UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Incondicionalidad en espacios de polinomios

Daniel E. Galicer

danielgalicer@hotmail.com

Director: Dr. Daniel G. Carando

Marzo de 2008

Expreso mis agradecimientos...

A mi mamá, por toda la ayuda que me dio a lo largo de estos años, por nuestras charlas, por comprenderme, por la linda relación que tenemos, por sus consejos.

A mi papá, por alegrarse con cada logro mío, por alentarme, por bancarme. A él le debo este gusto por las matemáticas.

A Jesi, a quien amo profundamente. Porque estando con ella todo es más fácil y más lindo. Por quererme tal como soy, por escucharme, por su compañía.

A mis abuelos, por su cariño, sus mimos, por el interés que ponen en cada desafío que me propongo.

A mi director, Dani Carando, por hacer de lo difícil algo sencillo, por confiar en mí, por estar siempre con una sonrisa, por aguantarme por horas consultando en su oficina (y en el correo!). Sin su guía, sus consejos y experiencia, este trabajo no hubiera sido posible. Realmente fue un placer trabajar con él.

A mis compañeros de facultad, por acompañarme durante toda la carrera, por las horas de estudio, las risas, los almuerzos. En especial a Mercedes, Ana, Caro, Sergio, Matías, Martín y Pablo. De no ser por ellos probablemente hubiese tardado el doble en recibirme.

A mi grupo de amigos de ORT: Javo, Muppet, Marian, Diego y Beru. Por ser incondicionales, por bancarme cada vez que me borré para estudiar y porque sé que están esperando desde hace rato para matarme a huevazos.

A la gente del seminario de análisis funcional, por recibirme tan amablemente, tanto en la facultad como fuera de ella. En particular a Silvia por la gran mano que me dió y por enseñarme, junto con Richard, lo que es un polinomio.

A la gente que trabajó conmigo en docencia tanto en el CBC como en Exactas. En especial a Flora, Elisita, Caro, Mercedes, Martín, Daniel y Santiago. De ellos aprendí muchísimas cosas que me hicieron crecer profesionalmente.

A Inés, por haberme enseñado inglés con tanta dedicación y paciencia todos estos años.

A todos los docentes que tuve a lo largo de mi vida, cada uno de ellos algo me dejó. Especialmente a Carlos P., Jacobo S., Darío F. y Marta C. quienes estimularon mi pasión por las ciencias exactas.

Introducción

El estudio de polinomios m-homogéneos sobre un espacio de Banach E data de principios de la década del treinta. De hecho, S. Banach intentó escribir un segundo volumen de su famoso libro [6] dedicado a la teoría no lineal teniendo como eje central a los polinomios sobre espacios de dimensión infinita. S. Dineen, en su libro [14], comenta que el desarrollo de la teoría de polinomios sobre espacio de Banach puede ser dividido en dos períodos. El primer período comienza a mediados de los años treinta, donde se destacan algunos conceptos y resultados interesantes sobre polinomios en infinitas variables en artículos de Banach, Bohnenblust, Hille, Littlewood, Orlicz, entre otros. En ese entonces, la investigación en espacios de polinomios estaba motivada por el estudio de funciones holomorfas y diferenciales sobre espacios de dimensión infinita, análisis de Fourier y series de Dirichlet. El segundo período comienza en los años ochenta. Etapa que, si bien no marcó un hito, se caracterizó por un cambio de actitud en la investigación al considerar a los polinomios como principal objeto de estudio. Mucha teoría ha sido desarrollada desde ese entonces. Nosotros estaremos particularmente interesados en el estudio de incondicionalidad en espacios de polinomios.

Para un polinomio m-homogéneo P sobre un espacio de Banach con base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ y funcionales coordenadas $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$, la siguiente expansión

$$P(x) = \check{P}(x, \ldots, x) = \sum_{j_1} \cdots \sum_{j_m} \check{P}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_m}) e'_{j_1}(x) \ldots e'_{j_m}(x),$$

converge puntualmente (donde $\check{P}$ es la forma m-lineal asociada a P). Luego, una pregunta natural es si los monomios asociados a la base forman una base de Schauder para el espacio de polinomios (permitiendo así aproximar polinomios e incluso funciones enteras por combinaciones de funcionales coordenadas). V. Dimant y S. Dineen en [13] demostraron que, para E es un espacio de Banach con base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ achicante, los monomios de grado m (con el orden cuadrático) forman una base de $\mathcal{P}_w(^m E)$. De hecho, dieron descomposiciones de Schauder naturales para $\mathcal{P}_w(^m E)$. Es importante mencionar en 1980 R. Ryan probó un resultado más general que el de Dimant y Dineen. Sin embargo, la demostración contenía un error que fue recientemente salvado por Ryan mismo y B. Grecu [18].

Un interrogante más interesante (y más complicado) es determinar si el espacio de polinomios admite alguna base incondicional. La siguiente pregunta se conoce como el *problema de Dineen*: Para E un espacio de Banach de dimensión infinita con base incondicional, ¿puede el espacio de polinomios m-homogéneos $\mathcal{P}(^mE)$ tener base incondicional? Otra pregunta relacionada es la siguiente: asumiendo que el dual E' del espacio de Banach E tiene base incondicional $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$, ¿formarán los monomios de grado m respecto a (e'_j) una base incondicional de $\mathcal{P}(^mE)$? ¿Formarán una base incondicional de los polinomios aproximables? Dineen conjeturó en [14] que esta situación *raramente ocurra o incluso nunca ocurra*.

Centrando sus estudios en teoría de operadores p-sumantes, Y. Gordon y D. R. Lewis en [17] mostraron que, en general, los espacios de operadores entre espacios de dimensión infinita carecen de cierto tipo de estructura incondicional razonable, particularmente $\mathcal{L}(\ell_2)$ (el espacio de todos los operadores sobre el espacio de Hilbert ℓ_2). La clave fue estimar la constante de incondicionalidad (o mejor dicho la constante de incondicionalidad local) a partir de lo que hoy se conoce como la constante de Gordon-Lewis. Estas ideas fueron usadas por G. Pisier en [26] y C. Schütt en [30] para probar que, para dos espacios de Banach E y F con bases incondicionales (e'_j) y (f'_j) respectivamente y cada norma tensorial α en el producto tensorial $E \otimes F$, $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ resulta base incondicional de $E\widetilde{\otimes}_{\alpha}F$ si y solamente si $E\widetilde{\otimes}_{\alpha}F$ tiene base incondicional. Más aún, probaron que esto último es equivalente a que $E\widetilde{\otimes}_{\alpha}F$ tenga constante de Gordon-Lewis finita.

¿Pero qué tiene que ver todo esto con los espacios de polinomios y el problema de Dineen? Ryan, en su tesis doctoral [27], introdujo los productos tensoriales simétricos para el estudio de polinomios sobre espacios de Banach. Gracias a esta perspectiva, hoy en día es natural identificar ciertos espacios de polinomios con el producto tensorial simétrico sobre algún espacio (por ejemplo el espacio $\mathcal{P}_{appr}(^mE)$ de todos los polinomios aproximables puede ser identificado isométricamente con $\widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E'$). Por ende, estudiar incondicionalidad en productos tensoriales simétricos permite entender lo que ocurre para el caso polinomial.

En el 2001 A. Defant, J.C. Díaz, D. García y M. Maestre, basándose en los trabajos de Pisier y Schütt anteriormente mencionados, mostraron que, para todo espacio de Banach E con base incondicional y toda m-norma tensorial simétrica β, $\widetilde{\otimes}_{\beta}^{m,s}E$ tiene base incondicional si y sólo si $\widetilde{\otimes}_{\beta}^{m,s}E$ es un espacio de Gordon-Lewis. Más aún, probaron que la constante de incondicionalidad asociada a la base monomial está dominada por la constante de Gordon-Lewis de $\widetilde{\otimes}_{\beta}^{m,s}E$. Esto permitió demostrar que, para E' (el espacio dual de E) con base incondicional $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$, el espacio $\mathcal{P}_w(^mE)$ de los polinomios débilmente continuos sobre acotados tiene base incondicional si y solamente si los monomios de grado m respecto a $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$ forman una base incondicional de $\mathcal{P}_w(^mE)$. De esta manera, la existencia de bases incondicionales se reformula como la incondicionalidad de la base monomial.

Un resultado clásico de la década del setenta de L. Tzafriri asegura que, si E o E' tiene base incondicional, para algún $p \in \{1, 2, \infty\}$ E contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada. Por lo tanto, para m fijo, resulta natural estudiar el crecimiento asintótico en función de n de $gl(\mathcal{P}(^m\ell_p^n))$ (dado que, en tal caso, el espacio $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$ para todo n).

Usando algunos resultados en distancias de Banach-Mazur junto con técnicas probabilísticas, Defant, Díaz, García y Maestre dieron estimaciones asintóticas para la constante de incondicionalidad de $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ (o equivalentemente para la constante de Gordon-Lewis de $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$). Estos resultados permitieron a A. Defant y N. Kalton [10], con la ayuda de algunos avances recientes en bases greedy, probar en el año 2005 que, para E un espacio de Banach con base incondicional, el espacio $\mathcal{P}(^mE)$ de los polinomios m-homogéneos sobre E tiene base incondicional si y sólo si E es de dimensión finita (dando así respuesta al problema de Dineen).

En esta tesis pretendemos desarrollar los trabajos [13], [9] y [10] como eje central, exponiendo en detalle los resultados anteriormente mencionados.

El primer capítulo constará de todo el material necesario para entender los contenidos subsiguientes. Repasaremos algunos de los conceptos que se detallan a continuación: operadores p-sumantes, operadores p-factorizables, bases incondicionales, estructura incondicional local, Banach lattice's, propiedad de Gordon-Lewis y desigualdad de Gordon-Lewis, polinomios en espacios de Banach, productos tensoriales y productos tensoriales simétricos, tipo, cotipo, etc.

El segundo capítulo tratará las distancias de Banach-Mazur. Daremos algunos resultados clásicos y mostraremos las estimaciones dadas por V. Gurarii, M. Kadec y V. Macaev para $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$.

En el tercer capítulo exhibiremos descomposiciones de Schauder para $\mathcal{P}_w(^mE)$, definiremos el orden cuadrático para los monomios y daremos la demostración del resultado de Dimant y Dineen.

En el cuarto y último capítulo abordaremos el problema de incondicionalidad en espacios de polinomios, mostrando finalmente cómo se resolvió la conjetura de Dineen.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Aquí daremos los contenidos necesarios para entender los próximos capítulos. E, F y G serán siempre espacios de Banach sobre el cuerpo escalar $\mathbb{K}$ (real o complejo). A menos que se aclare lo contrario, será indistinto interpretar a los espacios como $\mathbb{C}$-espacios vectoriales que como $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

1.1. Algunos ideales de operadores

Dos ideales de Banach de operadores serán importantes para nosotros: Los operadores p-sumantes y los operadores p-factorizables. Si bien la teoría completa no será desarrollada en esta tesis, daremos algunas definiciones y resultados que nos serán de utilidad. Se recomienda ver [11] para un mayor entendimiento en el tema. Recordemos primero...

Un *ideal de operadores* $\mathcal{A}$ atribuye a cada par de espacios de Banach (E, F) un subespacio lineal $\mathcal{A}(E, F)$ de $\mathcal{L}(E, F)$ tal que las siguientes condiciones se satisfacen:
(1) $e' \otimes f \in \mathcal{A}(E, F)$ para todo $e' \in E'$, $f \in F$ (donde $e' \otimes f$ denota el operador $e \mapsto e'(e)f$)
(2) Si E_0 y F_0 son espacios de Banach, entonces $uvw \in \mathcal{A}(E_0, F_0)$ siempre que $u \in \mathcal{L}(F, F_0), v \in \mathcal{A}(E, F), w \in \mathcal{L}(E_0, E)$.

Diremos que $[A, \rho]$ es un *ideal de Banach de operadores* (o simplemente *ideal de Banach*) si para cada par (E, F), $\mathcal{A}(E, F)$ es equipado de una norma ρ verificando:
(a) $\rho(e' \otimes f) = \|e'\|\|f\|$ para todo $e' \in E'$ y $f \in F'$,
(b) $\rho(uvw) \leq \|u\|\rho(v)\|w\|$ para $u \in \mathcal{L}(F, F_0), v \in \mathcal{A}(E, F)$ y $w \in \mathcal{L}(E_0, E)$, con E_0 y F_0 son espacios de Banach.
(c) $(\mathcal{A}(E, F), \rho)$ es un espacio de Banach.

Se desprende usando las definiciones que para todo par de espacios de Banach (E, F) los operadores de rango finito $\mathcal{F}(E, F)$ siempre están incluidos en $\mathcal{A}(E, F)$ y que $\|u\| \leq \rho(u)$ para todo $u \in \mathcal{A}(E, F)$.

Notemos $\mathcal{F}_E$ al conjunto de todos los subespacios de dimensión finita de E y $\mathcal{C}_E$ al conjunto de todos los subespacios de codimensión finita. Diremos que un ideal de Banach $[\mathcal{A}, \rho]$ es maximal si para todo par de espacios de Banach E y F y todo operador $u \in \mathcal{A}(E, F)$ tenemos:

$$\rho(u) = \sup\{\rho(q_Y u \imath_X) \ : \ X \in \mathcal{F}_E, \ Y \in \mathcal{C}_Y\},$$

donde $\imath_X : X \to E$ es la inclusión canónica y $q_Z : F \to F/Z$ es la proyección al cociente.

1.1.1. Operadores p-sumantes y p-factorizables

Un operador entre dos espacios de Banach $T : E \to F$ se dice *p-sumante* ($1 \leq p < \infty$) si existe una constante $C \geq 0$ tal que para todo número natural N y vectores $e_1, ...e_N$ en E se tiene:

$$(\sum_{j=1}^{N} \|Te_j\|^p)^{1/p} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} (\sum_{j=1}^{N} |\varphi(e_j)|^p)^{1/p}. \tag{1.1}$$

La menor constante C para la cual se verifica la desigualdad se nota $\pi_p(T)$. Algunas cuentas básicas muestran que para todo par de espacios de Banach E y F el conjunto $\Pi_p(E, F)$ de operadores p-sumantes (de E en F) verifica las condiciones anteriores. Denotaremos $[\Pi_p, \pi_p]$ al ideal de Banach dado por los operadores p-sumantes.

Las siguientes definiciones nos ayudarán a interpretar de otra manera a los operadores p-sumantes. Sea E un espacio de Banach, una sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ en E se dice *fuertemente p-sumante* si la correspondiente sucesión escalar $(\|e_j\|)_{j=1}^{\infty}$ está en ℓ_p. Dentaremos $\ell_p^{strong}(E)$ al conjunto de todas las sucesiones en E fuertemente p-sumantes. Es claro que este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones naturales. Más aún, es un espacio de Banach con la norma:

$$\|(e_j)\|_p^{strong} := (\sum_{j=1}^{\infty} \|e_j\|^p)^{1/p}.$$

Análogamente se dice que una sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ en E es *débilmente p-sumante* si para toda funcional $\varphi \in E'$, la sucesión escalar $(\varphi(e_j))$ está en ℓ_p. Dentaremos con $\ell_p^{weak}(E)$ al conjunto de todas las sucesiones en E débilmente p-sumantes. Junto con la norma

$$\|(e_j)\|_p^{weak} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} (\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^p)^{1/p},$$

y las operaciones naturales $\ell_p^{weak}(E)$ resulta un espacio de Banach.

La siguiente proposición caracteriza a los operadores p-sumantes:

Proposición 1.1.1. *Sean E y F espacios de Banach. Un operador $T : E \to F$ es p-sumante si y sólo si para toda sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^{weak}(E)$ se tiene que la sucesión $(Te_j)_{j=1}^{\infty}$ pertenece a $\ell_p^{strong}(F)$. En tal caso, $\|\widehat{T} : \ell_p^{weak}(E) \to \ell_p^{strong}(F)\| = \pi_p(T)$, donde $\widehat{T}$ es el operador $(e_j)_{j=1}^{\infty} \mapsto (Te_j)_{j=1}^{\infty}$.*

El siguiente lema dará ejemplos concretos de operadores sumantes. Será de importancia luego.

Lema 1.1.2. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida y $1 \leq p < \infty$. Para cada $g \in L_p(\mu)$ el operador de multiplicación*

$$\begin{aligned} M_g : L_\infty(\mu) &\rightarrow L_p(\mu) \\ f &\mapsto f\,g \end{aligned}$$

es p-sumante con $\pi_p(M_g) = \|g\|_p$.

Demostración. Fijemos $f_1, \ldots, f_n \in L_\infty(\mu)$. Sea $u : \ell_{p'}^n \rightarrow L_\infty(\mu)$ el operador dado por $e_j \mapsto f_j$. Notemos que

$$\sup_{\substack{\varphi \in L_\infty(\mu)' \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\sum_{j=1}^n |\varphi(f_j)|^p)^{1/p} = \|u'\| = \|u\| = \sup_{a \in B_{\ell_{p'}^n}} \|\sum_{j=1}^n a_j f_j\|_\infty.$$

Luego, para todo conjunto $A \in \Sigma$ de medida nula, se tiene

$$\sup_{\substack{\varphi \in L_\infty(\mu)' \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\sum_{j=1}^n |\varphi(f_j)|^p)^{1/p} \leq \sup_{\substack{a \in B_{\ell_{p'}^n} \\ \omega \in \Omega \setminus A}} \|\sum_{j=1}^n a_j f_j(\omega)\|_\infty.$$

Así,

$$\sup_{\substack{\varphi \in L_\infty(\mu)' \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\sum_{j=1}^n |\varphi(f_j)|^p)^{1/p} \leq \|(\sum_{j=1}^n |f_j(\omega)|^p)^{1/p}\|_\infty.$$

Probemos que efectivamente vale la igualdad: observemos que para cada $a = (a_1, \ldots, a_n) \in B_{\ell_{p'}^n}$ tenemos

$$|\sum_{j=1}^n a_j f_j(\omega)| \leq \|\sum_{j=1}^n f_j\|_\infty$$

salvo para ω en un conjunto de medida nula. Tomemos D un conjunto numerable denso en $B_{\ell_{p'}^n}$. Usando lo observado se ve fácilmente que existe $A \in \Sigma$ de medida nula con la propiedad que la desigualdad de arriba se satisface para todo $a \in D$ y todo ω fuera de A. Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \|(\sum_{j=1}^n |f_j|^p)^{1/p}\|_\infty &\leq \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} (\sum_{j=1}^n |f_j(\omega)|^p)^{1/p} = \sup_{a \in D} \sup_{\omega \in \Omega \setminus A} |\sum_{j=1}^n a_j f_j(\omega)| \\ &\leq \sup_{a \in D} \|\sum_{j=1}^n a_j f_j\|_\infty = \|u\| = \|u'\| = \sup_{\substack{\varphi \in L_\infty(\mu)' \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\sum_{j=1}^n |\varphi(f_j)|^p)^{1/p}, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

Mostremos ahora que M_g es p-sumante. En efecto,

$$\begin{aligned} (\sum_{j=1}^n \|M_g f_j\|_p^p)^{1/p} &= (\sum_{j=1}^n \int |f_j g|^p \, d\mu)^{1/p} = (\int_\Omega |g(\omega)|^p (\sum_{j=1}^n |f_j(\omega)|^p) \, d\mu(\omega))^{1/p} \\ &\leq \int |g(\omega)|^p \, d\mu(\omega))^{1/p} \|(\sum_{j=1}^n |f_j|^p)^{1/p}\|_\infty = \|g\|_p \sup_{\substack{\varphi \in L_\infty(\mu)' \\ \|\varphi\| \leq 1}} (\sum_{j=1}^n |\varphi(f_j)|^p)^{1/p}. \end{aligned}$$

Por ende, el operador de multiplicación M_g es p-sumante con $\pi_p(M_g) \leq \|g\|_p$. Para obtener la igualdad de las normas, notemos que $\pi_p(M_g) \geq \|M_g\| \geq \|M_g 1\|_p = \|g\|_p$. □

El siguiente corolario se desprende del lema anterior tomando $g = 1$.

Corolario 1.1.3. *Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida finita, y $1 \leq p < \infty$. La inclusión formal*

$$\imath_p : L_\infty(\mu) \to L_p(\mu)$$

es p-sumante con $\pi_p(\imath_p) = \mu(\Omega)^{1/p}$.

Otra clase de operadores que necesitaremos para estudiar incondicionalidad en espacios de polinomios es la clase de los operadores p-factorizables:

Sea $1 \leq p \leq \infty$. Un operador $T : E \to F$ se dice p-factorizable si existe un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y operadores $a : L_p(\mu) \to F''$, $b : E \to L_p(\mu)$ tal que si J_F es la inclusión canónica de F en su bidual, se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "J_F T"] \arrow[dr, "b"'] & & F'' \\ & L_p(\mu). \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

En tal caso, se define la norma

$$\gamma_p(T) := \text{ínf} \|a\|\|b\|,$$

donde el ínfimo se toma sobre tadas las factorizaciones posibles de la forma que hemos indicado. La familia de los operadores p-factorizables de E en F se denotará

$$\Gamma_p(E, F)$$

Se puede ver (con mucho trabajo) que para $1 \leq p \leq \infty$, $[\Gamma_p, \gamma_p]$ es un ideal de Banach maximal.

La siguiente proposición nos será de utilidad:

Proposición 1.1.4. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y p' tal que $1/p + 1/p' = 1$. Las siguientes afirmaciones sobre el operador $T : E \to F$ son equivalentes:*

(1) $T \in \Gamma_p(E, F)$

(2) $T' \in \Gamma_{p'}(F', E')$

(3) $T'' \in \Gamma_p(E'', F'')$

(4) $J_F T \in \Gamma_p(E, F'')$

En tal caso, se tiene la igualdad $\gamma_p(T) = \gamma_{p'}(T') = \gamma_p(T'') = \gamma_p(J_F T)$.

Demostración. (1)⇒(2): Queremos ver que existe una factorización de la forma

$$\begin{array}{ccc} F' & \stackrel{J_{F'}T'}{\longrightarrow} & E''' \\ & \tilde{b} \searrow \nearrow \tilde{a} & \\ & L_{p'}(\nu). & \end{array}$$

Para esto consideremos una p-factorización de T

$$\begin{array}{ccc} E & \stackrel{J_F T}{\longrightarrow} & F'' \\ & b \searrow \nearrow a & \\ & L_p(\mu). & \end{array}$$

Por ende, si trasponemos, obtenemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F''' & \stackrel{T' J_F{}'}{\longrightarrow} & E' \\ & a' \searrow \nearrow b' & \\ & L_p(\mu)'. & \end{array}$$

Luego, si $\widetilde{b}$ y $\widetilde{a}$ son los operadores definidos como $\widetilde{b} = a' J_{F'}$ y $\widetilde{a} = J_{E'} b'$ se tiene que $\widetilde{a}\,\widetilde{b} = J_{E'} b' a' J_{F'} = J_{E'} T' \underbrace{J_F' J_{F'}}_{Id_{F'}}$, dándonos la factorización buscada. Además

$$\gamma_{p'}(T') \leq \|\widetilde{b} = a' J_{F'}\| \|\widetilde{a} = J_{E'} b'\| \leq \|a\| \|b\|.$$

Luego, $\gamma_{p'}(T') \leq \gamma_p(T)$.

(2)⇒(3): Repitiendo el argumento anterior para $T' \in \Gamma_{p'}(F', E')$ obtenemos $T'' \in \Gamma_p(F'', E'')$ y $\gamma_p(T'') \leq \gamma_p(T)$.

(3)⇒(4): Observemos que $J_F T = T'' J_E$. Si $T'' \in \Gamma_p(E'', F'')$, como $[\Gamma_p, \gamma_p]$ ideal de Banach resulta inmediato que $J_F T \in \Gamma_p(E, F'')$ y $\gamma_p(J_F T) \leq \gamma_p(T'') \|J_E\| \leq \gamma_p(T'')$

(4)⇒(1): Como F'' es un dual, es 1-complementado en su bidual. Consideremos $P : F^{iv} \to F''$ la proyección conónica. Se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} E & \stackrel{J_{F''} J_F T}{\longrightarrow} & F^{iv} \stackrel{P}{\to} F'' \\ & \widetilde{b} \searrow \nearrow \widetilde{a} & \\ & L_p(\mu). & \end{array}$$

Tomando $b = \widetilde{b}$ y $a = P\widetilde{a}$, obtenemos la factorización:

$$\begin{array}{ccc} E & \stackrel{J_F T}{\longrightarrow} & F'' \\ & b \searrow \nearrow a & \\ & L_p(\mu). & \end{array}$$

Notemos que

$$\gamma_p(T) \leq \|a\| \|b\| \leq \|\widetilde{b}\| \|P\widetilde{a}\| \leq \|\widetilde{b}\| \|P\| \|\widetilde{a}\| \leq \|\widetilde{b}\| \|\widetilde{a}\|.$$

Luego, tomando ínfimo, tenemos que $\gamma_p(T) \leq \gamma_p(J_F T)$.

Faltaría entonces ver la desigualdad $\gamma_p(J_F T) \leq \gamma_p(T)$. Pero como $\gamma_p(J_F T) \leq \|J_F\| \gamma_p(T) \leq \gamma_p(T)$, se tiene la igualdad para las normas que queríamos probar. □

1.2. Bases incondicionales, Banach lattice's, estructura incondicional local y propiedad de Gordon-Lewis

1.2.1. Bases incondicionales

Dado un espacio de Banach E, diremos que la sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una *base de Schauder* de E (o simplemente una base de E) si todo $x \in E$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ con $a_j \in \mathbb{K}$. Es decir, la sucesión de sumas parciales $(\sum_{j=1}^{N} a_j e_j)_N$ converge a x en la topología de la norma. Diremos que la sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una *sucesión básica* si es base de Schauder de $\overline{\text{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}}$. La siguiente proposición caracteriza a las sucesiones básicas:

Proposición 1.2.1. *La sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica si y sólo si existe una constante A tal que para toda elección de escalares $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, y $M \leq N$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{M} a_j e_j \Big\| \leq A \Big\| \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \Big\|. \tag{1.2}$$

La menor de las constantes que satisface (1.2) se denomina la constante básica asociada a $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ (la notaremos $K((e_j)_{j=1}^{\infty})$). Diremos que la sucesión básica es *monótona* si $K((e_j)_{j=1}^{\infty}) = 1$.

Un resultado clásico es el siguiente: Si $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es base de $(E, \| \ \|)$ siempre existe una norma $\| \ \|'$ equivalente a $\| \ \|$ tal que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es monótona en $(E, \| \ \|')$.

La base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ se dice *incondicional* si cada serie convergente $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ converge incondicionalmente. Es decir, para toda σ permutación la serie $\sum_{j=1}^{\infty} a_{\sigma(j)} e_{\sigma(j)}$ converge.

El siguiente teorema caracteriza a las bases incondicionales.

Teorema 1.2.2. *Sea E un espacio de Banach con base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. La base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es incondicional si y sólo si existe una constante $K > 0$ tal que para todo N natural, $a_1, a_2, ..., a_N$; $b_1, b_2, ..., b_N$ con $|a_j| \leq |b_j|$ se tiene*

$$\| \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \| \leq K \| \sum_{j=1}^{N} b_j e_j \|. \tag{1.3}$$

Se define la constante de incondicionalidad $\chi((e_j)_{j=1}^{\infty}; E)$ para la base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ en E como el ínfimo sobre las constantes K que verifican (1.3). Entendiendo $\chi((e_j)_{j=1}^{\infty}; E) = \infty$ si la base no es incondicional. De igual manera se define la constante de incondicionalidad para una sucesión básica $(e_j)_{j=1}^{\infty}$. Escribiremos $\chi((e_j)_{j=1}^{\infty})$ si no hay necesidad de aclarar dónde estamos considerando la sucesión $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

La constante de incondicionalidad del espacio de Banach E está dada por

$$\chi(E) = \text{ínf}\{\chi((e_j)_{j=1}^{\infty}) \ : \ (e_j)_{j=1}^{\infty} \text{ es base incondicional de } E\}$$

Análogamente diremos que la constante de incondicionalidad es ∞ si E no posee base incondicional. Diremos también que la base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es K-incondicional si $K \geq \chi((e_j)_{j=1}^{\infty})$. Es conocido que si $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una base incondicional en $(E, \| \, \|)$ siempre existe una norma $\| \, \|'$ equivalente a $\| \, \|$ tal que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es 1-incondicional en $(E, \| \, \|')$.

Observación 1.2.3. *Sean $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ una sucesión básica en E y $A_1 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq A_{n+1} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{N}$ sucesión de subconjuntos tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\chi((e_j)_{j=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \chi(\{e_j : j \in A_n\}) = \lim_{n \to \infty} \chi(\{e_j : j \in A_n\}) \tag{1.4}$$

Demostración. Es claro que $\chi(\{e_j : j \in A_n\}) \leq \chi(\{e_j : j \in A_{n+1}\}) \leq \chi((e_j)_{j=1}^{\infty})$ Luego, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \chi(\{e_j : j \in A_n\}) = \text{lím}_{n \to \infty} \chi((\{e_j : j \in A_n\}) \leq \chi(e_j)_{j=1}^{\infty})$. Para la otra desigualdad, consideremos N natural y $a_1, a_2, ..., a_N$; $b_1, b_2, ..., b_N$ con $|a_j| \leq |b_j|$. Como existe un número k tal que el conjunto de vectores $e_1, \ldots, e_N$ pertenece a A_k tenemos que

$$\begin{aligned} \| \sum_{j=1}^{N} a_j e_j \| &\leq \chi(\{e_j : j \in A_k\}) \| \sum_{j=1}^{N} b_j e_j \| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \chi(\{e_j : j \in A_n\}) \| \sum_{j=1}^{N} b_j e_j \|. \end{aligned}$$

Por ende, $\chi((e_j)_{j=1}^{\infty}) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \chi(\{e_j : j \in A_n\})$. □

La siguiente proposición nos será de utilidad:

Proposición 1.2.4. *Sea (e_j) una base K-incondicional de E. Entonces, para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, el subespacio $F_A = \overline{span\{e_j : j \in A\}}$ es complementado. Más aún, $\{e_j : j \in A\}$ es base incondicional de F_A y la proyección canónica P_A en F_A verifica $\|P_A\| \leq K$ (es decir F_A es K-complementado).*

1.2.2. Banach Lattice's

El espacio de funciones está ordenado de manera natural, donde el orden está vinculado con la norma. Esta estrecha relación entre el orden y la norma se repite en diferentes tipos de espacios. Esto induce la definición de *Banach Lattice* (o reticulado de Banach, aunque por costumbre usaremos la terminología anglosajona). Para hacer más amena la lectura daremos la definición para el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Definición 1.2.5. *Un espacio de Banach E junto con un orden parcial $\leq$ se dice un Banach lattice (o que tiene estructura de lattice) si se verifican las siguientes condiciones:*
(1) $x \leq y$ implica $x + z \leq y + z$, para todo $x, y, z \in E$;

(2) $ax \geq 0$, para cada $x \geq 0$ en E y todo número no negativo a;

(3) para todo $x, y \in E$ existe una menor cota superior $x \vee y$ y una mayor cota inferior $x \wedge y$;

(4) $\|x\| \leq \|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$, donde el valor absoluto $|x|$ de un vector $x \in E$ se define como $|x| = x \vee (-x)$.

Es importante remarcar que (3) se puede cambiar pidiendo solamente la existencia de una menor cota superior (o de una mayor cota inferior) gracias a la identidad

$$x \wedge y = x + y - x \vee y.$$

Notemos que todo espacio con base 1-incondicional $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es siempre un Banach lattice donde el orden parcial está definido de la siguiente manera: diremos que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j \geq 0$ si y sólo si $a_j \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. A este orden se lo conoce como el orden inducido por la base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$.

Para un espacio de Banach E con base incondicional $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ (no necesariamente 1-incondicional) con el orden definido arriba, siempre se verifican las condiciones (1), (2), (3) de 1.2.5, pero (4) tiene que ser reemplazado por

(4') existe una constante M tal que $\|x\| \leq M\|y\|$ siempre que $|x| \leq |y|$.

Tal como pasaba con las bases incondicionales, todo espacio de Banach parcialmente ordenado satisfaciendo (1), (2), (3) y (4') puede ser renormado para que sea un Banach lattice con la norma:

$$\|x\|' := \sup\{\|y\| \ : \ |y| \leq |x|\}.$$

Por lo tanto, aquellos espacios isomorfos a un Banach lattice tiene una estructura más general que los espacios con base incondicional. Hay importantes ejemplos de Banach lattices que no vienen inducidos por ninguna base incondicional. Un resultado conocido es que ni $L_1(0,1)$ ni tampoco $\mathcal{C}(0,1)$ tienen base incondicional, sin embargo con el orden puntal ($f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in (0,1)$) tienen estructura de lattice. De hecho, con el orden puntual, todo espacio $L_p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\mathcal{C}(K)$ (el espacio de las funciones continuas sobre un compacto Hausdorff) es un Banach lattice. Si bien los espacios $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ tienen base incondicional (la base de Haar), la estructura de lattice dada por el orden puntual difiere radicalmente de la estructura dada por la base de Haar. Mucha teoría concerniente a Banach lattice's ha sido desarrollada en los últimos 50 años, se recomienda ver [23] para una mayor compresión en el tema.

1.2.3. Estructura incondicional local

Una noción más general que la de base incondicional y la de Banach lattice, es la de *estructura incondicional local* (l.u.st, por local unconditional structure).

