y\in Q+I'' \\ |x-y|\leq\delta}} |f(x) - f(y)| + \sum_{z_k\notin Q+I} |f(z_k)| + \sum_{z'_k\notin Q+I} |f(z'_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z_k\in I+j\setminus Q+I} |f(z_k)| + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{z'_k\in I+j\setminus Q+I} |f(z'_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sum_{z_k\in I+j} |f(z_k)| + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sum_{z'_k\in I+j} |f(z'_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} rel_{\frac{1}{2}}(Z) \sup_{I+j} |f| + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} rel_{\frac{1}{2}}(Z') \sup_{I+j} |f| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2M \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sup_{I+j} |f| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente veamos que f es continua sobre todo Δ. Para eso bastará ver que es continua sobre cada bola $B = B(Z, r)$ con $Z \in \Delta$ y $r > 0$.

Para cada $Z' \in B$, según la Observación 3.1.1

$$rel_{\frac{1}{2}}(Z') \leq rel_{\frac{1}{2}+r}(Z) =: M$$

Luego $B \subseteq \Delta_M$ donde ya sabemos que f es (uniformemente) continua. $\square$

Ahora probemos el Teorema 4.2.2

Teorema. *La aplicación*

$$\Upsilon : \Delta \to B(l^p(\Lambda))$$

es continua si consideramos Δ *con la distancia* d_∞ *y* $B(l^p(\Lambda))$ *con la norma de operadoradores.*

Demostración. Dados $Y = (y_k)_{k\in\Lambda} \in \Delta$ y $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0$ tal que para todo $Z \in \Delta$ tal que $d_\infty(Y, Z) < \delta$, se verifique que $\|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\| \leq \varepsilon$.

Sea $M := max\left\{rel_1\,(Y), rel_{\frac{1}{2}}\,(X)\right\}$. Usando el lema 4.2.3 con el generador φ, existe $\delta > 0$ tal que para todo $Z, Z' \in \Delta_M$ tal que $d_\infty(Z, Z') < \delta$, se tiene que $\|\varphi(Z) - \varphi(Z')\|_1 < \varepsilon$. Podemos suponer que $\delta < \frac{1}{2}$.

Veamos que δ funciona. Sea $Z \in \Delta$ tal que $d_\infty(Y, Z) < \delta$.

Según la Observación 3.1.1

$$\begin{aligned} rel_{\frac{1}{2}}\,(Y) &\leq rel_1\,(Y) \leq M \\ rel_{\frac{1}{2}}\,(Z) \leq rel_{\frac{1}{2}+\delta}\,(Y) &\leq rel_1\,(Y) \leq M \end{aligned}$$

Consideremos primero el caso $p > 1$. Para $c \in l^p(\Lambda)$,

$$\|(\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z))(c)\|^p = \sum_{j\in\Lambda} \left| \sum_{k\in\Lambda} c_k \left[\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)\right] \right|^p$$

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k| \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|^{1/p} \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|^{1/p'} \right)^p$$

ya que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right) \left(\sum_{k\in\Lambda} |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right)^{p/p'}$$

por Hölder

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right) \varepsilon^{p/p'}$$

para cada j, $rel_{\frac{1}{2}}\left((y_j - x_k)_k\right) = rel_{\frac{1}{2}}\left((z_j - x_k)_k\right) = rel_{\frac{1}{2}}(X) \leq M$

y $d_\infty((y_j - x_k)_k, (z_j - x_k)_k) = |y_j - z_j| < \delta$

$$\leq \varepsilon^{p/p'} \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \sum_{j\in\Lambda} |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|$$

$$\leq \varepsilon^{p/p'} \varepsilon \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p$$

para cada k, $rel_{\frac{1}{2}}\left((y_j - x_k)_j\right) = rel_{\frac{1}{2}}(Y) \leq M$ y $rel_{\frac{1}{2}}\left((z_j - x_k)_j\right) = rel_{\frac{1}{2}}(Z) \leq M$

además $d_\infty((y_j - x_k)_j, (z_j - x_k)_j) = d_\infty(Y, Z) < \delta$

$$= \varepsilon^{\frac{p+p'}{p'}} \|c\|^p .$$

Por lo tanto, $\|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\| \leq \varepsilon^{\frac{p+p'}{pp'}} = \varepsilon$.

La misma cuenta sirve para $p = 1$ si consideramos que $\frac{p}{p'} = 0$. $\square$

4.3. Dependencia de los parámetros

El resultado anterior muestra que un conjunto de sampling puede ser perturbado en una pequeña cantidad δ sin perder esa propiedad. En esta sección estudiamos, bajo algunas suposiciones sobre el generador, el comportamiento de δ respecto de los parámetros del problema. Las suposiciones sobre el generador permitirán estimar su módulo de continuidad uniforme en el sentido del lema 4.2.3 y luego apreciar la dependencia de δ en la cota inferior para el operador de sampling y la separación de los conjuntos involucrados.

Teorema 4.3.1. *Supongamos que φ tiene una derivada débil, con $\|\nabla(\varphi)\|_2 \in W(L^1, L^\infty)(\mathbb{R}^d)$ y que X es* separado.

Sea $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto de sampling separado. Sean

$$A := \inf_{\|c\|=1} \|\Upsilon(Y)(c)\|,$$

$$L := sup\left\{\delta > 0 : \delta\left(\lfloor\frac{1+2\delta}{sep\,(X)}\rfloor + 1\right)^{d/p'}\left(\lfloor\frac{1+2\delta}{sep\,(Y)}\rfloor + 1\right)^{d/p} \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1,L^\infty)} \leq A\right\}.$$

Entonces $\rho(Y) \geq L$, (donde $\frac{d}{p'} = 0$ si $p = 1$).

Luego, si se tienen cotas superiores para $sep\,(Y)$ y $\rho(Y)$,

$$\rho(Y) \geq L \approx A sep\,(Y)^{d/p}.$$

Comentario 4.3.1. *$A \neq 0$ por la proposición 3.5.1.*

Comentario 4.3.2. En ejemplos específicos, se obtienen (buenas) cotas superiores para la posible separación de un conjunto de sampling. Por ejemplo si el generador tiene soporte compacto es fácil acotar por arriba la separación máxima de cualquier conjunto de sampling en términos de la medida del soporte (véase por ejemplo [2]). Esto acota además el radio de perturbación de cualquier conjunto de sampling ya que un radio de perturbación muy grande permitiría obtener conjuntos de sampling con mucha separación máxima a partir de un conjunto de sampling arbitrario.

Bajo condiciones más débiles obtenemos una estimación parecida.

