

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Teoría de homotopía y aplicaciones

Autor: Marina Fragalá
Director: Gabriel Minian

Tesis de Licenciatura
en Ciencias Matemáticas

Buenos Aires, Agosto del 2003

Índice general

Introducción	4
1. Teoría de homotopía	6
1.1. Notaciones varias	6
1.2. Homotopía	7
1.3. Retractos	11
1.4. Construcciones básicas	13
1.4.1. Cilindro	13
1.4.2. Cono	13
1.4.3. Cilindro de una función	16
1.4.4. Cono de una función	17
1.4.5. Suspensión	19
1.5. Espacios punteados	20
1.5.1. Cilindro reducido	21
1.5.2. Cono reducido	21
1.5.3. Cilindro reducido de una función	22
1.5.4. Cono reducido de una función	22
1.5.5. Suspensión reducida	23
1.5.6. Wedge y Smash	24
1.6. Cofibraciones	25
1.6.1. P.E.H.	26
1.7. Fibraciones	39
1.7.1. P.L.H	39
1.8. H-espacios y grupos de homotopía	51
1.8.1. Ley exponencial en Top_*	51
1.8.2. H-espacios	54
1.8.3. Grupos de homotopía	64

2. Aplicaciones	69
2.1. Homotopía y concurrencia	69
2.2. Funciones dirigidas	79
2.3. Homotopía dirigida versus homotopía	87

Introducción

El presente trabajo consiste en un estudio de la teoría clásica de homotopía de espacios topológicos con un enfoque moderno y algunas aplicaciones de esta teoría para modelar problemas provenientes de la computación.

La tesis está dividida en dos partes. En la primera parte se estudian los resultados y las herramientas fundamentales de la teoría de homotopía. Principalmente enfocamos nuestra atención en cuatro temas. Comenzamos estudiando la noción de homotopía como idea de deformación, definiendo y analizando los retracts por deformación (fuertes y débiles) y los espacios contráctiles. Luego mostramos cómo se construyen y utilizan algunas herramientas subsidiarias de la teoría, tales como los cilindros, conos y suspensiones. En tercer lugar analizamos uno de los problemas más importantes en topología que es la extensión y el levantamiento de funciones; para esto investigamos las cofibraciones y fibraciones que trasladan los problemas de extensión y levantamiento de funciones a un problema en la categoría homotópica de espacios topológicos. En la última sección de esta primera parte, se estudian los H-grupos y H-cogrupos, cuyos ejemplos más importantes son respectivamente los espacios de lazos y las suspensiones, se demuestra la adjunción entre el funtor Ω (que a cada espacio topológico punteado X le asigna su espacio de lazos ΩX) y el funtor Σ (suspensión reducida). Esta adjunción se cumple tanto en la categoría de espacios punteados como en la categoría homotópica. También se muestra como utilizar estos resultados para definir los grupos de homotopía de orden superior $\pi_n(X, x)$ y probar que estos grupos son abelianos para $n \geq 2$. Muchas de las demostraciones que hacemos en esta primera parte de la tesis son novedosas (aunque los resultados son conocidos) y simplifican las demostraciones que se pueden leer en los libros clásicos de topología algebraica (cf. [Spa, Swi, Hat]).

En la segunda parte de la tesis se analizan algunas aplicaciones de la teoría de homotopía a problemas de computación. Comenzamos comentando algunos problemas que se estudian en la teoría de concurrencia, cuando

varios procesos son ejecutados al mismo tiempo, mostrando varios ejemplos que nos sirven para analizar de qué manera la topología puede ser utilizada para modelarlos. Luego investigamos las nociones de espacios parcialmente ordenados y di-homotopía (homotopía dirigida) que se utilizan para resolver algunos de estos problemas. Terminamos con una sección donde se ejemplifica la diferencia entre homotopía y di-homotopía.

Este trabajo se lo dedico a mi mamá pues el recuerdo de su entereza me incentiva permanentemente. Finalmente quiero agradecer a Walter por su apoyo incondicional y a Gabriel Minian por la dedicación y el estímulo que me brindó.

Capítulo 1

Teoría de homotopía

En este capítulo estudiamos los resultados básicos de la teoría de homotopía. Comenzamos recordando las definiciones básicas de homotopía y homotopía relativa. Analizamos entre otras cosas la homotopía como noción geométrica de deformación. En las secciones 4 y 5 mostraremos cómo se construyen los conos y cilindros de función tanto en el caso de espacios topológicos como en el caso de espacios topológicos punteados. Estas construcciones se analizan tanto en forma geométrica como categórica.

En las secciones 6 y 7 estudiamos problemas de extensión y levantamiento de funciones y en la última sección de este capítulo introducimos los grupos de homotopía de orden superior y analizamos alguna de sus propiedades. Las referencias para este capítulo son [Mun, Spa, Swi, Hat, KPt]

1.1. Notaciones varias

En lo que sigue notaremos con Top a la categoría de espacios topológicos y funciones continuas. Cuando leamos X en Top entenderemos que X es un espacio topológico y a su vez $f : X \rightarrow Y$ en Top será una función continua.

Llamaremos I al intervalo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ con la topología usual.

El símbolo \star será usado para el espacio topológico de un solo punto, y el símbolo \star_c para la función constante $\star_c : X \rightarrow Y$ tal que $\star_c(x) = c \quad \forall x \in X$.

Notaremos con D^n al disco o bola n -dimensional

$$D^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

y con S^{n-1} a la esfera $(n - 1)$ -dimensional

$$S^{n-1} = \partial D^n = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ambos con la topología usual. Notar que S^0 consiste de dos puntos aislados y $D^0 = \star$.

1.2. Homotopía

Comencemos recordando las definiciones de homotopía, homotopía relativa, y algunos resultados básicos.

Sean $f, g : X \rightarrow Y$ en *Top*. Diremos que f es homotópica a g (y notaremos $f \cong g$) si existe una función continua $H : X \times I \rightarrow Y$ llamada homotopía de f a g tal que:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= f(x) \quad \text{y} \\ H(x, 1) &= g(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

Sea $A \subseteq X$ un subespacio y $f, g : X \rightarrow Y$ tales que $f|_A = g|_A$. Diremos que f es homotópica a g relativo al subespacio A (y notaremos $f \cong g \text{ rel } A$) si existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow Y$ que además verifica $H(a, t) = f(a) = g(a) \quad \forall a \in A, t \in I$.

Notar que si tomamos $A = \emptyset$ entonces $f \cong g \text{ rel } \emptyset$ es lo mismo que $f \cong g$.

Ejemplo Sean X un espacio topológico arbitrario, $A \subseteq X$ un subespacio e Y un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n . Sean $f, g : X \rightarrow Y$ continuas tales que $f|_A = g|_A$. Luego $f \cong g \text{ rel } A$, ya que la función $H : X \times I \rightarrow Y$ definida como

$$H(x, t) = tf(x) + (1 - t)g(x)$$

es una homotopía relativa de f a g .

Recordemos dos resultados básicos cuya demostración se puede encontrar en todo libro de topología algebraica.

Proposición 1.2.1 Sean X, Y espacios topológicos y $A \subseteq X$ un subespacio. La relación "ser homotópica rel A .^{es} de equivalencia en el conjunto de funciones continuas de X a Y .

Proposición 1.2.2 Sean $h : Y \rightarrow Z$ y $k : W \rightarrow X$ en Top y $f \cong g : X \rightarrow Y$ entonces $h \circ f \cong h \circ g$ y $f \circ k \cong g \circ k$.

Definición 1.2.3 Sean X, Y espacios topológicos .

- Una función $f : X \rightarrow Y$ continua es una equivalencia homotópica si existe una función continua $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \cong id_Y$ y $g \circ f \cong id_X$. La función $g : Y \rightarrow X$ es una inversa homotópica de f .

- X e Y se dicen del mismo tipo homotópico si existe $f : X \rightarrow Y$ equivalencia homotópica.

- X es contráctil si es del tipo homotópico de un punto. O sea $X \rightarrow \star$ es una equivalencia homotópica.

Observación 1.2.4 Sean $h : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ y $f = g \circ h : X \rightarrow Z$ en Top . Si dos de las tres funciones f, g y h son equivalencias homotópicas entonces las tres son equivalencias homotópicas.

Proposición 1.2.5 X es contráctil si y sólo si $id_X \cong \star_c : X \rightarrow X$ para algún $c \in X$.

Demostración Supongamos que X es contráctil entonces existe $f : X \rightarrow \star$ equivalencia homotópica con inversa (homotópica) $g : \star \rightarrow X$ tal que $id_X \cong g \circ f = \star_c : X \rightarrow X$.

Recíprocamente si $id_X \cong \star_c : X \rightarrow X$ para algún c en X , la función $X \rightarrow \{c\}$ es una equivalencia homotópica. \square

Proposición 1.2.6 X es contráctil si y sólo si $id_X \cong \star_x : X \rightarrow X$ para todo $x \in X$.

Demostración Supongamos que X es contráctil, entonces $id_X \cong \star_c$ para algún c en X . Si consideramos $\star_x : X \rightarrow X$ con x arbitrario, entonces por la proposición 1.2.2 se tiene que $\star_x = id_X \circ \star_x \cong \star_c \circ \star_x = \star_c$. Luego $id_X \cong \star_c \cong \star_x$ como queríamos demostrar. \square

Proposición 1.2.7 Sean $f, g : X \rightarrow C$ continuas con C contráctil. Entonces $f \cong g$.

Demostración Como $id_C \cong \star_c : C \rightarrow C$ para algún $c \in C$, entonces $f = id_C \circ f \cong \star_c \circ f = g$. \square

Corolario 1.2.8 Toda función continua $f : X \rightarrow Y$ con X e Y espacios contráctiles es una equivalencia homotópica.

Notar que como consecuencia de este resultado se desprende que dos espacios contráctiles son del mismo tipo homotópico.

Consideremos las aplicaciones naturales $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ definidas por $i_0(x) = (x, 0)$, $i_1(x) = (x, 1)$. Dadas $f, g : X \rightarrow Y$ en Top , podemos reescribir cualquier homotopía de f a g , $H : X \times I \rightarrow Y$ como

$$Hi_0 = f \quad \text{y} \quad Hi_1 = g$$

Notar que $i_0 \cong i_1 : X \rightarrow X \times I$ para todo espacio topológico X . Más aún, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.2.9 $i_0, i_1 : X \rightarrow X \times I$ son equivalencias homotópicas con la misma inversa (homotópica) $p : X \times I \rightarrow X$ definida por $p(x, t) = x$.

Demostración Es claro que $p \circ i_0 = id_X = p \circ i_1$. La proyección $p : X \times I \rightarrow X$ resulta también la inversa homotópica a derecha. Para ver esto definimos una homotopía $H : X \times I \times I \rightarrow X$ como

$$H((x, t), s) = (x, ts)$$

Finalmente vale que $i_{0p} \cong id_{X \times I}$. Análogamente se prueba $i_{1p} \cong id_{X \times I}$. \square

Sea $f : X \rightarrow Y$ en Top , llamaremos *clase homotópica* de f al conjunto de funciones continuas

$$[f] = \{g : X \rightarrow Y \mid g \cong f\}$$

Notaremos con $[Top]$ a la *categoría homotópica de espacios topológicos* cuyos objetos son los espacios topológicos y sus morfismos son las clases de funciones continuas. Notar que la composición de clases

$$[f] \circ [g] = [f \circ g]$$

está bien definida por la proposición 1.2.2. Observemos también que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica si y sólo si $[f]$ es un isomorfismo en la categoría $[Top]$.

Definimos un funtor $q : Top \rightarrow [Top]$ de la siguiente forma $q(X) = X$ en los objetos y $q(f) = [f]$ en los morfismos. Por la observación anterior q manda equivalencias homotópicas en isomorfismos, y es universal con respecto a esta propiedad. Esto es lo que probaremos en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.10 *Sea q el funtor definido en el párrafo anterior. Dada una categoría \mathcal{D} y un funtor $F : Top \rightarrow \mathcal{D}$ que manda equivalencias homotópicas en isomorfismos de \mathcal{D} , existe un único funtor $\tilde{F} : [Top] \rightarrow \mathcal{D}$ tal que $\tilde{F}q = F$.*

$$\begin{array}{ccc} Top & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ q \downarrow & \nearrow \tilde{F} & \\ [Top] & & \end{array}$$

Demostración Definimos \tilde{F} de la única forma posible para que el diagrama conmute, o sea $\tilde{F}([f]) = F(f)$. Veamos que \tilde{F} está bien definida. Si $f \cong f'$ entonces $F(f) = F(f')$. Sea $H : X \times I \rightarrow Y$ una homotopía tal que

$$Hi_0(x) = f(x) \quad \text{y} \quad Hi_1(x) = f'(x) \quad \forall x \in X$$

Como F es un funtor vale que

$$F(f) = F(H) \circ F(i_0) \quad \text{y} \quad F(f') = F(H) \circ F(i_1)$$

Por la proposición anterior como i_0 e i_1 son equivalencias homotópicas, con la misma inversa homotópica p , entonces $F(i_0)$ y $F(i_1)$ son isomorfismos en \mathcal{D} con la misma inversa $F(p)$. Luego $F(f) \circ F(p) = F(H) = F(f') \circ F(p)$, y por lo tanto $F(f) = F(f')$. \square

1.3. Retractos

Definición 1.3.1 Sea $A \subseteq X$ subespacio.

- Decimos que la inclusión $i : A \rightarrow X$ en Top es un retractor si existe una función $r : X \rightarrow A$ continua, llamada retracción tal que $r \circ i = id_A$. O sea $r(a) = a \quad \forall a \in A$.

- Llamaremos retractor por deformación a un retractor $i : A \rightarrow X$ para el cual se verifica además que $i \circ r \cong id_X$. O sea existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow X$ tal que:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= i \circ r(x) \quad \text{y} \\ H(x, 1) &= x \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

- Diremos que $i : A \rightarrow X$ es un retractor por deformación fuerte si es un retractor por deformación y además $i \circ r \cong id_X \text{ rel } A$, es decir

$$H(i(a), t) = i(a) \quad \forall a \in A, t \in I.$$

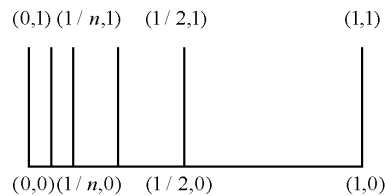
Observar que si $i : A \rightarrow X$ es un retractor por deformación entonces i es una equivalencia homotópica, ya que existe una inversa homotópica $r : X \rightarrow A$. Dicho de otra forma A y X son del mismo tipo homotópico.

Ejemplos

1- La función constante $\star \rightarrow X$ es retractor para todo espacio topológico X ; pero será por deformación si y sólo si X es contráctil, por ejemplo los espacios convexos de \mathbb{R}^n .

Notar que $\star \rightarrow X$ es un retracto por deformación fuerte cuando X se puede deformar a un punto manteniéndolo fijo durante toda la deformación.

2- El Peine es el espacio topológico ilustrado en el siguiente dibujo



y está definido como el subespacio de \mathbb{R}^2 por

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1, x = 0, \frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N} \text{ o } y = 0, 0 \leq x \leq 1\}$$

Si consideramos la función $H : P \times I \rightarrow P$ definida por

$$H((x, y), t) = \begin{cases} (x, (1 - 2t)y) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ ((2 - 2t)x, 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

resulta ser una homotopía entre id_P y $\star_{(0,0)}$, y por lo tanto P es un espacio contráctil. Más aún, $i : \{(0, 0)\} \rightarrow P$ es un retracto por deformación fuerte ya que el punto $(0, 0)$ permanece fijo durante toda la deformación.

Sin embargo la inclusión $i : \{(0, 1)\} \rightarrow P$ es un retracto por deformación que no es fuerte.

3- Sea $X = [0, 1] \times [0, 1]$ con la topología usual, y sea P el peine. Luego la inclusión $i : P \rightarrow X$ es una función continua entre espacios contráctiles. Por una observación anterior resulta ser una equivalencia homotópica.

Proposición 1.3.2 $i : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ es un retracto por deformación fuerte $\forall n \geq 1$.

Demostración Definimos una retracción $r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$ por

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

Como $x \neq 0$, r está bien definida y además verifica que $r \circ i(x) = x \forall x \in S^n$.

Sea $H : (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}) \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ la homotopía definida por

$$H(x, t) = \frac{tx}{\|x\|} + (1-t)x$$

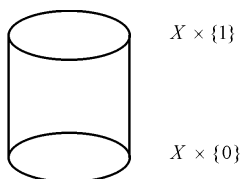
Es claro que H está bien definida y es una homotopía entre $i \circ r$ y $id_{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}$.