Definición 1.2.6. *Decimos que E tiene estructura incondicional local (l.u.st.), si existe una constante $\Lambda \geq 1$ tal que para todo subespacio X de dimensión finita de E la inclusión canónica $\imath : X \hookrightarrow E$ tiene una factorización de la forma*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\imath"] \arrow[dr, "v"'] & & E \\ & Z \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

donde Z es un espacio de Banach con base incondicional y $u : X \to Z$, $v : Z \to E$ satisfacen

$$\|u\|\|v\|\chi(Z) \leq \Lambda.$$

La menor de las constantes Λ se llama la constante de incondicionalidad local de E y se nota $\Lambda(E)$. Trivialmente si E tiene base incondicional tiene l.u.st y vale:

$$\Lambda(E) \leq \chi(E).$$

El próximo teorema asegura que, en la definición de estructura incondicional local, se puede pensar que el espacio con base incondicional Z es siempre de dimensión finita.

Teorema 1.2.7. *Un espacio de Banach E tiene l.u.st. si y sólo si existe una constante $\Lambda \geq 1$ tal que para todo X subespacio de dimensión finita de E la inclusión canónica $\imath : X \hookrightarrow E$ tiene una factorización $\imath = uv$ con $v : X \to Z$ y $u : Z \to E$ donde Z es un espacio de Banach de dimensión finita y u, v satisfacen*

$$\|u\|\|v\|\chi(Z) \leq \Lambda,$$

donde $\Lambda(E)$ se puede computar como la "menor" de las constantes donde se admite una tal factorización.

Se sabe que existen espacios de Banach con base incondicional con subespacios propios sin base incondicional. Sin embargo, un problema abierto desde hace tiempo es determinar si todo subespacio complementado de un espacio con base incondicional tiene también base incondicional. Otro problema abierto, aún más general, es determinar si todo subespacio complementado de un Banach lattice tiene estructura de lattice. La siguiente proposición muestra que la estructura incondicional local sí se preserva por subespacios complementados.

Proposición 1.2.8. *Sea E un espacio de Banach con l.u.st. y F un subespacio complemetado de E. Entonces, F tiene l.u.st. Más aún, si $P : E \to F$ es la proyección canónica se tiene la desigualdad $\Lambda(F) \leq \|P\|\Lambda(E)$.*

Demostración. Sea X subespacio de dimensión finita de F. Consideremos $\imath : X \to F$, $I : F \to E$ las inclusiones de X en F y de F en E respectivamente. Como E tiene l.u.st., el operador de inclusión $\jmath : X \to E$ se factoriza de la forma $\jmath = \widetilde{v}\widetilde{u}$ con $\widetilde{v} : X \to Z$ y $\widetilde{u} : Z \to E$ y Z es un espacio de Banach con base incondicional tal que

$$\|\widetilde{u}\|\|\widetilde{v}\|\chi(Z) \leq \Lambda(E).$$

Notemos que $\jmath = I\imath$.

Si consideramos $u = P\widetilde{u}$ y $v = \widetilde{v}$, tenemos que $\imath : X \hookrightarrow F$ tiene una factorización

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\imath} & F \\ & v \searrow \nearrow u & \\ & Z & \end{array}$$

donde u y v satisfacen

$$\|u\|\|v\|\chi(Z) \leq \|P\|\|\widetilde{u}\|\|\widetilde{v}\|\chi(Z) \leq \|P\|\Lambda(E).$$

Hemos visto así que F tiene l.u.st. y que $\Lambda(F) \leq \|P\|\Lambda(E)$. $\square$

Los siguientes teoremas se pueden encontrar detallados en [11], serán citados constantemente a lo largo de la tesina.

Teorema 1.2.9. *E tiene l.u.st si y sólo si E' tiene l.u.st.*

Teorema 1.2.10. *Todo Banach lattice posee l.u.st.*

Por ende, los espacios $L_p(\mu)$ con $1 \leq p \leq \infty$ y $\mathcal{C}(K)$ tienen estructura incondicional local. Es importante aclarar que hay espacios que poseen l.u.st. pero que no son isomorfos a un Banach lattice.

Teorema 1.2.11. *Un espacio de Banach tiene l.u.st. si y sólo si E'' es isomorfo a un subespacio complementado de un Banach lattice.*

1.2.4. Propiedad de Gordon-Lewis

Hace poco vimos que todo espacio con base incondicional es isomorfo a un Banach lattice. Por otro lado, el Teorema 1.2.10 asegura que cualquier Banach lattice tiene estructura incondicional local. Daremos ahora una definición incluso un poco más general. Se recomiendan, para una mayor comprensión, los textos [11], [17].

Definición 1.2.12. *Diremos que un espacio de Banach E tiene la propiedad de Gordon-Lewis (o simplemente, que es de Gordon-Lewis) si todo operador 1-sumante $T : E \to \ell_2$ admite una 1-factorizacón $T = RS$ con*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & \ell_2 \\ & R \searrow \nearrow S & \\ & L_1(\mu), & \end{array}$$

donde μ es una medida y $R : E \to L_1(\mu)$ y $S : L_1(\mu) \to \ell_2$ son operadores lineales acotados.

En otras palabras, E tiene la propiedad de Gordon-Lewis si y solamente si $\Pi_1(E,\ell_2) \subset \Gamma_1(E,\ell_2)$ (es decir todo operador 1-sumante de E en ℓ_2 es 1-factorizable).

Observación 1.2.13. *Si E de Gordon-Lewis entonces, la inclusión canónica $\imath : \Pi_1(E,\ell_2) \hookrightarrow \Gamma_1(E,\ell_2)$ es acotada.*

Demostración. Por el teorema del gráfico cerrado basta ver que si $T_n \overset{\pi_1}{\to} T$ y $\imath(T_n) = T_n \overset{\gamma_1}{\to} T'$ entonces $T = T'$. Como $\|T_n - T\| \leq \pi_1(T_n - T)$ se tiene que $T_n \overset{\|\,\|}{\to} T$. Por otro lado, como $\|T_n - T'\| \leq \gamma_1(T_n - T)$ resulta $T_n \overset{\|\,\|}{\to} T'$. Por unicidad del límite, $T = T'$. $\square$

Por lo tanto si E es de Gordon Lewis, existe una constante C positiva tal que para todo $T : E \to \ell_2$

$$\gamma_1(T) \leq C\pi_1(T)$$

La mejor constante C se llama la constante de Gordon-Lewis de E y se donota $gl(E)$. Por ende, $gl(E) = \|\Pi_1(E,\ell_2) \hookrightarrow \Gamma_1(E,\ell_2)\|$. Diremos que $gl(E) = \infty$ si E no es de Gordon-Lewis.

Una herramienta fundamental en el estudio de incondicionalidad en espacios de Banach es la desigualdad de Gordon-Lewis. Dicha desigualdad para un Banach E vincula la constante de incondicionalidad $\chi(E)$ (más en general: la constante de incondicionalidad local $\Lambda(E)$) con la constante de Gordon-Lewis $gl(E)$.

Teorema 1.2.14. ***(Desigualdad de Gordon-Lewis)*** *Sean E y F espacios de Banach. Supongamos que E tiene l.u.st. Entonces todo operador 1-sumante $T : E \to F$ es 1-factorizable, con*

$$\gamma_1(T) \leq \Lambda(E)\pi_1(T). \tag{1.5}$$

Demostración. Afirmamos que para todo subespacio X de dimensión finita se tiene la desigualdad $\gamma_1(T|_X) \leq \Lambda(E)\pi_1(T)$. De esta afirmación deducimos inmediatamente el teorema (pues $[\Gamma_1, \gamma_1]$ es un ideal de Banach maximal). Sea entonces X un subespacio de dimensión finita fijo. Dado $\lambda > \Lambda(E)$, existe un espacio de Banach Z con base incondicional, junto con operadores $v : Z \to E$ y $w : X \to Z$ tal que $vw : X \to E$ es la inclusión canónica de X en E y $\|v\|\|w\|\chi(Z) < \lambda$. Exhibiremos una 1-factorización controlada de $Tv : Z \to F$ vía ℓ_1.

Sea μ tal que $\chi(Z) < \mu < \lambda\|v\|^{-1}\|w\|^{-1}$. Fijemos una base incondicional $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ de Z tal que $\chi((z_j)_{j=1}^{\infty}) < \mu$. Por lo tanto, si $z = \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j$ y $(t_j) \in B_{\ell_\infty}$ vale que $\|\sum_{j=1}^{\infty} t_j a_j z_j\| \leq \mu\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j\|$.

Veamos que $\|(a_j z_j)\|_1^{weak} \leq \mu\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j\|$. Para esto tomemos $z' \in B_{Z'}$ y t la sucesión de B_{ℓ_∞} dada por $t := (\mathrm{sg}(z'(a_j z_j)))_j$. Tenemos entonces:

$$z'(\sum_{j=1}^{\infty} t_j a_j z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} t_j z'(a_j z_j) = \sum_{j=1}^{\infty} |z'(a_j z_j)|$$

Como además,

$$z^{'}(\sum_{j=1}^{\infty} t_j a_j z_j) \leq \| \sum_{j=1}^{\infty} t_j a_j z_j \|,$$

tomando supremo se obtiene

$$\|(a_j z_j)\|_1^{weak} \leq \mu \| \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j \|.$$

Por otro lado, por la propiedad ideal de la norma π_1 y la desigualdad anterior...

$$\|Tv(a_j z_j)\|_1^{strong} = \sum_{j=1}^{\infty} \|Tv(a_j z_j)\| \leq \pi_1(Tv)\|(a_j z_j)\|_1^{weak} \leq \mu\pi_1(T)\|v\|\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j \|.$$

Por lo tanto, el operador

$$\begin{gathered} R : Z \longrightarrow \ell_1 \\ \sum_{j=1}^{\infty} a_j z_j \mapsto (a_j \|Tv(z_j)\|)_j \end{gathered}$$

está bien definido y $\|R\| \leq \mu\pi_1(T)\|v\|$. Para terminar, el operador $S : \ell_1 \to F$ dado por

$$S((b_j)) := \sum_{Tvz_j \neq 0} b_j \frac{Tvz_j}{\|Tvz_j\|}$$

verifica que $\|S\| \leq 1$. En efecto,

$$\Big\| \sum_{Tvz_j \neq 0} b_j \frac{Tvz_j}{\|Tvz_j\|} \Big\| \leq \sum_{Tvz_j \neq 0} \Big\| b_j \frac{Tvz_j}{\|Tvz_j\|} \Big\| \leq \sum_{Tvz_j \neq 0} |b_j| \leq \|(b_j)\|_{\ell_1}.$$

Notemos que $SRz_j = Tvz_j$ ya que

$$Rz_j = (0, ..., \underbrace{\|Tvz_j\|}_{j}, 0...)$$

y, por cómo S está definido,

$$SRz_j = \begin{cases} \|Tvz_j\| \frac{Tvz_j}{\|Tvz_j\|} = Tvz_j & \text{si } Tvz_j \neq 0 \\ 0 & \text{si } Tvz_j = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, $SR = Tv$. Luego,

$$T|_X = T\imath = Tvw = SRw,$$

dando así una 1-factorización de $T|_X$ ($Rw : X \to \ell_1$ y $S : \ell_1 \to F$). Además tenemos...

$$\gamma_1(T|_X) \leq \|Rw\|\|S\| \leq \|R\|\|w\|\|S\| \leq \mu\pi_1(T)\|v\|\|w\| \leq \lambda\pi_1(T),$$

donde la última desigualdad se debe a cómo elegimos μ. En definitiva, probamos que

$$\gamma_1(T|_X) \leq \Lambda(E)\pi_1(T),$$

ya que $\lambda > \Lambda(E)$ era un escalar arbitrario. Esto es exactamente lo que queríamos probar. $\square$

Corolario 1.2.15. *Si E tiene l.u.st. entonces E es de Gordon-Lewis y se tiene*

$$gl(E) \leq \Lambda(E). \tag{1.6}$$

En particular si $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional y $F = \overline{span}\{(e_j)_{j=1}^{\infty}\}$ entonces F es de Gordon-Lewis y vale

$$gl(F) \leq \chi((e_j)_{j=1}^{\infty}). \tag{1.7}$$

Demostración. Sea $T : E \to \ell_2$ un operador 1-sumante. Como E tiene l.u.st., el el teorema anterior asegura que T es un operador 1-factorizable. Por ende, ¡E de Gordon-Lewis! Además vale que

$$\gamma_1(T) \leq \Lambda(F)\pi_1(T).$$

Por lo tanto $gl(E) \leq \Lambda(E)$.

En particular si $F = \overline{\text{span}}\{(e_j)_{j=1}^{\infty}\}$; $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es base incondicional de F. En otras palabras, F tiene l.u.st.. Para obtener la desigualdad (1.7) basta notar que

$$\Lambda(F) \leq \chi(F) \leq \chi((e_j)_{j=1}^{\infty}).$$

$\square$

Es importante destacar que la propiedad de Gordon-Lewis, tal como pasaba con la estructura incondicional local, se preserva en subespacios complementados. Esta característica será crucial al estudiar incondicionalidad en espacios de polinomios. La siguiente observación es de suma importancia, será usada constantemente en el transcurso de este trabajo.

Observación 1.2.16. *Sean $T : E \to F$ y $S : F \to E$ operadores tales que $Id_E = ST$. Entonces E es isomorfo a un subespacio complementado de F y*

$$gl(E) \leq \|T\|\|S\|gl(F). \tag{1.8}$$

Demostración. Mostremos primero que E es isomorfo a un subespacio complementado en F. Como $Id_E = ST$, T es inyectivo. Si encontramos un proyector P con rango $T(E)$, por el teorema de la aplicación abierta, será $T(E)$ un subespacio complementado de F y $T : E \to T(E)$ un isomorfismo. El operador $P = TS$ es el proyector buscado: como $Id_E = ST$ se tiene que S es sobreyectivo (por lo tanto $\text{Rg}(P) = T(E)$). Además

$$P^2 = T \underbrace{ST}_{Id_E} S = TS = P,$$

que es lo queríamos.

Veamos ahora que $gl(E) \leq \|T\|\|S\|gl(F)$. Sea $\jmath : E \to \ell_2$ un operador 1-sumante. Notemos que $\jmath S : F \to \ell_2$ también lo es. Por lo tanto

$$\gamma_1(\jmath S) \leq gl(F)\pi_1(\jmath S).$$

Por otro lado, $\jmath = \jmath ST$. Luego,

$$\gamma_1(\jmath) = \gamma_1(\jmath ST) \leq \gamma_1(\jmath S)\|T\| \leq gl(F)\pi_1(\jmath S)\|T\| \leq gl(F)\pi_1(\jmath)\|S\|\|T\|.$$

Concluimos entonces que

$$gl(E) \leq \|T\|\|S\|gl(F).$$

□

El siguiente teorema asegura que puede computarse la constante de Gordon-Lewis de un espacio conociendo la constante de Gordon-Lewis de su dual y viceversa. Se puede encontrar una demostración de este resultado en [11].

Teorema 1.2.17. *Un espacio de Banach es de Gordon-Lewis si y sólo si E' es de Gordon-Lewis. En tal caso, $gl(E) = gl(E')$.*

1.3. Funciones multilineales y polinomios homogéneos

En esta sección presentaremos las funciones multilineales y los polinomios homogéneos espacios de Banach. Enunciaremos algunas propiedades básicas de estas funciones y definiremos los distintos tipos de polinomios que utilizaremos a lo largo de este trabajo.

Recordemos que, si $E_1, \dots, E_m$ y F son espacios vectoriales, una función

$$\phi : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$$

se dice *multilineal* si es lineal en cada una de las coordenadas. Notaremos $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F)$ al espacio de todas las funciones multilineales $\phi : E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ que son continuas para las topologías dadas por las normas. Nosotros estaremos particularmente interesados en el caso en $E_1, \dots, E_m$ son espacios de Banach y $F = \mathbb{K}$ (en tal caso notaremos $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$). Si además $E_1 = \dots E_k = E$, el espacio anterior se notará $\mathcal{L}(^m E)$. Diremos que la función m-lineal $\phi : E^m \to \mathbb{K}$ es *simétrica* si para cualquier permutación σ de $\{1, \dots, m\}$ se verifica $\phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(m)}) = \phi(e_1, \dots, e_m)$ para toda m-tupla $(e_1, \dots, e_m) \in E^m$. Denotaremos $\mathcal{L}_s(^m E)$ al subespacio de $\mathcal{L}(^m E)$ formado por las funciones multilineales continuas y simétricas.

Si ϕ es una función m-lineal, definimos

$$\|\phi\| = \sup\{|\phi(e_1, \dots, e_m)| \ : \ e_1 \in B_{E_1}, \dots, e_m \in B_{E_m}\}.$$

De esta manera una función multilineal resulta continua si y solamente si su norma es finita. Además esta norma hace de $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m)$ un espacio de Banach y vale

$$\|\phi(e_1, \dots, e_m)\| \leq \|\phi\| \|e_1\| \dots \|e_m\|$$

para todo $e_1 \in E_1, \dots, e_m \in E_m$.

Diremos que una la aplicación $P : E \to F$ es un *polinomio homogéneo de grado* m (o un *polinomio* m*-homogéneo*) si existe una aplicación m-lineal $\phi : E \times \dots E \to F$ tal que

$$P(e) = \phi(e, \dots, e)$$

para todo $e \in E$. En este caso se suele notar $P = \widehat{\phi}$ (y se dice que P es el polinomio asociado a la multilineal ϕ).

Es importante destacar que distintas funciones m-lineales pueden generar un mismo polinomio P. Sin embargo, de todas las funciones que dan lugar a P sólo una es simétrica. A esta función m-lineal la notaremos con $\check{P}$. Se suele denominar *la función* m*-lineal asociada al polinomio* P. La siguiente *fórmula de polarización* permite recuperar las función multilineal simétrica a partir del polinomio asociado:

$$\check{P}(e_1, \dots, e_m) = \frac{1}{2^m m!} \sum_{\varepsilon_i \in \{-1,\, 1\}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m P(\sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j e_j) \tag{1.9}$$

para $e_1, \dots, e_m \in E$.

Para un polinomio m-homogéneo P se define la norma

$$\|P\| = \sup\{\|P(e)\| \ : \ e \in B_E\}.$$

El polinomio P es continuo si y sólo si tiene norma finita. Además vale la desigualdad $\|P(e)\| \leq \|P\|\|e\|^k$, para todo $e \in E$, siendo $\|P\|$ la menor constante que verifica esta desigualdad. Notaremos $\mathcal{P}(^m E; F)$ al espacio de todos los polinomios m-homogéneos continuos de E en F. En el caso en que $F = \mathbb{K}$ (que es el caso que nos vamos a estudiar) notaremos $\mathcal{P}(^m E)$. Es fácil ver que, con esta norma, $\mathcal{P}(^m E)$ resulta un espacio de Banach. Evidentemente, la norma de un polinomio es siempre menor o igual a la de su función multilineal asociada. Por otra parte, como consecuencia directa de la fórmula de polarización, un polinomio es continuo si y solamente si su función multilineal asociada lo es. Además se verifica la desigualdad

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!} \|P\|.$$

Esto asegura que el operador

$$\begin{aligned} \widehat{\ }: \mathcal{L}_s(^m E) &\to \mathcal{P}(^m E) \\ \phi &\mapsto \widehat{\phi} \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios de Banach (cuya inversa está dada por la aplicación $P \to \check{P}$).

1.3.1. Algunas clases de polinomios

El ejemplo más simple de un polinomio m-homogéneo sobre un espacio de Banach E está dado por $P(e) = \varphi(e)^m$, donde φ es una funcional lineal continua definida sobre E. Más en general, diremos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E)$ es de *tipo finito* si existen funcionales $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E'$ tales que

$$P(e) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e)^m,$$

para todo $e \in E$. El espacio de los polinomios de tipo finito se notará $\mathcal{P}_f(^m E)$. Una consecuencia de la fórmula de polarización es que dados $\psi_1, \dots, \psi_m \in E'$, existen $(\varphi_j)_{j=1}^{2^m}$ tales que

$$\psi_1(e) \dots \psi_m(e) = \sum_{j=1}^{2^m} \varphi_j(e)^m,$$

para todo $e \in E$ en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (si el espacio es real y m es par, las potencias de φ_j quedan multiplicadas por un signo). Luego, en la definición de polinomios de tipo finito, podemos reemplazar las potencias de funcionales por productos de distintas funcionales. A partir de esto, es sencillo ver que si $P : E \to \mathbb{K}$ es un polinomio y $T : F \to E$ es un operador de rango finito, la composición PT es un polinomio de tipo finito. En particular, si E es un espacio de dimensión finita, todo polinomio sobre E es de tipo finito.

Diremos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m E)$ es *nuclear* si existen una sucesión acotada $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ en E' y una sucesión de escalares $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \subset \ell_1$ tales que

$$P(e) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j(e)^m, \tag{1.10}$$

para todo $e \in E$.

$\mathcal{P}_{nuc}(^m E)$ denotará el espacio de los polinomios nucleares provisto con la norma nuclear

$$\|P\|_{\mathcal{N}} = \text{ínf}\{\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|\varphi_j\|^m\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las representaciones de la forma (1.10).

Es sencillo ver que la inclusión canónica

$$\imath : (\mathcal{P}_{nuc}(^m E), \| \|_{\mathcal{N}}) \to (\mathcal{P}(^m E), \| \|)$$

es continua. Más aún, siempre se tiene la desigualdad $\|P\| \leq \|P\|_{\mathcal{N}}$. Por otro lado, puede verse que $\mathcal{P}_f(^m E)$ es denso en $(\mathcal{P}_{nuc}(^m E), \| \|_{\mathcal{N}})$.

La clausura del espacio de los polinomios de tipo finito (o de los polinomios nucleares) en $\mathcal{P}(^m E)$ se denomina el espacio de los *polinomios aproximables* $\mathcal{P}_{appr}(^m E)$.

Hasta aquí los polinomios se clasificaron según sus distintas expresiones. Sin embargo, existen otras clasificaciones relacionadas con diversas propiedades de continuidad. Diremos que un polinomio P es *débilmente continuo sobre acotados* si su restricción a cualquier acotado de E resulta una función continua considerando en E la topología débil. En otras palabras, para toda red acotada (e_α) convergente a e se tiene que $P(e_\alpha) \xrightarrow{w} P(e)$. Por otra parte, un polinomio se dirá *secuencialmente débil continuo* si, cada vez que una sucesión (e_j) converge débil a $e \in E$, $P(e_j)$ converge en norma a $P(e)$. Notaremos a esta clase de polinomios $\mathcal{P}_{wsc}(^m E)$.

Las siguientes relaciones entre espacios de polinomios se siguen inmediatamente de las definiciones:

$$\mathcal{P}_f(^m E) \subset \mathcal{P}_{nuc}(^m E) \subset \mathcal{P}_{appr}(^m E) \subset \mathcal{P}_w(^m E) \subset \mathcal{P}_{wsc}(^m E) \subset \mathcal{P}(^m E).$$

Todas las inclusiones son, en general, estrictas. Sin embargo existen casos en los que valen las inclusiones inversas. Por ejemplo, si E es de dimensión finita todos los espacios coinciden. Si E'

tiene la propiedad de aproximación, $\mathcal{P}_{appr}({}^m E)$ es igual a $\mathcal{P}_w({}^m E)$ [4]. Si E no contiene copia de ℓ_1 resulta $\mathcal{P}_w({}^m E) = \mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ (ver [3]), mientras que si E tiene la propiedad de Dunford-Pettis, $\mathcal{P}_{wsc}({}^m E)$ resulta idéntico a $\mathcal{P}({}^m E)$ [29]. Existen muchas más clases de polinomios, se recomienda ver [14], [24] para una mayor comprensión en el tema. Nosotros estudiaremos la existencia de bases incondicionales para los espacios $\mathcal{P}_{nuc}({}^m E)$, $\mathcal{P}_{appr}({}^m E)$, $\mathcal{P}_w({}^m E)$ y $\mathcal{P}({}^m E)$ principalmente.

1.4. Productos tensoriales

R. Ryan [27] introdujo los productos tensoriales simétricos al estudio de los polinomios y funciones holomorfas en espacios de Banach. La gracia de involucrar productos tensoriales en estas áreas se debe a que estos permiten linealizar problemas no lineales. Así, problemas concernientes a cierta clase de funciones (como funciones multilineales o polinomios) se traducen a problemas que involucran aplicaciones lineales sobre los productos tensoriales (donde es más simple trabajar). Tal como en la vida, muchas veces cuando uno quiere obtener algo debe dejar otra cosa de lado, aquí el costo que tiene linealizar es que se debe trabajar con espacios algo más complejos que los espacios originales. En esta sección repasaremos los conceptos básicos que necesitaremos a lo largo de la tesis para entender los trabajos [9], [10]. Para un profundo entendimiento en el tema se recomiendan los textos [28] y [15].

Empecemos recordando algunas definiciones y resultados. Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de vectoriales, el *producto tensorial* de $E_1, \ldots, E_k$ es el espacio $\otimes(E_1, \ldots, E_m)$ generado por los elementos de la forma $e_1 \otimes \cdots \otimes e_m$ donde $e_1 \in E_1, \ldots, e_m \in E_m$, de manera que la aplicación

$$\begin{aligned} \kappa_m : E_1 \times \cdots \times E_m &\to \otimes(E_1, \ldots, E_m) \\ (e_1, \ldots, e_m) &\mapsto e_1 \otimes \cdots \otimes e_m \end{aligned} \tag{1.11}$$

es m-lineal. Esta aplicación es universal en el siguiente sentido: Dado un espacio vectorial F y una función m-lineal $\phi : E_1 \times \cdots \times E_m \to F$ existe una única aplicación lineal $A_\phi : E_1 \otimes \cdots \otimes E_m \to F$ de manera que el próximo diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \cdots \times E_m & \xrightarrow{\phi} & F \\ \downarrow_{\kappa_m} & \nearrow_{A_\phi} & \\ \otimes(E_1, \ldots, E_m). & & \end{array}$$

Además, dado cualquier operador lineal $A : \otimes(E_1, \ldots, E_m) \to F$ la función $A\kappa_m$ es una función m-lineal de $E_1 \times \cdots \times E_m$ en F. En consecuencia el espacio de las funciones m-lineales de $E_1 \times \ldots E_m$ en F resulta isomorfo al espacio de las funciones lineales del producto tensorial en $\otimes(E_1, \ldots, E_m)$ en F vía la aplicación $\phi \leftrightarrow A_\phi$.

La multilinealidad de la aplicación (1.11) hace que todo elemento x en el producto tensorial $\otimes(E_1, \ldots, E_m)$ tenga una representación de la forma

$$x = \sum_{j=1}^{r} e_1^j \otimes \cdots \otimes e_m^j, \tag{1.12}$$

donde $e_i^j \in E_i$ para cada índice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Es importante destacar que en general hay muchas representación como en (1.12) del tensor x.

Dos normas se destacan en el producto tensorial de espacios de Banach: la *norma proyectiva* o *π-norma* y la *norma inyectiva* o *ε-norma*. Recordemos cómo estaban definidas y las propiedades que poseen. Empecemos con la norma proyectiva...

Si $E_1, \dots, E_m$ son espacios de Banach, se define en $\otimes(E_1, \dots, E_m)$ la norma proyectiva de un tensor x como

$$\pi(x) = \text{ínf}\{\sum_{j=1}^{r} \|e_1^j\| \dots \|e_m^j\|\},$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de x. Al producto tensorial dotado con esta norma se lo nota $\otimes_\pi(E_1, \dots, E_m)$, y a su completación $\widetilde{\otimes}_\pi(E_1, \dots, E_m)$. La siguiente propiedad resulta fundamental:

Proposición 1.4.1. *La aplicación $\phi \leftrightarrow A_\phi$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m; F) = \mathcal{L}(\widetilde{\otimes}_\pi(E_1, \dots, E_m); F)$. En particular, si F es el cuerpo escalar se tiene, $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_m) = (\widetilde{\otimes}_\pi(E_1, \dots, E_m))'$.*

Dados dos espacios de Banach E y F tenemos, por la proposición anterior, que $(E \otimes_\pi F)' = \mathcal{L}(E, F)$. Por otra parte, cada $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ define un operador $R_\phi : E \to F'$ dado por $R_\phi(e)(f) = \phi(e, f)$, para todo $e \in E$ y $f \in F$. Esta da un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{L}(E; F)$ y $\mathcal{L}(E; F')$. Por ende, se tiene la igualdad isométrica $(E \otimes_\pi F)' = \mathcal{L}(E; F')$.

Una propiedad muy importante que cumple la norma proyectiva es la siguiente: Si $E_1, \dots E_m$ y $F_1, \dots, F_m$ son espacios de Banach y $T_1 \in \mathcal{L}(E_1; F_1), \dots T_m \in \mathcal{L}(E_m; F_m)$ son operadores lineales, entonces la asignación $\otimes_{j=1}^m T_j$ definida por

$$\begin{aligned} \otimes_{j=1}^m T_j : \widetilde{\otimes}_\pi(E_1, \dots, E_m) &\to \widetilde{\otimes}_\pi(F_1, \dots, F_m) \\ e_1 \otimes \dots \otimes e_m &\mapsto T_1(e_1) \otimes \dots \otimes T_m(e_m), \end{aligned}$$

tiene norma $\|T_1\| \dots \|T_m\|$.

Otra norma natural que surge en el producto tensorial es la siguiente: si $E_1, \dots, E_m$ son espacios de Banach, se define en $E_1 \otimes \dots \otimes E_m$ la norma inyectiva de un tensor x como

$$\varepsilon(x) = \sup\{|\sum_{j=1}^{r} \varphi_1(e_1^j) \dots \varphi_m(e_m^j)| \ : \ \varphi_1 \in B_{E_1'}, \dots, \varphi_m \in B_{E_m'}\},$$

donde $\sum_{j=1}^r e_1^j \otimes \dots \otimes e_m^j$ es alguna representación del tensor x. Sin mucho trabajo se puede ver que siempre se tiene la desigualdad $\varepsilon \leq \pi$.

Tal como pasaba con la norma proyectiva, para $E_1, \dots E_m$ y $F_1, \dots, F_m$ espacios de Banach y $T_1 \in \mathcal{L}(E_1; F_1), \dots T_m \in \mathcal{L}(E_m; F_m)$ operadores lineales la asignación $\otimes_{j=1}^m T_j$ definida por

$$\begin{aligned} \otimes_{j=1}^m T_j : \widetilde{\otimes}_\varepsilon(E_1, \dots, E_m) &\to \widetilde{\otimes}_\varepsilon(F_1, \dots, F_m) \\ e_1 \otimes \dots \otimes e_m &\mapsto T_1(e_1) \otimes \dots \otimes T_m(e_m), \end{aligned}$$

tiene norma $\|T_1\| \dots \|T_m\|$.

Sorprendentemente (o no tanto) el producto tensorial inyectivo permite estudiar la integral de Pettis en espacios de Banach, operadores y formas multilineales integrales, funciones continuas de un compacto a un espacio de Banach, etc. Aunque no entraremos aquí en detalles.

1.4.1. Productos tensoriales simétricos

Anteriormente vimos cómo se linealizan funciones multilineales, el producto tensorial simétrico mostrará cómo linealizar polinomios. Supongamos que $E_1 = \dots E_m = E$, y consideremos el espacio $\otimes^m E := E \otimes \cdots \otimes E$ (el producto tensorial de orden m de E). Se denomina *producto tensorial simétrico* de orden m al subespacio de $\otimes^m E$ generado por los tensores de la forma

$$e^{(m)} := \underbrace{e \otimes \cdots \otimes e}_{m}.$$

Denotaremos a este espacio $\otimes^{m,s} E$. El espacio vectorial $\otimes^{m,s} E$ junto con la asignación Δ_m de E en $\otimes^{m,s} E$ dada por

$$\Delta_m(e) = e^{(m)},$$

verifican la siguiente propiedad universal: dado un espacio vectorial F y un polinomio m-homogéneo $P : E \to F$, existe una única aplicación lineal $L_P : \otimes^{m,s} E \to F$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{P} & F \\ \downarrow_{\Delta_m} & \nearrow_{L_P} & \\ \otimes^{m,s} E. & & \end{array}$$

Recíprocamente, dado un operador lineal $L : \otimes^{m,s} E \to F$, la aplicación $L\Delta_m$ es un polinomio m-homogéneo de E a F. Por ende, los espacios $P(^m E; F)$ y $\mathcal{L}(\otimes^{m,s} E; F)$ son isomorfos vía la aplicación $P \leftrightarrow L_P$. Para un polinomio $P : E \to F$, el único operador L_P que verifica $L_P(e^{(m)}) = P(e)$ se denomina *linealización* de P.

Otra forma de entender al producto tensorial simétrico es viéndolo como la imagen del operador de simetrización S:

$$\begin{aligned} S := S_E^m : \otimes^m E &\longrightarrow \otimes^m E \\ e_1 \otimes \dots e_m &\mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} e_{\sigma(1)} \otimes \dots e_{\sigma(m)}, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{S}_m$ denota el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \dots, m\}$. Es importante destacar que el operador de simetrización es una proyección del producto tensorial al producto tensorial simétrico.

Un elemento $y \in \otimes^{m,s}E$ tiene siempre una representación (no única) de la forma

$$y = \sum_{j=1}^{r} e_j^{(m)}, \tag{1.13}$$

si E es un espacio vectorial complejo (o real y m es par). Si E es un espacio real y m es par, las representaciones de los elementos tienen la siguiente forma

$$y = \sum_{j=1}^{r} e_j^{(m)} - \sum_{j=r+1}^{p} e_j^{(m)}.$$

Por comodidad usaremos la notación compleja.