Teorema 4.3.2. *Supongamos que φ tiene una derivada débil, con $\|\nabla(\varphi)\|_2 \in W(L^1, L^q)(\mathbb{R}^d)$ y $d < q < \infty$ y que X es* separado. *Entonces existe una constante C que depende sólo de d y q tal que si $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto de sampling separado y*

$$A := \inf_{\|c\|=1} \|\Upsilon(Y)(c)\|,$$

$L := sup\left\{\delta > 0 : C\delta^{1-\frac{d}{q}}(2\lceil\delta\rceil + 2)^{\frac{d}{q}+d} \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1,L^q)} \left(\lfloor\frac{1+\delta}{sep(X)}\rfloor + 1\right)^{\frac{d}{p}} \left(\lfloor\frac{1+\delta}{sep(Y)}\rfloor + 1\right)^{\frac{d}{p'}} \leq A\right\}.$
Entonces

$$\rho(Y) \geq L.$$

Luego, si se tienen cotas superiores para $sep\,(Y)$ *y* $\rho(Y)$*,*

$$\rho(Y) \geq L \approx \left(Asep\,(Y)^{d/p}\right)^{1+\frac{d}{q-d}}.$$

Comentario 4.3.3. *La constante* C *del teorema puede hallarse explícitamente.*

Para probar los teoremas, necesitaremos algunos lemas.

Consideraremos el espacio de Sobolev $W_1^p(\mathbb{R}^d)$ de las funciones en L^p con una derivada débil en L^p. Como muestra la demostración del lema, cuando f tiene una derivada acotada puede corregirse en un conjunto de medida nula para que resulte continua. La hipótesis de continuidad sobre f solo afirma que hemos elegido ese representante.

Lema 4.3.3. *Sea* $f \in W_1^p(\mathbb{R}^d)$ *continua, con* $\|\nabla(f)\| \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$*. Sean* $x, y \in \mathbb{R}^d$ *y* B *la bola de diámetro* $|x-y|_2$ *centrada en el punto medio entre* x *e* y*. Entonces,*

$$|f(x) - f(y)| \leq \underset{B}{supess} \|\nabla(f)\|_2 \, |x-y|_2 \,.$$

Demostración. Sea η un núcleo regularizador suave, positivo, soportado en $B_1(0)$ y de integral 1. Sean $\eta_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^d}\eta(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ y $f_\varepsilon = f * \eta_\varepsilon$.

Sean $x', y' \in B^\circ$ arbitrarios. Sea $B' \subset B^\circ$ un bola cerrada que contiene a x' e y'. Por el teorema del valor medio, existe $c \in B'$ tal que,

$$|f_\varepsilon(x') - f_\varepsilon(y')| \leq |\nabla(f_\varepsilon)(c)|_2 \, |x'-y'|_2 \,.$$

Si $0 < \varepsilon < d(B', B)$, tenemos que $B_\epsilon(c) \subseteq B$ y podemos estimar,

$$\begin{aligned} |\nabla(f_\varepsilon)(c)|_2 &= |\nabla(f) * \eta_\varepsilon(c)|_2 \leq \left(|\nabla(f)|_2 * \eta_\varepsilon\right)(c) \\ &\leq \underset{B_\varepsilon(c)}{supess} |\nabla(f)|_2 \, \|\eta_\varepsilon\|_1 \leq \underset{B}{supess} |\nabla(f)|_2 \,. \end{aligned}$$

Luego,

$$|f_\varepsilon(x') - f_\varepsilon(y')| \leq \underset{B}{supess} |\nabla(f)|_2 \, |x'-y'|_2 \,.$$

Como f es continua, x' e y' son puntos de Lebesgue de f y luego, haciendo tender $\varepsilon \to 0^+$ tenemos que

$$|f(x') - f(y')| \leq \underset{B}{supess}\, |\nabla(f)|_2\, |x' - y'|_2\,.$$

Haciendo tender ahora $x' \to x$ e $y' \to y$, se sigue el lema. □

Lema 4.3.4. *Sea $f \in W(L^1, L^\infty)(\mathbb{R}^d)$ continua y con una derivada débil tal que $\|\nabla(f)\|_2 \in W(L^1, L^\infty)(\mathbb{R}^d)$. Sea $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto separado e $Z' \equiv \{z'_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $d_\infty(Z, Z') \leq \delta$.*

Entonces,

$$\|f(Z) - f(Z')\|_1 \leq \delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Z)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(f)\|_{W(L^1,L^\infty)}\,.$$

Demostración. Para cada $k \in \Lambda$ llamemos B_k a la bola de diámetro δ centrada en el punto medio entre z_k e z'_k. Luego por el lema,

$$|f(z_k) - f(z'_k)| \leq \underset{B_k}{supess}\, \|\nabla(f)\|_2\, |z_k - z'_k|_2$$

Sea $\sigma : \Lambda \to \mathbb{N}$ una numeración (biyectiva). Dado $\varepsilon > 0$, existe $c_k \in B_k$ tal que

$$\underset{B_k}{supess}\, \|\nabla(f)\|_2 \leq \|\nabla(f)(c_k)\|_2 + \frac{\varepsilon}{2^{\sigma(k)}}.$$

Como $|z_k - z'_k|_2 \leq \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z_k) - f(z'_k)| &\leq \left(\|\nabla(f)(c_k)\|_2 + \frac{\varepsilon}{2^{\sigma(k)}} \right) \delta, \\ |z_k - c_k|_2 &\leq \delta. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\sum_{k\in\Lambda} \frac{1}{2^{\sigma(k)}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1.$$

Además por la Observación 3.1.1,

$$rel_{\frac{1}{2}}\left((c_k)_{k\in\Lambda} \right) \leq rel_{\frac{1}{2}+\delta}\,(Z) \leq \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Z)} \rfloor + 1 \right)^d.$$

Ahora simplemente estimamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda} |f(z_k) - f(z'_k)| &\leq \sum_{k\in\Lambda} \left(\|\nabla(f)(c_k)\|_2 + \frac{\varepsilon}{2^{\sigma(k)}} \right) \delta \\
&\leq \delta \left(\sum_{k\in\Lambda} \|\nabla(f)(c_k)\|_2 + \varepsilon \right) \\
&\leq \delta \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{c_k\in[0,1]^d+j} \|\nabla(f)(c_k)\|_2 + \varepsilon \right) \\
&\leq \delta \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{[0,1]^d+j} \|\nabla(f)\|_2 \, rel_{\frac{1}{2}} \left((c_k)_{k\in\Lambda}\right) + \varepsilon \right) \\
&\leq \delta \left(\left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Z)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(f)\|_{W(L^1,L^\infty)} + \varepsilon \right).
\end{aligned}$$

Haciendo $\varepsilon \to 0^+$ se sigue el lema. □

Lema 4.3.5. *Sea $f \in W(L^1, L^\infty)(\mathbb{R}^d)$ continua y con una derivada débil tal que $\|\nabla(f)\|_2 \in W(L^1, L^q)(\mathbb{R}^d)$ y $d < q < \infty$. Sea $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto separado e $Z' \equiv \{z'_k\}_{k\in\Lambda} \subseteq \mathbb{R}^d$ tal que $d_\infty(Z, Z') \leq \delta$.*

Entonces,

$$\|f(Z) - f(Z')\|_1 \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(Z)} \rfloor + 1 \right)^d (2\lceil\delta\rceil + 2)^{\frac{d}{q}+d} \|\nabla(f)\|_{W(L^1,L^q)},$$

donde C es una constante que depende sólo de q y d.