1.4. Construcciones básicas

1.4.1. Cilindro

Sea X espacio topológico. Llamaremos *cilindro* de X al espacio

$$IX = X \times I$$



Observar que el cilindro define un functor $I : Top \rightarrow Top$ que hace corresponder a cada X en Top el objeto IX , y a cada $f : X \rightarrow Y$ en Top el morfismo $If : IX \rightarrow IY$ definido como $If(x, t) = (f(x), t)$.

1.4.2. Cono

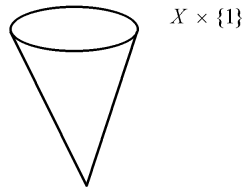
Llamaremos *cono* de X al espacio cociente

$$CX = IX / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia definida por

$$(x, t) \sim (x', t') \text{ si } t = t' = 0 \text{ o } (t = t' \text{ y } x = x')$$

Denotamos con $[(x, t)]$ la clase de (x, t) en el cociente, y con c la clase de $(x, 0)$.



Observar que X es un subespacio del cono de X vía la función $j : X \rightarrow CX$ definida por $j(x) = [(x, 1)]$. Notar además que el cono puede definirse como el siguiente *pushout* en Top

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \star \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \\ IX & \xrightarrow{p} & CX \end{array}$$

El cono define un funtor $C : Top \rightarrow Top$ que hace corresponder a cada X en Top el objeto CX , y a cada $f : X \rightarrow Y$ en Top el morfismo $Cf : CX \rightarrow CY$ definido como $Cf[(x, t)] = [(f(x), t)]$.

Proposición 1.4.1 CX es contráctil.

Demostración Debemos probar que $id_{CX} \cong \star_c : CX \rightarrow CX$. Para ello definimos la homotopía $H : CX \times I \rightarrow CX$ como

$$H([(x, t)], s) = [(x, ts)]$$

Es claro que H está bien definida y verifica

$$H([(x, t)], 0) = [(x, 0)] = c \quad \text{y} \quad H([(x, t)], 1) = [(x, t)] \quad \square$$

Ejemplo $CS^n = D^{n+1} \quad \forall n \geq 0$.

Consideremos la función $f : CS^n \rightarrow D^{n+1}$ definida por $f[x, t] = tx$. Es fácil ver que f es biyectiva y continua. Como los espacios son compactos y Hausdorff, f resulta ser un homeomorfismo.

Definición 1.4.2 $f : X \rightarrow Y$ en Top se dice *null-homotópica* si $f \cong \star_y : X \rightarrow Y$, para alguna constante $y \in Y$.

Proposición 1.4.3 Sea $f : X \rightarrow Y$ en Top y X *contráctil*. Entonces f es *null-homotópica*.

Demostración Por ser X *contráctil* se tiene que $id_X \cong \star_x : X \rightarrow X$ para algún (todo) x en X . Componiendo con $f : X \rightarrow Y$ a izquierda obtenemos que $f = f \circ id_X \cong f \circ \star_x = \star_y$, o sea f es *null-homotópica*. \square

Proposición 1.4.4 $f : X \rightarrow Y$ es *null-homotópica* si y sólo si f se extiende continuamente al CX . Es decir existe $\tilde{f} : CX \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f} \circ j = f$, donde $j : X \rightarrow CX$ es la inclusión en la tapa del cilindro.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ CX & & \end{array}$$

Demostración Supongamos que $f \cong \star_{y_0} : X \rightarrow Y$. O sea existe una homotopía $H : IX \rightarrow Y$ tal que

$$H(x, 0) = y_0 \quad \text{y} \quad H(x, 1) = f(x) \quad \forall x \in X$$

Luego el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \star \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \\ IX & \xrightarrow{p} & CX \\ & \searrow H & \downarrow \\ & & Y \end{array}$$

Por la propiedad universal del *pushout* existe una única $\tilde{f} : CX \rightarrow Y$ que hace conmutar el diagrama.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \star \\ i_0 \downarrow & & \downarrow \\ IX & \xrightarrow{p} & CX \\ & \searrow H & \downarrow \tilde{f} \\ & & Y \end{array}$$

y por lo tanto $\tilde{f} \circ j = \tilde{f} \circ (p \circ i_1) = (\tilde{f} \circ p) \circ i_1 = H \circ i_1 = f$. O sea \tilde{f} extiende a f .

Recíprocamente si existe una extensión $\tilde{f} : CX \rightarrow Y$ entonces podemos construir una homotopía $H : IX \rightarrow Y$ del siguiente modo

$$H(x, t) = \tilde{f} \circ p(x, t)$$

Finalmente vale que $f \cong \star_{y_0}$ porque

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \tilde{f} \circ p(x, 0) = \tilde{f}(c) = y_0 & \text{y} \\ H(x, 1) &= \tilde{f} \circ p(x, 1) = \tilde{f} \circ (p \circ i_1)(x) = \tilde{f} \circ j(x) = f(x) & \forall x \in X. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 1.4.5 Sea $f : S^n \rightarrow X$ continua. f es null-homotópica si y sólo si f se extiende continuamente a D^{n+1} .

(Comparar con [Spa]).

1.4.3. Cilindro de una función

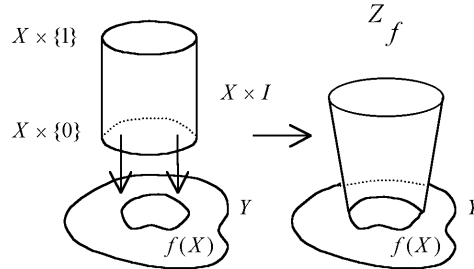
Dada una función continua $f : X \rightarrow Y$ definimos el *cilindro de f* , como el espacio cociente

$$Z_f = IX \amalg Y / \sim$$

donde \amalg denota la unión disjunta de los espacios y \sim es la relación de equivalencia generada por

$$(x, t) \sim y \quad \text{si} \quad t = 0 \quad \text{y} \quad f(x) = y$$

Denotamos con $[(x, t)]$, $[y]$ las clases de (x, t) e y respectivamente en el cociente.



En lenguaje categórico, Z_f puede verse como el siguiente *pushout* en Top

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i_0 \downarrow & & \downarrow i \\ IX & \xrightarrow{q} & Z_f \end{array}$$

donde $q(x, t) = [(x, t)]$ e $i(y) = [y]$.

Ejemplo El cono CX es un caso particular de Z_f con $Y = \star$.

Proposición 1.4.6 $i : Y \rightarrow Z_f$ es un retracto por deformación fuerte donde $r : Z_f \rightarrow Y$ definida como $r([(x, t)]) = f(x)$ para $x \in X, t \in I$ y $r([y]) = y$ es una retracción de i .

Demostración En principio la buena definición de r es clara pues $r([(x, 0)]) = r([y])$ con $y = f(x)$ ya que $r([(x, 0)]) = f(x) = y = r([y])$. Además r es continua y $r \circ i = i_Y$. Hasta acá tenemos un retracto y para ver que es un retracto por deformación fuerte debemos probar que $i \circ r \cong id_{Z_f}$ rel Y . Para ello definimos una homotopía $H : Z_f \times I \rightarrow Z_f$ por

$$H([(x, t)], s) = [x, ts] \quad \text{y} \quad H([y], s) = [y]$$

Es fácil ver que H es la homotopía apropiada, que está bien definida y es continua. \square

Como corolario de esta proposición observemos que Z_f e Y son del mismo tipo homotópico.

1.4.4. Cono de una función

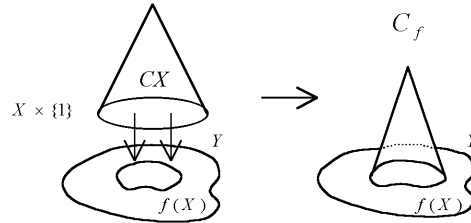
Dada una función $f : X \rightarrow Y$ llamamos *cono de f* al espacio cociente

$$C_f = CX \amalg Y / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por

$$j(x) \sim f(x)$$

siendo $j : X \rightarrow CX$ la inclusión natural $j(x) = [(x, 1)]$.



Notar que C_f puede describirse como el *pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ CX & \xrightarrow{q} & C_f \end{array}$$

donde q e i son las funciones al cociente.

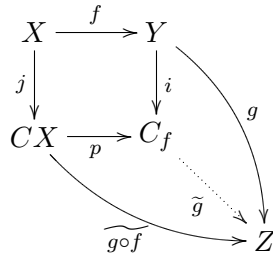
Proposición 1.4.7 Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ continuas. Entonces $g \circ f$ es null-homotópica si y sólo si g se extiende continuamente a C_f , es decir, existe $\tilde{g} : C_f \rightarrow Z$ tal que $\tilde{g} \circ i = g$.

Demostración Supongamos $g \circ f \cong \star_z : X \rightarrow Z$. Por la proposición 1.4.4 $\widetilde{g \circ f} : X \rightarrow Z$ se extiende a CX , es decir existe $\widetilde{g \circ f} : CX \rightarrow Z$ tal que $\widetilde{g \circ f} \circ j = g \circ f$. Luego se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & & \downarrow i \\ CX & \xrightarrow{p} & C_f \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow g \\ \downarrow \\ Z \end{array}$$

$\widetilde{g \circ f} \dashrightarrow Z$

y por la propiedad universal del *pushout* existe una única $\tilde{g} : C_f \rightarrow Z$ que hace conmutar todo el diagrama.



Luego $\tilde{g} \circ i = g$ y por lo tanto \tilde{g} extiende a g .

Recíprocamente, si g se extiende a $\tilde{g}: C_f \rightarrow Z$ consideramos la función $\tilde{g} \circ p: CX \rightarrow Z$. Esta función continua extiende a $g \circ f: X \rightarrow Z$ ya que $\tilde{g} \circ p \circ j = \tilde{g} \circ i \circ f = g \circ f$. Luego por la proposición 1.4.4 $g \circ f: X \rightarrow Z$ resulta null-homotópica. \square

1.4.5. Suspensión

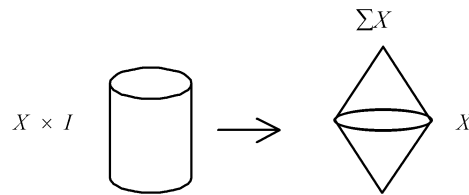
Sea X un espacio topológico. Llamaremos *suspensión* al espacio cociente

$$\Sigma X = IX / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia definida por

$$(x, t) \sim (x', t') \text{ si } t = t' = 0 \text{ o } t = t' = 1 \text{ o } (t = t' \text{ y } x = x')$$

Notar que $\Sigma X = CX / \sim'$ donde \sim' es la relación de equivalencia generada por $j(x) \sim' j(x')$.



Se tiene el siguiente *pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \star \\ j \downarrow & \text{push} & \downarrow \\ CX & \longrightarrow & \Sigma X \end{array}$$

Además la suspensión define un functor $\Sigma : Top \rightarrow Top$ que hace corresponder a cada X en Top el objeto ΣX , y a cada función continua $f : X \rightarrow Y$ el morfismo $\Sigma f : \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$ definido como $\Sigma f[(x, t)] = [(f(x), t)]$.

Proposición 1.4.8 $\Sigma S^{n-1} = S^n \quad \forall n \geq 1$

Demostración Sea $\varphi : \Sigma S^{n-1} \rightarrow S^n$ definida por

$$\varphi([x, t]) = (2\sqrt{t(1-t)}x, 2t-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

φ está bien definida porque $\varphi([x, 0]) = (0, 0, \dots, 0, -1) = \varphi([x', 0])$ y $\varphi([x, 1]) = (0, 0, \dots, 0, 1) = \varphi([x', 1])$, y además $\varphi([x, t]) \in S^n$. Es claro que φ es biyectiva y continua y como ΣS^{n-1} es compacto y S^n es Hausdorff, entonces φ resulta un homeomorfismo. \square

1.5. Espacios punteados

Para definir los grupos de homotopía se necesita trabajar con espacios topológicos punteados, es decir, espacios topológicos que tienen un punto base distinguido. Más precisamente, un espacio topológico punteado es un par (X, x_0) con X espacio topológico y $x_0 \in X$. Una función continua punteada $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ es una función continua $f : X \rightarrow Y$ tal que $f(x_0) = y_0$.

Notaremos con Top_\star la categoría de espacios topológicos punteados y funciones continuas punteadas.

Por abuso de notación y lenguaje, diremos $X \in Top_\star$ para referirnos a un espacio topológico punteado y $f : X \rightarrow Y$ en Top_\star para referirnos a una función continua punteada (sin especificar el punto base en caso de no ser necesario).

Veremos brevemente como extender las construcciones anteriores cuando se trabaje con puntos base. En particular definiremos conos y cilindros “reducidos” así como suspensiones “reducidas”.

1.5.1. Cilindro reducido

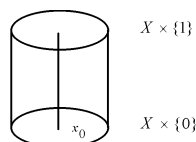
Sea (X, x_0) espacio punteado. Llamaremos *cilindro reducido* de (X, x_0) al espacio cociente

$$\tilde{IX} = IX / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia definida por

$$(x_0, t_1) \sim (x_0, t_2) \quad \forall t_1, t_2 \in I$$

En lo que sigue denotamos con $[(x, t)]$ la clase de (x, t) en el cociente. En particular $[(x_0, t)]$ es el punto base de \tilde{IX} .



Análogamente al caso no reducido, tenemos las inclusiones $i_0, i_1 : X \rightarrow \tilde{IX}$ en Top_\star , definida por $i_k(x) = [(x, k)]$ para $k = 0, 1$.

Definición 1.5.1 Dadas $f, g : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ continuas, diremos que f es homotópica a g ($f \cong g$) si son homotópicas relativas al punto base x_0 . Por la proposición 1.2.1 ésta define una relación de equivalencia en el conjunto de funciones continuas punteadas de X a Y .

1.5.2. Cono reducido

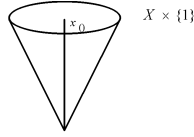
Definimos el *cono reducido* de (X, x_0) como el espacio cociente

$$\tilde{CX} = IX / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por

$$(x, 0) \sim (x_0, t) \quad \forall t \in I, x \in X$$

Notar que $[(x_0, t)]$ es el punto base de \tilde{CX} .



Proposición 1.5.2 Sea $f : X \rightarrow Y$ en Top_\star . $f \cong \star_{y_0}$ rel x_0 si y sólo si f se extiende continuamente al $\tilde{C}X$. Es decir existe $\tilde{f} : \tilde{C}X \rightarrow Y$ tal que $\tilde{f} \circ j = f$, donde $j : X \rightarrow \tilde{C}X$ es la inclusión natural.

La demostración es análoga al caso no reducido.

1.5.3. Cilindro reducido de una función

Sean $(X, x_0), (Y, y_0)$ espacios punteados y sea, $\tilde{I}X$ cilindro reducido de X . Dada una función $f : X \rightarrow Y$ en Top_\star , llamaremos *cilindro reducido de f* al espacio cociente

$$\tilde{Z}_f = \tilde{I}X \amalg Y / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por

$$[(x, t)] \sim y \text{ si } t = 0 \text{ y } f(x) = y$$

Notar que estamos identificando $[(x_0, t)] \sim y_0$.

1.5.4. Cono reducido de una función

Sean $X, Y \in Top_\star$ y $\tilde{C}X$ el cono reducido de X . Dada una función $f : X \rightarrow Y$ en Top_\star , llamaremos *cono reducido de f* al espacio cociente

$$\tilde{C}_f = \tilde{C}X \amalg Y / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia generada por

$$j(x) \sim f(x)$$

siendo $j : X \rightarrow \tilde{C}X$ la inclusión natural en Top_\star .

Proposición 1.5.3 Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones punteadas continuas. Entonces $g \circ f$ es null-homotópica relativa al punto base si y sólo si g se extiende continuamente a \tilde{C}_f , es decir, existe $\tilde{g} : \tilde{C}_f \rightarrow Z$ punteada tal que $\tilde{g} \circ i = g$.

La demostración es análoga al caso no reducido.

1.5.5. Suspensión reducida

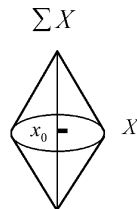
Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Llamaremos *suspensión reducida* al espacio cociente

$$\Sigma X = \tilde{I}X / \sim$$

donde \sim es la relación de equivalencia definida por

$$(x, t) \sim (x', t') \text{ si } (t = t' = 0) \text{ o } (t = t' = 1) \text{ o } (x = x' = x_0) \text{ o } (t = t', x = x')$$

Notar que estamos identificando $i_0(x) \sim i_1(x) \sim [(x_0, t)]$, el punto distinguido de la suspensión reducida.