Para un elemento $y \in \otimes^{m,s}E$ se define la *norma proyectiva simétrica* de y como

$$\pi_s(y) = \text{ínf}\{\sum_{j=1}^{r} \|e_j\|^m\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones $y = \sum_{j=1}^{r} e_j^{(m)}$. El producto tensorial $\otimes^{m,s}E$ dotado con la norma π_s se notará $\otimes_{\pi_s}^{m,s}E$ y a su completación $\widetilde{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E$. Remarquemos que la norma π_s no coincide con la restricción de la norma proyectiva π de $\otimes_{\pi}^{m}E$ al producto tensorial simétrico $\otimes_{\pi_s}^{m,s}E$. La norma proyectiva tiene la siguiente propiedad:

Proposición 1.4.2. *Si E y F son espacios de Banach, la aplicación $P \leftrightarrow L_P$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{P}(^mE;F)$ y $\mathcal{L}(\otimes_{\pi_s}^{m,s}E;F)$. En particular si $F = \mathbb{K}$ se tiene $(\otimes_{\pi_s}^{m,s}E)' = \mathcal{P}(^mE)$.*

Otro identificación que da la norma proyectiva simétrica es la siguiente:

Proposición 1.4.3. *Si E es un espacio de Banach cuyo dual tiene la propiedad de aproximación entonces los espacios $\widetilde{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E'$, $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$ son isométricamente isomorfos.*

También vale destacar que si E y F son espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E;F)$ es un operador lineal, entonces la asignación $\otimes^m T$ definida por

$$\begin{aligned} \otimes^m T : \widetilde{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E &\to \widetilde{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E \\ e^{(m)} &\mapsto (Te)^{(m)} \end{aligned}$$

tiene norma $\|T\|^m$.

Otra norma que resulta de gran utilidad es la *norma inyectiva simétrica* o ε_s-norma. Para un elemento $y \in \otimes^{m,s}E$ se define la norma inyectiva simétrica de y como

$$\varepsilon_s(y) = \sup_{\substack{\varphi\in E' \\ \|\varphi\|\leq 1}} \{|\sum_{j=1}^{r} \varphi(e_j)^m|\}$$

donde $\sum_{j=1}^{r} e_j^{(m)}$ es alguna representación del tensor y. Se puede ver fácilmente que la norma inyectiva simétrica ε_s es siempre menor o igual que la norma proyectiva simétrica π_s. El producto tensorial $\otimes^{m,s}E$ dotado con la norma ε_s se notará $\otimes_{\varepsilon_s}^{m,s}E$ y a su completación $\widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E$. Es importante aclarar, al igual que pasaba con la norma proyectiva simétrica, que ε_s no coincide con la restricción de la norma inyectiva ε de $\otimes_{\varepsilon}^{m}E$ al producto tensorial simétrico $\otimes_{\varepsilon_s}^{m,s}E$.

La siguiente identificación será de utilidad:

Proposición 1.4.4. *Para todo espacio de Banach E se tiene la siguiente igualdad isométrica $\otimes_{\varepsilon_s}^{m,s}E' = \mathcal{P}_f(^mE)$. En particular $\widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E' = \mathcal{P}_{appr}(^mE)$.*

Luego, si E' tiene la propiedad de aproximación podemos identificar $\widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E'$ con $\mathcal{P}_w(^mE)$.

Tal como ocurría con la norma proyectiva simétrica, ε_s tiene la siguiente propiedad: Si E y F son espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E;F)$ es un operador lineal, entonces la asignación $\otimes^m T$ definida por

$$\begin{aligned} \otimes^m T : \widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E &\to \widetilde{\otimes}_{\varepsilon_s}^{m,s}E \\ e^{(m)} &\mapsto (Te)^{(m)} \end{aligned}$$

tiene norma $\|T\|^m$.

1.4.2. Normas tensoriales, normas tensoriales simétricas y algunos resultados de utilidad

Diremos que α es una m-norma tensorial si para cada m-tupla de espacios de Banach $(E_1, \dots, E_m)$, α asigna una norma en $\otimes(E_1, \dots, E_m)$ (que llamaremos α), verificando:

(1) $\varepsilon \leq \alpha \leq \pi$ en $\otimes(E_1, \dots, E_m)$

(2) $\|\otimes_{j=1}^m T_j : \otimes_\alpha(E_1, \dots, E_m) \to \otimes_\alpha(F_1, \dots, F_m)\| \leq \|T_1\| \dots \|T_m\|$ para cada operador $T_i \in \mathcal{L}(E_i, F_i)$.

A la propiedad (2) se la conoce como la *metric mapping property* para la norma α (las normas ε y π siempre la verifican).

Análogamente, diremos que β es una m-norma tensorial simétrica si para cada espacio de Banach E β asigna una norma en $\otimes^{m,s}E$ (que llamaremos β) verificando:

(1) $\varepsilon_s \leq \beta \leq \pi_s$ en $\otimes^{m,s}E$

(2) $\| \otimes^m T : \otimes_\beta^{m,s}E \to \otimes_\beta^{m,s}F\| \leq \|T\|^m$ para cada operador $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

A la propiedad (2) también se la conoce como la metric mapping property para la norma simétrica β (las normas ε_s y π_s tienen esta propiedad).

Para α una m-norma tensorial, β una m-norma tensorial simétrica y E un espacio de Banach de dimensión finita se define en $\otimes^m E$ la norma dual α^*, y en $\otimes^{m,s}E$ la normal dual β^* como

$$\otimes_{\alpha^*}^m E := (\otimes_\alpha^m E')' \qquad\qquad \otimes_{\beta^*}^{m,s} E := (\otimes_\beta^{m,s} E')',$$

respectivamente. Es importante recordar que $\varepsilon^* = \pi$, $\pi^* = \varepsilon$ y $\varepsilon_s^* = \pi_s$, $\pi_s^* = \varepsilon_s$.

La siguiente proposición se debe a K. Floret [16] y será de gran utilidad más adelante.

Proposición 1.4.5. *Para toda m-norma tensorial simétrica β existe una m-norma tensorial α tal que para todo espacio de Banach E se tiene*

$$d_m{}^{-1}\alpha_{|\otimes^{m,s}E} \leq \beta \leq d_m \alpha_{|\otimes^{m,s}E} \text{ en } \otimes^{m,s} E \tag{1.14}$$

con $d_m \leq m^m/m!$. Más aún, si E de dimensión finita tenemos:

$$\alpha^*_{|\otimes^{m,s}E} \leq d_m \beta^* \text{ en } \otimes^{m,s} E. \tag{1.15}$$

1.5. Tipo, Cotipo y desigualdad de Khintchine

Sea $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones de Rademacher. Un espacio de Banach E *tiene tipo* p para $1 \leq p \leq 2$ si existe una constante C tal que para toda elección de vectores finitos $e_1, \dots, e_n$ en E se tiene

$$\Big(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j(t) e_j\|^p \, dt\Big)^{1/p} \leq C\Big(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^p \, dt\Big)^{1/p}.$$

La menor de todas las constantes C que verifican la desigualdad anterior se denomina la constante de tipo p de E y se nota $T_P(E)$.

Similarmente, un espacio de Banach E *tiene cotipo* q para $2 \leq q \leq \infty$ si existe una constante D tal que para toda elección de vectores finitos $e_1, \dots, e_n$ en E se tiene

$$\Big(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^q \, dt\Big)^{1/q} \leq D\Big(\int_0^1 \|\sum_{j=1}^n r_j e_j\|^q \, dt\Big)^{1/q}.$$

La menor de todas las constantes D que verifican la desigualdad anterior se denomina la constante de cotipo q de E y se nota $C_q(E)$.

La siguiente es una desigualdad clásica que usaremos frecuentemente:

Teorema 1.5.1. *(**Desigualdades de Khintchine**). Existen constantes A_p, B_p con $1 \leq p < \infty$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y sucesión de escalares $(a_j)_{j=1}^n$ se tiene*

$$A_p \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \leq \Big(\int_0^1 |\sum_{j=1}^n a_j r_j(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \quad si \quad 1 \leq p < 2$$

y

$$\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \leq \Big(\int_0^1 |\sum_{j=1}^n a_j r_j(t)|^p dt\Big)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\right)^{1/2} \quad si \quad 2 \leq p$$

1.6. Contención de ℓ_p^n's y definición de base greedy

Diremos que E *contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada* si existe una constante C tal que para todo n natural existen operadores $S_n : \ell_p^n \to E$ y $T_n : E \to \ell_p^n$ con $T_n S_n = Id_{\ell_p^n}$ (la identidad de ℓ_p^n) y $\|S_n\|\|T_n\| \leq C$.

Lema 1.6.1. *Sea F isomorfo a un subespacio complementado de E. Si E no contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_p^n's, para $1 \leq p \leq \infty$, entonces F tampoco.*

Demostración. Consideremos los operadores canónicos $\imath : F \to E$, $\pi : E \to F$ inclusión y proyección respectivamente. Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen operadores $S_n : \ell_p^n \to F$ y

$T_n : F \to \ell_p^n$, con $T_n S_n = Id_{\ell_p^n}$ y $\|S_n\|\|T_n\| \leq K$ $\forall n$. Sean $\widetilde{S_n} = \imath S_n$, $\widetilde{T_n} = T_n \pi$. Se tiene entonces

$$\|\widetilde{S_n}\|\|\widetilde{T_n}\| \leq K\|\imath\|\|\pi\|.$$

Por otro lado como $\pi\imath = Id_F$,

$$\widetilde{T_n}\widetilde{S_n} = T_n \pi \imath S_n = T_n S_n = Id^n_{\ell_p},$$

lo cual es una absurdo pues E no contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_p^n's. $\square$

Observación 1.6.2. *Sea (n_k) una sucesión creciente de números naturales tal que para todo k existen operadores $S_{n_k} : \ell_p^{n_k} \to E$ y $T_{n_k} : E \to \ell_p^{n_k}$ con $T_{n_k} S_{n_k} = Id_{\ell_p^{n_k}}$ y $\|S_{n_k}\|\|T_{n_k}\| \leq C$ $(1 \leq p \leq \infty)$. Entonces E contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_p^n's.*

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe k tal que $n \leq n_k$; y operadores $S_{n_k} : \ell_p^{n_k} \to E$ y $T_{n_k} : E \to \ell_p^{n_k}$ con $T_{n_k} S_{n_k} = Id_{\ell_p^{n_k}}$ y $\|S_{n_k}\|\|T_{n_k}\| \leq C$. Consideremos los operadores canónicos $\imath : \ell_p^n \to \ell_p^{n_k}$ y $\pi : \ell_p^{n_k} \to \ell_p^n$ inclusión y proyección respectivamente. Como $\|\imath\|, \|\pi\| \leq 1$ y $\pi\imath = Id_{\ell_p^n}$, si llamamos $S_n := S_{n_k}\imath$ y $T_n := \pi T_{n_k}$ tenemos entonces que $S_n : \ell_p^n \to E$ y $T_n : E \to \ell_p^n$ con $T_n S_n = Id_{\ell_p^n}$ y $\|S_n\|\|T_n\| \leq C$. Por lo tanto E contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_p^n's. $\square$

Los siguientes conceptos serán fundamentales para resolver la conjetura de Dineen:

Una sucesión básica normalizada $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach E se dice *democrática* si existe una constante C tal que para cualquier par de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, A y B, con $|A| \leq |B|$, se tiene:

$$\|\sum_{j \in A} e_j\| \leq C\|\sum_{j \in B} e_j\|.$$

Una sucesión básica que es democrática e incondicional se dice *greedy* (para otra definición equivalente de base greedy se recomienda ver [1]).

Para $(e_j)_{j=1}^{\infty}$, una sucesión básica greedy, se define ϕ ,su función fundamental asociada, como:

$$\phi(n) = \sup\{\|\sum_{j \in A} e_j\| : |A| \leq n\}.$$

Observemos que ϕ resulta creciente. Además existe una constante Δ (que llamaremos constante democrática asociada a $(e_j)_{j=1}^{\infty}$) verificando:

$$\Delta^{-1}\phi(|A|) \leq \|\sum_{j \in A} e_j\| \leq \phi(|A|),$$

para todo subconjunto finito A de los naturales.

1.7. Sumas aleatorias

Recordemos algunas nociones básicas sobre variables aleatorias.

Una variable aleatoria es una función medible sobre un espacio de probabilidad (Ω, Σ, P). La distribución de una variable aleatoria X es una medida P_X sobre los Borelianos $B \subset \mathbb{R}$ definida por $P_X(B) = P(\{X \in B\})$. Por abuso de notación: $P(X \in B) = P(\{X \in B\})$. Donde $\{X \in B\}$ es el evento $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$.

Diremos que las variables aleatorias $X_1, \ldots, X_n$ en (Ω, Σ, P) son *independientes* siempre que $P(\bigcap_{k \leq n} \{X_k \in B_k\}) = \prod_{k \leq n} P(X_k \in B_k)$ para toda n-tupla de Borelianos $B_k \subset \mathbb{R}$. Esto implica que la medida P_n en los Borelianos $B \subset \mathbb{R}^n$, definida por $P_n(B) = P((X_1, \ldots, X_n) \in B)$ coincide con $\prod_{k=1}^n P_{X_k}$.

Por ende, si $(X_1, \ldots, X_n)$ y $(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ son dos n-tuplas de variables aleatorias independientes con $P_{X_k} = P_{X_k^*}$ para todo k y $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es medible Borel, entonces las variables aleatorias $F(X_1, \ldots, X_n)$ y $F(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ tienen la misma distribución.

Una variable aleatoria X se dice *simétrica* si $P(X > a) = P(X < -a)$ para todo $a \in \mathbb{R}$. Esto es equivalente a pedir que $P(X \in I) = P(-X \in I)$ para todo intervalo I, por lo tanto $P_X = P_{-X}$.

Se deduce entonces:

Observación 1.7.1. *Si $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias simétricas independientes, entonces $F(X_1, \ldots, X_n)$ tiene la misma distribución que $F(\epsilon_1 X_1, \ldots, \epsilon_n X_n)$ con $\epsilon_i = \pm 1$.*

La siguiente observación será de gran importancia:

Observación 1.7.2. *Sea X una variable aleatoria simétrica en el espacio de probabilidad (Ω, Σ, μ). Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, X tiene la misma distribución que la variable aleatoria $r_k(\ )|X(\ )|$ en el espacio producto $[0,1] \times \Omega$ (donde r_k es la k-ésima función de Rademacher).*

Demostración. Sea $a \in \mathbb{R}$. El evento $\{r_k\, |X| > a\}$ es igual a

$$\{r_k = 1\} \times \{|X| > a\} \sqcup \{r_k = -1\} \times \{|X| < -a\}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P(r_k\, |X| > a) &= (1/2)\mu(|X| > a) + (1/2)\mu(|X| < -a) \\ &= (1/2)\mu(|X| > a) \\ &= (1/2)(\mu(X > a) + \mu(X < -a)) \\ &= \mu(X > a), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que X es simétrica. $\square$

Definición 1.7.3. *Diremos que* $\sum_{k=1} X_k e_k$ *es una suma aleatoria en el espacio de Banach* E *si* $e_k \in E$ *y* X_k*'s son variables aleatorias independientes simétricas en el espacio de probabilidad* (Ω, Σ, μ).

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de las observaciones anteriores:

Proposición 1.7.4. *Sea* $\sum_{k=1}^n X_k e_k$ *una suma aleatoria en el espacio de Banach* E*, con* (Ω, Σ, P) *espacio de probabilidad involucrado.*

1. *Para* $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n = \pm 1$ *entonces* $\| \sum_{k=1}^n \epsilon_k X_k(\ ) e_k \| = \| \sum_{k=1}^n X_k(\ ) e_k \|$ *tienen la misma distribución.*

2. $\| \sum_{k=1}^n X_k(\ ) e_k \|$ *y* $\| \sum_{k=1}^n r_k(\ ) |X_k(\ )| e_k \|$ *tienen la misma distribución.*

3. *Para* $0 < p < \infty$

$$\begin{aligned} \int_\Omega \| \sum_{k=1}^n X_k(\omega) e_k \|^p \, dP(\omega) &= \int_0^1 \int_\Omega \| \sum_{k=1}^n r_k(t) X_k(\omega) e_k \|^p \, dP(\omega) \, dt \\ &= \int_0^1 \int_\Omega \| \sum_{k=1}^n r_k(t) |X_k(\omega)| e_k \|^p \, dP(\omega) \, dt. \end{aligned}$$

1.7.1. Variables Gaussianas

Una *variable Gaussiana* is una variable aleatoria g (real y simétrica) en el espacio de probabilidad (Ω, Σ, P) cuya distribución tiene la forma

$$P_g(B) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_B e^{\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \, dt,$$

para todo Boreliano B en $\mathbb{R}$. Aquí $\sigma > 0$ es un número fijo. Es tradicional llamar a σ^2 la *varianza* de g. Es sabido que el *p-ésimo momento Gaussiano* M_p

$$\left(\int_\Omega |g(\omega)|^p dP(\omega) \right)^{1/p}$$

existe para todo $0 < p < \infty$ y que el cuadrado de M_2 es justamente la varianza.

El próximo teorema muestra que los promedios dados por las funciones de Rademacher (de Bernoulli) están dominados por los promedios Gaussianos.

Teorema 1.7.5. *Sean* $e_1, \ldots, e_n$ *vectores en el espacio de Banach* E*. Entonces para todo* $1 \leq p < \infty$

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{k=1}^n r_k(t) e_k \|^p \, dt \right)^{1/p} \leq \frac{1}{M_1} \left(\int_\Omega \| \sum_{k=1}^n g_k(\omega) e_k \|^p \, dP(\omega) \right)^{1/p} \tag{1.16}$$

con M_1 *el primer momento Gaussiano.*

Demostración. Sea $t \in [0,1]$ fijo. Entonces

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \| &= \frac{1}{M_1} \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) M_1 e_k \| \\
&= \frac{1}{M_1} \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) \int_\Omega |g_k(\omega)| \, dP(\omega) e_k \|.
\end{aligned}$$

Notemos que $\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) \int_\Omega |g_k(\omega)| \, dP(\omega) e_k \|^p \leq \left(\int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k \| \, dP(\omega) \right)^p$. En efecto, sea $\varphi \in E'$ con $\|\varphi\| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_{k=1}^{n} r_k(t) \int_\Omega |g_k(\omega)| \, dP(\omega) e_k) &= \int_\Omega \varphi(\sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k) \, dP(\omega) \\
&\leq \int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k \| \, dP(\omega).
\end{aligned}$$

Basta tomar supremo y elevar a la p. Por lo tanto, para t fijo

$$\begin{aligned}
\| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \|^p &= \frac{1}{M_1{}^p} \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) \int_\Omega |g_k(\omega)| \, dP(\omega) e_k \|^p \\
&\leq \frac{1}{M_1{}^p} \left(\int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k \| \, dP(\omega) \right)^p \\
&\leq \frac{1}{M_1{}^p} \int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k \|^p \, dP(\omega),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la desigualdad de Jensen. Integrando, gracias a la Proposición 1.7.4 tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) e_k \|^p \, dt &\leq \frac{1}{M_1{}^p} \int_0^1 \int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} r_k(t) |g_k(\omega)| e_k \|^p \, dP(\omega) \, dt \\
&= \frac{1}{M_1{}^p} \int_\Omega \| \sum_{k=1}^{n} g_k(\omega) e_k \|^p \, dP(\omega).
\end{aligned}$$

Resta tomar raíz p-ésima. □

Capítulo 2

Distancias de Banach-Mazur

La teoría local se encarga de estudiar los subespacios de dimensión finita de un espacio de Banach. Una herramienta fundamental en dicha teoría es el concepto de distancia de Banach-Mazur. El mismo fue introducido a principios de la década del treinta por S. Banach [6]. Para espacios de Banach E y F, $d(E,F)$ mide cuan lejos está la bola unitaria de E con respecto a una imagen afín de la bola unitaria de F. Además, muestra cuánto pueden diferir parámetros numéricos del espacio E con los correspondientes parámetros del espacio F. Gracias a esto, podremos dar estimaciones para la constante de incondicionalidad para ciertos espacios de polinomios. En este capítulo expondremos los conceptos básicos de la teoría y mostraremos estimaciones para $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$.

2.1. Nociones basicas en distancias de Banach-Mazur

Se define la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios de Banach E y F isomorfos como

$$d(E,F) = \text{ínf}\{\|T\|\|T^{-1}\| \;/\; T : E \to F \text{ es un isomorfismo}\}.$$

Diremos que $d(E,F) = \infty$ si no son isomorfos.

Observemos que si B_E y B_F denotan las bolas unitarias de E y F respectivamente, entonces si $d(E,F) < d$ existe un isomorfismo $T : E \to F$ tal que

$$B_F \subset T(B_E) \subset dB_F. \tag{2.1}$$

De hecho, se puede computar la distancia de Banach Mazur entre E y F como el ínfimo de todos los escalares d que satisfacen la relación (2.1).

Llamemos $\mathfrak{B}$ al conjunto de todos los espacios de Banach. De manera elemental podemos ver que para $E, F, G \in \mathfrak{B}$ se tiene:

(a) $d(E,F) \geq 1$,

(b) $d(E,F) = d(F,E)$,

(c) $d(E,F) \leq d(E,G)d(G,F)$.

Por ende si consideramos $\rho(E,F) := \log d(E,F)$, obtenemos:

(a) $\rho(E,F) \geq 0$ y $\rho(E,F) = 0$ si y sólo si $d(E,F) = 1$,

(b) $\rho(E,F) = \rho(F,E)$,

(c) $\rho(E,F) \leq \rho(E,G) + \rho(G,E)$.

¡Tenemos definida una pseudo-métrica sobre $\mathfrak{B}$!

Denotemos $\widetilde{\mathfrak{B}}$ al espacio que se obtiene al cocientar $\mathfrak{B}$ por la relación: $E \sim F \iff \rho(E,F) = 0$. Luego, $(\widetilde{\mathfrak{B}}, \rho)$ es un espacio métrico. Notemos que si E y F son isométricamente isomorfos resulta que $d(E,F) = 1$ (por ende $E \sim F$). ¿Valdrá la vuelta? Si $d(E,F) = 1$, ¿tendrán que ser E y F isométricamente isomorfos? La respuesta, en general, es que no. C. Bessaga y A. Pelczynski, a fines de la década del setenta, mostraron dos espacios de Banach que distan en 1 que no son isométricos [7]. Sin embargo, en dimensión finita obtenemos una respuesta afirmativa. Es decir, resulta equivalente distar en 1 a ser isométricos. A continuación mostraremos estos resultados. Algunas definiciones y resultados previos serán de utilidad:

Definición 2.1.1. *Una norma $\| \ \|$ se dice estricamente convexa si la condición $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ implica que $x = cy$ para alguna constante c.*

El próximo lema asegura que cualquier norma que proviene de un producto interno es estrictamente convexa.

Lema 2.1.2. *Sea $(H, <,>)$ un espacio de Hilbert. Entonces $\|x\| := \sqrt{<x,x>}$ es estrictamente convexa.*

Demostración. Supongamos que se tiene la igualdad $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$. Elevando al cuadrado conseguimos: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$. Por otro lado, sabemos que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re(<x,y>)$. Por ende, $Re <x,y>= \|x\|\|y\|$. Como, $| <x,y> | \leq \|x\|\|y\|$ tenemos, en definitiva, la igualdad. Luego, por Cauchy-Schwartz x e y son linealmente dependientes, que es justamente lo que queríamos probar. $\square$

Veamos el ejemplo de Bessaga y Pelczynski. Sean $E = (c_0, \| \ \|_0)$ y $F = (c_0, \| \ \|_1)$, con

$$\begin{aligned} \|x\|_i &= \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |x_{j+i}|^2 \Big)^{1/2} \\ &= \|x\|_{\ell_\infty} + \|(\frac{x_{j+i}}{2^j})_j\|_{\ell_2}. \end{aligned}$$

Consideremos $T_k : E \to F$ dado por

$$T_k(x_1, x_2, \dots) = (x_k, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots).$$

Claramente T_k es una biyección. Para estimar su norma tomemos x tal que $\|x\|_0 = 1$. Notemos que $|x_j| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\|T_k x\|_1 &= \|T_k x\|_{\ell_\infty} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |(T_k x)_{j+i}|^2 \Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_{\ell_\infty} + \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2 + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} \Big)^{1/2} \\
&= \|x\|_{\ell_\infty} + \Big(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2 + \frac{(1/4)^k}{3/4} \Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_{\ell_\infty} + \Big(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2j}} |x_j|^2 \Big)^{1/2} + \Big(\frac{(1/4)^k}{3/4} \Big)^{1/2} \\
&= 1 + \Big(\frac{(1/4)^k}{3/4} \Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

De forma idéntica se puede ver que $\|(T_k)^{-1}\| \leq 1 + \Big(\frac{(1/4)^k}{3/4} \Big)^{1/2}$. Entonces,

$$d(E,F) \leq \|T_k\| \|(T_k)^{-1}\| \leq \left(1 + \Big(\frac{(1/4)^k}{3/4} \Big)^{1/2} \right)^2$$

Por consiguiente, $d(E,F) = 1$ pues el miembro derecho converge a 1 a medida que $k \to \infty$.

Veamos ahora que E y F no son isométricamente isomorfos. Para esto usaremos que $\| \; \|_0$ es una norma estrictamente convexa, mientras que $\| \; \|_1$ no lo es. En efecto, sean $x, y \in E$ tal que $\|x+y\|_0 = \|x\|_0 + \|y\|_0$. Luego,

$$\|x+y\|_{\ell_\infty} + \|(\frac{x_j + y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_\infty} + \|(\frac{x_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} + \|y\|_{\ell_\infty} + \|(\frac{y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2}.$$

Por lo cual,

$$0 = \underbrace{\|x\|_{\ell_\infty} + \|y\|_{\ell_\infty} - \|x+y\|_{\ell_\infty}}_{\geq 0} + \underbrace{\|(\frac{x_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} + \|(\frac{y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} - \|(\frac{x_j + y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2}}_{\geq 0}.$$

Se tiene entonces que $\|(\frac{x_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} + \|(\frac{y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2} = \|(\frac{x_j+y_j}{2^j})_j\|_{\ell_2}$. Por el lema anterior, $\| \; \|_{\ell_2}$ es estrictamente convexa. Luego existe c tal que $(\frac{x_j}{2^j})_j = c(\frac{y_j}{2^j})_j$. Por lo tanto, $x = cy$. Probando de esta manera que $\| \; \|_0$ es estrictamente convexa. Para ver que no ocurre lo mismo con $\| \; \|_1$, basta chequear que se verifica $\|x+y\|_1 = \|x\|_1 + \|y\|_1$ para los vectores linealmente independeientes $x = (1,0,0,\dots)$ e $y = (1,1,0,0,\dots)$.

¿Por qué E y F no son isométricamente isomorfos? Supongamos que lo fueran, entonces existe $T : E \to F$ isometría tal que $Ta = x$ y $Tb = y$ (x e y como antes). Por ende,

$$\|x+y\|_1 = \|a+b\|_0 = \|x\|_1 + \|y\|_1 = \|a\|_0 + \|b\|_0.$$

Como $\| \|_0$ es estrictamente convexa tenemos que a es un múltiplo de b, luego x es un múltiplo de y, llegando de esta manera un absurdo.

La siguiente proposición y el Corolario 2.1.4 muestran que un ejemplo como el anterior no puede existir en dimensión finita.

Proposición 2.1.3. *Sean E y F espacios de Banach tal que $dim(E) = dim(F) < \infty$. Entonces, existe $T : E \to F$ isomorfismo verificando: $d(E, F) = \|T\|\|T^{-1}\|$.*

Demostración. Tomemos $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de operadores inversibles de E en F tal que $\|T_n\|\|{T_n}^{-1}\| \to d(E, F)$. Como $\dim(E) = \dim(F) < \infty$, sabemos que $\mathcal{L}(E, F)$ es de dimensión finita. Por ende, podemos extraer una subsucesión T_{n_k} convergente a un operador T. Razonando de manera análoga, podemos suponer sin perder generalidad, que ${T_{n_k}}^{-1}$ converge a un operador S. Notemos que $T^{-1} = S$, pues

$$I_E = {T_{n_k}}^{-1}T_{n_k} \to ST,$$
$$I_F = T_{n_k}{T_{n_k}}^{-1} \to TS.$$

Luego,

$$\|T_{n_k}\|\|{T_{n_k}}^{-1}\| \to \|T\|\|T^{-1}\|,$$

obteniendo de esta manera lo que queríamos. □

Corolario 2.1.4. *Sean E y F son espacios de Banach de dimensión finita. Son equivalentes:*
(a) E y F son isométricamente isomorfos,
(b) $d(E, F) = 1$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) es trivial. Para la vuelta, tomemos un operador $T : E \to F$ tal que $\|T\|\|T^{-1}\| = d(E, F) = 1$. Si $R = \frac{T}{\|T\|}$, resulta que $\|R\| = \|R^{-1}\| = 1$. Inmediatamente se deduce entonces que $\|Rx\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Es decir, R es isometría. □

Denotaremos $\mathfrak{B}_n$ al conjunto $\{E \in \mathfrak{B} \ / \dim(E) = n\}$ cocientado por la relación: $E \sim F \iff E$ es isométricamente isomorfo F (equivalentemente, $\rho(E, F) = 0$). A $\mathfrak{B}_n$ se lo conoce como el compacto de Minkowski. Y lleva ese nombre pues $(\mathfrak{B}_n, \rho)$ es un espacio métrico compacto (ver [31]). A continuación mostraremos que $\mathfrak{B}_n$ está acotado. Previamente necesitaremos del siguiente lema debido a Auerbach.

Lema 2.1.5. *(De Auerbach) Sea E un espacio de Banach de dimensión n. Entonces, existe una base $(e_j)_{j=1}^n$ de E, con base dual $(e'_j)_{j=1}^n$, tal que $\|e_j\| = \|e'_j\| = 1$ para todo j.*

Demostración. Consideremos una base de E arbitraria $(z_j)_{j=1}^n$ con base dual $(z'_j)_{j=1}^n$. Se define $V : B_E \times \cdots \times B_E \to \mathbb{K}$ como:

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} z'_1(x_1) & \ldots & z'_n(x_1) \\ & \ldots & \\ z'_1(x_n) & \ldots & z'_n(x_n) \end{pmatrix}.$$

Tomemos $e_1, \ldots, e_n \in B_E$ tal que

$$V(e_1, \ldots, e_n) = \text{máx}\{|V(z_1, \ldots, z_n)| : z_j \in B_E\} = M.$$

Notemos que necesariamente $(e_j)_{j=1}^n$ es base de E y $\|e_j\| = 1$ para todo j. Si definimos la funcional

$$e'_j(x) := V(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_j)V(e_1, \ldots, e_j)^{-1} = \frac{V(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_j)}{M},$$

para cada j, tenemos que $e'_j(e_i) = \delta_{ji}$. Por ende, $(e'_j)_{j=1}^n$ es la base dual de $(e_j)_{j=1}^n$ y $\|e'_j\| \geq 1$ para cada j.

Restaría probar que $\|e'_j\| \leq 1$. En efecto, si x es un vector de norma 1,

$$|e'_j(x)| = \frac{|V(e_1, \ldots, e_{j-1}, x, e_{j+1}, \ldots, e_j)|}{M} \leq \frac{M}{M} = 1,$$

lo cual completa la demostración. □

Proposición 2.1.6. *Sea E un espacio de Banach de dimensión n. Se tiene entonces que $d(E, \ell_1^n) \leq n$.*

Demostración. Por el Lema de Auerbach sabemos que E tiene una base $(e_j)_{j=1}^n$, con base dual $(e'_j)_{j=1}^n$, de manera que $\|e_j\| = \|e'_j\| = 1$ para todo j. Veamos que

$$T : \ell_1^n \to E$$
$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{j=1}^n x_j e_j,$$

tiene norma 1. Tomemos x un vector de E, como

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \|e_j\| = \|x\|_1,$$

obtenemos que $\|T\| \leq 1$. Por otro lado, $T(1, 0 \ldots, 0) = e_1$. Luego, $\|T\| = 1$.

Estimemos ahora $\|T^{-1}\|$. Si $e = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in E$, tenemos que

$$\|T^{-1}e\| = \sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n |e'_j(e)| \leq \sum_{j=1}^n \|e\| = n\|e\|.$$

Lo cual muestra que $\|T^{-1}\| \leq n$. Por ende, $d(E, \ell_1^n) \leq n$. □

Como $d(E,F) \leq d(E,\ell_1^n)d(F,\ell_1^n)$ para todo par de espacios E y F, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.1.7. *Sean E y F son espacios de Banach de dimensión n. Entonces, $d(E,F) \leq n^2$.*

Notemos que el corolario anterior dice justamente que $\mathfrak{B}_n$ está acotado.

F. John en 1948, usando argumentos puramente geométricos, probó en [20] que para todo espacio de Banach de dimensión n se tiene que $d(E,\ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. Por consiguiente, $d(E,F) \leq n$ para todo par E, $F \in \mathfrak{B}_n$. Para una demostración de este hecho se recomienda ver [21]. Por otro lado, en la próxima sección veremos que $d(\ell_\infty^n,\ell_2^n) = d(\ell_1^n,\ell_2^n) = \sqrt{n}$. Por ende, la cota de John resulta óptima.

La siguiente proposición nos será de utilidad para los cálculos de la próxima sección.

Proposición 2.1.8. *Sean E y F son espacios de Banach. Entonces,*

$$d(E',F') \leq d(E,F). \tag{2.2}$$

Si además ambos espacios son reflexivos, vale la igualdad.

Demostración. Tomemos T un isomorfismo de E en F. Tenemos entonces que $T^{-1}T = Id_E$ y $TT^{-1} = Id_F$. Trasponiendo, obtenemos: $T'(T^{-1})' = Id_{E'}$ y $(T^{-1})'T' = Id_{F'}$. Lo cual muestra que $T' : F' \to E'$ es isomorfismo con inversa $(T^{-1})' : E' \to F'$. Por consiguiente,

$$d(E',F') \leq \|T'\|\|(T^{-1})'\| = \|T\|\|T^{-1}\|.$$

Resta tomar ínfimo sobre todos los isomorfismos para llegar a (2.2).