Demostración. Para cada $k \in \Lambda$ sea c_k el punto medio entre z_k e z'_k y sea B_k la bola cerrada centrada en c_k de diámetro δ.

La *desigualdad de Morrey* [8, pg. 143] [1] garantiza la existencia de una constante C que depende sólo de q y d tal que

$$|f(z_k) - f(z'_k)| \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \|\nabla(f)\|_{L^p(B_k)}.$$

Llamemos $Q := [\frac{\delta}{2}, 1 + \frac{\delta}{2}]^d$. $Q' := Q + [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]^d = [0, 1+\delta]^d$ y $N := \lceil\delta\rceil + 1$.

[1] La referencia citada tiene un error en el enunciado de la desigualdad, sin embargo la demostración da la versión correcta

Observemos que $d_\infty((c_k)_k, Z) \leq \frac{\delta}{2}$ y luego según la observación 3.1.1

$$rel_{\frac{1}{2}}\left((c_k)_k\right) \leq rel_{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}}(Z) \leq \left(\lfloor\frac{1+\delta}{sep\,(X)}\rfloor + 1\right)^d.$$

Ahora estimemos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda} |f(z_k) - f(z_k')| &\leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \sum_{k\in\Lambda} \|\nabla(f)\|_{L^q(B_k)} \\
&\leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{c_k\in Q+j} \|\nabla(f)\|_{L^q(B_k)}}_{Q \text{ tesela } \mathbb{R}^d \text{ por traslaciones enteras}} \\
&\leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \underbrace{\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} rel_{\frac{1}{2}}\left((c_k)_k\right) \|\nabla(f)\|_{L^q(Q'+j)}}_{\text{como } |c_k - z_k|_2 < \frac{\delta}{2},\ B_k \subseteq Q'+j} \\
&\leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \left(\lfloor\frac{1+\delta}{sep\,(Z)}\rfloor + 1\right)^d \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q'+j)}.
\end{aligned}$$

Como $Q' \subset \bigcup_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} Q + l$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f)\|_{L^q(Q'+j)}^q &\leq \sum_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q+j+l)}^q \\
&\leq (2N+1)^d \max_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \|\nabla(f)\|_{L^p(Q+l+j)}^q,
\end{aligned}$$

y luego,

$$\begin{aligned}
\|\nabla(f)\|_{L^q(Q'+j)} &\leq (2N+1)^{\frac{d}{q}} \max_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q+l+j)} \\
&\leq (2N+1)^{\frac{d}{q}} \sum_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q+l+j)}.
\end{aligned}$$

Combinando todas las estimaciones,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\Lambda} |f(z_k) - f(z'_k)| \\
&\qquad \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} (2N+1)^{\frac{d}{q}} \sum_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q+l+j)} \\
&\qquad \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d (2N+1)^{\frac{d}{q}} \sum_{l\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \|\nabla(f)\|_{L^q(Q+l+j)} \\
&\qquad \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d (2N+1)^{\frac{d}{q}+d} \|\nabla(f)\|_{W(L^1,L^q)} .
\end{aligned}$$

□

Ahora probemos los Teoremas 4.3.1 y 4.3.2.

Demostración. Para el Teorema 4.3.1, el lema 4.3.4 nos da las estimaciones que necesitamos.

Supongamos que $\delta := d_\infty(Y, Z) < L$. Veamos que Z es un conjunto de sampling. Esto dirá que $\rho(Y) \geq L$.

Si $p > 1$, para $c \in l^p(\Lambda)$,

$$\|(\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z))(c)\|^p = \sum_{j\in\Lambda} \left| \sum_{k\in\Lambda} c_k \left[\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)\right] \right|^p$$

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k| \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|^{1/p} \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|^{1/p'} \right)^p$$

ya que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right) \left(\sum_{k\in\Lambda} |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right)^{p/p'}$$

por Hölder

$$\leq \sum_{j\in\Lambda} \left(\sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \, |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)| \right) \left(\delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \right)^{p/p'}$$

para cada j, $\{y_j - x_k\}_k$ y $\{z_j - x_k\}_k$ tienen la misma separación que X y distan punto a punto en menos que δ

$$\leq \left(\delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \right)^{p/p'} \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p \sum_{j\in\Lambda} |\varphi(y_j - x_k) - \varphi(z_j - x_k)|$$

$$\leq \left(\delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \right)^{p/p'} \left(\delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Y)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \right) \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^p$$

para cada k, $\{y_j - x_k\}_j$ tiene la misma separación que Y y dista de $\{z_j - x_k\}_j$ punto a punto en menos que δ

$$= \left(\delta^{(p/p'+1)} \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^{dp/p'} \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Y)} \rfloor + 1 \right)^d \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)}^{p/p'+1} \right) \|c\|^p ,$$

y luego como $\delta < L$ (a menos que $\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} \|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\| &\leq \delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^{d/p'} \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(Y)} \rfloor + 1 \right)^{d/p} \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \\ &< L \left(\lfloor \frac{1+2L}{sep\,(X)} \rfloor + 1 \right)^{d/p'} \left(\lfloor \frac{1+2L}{sep\,(Y)} \rfloor + 1 \right)^{d/p} \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1, L^\infty)} \\ &\leq A \end{aligned}$$

Un cuenta similar a la anterior (más sencilla) muestra que esto también es cierto si $p = 1$ e interpretamos $\frac{d}{p'} = 0$. Luego si $A' := A - \|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\| > 0$, para $c \in l^2(\Lambda)$,

$$\|\Upsilon(Z)(c)\| \geq \|\Upsilon(Y)(c)\| - \|(\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z))(c)\| \geq A\,\|c\| - \|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\|\,\|c\| = A'\,\|c\|$$

y $Z \equiv \{z_k\}$ es un conjunto de sampling por la proposición 3.5.1. Para el

Teorema 4.3.2, si $\delta := d_\infty(Y, Z) < L$, una cuenta muy similar a la anterior, esta vez combinada con el lema 4.3.5 nos da,

$$\|S - S'\| \leq C\delta^{1-\frac{d}{q}}(\lceil 2\delta \rceil + 2)^{\frac{d}{q}+d} \|\nabla(\varphi)\|_{W(L^1,L^q)} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(X)} \rfloor + 1\right)^{\frac{d}{p}} \left(\lfloor \frac{1+\delta}{sep\,(Y)} \rfloor + 1\right)^{\frac{d}{p'}},$$

donde C es una constante que depende sólo de d y q. Si $\delta < L$, $\|\Upsilon(Y) - \Upsilon(Z)\| < A$ y Z es un conjunto de sampling. Esto muestra que $\rho(Y) \geq L$. □

4.4. Perturbaciones óptimas

En esta sección probamos que dado un conjunto de sampling Y existen perturbaciones locales óptimas. Más precisamente en cualquier δ entorno de Y existe una manera de perturbar Y moviendo cada punto en menos que δ de manera que la cota inferior del respectivo operador de sampling es máxima entre las de las tales perturbaciones.