Proposición 1.5.4 $\Sigma S^n = S^{n+1} \quad \forall n \geq 0$

Demostración Si consideremos a $R^{n+1} \subseteq R^{n+2}$ poniendo 0 en la última coordenada entonces

$$S^n = \{x \in R^{n+2} / \|x\| = 1, x_{n+2} = 0\} \quad y \quad D^{n+1} = \{x \in R^{n+2} / \|x\| \leq 1, x_{n+2} = 0\}$$

Luego pensamos a S^n ecuador de S^{n+1} en R^{n+2} .

Sean

$$H_+ = \{x \in S^{n+1} : x_{n+1} \geq 0\} \quad \text{y} \quad H_- = \{x \in S^{n+1} : x_{n+1} \leq 0\}$$

los hemisferios norte y sur.

Así

$$S^{n+1} = H_+ \cup H_- \quad \text{y} \quad S^n = H_+ \cap H_-$$

Definimos los siguientes homeomorfismos

$$P_+ : D^{n+1} \rightarrow H_+$$

$$P_+(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n+1}, \sqrt{1 - \sum x_i^2})$$

$$P_- : D^{n+1} \rightarrow H_-$$

$$P_-(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) = (x_1, \dots, x_{n+1}, -\sqrt{1 - \sum x_i^2})$$

Sea $s_0 = (1, 0, \dots, 0) \in S^n$ punto base. Definimos

$$\varphi : \sum S^n \rightarrow S^{n+1} \text{ con } x \in S^n \text{ y } t \in I$$

$$\varphi([x, t]) = \begin{cases} P_-(2tx + (1-2t)s_0) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ P_+(2(1-t)x + (2t-1)s_0) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

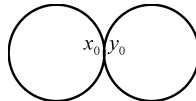
Veamos que φ es un homeomorfismo. Es fácil ver que es biyectiva. Es continua si se la restringe a subespacios cerrados definidos por

$$\{[x, t] \in \sum S^n : 0 \leq t \leq \frac{1}{2}\} \text{ y por } \{[x, t] \in \sum S^n : \frac{1}{2} \leq t \leq 1\}$$

porque tanto P_+ como P_- son continuas. Como en $t = \frac{1}{2}$ $P_-(x) = P_+(x)$ entonces φ resulta continua. Como los espacios considerados son compactos y Hausdorff, entonces φ resulta homeomorfismo. \square

1.5.6. Wedge y Smash

Sean (X, x_0) e (Y, y_0) en Top_* . Llamamos *wedge* de X, Y a la unión disjunta de X e Y identificando el punto x_0 con el punto y_0 . El wedge de X e Y se denota $X \vee Y$ y se considera un espacio punteado con punto base $[x_0] = [y_0]$. Por ejemplo, el wedge $S^1 \vee S^1$ es la figura ocho



Sean (X, x_0) , (Y, y_0) y $(X \times Y, (x_0, y_0))$ en Top_* . Los subespacios $X \times \{y_0\}$ y $\{x_0\} \times Y$ ambos contenidos en $X \times Y$ se intersecan en un único punto (x_0, y_0) , lo que nos permite identificar $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ con $X \vee Y$. Luego pensamos que $X \vee Y \subset X \times Y$, y definimos entonces el *smash* de X e Y .

Llamaremos *smash* de $(X, x_0), (Y, y_0)$ al espacio topológico punteado

$$X \wedge Y = X \times Y /_{X \vee Y}$$

Notar que la *suspensión reducida* ΣX de un espacio punteado X coincide con el producto *smash* $S^1 \wedge X$. En general para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\Sigma^n X = S^n \wedge X$$

donde inductivamente $\Sigma^n X = \Sigma(\Sigma^{n-1} X)$.

1.6. Cofibraciones

Un problema muy importante en topología es el estudio de extensiones de funciones continuas. Dada $g : X \rightarrow W$ y una inclusión $i : X \rightarrow Y$ nos podemos preguntar bajo qué condiciones existe $\tilde{g} : Y \rightarrow W$ continua que extienda a g , o sea $\tilde{g} \circ i = g$.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & W \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ Y & & \end{array}$$

Es claro que ésto no siempre es posible y dependerá fuertemente de g, i, X, Y y W . Para ilustrar esta situación recordemos una proposición vista anteriormente. Dada $g : S^n \rightarrow W$ continua existe una extensión $\tilde{g} : D^{n+1} \rightarrow W$ de g si y sólo si g es null-homotópica.

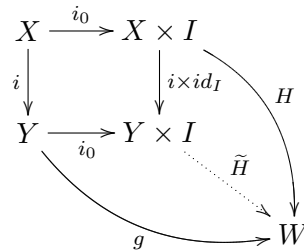
$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{g} & W \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{g} & \\ D^{n+1} & & \end{array}$$

En particular las homotopías son funciones continuas y las cofibraciones estarán íntimamente relacionadas con la extensión de dichas homotopías.

Estamos interesados en conocer bajo qué circunstancias la extensión de funciones de un subespacio a todo el espacio dependerá sólo de su clase homotópica. Proponemos en lo que sigue estudiar este tipo de problemas.

1.6.1. P.E.H.

Sea $i : X \rightarrow Y$ continua y W un espacio topológico. Decimos que i tiene la *propiedad de extensión de homotopía (P.E.H.) respecto a W* si cada vez que tenemos $g : Y \rightarrow W$ y $H : X \times I \rightarrow W$ continuas tales que $H \circ i_0 = g \circ i$, existe $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow W$ continua que verifica $\tilde{H}(i \times id_I) = H$ y $\tilde{H} \circ i_0 = g$.



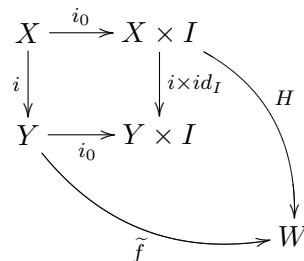
Notar que \tilde{H} no es necesariamente única.

Proposición 1.6.1 *Sea $i : X \rightarrow Y$ una inclusión que tiene la P.E.H respecto a W y sean $f, f' : X \rightarrow W$ funciones homotópicas. Entonces f se extiende a Y si y sólo si f' se extiende; resultando homotópicas las extensiones.*

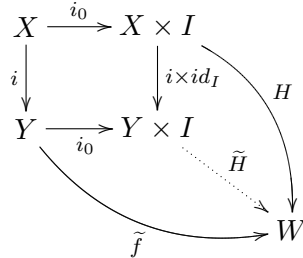
Demostración Por hipótesis sabemos que $f \cong f'$ entonces existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow W$ tal que

$$H \circ i_0 = f \quad \text{y} \quad H \circ i_1 = f'$$

Supongamos que f se extiende, entonces existe $\tilde{f} : Y \rightarrow W$ tal que $\tilde{f} \circ i = f$. Como $f = H \circ i_0$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo



Por P.E.H. existe $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow W$



Tomamos $\tilde{f}' = \tilde{H} \circ i_1$ que es homotópica a \tilde{f} y que será la que extiende a f' pues

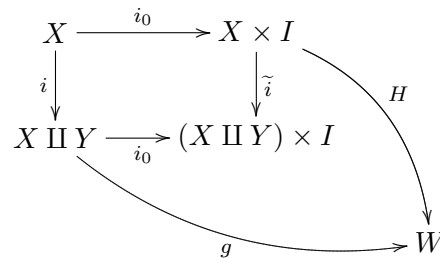
$$\tilde{f}' \circ i(x) = \tilde{H} \circ i_1 \circ i(x) = \tilde{H}(i(x), 1) = H(x, 1) = f'(x) \quad \square$$

Observar que la inclusión $i : X \rightarrow Y$ tenga la P.E.H. respecto a W **no significa** que si $f, f' : X \rightarrow W$ son funciones homotópicas que se extienden, estas extensiones resulten homotópicas. Pero sí podemos afirmar por la proposición anterior que si una de las funciones homotópicas se extiende entonces la otra tendrá una extensión homotópica a la primera.

Definición 1.6.2 Una función continua $i : X \rightarrow Y$ es una cofibración si tiene la P.E.H respecto a todo espacio topológico W .

Proposición 1.6.3 La inclusión $i : X \rightarrow X \amalg Y$ es una cofibración.

Demostración Se quiere ver que i tiene la P.E.H para todo espacio topológico W . Consideramos el siguiente diagrama conmutativo



y definamos $\tilde{H} : (X \amalg Y) \times I \rightarrow W$ como

$$\tilde{H}(z, t) = \begin{cases} H(z, t) & z \in X \\ g(z) & z \in Y \end{cases}$$

que está bien definida, es continua y hace conmutar el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ \downarrow i & & \downarrow \tilde{i} \\ X \amalg Y & \xrightarrow{i_0} & (X \amalg Y) \times I \\ & \searrow g & \downarrow \tilde{H} \\ & & W \end{array}$$

ya que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, t) &= H(x, t) \\ \tilde{H}(x, 0) &= H(x, 0) = g(x) \\ \tilde{H}(y, 0) &= g(y) \quad \forall x \in X, t \in I, y \in Y. \quad \square \end{aligned}$$

Proposición 1.6.4 Si $i : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo entonces i es una cofibración.

Demostración Queremos ver que i tiene la P.E.H para todo W . Para ello tomamos funciones continuas $H : X \times I \rightarrow W$ y $g : Y \rightarrow W$ tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ \downarrow i & & \downarrow i \times id_I \\ Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\ & \searrow g & \downarrow H \\ & & W \end{array}$$

Definimos $\tilde{H} : Y \times I \rightarrow W$ como

$$\tilde{H}(y, t) = H(i^{-1}(y), t)$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ \downarrow i & & \downarrow i \times id_I \\ Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\ & \searrow g & \downarrow \tilde{H} \\ & & W \end{array}$$

Veamos que todo conmuta:

$$\tilde{H} \circ (i \times id_I)(x, t) = \tilde{H}(i(x), t) = H(i^{-1}(i(x)), t) = H(x, t)$$

$$\tilde{H} \circ i_0(y) = \tilde{H}(y, 0) = H(i^{-1}(y), 0) = H \circ i_0(i^{-1}(y)) = g \circ i(i^{-1}(y)) = g(y) \quad \square$$

Proposición 1.6.5 Si $i : X \rightarrow Y$ y $j : Y \rightarrow Z$ son cofibraciones, entonces $j \circ i : X \rightarrow Z$ resulta ser una cofibración.

Demostración Consideramos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 \downarrow i & & \downarrow i \times id_I \\
 Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\
 \downarrow j & & \downarrow j \times id_I \\
 Z & \xrightarrow{i_0} & Z \times I
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow H \\
 \searrow g \\
 \rightarrow W
 \end{array}$$

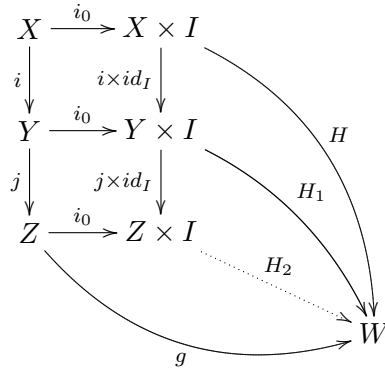
Como i es una cofibración existe $H_1 : Y \times I \rightarrow W$ continua tal que

$$H_1 \circ i_0 = g \circ j \quad \text{y} \quad H_1 \circ (i \times id_I) = H$$

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\
 \downarrow i & & \downarrow i \times id_I \\
 Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\
 \downarrow j & & \downarrow j \times id_I \\
 Z & \xrightarrow{i_0} & Z \times I
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \searrow H \\
 \searrow H_1 \\
 \searrow g \\
 \rightarrow W
 \end{array}$$

Como j es una cofibración existe $H_2 : Z \times I \rightarrow W$ continua tal que

$$H_2 \circ i_0 = g \quad \text{y} \quad H_2 \circ (j \times id_I) = H_1$$



Hay que ver que H_2 hace conmutar el diagrama completo. Para eso falta ver que $H_2 \circ ((j \circ i) \times id_I) = H$

$$\begin{aligned}
H_2 \circ ((j \circ i) \times id_I) &= H_2((j \times id_I) \circ (i \times id_I)) = (H_2 \circ (j \times id_I)) \circ (i \times id_I) = \\
&= H_1 \circ (i \times id_I) = H \quad \square
\end{aligned}$$

Para demostrar el lema que sigue necesitamos repasar algunos resultados cuyas demostraciones se pueden encontrar en libros de topología como por ejemplo [Mun].

Sean los espacios topológicos X , Y y $X^Y = \{ f : Y \rightarrow X \text{ continua} \}$ con la topología compacto abierta. Una subbase para esta topología está dada por los conjuntos $W(C, U) = \{ f \in X^Y : f(C) \subseteq U \}$ con $C \subseteq Y$ compacto y $U \subseteq X$ abierto. Recordar que si

Sean X e Y espacios topológicos. Y localmente compacto y Hausdorff entonces la función $\varepsilon_v : Y \times X^Y \rightarrow X$ definida como $\varepsilon_v(y, f) = f(y)$ es continua.

En lo que sigue notaremos con $Top(A, B)$ al conjunto de funciones continuas $\{ f : A \rightarrow B \}$. Obtenemos así el siguiente corolario (Ley exponencial).

Dados X, Y y Z espacios topológicos, e Y localmente compacto y Hausdorff entonces la función $\varphi : Top(Z \times Y, X) \rightarrow Top(Z, X^Y)$ dada por $\varphi(f)(z)(y) = f(z, y)$ resulta ser una biyección de conjuntos.

Observar el caso particular tomando $Y = I$ que es Hausdorff, y por ser compacto es localmente compacto. Entonces resulta biyectiva la función entre conjuntos

$$\varphi : Top(Z \times I, X) \rightarrow Top(Z, X^I)$$

Lema 1.6.6 *El functor cilindro preserva pushout. Es decir, si*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Z \\ i \downarrow & \text{push} & \downarrow \tilde{i} \\ Y & \xrightarrow{\tilde{j}} & P \end{array}$$

es un pushout en Top, entonces el siguiente diagrama resulta un pushout

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{j \times id_I} & Z \times I \\ i \times id_I \downarrow & & \downarrow \tilde{i} \times id_I \\ Y \times I & \xrightarrow{\tilde{j} \times id_I} & P \times I \end{array}$$

Demostración Para ver que el diagrama es un *pushout* tomamos W un espacio topológico cualquiera y funciones $h_1 : Z \times I \rightarrow W$ y $h_2 : Y \times I \rightarrow W$ continuas tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X \times I & \xrightarrow{j \times id_I} & Z \times I \\ i \times id_I \downarrow & & \downarrow \tilde{i} \times id_I \\ Y \times I & \xrightarrow{\tilde{j} \times id_I} & P \times I \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{h_1} \\ \xrightarrow{h_2} \end{array} W$$

Como I es localmente compacto y Hausdorff entonces por la *ley exponencial* obtenemos funciones $\tilde{h}_1 : Z \rightarrow W^I$ y $\tilde{h}_2 : Y \rightarrow W^I$ continuas. Veamos que $\tilde{h}_1 \circ j = \tilde{h}_2 \circ i$

$$\tilde{h}_1 \circ j(x)(t) = h_1(j(x), t) = h_2(i(x), t) = \tilde{h}_2 \circ i(x)(t)$$

Luego existirá una única $\tilde{H} : P \rightarrow W^I$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Z \\ i \downarrow & \text{push} & \downarrow \tilde{i} \\ Y & \xrightarrow{\tilde{j}} & P \end{array} \begin{array}{l} \xrightarrow{\tilde{h}_1} \\ \xrightarrow{\tilde{H}} \\ \xrightarrow{\tilde{h}_2} \end{array} W^I$$

Nuevamente por la *ley exponencial* existe $H : P \times I \rightarrow W$ continua y será la función que nos permitirá probar que el diagrama es un *pushout*. Veamos que H lo hace conmutar

$$H \circ (\tilde{i} \times id_I)(z, t) = H(\tilde{i}(z), t) = \tilde{H} \circ \tilde{i}(z)(t) = \tilde{h}_1(z)(t) = h_1(z, t)$$

Análogamente para $H \circ (\tilde{j} \times id_I) = h_2(z, t)$. Por otro lado es fácil ver que H es la única función continua que hace conmutar el diagrama debido a la unicidad en la *ley exponencial* y a que \tilde{H} es única para el otro *pushout*. \square

Proposición 1.6.7 *Las cofibraciones son estables por cambio de cobase. O sea si $i : X \rightarrow Y$ es una cofibración y el siguiente diagrama es un pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{j} & Z \\ i \downarrow & & \downarrow \tilde{i} \\ Y & \xrightarrow{\tilde{j}} & P \end{array}$$

entonces $\tilde{i} : Z \rightarrow P$ también es una cofibración.