Supongamos ahora que E y F son reflexivos. Por lo visto recién, tenemos que

$$d(E',F') \leq d(E'',F'') = d(E,F),$$

ya que E y F son isométricamente isomorfos a E'' y F'' respectivamente.

□

2.2. Estimaciones para $d(\ell_p^n,\ell_q^n)$

En dimensión finita, sabemos que todos los espacios de Banach de igual dimensión sobre el mismo cuerpo de escalares son isomorfos. Por ende, el estudio en espacios de dimensión finita será significativo únicamente si es de índole cuantitativo. En 1965 V. Gurarii, M. Kadec y V. Macaev mostraron en [19] estimaciones para la distancia de Banach-Mazur entre ℓ_p^n y ℓ_q^n con $1 \leq p,q \leq \infty$. En esta sección pretendemos exponer sus resultados. Nos será de utilidad introducir un poco de notación...

Diremos que dos sucesiones de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo comportamiento asintótico, si existen constantes $A > 0$ y $B > 0$ tal que para todo n se tiene que

$$a_n \leq Ab_n \ \text{ y } \ b_n \leq Ba_n.$$

En tal caso escribiremos

$$(a_n) \asymp (b_n).$$

Teorema 2.2.1. ***(Gurarii, Kadec y Macaev)*** *Sean $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Valen las siguientes estimaciones para $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$:*

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{1/p-1/q} \ \ \text{si} \ \ 1 \leq p \leq q \leq 2 < \infty \ \ \text{ó} \ \ 2 \leq p \leq q \leq \infty \tag{2.3}$$

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \asymp n^{\alpha} \qquad \text{si} \ \ 1 \leq p < 2 < q \leq \infty \tag{2.4}$$

con $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$.

La mayoría de las veces resulta complicado calcular distancias de Banach-Mazur ya que, en general, es difícil encontrar un operador T para el cual el producto $\|T\|\|T^{-1}\|$ sea mínimo o cercano al mínimo. El Teorema 2.2.1 será un claro ejemplo de este hecho. Dividiremos la demostración en pasos.

Para $1 \leq p, q \leq \infty$ denotaremos $I_{pq} : \ell_p^n \to \ell_q^n$ a la identidad formal de ℓ_p^n en ℓ_q^n. El siguiente lema computa exáctamente la norma de este operador.

Lema 2.2.2. *Si $1 \leq p \leq q \leq \infty$ se tiene $\|I_{pq}\| = 1$ y $\|I_{qp}\| = n^{1/p-1/q}$.*

Demostración. Calculemos primero $\|I_{pq}\|$. Como $p \leq q$ tenemos la conocida desigualdad $\| \ \|_q \leq \| \ \|_p$. Por otro lado, si e_1 es el primer vector de la base canónica, se tiene $\|e_1\|_q = \|I_{pq}e_1\|_q = 1 = \|e_1\|_p$. Lo cual muestra que $\|I_{pq}\| = 1$.

Nos proponemos estimar ahora $\|I_{qp}\|$. Vamos a considerar dos casos. Para el primero: $1 \leq p \leq q < \infty$, usando la desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned} \|x\|_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k|^p)^{q/p} \right)^{p/q} n^{\frac{q-p}{q}} \\ &= \|x\|_q^p \, n^{1-\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Tomando raíz p-ésima se tiene $\|I_{qp}x\|_p = \|x\|_p \leq \|x\|_q \, n^{1/p-1/q}$. Por lo tanto: $\|I_{qp}\| \leq n^{1/p-1/q}$. Para ver la igualdad consideremos $x = (1, 1, \ldots, 1)$. Tenemos entonces:

$$\frac{\|I_{qp}x\|_p}{\|x\|_q} = \frac{n^{1/p}}{n^{1/q}} = n^{1/p-1/q}.$$

Lo cual muestra que $\|I_{qp}\| = n^{1/p-1/q}$.

Para el segundo caso: $1 \leq p < q = \infty$, notemos que

$$\|x\|_p^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty^p = n\|x\|_\infty^p.$$

Por lo tanto: $\|I_{qp}x\|_p = \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Para la igualdad basta notar que el vector $x = (1, 1, \ldots, 1)$ realiza la norma. $\square$

Lema 2.2.3. *Para $2 \leq q \leq \infty$ vale que $d(\ell_q^n, \ell_2^n) = n^{1/2-1/q}$.*

Demostración. Tomemos $T : \ell_q^n \to \ell_2^n$ isomorfismo tal que $\|T^{-1}\| = 1$. Si $(e_i)_{i=1}^n$ es la base canónica, se tiene

$$\begin{aligned} n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_q = \sum_{i=1}^{n} \|T^{-1}(Te_i)\|_q &\leq \sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|_2 \\ &= \int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, Te_i\|_2^2 \, dt = \int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} T(r_i(t)\, e_i)\|_2^2 \, dt \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \|T(\sum_{i=1}^{n} r_i(t)\, e_i)\|_2^2 \leq \|T\|^2 (n^{1/q})^2. \end{aligned}$$

Se consigue de esta manera la desigualdad $n^{1/2-1/q} \leq \|T\|$. Como T es un isomorfismo arbitrario obtenemos:

$$d(\ell_q^n, \ell_2^n) \geq n^{1/2-1/q}.$$

Ver que $d(\ell_q^n, \ell_2^n) \leq n^{1/2-1/q}$ es sencillo usando el Lema 2.2.2. En efecto,

$$d(\ell_q^n, \ell_2^n) \leq \underbrace{\|I_{q2}\|}_{n^{1/2-1/q}} \underbrace{\|I_{2q}\|}_{1} = n^{1/2-1/q}.$$

$\square$

Proposición 2.2.4. *Para $1 \leq p \leq q \leq 2$ o $2 \leq p \leq q \leq \infty$ vale $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{1/p-1/q}$.*

Demostración. Como los espacios involucrados son de dimensión finita, por la Proposición 2.1.8 podemos asumir sin perder generalidad que $2 \leq p \leq q \leq \infty$. El lema anterior asegura que

$$n^{1/2-1/q} = d(\ell_q^n, \ell_2^n) \leq d(\ell_q^n, \ell_p^n) d(\ell_2^n, \ell_p^n) = d(\ell_q^n, \ell_p^n) n^{1/2-1/p}.$$

Se tiene entonces:

$$n^{1/p-1/q} \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n).$$

Por otro lado,

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \underbrace{\|I_{pq}\|}_{1} \underbrace{\|I_{qp}\|}_{n^{1/p-1/q}} = n^{1/p-1/q}.$$

Llegando de esta manera a la igualdad deseada. $\square$

Proposición 2.2.5. *Sea $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$. En el caso en que el cuerpo de escalares sea $\mathbb{C}$, vale la siguiente desigualdad:*

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq n^{\alpha}, \tag{2.5}$$

con $\alpha = \max(1/p - 1/2, 1/2 - 1/q)$.

Antes de dar una demostración, recordemos un teorema clásico de interpolación de análisis real:

Teorema 2.2.6. *Riesz-Thorin: Consideremos (Ω, Σ, μ) un espacio de medida; sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $1 \leq r_0, r_1 \leq \infty$ y T un operador lineal tal que*

$$T(L_{p_i}(\Omega, \Sigma, \mu)) \subset L_{p_i}(\Omega, \Sigma, \mu)$$

con

$$\|T : L_{p_i} \to L_{r_i}\| = M_i.$$

Entonces, para $0 < \theta < 1$ y p, q que verifican:

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$$

se tiene que

$$T(L_p(\Omega, \Sigma, \mu)) \subset L_r(\Omega, \Sigma, \mu),$$

y además,

$$\|T : L_p \to L_r\| = {M_0}^{1-\theta}{M_1}^{\theta}.$$

Demostración. (De la proposición 2.2.5) Podemos asumir sin perder generalidad que $1/2 - 1/q \geq 1/p - 1/2$. En efecto, si $1/p - 1/2 > 1/2 - 1/q$ reescribiendo tenemos:

$$1/2 - \underbrace{(1 - 1/p)}_{1/p'} > \underbrace{(1 - 1/q)}_{1/q'} - 1/2,$$

con $1 \leq q' < 2 < p' \leq \infty$. Basta recordar que $d(\ell_{p'}^n, \ell_{q'}^n) = d(\ell_p^n, \ell_q^n)$.

Consideremos ahora la matriz V_n definida de la siguiente manera

$$(V_n)_{m,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i m j}{n}}$$

Pretendemos estimar $\|T_n : \ell_p^n \to \ell_q^n\|$ y $\|T_n^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\|$ (donde T_n es el operador asociado a la matriz V_n), dando así una cota para $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$. Para esto, usaremos el Teorema de Riez-Thorin y un poco de ingenio.

Afirmo que V_n es una matriz ortogonal para todo n. En efecto, como

$$V_n(e_k) = (\frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i 1k}{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i 2k}{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{2\pi i nk}{n}}),$$

se tiene que $< V_n(e_k), V_n(e_k) >= 1$. Por otro lado, si $k \neq l$ obtenemos

$$\begin{aligned}
< V_n(e_k), V_n(e_l) > &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i jk}{n}} \; e^{\frac{-2\pi i jl}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i j(k-l)}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(e^{\frac{2\pi i (k-l)}{n}} \right)^j \\
&= \frac{e^{\frac{2\pi i (k-l)}{n}} - \left(e^{\frac{2\pi i (k-l)}{n}} \right)^{n+1}}{n - n e^{\frac{2\pi i (k-l)}{n}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como V_n es una matriz ortogonal, resulta que $T_n : \ell_2^n \to \ell_2^n$ es un isomorfismo isométrico. Por lo tanto,

$$\|T_n : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1. \tag{2.6}$$

Estimemos $\|T_n : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\|$: como $|(V_n)_{m,j}| = \frac{1}{\sqrt{n}}$ se tiene que $\|T_n(e_k)\|_\infty = n^{-1/2}$. Tomemos $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$,

$$\|T_n x\|_\infty = \| \sum_{k=1}^{n} x_k T_n(e_k) \|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \underbrace{\|T_n(e_k)\|_\infty}_{n^{-1/2}} = n^{-1/2} \|x\|_1.$$

Hemos probado que

$$\|T_n : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = n^{-1/2}. \tag{2.7}$$

Es hora de usar el Teorema de Riez-Thorin con

$$\begin{aligned}
p_0 = 1 \;\; r_0 = \infty \\
p_1 = 2 \;\; r_1 = 2.
\end{aligned}$$

¿Cómo tiene que ser θ para que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$? Si reemplazamos, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= 1 - \theta + \frac{\theta}{2} \\
&= 1 - \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces θ tendrá que valer $2 - 2/p$. Para tal θ calculemos r de manera que $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}$. Despejando

$$\begin{aligned}\frac{1}{r} &= \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1} \\ &= \frac{(2-2/p)}{2} \\ &= 1 - 1/p \\ &= 1/p',\end{aligned}$$

se llega a que $r = p'$. Por lo tanto, usando Riez-Thorin con (2.6) y (2.7), llegamos a que

$$\|T_n : \ell_p \to \ell_{p'}\| \leq (n^{-1/2})^{1-(2-2/p)}\ 1^{2-2/p} = n^{1/2-1/p}. \tag{2.8}$$

Como $1/2 - 1/q \geq 1/p - 1/2$ obtenemos que $q \geq p'$, por ende $\|I_{p'q}\| = 1$. Se deduce inmediatamente de (2.8) y del diagrama

$$\begin{tikzcd} \ell_p^n \arrow[rr, "T_n"] \arrow[dr, "T_n"'] & & \ell_q^n \\ & \ell_{p'}^n \arrow[ur, "I_{p'q}"'] & \end{tikzcd}$$

que

$$\|T_n : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \leq n^{1/2-1/p}. \tag{2.9}$$

Por otro lado, considerando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \ell_q^n \arrow[r, "T_n^{-1}"] \arrow[d, "I_{q2}"'] & \ell_p^n \\ \ell_2^n \arrow[r, "T_n^{-1}"'] & \ell_2^n \arrow[u, "I_{2p}"'] \end{tikzcd}$$

tenemos

$$\|T_n^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| \leq \underbrace{\|I_{q2}\|}_{n^{1/2-1/q}}\ \underbrace{\|T_n^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\|}_{1}\ \underbrace{\|I_{2p}\|}_{n^{1/p-1/2}} = n^{1/p-1/q}. \tag{2.10}$$

Usando (2.9) y (2.10) se ve que

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \|T\|\|T^{-1}\| \leq n^{1/2-1/p}\ n^{1/q-1/p} = n^{1/2-1/q}.$$

□

Consideraremos ahora el caso real. Es importante notar que la demostración de la proposición anterior no vale para el caso real ya que la matriz V_n deja de tener sentido. Necesitaremos entonces reemplazar V_n por un nuevo nuevo operador.

Proposición 2.2.7. *Sea $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$. Si el cuerpo de escalares es $\mathbb{R}$, entonces existe K tal que*

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq K n^{\alpha}, \tag{2.11}$$

con $\alpha = \text{máx}(1/p - 1/2, 1/2 - 1/q)$. Más aún, si n es una potencia de 2, podemos tomar $K = 1$.

Demostración. Comencemos considerando el caso en que en $n = 2^k$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer nuevamente que $\alpha = 1/p - 1/2$.

Se define la k-ésima matriz de Walsh, $W^k \in M_{2^k}(\mathbb{R})$, de forma inductiva: $W^0 = 1$ y

$$W^k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} W^{k-1} & W^{k-1} \\ W^{k-1} & -W^{k-1} \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que W^k es ortogonal. Por otro lado, notemos que $|W^k_{m,j}| = (2^k)^{-1/2} = n^{-1/2}$ (al igual que pasaba con $|(V_n)_{m,j}|$). Llamando T_n al operador asociado a W^k y razonando al igual que en la demostración de la Proposición 2.2.5, tenemos que

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d(\ell_p^{2^k}, \ell_q^{2^k}) \leq 2^{k^{1/2-1/q}} = n^{1/2-1/q}; \tag{2.12}$$

probando así lo que queríamos. Tratemos de estimar ahora $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$ para el caso en que n no es una potencia de dos. Lo haremos por inducción. Tomemos $K \geq 1$ de manera que vale la desigualdad

$$2^{k\frac{\alpha}{2}} + K^{\frac{1}{2}} m^{\frac{\alpha}{2}} \leq K^{1/2} (2^k + m)^{\frac{\alpha}{2}}. \tag{2.13}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y m con $1 \leq m \leq 2^k$. Supongamos que $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq K n^{\frac{\alpha}{2}}$ para todo n menor o igual que 2^k. Veamos que vale también la desigualdad para todo n menor o igual que 2^{k+1}. Fijemos n con $2^k < n \leq 2^{k+1}$. Entonces $n = 2^k + m$ para algún m con $1 \leq m \leq 2^k$.

Observemos que

$$\ell_p^n = (\ell_p^{2^k} \oplus \ell_p^m)_p.$$

Consideremos ahora el operador $T : \ell_p^n \to \ell_1^n$ dado por

$$T = T_1 \oplus T_2,$$

con $T_1 \in L(\ell_p^{2^k}, \ell_q^{2^k})$ y $T_2 \in L(\ell_p^m, \ell_q^m)$ tales que

$$\|T_1\| = \|T_1^{-1}\| = d(\ell_p^{2^k}, \ell_q^{2^k})^{1/2} \leq (2^k)^{\frac{\alpha}{2}},$$
$$\|T_2\| = \|T_2^{-1}\| = d(\ell_p^m, \ell_q^m)^{1/2} \leq K m^{\frac{\alpha}{2}}.$$

Donde las últimas desigualdades valen por (2.12) e hipótesis inductiva.

Sea $x \in \ell_p^n$, $x = (x_1, \dots, x_{2^k}, x_{2^k+1}, \dots, x_{2^k+m})$. Llamemos a y b a los vectores de $\ell_p^{2^k}$ y ℓ_p^m respectivamente dados por

$$\begin{aligned} a &= (x_1, \dots, x_{2^k}), \\ b &= (x_{2^k+1}, \dots, x_{2^k+m}). \end{aligned}$$

Tenemos entonces por (2.13) que

$$\begin{aligned} \|Tx\|_{\ell_q^n} &= \|T_1 a\|_{\ell_q^{2^k}} + \|T_2 b\|_{\ell_q^m} \\ &\leq 2^{k\frac{\alpha}{2}} \|a\|_{\ell_p^{2^k}} + K^{1/2} m^{\frac{\alpha}{2}} \|b\|_{\ell_p^m} \\ &= 2^{k\frac{\alpha}{2}} \|x\|_{\ell_p^n} + K^{1/2} m^{\frac{\alpha}{2}} \|x\|_{\ell_p^n} \\ &\leq K^{1/2} n^{\frac{\alpha}{2}} \|x\|_{\ell_p^n}. \end{aligned}$$

Por ende, $\|T : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \leq K^{1/2} n^{\frac{\alpha}{2}}$. Análogamente se ve que $\|T^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| \leq K^{1/2} n^{\frac{\alpha}{2}}$. Hemos probado finalmente que

$$d(\ell_q^n, \ell_q^n) \leq K n^\alpha.$$

$\square$

Para la siguiente estimación necesitaremos un resultado debido a W. Orlicz conocido como la desigualdad de cotipo 2 para L_p. Recomendamos ver [1, Teorema 6.2.14]:

Teorema 2.2.8. *Para $1 \leq p \leq 2$ y $f_1, \dots, f_n \in L_p(\mu)$ se tiene la desigualdad:*

$$\Big(\int_0^1 \| \sum_{j=1}^n r_j(t) f_j \|_{L_p(\mu)}^2 \, dt \Big)^{1/2} \geq A_p \Big(\sum_{j=1}^n \|f_j\|_{L_p(\mu)}^2 \Big)^{1/2} \tag{2.14}$$

donde A_p es la constante de la desigualdad de Khintchine 1.5.1.

Proposición 2.2.9. *Sea $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$. Entonces, existe una constante C tal que para todo n se tiene*

$$C n^\alpha \leq d(\ell_p, \ell_q), \tag{2.15}$$

con $\alpha = \text{máx}(1/p - 1/2, 1/2 - 1/q)$.

Demostración. Sea $T : \ell_q^m \to \ell_p^n$ tal que $\|T^{-1}\| = 1$. Observemos que $n \leq \sum_{j=1}^n \|Te_j\|_p^2$ pues

$$1 = \|e_j\|_q = \|T^{-1} T e_j\|_q \leq \|T^{-1}\| \|T e_j\|_p = \|T e_j\|_p.$$

Por la desigualdad de cotipo 2 para ℓ_p^n vemos que

$$\begin{aligned}
{A_p}^2 n &\leq {A_p}^2 \sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|_p^2 \\
&\leq \int_0^1 \|T(\sum_{j=1}^{n} r_j e_j)\|_p^2 \, dt \\
&\leq \max_{t\in[0,1]} \|T(\sum_{j=1}^{n} r_j(t) e_j)\|_p^2 \\
&\leq \|T\|^2 (n^{1/q})^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T\| \geq A_p n^{1/2-1/q}.$$

Como $\|T^{-1}\| = 1$ tenemos:

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq A_p n^{1/2-1/q}. \tag{2.16}$$

Veamos ahora que $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq A_p n^{1/p-1/2}$.

Notemos que $1 \leq q' < 2 < p' \leq \infty$ si p' y q' son conjugados de p y q respectivamente. Razonando igual que antes, conseguimos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}
d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d(\ell_{p'}^n, \ell_{q'}^n) &\geq A_{p'} n^{1/2-1/p'} \\
&= A_{p'} n^{1/2-(1-1/p)} \\
&= A_{p'} n^{1/p-1/2}.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces de la desigualdad anterior y (2.16), que existe una constante C tal que

$$Cn^{\alpha} \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n).$$

□

El Teorema 2.2.1 resulta una consecuencia inmediata de las cuatro últimas proposiciones.

2.3. Algunos resultados necesarios

Aquí pretendemos enumerar algunos resultados (que involucran distancias de Banach-Mazur) importantes para entender el problema de incondicionalidad.

Los siguientes dos teoremas relacionan la constante de incondicionalidad (respectivamente la constante de Gordon-Lewis) de dos espacios de Banach isomorfos.

Proposición 2.3.1. *Sean E y F espacios de Banach isomorfos. Entonces*

$$\chi(E) \leq d(E,F)\chi(F). \tag{2.17}$$

Demostración. Sean $T : F \to E$ un isomorfismo arbitrario y $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ una base incondicional de F también arbitraria. Llamemos e_j al vector Tf_j. Tomemos $a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_N$ escalares cualesquiera tales que $|a_j| \leq |b_j|$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\|\sum_{j=1}^{N} a_j e_j\| = \|\sum_{j=1}^{N} a_j T f_j\| &\leq \chi((f_j))\|T\|\|\sum_{j=1}^{N} b_j f_j\| \\ &\leq \chi((f_j))\|T\|\|T^{-1}\|\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\|.\end{aligned}$$

Como T era arbitrario tenemos, para $a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_N$ escalares cualesquiera con $|a_j| \leq |b_j|$, que:

$$\|\sum_{j=1}^{N} a_j e_j\| \leq \chi((f_j))d(E,F)\|\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\|.$$

Luego, $\chi(E) \leq \chi((e_j)) \leq \chi((f_j))d(E,F)$. Como (f_j) era una base incondicional arbitraria tenemos lo que queríamos. □

Proposición 2.3.2. *Si E y F son isomorfos se tiene*

$$gl(E) \leq d(E,F)gl(F). \tag{2.18}$$

Demostración. Si $T : E \to F$ isomorfismo; por la Observación 1.6.2 tenemos

$$gl(E) \leq \|T\|\|T^{-1}\|gl(F),$$

resta tomar ínfimo sobre todos los isomorfismos. □

La próxima proposición relaciona la constante de Gordon-Lewis del espacio de polinomios $\mathcal{P}(^mE)$ con la constante de Gordon-Lewis de $\mathcal{P}(^mF)$, para un espacio F isomorfo a un subespacio complementado del espacio de Banach E. La misma será vital para los capítulos siguientes.

Proposición 2.3.3. *Sean E y F espacios de Banach tales que F es isomorfo a un subespacio complementado G de E. Entonces $\mathcal{P}(^mF)$ (respectivamente $\mathcal{P}_w(^mF)$) es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$ (resp. $\mathcal{P}_w(^mE)$) y si $P : E \to E$ es el proyector asociado entonces*

$$gl(\mathcal{P}(^mF)) \leq \|P\|^m d(G,Z)^m gl(\mathcal{P}(^mE)), \tag{2.19}$$

$$gl(\mathcal{P}_w(^mF)) \leq \|P\|^m d(G,Z)^m gl(\mathcal{P}_w(^mE)). \tag{2.20}$$

Demostración. Probemos que $\mathcal{P}(^mF)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$ y la desigualdad (2.19). Para $\mathcal{P}_w(^mF)$ se razona de manera análoga. Sea $R : F \to G$ un isomorfismo entre F y G. Consideremos la aplicaciones

$$S : \mathcal{P}(^mE) \to \mathcal{P}(^mF); \qquad\qquad T : \mathcal{P}(^mF) \to \mathcal{P}(^mE),$$

donde $S(Q)(z_1, \dots, z_m) = Q(Rz_1, \dots, Rz_m)$ y $T(Q)(x_1, \dots, x_m) = Q(R^{-1}Px_1, \dots, R^{-1}Px_m)$. Un sencillo cálculo muestra que $\|S\| \leq \|R\|^m$ y que $\|T\| \leq \|R^{-1}P\|^m \leq \|R^{-1}\|^m\|P\|^m$ Por otro lado $ST = Id_{\mathcal{P}(^mE)}$. En efecto,

$$\begin{aligned} ST(Q)(z_1, \dots, z_m) &= T(Q)(Rz_1, \dots, Rz_m) \\ &= Q(R^{-1}PRz_1, \dots, R^{-1}PRz_m) \\ &= Q(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

Por la Observación 1.6.2 se tiene que $\mathcal{P}(^mF)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$ y

$$\begin{aligned} gl(\mathcal{P}(^mF)) &\leq \|S\|\|T\|gl(\mathcal{P}(^mE)), \\ &\leq \|R\|^m\|R^{-1}\|^m\|P\|^m gl(\mathcal{P}(^mE)). \end{aligned}$$

Resta tomar ínfimo sobre todos los isomorfismos $R : F \to G$. $\square$

De los razonamientos anteriores se deduce:

Corolario 2.3.4. *Si F es un subespacio complementado de E entonces $\mathcal{P}(^mF)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$.*

La próxima proposición dice que contener a la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada se puede interpretar como contener subespacios complementados con distancias de Banach-Mazur a ℓ_p^n's equiacotadas.

Proposición 2.3.5. *Sea E un espacio de Banach que contiene a la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementa. Entonces existe una constante C tal que para todo n hay un subespacio complementado F_n de E verificando $d(\ell_p^n, F_n) \leq C$.*

Demostración. Como E contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada hay una constante C tal que para todo n natural existen operadores $S_n : \ell_p^n \to E$ y $T_n : E \to \ell_p^n$ con $T_nS_n = Id_{\ell_p^n}$ y $\|S_n\|\|T_n\| \leq C$. En particular ℓ_p^n es isomorfo a un subespacio complementado F_n de E, $S_nT_n : E \to E$ proyector asociado (se razona tal como hicimos en la Observación 1.6.2).

Además se tiene que $d(\ell_p^n, F_n) \leq C$. En efecto, si restringimos T_n y co-restringimos S_n se tiene que $T_n|_{F_n} : F_n \to \ell_p^n$, $S_n : \ell_p^n \to F_n$ son isomorfismos tales que $Id_{\ell_p^n} = T_n|_{F_n} S_n$, $Id_F = S_n T_n|_F$. Por ende,

$$d(\ell_p^n, F_n) \leq \|T_n|_F\| \|S_n\| \leq \|S_n\| \|T_n\| \leq C.$$

$\square$

Capítulo 3

Bases monomiales y descomposiciones de Schauder para $\mathcal{P}_w(^mE)$

Como sabemos, las bases de Schauder son de suma importancia en la teoría de espacios de Banach. En este capítulo estudiaremos una estructura más general: las descomposiciones de Schauder. Mostraremos, bajo ciertas hipótesis, que $\mathcal{P}_w(^mE)$ admite descomposición de Schauder y usaremos este hecho para exhibir una base natural en $\mathcal{P}_w(^mE)$: la base monomial.

3.1. Descomposiciones de Schauder

Dado un espacio de Banach E, diremos que la sucesión de subespacios cerrados $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una *descomposición de Schauder* para E (o simplemente una descomposición para E) si todo $x \in E$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$ con $u_j \in E_j$. Es decir, la sucesión de sumas parciales $(\sum_{j=1}^{N} u_j)_N$ converge a x en la topología de la norma.

Observemos que si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una descomposición de Schauder con $\dim(E_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$, se tiene que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es base de Schauder si el vector e_j genera E_j. Esto muestra que, efectivamente, las descomposiciones son más generales que las bases.

Llamaremos a la sucesión subespacios cerrados $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$, *descomposición básica de Schauder*, si es una descomposición de Schauder para $\overline{\operatorname{span}\{E_j : j \in \mathbb{N}\}}$. Si $\dim(E_j) < \infty$ para todo j diremos que la descomposición es de dimensión finita.

La próxima proposición caracteriza a las descomposiciones de Schauder:

Proposición 3.1.1. *Criterio de Grinblyum: La sucesión $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ de subespacios cerrados del espacio de Banach E es una descomposición básica de Schauder si y sólo si existe una constante C tal que para toda sucesión de vectores $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$), toda elección de escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, y $M \leq N$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{j=1}^{M} \alpha_j u_j \Big\| \leq C \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j \Big\|. \tag{3.1}$$

En tal caso, se define la constante de la descomposición: $C(\{E_j\}_{j=1}^{\infty})$, como el ínfimo de todas las constantes C que verifican (3.1). Si $C(\{E_j\}_{j=1}^{\infty}) = 1$ diremos, tal como hacíamos cuando tratábamos con bases de Schauder, que la descomposición $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es monótona. A continuación probaremos la Proposición 3.1.1:

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $F = \overline{\operatorname{span}\{E_j : j \in \mathbb{N}\}}$. Consideremos, para cada k, el operador

$$\begin{aligned}\Pi_k : F &\to F\\ \sum_{j=1}^{\infty} u_j &\mapsto \sum_{j=1}^{k} u_j;\end{aligned}$$

de proyección en $\oplus_{j=1}^{k} E_j$. Con un poco de trabajo, adaptando [1, Teorema 1.1.3] se prueba que estos operadores son acotados. Como para cada x, vale que $P_k(x) \to x$, por Banach Steinhaus se tiene $C := \sup_k \Pi_k < \infty$. Tomemos $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) sucesión de vectores, escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$, y $M \leq N$. Entonces

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{j=1}^{M} \alpha_j u_j \Big\| &= \Big\| \Pi_M\big(\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j\big) \Big\|\\ &\leq \|\Pi_M\| \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j \Big\|\\ &\leq C \Big\| \sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j \Big\|.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Para cada k consideremos

$$\begin{aligned}\Pi_k : \operatorname{span}\{E_j : j \in \mathbb{N}\} &\to \operatorname{span}\{E_j : j \in \mathbb{N}\}\\ \sum u_j &\mapsto \sum_{j=1}^{k} u_j,\end{aligned}$$

donde $\sum u_j$ es una suma finita. La condición dada en (3.1) asegura que Π_k es un operador acotado con $\|\Pi_k\| \leq C$. Por abuso de notación, llamaremos también Π_k a su extensión a F.

Sea $x \in F$ y $\varepsilon > 0$ dado. Existe $y \in \operatorname{span}\{E_j : 1 \leq j \leq n(\varepsilon)\}$ tal que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Si $n \geq n(\varepsilon)$, entonces

$$\begin{aligned}\|x - \Pi_n(x)\| &\leq \|x - y\| + \|y - \Pi_n(y)\| + \|\Pi_n(y) - \Pi_n(x)\|\\ &= \|x - y\| + \|y - y\| + \|\Pi_n(y - x)\|\\ &\leq \varepsilon + \|\Pi_n\|\varepsilon \leq (1 + C)\varepsilon.\end{aligned}$$

Lo cual muestra que $x = \lim_{n\to\infty} \Pi_n(x)$. Por ende, x se representa como $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$ con $u_j \in E_j$. Probar que esta representación es única es sencillo. $\square$

La Proposición 3.1.1 muestra que si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una descomposición para E y $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de vectores no nulos con $u_j \in E_j$, se tiene que $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión básica, con constante básica $K((u_j)_{j=1}^{\infty}) \leq C$. ¿Qué pasa si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión de subespacios cerrados de E, tal que toda sucesión de vectores no nulos $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) es básica? ¿Será $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una descomposición básica? W. Davis en [8] mostró que en general no. La siguiente proposición asegura que casi...

Proposición 3.1.2. *Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de subespacios cerrados de E, tal que toda sucesión de vectores no nulos $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) es básica. Entonces existe un n tal que $\{E_j\}_{j=n}^{\infty}$ es descomposición básica.*

Antes de demostrar 3.1.2, nos será útil probar un lema e introducir un poco de notación. Para $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una descomposición básica y $U := (u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) definimos $K(U_n) := K((u_j)_{j=n}^{\infty})$ la constante básica de la sucesión $(u_j)_{j=n}^{\infty}$. Es decir, $K(U_n)$ es la menor constante K tal que para toda elección de escalares $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}$ y $p < q$ se tiene

$$\|\sum_{j=n}^{n+p} \alpha_j u_j\| \leq K \|\sum_{j=n}^{n+q} \alpha_j u_j\|.$$

Lema 3.1.3. *Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de subespacios cerrados de E tal que toda sucesión de vectores no nulos $U := (u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) es básica. Entonces existe un número n natural y una constante C tal que para toda sucesión U (como antes) se tiene $K(U_n) \leq C$.*

Demostración. Supongamos que C y n no existen. Entonces para todo k natural y $M \geq 1$, existe una sucesión U con $K(U_k) > M$ (notar que $K(U_{k+1}) \leq K(U_k)$). Elijamos $U^{(1)} = (u_j^{(1)})_{j=1}^{\infty}$ sucesión de vectores no nulos (con $u_j^{(1)} \in E_j$) tal que $K(U^{(1)}) > 2$. Por lo tanto, existen escalares (α_j^1) y $p_1 < q_1$ tal que

$$\|\sum_{j=1}^{p_1} \alpha_j^1 u_j^{(1)}\| > 2 \|\sum_{j=1}^{q_1} \alpha_j^1 u_j^{(1)}\|.$$

Análogamente, existe una sucesión de vectores no nulos $U^{(2)}$ y p_2, q_2 con $q_1 < p_2 < q_2$ tal que

$$\|\sum_{j=q_1+1}^{p_2} \alpha_j^2 u_j^{(2)}\| > 4 \|\sum_{j=q_1+1}^{q_2} \alpha_j^2 u_j^{(2)}\|,$$

para escalares (α_j^2). En general, existe $U^{(r)}$ y p_r, q_r con $q_{r-1} < p_r < q_r$ tal que

$$\|\sum_{j=q_{r-1}+1}^{p_r} \alpha_j^r u_j^{(r)}\| > 2^r \|\sum_{j=q_{r-1}+1}^{q_r} \alpha_j^r u_j^{(r)}\|.$$

Si definimos U por $u_j := u_j^{(r)}$ si $q_{r-1} < j \leq q_r$ resulta, de las desigualdades anteriores, que U es una sucesión de vectores no nulos que no es básica. Hemos llegado a un absurdo. $\square$

La Proposición 3.1.2 se deduce inmediatamente del criterio de Grinblyum y del lema anterior.