Teorema 4.4.1. *Sea $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ un conjunto de sampling (relativamente separado) para S y δ, $0 < \delta < \infty$. Entonces existe un conjunto de puntos $\widetilde{Y} \equiv \{\widetilde{y}_k\}_{k\in\Lambda}$ con $sup_{k\in\Lambda} |y_k - \widetilde{y}_k| \leq \delta$ tal que*

$$\zeta(\widetilde{Y}) = sup\left\{\zeta(Z) : Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda} \text{ tal que } \sup_{k\in\Lambda} |y_k - z_k|_2 \leq \delta\right\}$$

donde $\zeta(Z)$ denota a la cota inferior del repectivo operador de sampling $\Upsilon(Z)$.

La herramienta clave para probar el Teorema 4.4.1 será la aplicación Υ de las secciones pasadas, pero esta vez considerada con topologías más gruesas en el dominio y codominio.

Para $B(l^p(\Lambda))$ consideraremos la topología fuerte (SOT) que es la topología inicial de las evaluaciones, es decir la topología de la convergencia puntual (en norma p).

Definiremos en Δ una *topología débil* que nos permita probar el Teorema 4.4.1 con argumentos de continuidad y compacidad.

Definición 4.4.1. *Dados $Y \in \Delta$ y $r > 0$, definimos $E(Y, r)$ como bola cerrada de centro Y y radio δ*

$$E(Y, r) := B_\delta(Y) = \{Z \in \Delta : d_\infty(Z, Y) \leq \delta\}$$

y la consideramos como subespacio de $\prod_{k\in\Lambda} B(y_k, \delta)$, con la topología producto; con $B(y_k, \delta) \subseteq \mathbb{R}^d$ la bola cerrada de centro y_k y radio δ en norma 2. Es decir con la topología de la convergencia puntual.

Observación 4.4.1. *Según la observación 3.1.1, $E(Y, r)$ es el conjunto de todos los conjuntos Λ-indexados que están a distancia uniforme de Y menor que δ (ya que que éstos son necesariamente relativamente separados). Así, $E(Y, r) = \prod_{k\in\Lambda} B(y_k, \delta)$.*

Como el cojunto Λ es numerable, $E(Y, r)$ es metrizable. Más aún, por el teorema de Tychonoff, $E(Y, r)$ es compacto (aunque, por supuesto, d_∞ no es una métrica para esta topología).

Definición 4.4.2. *Definimos la* topología débil *de Δ como la topología final de la familia de inclusiones $\{\iota_{Y,r} : E(Y, r) \hookrightarrow \Delta; Y \in \Delta, r > 0\}$. Es decir, es la topología más fina que hace continua cada una de estas inclusiones. Notaremos con (Δ, w) al conjunto Δ considerado con esta topología.*

La topología débil de Δ está caracterizada por la siguiente propiedad universal: una función $f : (\Delta, w) \to V$, de Δ en un espacio topológico V es continua si y sólo si, para todo $Y \in \Delta$ y $r > 0$, la función $f_{Y,r} := f \circ \iota_{Y,r}$ es continua.

Ahora podemos enunciar el resultado principal,

Teorema 4.4.2. *La aplicación*

$$\Upsilon : (\Delta, w) \to (B(l^p(\Lambda)), SOT)$$

que envia un conjunto Z a $\Upsilon(Z)$ su respectivo operador de sampling es continua.

Al igual que en la Sección 4.2, comenzaremos por estudiar la continuidad débil de las funciones inducidas por la amalgama $W(L^1, C_0)$.

Lema 4.4.3. *Sea $f \in W(L^1, C_0)$. Entonces la función inducida*

$$f : (\Delta, w) \to l^1(\Lambda), \quad f(Z) = (f(z_k))_{k\in\Lambda}$$

es continua.

Comentario 4.4.1. *En el lema anterior al Teorema 4.2.3 vimos que esta función en efecto toma valores en $l^1(\Lambda)$.*

Demostración. Según la propiedad universal, basta verificar que dados $Y \in \Delta$ y $r > 0$ la función $f_{Y,r} := f \circ \iota_{Y,r} : E(Y,r) \to l^1(\Lambda)$ es continua.

Como $E(Y,r)$ es metrizable, bastará ver que si $\{Z^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E(Y,r)$ y $Z \in E(Y,r)$ son tales que $Z^n \xrightarrow{w}_n Z$, entonces $f_{Y,r}(Z^n) = f(Z^n) \xrightarrow{l^1}_n f(Z) = f_{Y,r}(Z)$.

Digamos, $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda}$, $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ y $Z^n \equiv \{z_k^n\}_{k\in\Lambda}$.

Llamemos $I := [0,1]^d$, $I' := I + [-r,r]^d$ y $N := \lceil r \rceil$. Observemos que

$$I' \subseteq I + [-N,N]^d \subseteq \bigcup_{k\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} I + k.$$

Ahora estimamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I'+j} |f| &\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I+j+[-N,N]^d} |f| \\
&\leq \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{k\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \sup_{I+j+k} |f| \\
&\leq \sum_{k\in([-N,N]\bigcap\mathbb{Z})^d} \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sup_{I+j+k} |f| \\
&= (2N+1)^d \left\|f\right\|_{W(L^1,C_0)} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un cubo Q tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sup_{I'+k} |f| < \frac{\varepsilon}{4rel_{\frac{1}{2}}(Y)}.$$

Como Y es relativamente separado, sólo hay finitos de sus elementos en $Q+I$. Como $z_k^n \to_n z_k$ para cada k, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$,

$$\sum_{k:\, y_k\in Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora si $n \geq n_0$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\Lambda} |f(z_k^n) - f(z_k)| &= \sum_{k:\, y_k\in Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| + \sum_{k:\, y_k\notin Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k:\, y_k\notin Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} \sum_{y_k\in(I+j)\setminus Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} \sum_{y_k\in(I+j)\setminus Q+I} |f(z_k^n) - f(z_k)| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{j\in\mathbb{Z}^d\setminus Q} rel_{\frac{1}{2}}(Y) 2 \sup_{I'+j} |f| \\
&\quad \text{como } Z, Z^n \in E(Y,r), \text{ si } y_k \in I+j \Rightarrow z_k, z_k^n \in I'+j \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Luego, si $n \geq n_o$, $\|f(Z) - f(Z^n)\|_1 \leq \varepsilon$. □

Ahora podemos probar el Teorema 4.4.2.