Demostración Para ver que $\tilde{i} : Z \rightarrow P$ es una cofibración consideremos funciones $H : Z \times I \rightarrow W$ y $g : P \rightarrow W$ continuas tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{i_0} & Z \times I \\ \tilde{i} \downarrow & & \downarrow \tilde{i} \times id_I \\ P & \xrightarrow{i_0} & P \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow H \\ \downarrow \\ \searrow g \\ W \end{array}$$

Consideremos $g \circ \tilde{j}$ continua que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i_0'} & X \times I & \xrightarrow{j \times id_I} & Z \times I \\ i \downarrow & & i \times id_I \downarrow & \text{push} & \downarrow \tilde{i} \times id_I \\ Y & \xrightarrow{i_0'} & Y \times I & \xrightarrow{\tilde{j} \times id_I} & P \times I \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow H \\ \downarrow \\ \searrow g \circ \tilde{j} \\ W \end{array}$$

ya que

$$H \circ (j \times id_I) \circ i_0'(x) = H(j(x), 0) = H \circ i_0 \circ j(x) = g \circ \tilde{i} \circ j(x) = g \circ \tilde{j} \circ i(x)$$

Por ser $i : X \rightarrow Y$ una cofibración existe $H_1 : Y \times I \rightarrow W$ tal que todo conmuta. Como el segundo diagrama es una *pushout* existe $H_2 : P \times I \rightarrow W$ para el cual el diagrama también conmuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{i_0'} & X \times I & \xrightarrow{j \times id_I} & Z \times I \\
 \downarrow i & & \downarrow i \times id_I & \text{push} & \downarrow \tilde{i} \times id_I \\
 Y & \xrightarrow{i_0'} & Y \times I & \xrightarrow{\tilde{j} \times id_I} & P \times I \\
 & & & & \downarrow H_2 \\
 & & & & W \\
 & \searrow^{g \circ \tilde{j}} & & \nearrow_{H_1} & \\
 & & & &
 \end{array}$$

Tomemos H_2 y veamos que es la función que nos permite probar que \tilde{i} es una cofibración. Para ello debemos ver que $H_2 \circ (\tilde{i} \times id_I) = H$ y que $H_2 \circ i_0' = g$. La primera igualdad se desprende del último diagrama. Para la segunda usaremos el siguiente *pushout*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{j} & Z \\
 \downarrow i & \text{push} & \downarrow \tilde{i} \\
 Y & \xrightarrow{\tilde{j}} & P \\
 & & \downarrow H_2 \circ i_0 \\
 & & W \\
 & \searrow^{g \circ \tilde{j}} & \\
 & &
 \end{array}$$

Claramente $g : P \rightarrow W$ hace conmutar el diagrama. Análogamente debemos verlo para $H_2 \circ i_0$. O sea

$$H_2 \circ i_0 \circ \tilde{j}(y) = H_2(\tilde{j}(y), 0) = H_1(y, 0) = H_1 \circ i_0'(y) = g \circ \tilde{j}(y)$$

$$H_2 \circ i_0 \circ \tilde{i}(z) = H_2(\tilde{i}(z), 0) = H(z, 0) = H \circ i_0(z)$$

Luego por universalidad del *pushout*, $H_2 \circ i_0 = g$. \square

Lema 1.6.8 La función $i_0 \amalg i_1 : X \amalg X \rightarrow X \times I$, que incluye la primer copia de X en la tapa de abajo y la segunda copia en la tapa de arriba, es una cofibración.

Demostración Observemos que $(X \amalg X) \times I = (X \times I) \amalg (X \times I)$ (ya que I es localmente compacto y Hausdorff). Luego para probar que $i_0 \amalg i_1$ es una cofibración debemos tomar W un espacio topológico, y funciones continuas

$$h : X \times I \rightarrow W \quad \text{y} \quad G = f \amalg g : (X \times I) \amalg (X \times I) \rightarrow W$$

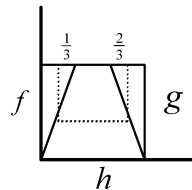
tales que el siguiente diagrama conmute

$$\begin{array}{ccc}
 X \amalg X & \xrightarrow{i_0 \amalg i_1} & (X \times I) \amalg (X \times I) \\
 \downarrow i_0 \amalg i_1 & & \downarrow (i_0 \times id_I) \amalg (i_1 \times id_I) \\
 X \times I & \xrightarrow{i_0'} & (X \times I) \times I \\
 & \searrow h & \downarrow G = f \amalg g \\
 & & W
 \end{array}$$

Analizaremos primero el caso $X = \star$

$$\begin{array}{ccc}
 \star \amalg \star & \longrightarrow & I \amalg I \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 I & \longrightarrow & I \times I \\
 & \searrow h & \downarrow f \amalg g \\
 & & W
 \end{array}$$

que por ser conmutativo vale $h(0) = f(0)$ y $h(1) = g(0)$. Definimos $\tilde{G} : I \times I \rightarrow W$ de la siguiente forma



$$\tilde{G}(s, t) = \begin{cases} f(t - 3s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ h(\frac{3s-t}{3-2t}) & \frac{t}{3} \leq s \leq \frac{3-t}{3} \\ g(3s + t - 3) & \frac{3-t}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que \tilde{G} está bien definida, es continua y hace conmutar el diagrama ya que

$$\tilde{G}(0, t) = f(t), \quad \tilde{G}(1, t) = g(t), \quad \tilde{G}(s, 0) = h(t)$$

A partir de lo anterior se deduce el caso general tomando $\tilde{G}: (X \times I) \times I \rightarrow W$

$$\tilde{G}(x, s, t) = \begin{cases} f(x, t - 3s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ h(x, \frac{3s-t}{3-2t}) & \frac{t}{3} \leq s \leq \frac{3-t}{3} \\ g(x, 3s + t - 3) & \frac{3-t}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Teorema 1.6.9 Sean $f: X \rightarrow Y$ en Top y $j: X \rightarrow Z_f$ tal que $j(x) = [x, 1]$, entonces j es una cofibración.

Demostración Recordemos la definición del cilindro de una función Z_f a partir del pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{q} & Z_f \end{array}$$

Tenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & i_0 & & \\ & & \curvearrowright & & \\ X & \xrightarrow{i} & X \amalg X & \xrightarrow{i_0 \amalg i_1} & X \times I \\ f \downarrow & \nearrow & \downarrow f \amalg id_X & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{i} & Y \amalg X & \xrightarrow{q \amalg j} & Z_f \end{array}$$

El diagrama completo es un *pushout*, y es claro que el primero también lo es. Por lo tanto el segundo cuadrado es un *pushout*

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{f \amalg id_X} & Y \amalg X \\ i_0 \amalg i_1 \downarrow & \text{push} & \downarrow q \amalg j \\ X \times I & \longrightarrow & Z_f \end{array}$$

Debido al lema 1.6.2 $i_0 \amalg i_1 : X \amalg X \rightarrow X \times I$ es una cofibración, entonces también lo es $q \amalg j : Y \amalg X \rightarrow Z_f$. Finalmente por las proposiciones 1.6.3, 1.6.4 y 1.6.5 la composición

$$X \xrightarrow{id_X} Y \amalg X \xrightarrow{q \amalg j} Z_f$$

$$j = (q \amalg j) \circ id_X$$

resulta cofibración. \square

Corolario 1.6.10 $j : X \rightarrow CX$ es una cofibración.

Demostración Basta sólo recordar que CX es un caso particular de Z_f .

Ejemplo $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$ es una cofibración. Esto se debe al hecho que $D^n = CS^{n-1}$.

Teorema 1.6.11 Toda $f : X \rightarrow Y$ en *Top* se factoriza como $f = r \circ j$ con j cofibración y r equivalencia homotópica.

Demostración Recordemos la proposición 1.4.6, donde habíamos probado que $r : Z_f \rightarrow Y$ definida como $r([x, t]) = f(x)$, $r([y]) = y$ era una equivalencia homotópica porque existía una inversa homotópica $i : Y \rightarrow Z_f$ tal que $r \circ i \cong id_Y$ y $i \circ r \cong id_{Z_f}$. Tomando j la cofibración de la proposición anterior, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ j \downarrow & \nearrow r & \\ Z_f & \xleftarrow{i} & \end{array}$$

que factoriza a $f = r \circ j$. \square

Corolario 1.6.12 *Dos espacios topológicos X e Y son del mismo tipo homotópico si y sólo si existe algún espacio topológico Z en el cual las inclusiones $X \rightarrow Z$, $Y \rightarrow Z$ son equivalencias homotópicas.*

Demostración Es fácil ver que si X y Z son del mismo tipo homotópico, al igual que Y y Z , entonces X e Y tienen el mismo tipo de homotopía.

Recíprocamente supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es una equivalencia homotópica, entonces tomamos Z_f el *cilindro de f* . Como la composición $f = r \circ j$

$$X \xrightarrow{j} Z_f \xrightarrow{r} Y$$

y $r : Y \rightarrow Z_f$ son equivalencias homotópicas, entonces por la proposición 1.4.6, $j : X \rightarrow Z_f$ resulta ser una equivalencia homotópica. Por otro lado recordemos que $i : Y \rightarrow Z_f$ es una equivalencia homotópica. \square

Proposición 1.6.13 *$i : X \rightarrow Y$ es una cofibración si y sólo si existe $r : Y \times I \rightarrow Z_i$ tal que $r(y, 0) = [y]$ y $r(i(x), t) = [x, t]$.*

Demostración Tengamos presente que Z_i está definida a partir del siguiente *pushout*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ i \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & Z_i \end{array}$$

y observemos que r está bien definida porque $[x, 0] = r(i(x), 0) = [i(x)]$.

Supondremos que $i : X \rightarrow Y$ es una cofibración, y proponemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_0} & X \times I \\ i \downarrow & & \downarrow i \times id_I \\ Y & \xrightarrow{i_0} & Y \times I \\ & & \searrow \\ & & Z_i \end{array}$$

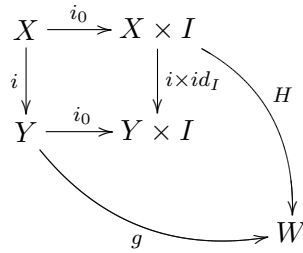
donde las funciones que llegan a Z_i son las del *pushout*. Por definición de cofibración existe $r : Y \times I \rightarrow Z_i$ tal que

$$r \circ i_0(y) = [y] \quad \text{y} \quad r \circ (i \times id_I)(x, t) = [x, t]$$

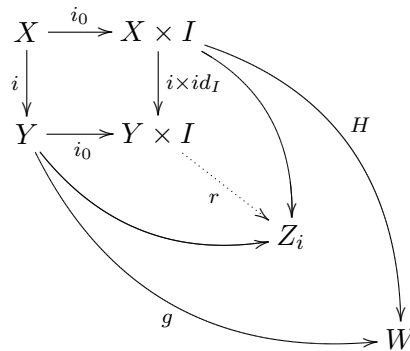
Por lo tanto

$$r(y, 0) = [y] \quad \text{y} \quad r(i(x), t) = [x, t].$$

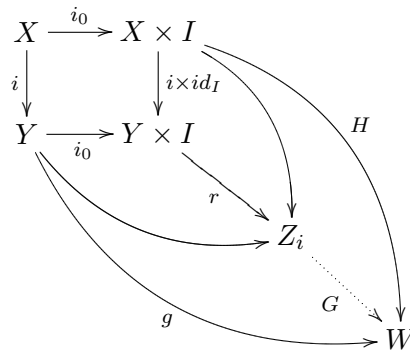
Recíprocamente veamos que $i : X \rightarrow Y$ es una cofibración. Para eso consideramos



Como por hipótesis existe $r : Y \times I \rightarrow Z_i$ entonces por definición (de r) el siguiente diagrama es conmutativo.



Por la propiedad universal del *pushout*, existe $G : Z_i \rightarrow W$ continua.



Tomamos $\tilde{H} = G \circ r$ que es la que nos permite probar que i es una cofibración ya que verificar que todo conmuta es sencillo. \square

Corolario 1.6.14 *Si $i : X \rightarrow Y$ es una cofibración entonces i es una inclusión.*

Demostración Por la proposición anterior como i es cofibración entonces existe $r : Y \times I \rightarrow Z_i$ tal que $r(i(x), t) = [x, t]$. En particular $r(i(x), 1) = [x, 1] = j(x)$ es una inclusión, por lo tanto $(i(x), 1)$ también lo es. Luego i resulta inclusión como se quería probar. \square

1.7. Fibraciones

En los cursos de topología es habitual estudiar el problema del levantamiento de funciones continuas, el cual es el dual del problema de extensión. Si $p : E \rightarrow B$ y $f : X \rightarrow B$ son funciones continuas, decimos que f se levanta si existe $\tilde{f} : X \rightarrow E$ continua tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Un ejemplo conocido de esto lo tenemos cuando $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento y $X = I$.

Con el objetivo de que el problema del levantamiento sea tratado en la categoría homotópica, necesitamos una propiedad análoga a la de extensión de homotopía, llamada propiedad de levantamiento de homotopía. Esto nos conducirá al concepto de fibración, el cual es el dual del concepto de cofibración introducido en la sección anterior.

1.7.1. P.L.H

Definición 1.7.1 *Una función $p : E \rightarrow B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopía (P.L.H.) respecto a un espacio topológico X si dadas $f : X \rightarrow B$ y $H : X \times I \rightarrow B$ tal que $H \circ i_0 = p \circ f$, existe una función continua $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ para la cual vale $\tilde{H} \circ i_0 = f$ y $p \circ \tilde{H} = H$.*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

Observar que \tilde{H} no es necesariamente única.

Consideremos el espacio de funciones continuas $X^I = \{f : I \rightarrow X\}$ con la topología compacto abierta. Sean $p_0, p_1 : X^I \rightarrow X$ continuas tales que

$$p_0(w) = w(0) \quad p_1(w) = w(1)$$

Luego si tenemos dos funciones $f, g : Z \rightarrow X$ en Top , diremos que son homotópicas si existe una función continua $H : Z \rightarrow X^I$ tal que

$$p_0 H = f \quad p_1 H = g$$

Con lo cual, a partir de la ley exponencial podemos reescribir la definición anterior del siguiente modo:

Una función $p : E \rightarrow B$ tiene la *propiedad de levantamiento de homotopía (P.L.H.)* respecto a un espacio topológico X si dado $f : X \rightarrow E$ y $H : X \rightarrow B^I$ tal que $p \circ f = p_0 \circ H$, existe una función continua $\tilde{H} : X \rightarrow E^I$ para la cual vale $p_0 \circ \tilde{H} = f$ y $p^I \circ \tilde{H} = H$ donde $p^I : E^I \rightarrow B^I$ está definida como $p^I(w)(t) = p \circ w(t)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & & & & \\
 \downarrow & \searrow f & & & \\
 & & E^I & \xrightarrow{p_0} & E \\
 & \tilde{H} \nearrow & \downarrow p^I & & \downarrow p \\
 & & B^I & \xrightarrow{p_0} & B \\
 & \downarrow H & & &
 \end{array}$$

Definición 1.7.2 Una función continua $p : E \rightarrow B$ se llama *fibración* si tiene la P.L.H. respecto a todo espacio topológico X .

Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración, $b_0 \in B$. Llamaremos *fibra de p sobre b_0* al conjunto $F = p^{-1}(b_0) \subseteq E$. Se tiene por esto el siguiente *pullback*.

$$\begin{array}{ccc}
 F & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\
 \star & \xrightarrow{\star b_0} & B
 \end{array}$$

Proposición 1.7.3 Sea $p : E \rightarrow B$ una fibración y $f, g : X \rightarrow B$ funciones homotópicas entonces f se levanta a E si y sólo si g lo hace. Además los levantados resultan homotópicos.

$$\begin{array}{ccc}
 & & E \\
 & & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow[f]{g} & B
 \end{array}$$

Demostración Supongamos que f se levanta a E , o sea existe $\tilde{f} : X \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$. Veamos que g se levanta.