Corolario 3.1.4. *La sucesión de subespacios de cerrados $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es descomposición para $F := \overline{span\{E_j : j \in \mathbb{N}\}}$ si y sólo si ocurre que:*
(a) Toda sucesión de vectores no nulos $U := (u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) es básica.
(b) Para todo n se tiene que $F = \underbrace{span\{E_j : j < n\}}_{F_{<n}} \oplus \underbrace{\overline{span\{E_j : j \geq n\}}}_{F_{\geq n}}$.

Demostración. $\Rightarrow$) Es trivial.
$\Leftarrow$) Tomemos $x \in F$. Como vale (a) por la Proposición 3.1.2 existe un n tal que $\{E_j\}_{j=n}^{\infty}$ es descomposición para $F_{\geq n}$. Por (b) sabemos que x se descompone de manera única como $x = y+z$ con $y \in F_{<n}$ y $z \in F_{\geq n}$. Por otro lado, $y = \sum_{j=1}^{n-1} u_j$ y $z = \sum_{j=n}^{\infty} u_j$ con $u_j \in E_j$. Obtuvimos de esta manera una representación para x de la forma $\sum_{j=1}^{\infty} u_j$. La unicidad de la representación resulta evidente.

$\square$

Obtenemos del corolario anterior:

Observación 3.1.5. *Sea $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ sucesión de subespacios de cerrados de dimensión finita. $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una descomposición básica si y sólo si toda sucesión de vectores no nulos $U := (u_j)_{j=1}^{\infty}$ (con $u_j \in E_j$) es básica.*

Proposición 3.1.6. *Sea E un espacio de Banach con descomposición de Schauder $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ de dimensión finita, $\{e_1^j, \dots e_{l(j)}^j\}$ base ordenada de E_j y K_j la constante básica asociada a dicha base. Si $K = \sup_j K_j < \infty$, entonces*

$$e_1^1, \dots, e_{l(1)}^1, e_1^2, \dots, e_{l(2)}^2, \dots, e_1^j, \dots, e_{l(j)}^j, e_1^{j+1}, \dots, e_{l(j+1)}^{j+1}, \dots \tag{3.2}$$

es base de Schauder de E.

Demostración. Sea C la constante asociada a la descomposición de Schauder $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$. Veamos primero que la sucesión dada en (3.2) es básica. Para esto, consideremos escalares

$$a_1^1, \dots, a_{l(1)}^1, a_1^2, \dots, a_{l(2)}^2, \dots, a_1^j, \dots, a_{l(j)}^j, a_1^{j+1}, \dots, a_{l(j+1)}^{j+1}, \dots$$

arbitrarios y $N = \sum_{i=1}^{r} l(i) + s < M = \sum_{i=1}^{r'} l(i) + s'$ con $1 \leq s \leq l(r+1)$ y $1 \leq s' \leq l(r'+1)$.

Para reducir escritura llamaremos $u_i := a_1^i e_1^i \cdots + a_{l(i)}^i e_{l(i)}^i$. Tenemos entonces que

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \underbrace{a_1^1 e_1^1 + \cdots + a_{l(1)}^1 e_{l(1)}^1}_{u_1} + \cdots + \underbrace{a_1^r e_1^r \cdots + a_{l(r)}^r e_{l(r)}^r}_{u_r} + a_1^{r+1} e_1^{r+1} + \cdots + a_s^{r+1} e_s^{r+1} \Big\| \\
&= \Big\| \sum_{j=1}^r u_j + \sum_{i=1}^s a_i^{r+1} e_i^{r+1} \Big\| \leq \Big\| \sum_{j=1}^r u_j \Big\| + \Big\| \sum_{i=1}^s a_i^{r+1} e_i^{r+1} \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{j=1}^r u_j \Big\| + K \Big\| \sum_{i=1}^{l(r+1)} a_i^{r+1} e_i^{r+1} \Big\| = \Big\| \sum_{j=1}^r u_j \Big\| + K \Big\| \sum_{j=1}^{r+1} u_j - \sum_{j=1}^r u_j \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{j=1}^r u_j \Big\| + K \Big(\Big\| \sum_{j=1}^{r+1} u_j \Big\| + \Big\| \sum_{j=1}^r u_j \Big\| \Big) \\
&\leq C \Big\| \sum_{j=1}^{r'} u_j + \sum_{i=1}^{s'} a_i^{r'+1} e_i^{r'+1} \Big\| + 2KC \Big\| \sum_{j=1}^{r'} u_j + \sum_{i=1}^{s'} a_i^{r'+1} e_i^{r'+1} \Big\| \\
&= (1+2K) C \Big\| a_1^1 e_1^1 + \cdots + a_{l(1)}^1 e_{l(1)}^1 + \cdots + a_1^{r'} e_1^{r'} \cdots + a_{l(r')}^{r'} e_{l(r')}^{r'} + a_1^{r'+1} e_1^{r'+1} + \cdots + a_{s'}^{r'+1} e_{s'}^{r'+1} \Big\|.
\end{aligned}
$$

Lo cual muestra que la sucesión $e_1^1, \ldots, e_{l(1)}^1, e_1^2, \ldots, e_{l(2)}^2, \ldots, e_1^j, \ldots, e_{l(j)}^j, e_1^{j+1}, \ldots, e_{l(j+1)}^{j+1}, \ldots$ es básica.

Por otro lado, resulta inmediato que $E = \overline{\operatorname{span}\{e_1^1, \ldots e_{l(1)}^1, e_1^2, \ldots e_{l(2)}^2, \ldots\}}$, pues $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ es una descomposición de Schauder para E. Hemos demostrado así que (3.2) es base de Schauder de E.

□

La próxima proposición nos será de utilidad más adelante:

Proposición 3.1.7. *Si E admite una descomposición Schauder $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ de dimensión finita. Entonces, E tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración. Sea F un espacio de Banach y $T \in L(F, E)$ un operador compacto. Denotaremos $\Pi_k : E \to \oplus_{j=1}^k E_j$ a la proyección canónica y $C = \sup_k \|\Pi_k\|$ a la constante de la descomposición. Evidentemente, para todo $k \in \mathbb{N}$, el operador $T_k := \Pi_k T$ es de rango finito. Veamos que $T_k \to T$ si $k \to \infty$. Tomemos $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$ y $\varepsilon > 0$. Como $\overline{T(B_E)}$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_r \in B_E$ tal que $T(B_E) \subset \bigcup_{i=1}^r B_\varepsilon(Tx_i)$. Por otro lado, como $Tx_1, \ldots, Tx_r$ son finitos vectores, sabemos que existe un natural k_0 tal que si $k \geq k_0$ se tiene que $\|T_k x_j - Tx_j\| = \|\Pi_k Tx_j - Tx_j\| \leq \varepsilon$ para $j = 1 \ldots r$. Sea j_0 tal que $\|Tx - Tx_{j_0}\| \leq \varepsilon$. Por lo tanto, si $k \geq k_0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\|T_k x - Tx\| &\leq \|T_k x - T_k x_{j_0}\| + \|T_k x_{j_0} - Tx_{j_0}\| + \|Tx_{j_0} - Tx\| \\
&\leq C\|Tx - Tx_{j_0}\| + \|T_k x_{j_0} - Tx_{j_0}\| + \|Tx_{j_0} - Tx\| \\
&\leq (C+2)\varepsilon.
\end{aligned}
$$

□

3.2. Descomposiciones de Schauder para $\mathcal{P}_w(^mE)$

Consideremos E un espacio de Banach con descomposición de Schauder $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$. Para cada $r = (r_i)_i \in \mathbb{N}_0{}^{(\mathbb{N})}$, definimos el grado de r como $|r| = \sum_i r_i$ y el largo de r como $l(r) = \sup\{i : r_i \neq 0\}$. Diremos que el polinomio m-homogéneo P es un monomio de índice r si para todo $x = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$ $(u_j \in E_j)$ y toda sucesión de escalares (λ_j) tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j$ converge, se tiene

$$P(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j u_j) = \lambda_1^{r_1} \dots \lambda_k^{r_k} P(\sum_{j=1}^{\infty} u_j) \tag{3.3}$$

donde $k = l(r)$. Evidentemente tendrá que valer $|r| = m$. Denotaremos $\mathcal{P}_k(^mE)$ al espacio generado por

$$\{P \in \mathcal{P}(^mE) : P \text{ es un monomio de índice } r,\ |r| = m \text{ y } l(r) = k\}.$$

Notemos que si P es un monomio de índice r, con $l(r) = k$, eligiendo escalares (λ_j) adecuados se ve fácilmente de (3.3) que

$$P(\sum_{j=1}^{k} u_j) = P(\sum_{j=1}^{\infty} u_j),$$
$$P(\sum_{j=1}^{k-1} u_j) = 0.$$

Por ende, las igualdades anteriores se mantienen para todo $P \in \mathcal{P}_k(^mE)$.

Proposición 3.2.1. *Si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una descomposición de Schauder de dimensión finita para el espacio de Banach E entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^{\infty}$ es una descomposición de Schauder básica de dimensión finita. Más aún, si $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una descomposición monótona, se tiene que $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^{\infty}$ también lo es.*

Demostración. Asumamos que $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una descomposición monótona. Consideremos la aplicación

$$\jmath : \mathcal{P}_k(^mE) \to \mathcal{P}(^m\oplus_{j=1}^{k} E_j)$$
$$P \mapsto P\imath_k$$

donde $\imath_k : \oplus_{j=1}^{k} E_j \to E$ es la inclusión canónica. La observación previa muestra que $\jmath$ es un operador inyectivo. Como $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ una descomposición de Schauder de dimensión finita, se tiene que $P(^m\oplus_{j=1}^{k} E_j)$ es de dimensión finita. Por lo tanto, $\mathcal{P}_k(^mE)$ también lo es. Tomemos $(P_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios tal que $P_k \in \mathcal{P}_k(^mE)$. Si vemos que $\| \sum_{j=1}^{l} P_j\| \leq \| \sum_{j=1}^{l+1} P_j\|$ para todo l se sigue (por inducción) que efectivamente $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^\infty$ resulta una descomposición de Schauder básica monótona (recordar la Observación 3.1.5). Al ser $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ una descomposición monótona, vale:

$$\begin{aligned}
\Big\|\sum_{j=1}^{l} P_j\Big\| &= \sup_{\|\sum_{j=1}^\infty u_j\|\le 1} \Big|\sum_{j=1}^{l} P_j(\sum_{j=1}^{\infty} u_j)\Big| \\
&= \sup_{\|\sum_{j=1}^l u_j\|\le 1} \Big|\sum_{j=1}^{l} P_j(\sum_{j=1}^{l} u_j)\Big| \\
&= \sup_{\|\sum_{j=1}^l u_j\|\le 1} \Big|\sum_{j=1}^{l+1} P_j(\sum_{j=1}^{l} u_j)\Big| \\
&\le \sup_{\|\sum_{j=1}^\infty u_j\|\le 1} \Big|\sum_{j=1}^{l+1} P_j(\sum_{j=1}^{\infty} u_j)\Big| \\
&= \Big\|\sum_{j=1}^{l+1} P_j\Big\|,
\end{aligned}$$

obteniendo lo deseado.

Si la descomposición $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ no es monótona basta renormar el espacio y usar lo que vimos anteriormente. □

Definición 3.2.2. *Diremos que $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ es una descomposición de Schauder achicante si para toda $\varphi \in E'$ se tiene que $\|\varphi|_{[E_j\,:\,j>k]}\| \to 0$ si $k \to \infty$.*

Tal como sucede sucede para bases (ver [1]), con un poquito de trabajo se puede demostrar que si E admite una descomposición achicante de dimensión finita, E' también admite descomposición de dimensión finita. Este hecho nos será útil en la próxima proposición:

Proposición 3.2.3. *Si $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ una descomposición de Schauder de dimensión finita achicante para el espacio de Banach E entonces, para todo $m \in \mathbb{N}$, $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^\infty$ es una descomposición de Schauder de dimensión finita para $\mathcal{P}_w(^mE)$.*

Demostración. Por la proposición anterior sabemos que $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^\infty$ resulta una descomposición de Schauder para $F := \overline{\mathrm{span}\{\mathcal{P}_k(^mE) : k \in \mathbb{N}\}}$.

Veamos que $F \subset \mathcal{P}_w(^mE)$. Sean $\Pi_k : E \to \oplus_{j=1}^k E_j$ y $\imath_k : \oplus_{j=1}^k E_j \to E$ la inclusión y proyección canónicas. Como la descomposición $\{E_j\}_{j=1}^\infty$ es de dimensión finita, el polinomio $P\imath_k$ resulta de tipo finito. Notemos que

$$P = P\imath_k\Pi_k.$$

Se deduce entonces que P también es de tipo finito. Por ende, $\overline{\mathrm{span}\{\mathcal{P}_k(^mE) : k \in \mathbb{N}\}} \subset \mathcal{P}_w(^mE)$.

Por otro lado, por la Proposición 3.1.7, E' tiene la propiedad de aproximación (ya que admite una descomposición de Schauder de dimensión finita). Por lo tanto, $\mathcal{P}_{appr}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$. Basta mostrar entonces que, para toda funcional $\varphi \in E'$, el polinomio φ^m está en F.

Para $\varphi \in E'$ definimos $\psi_k := \varphi - \varphi\Pi_k$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que la descomposición $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ es monótona. Como la descomposición es achicante se deduce que $\lim_{k\to\infty} \|\psi_k\| = 0$ (ya que $\|\psi_k\| \leq 2\|\varphi|_{[E_j\,:\,j>k]}\|$). De la identidad

$$a^m - b^m = (a-b)\Big(\sum_{i=0}^{m-1} a^{m-1-i}\, b^i\Big)$$

se ve que

$$\begin{aligned}\|\varphi^m - (\varphi\Pi_k)^m\| &= \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi^m(x) - \varphi^m(\Pi_k(x))| \\ &\leq \sup_{\|x\|\leq 1} |\varphi(x) - \varphi(\Pi_k(x))| \Big(\sum_{i=0}^{m-1} |\varphi(x)|^{m-1-i} |\varphi(\Pi_k(x))|^i\Big) \\ &\leq m\|\psi_k\|\|\varphi\|^{m-1},\end{aligned}$$

por ende $\lim_{k\to\infty} \|\varphi^m - (\varphi\Pi_k)^m\| = 0$. Mostremos que $(\varphi\Pi_k)^m = \sum_{j=1}^{k} P_j$ con $P_j \in \mathcal{P}_j({}^mE)$. En efecto,

$$\begin{aligned}\Big(\varphi\Pi_k\Big)^m\Big(\sum_{j=1}^{\infty} u_j\Big) &= \varphi^n\Big(\sum_{j=1}^{k} u_j\Big) \\ &= \sum_{\substack{d=(d_1,\ldots,d_k)\\ |d|=m}} \varphi(u_1)^{d_1} \ldots \varphi(u_k)^{d_k} \\ &= \sum_{\substack{d=(d_1,\ldots,d_k)\\ |d|=m}} (\varphi\pi_1(x))^{d_1} \ldots (\varphi\pi_k(x))^{d_k}\end{aligned}$$

donde π_j es la proyección canónica a E_j ($\pi_j = \Pi_j - \Pi_{j-1}$). Si tomamos $d = (d_1, \ldots, d_k)$, resulta que $P_{(d)}(x) := (\varphi\pi_1(x))^{d_1} \ldots (\varphi\pi_k(x))^{d_k}$ es un monomio de índice $r = (d_1, \ldots, d_k, 0, 0, \ldots)$ perteneciente a $\mathcal{P}_{l(r)}({}^mE)$. Hemos mostrado entonces que $\varphi^m \in F$ para toda funcional $\varphi \in E'$, completando de esta manera la demostración. □

La proposición anterior asegura que si E tiene una descomposición de Schauder de dimensión finita achicante, $\mathcal{P}_w({}^mE)$ admite descomposición de Schauder. Supongamos que E tiene base de Schauder achicante, ¿tendrá base de Schauder $\mathcal{P}_w({}^mE)$? La respuesta es que sí. Sin embargo no se deduce inmediatamente de la Proposición 3.2.3 ya que en general $\mathcal{P}_k({}^mE)$ no es de dimensión uno para $m > 1$. La Proposición 3.1.6 dará respuesta a nuestra pregunta. Para esto, necesitamos definir un orden a la base de cada subespacio de dimensión finita $\mathcal{P}_k({}^mE)$.

Consideremos $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ una base achicante de E. La sucesión $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$ resulta una base de $E' \cong \mathcal{P}(^1E) = \mathcal{P}_w(^1E)$. Monomialmente hablando, tenemos una sucesión de monomios de grado 1 donde e'_k es base de $\mathcal{P}_k(^1E)$. Trivialmente, en definitiva, hemos dado un orden a la base de $\mathcal{P}_k(^1E)$. Supongamos $\{P_{k,j}^m\}_{j=1}^{l_m(k)}$ base ordenada de $\mathcal{P}_k(^mE)$, definimos entonces la base ordenada en $\mathcal{P}_k(^{m+1}E)$ como

$$\{e'_k P_{1,j}^m\}_{j=1}^{l_m(1)}, \{e'_k P_{2,j}^m\}_{j=1}^{l_m(2)}, \dots, \{e'_k P_{k,j}^m\}_{j=1}^{l_m(k)}.$$

Es decir: diremos que $e'_k P_{s,t}^m$ precede a $e'_k P_{s',t'}^m$ en el orden de la base si $s < s'$ o bien $s = s'$ y $t < t'$.

Tomemos ahora $r = (r_i)_i$, $\overline{r} = (\overline{r}_i)_i \in \mathbb{N}_0{}^{(\mathbb{N})}$ y sean $P_{(r)}(x) := e'_1(x)^{r_1} \dots e'_k(x)^{r_k}$, $P_{(\overline{r})}(x) := e'_1(x)^{\overline{r}_1} \dots e'_k(x)^{\overline{r}_{k'}}$ con $k = l(r)$ y $k' = l(\overline{r})$. Copiando el orden usado en la demostración de la Proposición 3.1.6, obtenemos que $P_{(r)}$ precede a $P_{(\overline{r})}$ si $l(r) < l(\overline{r})$ o bien, existe algún $i \leq l(r)$ tal que $r_i < \overline{r}_i$ y $r_j = \overline{r}_j$ para $j > i$. A este orden se lo conoce como el orden cuadrático.

El siguiente teorema se debe a V. Dimant y S. Dineen (para más información ver [13]).

Teorema 3.2.4. *Si E es un espacio de Banach complejo con base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ achicante, entonces los monomios de grado m con el orden cuadrático forman una base de Schauder de $\mathcal{P}_w(^mE)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es monótona y normalizada. Sea $K_{k,m}$ la constante de la base $\{P_{k,j}^m\}_{j=1}^{l_m(k)}$ de $\mathcal{P}_k(^mE)$. Sabemos que $\{\mathcal{P}_k(^mE)\}_{k=1}^{\infty}$ es una descomposición de Schauder de dimensión finita para $\mathcal{P}_k(^mE)$. Por lo visto en la Proposición 3.1.6, basta probar que $\sup_k K_{k,m}$ es finito para todo m. Demostremos este resultado por inducción. Para $m = 1$ es inmediato pues la base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es achicante. Supongamos que vale para m y veamos que vale para $m + 1$.

Si $\{P_{k,j}^{m+1}\}_{j=1}^{l_{m+1}(k)}$ es base de $\mathcal{P}_k(^{m+1}E)$, se tiene que $P_{k,j}^{m+1} = e'_k Q_{k,j}$ donde $\{Q_{k,j}\}_{j=1}^{l_{m+1}(k)}$ es base de $\oplus_{s=1}^{k} \mathcal{P}_s(^mE)$. Sea K_m la constante básica para $\mathcal{P}_w(^mE)$. Tomemos $1 \leq N < M \leq$

$l_{m+1}(k)$ y una sucesión arbitraria de escalares $(a_{k,j})_{j=1}^{l_{m+1}(k)}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}P_{k,j}^{m+1}\Big\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}e_k'Q_{k,j}\Big\|\\ &= \sup_{\|x\|\leq 1}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}e_k'(x)Q_{k,j}(x)\Big|\\ &= \sup_{\|x\|\leq 1}\Big|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}Q_{k,j}(x)\Big||e_k'(x)|\\ &\leq \Big\|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\|\|e_k'\|\\ &\leq 2\Big\|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\|\\ &\leq 2K_m\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, si probamos que existe una constante positiva C (independiente de k y de M) tal que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\| \leq C\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}P_{k,j}^{m+1}\Big\| \tag{3.4}$$

obtendremos que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{N} a_{k,j}P_{k,j}^{m+1}\Big\| \leq 2K_mC\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}P_{k,j}^{m+1}\Big\|,$$

probando así que $\sup_k K_{k,m} \leq 2K_mC$. Para ver (3.4), notemos que

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\| &= \sup_{\|x\|\leq 1}\Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}(x)\Big|\\ &= \sup_{\substack{x\in[e_1,\dots,e_k]\\ \|x\|\leq 1}}\Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}(x)\Big| \quad \text{(por la monotonía de la base)}\\ &= \Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}(w)\Big|\end{aligned}$$

para algún w de la forma $w = \sum_{i=1}^{k} w_ie_i$, $\|w\| = 1$.

Si $|w_k| < 1/2$, sea $g(\lambda) = (\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j})(w + \lambda e_k)$. La función g es un polinomio sobre $\mathbb{C}$ y, por el principio del módulo máximo, tenemos

$$\max_{|\lambda|=1}|g(\lambda)| \geq |g(0)| = \Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}(w)\Big| = \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j}Q_{k,j}\Big\|.$$

Consideremos $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ de módulo uno, tal que $|g(\lambda_0)| = \text{máx}_{|\lambda|=1} |g(\lambda)|$ y sea $\widetilde{w} = w + \lambda_0 e_k$. Entonces

$$\Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} Q_{k,j}(\widetilde{w})\Big| \geq \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} Q_{k,j}\Big\| \tag{3.5}$$

y, por la desigualdad triangular,

$$\|\widetilde{w}\| \leq 2. \tag{3.6}$$

Escribiendo $\widetilde{w} = \sum_{i=1}^{k} \widetilde{w}_i e_i$, tenemos

$$|\widetilde{w}_k| = |\lambda_0 + w_k| \geq |\lambda_0| - |w_k| \geq 1 - 1/2 = 1/2. \tag{3.7}$$

Por otro lado, si $|w_k| \geq 1/2$, es inmediato ver que $\widetilde{w} = w$ verifica (3.5), (3.6) y (3.7). Por lo tanto, en cualquiera de los dos casos, se obtiene

$$\Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} P_{k,j}^{m+1}(\widetilde{w})\Big| = \Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} Q_{k,j}(\widetilde{w})\Big| |\widetilde{w}_k| \geq 1/2 \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} Q_{k,j}\Big\|$$

y

$$\Big|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} P_{k,j}^{m+1}(\widetilde{w})\Big| \leq \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} P_{k,j}^{m+1}\Big\| \|\widetilde{w}\|^{m+1} \leq 2^{m+1} \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} P_{k,j}^{m+1}\Big\|.$$

Lo cual prueba que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} Q_{k,j}\Big\| \leq 2^{m+2} \Big\|\sum_{j=1}^{M} a_{k,j} P_{k,j}^{m+1}\Big\|.$$

□

En 1980 R. Ryan, en su tesis doctoral (ver [27]), mostró una versión más general del Teorema 3.2.4. Sin embargo, la demostración tenía un error que fue finalmente salvado en [18]. El siguiente resultado es una adaptación:

Teorema 3.2.5. *Sea E un espacio de Banach tal que E' tiene base $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$. Entonces los monomios de grado m asociados a la base $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$ (con el orden cuadrático) son base de $\mathcal{P}_w(^mE)$.*

3.3. Algunos resultados y comentarios de interés

R. Alencar probó en [2] que, para E un espacio de Banach reflexivo con la propiedad de aproximación, el espacio $\mathcal{P}(^mE)$ es reflexivo si y sólo si $\mathcal{P}(^mE)$ coincide con $\mathcal{P}_w(^mE)$. Obtenemos como consecuencia:

Proposición 3.3.1. *Si E es es una espacio de Banach reflexivo con descomposición $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ de dimensión finita, entonces son equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}({}^mE)$ *es reflexivo,*

(b) $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$*,*

(c) $\{\mathcal{P}_k({}^mE)\}_{k=1}^{\infty}$ *es una descomposición de Schauder de dimensión finita para* $\mathcal{P}({}^mE)$*.*

Demostración. Una leve modificación en la demostración del Teorema clásico de James (ver [1, Proposición 3.2.6, Teorema 3.2.13]), muestra que las descomposiciones de Schauder de dimensión finita para un espacio reflexivo son siempre achicantes. Resta usar las Proposiciones 3.2.3, 3.1.7 y el resultado de Alencar. □

En particular,

Corolario 3.3.2. *Para E un espacio de Banach reflexivo con base, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}({}^mE)$ *es reflexivo,*

(b) $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$*,*

(c) Los monomios de grado m (con el orden cuadrático) son base de $\mathcal{P}({}^mE)$*.*

Por la década del cincuenta, A. Pelczynski demostró en [25] que $\mathcal{P}({}^m\ell_p)$ es reflexivo si y sólo si $m < p$. Por ende, los monomios (con el orden cuadrático) forman una base de $\mathcal{P}({}^m\ell_p)$ si y sólo si $m < p$.

El siguiente teorema es una adaptación de [13, Teorema 13]:

Teorema 3.3.3. *Sea E un espacio de Banach con base incondicional achicante* $(e_j)_{j=1}^{\infty}$*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $\mathcal{P}({}^mE) = \mathcal{P}_w({}^mE)$ *para todo m,*

(b) Los monomios de grado m son base de $\mathcal{P}({}^mE)$ *para todo m,*

(c) $\mathcal{P}({}^mE)$ *es separable para todo m,*

(d) Para ningún m, $\mathcal{P}({}^mE)$ *contiene copia de* c_0*.*

Capítulo 4

Incondicionalidad en espacios de Polinomios

En [9] A. Defant, J. C. Díaz, D. García y M. Maestre estudiaron la existencia de bases incondicionales en espacios de polinomios m-homogéneos y productos tensoriales simétricos de orden m en espacios de Banach. Basándose en algunas ideas fundamentales del clásico trabajo de Y. Gordon y D. R. Lewis [17], mostraron que, para E un espacio de Banach cuyo dual tiene base incondicional $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$, el espacio de polinomios m-homogéneos aproximables (respectivamente nucleares) sobre E tiene base incondicional si y sólo si la base monomial respecto a $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$ es incondicional. En otras palabras, si la base monomial no es incondicional, ninguna base lo es. De hecho, determinaron estimaciones asintóticas para la constante de incondicionalidad de $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ y usaron estos resultados para reducir la lista de los posibles espacios de polinomios candidatos a tener base incondicional. Esto permitió a A. Defant y N. Kalton probar en [10] que, para E un espacio de Banach de dimensión infinita con base incondicional y $m \geq 2$, $\mathcal{P}(^mE)$ nunca puede tener base incondicional. En este capítulo desarrolaremos en detalle lo mencionado.

4.1. Constante de Gordon-Lewis versus constante de incondicionalidad para la base monomial

Antes de dar los contenidos esenciales de esta sección convendrá recordar e introducir un poco de notación. Denotaremos $\mathcal{S}_m$ al grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, m\}$. Para números naturales m y n definimos $\mathcal{M}(m,n) := \{\mathfrak{i} = (i_1, \ldots, i_m) \ : \ i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}\}$ y $\mathcal{M}(m) := \mathbb{N}^m$. También será de utilidad fijar los conjuntos de índices $\mathcal{J}(m,n) := \{\mathfrak{j} = (j_1, \ldots, j_m) \ : \ j_1 \leq \cdots \leq j_m\}$ y $\mathcal{J}(m) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{J}(m,n)$. Consideraremos la siguiente relación de equivalencia para multi-índices $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \in \mathcal{M}(m,n)$:

$\mathfrak{i} \sim \mathfrak{j} \iff$ existe una permutación σ en $\mathcal{S}_m$ tal que $i_{\sigma(k)} = j_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ (notaremos en tal caso $\mathfrak{j} := \mathfrak{i}_\sigma$). Denotaremos a la clase de equivalencia de $\mathfrak{i}$ con $[\mathfrak{i}]$. El cardinal de la clase $[\mathfrak{i}]$ será $|\mathfrak{i}|$. Es importante destacar que para cada $\mathfrak{i} \in \mathcal{M}(m,n)$ existe un único índice $\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ tal que $[\mathfrak{i}] = [\mathfrak{j}]$.

Para los vectores $e_1, \ldots, e_m$ en el espacio de Banach E y el índice $\mathfrak{i} \in \mathcal{M}(m,n)$ definimos

$$e_{\mathfrak{i}} := e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_m} \in \bigotimes{}^m E. \tag{4.1}$$

Llamaremos $S := S_E^m$ al operador de simetrización

$$\begin{aligned} S : \bigotimes{}^m E &\to \bigotimes{}^m E \\ e_1 \otimes \ldots e_m &\mapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} e_{\sigma(1)} \otimes \ldots e_{\sigma(m)}. \end{aligned}$$

Para un espacio de Banach E cuyo dual E' tiene base $(e'_j)_{j=1}^{\infty}$ llamaremos, como hacíamos antes, monomios (de grado m con respecto a (e'_j)) a los polinomios de la forma $P_{\mathfrak{j}} := \prod_{k=1}^m e'_{j_k} \in \mathcal{P}(^m E)$, con $\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)$. Evidentemente, el menor subespacio cerrado que contiene a los monomios es el espacio de todos los polinomios aproximables. Notemos que para cada espacio de Banach E con base (e_j) y cada m-norma tensorial simétrica β se tiene

$$\overline{\operatorname{span}\{S(e_{\mathfrak{j}}) \ : \ \mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m)\}} = \widetilde{\otimes}_{\beta}^{m,s} E.$$

Por razones obvias, llamaremos a los elementos de la forma $S(e_{\mathfrak{j}}),\ \mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ también monomios (de grado m respecto a la base (e_j)).

El siguiente resultado nos será de gran utilidad.

Lema 4.1.1. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y E un espacio de Banach de dimensión finita con base $(e_j)_{j=1}^n$ y base dual $(e'_j)_{j=1}^n$ (es decir, $e'_l(e_j) = \delta_{l,j}$). Entonces,*
(1) $S(e_{\mathfrak{i}}) = \frac{1}{|\mathfrak{i}|} \sum_{\mathfrak{j} \in [\mathfrak{i}]} e_{\mathfrak{j}}$ para todo $\mathfrak{i} \in \mathcal{M}(m,n)$.
(2) $(S(e_{\mathfrak{j}}))_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ es base de $\otimes^{m,s} E$ y $(|\mathfrak{j}| S(e'_{\mathfrak{j}}))_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ es su base dual en $\otimes^{m,s} E'$.

Demostración. Para el par de índices $\mathfrak{i}, \mathfrak{j} \in \mathcal{M}(m,n)$ definimos $A_k := \{p \ : \ \mathfrak{i}_p = k\}$ y $B_k := \{l \ : \ \mathfrak{j}_l = k\}$ con $k = 1, \ldots, n$. Es claro que $\mathfrak{j}$ será igual a $\mathfrak{i}_\sigma$ si y sólo si $e_{\mathfrak{i}_\sigma} = e_{\mathfrak{j}}$, y esto ocurre si y sólo si $0 \le \operatorname{Card}(A_k) = \operatorname{Card}(B_k) \le m$ y $\sigma(p) \in B_k$ para todo $p \in A_k$ y $k = 1, \ldots, n$. Lo cual es equivalente a la existencia de alguna permutación $\sigma \in \mathcal{S}_m$ tal que su restricción al conjunto A_k sea una biyección con el conjunto B_k. Por lo tanto, si $\mathfrak{i} \sim \mathfrak{j}$, se tiene

$$\operatorname{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_m \ : \ \mathfrak{i}_\sigma = \mathfrak{j}\} = \operatorname{Card}(A_1)! \ldots \operatorname{Card}(A_m)!.$$

Luego,

$$\begin{aligned} m! = \operatorname{Card}(\mathcal{S}_m) &= \sum_{\jmath \in [\mathfrak{i}]} \operatorname{Card}\{\sigma \in \mathcal{S}_m \ : \ \mathfrak{i}_\sigma = \mathfrak{j}\} \\ &= |\mathfrak{i}| \operatorname{Card}(A_1)! \ldots \operatorname{Card}(A_n)!. \end{aligned}$$

Tenemos

$$S(e_{\mathfrak{i}}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} e_{\mathfrak{i}_\sigma} = \frac{1}{m!} \sum_{\mathfrak{j} \in [\mathfrak{i}]} \Big(\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_m \\ \mathfrak{i}_\sigma = \mathfrak{j}}} e_{\mathfrak{i}_\sigma} \Big)$$
$$= \frac{1}{m!} \sum_{\mathfrak{j} \in [\mathfrak{i}]} \Big(\frac{m!}{|\mathfrak{i}|} e_{\mathfrak{i}} \Big) = \frac{1}{|\mathfrak{i}|} \sum_{\mathfrak{j} \in [\mathfrak{i}]} e_{\mathfrak{j}},$$

lo cual prueba (1).