Teorema. *La aplicación*

$$\Upsilon : (\Delta, w) \to (B(l^p(\Lambda)), SOT)$$

que envia un conjunto Z a $\Upsilon(Z)$ su respectivo operador de sampling es continua.

Demostración. Como recién, basta verificar que dados $Y \in \Delta$ y $r > 0$ la función $f_{Y,r} := f \circ \iota_{Y,r} : E(Y,r) \to l^1(\Lambda)$ es continua.

Usando la Observación 3.1.1 para cada $Z \in E(Y,r)$,

$$rel_{\frac{1}{2}}(Z) \leq rel_{\frac{1}{2}+r}(Y)$$

Como $E(Y,r)$ es metrizable, veamos que si $\{Z^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E(Y,r)$ y $Z \in E(Y,r)$ son tales que $Z^n \xrightarrow{w}_n Z$, entonces $\Upsilon(Z^n) \xrightarrow{SOT}_n \Upsilon(Z)$.

Dada $c \equiv (c_k)_{k\in\Lambda} \in l^p(\Lambda)$ veamos que $\Upsilon(Z^n)(c) \xrightarrow{l^p}_n \Upsilon(Z)(c)$. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Para $W \in \Delta$ arbitrario,

$$\sum_{k \in \Lambda} |\varphi(w_k)| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{w_k \in I+j} |\varphi(w_k)|$$
$$\leq rel_{\frac{1}{2}}(W) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)}.$$

Luego para $W \in E(Y,r)$ arbitrario y $k \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}\sum_{l \in \Lambda} |\varphi(w_l - x_k)| &\leq rel_{\frac{1}{2}}(W - x_k) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)} \\ &= rel_{\frac{1}{2}}(W) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)} \\ &\leq rel_{\frac{1}{2}+r}(Y) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)}.\end{aligned}$$

Del mismo modo, como X es relativamente separado, para $l \in \Lambda$,

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \Lambda} |\varphi(w_l - x_k)| &\leq rel_{\frac{1}{2}}(w_l - X) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)} \\ &\leq rel_{\frac{1}{2}}(X) \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)}.\end{aligned}$$

Luego, si $M := max\left\{rel_{\frac{1}{2}+r}(Y), rel_{\frac{1}{2}}(X)\right\} \|\varphi\|_{W(L^1,C_0)}$ tenemos las siguientes acotaciones uniformes: para todo $k \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j \in \Lambda} \left|\varphi(z_j^n - x_k)\right|, \sum_{j \in \Lambda} |\varphi(z_j - x_k)| \leq M$$

y para todo $j \in \Lambda$ y $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k \in \Lambda} \left|\varphi(z_j^n - x_k)\right|, \sum_{k \in \Lambda} |\varphi(z_j - x_k)| \leq M$$

Supongamos por un momento que $p > 1$. Como $c \in l^p(\Lambda)$ existe $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ finito tal que,

$$\sum_{k \in \Lambda \setminus \Lambda_0} |c_k|^p < \frac{\varepsilon}{2M^{\frac{p}{p'}+1}}.$$

Estimemos como hicimos otras veces,

$$
\begin{aligned}
\|\Upsilon(Z^n)(c)-\Upsilon(Z)(c)\|_p^p &= \sum_{j\in\Lambda}\left|\sum_{k\in\Lambda} c_k\left(\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right)\right|^p \\
&\leq \sum_{j\in\Lambda}\left(\sum_{k\in\Lambda}|c_k|\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|^{\frac{1}{p}}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|^{\frac{1}{p'}}\right)^p \\
&\leq \sum_{j\in\Lambda}\left(\sum_{k\in\Lambda}|c_k|^p\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|\sum_{k\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|^{\frac{p}{p'}}\right) \\
&\leq M^{\frac{p}{p'}}\sum_{j\in\Lambda}\sum_{k\in\Lambda}|c_k|^p\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right| \\
&\leq M^{\frac{p}{p'}}\sum_{k\in\Lambda}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right| \\
&\leq M^{\frac{p}{p'}}\left(\sum_{k\in\Lambda_0}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|+\sum_{k\in\Lambda\setminus\Lambda_0}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|\right) \\
&\leq M^{\frac{p}{p'}}\left(\sum_{k\in\Lambda_0}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|+M\sum_{k\in\Lambda\setminus\Lambda_0}|c_k|^p\right) \\
&\leq M^{\frac{p}{p'}}\sum_{k\in\Lambda_0}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|+\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Para $p=1$ una cuenta parecida (más fácil) prueba lo mismo (en ese cado $\frac{p}{p'}=0$). Como $z^n \xrightarrow{w}_n z$ para cada $k\in\Lambda$ también $z^n-x_k \xrightarrow{w}_n z-x_k$. Esto no es tan obvio, pero puede argumentarse así: $Z^n, Z\in E(Y,r)$, luego $Z^n-x_k, Z-x_k\in E(Y-x_k,r)$. Como para cada j, $z_j^n\to_n z_j$, resulta que $z_j^n-x_k\to_n z_j-x_k$. Luego $Z^n-x_k\to_n Z-x_k$ en $E(Y-x_k,r)$. Como la inclusión $E(Y-x_k,r)\hookrightarrow(\Delta,w)$ es continua, $Z^n-x_k\to_n Z-x_k$ en (Δ,w).

Luego, según el Lema 4.4.3, para $k\in\Lambda_0$,

$$\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|\underset{n}{\to}0$$

Como Λ_0 es finito, se sigue que existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$

$$\sum_{k\in\Lambda_0}|c_k|^p\sum_{j\in\Lambda}\left|\varphi(z_j^n-x_k)-\varphi(z_j-x_k)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

y luego para $n\geq n_0$, $\|\Upsilon(Z^n)(c)-\Upsilon(Z)(c)\|_p^p<\varepsilon$. □

Lema 4.4.4. *La aplicación*

$$\zeta : (B(l^p(\Lambda)), SOT) \to \mathbb{R}, \ \ \zeta(T) = \underset{\|c\|_p=1}{inf} \ \|T(c)\|_p .$$

es semicontinua superiormente (i.e. $\zeta^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto para cada $\alpha \in \mathbb{R}$)

Demostración. Para $\alpha \in \mathbb{R}$ basta ver que el complemento de $\zeta^{-1}((-\infty, \alpha))$ es cerrado en la topología SOT. Para cada $c \in l^p$ llamemos ev_c a la evaluación en c, i.e. $ev_c(T) = T(c)$.