Como $f \cong g$, existe una homotopía $H : X \times I \rightarrow B$ tal que

$$Hi_0 = f = p \circ \tilde{f} \quad \text{y} \quad Hi_1 = g$$

Se tiene la siguiente situación

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 i_0 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

p es una fibración, entonces existe $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ continua tal que

$$\tilde{H}i_0 = \tilde{f} \quad \text{y} \quad p\tilde{H} = H$$

Tomamos $\tilde{g} = \tilde{H}i_1$. Es claro que $\tilde{g} \cong \tilde{f}$, y además \tilde{g} es el levantado de g pues $p \circ \tilde{g} = p \circ (\tilde{H}i_1) = (p \circ \tilde{H}) \circ i_1 = g$. \square

En lo que sigue daremos a modo de ejemplos varios resultados que no son otra cosa más que los resultados duales de los de cofibraciones y por lo tanto daremos sólo una idea general de las demostraciones.

Ejemplos

- 1- La proyección $p_X : X \times Y \rightarrow X$ es una fibración.
- 2- Los homeomorfismos son fibraciones.

Consideremos

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \nearrow q \\
 \text{---} \\
 \searrow
 \end{array}$$

donde $q : B \rightarrow E$ es la inversa de p . Luego podemos definir $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ como $\tilde{H} = q \circ H$ para que el diagrama conmute ya que

$$\tilde{H} \circ i_0 = q \circ H \circ i_0 = q \circ p \circ f = f \quad \square$$

- 3- Composición de fibraciones es fibración.

Proposición 1.7.4 *Las fibraciones son estables por cambio de base. O sea si $p : E \rightarrow B$ es una fibración y el siguiente diagrama es un pullback*

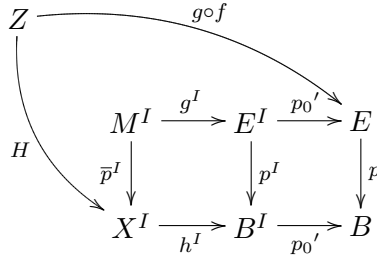
$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{g} & E \\
 \bar{p} \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{h} & B
 \end{array}$$

entonces $\bar{p} : M \rightarrow X$ resulta fibración.

Demostración La demostración es el proceso dual al resultado análogo de cofibraciones. O sea, dado

$$\begin{array}{ccc}
 Z & \xrightarrow{f} & M \\
 H \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\
 X^I & \xrightarrow{p_0} & X \\
 \bar{p}^I \downarrow & & \downarrow \bar{p} \\
 M^I & \xrightarrow{p_0} & M
 \end{array}$$

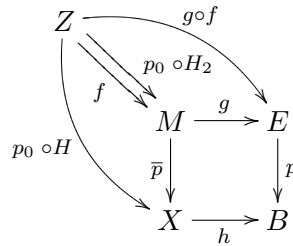
queremos ver que existe $\tilde{H} : Z \rightarrow M^I$ tal que todo conmute. Para ello consideremos el siguiente diagrama



que resulta conmutativo pues $p_0' \circ h^I \circ H(z) = p_0'(h \circ H(z)) = (h \circ H(z))(0) = h \circ p_0 \circ H(z) = h \circ \bar{p} \circ f(z) = p \circ g \circ f(z)$.

Además el cuadrado de la izquierda resulta un *pullback* pues “elevar a la I ” lo preserva. Más precisamente, como I es localmente compacto y Hausdorff el functor $-^I : Top \rightarrow Top$ que le asigna a cada espacio X el espacio de funciones continuas X^I con la topología compacto abierta, es adjunto a derecha del functor $- \times I : Top \rightarrow Top$ y por lo tanto preserva *pullbacks*.

Como $p : E \rightarrow B$ es fibración existe $H_1 : Z \rightarrow E^I$ tal que el diagrama conmuta; y como el cuadrado de la izquierda es un *pullback* existe $H_2 : Z \rightarrow M^I$ tal que todo conmuta. H_2 será la que nos permitirá probar que $\bar{p} : M \rightarrow X$ es una cofibración pues es claro que $\bar{p}^I \circ H_2 = H$. Sin embargo, probar que $p_0 \circ H_2 = f$ requiere de la universalidad del siguiente *pullback*



pues si vemos que el diagrama conmuta entonces resultará que $p_0 \circ H_2 = f$.

$$\begin{aligned}
 \bar{p} \circ f &= p \circ H \\
 g \circ p_0 \circ H_2(z) &= g(H_2(z)(0)) = g^I(H_2(z))(0) = p_0' \circ g^I \circ H_2(z) = g \circ f(z) \\
 \bar{p} \circ p_0 \circ H_2 &= p_0 \circ \bar{p}^I \circ H_2 = p \circ H. \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposición 1.7.5 La función $p : X^I \rightarrow X \times X$ definida como $p(w) = (w(0), w(1))$ es una fibración.

Demostración Tenemos

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & X^I \\ i_0 \downarrow & & \downarrow p \\ Z \times I & \xrightarrow{H} & X \times X \end{array}$$

tal que $p \circ f(z) = H \circ i_0(z)$, o sea $(f(z)(0), f(z)(1)) = (H_1(z, 0), H_2(z, 0))$

Se quiere definir $\tilde{H} : Z \times I \rightarrow X^I$ para que haga conmutar el diagrama, o sea:

$$\begin{aligned} \tilde{H} \circ i_0(z) = f(z) &\Leftrightarrow \tilde{H}(z, 0) = f(z) \quad y \\ p \circ \tilde{H}(z, t) = H(z, t) &\Leftrightarrow (\tilde{H}(z, t)(0), \tilde{H}(z, t)(1)) = (H_1(z, t), H_2(z, t)) \end{aligned}$$

Luego

$$\tilde{H}(z, t)(s) = \begin{cases} H_1(z, t - 3s) & 0 \leq s \leq \frac{t}{3} \\ f(z)\left(\frac{3s-t}{3-2t}\right) & \frac{t}{3} \leq s \leq \frac{3-t}{3} \\ H_2(z, 3s + t - 3) & \frac{3-t}{3} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

que se encuentra bien definida porque $H \circ i_0 = p \circ f$ y además hace conmutar el diagrama. \square

Sea (X, x_0) en Top_* . Consideremos

$$P(X) = \{w \in X^I / w(0) = x_0\}$$

como subespacio de X^I . Podemos definir $\hat{p} = p_1|_{P(X)} : P(X) \rightarrow X$ o sea $\hat{p}(w) = w(1)$. Observar que la fibra de \hat{p} sobre $x_0 \in X$ es

$$\hat{p}^{-1}(x_0) = \{w \in P(X) / \hat{p}(w) = x_0\} = \{w \in X^I / w(0) = x_0, w(1) = x_0\} = \Omega X$$

conocido como el espacio de lazos en x_0 .

Corolario 1.7.6 $\hat{p}: P(X) \rightarrow X$ es una fibración.

Demostración Es sencillo ver utilizando la proposición 1.7.4 que el siguiente cuadrado es un *pullback*

$$\begin{array}{ccc} P(X) & \xrightarrow{i} & X^I \\ \hat{p} \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{j} & X \times X \end{array}$$

□

Definición 1.7.7 Sea $f: E \rightarrow B$ en *Top*. Llamaremos *mapping path-space* al subespacio de $B^I \times E$ definido como

$$N_f = \{(w, e) \in B^I \times E \mid p_0(w) = w(0) = f(e)\}$$

En lenguaje categórico se tiene el siguiente *pullback*

$$\begin{array}{ccc} N_f & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \text{pull} & \downarrow f \\ B^I & \xrightarrow{p_0} & B \end{array}$$

Proposición 1.7.8 Toda $f: E \rightarrow B$ continua se factoriza como $f = q \circ \varphi$ donde φ es una equivalencia homotópica y q fibración.

Demostración Definamos $\varphi: E \rightarrow N_f$ como $\varphi(e) = (\star_{f(e)}, e) \in N_f$ y $q: N_f \rightarrow B$ como $q(w, e) = w(1) \in B$. Veamos que φ es una equivalencia homotópica, q una fibración y que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & B \\ \varphi \downarrow & \nearrow q & \\ N_f & & \end{array}$$

Notar que $q \circ \varphi(e) = q(\star_{f(e)}, e) = \star_{f(e)}(1) = f(e)$.

Para probar que φ es una equivalencia homotópica, definimos $r: N_f \rightarrow E$ como $r(w, e) = e$. Es claro que $r \circ \varphi(e) = r(\star_{f(e)}, e) = e$. Por otro lado

$\varphi \circ r(w, e) = \varphi(e) = (\star_{f(e)}, e)$ es homotópico a (w, e) pues existe una homotopía $H : N_f \times I \rightarrow N_f$ definida por

$$H((w(s), e), t) = (w(t.s), e)$$

que es continua y verifica

$$\begin{aligned} H((w(s), e), 0) &= (w(0), e) = (f(e), e) = (\star_{f(e)}, e) \\ H((w(s), e), 1) &= (w(s), e) = (w, e) \end{aligned}$$

Para ver que $q : N_f \rightarrow B$ es una fibración, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} N_f & \xrightarrow{(e, w(1))} & E \times B & \xrightarrow{p_E} & E \\ p_{B^I} \downarrow & & \mathbf{1} & \downarrow f \times id_B & \mathbf{2} & \downarrow f \\ B^I & \xrightarrow{p} & B \times B & \xrightarrow{p_x} & B \end{array}$$

y notemos que $\mathbf{1} + \mathbf{2}$ es un *pullback*. Como el cuadrado $\mathbf{2}$ también lo es, entonces $\mathbf{1}$ es *pullback*. Luego el siguiente diagrama es un *pullback*

$$\begin{array}{ccc} N_f & \xrightarrow{p_{B^I}} & B^I \\ (e, w(1)) \downarrow & \text{pull} & \downarrow p \\ E \times B & \xrightarrow{f \times id_B} & B \times B \end{array}$$

y por lo tanto $N_f \rightarrow E \times B$ resulta fibración pues lo es $p : B^I \rightarrow B \times B$. Finalmente para ver que $q : N_f \rightarrow B$ es fibración, la descomponemos como una composición de fibraciones. O sea

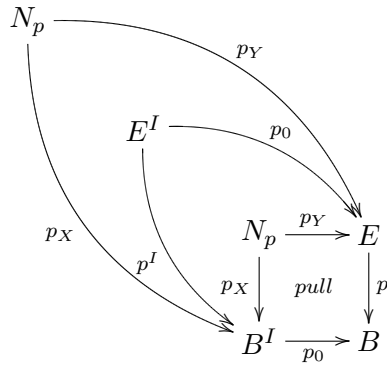
$$N_f \longrightarrow E \times B \longrightarrow B \times E \longrightarrow B$$

$$(w, e) \rightarrow (e, w(1)) \rightarrow (w(1), e) \rightarrow w(1)$$

□

Proposición 1.7.9 $p : E \rightarrow B$ fibración si y sólo si existe $j : N_p \rightarrow E^I$ tal que $k \circ j = id_{N_p}$ donde $k : E^I \rightarrow N_p$ se encuentra definido por $k(w) = (p \circ w, w(0)) \in N_p$.

Demostración Supongamos que $p : E \rightarrow B$ es una fibración y consideremos el siguiente diagrama

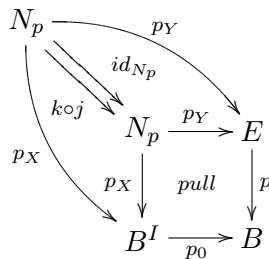


Entonces existe $j : N_p \rightarrow E^I$ tal que hace conmutar el diagrama. $k : E^I \rightarrow N_p$ definida en el enunciado también lo hace conmutar pues

$$p_X \circ k(w) = p_X(p \circ w, w(0)) = p \circ w = p^I(w)$$

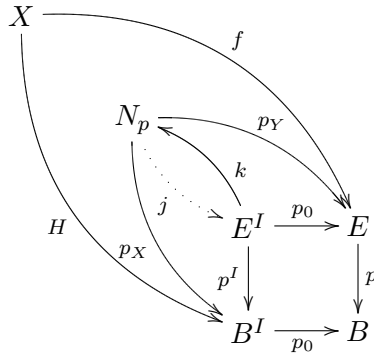
$$p_Y \circ k(w) = p_Y(p \circ w, w(0)) = w(0) = p_0(w)$$

Falta ver que $k \circ j = id_{N_p} : N_p \rightarrow N_p$ y para ello apelamos a la universalidad del siguiente *pullback*



entonces $k \circ j = id_{N_p}$.

Recíprocamente veamos por definición que $p : E \rightarrow B$ es una fibración. Utilizaremos para ello el siguiente diagrama y trataremos de encontrar una función continua $\varphi : X \rightarrow E^I$.



Sabemos que con $k : E^I \rightarrow N_p$ todo conmuta por lo hecho en la parte anterior. Veamos que con $j : N_p \rightarrow E^I$ también.

$$\begin{aligned}
 p_X \circ k &= p^I \Leftrightarrow p_X \circ k \circ j = p^I \circ j \Leftrightarrow p_X = p^I \circ j \\
 p_Y \circ k &= p_0 \Leftrightarrow p_Y \circ k \circ j = p_0 \circ j \Leftrightarrow p_Y = p_0 \circ j
 \end{aligned}$$

Como el diagrama que contiene a N_p es un *pullback* existe $\phi : X \rightarrow N_p$ tal que todo conmuta. Tomamos entonces $\varphi = j \circ \phi : X \rightarrow E^I$ que es la que nos permite probar que $p : E \rightarrow B$ es una fibración. \square

Corolario 1.7.10 *Si $p : E \rightarrow B$ es una fibración y B arcoconexo entonces p es suryectiva.*

Demostración Sea $b \in B$, queremos ver que existe $e \in E$ tal que $p(e) = b$. Para ello tomemos $b_0 \in \text{Imp}$, o sea existe $e_0 \in E$ tal que $p(e_0) = b_0$. Como B es arcoconexo existe una curva continua $\gamma : I \rightarrow B$ tal que $\gamma(0) = b_0$ y $\gamma(1) = b$. Como $p : E \rightarrow B$ es fibración existe $k : N_p \rightarrow E^I$ definida como $k(w) = (p \circ w, w(0))$ y verifica $k \circ j = \text{id}_{N_p}$. k es suryectiva, entonces dado $(\gamma, e_0) \in N_p$ existe $w \in E^I$ para el cual $k(w) = (p \circ w, w(0)) = (\gamma, e_0)$. Luego $p \circ w = \gamma$, o sea $p(w(1)) = \gamma(1) = b$. \square

Un ejemplo importante de fibración son los revestimientos. Para probar ésto vamos a recordar a continuación algunos resultados necesarios de revestimientos.

Teorema 1.7.11 *Sea $p : E \rightarrow B$ revestimiento, X conexo, $f, g : X \rightarrow E$ funciones continuas tales que $p \circ f = p \circ g$. Si existe un $x_0 \in X$ para el cual $f(x_0) = g(x_0)$, entonces $f = g$.*

$$\begin{array}{ccc}
 & & E \\
 & \nearrow f & \downarrow p \\
 X & \xrightarrow{g} & B \\
 & \xrightarrow{p \circ f = p \circ g} &
 \end{array}$$

Demostración Sea $U = \{x \in X / f(x) = g(x)\} \subseteq X$, $U \neq \emptyset$ pues $x_0 \in U$. Si vemos que U es abierto y cerrado entonces $U = X$ pues X es conexo.

Para ver que U es abierto tomemos $x \in U$ y busquemos un abierto $W \subseteq U$ tal que $x \in W$. Como $x \in U$, $f(x) = g(x) \in E$, luego $p \circ f(x) = p \circ g(x) \in B$. Sabemos que $p : E \rightarrow B$ es un revestimiento, entonces tenemos un abierto V de B tal que $p \circ f(x) = p \circ g(x) \in V$, abiertos disjuntos $V_\alpha \subseteq E$ tales que $p^{-1}(V) = \bigcup V_\alpha$ y homeomorfismos $p_\alpha : V_\alpha \rightarrow V$ para todo α .

Tomemos $W = f^{-1}(V_\alpha) \cap g^{-1}(V_\alpha)$ abierto de X . Observemos que $x \in W$ y veamos que $W \subseteq U$. Sea $y \in W$ entonces $f(y), g(y) \in V_\alpha$. Luego $f(y) = p_\alpha^{-1}(p \circ f(y)) = p_\alpha^{-1}(p \circ g(y)) = g(y)$, por lo cual $y \in U$ y $W \subseteq U$.