Para ver (2) consideremos los índices $\mathfrak{j}, \wp \in \mathcal{J}(m,n)$. Luego,

$$|\wp| S(e'_\wp)(S(e_{\mathfrak{j}})) = \frac{|\wp|}{|\wp|} \sum_{\ell \in [\wp]} e'_\ell \Big(\frac{1}{|\mathfrak{j}|} \sum_{\hbar \in [\mathfrak{j}]} e_\hbar \Big)$$
$$= \frac{1}{|\mathfrak{j}|} \sum_{\ell \in [\wp]} \sum_{\hbar \in [\jmath]} e'_{l_1}(e_{h_1}) \dots e'_{l_m}(e_{h_m})$$
$$= \frac{1}{|\mathfrak{j}|} \sum_{\ell \in [\wp]} \sum_{\hbar \in [\mathfrak{j}]} \delta_{l_1,h_1} \dots \delta_{l_m,h_m}$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \wp \neq \mathfrak{j} \\ \frac{|\mathfrak{j}|}{|\mathfrak{j}|} = 1 & \text{si } \wp = \mathfrak{j}. \end{cases}$$

Como la dimensión de $\otimes^{m,s} E$ y de $\otimes^{m,s} E'$ es $\binom{m+n-1}{n-1}$ (ver [15, 1.8.]) se tiene que $S((e_{\mathfrak{j}}))_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ es base de $\otimes^{m,s} E$ y $(|\mathfrak{j}| S(e'_{\mathfrak{j}}))_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m,n)}$ es su base dual en $\otimes^{m,s} E'$. □

Por el Corolario 1.2.15 sabemos que si $(e_j)_{j=1}^\infty$ es una sucesión básica incondicional de E entonces $F := \overline{span\{(e_j)_{j=1}^\infty\}}$ es de Gordon-Lewis y vale

$$gl(F) \leq \chi((e_j)_{j=1}^\infty).$$

El siguiente resultado asegura que, para los monomios de grado m con respecto a una base 1-incondicional, vale una desigualdad inversa a la anterior.

Teorema 4.1.2. *Sea E un espacio de Banach y sea (e'_j) una base 1-incondicional de E'. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ se tiene:*

$$\chi((\mathcal{P}_{\mathfrak{j}})_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m)}; \mathcal{P}_w(^m E)) \leq k_m gl(\mathcal{P}_w(^m E)), \tag{4.2}$$

con $k_m \leq (\frac{m^{4m}}{m!^2}) 2^m$.

Notemos que por la Observación 1.4.4, la desigualdad anterior es equivalente a:

$$\chi((S e'_{\mathfrak{j}})_{\mathfrak{j} \in \mathcal{J}(m)}; \widetilde{\otimes}^{m,s}_{\varepsilon_s} E') \leq k_m gl(\widetilde{\otimes}^{m,s}_{\varepsilon_s} E'). \tag{4.3}$$

Es por esto que, en [9], se prefirió formular y probar el resultado anterior en un contexto más general: el de los productos tensoriales simétricos. G. Pisier en [26] y C. Schütt en [30] estudiaron incondicionalidad en productos tensoriales. Probaron (independientemente) que, para dos espacios de Banach E y F con bases incondicionales (e'_j) y (f'_j) respectivamente y cada norma tensorial α en el producto tensorial $E \otimes F$, $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ resulta base incondicional de $E\widetilde{\otimes}_\alpha F$ si y sólo si $E\widetilde{\otimes}_\alpha F$ tiene base incondicional si y sólo si $E\widetilde{\otimes}_\alpha F$ es un espacio de Gordon-Lewis. A. Defant, J.C. Díaz, D. García y M. Maestre basándose en estos trabajos obtuvieron el siguiente teorema para productos tensoriales simétricos:

Teorema 4.1.3. *Sea E un espacio de Banach y (e_j) una base 1-incondicional de E. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, y toda m-norma tensorial simétrica β se tiene:*

$$\chi((Se'_{\mathrm{j}})_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m)}; \widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E) \leq k_m gl(\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E) \tag{4.4}$$

con $k_m \leq (\frac{m^{4m}}{m!^2})2^m$.

Pretendemos en esta sección probar estos teoremas.

Gracias a la desigualdad (4.4) obtenemos como consecuencia:

Teorema 4.1.4. *Sea E un espacio de Banach y (e_j) una base 1-incondicional de E. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, y toda m-norma tensorial simétrica β, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Los monomios de grado m respecto a (e_i) forman una base incondicional de $\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E$,

(b) $\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E$ tiene base incondicional,

(c) $\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E$ es isomorfo a un Banach lattice,

(d) $\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E$ tiene l.u.st,

(e) $\widetilde{\otimes}^{m,s}_\beta E$ es de Gordon-Lewis.

Demostración. Las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b) y (b) $\Rightarrow$ (c) son inmediatas. (c) $\Rightarrow$ (d) se debe al Teorema 1.2.10. (d) $\Rightarrow$ (e) es una consecuencia directa de la desigualdad de Gordon-Lewis (ver Corolario 1.2.15), y (e) $\Rightarrow$ (a) se debe al Teorema 4.1.3 (recordemos que sin pérdida de generalidad siempre podemos asumir que la base es (e_j) es 1-incondicional). □

Notemos que para $E = c_0$ (con la base canónica) y $\beta = \varepsilon_s$ cualquiera de las afirmaciones resultan verdaderas. Esto se debe a la Observación 1.6.2, ya que $\widetilde{\otimes}^{m,s}_{\varepsilon_s} c_0$ es un subespacio complementado de $\widetilde{\otimes}^{m}_{\varepsilon_s} c_0 \cong c_0$ (ver [28, Ejemplo 3.3.], [15]) y c_0 es de Gordon-Lewis (pues tiene base incondicional).

Para $E = \ell_1$ y $\beta = \pi_s$ ocurre lo mismo (ver [28, Ejemplo 2.6.]). Recordemos que para E un espacio de Banach cuyo dual tiene la propiedad de aproximación se tienen las identificaciones

$$\widetilde{\otimes}^{m,s}_{\varepsilon_s} E' = \mathcal{P}_w({}^m E),$$
$$\widetilde{\otimes}^{m,s}_{\pi_s} E' = \mathcal{P}_{nuc}({}^m E).$$

Esto junto con el teorema anterior implica

Corolario 4.1.5. *Sean E un espacio de Banach y (e'_j) una base 1-incondicional de E'. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) Los monomios de grado m respecto a (e'_j) forman una base incondicional de $\mathcal{P}_w(^mE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$),
(b) $\mathcal{P}_w(^mE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$) tiene base incondicional,
(c) $\mathcal{P}_w(^mE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$) es isomorfo a un Banach lattice,
(d) $\mathcal{P}_w(^mE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$) tiene l.u.st,
(e) $\mathcal{P}_w(^mE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{nuc}(^mE)$) es de Gordon-Lewis.

Notemos que para $E = c_0$ y la base canónica de $E' = \ell_1$ todas las afirmaciones son ciertas. Luego, $\mathcal{P}_{nuc}(^mc_0)$ tiene base incondicional.

Demostrar el Teorema 4.1.4 implicará gran trabajo. Empecemos por el siguiente lema:

Lema 4.1.6. *Sea F un espacio de Banach de dimensión finita con base $(y_i)_{i=1}^n$ y base dual $(y'_j)_{j=1}^n$. Supongamos que existen constantes K_1, K_2 tal que para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^n$ los operadores*

$$D_\lambda : F \to \ell_2^n \qquad\qquad D_\mu : F' \to \ell_2^n$$
$$\sum_{i=1}^n a_i y_i \mapsto (\lambda_i a_i)_{i=1}^n, \qquad\qquad \sum_{j=1}^n a_j y'_j \mapsto (\mu_j a_j)_{j=1}^n,$$

satisfacen

$$\pi_1(D_\lambda) \leq K_1 \|\sum_{i=1}^n \lambda_i y'_i\|_{F'}, \qquad\qquad \pi_1(D_\mu) \leq K_2 \|\sum_{j=1}^n \mu_j y_j\|_F. \tag{4.5}$$

Entonces, $\chi((y_i)) \leq K_1K_2 gl(F)$.

Demostración. Sean $a_1 \dots, a_n; b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ con $|a_i| \leq |b_i|$. Si vemos que

$$\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| \leq K_1K_2 gl(F) \|\sum_{i=1}^n b_i y_i\|,$$

concluiremos con la desigualdad deseada.

Notemos que $\|\sum_{i=1}^n a_i y_i\| = \sup_{\|\sum_{j=1}\lambda_j y'_j\| \leq 1} \left| < \sum_{i=1}^n a_i y_i, \sum_{j=1} \lambda_j y'_j > \right|$. Por ende, basta ver que para $\|\sum_{j=1} \lambda_j y'_j\| \leq 1$,

$$\left| < \sum_{i=1}^n a_i y_i, \sum_{j=1} \lambda_j y'_j > \right| \leq K_1K_2 gl(F) \|\sum_{i=1}^n b_i y_i\|.$$

Consideremos $\epsilon = (\epsilon_i)_{i=1}^n$ con $\epsilon_i = \begin{cases} \frac{a_i}{bi} \text{ si } b_i \neq 0 \\ 0 \text{ si } b_i = 0 \end{cases}$. Entonces,

$$\begin{aligned} \left| < \sum_{i=1}^n a_i y_i, \sum_{j=1} \lambda_j y_j' > \right| &= \left| < \sum_{i=1}^n \epsilon_i b_i y_i, \sum_{j=1} \lambda_j y_j' > \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j < \sum_{i=1}^n \epsilon_i b_i y_i, y_j' > \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \lambda_j \epsilon_j b_j \right| \\ &= \left| tr(\ell_2^n \overset{D_\lambda^*}{\to} F' \overset{D_b}{\to} \ell_2^n \overset{D_\epsilon}{\to} \ell_2^n) \right|. \end{aligned}$$

Por dualidad de traza [11], tenemos que

$$\begin{aligned} \left| tr(\ell_2^n \overset{D_\lambda^*}{\to} F' \overset{D_b}{\to} \ell_2^n \overset{D_\epsilon}{\to} \ell_2^n) \right| &\leq \gamma_\infty(D_\lambda^*) \pi_1(D_\epsilon D_b) \\ &= \gamma_1(D_\lambda) \pi_1(D_\epsilon D_b) \quad \text{(por la Proposición 1.1.4)} \\ &\leq \gamma_1(D_\lambda) \|D_\epsilon\| \pi_1(D_b) \\ &\leq \gamma_1(D_\lambda) \pi_1(D_b) \quad \text{(pues } \|D_\epsilon\| \leq 1) \\ &\leq gl(F) \pi_1(D_\lambda) \pi_1(D_b) \\ &\leq gl(F) K_1 K_2 \| \sum_{i=1}^n b_i y_i \|, \end{aligned}$$

que es justamente lo que deseábamos. □

Ahora estudiaremos las desigualdades del estilo (4.5) para el m-ésimo producto tensorial, luego lo haremos para el producto tensorial simétrico.

Lema 4.1.7. *Sean $E_1, \ldots, E_m$ espacios de Banach de dimensión n, y para $j = 1, \ldots, m$ sea $(e_i^j)_{i=1}^n$ base 1-incondicional de E_j. Entonces para toda m-norma tensorial α y todo vector $(c_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \in \mathbb{K}^{\mathcal{M}(m,n)}$ el operador diagonal*

$$\begin{aligned} D_c : \otimes_\alpha(E_1, \ldots, E_m) &\to \ell_2(\mathcal{M}(m,n)) \\ \sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}} &\mapsto (\lambda_{\mathrm{i}} c_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \end{aligned}$$

verifica

$$\pi_1(D_c) \leq 2^{m/2} \alpha^*(\sum_{\mathrm{i} \in \mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}}').$$

Demostración. Consideremos las primeras n funciones de Rademacher $\{r_1, \ldots, r_n\}$. Para cada índice $\mathtt{i} = (i_1, \ldots, i_m) \in \mathcal{M}(m,n)$ definimos

$$r_{\mathtt{i}}(\,\bar{t}\,) := r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m), \ \bar{t} = (t_1, \ldots, t_m) \in [0,1]^m$$

Para $s = 1, \infty$, sea Σ_s el subespacio generado por todas estas funciones en $L_s([0,1]^m)$. Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \otimes_\alpha(E_1, \ldots, E_m) & \xrightarrow{D_c} & \ell_2(\mathcal{M}(m,n)) \\ T_1 \downarrow & & \uparrow T_2 \\ \Sigma_\infty & \xrightarrow{I} & \Sigma_1 \end{array}$$

donde $T_1(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathtt{i}} e_{\mathtt{i}}) := \sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathtt{i}} c_{\mathtt{i}} r_{\mathtt{i}}$, I es la identidad formal y $T_2(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \mu_{\mathtt{i}} r_{\mathtt{i}}) := (\mu_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$. Afirmamos que

$$\|T_1\| \leq \alpha^*(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)} c_{\mathtt{i}} e'_{\mathtt{i}}), \tag{4.6}$$

$$\|T_2\| \leq 2^{m/2}. \tag{4.7}$$

Si la afirmación es cierta, gracias al Corolario 1.1.3 tenemos:

$$\begin{aligned} \pi_1(D_c) = \pi_1(T_2 I T_1) &\leq \|T_2\| \underbrace{\pi_1(I)}_{1} \|T_1\| \\ &\leq 2^{m/2} \alpha^*(\sum_{\mathtt{i} \in \mathcal{M}(m,n)} c_{\mathtt{i}} e'_{\mathtt{i}}), \end{aligned}$$

que es justamente lo que deseábamos probar.
Veamos (4.6):

Para una elección de n signos $\varepsilon = (\varepsilon_k)_{k=1}^n$ y $j = 1, \ldots, m$ consideremos el operador $T_\varepsilon^j : E_j \to E_j$ definido de la siguiente forma:

$$T_\varepsilon^j(\sum_{k=1}^n a_k e_k^j) := \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k e_k^j.$$

Notemos que $\|T_\varepsilon^j\| \leq 1$ pues la base $(e_k^j)_{k=1}^n$ es 1-incondicional. Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\Big\|T_1\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}}\big)\Big\|_\infty &= \sup_{\bar{t}\in[0,1]^m} \Big|\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} c_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}}(\bar{t})\Big| \\
&= \sup_{\bar{t}\in[0,1]^m} \Big|\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\big(\sum_{\mathrm{i}'\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}'} r_{\mathrm{i}'}(\,\bar{t}\,) e_{\mathrm{i}'}\big)\Big| \\
&\leq \sup_{\bar{t}\in[0,1]^m} \alpha\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}}(\,\bar{t}\,) e_{\mathrm{i}}\big)\, \alpha^*\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\big) \\
&\leq \sup_{\bar{t}\in[0,1]^m} \alpha\Big(\otimes\big(T^1_{(r_k(t_1))_k},\dots,T^m_{(r_k(t_m))_k}\big)\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}}\big)\Big)\, \alpha^*\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\big) \\
&\leq \sup_{\bar{t}\in[0,1]^m} \alpha\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}}\big)\, \alpha^*\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\big) \\
&= \alpha\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \lambda_{\mathrm{i}} e_{\mathrm{i}}\big)\, \alpha^*\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\big),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la metric mapping property de α (usando que $\|T^l_{(r_k(t_l))_k}\| \leq 1$ para todo l). Se tiene entonces que $\|T_1\| \leq \alpha^*(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} c_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}})$, tal que como queríamos.

Veamos (4.7):

Por inducción en m. Para el caso $m = 1$ debemos ver que vale:

$$\left(\sum_{i=1}^n |\mu_i|^2\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}\int_0^1 \left|\sum_{i=1} \mu_i r_i(t)\right| dt.$$

Pero esto es una consecuencia directa de la desigualdad de Khintchine 1.5.1, usando que $1/A_1 = \sqrt{2}$ (ver [31]). Supongamos que vale para m y veamos que vale para $m+1$. Usando la desigualdad de Minkowski continua tenemos:

$$\left(\sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m, i_{m+1} \le n} |\mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}}|^2 \right)^{1/2} =$$

$$\left(\sum_{i_{m+1}=1}^{n} \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} |\mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}}|^2 \right)^{1/2} \le$$

$$\left[\sum_{i_{m+1}=1}^{n} 2^m \Big(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big| \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}} r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m) \Big| \, dt_1 \ldots dt_m \Big)^2 \right]^{1/2} =$$

$$2^{m/2} \left[\sum_{i_{m+1}=1}^{n} \Big(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big| \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}} r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m) \Big| \, dt_1 \ldots dt_m \Big)^2 \right]^{1/2} \le$$

$$2^{m/2} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \Big(\sum_{i_{m+1}=1}^{n} \Big| \sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}} r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m) \Big|^2 \Big)^{1/2} dt_1 \ldots dt_m \le$$

$$2^{\frac{m+1}{2}} \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^1 \Big| \sum_{i_{m+1}=1}^{n} \Big(\sum_{1 \le i_1, \ldots, i_m \le n} \mu_{i_1, \ldots, i_{m+1}} r_{i_1}(t_1) \ldots r_{i_m}(t_m) \Big) r_{i_{m+1}}(t_{m+1}) \Big| \, dt_1 \ldots dt_m dt_{m+1},$$

que es lo que queríamos probar. □

El siguiente lema es el análogo para el producto tensorial simétrico.

Lema 4.1.8. *Sea E un espacio de Banach de dimensión n con base incondicional $(e_i)_{i=1}^n$. Entonces para cada m-norma tensorial simétrica β y cada $(c_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \in \mathbb{K}^{\mathcal{J}(m,n)}$ el operador diagonal*

$$\begin{aligned} D_c : \otimes_\beta^{m,s} E &\to \ell_2(\mathcal{M}(m,n)) \\ \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \lambda_{\mathbf{j}} S e_{\mathbf{j}} &\mapsto (c_{\mathbf{j}} \lambda_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \end{aligned}$$

verifica

$$\pi_1(D_c) \le k_m \beta^* \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} |\mathbf{j}| S(e'_{\mathbf{j}}) \right),$$

donde $k_m \le (m^{2m}/m!) 2^{m/2}$.

Demostración. Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \otimes_\beta^{m,s} E & \xrightarrow{D_c} & \ell_2(\mathcal{J}(m,n)) \\ I \downarrow & & \uparrow P \\ \otimes_\alpha^m E & \xrightarrow{D_{\tilde{c}}} & \ell_2(\mathcal{M}(m,n)), \end{array}$$

donde α es una m-norma tensorial que extiende a β como en (1.14) y (1.15), I es la inclusión canónica, $\widetilde{c} = (\widetilde{c}_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ con $\widetilde{c}_{\mathsf{i}} := c_{\mathsf{j}}$, $\mathsf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ el único índice que verifica $[\mathsf{j}] = [\mathsf{i}]$ y P un operador definido de la siguiente manera:

$$P((\lambda_{\mathsf{i}})_{\mathsf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}) := \left(\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} \lambda_{\mathsf{i}}\right)_{\mathsf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}.$$

Notemos que si $\{f_{\mathsf{i}} : \mathsf{i} \in \mathcal{M}(m,n)\}$ es la base canónica de $\ell_2(\mathcal{M}(m,n))$ y $\{v_{\mathsf{j}} : \mathsf{j} \in \mathcal{J}(m,n)\}$ base canónica de $\ell_2(\mathcal{J}(m,n))$, se tiene que $P(f_{\mathsf{i}}) = v_{\mathsf{j}}$ con $[\mathsf{i}] = [\mathsf{j}]$.

Veamos que el diagrama conmuta: Como $(Se_{\mathsf{j}})_{\mathsf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ es base de $\otimes^{m,s}E$ (Lema 4.1.1), basta ver que $PD_{\widetilde{c}}I(Se_{\mathsf{j}}) = D_c(Se_{\mathsf{j}})$ para $\mathsf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
PD_{\widetilde{c}}I((Se_{\mathsf{j}})) = PD_{\widetilde{c}}((Se_{\mathsf{j}})) &= P\left(D_{\widetilde{c}}(\frac{1}{|\mathsf{j}|}\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} e_{\mathsf{i}})\right) \\
&= P\left(\frac{1}{|\mathsf{j}|}\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} D_{\widetilde{c}}(e_{\mathsf{i}})\right) = P\left(\frac{1}{|\mathsf{j}|}\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} \widetilde{c}_{\mathsf{i}} f_{\mathsf{i}}\right) \\
&= P\left(\frac{1}{|\mathsf{j}|}\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} c_{\mathsf{j}} f_{\mathsf{i}}\right) = \frac{1}{|\mathsf{j}|}\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} c_{\mathsf{j}} v_{\mathsf{j}} \\
&= \frac{|\mathsf{j}|}{|\mathsf{j}|} c_{\mathsf{j}} v_{\mathsf{j}} = c_{\mathsf{j}} v_{\mathsf{j}} = D_c(Se_{\mathsf{j}}).
\end{aligned}$$

Para estimar $\|P\|$, usaremos la siguiente desigualdad que se obtiene como consecuencia directa de la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\Big)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2, \tag{4.8}$$

si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Observemos que para todo $\mathsf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ se tiene que $\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} |\lambda_{\mathsf{i}}| \leq \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} |\lambda_{(j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(m)})}|$. Por ejemplo, si $\mathsf{j} = (1,\ldots,1)$ resulta $\sum_{\mathsf{i}\in[\mathsf{j}]} |\lambda_{\mathsf{i}}| = |\lambda_{\mathsf{j}}|$ mientras que $\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} |\lambda_{(j_{\sigma(1)},\ldots,j_{\sigma(m)})}| = m!|\lambda_{\mathsf{j}}|$.

Luego,

$$\begin{aligned}
\|P(\lambda_{\mathrm{i}})\|_{\ell_2(\mathcal{J}(m,n))} &= \Bigg(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \Big| \sum_{\mathrm{i}\in[\mathrm{j}]} \lambda_{\mathrm{i}} \Big|^2 \Bigg)^{1/2} \\
&\leq \Bigg(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \Big(\sum_{\mathrm{i}\in[\mathrm{j}]} |\lambda_{\mathrm{i}}| \Big)^2 \Bigg)^{1/2} \\
&\leq \Bigg(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \Big(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} |\lambda_{(\mathrm{j}_\sigma(1),\dots,\mathrm{j}_\sigma(m))}| \Big)^2 \Bigg)^{1/2} \\
&\leq \Bigg(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} m! \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} |\lambda_{(\mathrm{j}_\sigma(1),\dots,\mathrm{j}_\sigma(m))}|^2 \Bigg)^{1/2} \quad \text{(reformulando (4.8))} \\
&= \Bigg(m! \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} \|(\lambda^\sigma)\|^2_{\ell_2(\mathcal{M}(m,n))} \Bigg)^{1/2},
\end{aligned}$$

donde $(\lambda^\sigma) \in \mathbb{K}^{\mathcal{M}(m,n)}$ está definida por $\lambda^\sigma_{\mathrm{i}} = \begin{cases} \lambda_{(\mathrm{i}_{\sigma(1)},\dots,\mathrm{i}_{\sigma(m)})} & \text{si } \mathrm{i} \in \mathcal{J}(m,n) \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$

Siguiendo con las desigualdades...

$$\begin{aligned}
\|P(\lambda_{\mathrm{i}})\|_{\ell_2(\mathcal{J}(m,n))} &\leq \Bigg(m! \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} \|(\lambda^\sigma)\|^2_{\ell_2(\mathcal{M}(m,n))} \Bigg)^{1/2} \\
&\leq \Bigg(m! \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_m} \|(\lambda_{\mathrm{i}})\|^2_{\ell_2(\mathcal{M}(m,n))} \Bigg)^{1/2} \\
&= m! \|(\lambda_{\mathrm{i}})\|_{\ell_2(\mathcal{M}(m,n))}.
\end{aligned}$$

Por ende, $\|P\| \leq m!$. Por el Lema 4.1.7 junto con (1.14) y (1.15) obtenemos:

$$\begin{aligned}
\pi_1(D_c) = \pi_1(PD_{\widetilde{c}}I) &\leq \|P\|\pi_1(D_{\widetilde{c}})\|I\| \\
&\leq m! 2^{m/2} \alpha^* \Big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \widetilde{c}_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}} \Big) \frac{m^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \widetilde{c}_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}} &= \sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \sum_{\mathrm{i}\in[\mathrm{j}]} \widetilde{c}_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}} \\ &= \sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \sum_{\mathrm{i}\in[\mathrm{j}]} c_{\mathrm{j}} e'_{\mathrm{i}} \\ &= \sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathrm{j}}|\mathrm{j}|\Big(\frac{1}{|\mathrm{j}|}\sum_{\mathrm{i}\in[\mathrm{j}]} e'_{\mathrm{i}}\Big) \\ &= \sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathrm{j}}|\mathrm{j}| S e'_{\mathrm{j}},\end{aligned}$$

concluimos que

$$\begin{aligned}\pi_1(D_c) &\leq m! 2^{m/2} \alpha^*\Big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \widetilde{c}_{\mathrm{i}} e'_{\mathrm{i}}\Big)\frac{m^m}{m!} \\ &= 2^{m/2} m^m \alpha^*\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathrm{j}}|\mathrm{j}| S e'_{\mathrm{j}}\Big) \\ &\leq 2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\beta^*\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} c_{\mathrm{j}}|\mathrm{j}| S e'_{\mathrm{j}}\Big),\end{aligned}$$

que es exactamente lo que queríamos probar. □

Luego de tantos lemas técnicos estamos en condiciones de probar finalmente el Teorema 4.1.3.

Demostración. (Del Teorema 4.1.3) Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $X_n := \operatorname{span}\{e_1, \dots, e_n\}$ el subespacio generado por $e_1, \dots, e_n$ en E, denotemos Y_n a $\otimes_\beta^{m,s} X_n$. Por el Lema 4.1.1 sabemos que $\{Se_{\mathrm{j}} : \mathrm{j} \in \mathcal{J}(m,n)\}$ es base de Y_n y que, si (e'_j) denota la base ortogonal de (e_j), $\{|\mathrm{j}|Se'_{\mathrm{j}} : \mathrm{j} \in \mathcal{J}(m,n)\}$ es su base ortogonal en $Y'_n = \otimes_{\beta^*}^{m,s} X'_n$. Luego, si vemos que para $\lambda, \mu \in \mathbb{K}^{\mathcal{J}(m,n)}$ vale:

$$\pi_1(\otimes_\beta^{m,s} X_n \xrightarrow{D_\lambda} \ell_2(\mathcal{J}(m,n))) \leq 2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\beta^*\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \lambda_{\mathrm{j}}|\mathrm{j}| S e'_{\mathrm{j}}\Big), \tag{4.9}$$

$$\pi_1(\otimes_{\beta^*}^{m,s} X'_n \xrightarrow{D_\mu} \ell_2(\mathcal{J}(m,n))) \leq 2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\beta\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \mu_{\mathrm{j}} S e_{\mathrm{j}}\Big), \tag{4.10}$$

donde $D_\mu(|\mathrm{j}|Se'_{\mathrm{j}}) := \mu_{\mathrm{j}} e_{\mathrm{j}}$, por el Lema 4.1.6 obtenemos que

$$\chi((Se_{\jmath})_{\jmath\in\mathcal{J}(m,n)}; Y_n) \leq \big(2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\big)^2 gl(Y_n).$$

Dejemos la demostración de (4.9) y (4.10) para después. Como la base es 1-incondicional por la Observación 1.2.4 sabemos que X_n es 1-complementado. Usando la metric mapping property para β es sencillo ver que $Y_n = \otimes_\beta^{m,s} X_n$ es 1-complementado en $\widetilde{\otimes}_\beta^{m,s} E$. Por otro lado, por la Observación 1.2.3

$$\begin{aligned}\chi((Se_{\mathrm{j}})_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m)};\widetilde{\otimes}_\beta^{m,s}E) &= \sup_n \chi((Se_{\mathrm{j}})_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)};\widetilde{\otimes}_\beta^{m,s}E)\\ &= \sup_n \chi((Se_{\mathrm{j}})_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)};Y_n)\\ &\leq \big(2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\big)^2 \sup_n gl(Y_n)\\ &\leq \big(2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\big)^2 gl(\widetilde{\otimes}_\beta^{m,s}E),\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la Observación 1.6.2. Veamos entonces lo adeudado...

La desigualdad (4.9) es una consecuencia inmediata del Lema 4.1.8. Para (4.10), usaremos también este lema. Primero notemos que $D_\mu(Se'_{\mathrm{j}}) := \frac{\mu_{\mathrm{j}}}{|\mathrm{j}|}e_{\mathrm{j}}$. Entonces, aplicando el Lema 4.1.8 para la base $\{Se'_{\mathrm{j}} : \mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)\}$ en Y'_n y base ortogonal $\{|\mathrm{j}|Se_{\mathrm{j}} : \mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)\}$ tenemos:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\mu) &\leq 2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\beta\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\frac{\mu_{\mathrm{j}}}{|\mathrm{j}|}|\mathrm{j}|Se_{\mathrm{j}}\Big)\\ &= 2^{m/2}\frac{m^{2m}}{m!}\beta\Big(\sum_{\mathrm{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\mu_{\mathrm{j}}Se_{\mathrm{j}}\Big).\end{aligned}$$

□

La siguiente observación es análoga al Teorema 4.1.3 para el m-ésimo producto tensorial.

Observación 4.1.9. *Sean $E_1,\ldots,E_m$ espacios de Banach. Con (e^j) base 1-incondicional de E_j. Entonces para cada m-norma tensorial α.*

$$\begin{aligned}\chi(\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)) &\leq \chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)});\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m))\\ &\leq 2^m gl(\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m))\end{aligned}$$

Demostración. Para $n\in\mathbb{N}$ consideremos los subespacios $X_n^j := span\{e_1^j,\ldots,e_m^j\}$, $X_n^{j'} := span\{e_1^{j'},\ldots,e_m^{j'}\}$ de E_j y E'_j respectivamente. Observemos que, por el Lema 4.1.7, para $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^{\mathcal{M}(m,n)}$, los operadores diagonales

$$\begin{aligned}Y_n := \otimes_\alpha(X_n^1,\ldots,X_n^m) &\overset{D_\lambda}{\to} \ell_2(\mathcal{M}(m,n)),\\ Y'_n := \otimes_{\alpha^*}(X_n^{1'},\ldots,X_n^{m'}) &\overset{D_\mu}{\to} \ell_2(\mathcal{M}(m,n)),\end{aligned}$$

verifican las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\lambda) &\leq 2^{m/2}\alpha^*\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\lambda_{\mathrm{i}}e'_{\mathrm{i}}\big),\\ \pi_1(D_\mu) &\leq 2^{m/2}\alpha\big(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\mu_{\mathrm{i}}e_{\mathrm{i}}\big).\end{aligned}$$

Por ende, por el Lema 4.1.6 obtenemos:

$$\chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}; Y_n) \leq 2^m gl(Y_m).$$

Como X_n^j es 1-complementado en E_j, por la metric mapping property de α, Y_n resulta 1-complementado en $\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)$. Por lo tanto, usando la Observación 1.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}
\chi((e_{\mathrm{i}}); \widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)) &= \sup_n \chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}); \widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)) \\
&= \sup_n \chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}); Y_n) \\
&\leq 2^m \sup_n gl(Y_n) \\
&\leq 2^m gl(\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la Observación 1.6.2 (pues Y_n 1-complementado en $\widetilde{\otimes}_\alpha(E_1,\ldots,E_m)$). $\square$

4.2. Estimaciones para la constante de incondicionalidad de $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$

En esta sección daremos las estimaciones asintóticas para $\chi(\mathcal{P}(^m\ell_p^n))$ calculadas en [9]. Pero, ¿por qué estudiar el crecimiento asintótico de $\chi(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$? El siguiente es un resultado clásico de Tzafriri de la década del setenta (ver [32],[22]):

Teorema 4.2.1. *Sea E un espacio de Banach con estructura incondicional local. Entonces, para algún $p \in \{1, 2, \infty\}$, E contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada.*

En particular si E o E' tiene base incondicional, entonces ambos espacios contienen al menos alguna sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada (para $p = 1, 2, \infty$). En tal caso, por la Proposición 2.3.4, el espacio $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ será isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$ para todo n. Por lo tanto, para m fijo, resulta natural estudiar el crecimiento asintótico en función de n de $\chi(\mathcal{P}(^m\ell_p^n))$, o equivalentemente según lo que vimos, el crecimiento asintótico de $gl(\mathcal{P}(^m\ell_p^n))$. Notemos que, si $gl(\mathcal{P}(^m\ell_p^n))$ tiene a infinito a medida que n crece, la Proposición 2.3.3 asegura que el espacio de polinomios $\mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ no tiene la propiedad de Gordon-Lewis. Por ende, ¡no tiene base incondicional! Esta idea será clave para resolver el problema de Dineen.

Antes de entrar en tecnicismos, introduzcamos un poco de notación: Para dos sucesiones de escalares $(a_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ y$(b_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ notamos

$$(a_{n,m}) \overset{m}{\asymp} (b_{n,m}),$$

si existen constantes $A_m > 0$ y $B_m > 0$ tal que para todo n

$$a_{n,m} \leq A_m b_{n,m} \ \text{ y } \ b_{n,m} \leq B_m a_{n,m}.$$

Mostraremos:

Teorema 4.2.2. *La constante de incondicionalidad de los polinomios m-homogéneos en ℓ_p^n tiene el siguiente comportamiento asintótico:*

$$\chi(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1-1/p})^{m-1} & 1 \leq p \leq 2 \\ (n^{1/2})^{m-1} & 2 < p \leq \infty. \end{cases} \tag{4.11}$$

La demostración de este teorema se divide en varios pasos: como para todo m,n vale la igualdad isométrica

$$\mathcal{P}(^m\ell_p^n) = \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_{p'}^n,$$

una formulación equivalente a (4.11) es

$$\chi(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_q^n) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1/q})^{m-1} & 2 < q \leq \infty \\ (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq q \leq 2. \end{cases} \tag{4.12}$$

Donde la estimación asintótica (4.12) será deducida de su análoga para el m-ésimo producto tensorial de ℓ_q^n:

$$\chi(\bigotimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1/q})^{m-1} & 2 < q \leq \infty \\ (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq q \leq 2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Para obtener estas estimaciones necesitaremos de algunas observaciones y resultados previos.