La cota inferior de un operador es mayor o igual que α sí y sólo sí envía cada $c \in l^p$ de norma 1 afuera de la bola abierta de radio α. Es decir,

$$\zeta^{-1}([\alpha, \infty)) = \bigcap_{\|c\|_p=1} ev_c^{-1}(l^p \setminus B^\circ_\alpha(0)).$$

Para cada $c \in l^p$ de norma 1, como ev_c es continua con la topología SOT, y $l^p \setminus B^0_\alpha(0)$ es cerrado en l^p, resulta que $ev_c^{-1}(l^p \setminus B^0_\alpha(0))$ es SOT-cerrado. La intersección arbitraria de cerrados es un cerrado. □

Ahora probemos el Teorema 4.4.1

Teorema. *Sea $Y \equiv \{y_k\}_{k\in\Lambda}$ un conjunto de sampling (relativamente separado) para S y δ, $0 < \delta < \infty$. Entonces existe un conjunto de puntos $\widetilde{Y} \equiv \{\widetilde{y}_k\}_{k\in\Lambda}$ con $sup_{k\in\Lambda} |y_k - \widetilde{y}_k| \le \delta$ tal que*

$$\zeta(\widetilde{Y}) = sup \left\{ \zeta(Z) : Z \equiv \{z_k\}_{k\in\Lambda} \ \ tal\ que \ \sup_{k\in\Lambda} |y_k - z_k|_2 \le \delta \right\}$$

donde $\zeta(Z)$ denota a la cota inferior del repectivo operador de sampling $\Upsilon(Z)$.

Demostración. Componiedo las aplicaciones de ambos lemas tenemos que la aplicación $\zeta : \Delta \to \mathbb{R}$ que envía cada conjunto de puntos a la cota inferior de su respectivo operador de sampling es semicontinua superiormente. Si la componemos ahora con la inclusión $\iota_{Y,\delta} : E(Y, \delta) \hookrightarrow \Delta$ resulta una aplicación $E(Y, \delta) \to \mathbb{R}$ semicontinua superiormente y con dominio compacto que debe por lo tanto alcanzar algún máximo $\overline{Y}$. □

Capítulo 5

Algunos ejemplos

5.1. Un ejemplo sencillo

Consideremos $\varphi(x) := (1 - 2\left|x - \frac{1}{2}\right|)\chi_{[0,1]}(x)$ y $S := S(\varphi)$ el subespacio cerrado generado por las traslaciones enteras de φ.

Observemos primero que las traslaciones enteras de φ son una base de Riesz de $\mathcal{S}$. Para eso, calculamos la periodización de su transformada de Fourier, valiéndonos de la fórmula de Poisson.

$$[\varphi, \varphi] = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi(\cdot - k) \rangle \, e^{2\pi i k(\cdot)} = \|\varphi\|_2^2 \neq 0.$$

Con lo cual, $[\varphi, \varphi]$ está acotada por arriba y abajo y según el corolario 3.4.2 las traslaciones enteras de φ son una base de Riesz de $\mathcal{S}$.

Sea $X := \{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, con $x_k := k + 1/2$. Su operador de sampling S está dado por

$$S(c)_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(x_j - k) = c_j.$$

Luego, $S \equiv Id$ y X es un conjunto de sampling con cota inferior 1.

Veamos que su radio de perturbación $\rho(X)$ es $\frac{1}{2}$.

Consideremos la perturbación regular $Y = \{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ dada por $y_k = x_k + \frac{1}{2} = k + 1$. El respectivo operador de sampling es el operador de convolución con núcleo $(\varphi(y_k))_{k \in \mathbb{Z}} \equiv 0$, es decir 0. Luego Y no es un conjunto de sampling y $\rho(X) \leq \frac{1}{2}$.

Ahora veamos que cualquier conjunto de puntos $Z \equiv \{z_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ tal que $\delta := sup_{k\in\mathbb{Z}} |z_k - x_k| < \frac{1}{2}$, es un conjunto de sampling para S.

Cada x_k es el punto medio del intervalo $[k, k+1]$ y z_k dista de él en menos que $\frac{1}{2}$. Luego cada $z_k \in [k, k+1]$. El operador de sampling de Z está dado entonces por

$$S'(c)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(z_j - k) = c_j\varphi(z_j - j).$$

Es decir, S' es el operador diagonal que tiene $\varphi(z_j - j)$ en la entrada (j, j). Ahora,

$$\varphi(z_j - j) = 1 - 2\left|(z_j - j) - \frac{1}{2}\right| = 1 - 2\,|z_j - x_j| \geq 1 - 2\delta$$

Con esto, $(1 - 2\delta) > 0$ y luego,

$$\begin{aligned}
\|S'(c)\|_2 &= \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |S'(c)_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2\,|\varphi(z_j - j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\geq |1 - 2\delta| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |c_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |1 - 2\delta|\,\|c\|_2\,.
\end{aligned}$$

Como $0 \leq \delta < \frac{1}{2}$, S' es acotado por abajo.

Veamos cuánto es la estimación del teorema 4.3.1 en este caso. Con esa notación: $A = 1$, $d = 1$, $p = 2$, $sep\,(X) = sep\,(Y) = 1$ y $\|\varphi'\|_{W(L^1,L^\infty)} = 2$. Luego,

$$\rho(X) \geq L = sup\,\{\delta > 0 : 2\delta(\lfloor 1 + 2\delta\rfloor + 1) < 1\} = \frac{1}{4}.$$

5.2. Splines lineales

Ahora estudiaremos el ejemplo de los splines lineales. Aunque a primera vista parezca parecido, el caso es bastante distinto al anterior.

Consideremos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) := (1 - |x|)\chi_{[-1,1]}$. Sea $\mathcal{S} := S(\varphi)$ el subespacio cerrado invariante por traslaciones enteras generador por φ.

Afirmamos que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es una base de Riesz de $\mathcal{S}$. Para esto, según el corolario 3.4.2 bastará ver que la periodización de su transformada de Fourier está acotada por arriba y abajo. Según la fórmula de suma de Poisson, para $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
[\varphi,\varphi](x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle \varphi, \varphi(\cdot - k)\rangle\, e^{2\pi ikx} \\
&= \langle \varphi, \varphi(\cdot + 1)\rangle\, e^{2\pi ix} + \langle \varphi, \varphi\rangle\, 1 + \langle \varphi, \varphi(\cdot - 1)\rangle\, e^{-2\pi ix} \\
&= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} cos(2\pi x).
\end{aligned}$$

Luego, sobre $[0,1]$, $\frac{1}{3} \leq [\varphi,\varphi] \leq 1$.