Para probar que U es cerrado, veremos que U^c es abierto. Sea $x \in U^c$, entonces $f(x) \neq g(x)$. Tomamos V abierto de B tal que $p \circ g(x) = p \circ f(x) \in V \subseteq B$. Como $p : E \rightarrow B$ es revestimiento tenemos nuevamente abiertos disjuntos $V_\alpha \subseteq E$ tal que $p^{-1}(V) = \bigcup V_\alpha$. Deben existir entonces abiertos $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}$ tales que $f(x) \in V_{\alpha_1}$ y $g(x) \in V_{\alpha_2}$. Como $f(x) \neq g(x)$ pero $p \circ f(x) = p \circ g(x)$ entonces $V_{\alpha_1} \cap V_{\alpha_2} \neq \emptyset$ ya que $p_\alpha : V_\alpha \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Tomemos $W = f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cap g^{-1}(V_{\alpha_2})$ abierto de X con $x \in W$, y veamos que $W \subseteq U^c$. Sea $y \in W$, entonces $f(y) \in V_{\alpha_1}$ y $g(y) \in V_{\alpha_2}$, con lo cual $f(y) \neq g(y)$, o sea $y \in U^c$. \square

Teorema 1.7.12 *Sea $p : E \rightarrow B$ revestimiento entonces p es fibración.*

Demostración Para ver que $p : E \rightarrow B$ es fibración consideremos funciones continuas $f : X \rightarrow E$ y $H : X \times I \rightarrow B$ tales que

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & E \\
 i_0 \downarrow & & \downarrow p \\
 X \times I & \xrightarrow{H} & B
 \end{array}$$

Queremos encontrar $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ tal que $p \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(x, 0) = f(x)$.

Supongamos que $\forall x \in X$ existen N_x entornos abiertos de x y funciones continuas $H_x : N_x \times I \rightarrow E$ tales que $p \circ \tilde{H} = H$ ($H|_{N_x \times I}$) y $\tilde{H}(y, 0) =$

$f(y) \forall y \in N_x$. Veamos que las \tilde{H}_x inducen una única $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ pues se pegan bien y están definidas sobre abiertos que cubren $X \times I$. Tomemos $x'' \in N_x \cap N_{x'}$ y supongamos definidas

$$\tilde{H}_x|_{\{x''\} \times I}, \tilde{H}_{x'}|_{\{x''\} \times I} : \{x''\} \times I \rightarrow E$$

Se tiene

$$\begin{aligned} p \circ \tilde{H}_x(x'', t) &= p \circ \tilde{H}_{x'}(x'', t) \quad \forall t \in I \\ \tilde{H}_x(x'', 0) &= f(x'') = \tilde{H}_{x'}(x'', 0) \end{aligned}$$

entonces por el teorema anterior $\tilde{H}_x|_{\{x''\} \times I} = \tilde{H}_{x'}|_{\{x''\} \times I}$ ya que $\{x''\} \times I$ es conexo.

Esto vale para todo $x'' \in N_x \cap N_{x'}$. Se sigue que

$$\tilde{H}_x|_{(N_x \cap N_{x'}) \times I} = \tilde{H}_{x'}|_{(N_x \cap N_{x'}) \times I}.$$

Como las N_x cubren X , definimos $\tilde{H} : X \times I \rightarrow E$ tal que $\tilde{H}|_{N_x \times I} = \tilde{H}_x$.

Hemos reducido la demostración del teorema a la construcción de entornos abiertos N_x y funciones continuas $H_x : N_x \times I \rightarrow E$ que cumplan lo pedido.

Nuevamente como $p : E \rightarrow B$ es revestimiento, para cada $b \in B$ existen entornos abiertos $U_b \subseteq E$ tales que $P^{-1}(U_b) = \bigcup V_\alpha$, una unión disjunta de abiertos de E y $p : V_\alpha \rightarrow U_b$ homeomorfismos $\forall \alpha$.

Veamos que para cada $x \in X$ fijo, existen números reales t_i tales que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ y entornos abiertos N_x de X que verifican $H(N_x \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{s_i}$.

Sea $x \in X$ fijo. Para cada $t \in I$ existe U_t abierto del cubrimiento tal que $H(x, t) \in U_t \subseteq B$. Dado que $H^{-1}(U_t)$ son abiertos de $X \times I$ entonces $p_I(H^{-1}(U_t))$ son abiertos que cubren I . Como I es compacto existen $s_0, s_1, \dots, s_r \in I$ tales que $p_I(H^{-1}(U_{s_i}))$ lo cubren. Tomamos $N_x = p_X(\bigcap_{i=0}^r H^{-1}(U_{s_i}))$ abierto de X que contiene al punto x . A partir de ahora, como ya hemos seleccionado finitos abiertos que cubren I se pueden encontrar números reales t_i tales que $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ y que verifiquen $H(N_x \times [t_{i-1}, t_i]) \subseteq U_{s_i}$.

Definimos $\tilde{H}_x : N_x \times I \rightarrow E$ recursivamente. O sea veremos que existe $G_i : N_x \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E$ que cumplen

- (1) $p \circ G_i = H$
- (2) $G_1(x', 0) = f(x')$

$$(3) \quad G_i(x', t_{i-1}) = G_{i-1}(x', t_{i-1}) \quad \forall x' \in N_x$$

Por lo hecho antes sabemos que $H(N_x \times [0, t_1]) \subseteq U_1$. Además $p^{-1}(U_1) = \bigcup V_\alpha$. Observar que $f^{-1}(V_\alpha)$ son abiertos que cubren N_x . Entonces definimos $G_1 : N_x \times [0, t_1] \rightarrow E$ como la función que en cada $f^{-1}(V_\alpha) \times [0, t_1]$ levanta a H , o sea $(p|_{V_\alpha})^{-1} \circ H$.

$$\begin{array}{ccc} & & V_\alpha \\ & \nearrow^{(p|_{V_\alpha})^{-1} \circ H} & \downarrow p \\ f^{-1}(V_\alpha) \times [0, t_1] & \xrightarrow{H} & U_1 \\ & & \nwarrow_{(p|_{V_\alpha})^{-1}} \end{array}$$

Supongamos definida $G_{i-1} : N_x \times [t_{i-2}, t_{i-1}] \rightarrow E$ y definamos $G_i : N_x \times [t_{i-1}, t_i] \rightarrow E$. Sabemos $N_x \times [t_{i-1}, t_i] \subseteq U_i$ donde $p^{-1}(U_i) = \bigcup V_\alpha$. Sea $W_\alpha = \{x' \in N_x / G_{i-1}(x', t_{i-1}) \in V_\alpha\}$ son abiertos disjuntos que cubren N_x . Ésto nuevamente define G_i como hicimos antes.

$$\begin{array}{ccc} & & V_\alpha \\ & \nearrow^{(p|_{W_\alpha})^{-1} \circ H} & \downarrow p \\ W_\alpha \times [t_{i-1}, t_i] & \xrightarrow{H} & U_i \\ & & \nwarrow_{(p|_{V_\alpha})^{-1}} \end{array}$$

Quedaría chequear que cumple con las condiciones (1), (2) y (3). \square

1.8. H-espacios y grupos de homotopía

En lo que sigue comenzaremos enunciando el resultado análogo a la *ley exponencial* en Top_\star y algunos resultados que se derivan a partir de esto. Luego entraremos de lleno en el estudio de los H-espacios y H-grupos que nos servirán para definir los grupos de homotopía $\pi_n(X)$, y para probar que dichos grupos son abelianos para $n \geq 2$. Trabajaremos principalmente en la categoría homotópica de espacios topológicos punteados $[Top_\star]$ aunque mucho de lo que hagamos será válido en la categoría homotópica de espacios topológicos.

1.8.1. Ley exponencial en Top_\star

Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios topológicos punteados. Definimos el subespacio $(X, x_0)^{(Y, y_0)} = \{f \in X^Y / f(y_0) = x_0\} \subseteq X^Y$ con la topología compacto abierta. Además resulta punteado con punto base $\star_{x_0} : Y \rightarrow X$.

Proposición 1.8.1 Sean (X, x_0) , (Y, y_0) y (Z, z_0) espacios topológicos punteados e Y localmente compacto y Hausdorff. Entonces existe una biyección de conjuntos

$$\varphi : Top_{\star}((Z, z_0) \wedge (Y, y_0), (X, x_0)) \longrightarrow Top_{\star}((Z, z_0), (X, x_0))^{(Y, y_0)}$$

Demostración Recordemos que identificábamos al *wedge* $(Z, z_0) \vee (Y, y_0)$ con $Z \times \{y_0\} \cup \{z_0\} \times Y$. Por ello la definición de φ es la misma que en el caso no punteado, o sea $\varphi(f)(z)(y) = f(z, y)$, con $f : (Z, z_0) \wedge (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$ y $f(z, y_0) = f(z_0, y) = x_0$, por lo tanto $\varphi(f)(z_0)(y_0) = f(z_0, y_0) = x_0$, o sea $\varphi(f)(z_0) = \star_{x_0}$. Además resulta biyectiva pues tiene función inversa

$$\psi : Top_{\star}((Z, z_0), (X, x_0))^{(Y, y_0)} \longrightarrow Top_{\star}((Z, z_0) \wedge (Y, y_0), (X, x_0))$$

dada por

$$\psi(g)(z, y) = g(z)(y)$$

Observar que ψ está bien definida. Faltaría ver que f es continua si y sólo si $\varphi(f)$ lo es; pero esto último se demuestra también de manera análoga al caso no punteado. \square

Sean (X, x_0) , (S^1, s_0) en Top_{\star} . Notar que el espacio de lazos ΩX puede definirse como

$$\Omega X = (X, x_0)^{(S^1, s_0)}$$

el espacio de lazos de X .

Corolario 1.8.2 Sean X, Z espacios topológicos punteados. Entonces existe una biyección de conjuntos

$$\varphi : Top_{\star}(Z \wedge S^1, X) \longrightarrow Top_{\star}(Z, X^{S^1})$$

o bien

$$\varphi : Top_{\star}(\Sigma Z, X) \longrightarrow Top_{\star}(Z, \Omega X)$$

Demostración Basta aplicar la proposición anterior a $Y = S^1$ que es localmente compacto y Hausdorff. \square

Observar que como corolario del resultado anterior se tiene que el funtor $\Sigma : Top_\star \longrightarrow Top_\star$ es adjunto a izquierda de $\Omega : Top_\star \longrightarrow Top_\star$.

Sean (X, x_0) e (Y, y_0) espacios topológicos punteados. Notaremos

$$[X, Y] = \{ [f] / f : X \rightarrow Y \text{ continuas y punteadas} \}$$

Proposición 1.8.3 Sean $(X, x_0), (Z, z_0)$ espacios topológicos punteados entonces se tiene una biyección de conjuntos

$$[\Sigma Z, X] \longrightarrow [Z, \Omega X]$$

Demostración La biyección es la usual, o sea $\tilde{\varphi}([f]) = [\tilde{f}]$ donde $\tilde{f}(z)(s) = \varphi(f)(z)(s) = f[z, s]$. Veamos que está bien definida, o sea si $f \cong g : \Sigma Z \rightarrow X$ entonces $\tilde{f} \cong \tilde{g} : Z \rightarrow \Omega X$.

Como $f \cong g$ entonces existe una función continua $H : \Sigma Z \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H([z, 0], t) &= H([z, 1], t) = H([z_0, s], t) = x_0 \\ H([z, s], 0) &= f(z, s) \\ H([z, s], 1) &= g(z, s) \end{aligned}$$

Definimos una homotopía $\tilde{H} : Z \times I \rightarrow \Omega X$ de $\varphi(f)$ a $\varphi(g)$ como

$$\tilde{H}(z, t)[s] = H([z, s], t)$$

Veamos la buena definición

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z, t)[0] &= H([z, 0], t) = x_0 \\ \tilde{H}(z, t)[1] &= H([z, 1], t) = x_0 \end{aligned}$$

Para ver que \tilde{H} es continua primero observemos que $(\Sigma Z) \times I = \Sigma(IZ) = IZ \wedge S^1$. Luego obtenemos así $H' : (IZ) \wedge S^1 \rightarrow X$ continua. Como $\tilde{H} = \varphi(H')$ entonces resulta continua. Por otro lado \tilde{H} es la homotopía que necesitamos ya que

$$\begin{aligned} \tilde{H}(z, 0)[s] &= H([z, s], 0) = f(z, s) \\ \tilde{H}(z, 1)[s] &= H([z, s], 1) = g(z, s) \\ \tilde{H}(z_0, t)[s] &= H([z_0, s], t) = x_0 \quad \square \end{aligned}$$

Como corolario obtenemos que el funtor $\Sigma : [Top_\star] \longrightarrow [Top_\star]$ es adjunto a izquierda del funtor $\Omega : [Top_\star] \longrightarrow [Top_\star]$

1.8.2. H-espacios

Notemos que un grupo G es un conjunto punteado (G, e) (e neutro) junto con una multiplicación $\mu : G \times G \rightarrow G$, una identidad $id_G : G \rightarrow G$ y una inversa $\nu : G \rightarrow G$ que cumplen con tres diagramas

(N) *eutro*

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(\star_e, id_G)} & G \times G & \xleftarrow{(id_G, \star_e)} & G \\
 & \searrow id_G & \downarrow \mu & \swarrow id_G & \\
 & & G & &
 \end{array}$$

(A) *sociatividad*

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G & \xrightarrow{(\mu, id_G)} & G \times G \\
 (id_G, \mu) \downarrow & & \downarrow \mu \\
 G \times G & \xrightarrow{\mu} & G
 \end{array}$$

(I) *inversa*

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{(\nu, id_G)} & G \times G & \xleftarrow{(id_G, \nu)} & G \\
 & \searrow \star_e & \downarrow \mu & \swarrow \star_e & \\
 & & G & &
 \end{array}$$

Si el grupo es abeliano entonces tiene la siguiente propiedad

(C) *onmutatividad*

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G & \xrightarrow{T} & G \times G \\
 & \searrow \mu & \swarrow \mu & \\
 & & G &
 \end{array}$$

donde $T(x, y) = (y, x)$

Definición 1.8.4 Un grupo topológico es un espacio topológico punteado (G, e) con una multiplicación continua $\mu : G \times G \rightarrow G$ y con una inversa continua $\nu : G \rightarrow G$ tal que los diagramas (N), (A) e (I) conmutan en Top .

Ejemplo $S^1 = \{x \in \mathbb{C} / \|x\| = 1\}$ es un grupo topológico porque la multiplicación en \mathbb{C} induce una multiplicación en S^1 .

Definición 1.8.5 Sea (G, e) un espacio topológico punteado con multiplicación continua $\mu : G \times G \rightarrow G$ donde (e, e) es el punto base de $G \times G$. Entonces decimos que

- (G, e) es un H -espacio si $\star_e : G \rightarrow G$ es una identidad homotópica (punteada), es decir (N) conmuta en $[Top_\star]$.

- (G, e) es un H -grupo si μ es homotópicamente asociativo, $\star_e : G \rightarrow G$ es una identidad homotópica (punteada) y $\nu : G \rightarrow G$ es una inversa homotópica (punteada), es decir (A), (N) e (I) conmutan en $[Top_\star]$.

- (G, e) es un H -grupo abeliano si además el diagrama (C) conmuta en $[Top_\star]$.

Proposición 1.8.6 Sean (X, x_0) un espacio topológico punteado e (Y, y_0) un H -grupo. Entonces el conjunto $[X, Y]$ admite una estructura de grupo. Además si Y es un H -grupo abeliano, entonces $[X, Y]$ es un grupo abeliano.

Demostración Sean $[f], [g] \in [X, Y]$. Definimos $[f].[g]$ como la clase de la siguiente composición

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \xrightarrow{\mu} Y$$

$$x \longrightarrow (x, x) \longrightarrow (f(x), g(x)) \longrightarrow \mu(f(x), g(x))$$

Se tomará como elemento neutro $[\star_{y_0}]$ (y_0 es el neutro de Y) y la inversa de $[f]$ será $[\nu \circ f]$ que notaremos $[f]^{-1}$. Veamos que están bien definidas y cumplen lo que deben.