Proposición 4.2.3. *Sean F y G espacios de Banach de dimensión k y l respectivamente entonces*

$$\chi(F \otimes_\varepsilon G) \leq \text{mín}\{\chi(F)d(G, \ell_\infty^l), \chi(G)d(F, \ell_\infty^k)\}.$$

Demostración. Por el Lema 2.3.1 sabemos que

$$\chi(F \otimes_\varepsilon G) \leq d(F \otimes_\varepsilon G, F \otimes \ell_\infty^l)\chi(F \otimes_\varepsilon \ell_\infty^l).$$

Usando la metric mapping property de la norma tensorial ε se puede ver muy fácilmente que $d(F \otimes_\varepsilon G, F \otimes \ell_\infty^l) \leq d(G, \ell_\infty^l)$. Por otro lado, $F \otimes_\varepsilon \ell_\infty^l = \ell_\infty^l(F)$ (ver [28, Ejemplo 3.3.]). Una sencilla cuenta muestra que $\chi(\ell_\infty^l(F)) \leq \chi(F)$ (de hecho vale la igualdad). Por ende,

$$\chi(F \otimes_\varepsilon G) \leq \chi(F)d(G, \ell_\infty^l).$$

Razonando de manera análoga tenemos que $\chi(F \otimes_\varepsilon G) \leq \chi(G)d(F, \ell_\infty^k)$, lo cual concluye la demostración. $\square$

Se desprende de la observación (haciendo inducción en m) el próximo lema útil.

Lema 4.2.4. *Sea E un espacio de Banach de dimensión n. Entonces para todo $m \geq 2$*

$$\chi(\bigotimes_\varepsilon^m E) \leq \chi(E)d(E, \ell_\infty^n)^{m-1}. \tag{4.14}$$

La siguiente observación se deduce inmediatamente usando la desigualdad de Hölder.

Observación 4.2.5. *Para todo $m, n \in \mathbb{N}$, y toda elección de escalares $(a_{i_1,\ldots,i_m})_{1 \leq i_1,\ldots,i_m \leq n}$, $(b_{i_1}^1)_{1 \leq i_1 \leq n}$, $\ldots (b_{i_m}^m)_{1 \leq i_m \leq n}$, se tiene*

$$\left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} a_\mathbf{i} b_{i_1}^1 \ldots b_{i_m}^m \right| \leq \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |a_\mathbf{i}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i_1=1}^n |b_{i_1}^1|^2 \right)^{1/2} \ldots \left(\sum_{i_m=1}^n |b_{i_m}^m|^2 \right)^{1/2}.$$

La próxima desigualdad es una adaptación de una desigualdad más general conocida como la desigualdad de Chevet (ver [31]).

Teorema 4.2.6. ***(Desigualdad de Chevet)*** *Sean E y F espacios de Banach. Fijemos $x'_1, \ldots, x'_n \in E'$ e $y_1, \ldots, y_m \in F$. Sean $\{g_{ij}\}, \{g_i\}, \{g_j\}$ variables aleatorias Gaussianas independientes en algún espacio de probabilidad (Ω, μ). Entonces,*

$$\int_\Omega \| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m g_{ij}(\omega) x'_i \otimes y_j \| \, d\mu(\omega) \leq b \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'_i(x)|^2 \right)^{1/2} \int_\Omega \| \sum_{j=1}^m g_j(\omega) y_j \| \, d\mu(\omega)$$
$$+ b \sup_{\|y'\|\leq 1} \left(\sum_{j=1}^m |y'(y_j)|^2 \right)^{1/2} \int_\Omega \| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) x'_i \| \, d\mu(\omega),$$

donde $b = 1$ en el caso en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $b = 4$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Consideremos $(g_{\mathtt{i}})_{\mathtt{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ familia de variables Gaussianas independientes en el espacio de probabilidad (Ω, μ) y $x_1, \ldots, x_n$ vectores de E. Se define $l(m, (x_k)_1^n)$, el promedio Gaussiano de los vectores $x_1, \ldots, x_n$ como:

$$l(m, (x_k)_1^n) := \int_\Omega \| \sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{M}(m,n)} g_{\mathtt{i}}(\omega) x_{\mathtt{i}} \|_{\bigotimes_\varepsilon^m E} \, d\mu(\omega).$$

La próxima proposición permite estimar estos promedios. Es una reformulación de la Desigualdad de Chevet para el m-ésimo producto tensorial de un espacio de Banach E.

Proposición 4.2.7. *Sea E un espacio de Banach. Entonces para $m \geq 2$ y $x_1, \ldots, x_n \in E$*

$$l(m, (x_k)_1^n) \leq d_m l(1, (x_k)_1^n) \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'_i(x)|^2 \right)^{(m-1)/2},$$

donde $d_m \leq m$ para $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $d_2 \leq 8$, $d_3 \leq 36$, $d_4 \leq 148$ y $d_m \leq 5^{m-1}$ para $m > 4$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Demostración. Por inducción en m. Consideremos el caso $m = 2$. Notamos que

$$l(2, (x_k)_1^n) = \int_\Omega \| \sum_{\mathtt{i}\in\mathcal{M}(2,n)} g_{\mathtt{i}}(\omega) x_{\mathtt{i}} \|_{\bigotimes_\varepsilon^2 E} \, d\mu(\omega) = \int_\Omega \| \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\omega) x_i \otimes x_j \| \, d\mu(\omega).$$

Por lo tanto usando, la Desigualdad de Chevet (Teorema 4.2.6) tenemos

$$l(2, (x_k)_1^n) \leq b \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{1/2} \int_\Omega \| \sum_{j=1}^n g_j(\omega) x_j \| \, d\mu(\omega) +$$
$$+ b \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{j=1}^n |x'(x_j)|^2 \right)^{1/2} \int_\Omega \| \sum_{i=1}^n g_i(\omega) x_i \| \, d\mu(\omega)$$
$$\leq \underbrace{d_2}_{2b} \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{1/2} \underbrace{\int_\Omega \| \sum_{j=1}^n g_j(\omega) x_j \| \, d\mu(\omega)}_{l(1,(x_k)_1^n)}.$$

Supongamos ahora que la desigualdad vale para m y veamos que vale para $m+1$. Como

$$l(m+1,(x_k)_1^n) = \int_\Omega \| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m+1,n)} g_{\mathrm{i}}(\omega) x_{(\mathrm{i}_1,\dots,\mathrm{i}_m)} \otimes x_{\mathrm{i}_{m+1}} \|_{(\bigotimes_\varepsilon^m E)\bigotimes_\varepsilon E}\, d\mu(\omega),$$

nuevamente por Chevet tenemos:

$$l(m+1,(x_k)_1^n) \leq b\, l(m,(x_k)_1^n) \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{1/2}$$
$$+\, b\, l(m+1,(x_k)_1^n) \sup_{\|\varphi\|_{(\bigotimes_\varepsilon^m E)'}\leq 1} \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |\varphi(x_{\mathrm{i}})|^2 \right)^{1/2}.$$

Usando ahora la hipótesis inductiva

$$l(m+1,(x_k)_1^n) \leq b\, d_m\, l(1,(x_k)_1^n) \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{m/2} +$$
$$+\, b\, l(m+1,(x_k)_1^n) \sup_{\|\varphi\|_{(\bigotimes_\varepsilon^m E)'}\leq 1} \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |\varphi(x_{\mathrm{i}})|^2 \right)^{1/2}.$$

Luego, si vemos que

$$\sup_{\|\varphi\|_{(\bigotimes_\varepsilon^m E)'}\leq 1} \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |\varphi(x_{\mathrm{i}})|^2 \right)^{1/2} \leq \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{m/2}, \tag{4.15}$$

tenemos la desigualdad buscada.

Para esto, consideremos el operador $T : \ell_2^n \to E$ dado por $T(e_k) = x_k$. Afirmamos que

$$\|T\| \leq \sup_{\|x'\|\leq 1} \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{1/2}. \tag{4.16}$$

En efecto, sea $x' \in E'$ y $a = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n$, entonces por la desigualdad de Hölder tenemos

$$|x'(Ta)| = |x'(\sum_i a_i x_i)| \leq \sum_i |a_i||x'(x_i)| \leq \|a\|_2 \left(\sum_{i=1}^n |x'(x_i)|^2 \right)^{1/2};$$

como $\|T(a)\| = \sup_{\|x'\|\leq 1} |x'(\sum_i a_i x_i)|$ conseguimos la desigualdad enunciada en (4.16).

Una estimación prácticamente idéntica a la realizada para $\|T\|$ en (4.16) muestra que

$$\|R\| = \sup_{\|\varphi\|_{(\bigotimes_\varepsilon^m E)'}\leq 1} \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |\varphi(x_{\mathrm{i}})|^2 \right)^{1/2}, \tag{4.17}$$

donde $R : \bigotimes_2^m \ell_2^n \to \bigotimes_\varepsilon^m E$ es el único operador tal que $R(e_\mathrm{i}) = x_\mathrm{i}$ y $\bigotimes_2^m \ell_2^n$ es el m-ésimo producto tensorial de Hilbert (para $z = \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} a_\mathrm{i}e_\mathrm{i}$ se define $\|z\|_2 := \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_\mathrm{i}|^2\right)^{1/2}$). Notemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_2^m \ell_2^n \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "id"'] & & \bigotimes_\varepsilon^m E \\
& \bigotimes_\varepsilon^m \ell_2^n. \arrow[ur, "\otimes^m T"'] &
\end{tikzcd}$$

Luego, por la metric mapping property para ε tenemos que

$$\|R\| \leq \|id\|\| \otimes^m T\| \leq \|id\|\|T\|^m.$$

Por ende, para probar (4.15) solo basta ver que $\|id : \bigotimes_2^m \ell_2^n \to \bigotimes_\varepsilon^m \ell_2^n\| \leq 1$. Pero gracias a la Observación 4.2.5 se tiene

$$\begin{aligned}
\varepsilon(idz) &= \varepsilon\left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} a_\mathrm{i}e_\mathrm{i}\right) \\
&= \sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_m\in B_{\ell_2^n{}'}} \left|\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} a_\mathrm{i}\varphi_1(e_{\mathrm{i}_m})\dots\varphi_m(e_{\mathrm{i}_1})\right| \\
&\leq \left(\sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_\mathrm{i}|^2\right)^{1/2} = \|z\|_2,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

La siguiente observación es una consecuencia directa de la desigualdad de Hölder.

Observación 4.2.8. *Sea* $1 \leq q < \infty$ *y* $\{(a_1^j,\dots,a_n^j)\}_{j=1,\dots m} \in B_{\ell_{q'}^n}$ *con* $1/q + 1/q' = 1$). *Entonces,*

$$\left|\sum_{1\leq i_1,\dots,i_m\leq n} a_{i_1}^1\dots a_{i_m}^m\right| \leq n^{m/q}. \tag{4.18}$$

Estamos listos para dar una demostración de (4.13). Empecemos por el caso $q=\infty$. Es muy sencillo probar que $\otimes_\varepsilon^m \ell_\infty^n$ es isométricamente isomorfo a ℓ_∞^{mn} (ver [28, Ejemplo 3.3.]). Luego $\chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_\infty^n) = 1$, ya que ℓ_∞^{mn} tiene base 1-incondicional. Consideremos ahora el caso $1 \leq q < \infty$.

Estimaciones asintóticas superiores:

Por el Lema 4.2.4 sabemos que

$$\chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \leq d(\ell_q^n, \ell_\infty^n)^{m-1}\underbrace{\chi(\ell_q^n)}_{=1}.$$

Usemos ahora las estimaciones de las distancias de Banach-Mazur calculadas por Gurari, Kadec, Macaev (Teorema 2.2.1). Recoradamos que existe $K > 0$ ($K = 1$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tal que

$$d(\ell_q^n, \ell_\infty^n) \leq K n^{1/2} \text{ si } 1 \leq q < 2,$$
$$d(\ell_q^n, \ell_\infty^n) = n^{1/q} \quad \text{si } 2 \leq q \leq \infty.$$

Obtenemos de esta manera la estimación superior para $\chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n)$ enunciada en (4.13).

<u>Estimaciones asintóticas inferiores:</u>

Sea $(e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ la base canónica de $\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n$. Observemos que

$$n^{m/q} = \| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} e_{\mathrm{i}} \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n}. \tag{4.19}$$

En efecto,

$$\| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} e_{\mathrm{i}} \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} = \sup_{\varphi_1,\dots,\varphi_m \in B_{\ell_{q'}^n}} \left| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \varphi_1(e_{\mathrm{i}_1}) \dots \varphi_m(e_{\mathrm{i}_m}) \right| \leq n^{m/q}$$

donde la última desigualdad se debe a la Observación 4.2.8. Por otro lado si $\varphi_j = (1/n^{1/q'}, \dots, 1/n^{1/q'})$ es el vector perteneciente a $B_{\ell_{q'}^n}$, tenemos

$$\left| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \varphi_1(e_{\mathrm{i}_1}) \dots \varphi_m(e_{\mathrm{i}_m}) \right| = \left| \sum_{1\leq \mathrm{i}_1,\dots,\mathrm{i}_m \leq n} (1/n^{1/q'})^m \right| = n^m (1/n^{1/q'})^m = n^{m-\frac{m}{q'}} = n^{m/q},$$

mostrando así que el supremo es efectivamente $n^{m/q}$.

Consideremos las matrices aleatorias

$$R : \Omega \to \otimes_\varepsilon^m \ell_q^n \;\; R(\omega) := \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} r_{\mathrm{i}}(\omega) e_{\mathrm{i}},$$
$$G : \Omega \to \otimes_\varepsilon^m \ell_q^n \;\; G(\omega) := \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} g_{\mathrm{i}}(\omega) e_{\mathrm{i}},$$

donde (Ω, μ) es algún espacio de probabilidad y r_{i}'s y g_{i}'s forman una familia de n^m variables de Bernoulli y Gaussianas independientes en Ω, respectivamente. Entonces para todo $\omega \in \Omega$,

$$\begin{aligned} n^{m/q} = \| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} e_{\mathrm{i}} \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} &= \| \sum_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)} r_{\mathrm{i}}(\omega) r_{\mathrm{i}}(\omega) e_{\mathrm{i}} \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \\ &\leq \chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}) \| R(\omega) \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la Observación 4.1.9 asegura que $\chi((e_{\mathrm{i}})_{\mathrm{i}\in\mathcal{M}(m,n)}) \leq 2^m gl(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \leq 2^m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n)$. Por lo tanto, para todo $\omega \in \Omega$ se tiene

$$n^{m/q} \leq 2^m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \| R(\omega) \|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n}.$$

Si integramos sobre Ω, tenemos:

$$n^{m/q} \leq 2^m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \int_\Omega \|R(\omega)\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \, d\mu.$$

Por el Teorema 1.7.5 sabemos que los promedios Gaussianos dominan (salvo una constante) a los promedios de Bernoulli. Es decir, existe una constante $L = 1/M_1$ tal que

$$\int_\Omega \|R(\omega)\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \, d\mu \leq L \int_\Omega \|G(\omega)\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \, d\mu.$$

Luego,

$$\begin{aligned} n^{m/q} &\leq 2^m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) L \int_\Omega \|G(\omega)\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \, d\mu \\ &\leq 2^m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) L d_m \int_\Omega \|\sum_{k=1}^n g_k(\omega) e_k\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \, d\mu \sup_{\|x'\|_{\ell_{q'}^n} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n |x'(e_k)|^2 \right)^{\frac{m-1}{2}}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la reformulación de la desigualdad de Chevet para el m-ésimo producto tensorial (Proposición 4.2.7).

Notemos que $\sup_{\|x'\|_{\ell_{q'}^n} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n |x'(e_k)|^2 \right)^{1/2} = \|Id : \ell_{q'}^n \to \ell_2^n\|$. Recordando el Lema 2.2.2 tenemos que

$$\sup_{\|x'\|_{\ell_{q'}^n} \leq 1} \left(\sum_{k=1}^n |x'(e_k)|^2 \right)^{1/2} = \|Id : \ell_{q'}^n \to \ell_2^n\| = \begin{cases} 1 & 2 \leq q \leq \infty \\ n^{1/q-1/2} & 1 \leq q < 2 \end{cases}$$

Además, por [31, Página 329], sabemos que si $1 \leq q < \infty$ existe una constante $A > 0$ tal que

$$\int_\Omega \|\sum_{k=1}^n g_k(\omega) e_k\|_{\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n} \leq A n^{1/q}.$$

Recapitulando, si $2 \leq q \leq \infty$ se tiene

$$n^{m/q} \leq C_m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) n^{1/q} 1^{m-1},$$

donde C_m es una constante que depende únicamente de m. Por ende,

$$\chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \geq C_m \frac{n^{m/q}}{n^{1/q}} = C_m (n^{1/q})^{m-1}.$$

Por otra parte, si $1 \leq q < 2$, obtenemos que

$$n^{m/q} \leq C_m \chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) n^{1/q} (n^{1/q-1/2})^{m-1}.$$

En consecuencia,

$$\chi(\otimes_\varepsilon^m \ell_q^n) \geq C_m \frac{n^{\frac{m-1}{q}}}{n^{(1/q-1/2)m-1}} = C_m (n^{1/q-(1/q-1/2)})^{m-1} = C_m (n^{1/2})^{m-1}.$$

¡Hemos conseguido de esta manera la estimación inferior para $\chi(\otimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n)$ enunciada en (4.13)!.

Falta deducir (4.12) de (4.13). Como consecuencia del Teorema 4.1.2 y (4.3) es suficiente ver el comportamiento asintótico de $gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^n)$ en vez del de $\chi(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^n)$. Para la estimación superior notemos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\otimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^n \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr, "i_{\ell_q^n}^m"'] & & \otimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^n \\
& \otimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n, \arrow[ur, "S_{\ell_q^n}^m"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $i_{\ell_q^n}^m$ es la inclusión canónica del producto tensorial simétrico en el producto tensorial y $S_{\ell_q^n}^m$ es el operador de simetrización. Utilizando la Observación 1.6.2, como $\|i_{\ell_q^n}^m\| \leq \frac{m^m}{m!}$ y $\|S_{\ell_q^n}^m\| \leq 1$ se tiene

$$gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^n) \leq \frac{m^m}{m!} gl(\bigotimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n).$$

De esta manera la estimación superior de (4.12) se deduce de (4.13). Para la estimación inferior consideremos $I_i : \ell_q^n \to \ell_q^{mn}$ la i-ésima inclusión canónica y $P_i : \ell_q^{mn} \to \ell_q^n$ la i-ésima proyección canónica, es decir:

$$a = (a_1, \ldots, a_n) \overset{I_i}{\mapsto} (0, \ldots, 0, \underbrace{a_1}_{(i-1)n+1}, \ldots, \underbrace{a_n}_{in}, 0, \ldots, 0) = (\overrightarrow{0}, \ldots, \underbrace{a}_{i}, \ldots, \overrightarrow{0}),$$

$$(b_1, \ldots, b_{(i-1)n+1}, \ldots, b_{in}, \ldots, b_{mn}) \overset{P_i}{\mapsto} (b_{(i-1)n+1}, \ldots, b_{in}).$$

Veamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n \arrow[rr, "Id_{\otimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n}"] \arrow[d, "\otimes_{i=1}^{m} I_i"] & & \bigotimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n \\
\bigotimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^{nm} \arrow[r, "S_{\ell_q^n}^{mn}"'] & \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s}\ell_q^{nm} \arrow[r, "i_{\ell_q^{mn}}^{m}"'] & \bigotimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^{mn} \arrow[u, "m!\otimes_{i=1}^{m} P_i"']
\end{tikzcd}$$

En efecto, si $x_1, \ldots, x_m \in \ell_q^n$

$$\begin{aligned}
& m! \otimes_{i=1}^{m} P_i\, i_{\ell_q^{mn}}^{m}\, S_{\ell_q^n}^{mn}\ \otimes_{i=1}^{m} I_i(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \\
& m! \otimes_{i=1}^{m} P_i\, i_{\ell_q^{mn}}^{m}\, S_{\ell_q^n}^{mn}(\underbrace{(x_1, \overrightarrow{0}, \ldots, \overrightarrow{0})}_{y_1} \otimes \underbrace{(\overrightarrow{0}, x_2, \ldots, \overrightarrow{0})}_{y_2} \otimes \cdots \otimes \underbrace{(\overrightarrow{0}, \overrightarrow{0}, \ldots, x_m)}_{y_m}) = \\
& m! \otimes_{i=1}^{m} P_i\, i_{\ell_q^{mn}}^{m}(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(m)}) = \\
& m! \otimes_{i=1}^{m} P_i(\frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} y_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\sigma(m)}) = \\
& \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} P_1(y_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes P_m(y_{\sigma(m)}) = \\
& x_1 \otimes \cdots \otimes x_m = \\
& Id_{\otimes_{\varepsilon}^{m}\ell_q^n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m),
\end{aligned}$$

ya que $P_i(y_{\sigma(i)}) = x_i$ solamente si $\sigma(i) = i$, en caso contrario $P_i(y_{\sigma(i)}) = (0, \ldots, 0)$. Por lo tanto, por la Observación 1.6.2 tenemos

$$\begin{aligned} gl(\bigotimes{}^m_\varepsilon \ell_q^n) &\leq \|S^{mn}_{\ell_q^n} \ \otimes_{i=1}^m I_i\|\|m! \otimes_{i=1}^m P_i \ i^m_{\ell_q^{mn}}\|gl(\bigotimes{}^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{mn}) \\ &\leq \|S^{mn}_{\ell_q^n}\|\| \otimes_{i=1}^m I_i\|\|m! \otimes_{i=1}^m P_i\|\|i^m_{\ell_q^{mn}}\|gl(\bigotimes{}^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{mn}) \\ &\leq 1(\prod_{i=1}^m \|I_i\|)m!(\prod_{i=1}^m \|P_i\|)\frac{m^m}{m!} gl(\bigotimes{}^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{mn}), \end{aligned}$$

de lo que se sigue que

$$gl(\bigotimes{}^m_\varepsilon \ell_q^n) \leq m^m gl(\bigotimes{}^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{mn}). \tag{4.20}$$

Es fácil ver que para $n > m$ y $t \in \mathbb{R}$, si $[n/m]$ es la parte entera de n/m se tiene:

$$(n^t)^{m-1} \overset{m}{\asymp} ([n/m]^t)^{m-1}.$$

Se sigue de la observación anterior, las estimaciones dadas en (4.13), la desigualdad (4.20) y de la Observación 4.1.9 que:

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{ll} (n^{1/q})^{m-1} & 2 < q \leq \infty \\ (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq q \leq 2 \end{array}\right\} &\overset{m}{\asymp} \left\{\begin{array}{ll} ([n/m]^{1/q})^{m-1} & 2 < q \leq \infty \\ ([n/m]^{1/2})^{m-1} & 1 \leq q \leq 2 \end{array}\right. \\ &\overset{m}{\asymp} \chi(\bigotimes_\varepsilon^m \ell_q^{[n/m]}) \\ &\leq 2^m gl(\bigotimes_\varepsilon^m \ell_q^{[n/m]}) \\ &\leq 2^m m^m gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_q^{[n/m]m}) \\ &\leq 2^m m^m gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_q^{n}), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a que $\bigotimes^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{[n/m]m}$ es 1-complementado en $\bigotimes^{m,s}_{\varepsilon_s}\ell_q^{n}$

Para el caso $m \leq n$ razonando como antes tenemos:

$$\begin{aligned} \left.\begin{array}{ll} (n^{1/q})^{m-1} & 2 < q \leq \infty \\ (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq q \leq 2 \end{array}\right\} &\overset{m}{\asymp} \chi(\bigotimes_\varepsilon^m \ell_q^{n}) \\ &\leq 2^m gl(\bigotimes_\varepsilon^m \ell_q^{n}) \\ &\leq 2^m m^m gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_q^{nm}) \\ &\leq 2^m m^m gl(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} \ell_q^{n}). \end{aligned}$$

con esto finalizamos con los cálculos de las estimaciones inferiores de (4.3).

4.3. Algunas deducciones

Lo que viene es una serie de resultados que se obtienen de las estimaciones que hicimos previamente.

Teorema 4.3.1. *La constante de incondicionalidad para el espacio de los polinomios nucleares m-homogéneos sobre ℓ_p^n tiene el siguiente comportamiento asintótico.*

$$\chi(\mathcal{P}_{nuc}(^m\ell_p^n)) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq p \leq 2 \\ (n^{1/p})^{m-1} & 2 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Demostración. Sabemos, por el Teorema 4.1.3, que es suficiente probar que $gl(\mathcal{P}_{nuc}(^m\ell_p^n))$ tiene este comportamiento asintótico. Para un espacio de dimensión finita E, recordemos la igualdad isométrica:

$$\bigotimes\nolimits_{\pi_s}^{m,s} E' = \mathcal{P}_{nuc}(^m E).$$

Por la dualidad entre la norma π_s y ε_s tenemos la igualdad isométrica

$$\mathcal{P}_{nuc}(^m\ell_p^n)' = \mathcal{P}(^m\ell_{p'}^n),$$

donde p' es el conjugado de p. Por consiguiente, gracias al Teorema 1.2.17 tenemos que

$$gl(\mathcal{P}_{nuc}(^m\ell_p^n)') = gl(\mathcal{P}_{nuc}(^m\ell_p^n)) = gl(\mathcal{P}(^m\ell_{p'}^n)) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1/2})^{m-1} & 1 \leq p \leq 2 \\ (n^{1/p})^{m-1} & 2 < p \leq \infty \end{cases},$$

que es lo que queríamos probar. □

El próximo teorema es uno de los más importantes de las tesis.

Teorema 4.3.2. *Sea E un espacio de Banach tal que para $1 < p \leq \infty$ E contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada. Entonces $\mathcal{P}_w(^m E)$ y $\mathcal{P}(^m E)$ no poseen base incondicional para ningún $m \geq 2$.*

Demostración. Por la Proposición 2.3.5, sabemos que existe una constante C y subespacios complementados F_n de E tal que $d(\ell_p^n, F_n) \leq C$. Usando la desigualdad (2.19) tenemos:

$$\begin{aligned} gl(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)) &\leq \|P\|^m d(\ell_p^n, F_n)^m gl(\mathcal{P}(^m E)) \\ &\leq C^{2m} gl(\mathcal{P}(^m E)) \\ &\leq C^{2m} \chi(\mathcal{P}(^m E)). \end{aligned}$$

Por otro lado, por lo visto en el Teorema 4.1.2, $\chi(P(^m\ell_p^n))) \leq k_m gl(P(^m\ell_p^n)))$. Obteniendo así que

$$\chi(P(^m\ell_p^n))) \leq k_m C^{2m} \chi(\mathcal{P}(^m E)). \tag{4.21}$$

Por otro lado, por el Teorema 4.2.2, tenemos las estimaciones

$$\chi(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)) \overset{m}{\asymp} \begin{cases} (n^{1-1/p})^{m-1} & 1 \leq p \leq 2 \\ (n^{1/2})^{m-1} & 2 < p \leq \infty, \end{cases}$$

por ende, si $1 < p \leq \infty$, se tiene que el miembro izquierdo de la desigualdad (4.21) es una sucesión que diverge a medida que $n \to \infty$. Luego, $\mathcal{P}(^mE)$ no tiene base incondicional.

Para $\mathcal{P}_w(^mE)$ usar (2.20) con $\mathcal{P}_w(^m\ell_p^n) = \mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ y razonar de manera idéntica. □

Proposición 4.3.3. *Si para algún $m \geq 2$ el espacio $\mathcal{P}_w(^mE)$ (o $\mathcal{P}(^mE)$) tiene base incondicional, entonces E contiene la sucesión de ℓ_1^n's uniformemente complementada. En particular, E' contiene la sucesión de ℓ_∞^n's uniformemente complementada.*

Demostración. Supongamos $\mathcal{P}_w(^mE)$ tiene base incondicional, por ende tiene l.u.st.. Como $\mathcal{P}_w(^kE)$ es un subespacio complementado de $\mathcal{P}_w(^mE)$ si $k < m$ (ver [5, Proposición 5.3]), por la Proposición 1.2.8 también tiene l.u.st.. En particular, $\mathcal{P}_w(^1E) = E'$ tiene l.u.st.. Por ende, por el resultado de Tzafriri (Teorema 4.2.1) para algún $p \in \{1, 2, \infty\}$, E contiene la sucesión de ℓ_p^n's uniformemente complementada. Pero por el Teorema 4.3.2, E puede contener únicamente la sucesión de ℓ_1^n's uniformemente complementada. Para el caso $\mathcal{P}(^mE)$ se razona de manera idéntica. □

Notemos que la proposición anterior asegura que si $\mathcal{P}_w(^mE)$ tiene base incondicional (respectivamente $\mathcal{P}(^mE)$) E' no puede tener tipo ni cotipo (ya que las constantes de tipo y cotipo de ℓ_∞^n no están uniformemente acotadas, ver [31]).

El siguiente resultado se obtiene de forma directa de la proposición anterior.

Corolario 4.3.4. *Para $m \geq 2$ no existe ningún espacio de Banach E tal que $\mathcal{P}_w(^mE)$ y $\mathcal{P}_w(^mE')$ tienen simultáneamente base incondicional (respectivamente $\mathcal{P}(^mE)$ y $\mathcal{P}(^mE')$).*

Demostración. Nuevamente daremos la demostración para el caso de los polinomios aproximables. Si $\mathcal{P}_w(^mE)$ tiene base incondicional, por la proposición anterior, E' contiene la sucesión de ℓ_∞^n uniformemente complementada, pero por el Teorema 4.3.2 tenemos que $\chi(\mathcal{P}_w(^mE')) = \infty$. Luego, $\mathcal{P}_w(^mE')$ no puede tener base incondicional. □

4.4. El problema de Dineen

En esta sección usaremos todas las herramientas que vinimos estudiando hasta ahora para ver cómo se resolvió finalmente el problema de Dineen. Más precisamente, mostraremos que para E es un espacio de Banach con base incondicional, $\mathcal{P}(^mE)$ tiene base incondicional si y sólo si E es de dimensión finita ($m \geq 2$). A. Defant y N. Kalton, basándose en los trabajos [9] y [12], dieron en [10] una demostración de este resultado. Expondremos en detalle su trabajo.

Un resultado importante que necesitaremos es la siguiente teorema debido a S. J. Dilworth, N. Kalton, D. Kutzarova y V.N. Temlyakov:

Teorema 4.4.1. *Sea E un espacio de Banach con cotipo q no trivial y $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ una base incondicional de E. Entonces, $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ tiene una subsucesión $(e_{j_k})_{k=1}^{\infty}$ que es greedy.*

Es fácil probar que si E contiene la sucesión uniformemente complementado de ℓ_∞^n's no tiene cotipo (ya que las constantes de cotipo de ℓ_∞^n tiende a infinito a medida que n crece). El siguiente resultado asegura que vale la vuelta (puede encontrarse en [23]).

Teorema 4.4.2. *E tiene cotipo $q < \infty$ si y sólo si E no contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_∞^n's.*

En el capítulo anterior mencionamos un resultado clásico de Tzafriri. El mismo aseguraba que para algún $p \in \{1, 2, \infty\}$, E debía contener la sucesión uniformemente complementada de ℓ_p^n's, si tenía base incondicional. El siguiente teorema es, en algún sentido, similar.

Teorema 4.4.3. *Sea E un espacio de Banach con cotipo $q < \infty$ y base greedy (e_j). Si para $p > 1$ se tiene*

$$\liminf_{n\to\infty} n^{-1/p}\phi(n) = 0.$$

Entonces, E contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_2^ns.

Dejaremos la demostración para más adelante. Así nos concentramos directamente en resolver el problema de Dineen.

Proposición 4.4.4. *Sea E un espacio de Banach con base incondicional. Si $\mathcal{P}(^mE)$ es separable, con $m \geq 2$, entonces E contiene, o bien la sucesión de ℓ_2^n's uniformemente complementada, o bien contiene la sucesión de ℓ_∞^n's uniformente complementada.*

Demostración. Supongamos que E no contiene la sucesión de ℓ_2^n's uniformemente complementada ni tampoco la sucesión de ℓ_∞^n's. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que la base es 1-incondicional. Por el Teorema 4.4.2, como E no contiene la sucesión de ℓ_∞^n's uniformemente complementada, E tiene cotipo q no trivial. Luego, por el Teorema 4.4.1 existe un subespacio F (que resulta complementado por la Observación 1.2.4) con base greedy $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ y funciones biortogonales $(e_j^{'})$. Por el Lema 2.3.4, $\mathcal{P}(^mF)$ es isomorfo a un subespacio complementado de $\mathcal{P}(^mE)$, por ende es separable. Además, por el Lema 1.6.1, como E no contiene la sucesión uniformemente complementada de ℓ_2^n's, F tampoco. Tomemos $1 < p < m$. El Teorema 4.4.3 asegura que $\liminf\ n^{-1/p}\phi(n)$ no es cero, por lo tanto existe $C > 0$ tal que para todo n

$$\phi(n) \geq Cn^{1/p}, \tag{4.22}$$

donde ϕ función fundamental asociada a la base greedy (e_j). Tomemos $x \in F$ de norma 1. Para $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ definimos

$$H_k = \{j : 2^k \leq |e_j^{'}(x)| < 2^{k+1}\}.$$

Veamos que

$$\phi(H_k) \leq \Delta 2^{-k}. \tag{4.23}$$

En efecto,

$$\phi(H_k) \leq \Delta \| \sum_{j \in H_k} e_j \|.$$

Por otro lado, como la base es 1-incondicional:

$$\| \sum_{j \in H_k} e_j \| = 2^{-k} \| \sum_{j \in H_k} 2^k e_j \| \leq 2^{-k} \| \sum_{j \in H_k} e_j^{'}(x) e_j \| \leq 2^{-k} \underbrace{\| \sum_{j=1}^{\infty} e_j^{'}(x) e_j \|}_{\|x\|=1},$$

obteniendo de esta manera la desigualdad (4.23).