El subespacio S consiste en todas las funciones continuas de L^2 lineales entre enteros consecutivos. Por la elección del generador, $\mathbb{Z}$ es trivialmente un conjunto de sampling para S. En efecto, obervemos que el generador φ verifica: $\varphi(j) = \delta_{0,j}$ para $j \in \mathbb{Z}$ y luego,

$$\varphi(j-k) = \delta_{k,j} \text{ para } j \in \mathbb{Z}$$

Es decir que la base dual a $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es el conjunto de los núcleos reproductores $\{K_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Como este conjunto es una base de Riesz, $\mathbb{Z}$ no sólo es un conjunto de sampling sino un conjunto de *interpolación*. Dada cualquier sucesión $(a_k)_k \in l^2(\mathbb{Z})$, existe una única $f \in S$ tal que $f(k) = a_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Está dada explícitamente por la fórmula,

$$f = \sum_k a_k \varphi(\cdot - k).$$

Sea ψ, el núcleo reproductor en 0. Por lo que vimos, ψ está caracterizada por la ecuación,

$$\langle \psi, \varphi(\cdot - k)\rangle = \delta_{0,k} \text{ para } k \in \mathbb{Z}.$$

El sistema $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es la base dual a $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ y luego el conjunto de núcleos reproductores en $\mathbb{Z}$.

Calculemos explícitamente ψ. Una vez hecho esto, se tendrá una fórmula explícta para los núcleos reproductores.

Desarrollando ψ en la base $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$, obtenemos una sucesión $(c_k)_k \in l^2(\mathbb{Z})$ tal que

$$\psi = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \varphi(\cdot - k).$$

Ahora para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} \delta_{0,j} &= \langle \psi, \varphi(\cdot - j) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \langle \varphi(\cdot - k), \varphi(\cdot - j) \rangle \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \langle \varphi, \varphi(\cdot - (j-k)) \rangle \\ &= \frac{1}{6} c_{-1} + \frac{2}{3} c_0 + \frac{1}{6} c_1. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{cases} 1 &= \frac{1}{6}c_{-1} + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{6}c_1, \\ 0 &= \frac{1}{6}c_{j-1} + \frac{2}{3}c_j + \frac{1}{6}c_{j+1} \text{ para } j \neq 0. \end{cases}$$

Para $j \geq 0$ la seguna ecuación es recursiva lineal y tiene por solución general

$$c_j = \alpha {X_1}^j + \beta {X_2}^j,$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ a precisar y $X_1 = \sqrt{3} - 2$ y $X_2 = -\sqrt{3} - 2$ las raices de $\frac{1}{6}X^2 + \frac{2}{3}X + \frac{1}{6}$. Si notamos $d_j := c_{-j}$ para $j \geq 0$, tenemos que se verifica otra ecuación de recursión lineal dando,

$$d_j = \alpha' {X_1}^j + \beta' {X_2}^j,$$

con $\alpha', \beta' \in \mathbb{C}$ a precisar. Luego,

$$\begin{cases} c_j &= \alpha {X_1}^j + \beta {X_2}^j, & \text{si } j \geq 0 \\ c_j &= \alpha' {X_1}^{-j} + \beta' {X_2}^{-j}, & \text{si } j \leq 0 \\ 1 &= \frac{1}{6}c_{-1} + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{6}c_1. \end{cases}$$

Según las dos expresiones dadas para c_0 tenemos que $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. Observemos que $|X_1| < 1$ mientras que $|X_2| > 1$. Como $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in l^2$, resulta que las sucesiones $(c_j)_{j \geq 0}$ y $(c_j)_{j \leq 0}$ son ambas de cuadrado sumable y esto requiere que $\beta = \beta' = 0$ y luego $\alpha = \alpha'$. Ahora,

$$\begin{cases} c_j &= \alpha {X_1}^j, & \text{si } j \geq 0 \\ c_j &= \alpha {X_1}^{-j}, & \text{si } j \leq 0 \\ 1 &= \frac{1}{6}c_{-1} + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{6}c_1. \end{cases}$$

Reemplazando en la tercera ecuación los valores de c_{-1} y c_1, obtenemos que $\alpha = \sqrt{3}$. Luego $c_j = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^{|j|}$ y

$$\psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^{|j|} \varphi(\cdot - k)$$

Observemos que aunque al principio sólo sabíamos que la sucesión $c \equiv (c_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in l^2$ resultó que $c \in l^1$. De hecho, este es el caso cada vez que $\varphi \in W(L^1, L^\infty)$ [1].

Finalmente, para $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, como $sop(\varphi) \subseteq [-1,1]$,

$$K_x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x-k)\psi(\cdot - k) = \sum_{k=\lfloor x\rfloor}^{\lceil x\rceil} \varphi(x-k)\psi(\cdot - k),$$

y luego,

$$K_x = \begin{cases} \psi(\cdot - x), & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \varphi(x-\lfloor x\rfloor)\psi(\cdot - \lfloor x\rfloor) + \varphi(x-\lceil x\rceil)\psi(\cdot - \lceil x\rceil), & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ahora estudiemos las perturbaciones *regulares* de $\mathbb{Z}$ como conjunto de sampling. Sean $\alpha \in [0,1)$ y $x_k := k + \alpha$. Veamos para qué valores de α el conjunto $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ resulta un conjunto de sampling. La ventaja de trabajar con una perturbación regular, es que el operador de sampling es un operador de convolución. Esto permite calcular exactamente sus cotas, en vez de estimarlas. En efecto, para $c \in l^2(\mathbb{Z})$,

$$S(c)_j = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(x_j - k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\varphi(j-k+\alpha) = c * (\varphi(x_k))_{k\in\mathbb{Z}}$$

Este operador resulta acotado por arriba cualquiera sea α. Queremos ver cuándo es acotado por abajo. Si conjugamos S con la transformada de Fourier, obtenemos un operador de multiplicación $T : L^2([0,1]) \to L^2([0,1])$,

$$T(f) = pf, \;\; p = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(x_k)e^{2\pi ik\cdot}$$

Calculemos explícitamente su símbolo p. Para $k \in \mathbb{Z}$, como $sop(\varphi) \subseteq [-1,1]$,

$$\begin{cases} \varphi(x_{-1}) &=& \alpha - 1, \\ \varphi(x_0) &=& 1 - |\alpha|, \\ \varphi(x_k) &=& 0, \qquad \text{si } k \neq -1, 0 \end{cases}$$

Luego para $x \in [0,1]$, $p(x) = 1 - \alpha + \alpha e^{-2\pi ix}$. S es acotado por abajo si y sólo si T lo es. Esto ocurre exactamente cuando $|p|$ es acotado por abajo y como el símbolo p es continuo, si y sólo si p no tiene ceros en $[0,1]$. Esto ocurre sí y sólo si $\alpha \neq \frac{1}{2}$. Además como la transformada de Fourier es isométrica,

$$\underset{\|c\|_2=1}{inf} \|S(c)\| = \underset{\|f\|_2=1}{inf} \|T(f)\| = \underset{[0,1]}{inf} |p| = |1-2\alpha| .$$

En el caso $\alpha = \frac{1}{2}$, T no es acotado por abajo pero es inyectivo ya que su símbolo p tiene sólo un cero en $[0,1]$. Esto dice que S es inyectivo y luego $X \equiv \{x_k\}_k$ es un *conjunto de unicidad*. Esto quiere decir que los splines quedan determinados por sus valores en X aunque no hay un operador continuo de reconstrucción.