Supongamos que $f \cong f' : X \rightarrow Y$ y $g \cong g' : X \rightarrow Y$. Mostremos que $[f].[g] = [f'].[g']$. Sean $H_1 : X \times I \rightarrow Y$ la homotopía de f a f' , y $H_2 : X \times I \rightarrow Y$ la homotopía de g a g' . Definimos $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Y$ como

$$\tilde{H}(x, t) = \mu(H_1(x, t), H_2(x, t))$$

que verifica

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x, 0) &= \mu(H_1(x, 0), H_2(x, 0)) = \mu(f(x), g(x)) \\ \tilde{H}(x, 1) &= \mu(H_1(x, 1), H_2(x, 1)) = \mu(f'(x), g'(x)) \\ \tilde{H}(x_0, t) &= \mu(H_1(x_0, t), H_2(x_0, t)) = \mu(y_0, y_0) = y_0\end{aligned}$$

o sea resulta una homotopía de $\mu(f(x), g(x))$ a $\mu(f'(x), g'(x))$. Análogamente para la buena definición de $[f]^{-1}$. Veamos que efectivamente resulta ser la inversa de $[f]$, o sea $[f].[\nu \circ f] = [\star_{y_0}] = [\nu \circ f].[f]$. Probaremos la primera igualdad, esto es $\mu(f, \nu \circ f) \cong \star_{y_0} : X \rightarrow Y$. Como Y es un H-grupo se tiene que $\mu \circ (id_Y, \nu) \cong \star_{y_0} : Y \rightarrow Y$ y componiendo a derecha con $f(x) : X \rightarrow Y$ se obtiene lo que queríamos. Análogamente para el elemento neutro.

Veamos asociatividad, o sea $([f].[g]).[h] = [f].([g].[h])$, que es equivalente a ver que $\mu(\mu(f, g), h) \cong \mu(f, \mu(g, h))$. Como sabemos que μ es homotópicamente asociativo, entonces se tiene $\mu \circ (\mu, id_Y) \cong \mu(f, \mu(g, h))$ y componiendo a derecha con $(f(x), g(x), h(x))$ se consigue lo que queríamos.

Trabajando ahora con Y abeliano, o sea con el diagrama que nos proporciona la conmutatividad, se prueba fácilmente que $[X, Y]$ es abeliano. \square

Observar que si $f : X \rightarrow Z$ es una función continua punteada entonces f induce un morfismo de grupo $f^* : [Z, Y] \rightarrow [X, Y]$ definido como $f^*([g]) = [g \circ f]$.

Proposición 1.8.7 *Si (X, x_0) es un espacio topológico punteado entonces ΩX es un H-grupo*

Demostración Definamos la multiplicación $\mu : \Omega X \times \Omega X \rightarrow \Omega X$. Sean $\omega, \omega' \in \Omega X$, es decir, $\omega, \omega' : I \rightarrow X$ y $\omega(0) = \omega'(0) = \omega(1) = \omega'(1) = x_0$.

$$\mu(\omega, \omega')(t) = \omega \star \omega'(t) = \begin{cases} \omega(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \omega'(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observar que $\omega \star \omega' : I \rightarrow X$ y $\omega \star \omega'(0) = \omega \star \omega'(1) = x_0$. Para ver que $\mu : \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ es continua hay que apelar a la *ley exponencial*, pues

es suficiente mostrar que $\varphi(\mu) : \Omega Y \times \Omega Y \times I \rightarrow Y$ lo es, donde φ es la biyección que nos da la *ley exponencial*. Notar que $\varphi(\mu)(\omega, \omega', t) = \omega \star \omega'(t)$, y resulta continua porque lo es en cada conjunto cerrado $\Omega Y \times \Omega Y \times [0, \frac{1}{2}]$ y $\Omega Y \times \Omega Y \times [\frac{1}{2}, 1]$.

Tomamos ω_0 el lazo constantemente x_0 de tal forma que $[\omega_0]$ será el que actúe de identidad homotópica. Veamos que

$$\omega \star \omega_0 \cong \omega \cong \omega_0 \star \omega$$

Para ello definimos una homotopía $H : \Omega X \times I \rightarrow \Omega X$

$$H(\omega, t)(s) = \begin{cases} \omega(\frac{2s}{t+1}) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{2} \\ x_0 & \frac{t+1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Esta fórmula muestra que $\varphi(H) : (\Omega X \times I) \times I \rightarrow Y$ (φ es la biyección de la *ley exponencial*) es continua, pues lo es en dos conjuntos cerrados en cuya intersección $\varphi(H)$ coincide. Luego H es continua. Veamos que μ es homotópicamente asociativo, o sea

$$\omega \star (\omega' \star \omega'') \cong (\omega \star \omega') \star \omega''$$

Para ello buscamos una homotopía $G : \Omega X \times \Omega X \times \Omega X \times I \rightarrow \Omega X$

$$G(\omega, \omega', \omega'', t)(s) = \begin{cases} \omega(\frac{4s}{t+1}) & 0 \leq s \leq \frac{t+1}{4} \\ \omega'(4s - t - 1) & \frac{t+1}{4} \leq s \leq \frac{t+2}{4} \\ \omega''(\frac{4s-2-t}{2-t}) & \frac{t+2}{4} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Queda por chequear buena definición y continuidad pero es análogo a lo anterior. Definimos ahora una inversa homotópica $\nu : \Omega X \rightarrow \Omega X$ como

$$\nu(\omega)(t) = \omega(1 - t)$$

y damos a continuación una homotopía $F : \Omega Y \times \Omega Y \rightarrow \Omega Y$ para demostrar que

$$\nu(\omega) \star \omega \cong \omega_0 \cong \omega \star \nu(\omega)$$

definida como

$$F(\omega, t)(s) = \begin{cases} y_0 & 0 \leq s \leq \frac{t}{2} \\ \omega(2s - t) & \frac{t}{2} \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \omega(2 - 2s - t) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 - \frac{t}{2} \\ y_0 & 1 - \frac{t}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

□

Corolario 1.8.8 Sean X e Y espacios topológicos punteados, entonces $[X, \Omega Y]$ es un grupo.

Observar como queda definido el producto en $[X, \Omega Y]$. Sean $f, g : X \rightarrow \Omega Y$ en Top_\star . El producto $[f].[g]$ es la clase de $\mu(f, g) : X \rightarrow \Omega Y$ donde

$$\mu(f(x), g(x))(t) = \begin{cases} f(x)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

En lo que sigue veremos que $[\Sigma X, Y]$ tiene una estructura natural de grupo ya que ΣX es un H-cogrupo. Comencemos definiendo esto último.

Definición 1.8.9 Un H-cogrupo es un espacio topológico punteado (K, k_0) junto con una comultiplicación continua $\mu' : K \rightarrow K \vee K$, una identidad homotópica $k_0 : K \rightarrow K$ y una inversa homotópica continua $\nu' : K \rightarrow K$ tales que cumplen con los siguientes diagramas conmutativos en $[Top_\star]$.

(1)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & \xleftarrow{id_K} & & \xrightarrow{id_K} & \\
 K & & K & & K \\
 & \searrow^{(id_K, *_{k_0})} & \downarrow \mu' & \swarrow_{(*_{k_0}, id_K)} & \\
 & & K \vee K & &
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{ccc}
 K \vee K \vee K & \xleftarrow{id_K \vee \mu'} & K \vee K \\
 \mu' \vee id_K \uparrow & & \uparrow \mu' \\
 K \vee K & \xleftarrow{\mu'} & K
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K \vee K & & \\
 & \xleftarrow{(\nu', id_K)} & & \xrightarrow{(id_K, \nu')} & \\
 K & & K \vee K & & K \\
 & \searrow_{*_{k_0}} & \uparrow \mu' & \swarrow_{*_{k_0}} & \\
 & & K & &
 \end{array}$$

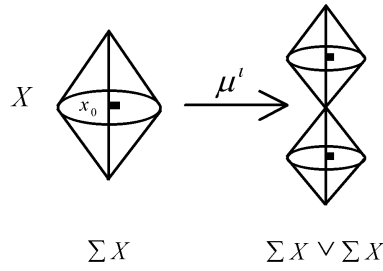
A su vez diremos que K es un H -cogruppo abeliano si el siguiente diagrama conmuta en $[Top_*]$ donde $T : K \vee K \rightarrow K \vee K$ está definida como $T(k_0, k) = (k, k_0)$ y $T(k, k_0) = (k_0, k)$.

$$\begin{array}{ccc}
 K & & \\
 \downarrow u' & \searrow \mu' & \\
 K \vee K & \xrightarrow{T} & K \vee K
 \end{array}$$

Proposición 1.8.10 Sea (X, x_0) es un espacio topológico punteado, entonces ΣX es un H -cogruppo

Demostración Definimos para ello una comultiplicación $\mu' : \Sigma X \rightarrow \Sigma X \vee \Sigma X$ y una inversa homotópica $\nu' : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ de la siguiente forma

$$\mu'([x, t]) = \begin{cases} ([x, 2t], s_0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (s_0, [x, 2t - 1]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$



$$\nu'[x, t] = [x, 1 - t]$$

donde s_0 es el punto base de ΣX . Es claro ver que están bien definidas, son continuas y que ν' es efectivamente la inversa homotópica definiendo una homotopía adecuada. La identidad homotópica será $\star_{s_0} : \Sigma X \rightarrow \Sigma X$ pues verifica

$$(id_{\Sigma X}, \star_{s_0}) \circ \mu' \cong id_{\Sigma X} \cong (\star_{s_0}, id_{\Sigma X}) \circ \mu'$$

si tomamos la siguiente homotopía $H : \Sigma X \times I \rightarrow \Sigma X$

$$H([x, t], s) = \begin{cases} [x, \frac{2t}{s+1}] & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{2} \\ s_0 & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Para mostrar que es homotópicamente asociativo, hay que definir una homotopía de manera totalmente análoga al caso de ΩX un H-grupo. \square

Proposición 1.8.11 Sean (Y, y_0) un espacio topológico punteado y (X, x_0) un H -cogrupo. Entonces el conjunto $[X, Y]$ admite una estructura de grupo. Además si X es un H -grupo abeliano, entonces $[X, Y]$ es un grupo abeliano.

Demostración Sean $[f], [g] \in [X, Y]$ donde $f, g : X \rightarrow Y$ son funciones continuas y punteadas. Definimos un producto en $[X, Y]$ como la clase de la siguiente composición

$$X \xrightarrow{\mu'} X \vee X \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\Delta'} Y$$

donde $\Delta'(y, y_0) = y$ y $\Delta'(y_0, y) = y$.

Además el neutro del grupo será $[\star_{y_0}]$ donde $\star_{y_0} : X \rightarrow Y$ y el elemento inverso de $[f]$, $[f]^{-1} = [f \circ \nu']$. Para demostrar esto hay que aplicar la misma idea que en el caso de $[X, Y]$ un grupo si Y es un H -grupo. O sea utilizar todo el tiempo el hecho que μ' hace conmutar los diagramas en $[\text{Top}_\star]$.

Corolario 1.8.12 Sean X e Y espacios topológicos punteados, entonces $[\Sigma X, Y]$ es un grupo.

Observar como queda definida la suma en $[\Sigma X, Y]$. Sean $f, g : \Sigma X \rightarrow Y$ en Top_\star . La suma $[f] + [g]$ es la clase de la función $\Delta' \circ f \vee g \circ \mu' : \Sigma X \rightarrow Y$ donde

$$\Delta' \circ f \vee g \circ \mu'[x, t] = \begin{cases} f[x, 2t] & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

porque

$$\begin{aligned} \Delta' \circ f \vee g \circ \mu'[x, t] &= \Delta' \circ (f \vee g) \circ \begin{cases} ([x, 2t], s_0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (s_0, [x, 2t - 1]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \\ &= \Delta' \circ \begin{cases} (f[x, 2t], y_0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ (y_0, g[x, 2t - 1]) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} f[x, 2t] & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Recordemos que teníamos una biyección de conjuntos

$$\tilde{\varphi} : [\Sigma X, Y] \rightarrow [X, \Omega Y]$$

definiendo $\tilde{\varphi}([f]) = [\tilde{f}]$ donde $\tilde{f}(z)(s) = \varphi(f)(z)(s) = f[z, s]$. En lo que sigue veremos además que se trata de un isomorfismo de grupos.

Proposición 1.8.13 $\tilde{\varphi} : [\Sigma X, Y] \rightarrow [X, \Omega Y]$ es un isomorfismo de grupos (con la estructura de grupos que se dio antes).

Demostración Sean $[f], [g] \in [\Sigma X, Y]$. Se quiere ver que $\tilde{\varphi}([f] + [g]) = \tilde{\varphi}([f]) \cdot \tilde{\varphi}([g])$, donde $\tilde{\varphi}([f] + [g])$ es la clase de la función

$$\varphi(\Delta' \circ (f \vee g) \circ \mu')(x)(t) = \Delta' \circ (f \vee g) \circ \mu'[x, t]$$

$$\begin{aligned} \Delta' \circ (f \vee g) \circ \mu'[x, t] &= \begin{cases} f[x, 2t] & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \varphi(f)(x)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \varphi(g)(x)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} = \mu(\varphi(f)(x), \varphi(g)(x))(t) \end{aligned}$$

que es un representante de la clase de $[\varphi(f)] \cdot [\varphi(g)] = \tilde{\varphi}([f]) \cdot \tilde{\varphi}([g])$. \square

Antes de terminar esta sección vamos a considerar la relación entre las dos posibles estructuras de grupos que le dimos al conjunto $[X, Y]$ para X e Y espacios topológicos punteados, en particular cuando X es un H-cogruppo e Y un H-grupo. Nos proponemos ver que bajo estas condiciones ambas coinciden.

Lema 1.8.14 Sea X un conjunto con dos multiplicaciones

$$+ : X \times X \rightarrow X$$

$$\star : X \times X \rightarrow X$$

que satisfacen

$$(1) \exists e \in X / e \star x = x \star e = e + x = x + e = x$$

$$(2) \forall x, x', y, y' \in X / (x + x') \star (y + y') = (x \star y) + (x' \star y')$$

Entonces las dos operaciones coinciden ($+ = \star$) y además resultan asociativas y conmutativas.

Demostración

Veamos que $x + y = x \star y$, o sea $+ = \star$

$$x + y = (x \star e) + (e \star y) = (x + e) \star (e + y) = x \star y$$

Conmutatividad: $x + y = y + x$

$$x + y = (e \star x) + (y \star e) = (e + y) \star (x + e) = y + x$$

Asociatividad: $x + (y + z) = (x + y) + z$

$$x + (y + z) = (x \star e) + (y \star z) = (x + y) \star (e + z) = (x + y) \star z = (x + y) + z \quad \square$$

Teorema 1.8.15 Sean (K, k_0) un H-cogruppo y (L, l_0) un H-grupo. Las dos estructuras de grupo en $[K, L]$ coinciden y además $[K, L]$ es un grupo abeliano.

Demostración Bastaría probar las dos hipótesis del lema anterior. Asumimos que L es un H-grupo con la operación \cdot (multiplicación μ), y que K es un H-cogruppo con la operación $+$ (comultiplicación μ').

Es fácil chequear que $[l_0]$ es el neutro donde $l_0 : K \rightarrow L$ es la función continua y punteada que vale constantemente l_0 . Veamos que si $[f], [f'], [g], [g'] \in [K, L]$ entonces

$$([f] + [f']) \cdot ([g] + [g']) = ([f] \cdot [g]) + ([f'] \cdot [g'])$$

Ésto es equivalente a ver que

$$\mu(\Delta' \circ (f \vee f') \circ \mu', \Delta' \circ (g \vee g') \circ \mu') \cong \Delta' \circ (\mu(f, g) \vee \mu(f', g')) \circ \mu' \quad \square$$

De hecho son iguales tomando $k \in K$ y teniendo en cuenta que $\mu'(k)$ puede caer en alguna de las dos copias de K en $K \vee K$. \square

1.8.3. Grupos de homotopía

Definición 1.8.16 Sea (X, x_0) un espacio topológico punteado. Dado $n \in \mathbb{N}$ definimos el grupo de homotopía de X de orden n como el conjunto

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]$$

Observar que para el caso $n = 0$, $\pi_0(X, x_0) = [S^0, X]$ coincide con el conjunto punteado de componentes arcoconexas de X .

En el caso $n = 1$

$$\pi_1(X, x_0) = [S^1, X] = [\Sigma S^0, X] = [S^0, \Omega X] = \pi_0(\Omega X)$$

resulta que $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo porque $S^1 = \Sigma S^0$ es un H-cogruppo y no es otra cosa que el grupo fundamental (de Poincaré) de X (con punto base x_0).