Tomemos $\alpha \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ y definimos $P_\alpha(x) := \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(j) e_j^{'}(x)^m$. Notemos que P_α es un polinomio bien definido en $\mathcal{P}(^mF)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |e_j'(x)|^m &= \sum_{k \leq 0} \sum_{j \in H_k} |e_j'(x)|^m \\
&\leq 2^m \sum_{k \leq 0} 2^{mk} |H_k| \\
&\leq 2^m C^{-1} \sum_{k \leq 0} 2^{mk} \phi(H_k)^p (\text{ por } \quad (4.22)\ ) \\
&\leq 2^m C^{-1} \Delta^p \sum_{k \leq 0} 2^{(m-p)k} \ (\text{ por } \quad (4.23)\ ),
\end{aligned}$$

donde la última serie converge pues $m < p$.

Es muy fácil ver que $\|P_\alpha - P_\beta\| \geq 2$ si $\alpha \neq \beta$. Como $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}}$ es no numerable, $\mathcal{P}(^mF)$ no puede ser separable y tenemos un absurdo. $\square$

Gracias a la última proposición anterior junto con lo que vimos en la sección anterior estamos en condiciones de mostrar que la intuición de Dineen era correcta.

Teorema 4.4.5. *Sea E un espacio de Banach con base incondicional. El espacio de Banach $\mathcal{P}(^mE)$ de los polinomios m-homogéneos en E tiene base incondicional si y sólo si E es de dimensión finita.*

Demostración. Supongamos E de dimensión infinita. Si $\mathcal{P}(^mE)$ tiene base incondicional ($m \geq 2$) en particular es separable, por la Proposición 4.4.4 se deduce que, E contiene, o bien la sucesión ℓ_2^n's uniformemente complementada, o bien la sucesión de ℓ_∞^n's uniformemente complementada. Por el Teorema 4.3.2 tenemos un absurdo. □

Había quedado pendiente la demostración del Teorema 4.4.3:

Demostración. (del Teorema 4.4.3) Sin pérdida de generalidad podemos suponer que la base es 1-incondicional; C será la constante de cotipo q de E y Δ la constante democrática. Podemos asumir también que $q \geq p$ (ya que, si E tiene cotipo q, tiene cotipo q' para todo $q' \geq q$). Para no marearse será conveniente dividir la demostración en pequeñas observaciones.

Hecho 1 Para todo n, m se tiene

$$\phi(n) \leq C\Delta m^{1/q}\phi(mn). \tag{4.24}$$

Probemos esto: tomemos A_1 un conjunto arbitrario de cardinal n y $A_2, ..., A_m$ de igual cardinal tal que, $A_1, A_2, ..., A_m$ resultan disjuntos dos a dos. Notemos que para todo $1 \leq k \leq m$ se tiene

$$\phi(n)^q \leq \Delta^q \| \sum_{j\in A_k} e_j \|^q.$$

Promediando ahora sobre todos los k's

$$\phi(n)^q = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m \phi(n)^q \leq \frac{1}{m}\Delta^q \sum_{k=1}^m \| \underbrace{\sum_{j\in A_k} e_j}_{x_k} \|^q.$$

Luego, usando que E tiene cotipo q:

$$\phi(n)^q \leq \frac{1}{m}\Delta^q C^q \int_0^1 \| \sum_{k=1}^m r_k(t)x_k\|^q \, dt. \tag{4.25}$$

Por otro lado, como $A_1, A_2, ..., A_m$ son disjuntos dos a dos y la base es 1-incondicional, tenemos para cada $t \in [0,1]$ que

$$\| \sum_{k=1}^m r_k(t)x_k\| = \| \sum_{k=1}^m \sum_{j\in A_k} r_k(t)e_j\| = \| \sum_{k=1}^m \sum_{j\in A_k} e_j\| \leq \phi(mn).$$

De (4.25) deducimos:

$$\phi(n)^q \leq \frac{1}{m}\Delta^q C^q \phi(mn)^q.$$

Resta tomar raíz q-ésima para obtener la desigualdad (4.24).

Hecho 2: Sea $\mathbb{A}$ el conjunto de todos los n tales que si, $0 \leq k \leq n$, se tiene

$$2^{-k/p}\phi(2^k) \geq 2^{-n/p}\phi(2^n).$$

Entonces $\mathbb{A}$ es infinito.

Razonemos este hecho por el absurdo: si $\mathbb{A}$ fuera finito existiría un número $n_0 = \text{máx}(\mathbb{A})$. Consideremos $n > n_0$ y $k_1 = \text{ínf}\{k : 0 \leq k < n \text{ con } 2^{-k/p}\phi(2^k) < 2^{-n/p}\phi(2^n)\}$ (Notemos que el conjunto $\{k : 0 \leq k < n \text{ con } 2^{-k/p}\phi(2^k) < 2^{-n/p}\phi(2^n)\}$ es no vacío pues n no está en $\mathbb{A}$).

Afirmamos que $k_1 \leq n_0$. Supongamos que no, luego k_1 no pertenece a $\mathbb{A}$; por lo tanto, existe un entero $k_2 < k_1$ tal que

$$2^{-k_2/p}\phi(2^{k_2}) < 2^{-k_1/p}\phi(2^{k_1}) < 2^{-n/p}\phi(2^n),$$

contradiciendo la minimalidad de k_1. Por ende, probamos que para todo $n \geq n_0$ se tiene

$$c = 2^{-n_0/p}\phi(2^{n_0}) \leq 2^{-n/p}\phi(2^n).$$

Consideremos $n \geq 2^{n_0}$ arbitrario y $k \geq n_0$ tal que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Como ϕ es creciente tenemos: $\phi(2^k) \leq \phi(n) \leq \phi(2^{k+1})$. Por otro lado, $(1/2^{k+1})^p < 1/n^p \leq (1/2^k)^p$; luego, juntando ambas desigualdades,

$$2^{-p}c \leq 2^{-p}2^{-k/p}\phi(2^k) \leq n^{-1/p}\phi(n).$$

Hemos llegando a un absurdo, ya que la última desigualdad contradice que $\text{lím inf}_{n\to\infty}\ n^{-1/p}\phi(n) = 0$.

Hecho 3: Sea $n \in \mathbb{A}$ y $N = 2^n$. Entonces, para $1 \leq m \leq N$, se verifica la siguiente desigualdad:

$$\phi(m) \geq 2^{-1/p}(\frac{m}{N})^{1/p}\phi(N). \tag{4.26}$$

Probemos esto: para $m = N$ la desigualdad es inmediata. Si $1 \leq m < N$ tomemos k tal que $2^k \leq m < 2^{k+1}$, como ϕ es creciente tenemos $\phi(m) \geq \phi(2^k)$. Por otro lado:

$$2^{-k/p}\phi(2^k) \geq 2^{-n/p}\phi(2^n) = 2^{-n/p}\phi(N),$$

ya que $n \in \mathbb{A}$. Por ende, juntando ambas desigualdades:

$$\begin{aligned}\phi(m) &\geq 2^{k-n/p}\phi(N)\\ &= 2^{\frac{k+1-n-1}{p}}\phi(N)\\ &= (\frac{2^{k+1}}{2^n})^{1/p}2^{-1/P}\phi(N)\\ &\geq (\frac{m}{N})^{1/p}2^{-1/P}\phi(N).\end{aligned}$$

Obteniendo así la ecuación (4.26).

Hecho 4: Sea $n \in \mathbb{A}$ y $N = 2^n$. Entonces, para $1 \leq m \leq N$ vale

$$\phi(m) \leq C\Delta 2^{1/q}(\frac{m}{N})^{1/q}\phi(N) \tag{4.27}$$

Demostremos esta observación: si $m = N$ la desigualdad es trivial pues $C, \Delta \geq 1$. Para $1 \leq m < N$, tomemos k ($1 \leq k < n$) tal que $2^{k-1} \leq m < 2^k$; por la Observación 4.4 tenemos:

$$\begin{aligned}
\phi(m) \leq \phi(2^k) &\leq C\Delta(\frac{2^k}{2^n})^{1/q}\phi(2^n) \\
&\leq C\Delta 2^{1/q}(\frac{2^{k-1}}{2^n})^{1/q}\phi(2^n) \\
&\leq C\Delta 2^{1/q}(\frac{m}{N})^{1/q}\phi(N),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos.

Sean $n \in \mathbb{A}$ y $N = 2^n$. Consideremos Ω_N el conjunto $\{1, 2..., N\}$ provisto de la medida de contar. Es decir: $\mu(A) = |A|/N$. Fijemos $1 < r < p \leq q < s < \infty$. Definimos el operador

$$\begin{aligned}
U_N : L_s(\Omega_N, \mu) &\to E \\
f &\mapsto \frac{1}{\phi(N)}\sum_{j=1}^{N} f(j)e_j.
\end{aligned}$$

Hecho 5: Para todo $N = 2^n$ con $n \in \mathbb{A}$ existe K tal que $\|U_N\| \leq K$. Es decir, la norma se mantiene uniformemente acotada.

Sea $\|f\|_s \leq 1$ y $H_k = \{j : 2^k \leq |f(j)| < 2^{k+1}\}$ ($k \in \mathbb{Z}$). Observemos que

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\chi_{H_k}.$$

Aplicando U_N y usando la desigualdad triangular tenemos

$$\|U_N f\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|U_N f\chi_{H_k}\|.$$

Luego, por definición de U_N,

$$U_N f\chi_{H_k} = \frac{1}{\phi(N)}\sum_{j=1}^{N} f(j)\chi_{H_k}(j)e_j = \sum_{j \in H_k} f(j)e_j.$$

Por otro lado, como la base es 1-incondicional:

$$\|U_N f\chi_{H_k}\| = \frac{1}{\phi(N)}\|\sum_{j \in H_k} f(j)e_j\| \leq \frac{1}{\phi(N)}2^{k+1}\|\sum_{j \in H_k} e_j\|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|U_N f\| &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|Uf\chi_{H_k}\| \\ &\leq \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k+1} \|\sum_{j\in H_k} e_j\| \\ &\leq \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k+1}\phi(|H_k|).\end{aligned}$$

Usando la desigualdad (4.27) de la Observación 4.4

$$\phi(|H_k|) \leq 2^{1/q} C\Delta \left(\frac{|H_k|}{N}\right)^{1/q} \phi(N) = 2^{1/q}C\Delta\mu(H_k)^{1/q}\phi(N)$$

Luego,

$$\begin{aligned}\|U_N f\| &\leq \frac{1}{\phi(N)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{k+1} 2^{1/q} C\Delta\mu(H_k)^{1/q}\phi(N) \\ &= 2^{1+1/q} C\Delta \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k \mu(H_k)^{1/q} \\ &= 2^{1+1/q} C\Delta \left(\sum_{k<0} 2^k\mu(H_k)^{1/q} + \sum_{k\geq 0} 2^k\mu(H_k)^{1/q}\right) \\ &\leq 2^{1+1/q} C\Delta \left(1 + \sum_{k\geq 0} 2^k\mu(H_k)^{1/q}\right).\end{aligned}$$

Para ver que existe una constante K tal que $\|U_N\| \leq K$ $(\forall\ N \in \mathbb{N})$ basta mostrar que $\sum_{k\geq 0} 2^k\mu(H_k)^{1/q}$ está acotada por una constante independiente de N. Veamos esto: como $2^k = 2^{\frac{ks}{q}} 2^{k(1-\frac{s}{q})}$, aplicando Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} 2^k\mu(H_k)^{1/q} &= \sum_{k\geq 0} 2^{\frac{ks}{q}} 2^{k(1-\frac{s}{q})}\mu(H_k)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{k\geq 0} 2^{ks}\mu(H_k)\right)^{1/q} \left(\sum_{k\geq 0} 2^{k(1-\frac{s}{q})q'}\right)^{1/q'},\end{aligned}$$

con $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Probemos que $\left(\sum_{k\geq 0} 2^{ks}\mu(H_k)\right)^{1/q} \leq 1$. En efecto, como μ es la medida de contar tenemos, para $g \in L(\Omega_N, \mu)$, la igualdad

$$\int_{\Omega_N} g\, d\mu = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g(j).$$

Por ende,

$$
\begin{aligned}
1 \geq \|f\|_s = \int_{\Omega_N} |f|^s \, d\mu \\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |f(j)|^s \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{j\in H_k} |f(j)|^s \\
&\geq \frac{1}{N}\sum_{k\geq 0}\sum_{j\in H_k} |f(j)|^s \\
&\geq \frac{1}{N}\sum_{k\geq 0} 2^{ks}|H_k| \\
&= \sum_{k\geq 0} 2^{ks}\mu(H_k).
\end{aligned}
$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\|U_N f\| &\leq 2^{1+1/q} C\Delta \left(1 + \sum_{k\geq 0} 2^k \mu(H_k)^{1/q}\right) \\
&\leq 2^{1+1/q} C\Delta \left[1 + \left(\sum_{k\geq 0} 2^{k(1-\frac{s}{q})q'}\right)^{1/q'}\right] \leq K \ (\forall\ N),
\end{aligned}
$$

donde la última serie converge pues $s > q$. ¡Hemos probado que los operadores U_N's están uniformemente acotados!

Definimos ahora $V_N : E \to L_r(\Omega_N, \mu)$ dado por

$$V_N(x)(j) = \phi(N) e'_j(x) \quad 1 \leq j \leq N$$

Hecho 6: Existe una constante K' tal que $\|V_N\| \leq K'$ $(\forall\ N)$.

Los argumentos son similares a los anteriores. Tomemos x de norma 1, definimos $G_k = \{j : 2^k \leq \phi(N)|e'_j(x)| < 2^{k+1}\}$ para $k \in \mathbb{Z}$. Como la base (e_j) es 1-incondicional y $1 \leq \left|\frac{\phi(N)e'_j(x)}{2^k}\right|$ si

$j \in G_k$, tenemos

$$\begin{aligned}
\| \sum_{j \in G_k} e_j \| &\leq \| \sum_{j \in G_k} \frac{\phi(N) e_j'(x)}{2^k} e_j \| \\
&= \frac{\phi(N)}{2^k} \| \sum_{j \in G_k} e_j'(x) e_j \| \\
&\leq \frac{\phi(N)}{2^k} \underbrace{\| \sum_{j=1}^{\infty} e_j'(x) e_j \|}_{\|x\|=1}
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\phi(|G_k|) \leq \Delta \| \sum_{j \in G_k} e_j \| \leq \frac{\Delta \phi(N)}{2^k}. \tag{4.28}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|V_N(x)\|_r &= \left(\int_{\Omega_N} |V_N(x)|^r \, d\mu \right)^{1/r} \\
&= \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} |V_N(x)(j)|^r \right)^{1/r} \\
&= \left(\frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in G_k} |V_N(x)(j)|^r \right)^{1/r} \\
&\leq \left(\frac{1}{N} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{(k+1)r} |G_k| \right)^{1/r} \\
&\leq 2 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kr} \mu(G_k) \right)^{1/r} \\
&\leq 2 \left(\sum_{k<0} 2^{kr} \mu(G_k) + \sum_{k \geq 0} 2^{kr} \mu(G_k) \right)^{1/r} \\
&\leq 2 \left(1 + \sum_{k \geq 0} 2^{kr} \mu(G_k) \right)^{1/r} \quad (*).
\end{aligned}$$

Como $\phi(G_k) \geq 2^{-1/p}\mu(G_k)^p\phi(N)$ (por el hecho 3),

$$\begin{aligned}
(*) &\leq 2\left(1+\sum_{k\geq 0}2^{kr}2\phi(|G_k|)^p\phi(N)^{-p}\right)^{1/r}\\
&= 2\left(1+2\sum_{k\geq 0}2^{kr}\phi(|G_k|)^p\phi(N)^{-p}\right)^{1/r}\\
&\leq \left(1+2\sum_{k\geq 0}2^{kr}\Delta^p 2^{-kp}\phi(N)^p\phi(N)^{-p}\right)^{1/r} \quad \text{(Por (4.28))}\\
&\leq 2\left(1+2\Delta^p\sum_{k\geq 0}2^{k(r-p)}\right)^{1/r} \quad \leq K' \ (\forall\ N),
\end{aligned}$$

donde la suma $\sum_{k\geq 0} 2^{k(r-p)}$ converge pues $r < p$.

Notemos que para $N = 2^n$ (con $n \in \mathbb{A}$) podemos identificar Ω_N con $\{-1,1\}^n$ de la siguiente manera: Consideremos $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ en $\{-1,1\}^{\Omega_N}$

$$\epsilon_k(j) = r_k(j/2^N) = r_k(j/N)$$

Definimos $L_N : \ell_2^n \to L_s(\Omega_N,\mu)$

$$L_N(a) = \sum_{k=1}^{N} a_k\epsilon_k$$

Para todo s_0 se tiene

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\sum_{k=1}^{n}a_k\epsilon_k(j)|^{s_0} = \int_0^1|\sum_{k=1}^{n}a_kr_k(t)|^{s_0}\,dt. \tag{4.29}$$

Esto se debe a que $\sum_{k=1}^n a_kr_k(t)$ es constante en cada intervalo (de longitud $1/N$) de la forma $\left(\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\right]$. Por lo tanto, la función $\sum_{k=1}^n a_kr_k$ vale $\sum_{k=1}^n a_kr_k(\frac{j}{N}) = \sum_{k=1}^n a_k\epsilon_k(j)$.

Hecho 7: El operador L_N verifica: $\|L_N\| \leq B_s$ para todo N (con B_s la constante de la desigualdad de Khintchine 1.5.1).

En efecto, usando (4.29) y la desigualdad de Khintchine tenemos

$$
\begin{aligned}
\|L_N(a)\|_s &= \left(\int_{\Omega_N} |L_N|^s \, d\mu\right)^{1/s} \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\sum_{k=1}^{n} a_k \epsilon_k(j)|^s\right)^{1/s} \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\sum_{k=1}^{n} a_k \epsilon_k(j)|^s\right)^{1/s} \quad (\text{ por } \quad (4.29)\ ) \\
&= \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)|^s \, dt\right)^{1/s} \\
&= \|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k\|_s \leq B_s \|a\|_2.
\end{aligned}
$$

Consideremos ahora el operador:

$$
\begin{aligned}
&R_N : L_r(\Omega_N, \mu) \to \ell_2^n \\
&R_N f = (\underbrace{\int_{\Omega_N} f \epsilon_k \, d\mu}_{a_k})_{k=1}^n
\end{aligned}
$$

Hecho 8: $\|R_N\| \leq A_r^{-1}$ para todo N (con A_r la constante de la desigualdad de Khintchine).

Consideremos $f \in L_r(\Omega_N, \mu)$. Se tiene:

$$
\begin{aligned}
\|R_N f\|_2 &= \Big(\sum_{k=1}^{n} |\underbrace{\int_{\Omega_N} f \epsilon_k \, d\mu}_{a_k}|^2\Big)^{1/2} \\
&\leq A_r^{-1} \|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k\|_r \\
&= A_r^{-1} \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^{n} r_k|^r\right)^{1/r} \\
&= A_r^{-1} \left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\sum_{k=1}^{n} a_k \epsilon_k(j)|^r\right)^{1/r} \quad (**).
\end{aligned}
$$

Observemos que $a_k = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(l)\epsilon_k(l)$ y que $\sum_{k=1}^{N}\epsilon_k(l)\epsilon_k(j) = \delta_{lj}$. Por ende,

$$\begin{aligned}
(**) &= A_r^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(l)\epsilon_k(l)\right)\epsilon_k(j)|^r\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{N} f(l)\epsilon_k(l)\epsilon_k(j)|^r\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} f(l)\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\epsilon_k(l)\epsilon_k(j)|^r\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\sum_{l=1}^{N} f(l)\delta_{lj}|^r\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|f(j)|^r\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\left(\int_{\Omega_N}|f|^r\,d\mu\right)^{1/r}\\
&= A_r^{-1}\|f\|_r.
\end{aligned}$$

Ya casi terminamos, estamos listos para probar que E contiene a la sucesión de ℓ_2^n's uniformemente complementada. Sea $S_N = U_N L_N$ y $T_N = R_N V_N$, entonces se tiene que $\|S_N\|\|T_N\| \leq C$ para todo $N = 2^n$ con $n \in \mathbb{A}$. Además $T_N S_N = Id_{\ell_2^n}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
T_N S_N(x) &= R_N V_N U_N L_N(x)\\
&= R_N V_N U_N(\sum_{k=1}^{n} x_k\epsilon_k)\\
&= R_N V_N\left(\frac{1}{\phi(N)}\sum_{j=1}^{N}(\sum_{k=1}^{n} x_k\epsilon_k(j))e_j\right).
\end{aligned}$$

Pero $R_N V_N \left(\frac{1}{\phi(N)} \sum_{j=1}^{N} (\sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k(j)) e_j \right)$ en el lugar k_0 está dado por:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \phi(N) e_l' \left(\frac{1}{\phi(N)} \sum_{j=1}^{N} (\sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k(j)) e_j \right) \epsilon_{k_0}(l) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k(l) \epsilon_{k_0}(l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^{N} \epsilon_k(l) \epsilon_{k_0}(l)}_{\delta_{k k_0}} \\
&= x_{k_0}.
\end{aligned}
$$

Como $\mathbb{A}$ es infinito se sigue por la Observación 1.6.2 que E contiene la sucesión de ℓ_2^ns uniformemente complementa. $\square$

4.5. $\mathcal{P}(^mE)$ como Banach Lattice

En la sección anterior vimos que, si E tiene base incondicional y $m \geq 2$, entonces $\mathcal{P}(^mE)$ no tiene base incondicional. Por otro lado sabemos, por los Teoremas 4.1.4 y 3.2.5 que, si E es un espacio de Banach con base $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ achicante y funciones biortogonales $(e_j')_{j=1}^{\infty}$, $P_w(^mE)$ tiene base incondicional si y sólo si los monomios (e_α') forman una sucesión básica incondicional en $\mathcal{P}(^mE)$. Aún no se conoce un espacio de Banach E de dimensión infinita tal que $\mathcal{P}w(^mE)$ tenga base incondicional para algún $m \geq 2$. Encontrar un espacio con esta propiedad de seguro es complicado y, tal vez, ni siquiera exista. Una meta menos ambiciosa es determinar cuándo los monomios (e_α') forman una sucesión básica incondicional en $\mathcal{P}(^mE)$. El próximo teorema relaciona el ser isomorfo a un Banach lattice con que los monomios (e_α') forman una sucesión básica incondicional en $\mathcal{P}(^mE)$.

Teorema 4.5.1. *Sea E un espacio de Banach con base incondicional $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ y funciones biortogonales $(e_j')_{j=1}^{\infty}$. Para cada m las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) Los monomios (e_α') forman una sucesión básica incondicional en $\mathcal{P}(^mE)$,
(b) $\mathcal{P}(^mE)$ es isomorfo a un Banach lattice,
(c) $\mathcal{P}(^mE)$ tiene l.u.st.,
(d) $\mathcal{P}(^mE)$ tiene la propiedad de Gordon-Lewis.

Es importante remarcar que si $E = \ell_1$ cualquier de las afirmaciones anteriores es válida para $\mathcal{P}(^m\ell_1)$, ya que $\mathcal{P}(^m\ell_1)$ es isomorfo a ℓ_∞ (ver [5]), por ende isomorfo a un Banach lattice. En [10] se construye un espacio F no isomorfo a ℓ_1 tal que $\mathcal{P}(^mF)$ cumple con las equivalencias anteriores.

Demostración. (Del Teorema 4.5.1) Para simplificar la demostración, supongamos de ahora en más que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Probemos (a) $\Rightarrow$ (b). Recordemos que $\Pi_k : E \to E$ denota la proyección canónica en $E_k := \operatorname{span}\{e_j : j \leq k\}$. Es decir, $\Pi_k(x) = \sum_{j=1}^k e_j'(x)e_j$. Luego, si $P \in \mathcal{P}(^mE)$, se tiene que $P\Pi_k \in \mathcal{P}_f(^mE)$. Más aún, existen únicos escalares $\widetilde{P}(\alpha)$ tal que

$$P\Pi_k = \sum_{\alpha \leq k} \widetilde{P}(\alpha)e_\alpha',$$

donde $\alpha \leq k$ significa que $\alpha(j) = 0$ para $j > k$. Sin perder generalidad podemos suponer que $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ es 1-incondicional. Entonces,

$$\|P\| = \sup_k \|P\Pi_k\|.$$

Supongamos ahora que $\widetilde{P}(\alpha)$ son escalares tales que $\sup_k \|\sum_{\alpha\leq k} \widetilde{P}(\alpha)e_\alpha'\| < \infty$. Afirmo que para todo x tenemos que $\big(\sum_{\alpha\leq k} \widetilde{P}(\alpha)e_\alpha'(x)\big)_k$ converge. Para x fijo consideremos $\epsilon_\alpha = sg\big(\widetilde{P}(\alpha)e_\alpha'(x)\big)$.

Como los monomios (e'_α) forman una sucesión básica incondicional tenemos

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\le k}|\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha(x)| &= \sum_{\alpha\le k}\delta_\alpha\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha(x)\\ &\le \|\sum_{\alpha\le k}\epsilon_\alpha\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\|\\ &\le \chi((e'_\alpha))\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\|\\ &\le \chi((e'_\alpha))\sup_k\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\|.\end{aligned}$$

Luego, por las desigualdades anteriores, $P(x) := \lim_{k\to\infty}\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha(x)$ es un polinomio bien definido en $\mathcal{P}(^mE)$. Por otro lado, $P\Pi_k = \sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha$ (basta darse cuenta que si $|\alpha| = l$ con $k < l$, resulta $e'_\alpha(\Pi_k) = 0$). Veamos ahora que la asignación $P \leftrightarrow (\widetilde{P}(\alpha))_{|\alpha|=m}$ da la estructura de lattice para $\mathcal{P}(^mE)$.

Definimos el orden parcial $\le$ en $\mathcal{P}(^mE)$ dado por $P \le Q$ si $\widetilde{P}(\alpha) \le \widetilde{Q}(\alpha)$ para todo α multi-índice con $|\alpha| = m$. Claramente, las condiciones (1), (2), de 1.2.5 se verifican sin dificultad.

Veamos (3): para P y Q polinomios m-homogéneos llamemos $\widetilde{R}(\alpha) = \min\{\widetilde{P}(\alpha),\widetilde{Q}(\alpha)\}$. Observemos que $\sup_k\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{R}(\alpha)e'_\alpha\| < \infty$ ya que para todo k,

$$\begin{aligned}\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{R}(\alpha)e'_\alpha\| &\le \chi((e'_\alpha))\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\|\\ &\le \chi((e'_\alpha))\sup_k\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\| < \infty.\end{aligned}$$

Si R es el polinomio dado por $R(x) := \lim_{k\to\infty}\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha(x)$ tenemos que $R = P\wedge Q$.

Para ver (4'), notemos que $|P| = P \vee -P$ es igual a $\sum_{|\alpha|=m}|\widetilde{P}(\alpha)|e'_\alpha$. Consideremos $P, Q \in \mathcal{P}(^mE)$ tal que $|P| \le |Q|$. Entonces, $|\widetilde{P}(\alpha)| \le |\widetilde{Q}(\alpha)|$ para todo α. Luego, para todo k

$$\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\| \le \chi((e'_\alpha))\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{Q}(\alpha)e'_\alpha\|.$$

Si tomamos supremo sobre k tenemos que

$$\|P\| = \sup_k\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{P}(\alpha)e'_\alpha\| \le \chi((e'_\alpha))\sup_k\|\sum_{\alpha\le k}\widetilde{Q}(\alpha)e'_\alpha\| = \chi((e'_\alpha))\|Q\|.$$

Que es lo que queríamos probar. Luego, $\mathcal{P}(^mE)$ tiene estructura de Banach lattice.

Notemos que (b) $\Rightarrow$ (c) y (c) $\Rightarrow$ (d) son consecuencia inmediata del Teorema 1.2.10 y del Corolario 1.2.15.

Demostremos (d) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\mathcal{P}(^mE)$ tiene la propiedad de Gordon-Lewis. Basta ver que para todo k existe una constante L tal que $\chi((e'_\alpha)_{\alpha\le k}) \le L$. Notemos que los espacios

$\mathcal{P}(^m E_k)$ son 1-complementados en $\mathcal{P}(^m E)$. Por el Teorema 4.1.4 y la desigualdad (1.6.2),

$$\chi((e'_\alpha)_{\alpha \leq k}) \leq k_m gl(\mathcal{P}(^m E_k)) \leq k_m gl(\mathcal{P}(^m E)) = L.$$

$\square$

Se desprende inmediatamente de los Teoremas 4.1.4, 3.2.5:

Corolario 4.5.2. *Sea E un espacio de Banach con base incondicional $(e_j)_{j=1}^\infty$ achicante y funciones biortogonales $(e'_j)_{j=1}^\infty$. Para cada m las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) Los monomios (e'_α) forman una sucesión básica incondicional en $\mathcal{P}(^m E)$,
(b) $\mathcal{P}(^m E)$ es isomorfo a un Banach lattice,
(c) $\mathcal{P}(^m E)$ tiene l.u.st.,
(d) $\mathcal{P}(^m E)$ tiene la propiedad de Gordon-Lewis,
(e) Los monomios (e'_α) forman una base incondicional de $\mathcal{P}_w(^m E)$,
(f) $\mathcal{P}_w(^m E)$ es isomorfo a un Banach lattice,
(g) $\mathcal{P}_w(^m E)$ tiene l.u.st.,
(h) $\mathcal{P}_w(^m E)$ tiene la propiedad de Gordon-Lewis.

Bibliografía

[1] Albiac, F.; Kalton, N. *Topics in Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York Inc., 2006.

[2] Alencar, R. *On refelexivity and basis of $\mathcal{P}(^m E)$*, Proc. Roy. Irish. Acad. Sect. A 85, (1985), 131–138.

[3] Aron, R.; Herves, C.; Valdivia M. *Weakly continuous mappings on Banach spaces*, J. Funct. Anal. 52 (1983), 189–204.

[4] Aron, R.; Prolla J.B., *Polynomial approximation of differentiable functionson Banach Spaces*, J. Reine Angew. Math 313 (1980), 195-216.

[5] Aron, R.; Schottenloher *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation porperty* J. Funct. Anal. 21 (1976) 7–30

[6] Banach, S. *Theorie des operations lineires* (1932). Warzawa. New edition 1979, *Stefan Banach Ouevres* Vol. II. PWN, Warszawa.

[7] Bessaga, C.; Pelcyznski *Some aspects of the present theory of Banach Spaces*, Stefan Banach Ouevres, Vol II. (1979) 220–302. PWN, Warszawa.

[8] Davis, W. *Schauder decompositions in Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. Volume 74, Number 6 (1968), 1083–1085.

[9] Defant, A.; Díaz, J.C.; García, D. and Maestre M. *Unconditional Basis and Gordon-Lewis Constansts for Spaces of Polynomials* , J. Funct. Anal. 181 (2001), 119–145.

[10] Defant, A.; Kalton, N. *Unconditionality in Spaces of m-Homogeneous Polynomials* Quart. J. Math (2005), 53–64.

[11] Diestel J., Jarchow, H.; Tonge A., *Absolutely Summing Operators*, Stud. Adv. Math., Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1995.

[12] Dilworth, S. J.; Kalton, N.; Kutzarova, D.; Temlyakov V. N. *The thresholding greedy algorithm, greedy bases and duality* Constr. Approx. 19 (2003), 575–597.

[13] Dimant, V.; Dineen, S. *Banach subspaces of spaces of holomorphic functions and related topics*, Mathematica Scandinavica, 83, (1998), 142–160.

[14] Dineen, S. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Banach Spaces*, Springer-Verlang. Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlang, London, 1999.

[15] Floret, K. *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note Mat. 17 (1997), 153–188.

[16] Floret, K. *The extension theorem for norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Recent progress in functional analysis 189, North Holland, 2001.

[17] Gordon, Y.; Lewis D. R., *Absolutely summing operators and local unconditional structures*, Acta Math. 133 (1974), 27–47.

[18] Grecu, B.; Ryan, R. *Schauder bases for symmetric tensor products*, to appear.

[19] Gurarii, V.; Kadec M.; Macaev V. *On the distance between finite-dimensional L_p-spaces*, Mat. Sb. 70 (1966), 481–489.

[20] John, F. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volumene. Interscience, New York, (1948), 187–204.

[21] Johonson, W. B.; Lindenstrauss, J. *Handbook of the Geometry of Banach Spaces* North Holland; 1 edition; 2003.

[22] Johonson, W.; Tzafriri, L. *On the local unconditional structures of subspaces of Banach lattices*, Israel J. Math 20 (1975), 292–299.

[23] Lindenstrauss J.; Tzafriri L. *Classical Banach Spaces, I, II*, Springer, Berlin, 1977, 1979.

[24] Mujica, J. *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland. Studies 120, 1986.

[25] Pelczynki, A. *A property of multilinear operations*, Studia Math., 16 (1957), 173–182.

[26] Pisier, G. *Some results on Banach spaces without local unconditional structure*, Compositio Math. 37 (1978), 3–19.

[27] Ryan, R. *Applications of Topological Tensor Products to Infinite Dimensional Holomorphy* Ph. D. Thesis. Trinity Collage of Dublin, 1982.

[28] Ryan, R. *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces* Springer Monographs in Mathematics; 2002.

[29] Ryan, R. *Dunford-Pettis properties*, Bull Acad. Polon. Sci., Sér. Sci Math. 27 (1979), 373-379.

[30] Schütt, C. *Unconditionality in tensor products*, Israel J. Math. 31 (1978) 209-216.

[31] Tomczak-Jaegermann N. *Banach Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals* Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics; 1989.

[32] Tzafriri, L. *On Banach spaces with unconditional basis*, Israel J. Math. 17, (1974), 84–93.