En resumen,

- Si $\alpha \in [0,1) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, el conjunto $\{k-\alpha\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es un conjunto de sampling con cota inferior exactamente $|1-2\alpha|$.
- El conjunto $\left\{k-\frac{1}{2}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$ no es un conjunto de sampling pero sí un conjunto de unicidad.

Finalmente, calculemos exactamente el radio de perturbación de $\mathbb{Z}$ como conjunto de sampling de S y comparemoslo con la cota que da el teorema 4.3.1.

Según vimos, la perturbación regular $Z+\frac{1}{2}$ no es un conjunto de sampling, de modo que $\rho(Z) \leq \frac{1}{2}$. Veamos que es exactamente $\frac{1}{2}$. Para eso sea $X \equiv \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ un conjunto de puntos tal que $L := sup_{k\in\mathbb{Z}} |x_k - k| < \frac{1}{2}$ y veamos que es un conjunto de sampling para S.

Seguiremos los cálculos del teorema 4.3.1 pero haciendo estimaciones más finas dado el conocimiento explícito del generador φ.

Llamemos $S \equiv Id$ al operador de sampling de Z y S' al operador de sampling de X.

Para $j \in \mathbb{Z}$ arbitrario, como $sop(\varphi) \subseteq [-1,1]$ y $|x_j - j| \leq \frac{1}{2}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi(x_j-k) - \varphi(j-k)| = |\varphi(x_j-j+1)| + |\varphi(x_j-j)-1| + |\varphi(x_j-j-1)| .$$

Ahora acotamos,

$$|\varphi(x_j-j)-1| = |1-|x_j-j|-1| = |x_j-j| \leq L.$$

Si $x_j \geq j$,

$$\begin{aligned} 1 \leq x_j - j + 1 \leq L + 1 \\ -1 \leq x_j - j - 1 \leq L - 1 < 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\varphi(x_j - j + 1) = 0, \\ &\varphi(x_j - j - 1) = |1 - |x_j - j - 1|| = |j - x_j| \leq L. \end{aligned}$$

Si $x_j < j$, una cuenta análoga muestra que

$$\begin{aligned} &\varphi(x_j - j - 1) = 0, \\ &\varphi(x_j - j + 1) \leq L. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $j \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \leq 2L$$

Del mismo modo, para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \leq 2L$$

Ahora para $c \in l^2(\mathbb{Z})$ estimamos,

$$\begin{aligned} \|(S - S')(c)\|_2^2 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \left(\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k) \right) \right|^2 \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \left(|\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)|^{\frac{1}{2}} |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)|^{\frac{1}{2}} \right) \right)^2 \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \right) \\ &\leq 2L \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \\ &= 2L \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\varphi(x_j - k) - \varphi(j - k)| \\ &\leq (2L)^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = (2L)^2 \|c\|_2^2 . \end{aligned}$$

Luego, $\|S - S'\|_2 \leq 2L < 1$. Como $S \equiv Id$, esto dice que S' es inversible.

Según el teorema 4.3.1, $\rho(\mathbb{Z}) \geq L$, donde

$$
\begin{aligned}
L &:= sup \left\{ \delta > 0 : \delta \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(\mathbb{Z})} \rfloor + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\lfloor \frac{1+2\delta}{sep\,(\mathbb{Z})} \rfloor + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi'\|_{W(L^1,L^\infty)} \leq 1 \right\} \\
&= sup \left\{ \delta > 0 : 2\delta \left(\lfloor 1+2\delta \rfloor + 1 \right) \leq 1 \right\} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Bibliografía

[1] A. Aldroubi y K. Gröchenig, *Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces*, SIAM review, 2001, vol. 43, no. 4, pg 585-620.

[2] A. Aldroubi y K. Gröchenig, *Beurling-Landau-Type Theorems for Non-Uniform Sampling in Shift Invariant Spline Spaces*, Journal of Fourier Analysis and Aplications, Volume 6, Isuue 1, 2000.

[3] A. Beurling, *The collected works of Arne Beurling*, Vol. 1 *Complex Analysis* y Vol. 2 *Harmonic Analysis*, Birkhäuser, Boston, L. Carleson, P. Malliavin, J. Neuberger y J. Wermer, editores, 1989.

[4] M. Bownik, *The Structure of Shift Invariant Subspaces of* $L^2(R^n)$, Journal of Functional Analysis 176, 2000.

[5] C. Heil, *A Basis theory primer*, manuscrito, 1998.
ftp://ftp.math.gatech.edu/pub/users/heil/bases.ps.gz

[6] C. Heil, *An introduction to Weighted Wiener Amalgams*, Wavelets and their Applications, Allied Publishers, Nueva Delhi, 2003, pg 183-216.

[7] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, segunda edición, Springer-Verlag, Nueva York, 1990.

[8] L. C. Evans y R. F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, Boca Raton, 1992.

[9] H.G. Feichtinger, *Banach convolution algebras of Wiener type*, proc. Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, Functions, Series, Operators, Vol I, II, Budapest, 1980, pg. 509-524.

[10] H. G. Feichtinger y K. Gröcheing, *Theory and practice of irregular sampling*, Wavelets: Mathematics and Applications, 1993.

[11] M. I. Kadek, *The exact value of the Paley-Wiener constant*, 1964, Soviet Math., Dokl, 59, pg. 559-561.

[12] H. Landau, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, 1967, Acta Math. 117 pg. 37-52.

[13] N. Levinson, *On Non-Harmonic Fourier Series*, Annals of Mathematics, 2nd Ser., Vol. 37, No. 4 (1936) , pg. 919-936

[14] R. Paley y N. Wiener, *Notes on the theory and application of Fourier transforms I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933, no. 2, pg. 348-355.

[15] R. Paley y N. Wiener, *Notes on the theory and application of Fourier transforms III, IV, V, VI, VII*, Trans. Amer. Math. Soc. 35, 1933, no. 4, pg. 761-791.

[16] R. Paley y N. Wiener, *Fourier transform in the complex domain*, Trans. Amer. Math. Soc, 19, 1934.

[17] C. de Boor, R. A. DeVore y A. Ron, *The structure of finitely generated shift invariant spaces in* $L^2(\mathbb{R}^d)$, Journal of Functional Analysis 119, 1994, pg 37-78.

[18] R. Young, *An introduction to nonharmonic Fourier series*, Academic Press, Nueva York, 1980.