Si $n \geq 2$

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X] = [\Sigma S^{n-1}, X] = [S^{n-1}, \Omega X]$$

Como ΩX es un H-grupo y S^{n-1} un H-cogruppo entonces $\pi_n(X, x_0)$ resulta un grupo abeliano. Notar además que

$$\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X) = \pi_{n-2}(\Omega^2 X) = \dots = \pi_0(\Omega^n X)$$

Sea $f : X \rightarrow Y$ en Top_* . Podemos definir $f_* : \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, y_0)$ como $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi]$ donde $\varphi : S^n \rightarrow X$ es continua y punteada. Entonces f_* resulta un morfismo de grupos si $n \geq 1$.

En los párrafos anteriores vimos que si $n \geq 1$, $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo. Si pensamos a $\pi_n(X, x_0) = [S^{n-1}, \Omega X]$ la operación en el grupo queda definida del siguiente modo: si $f, g : S^{n-1} \rightarrow \Omega X$ entonces $[f].[g]$ es la clase de la siguiente función

$$\begin{cases} f(x)(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g(x)(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para $x \in S^{n-1}$ y $t \in I$

Si pensamos que $\pi_n(X, x_0) = [\Sigma S^{n-1}, X]$ entonces cuando tomamos $f, g : \Sigma S^{n-1} \rightarrow X$, la operación $[f] + [g]$ queda definida como la clase de la función

$$\begin{cases} f[x, 2t] & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g[x, 2t - 1] & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

para $x \in S^{n-1}$ y $t \in I$

Observación 1.8.17 *Obtenemos así los siguientes resultados*

- $\pi_0(X, x_0)$ es un conjunto y se tiene un funtor $\pi_0 : Top_\star \rightarrow Set_\star$, donde Set_\star es la categoría de conjuntos punteados y funciones punteadas de conjuntos.
- $\pi_1(X, x_0)$ es un grupo y $\pi_1 : Top_\star \rightarrow Gr$ un funtor, donde Gr es la categoría de los grupos y morfismos de grupos.
- $\pi_n(X, x_0)$ es un grupo abeliano si $n \geq 2$ y $\pi_n : Top_\star \rightarrow Ab$ es un funtor donde Ab es la categoría de grupos abelianos y morfismos entre dichos grupos.

Sea I^n el cubo unidad n -dimensional, o sea el producto de n copias del intervalo $[0, 1]$. El borde ∂I^n de I^n es el subespacio que consiste de puntos con al menos una coordenada igual a 0 o a 1.

Notar que $S^n = D^n / \partial D^n = I^n / \partial I^n$. Luego es clara la biyección entre el conjunto de funciones en Top_\star , $f : (S^n, s_0) \rightarrow (X, x_0)$ y las funciones $\hat{f} : I^n \rightarrow X$ tales que $\hat{f}|_{\partial I^n} = x_0$. Usaremos para estas funciones la siguiente notación $\hat{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$.

Supongamos que $[f] = [g]$ en $\pi_n(X, x_0)$, o sea existe una homotopía $H : S^n \times I \rightarrow X$ tal que

$$\begin{aligned} H(s, 0) &= f(s) \\ H(s, 1) &= g(s) \quad \forall s \in S^n \\ H(s_0, t) &= x_0 \quad \forall t \in I \end{aligned}$$

Luego conseguimos una homotopía de \hat{f} a \hat{g} con $\hat{H} : I^n \times I \rightarrow X$ definida como

$$\begin{aligned}\hat{H}(y, 0) &= \hat{f}(y) \\ \hat{H}(y, 1) &= \hat{g}(y) \quad \forall y \in I^n \\ \hat{H}(y, t) &= x_0 \quad \forall y \in \partial I^n, t \in I\end{aligned}$$

Podemos entonces redefinir

$$\pi_n(X, x_0) = \{ [\hat{f}] / \hat{f} : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0) \text{ continuas} \}$$

donde $[\hat{f}]$ es la clase vía homotopía relativa a ∂I^n . Con esta interpretación del $\pi_n(X, x_0)$, la operación en este grupo (si $n \geq 1$) queda definida así : si $f, g : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$ continuas entonces $[f] * [g]$ es igual a la clase de la función

$$\xi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n) & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} x_0 \\ \square \\ x_0 \end{array} & \longrightarrow & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\ & & \begin{array}{c} f \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \\ X \end{array} \end{array}$$

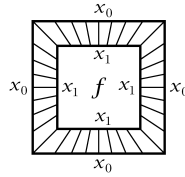
Sabemos que si $\gamma : I \rightarrow X$ es una curva tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$ entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$. En particular esto sucede si x_0 y x_1 están en la misma componente arcoconexa. Esto también ocurre con los grupos de homotopía de orden superior. Distintas elecciones de puntos bases x en la misma componente arcoconexa de X producen grupos isomorfos $\pi_n(X, x)$ y entonces podemos escribir directamente $\pi_n(X)$.

Proposición 1.8.18 Sean x_0 y x_1 puntos en la misma componente arcoconexa de X , entonces $\pi_n(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_n(X, x_1)$ para $n \geq 1$.

Demostración Para $n = 1$ el resultado es conocido [Mun]. Demostrémoslo para $n \geq 2$. Sea $\gamma : I \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$. Queremos definir un isomorfismo entre $\pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$. Sea $[f] \in \pi_n(X, x_1)$, $f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_1)$ y le asociamos una nueva función

$$\gamma f : (I^n, \partial I^n) \rightarrow (X, x_0)$$

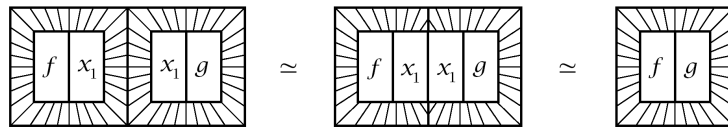
que construimos encogiendo el dominio de f a un cubo concéntrico más pequeño que I^n , luego insertando γ sobre cada segmento radial en la región entre el cubo menor y ∂I^n .



Observar que está bien definida porque esta construcción preserva homotopías. O sea si $f \cong g$ con homotopía H entonces $\gamma f \cong \gamma g$ con homotopía γH . Además se cumplen otras tres propiedades:

- (1) $\gamma(f * g) \cong \gamma(f) * \gamma(g)$
- (2) $(\gamma\eta)f \cong \gamma(\eta f)$
- (3) $\star_{x_1} f \cong f$

Los casos (2) y (3) son claros, veamos (1). Llamamos $f * \star_{x_1}$ la función que resulta de deformar f a la mitad izquierda y \star_{x_1} a la mitad derecha. Análogamente para $\star_{x_1} * g$. Luego construimos una homotopía $H : I^n \times I \rightarrow X$ de $\gamma(f * \star_{x_1}) * \gamma(\star_{x_1} * g)$ a $\gamma(f * g)$ del siguiente modo



$$H(s_1, s_2, \dots, s_n)(t) = \begin{cases} \gamma(f * \star_{x_1})((2-t)s_1, s_2, \dots, s_n) & 0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2} \\ \gamma(\star_{x_1} * g)((2-t)s_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n) & \frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1 \end{cases}$$

Observar que en $s_1 = \frac{1}{2}$ ambas partes valen x_1 .

A partir de esta construcción podemos definir $\beta_\gamma : \pi_n(X, x_1) \rightarrow \pi_n(X, x_0)$ por $\beta_\gamma[f] = [\gamma f]$.

Luego (1) muestra que β_γ es un morfismo, (2) y (3) muestran que β_γ es un isomorfismo con inversa $\beta_{\bar{\gamma}}$ donde $\bar{\gamma} = \gamma(1 - t)$. \square

Capítulo 2

Aplicaciones

2.1. Homotopía y concurrencia

En lo que sigue trataremos de aplicar algunas ideas geométricas a temas que se estudian en computación científica. Veremos una variante de la teoría de homotopía en la que va a intervenir fuertemente la *dirección del tiempo* (que no podrá retroceder). Será una *homotopía dirigida o di-homotopía*.

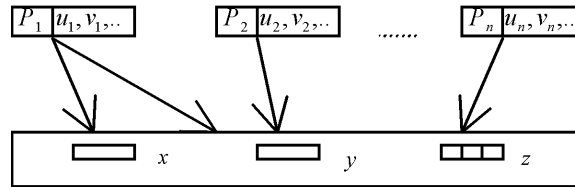
Comenzaremos repasando algunos conceptos básicos de computación para poder plantear algunos problemas que se pueden modelar con técnicas topológicas. Las referencias para este capítulo son [Gua, FGR, Gou, GR, GG, Fa, GFR, Gau, Go].

La teoría de la concurrencia trabaja con procesos que pueden ser ejecutados al mismo tiempo (en paralelo) de una manera un tanto asincrónica, con el objeto de incrementar el poder computacional como para que los procesos puedan ser ejecutados más rápidamente o más efectivamente o simplemente para que puedan ser ejecutados.

El problema principal respecto de la concurrencia es tener procesos cooperando para una meta común. Esta cooperación implica alguna forma de sincronización y paso de información.

Un ejemplo de estos mecanismos concurrentes podría ser el estilo de la *memoria dividida* que describimos a continuación.

Memoria dividida



Aquí los procesos P_i tienen su propia memoria local donde ellos pueden ejecutar sus cálculos. Dichas memorias no pueden ser accedidas por otros procesos. A su vez tienen un espacio de memoria común, llamada *memoria dividida*, donde la comunicación entre los procesos es esencialmente asincrónica, y es realizada por lectura y escritura de valores (variables locales u_i, v_i) en el espacio común (x, y, z llamados *variables o registros divididos*, con z un tanto más compleja).

La lectura concurrente de varios procesos no es un problema en general, como sí puede llegar a serlo la escritura concurrente. En el nivel *hardware* esto significaría a lo mejor procedimientos indefinidos o *cortocircuitos*. Por esto es necesario proteger los accesos a las variables divididas con algún mecanismo, como por ejemplo el *programa de semáforos* introducidos por E.W. Dijkstra en 1968. Cada variable o registro dividido está asociado a un *n-semáforo* que no es otra cosa que un registro el cual cuenta el número de veces que una variable puede ser accedida por los procesos al mismo tiempo. En el caso de un *n-semáforo*, hasta n procesos son admitidos (pero no $n + 1$) al mismo tiempo. Por ejemplo en el caso de variables divididas usuales, el registro es inicializado con valor 1; los procesos tratan de acceder sobre la correspondiente variable con el objetivo de conseguirla para quizás modificarla (acciones de lectura o escritura). Cuando esto ocurre el valor del semáforo decrece y decimos que ha sido *cerrado* por el proceso (o sea la variable ha sido bloqueada para otros procesos). Estando ya en valor cero todos los procesos esperan a que la acción de lectura o escritura sea finalizada para acceder a ella. Luego de esto la variable dividida es *cedida* nuevamente incrementándose a 1 el valor del semáforo. En el caso de 1-semáforos decimos que estamos en presencia de un mecanismo de *mutua exclusión* donde cada variable puede ser accedida por un único proceso al mismo tiempo.

Formalmente la acción de cerrar un registro x es denotado por P_x (usando la notación de Dijkstra), y cuando el procedimiento ha finalizado el registro es cedido haciendo acción V_x y esto permitirá a otro proceso adquirir una acción P_x nuevamente. Por ejemplo consideramos la secuencia de acciones

$$P_a \cdot P_b \cdot c^* \cdot (V_a \cdot V_b + V_b \cdot V_a)$$

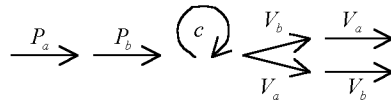
Este es un procedimiento en el cual se cierra el registro a , luego b ; se sigue con alguna serie finita de acciones c , que podrían ser cálculos sobre los registros a y b . Más tarde se liberan a y b en algún orden. Hemos utilizado básicamente tres operaciones para describir el procedimiento:

- es una operación binaria, asociativa para concatenar acciones. Observar que al no ser necesariamente conmutativa, la concatenación de acciones $A \cdot B$ no tiene por qué tener el mismo efecto que el proceso $B \cdot A$.

- * número finito de concatenaciones sobre la misma acción.

- + operación binaria asociativa y conmutativa. Se utiliza para asegurar el cumplimiento de alguno de los procesos que intervienen en la operación.

Esta secuencia de acciones se puede representar a través de un grafo dirigido



Hasta lo hecho aquí, nos podríamos preguntar qué tiene que ver la homotopía con la concurrencia. En un primer momento no parecería existir relación entre esos dos temas. Después de todo la teoría de homotopía clásica trata con espacios topológicos y funciones continuas, mientras que la concurrencia se ocupa típicamente de estructuras discretas. Sin embargo en lo que sigue encontraremos muchas relaciones naturales entre ambos.

Un ejemplo de un *mecanismo de memoria dividida* puede ser una *base de datos distribuída*; conteniendo ítems o registros sobre los cuales los procesos (llamados transacciones) actúan por lectura o escritura cerrando previamente el acceso a otros procesos.

Las transacciones se pueden pensar como listas de acciones P_a y V_a siendo a un registro, por ejemplo:

$$P_a \cdot P_b \cdot V_a \cdot P_c \cdot V_c \cdot V_b$$

donde cada acción P_a debe ser sucedida, en algún momento, por una acción V_a .

Es útil pensar a un proceso de acciones P y V como una secuencia de números reales. El punto importante es asignarles a las acciones P y V el orden heredado de esos números reales. Es conveniente asumir que cada transacción comienza en el número 0 (tiempo local), luego ejecuta todas sus acciones y finalmente finaliza en el número 1 (tiempo local). Por lo tanto cada acción P y V es representada por algún número real en el intervalo $(0, 1)$.

En general si tenemos n transacciones T_1, \dots, T_n podemos representar a cada T_i sobre un eje coordenado de \mathbb{R}^n . El estado del sistema de transacciones (o tiempo local) en cualquier momento es entendido como un punto de \mathbb{R}^n donde su i -ésima coordenada indicará el *tiempo local* de T_i en ese momento. Así tenemos un cubo (que llamaremos cubo de estado) en \mathbb{R}^n dado por

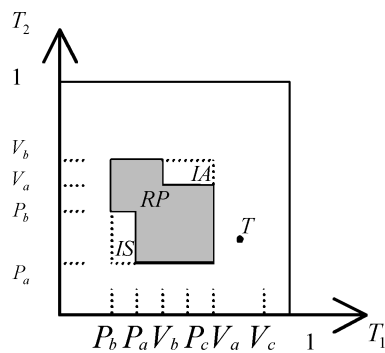
$$\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i \leq 1 \}$$

donde $(0, \dots, 0)$ representará el punto inicial (estado inicial) y el $(1, \dots, 1)$ el punto final (estado final).

Por ejemplo consideremos el sistema de dos transacciones (cuyos registros son 1-semáforos)

$$\begin{aligned} T_1 &= P_b \cdot P_a \cdot V_b \cdot P_c \cdot V_a \cdot V_c \\ T_2 &= P_a \cdot P_b \cdot V_a \cdot V_b \end{aligned}$$

y lo representamos gráficamente a través del llamado *gráfico progresivo o desarrollado* atribuido a Dijkstra



La idea básica es dar una descripción de lo que puede suceder cuando varios procesos están modificando registros compartidos.

El punto de coordenadas (P_b, P_a) representa el estado del sistema donde el proceso T_1 se encuentra por hacer la acción de cerrar el registro b (P_b) para modificarlo y análogamente el proceso T_2 lo está por hacer con el registro a . Sin embargo el punto (P_a, V_a) es un punto no permitido (o prohibido) para el sistema, porque ambos procesos T_1 y T_2 no pueden mantener bloqueado el registro b al mismo tiempo.

Hasta ahora estamos pensando el problema en forma discreta, sin embargo podemos dar un salto y pensarlo en forma continua. Al punto T del gráfico progresivo se lo puede interpretar como un estado en el cual el proceso T_1 modificó a los registros b y a y mantiene bloqueado al registro c , mientras que T_2 se encuentra modificando al registra a .

Los procesos compartidos por ambos procesos delimitan *regiones prohibidas* (RP) o de mutua exclusión del estado donde el sistema no puede ingresar. Observar que el registro c es accedido por T_1 pero no por T_2 (no es compartido) entonces no genera una de estas regiones por razones obvias. En general, en dimensión dos, o sea en un sistema con dos transacciones en paralelo, estas regiones prohibidas se forman por unión de rectángulos cada uno de los cuales corresponde a algún registro compartido. Podría ocurrir que un registro genere más de uno de estos rectángulos si se tratara con un proceso que accede a él más de una vez.

Un *arco de ejecución* es una curva continua, creciente en cada coordenada (pues el tiempo no puede retroceder) que se extiende desde el estado inicial $(0, \dots, 0)$ al estado final $(1, \dots, 1)$ evitando la región prohibida.

El tiempo de evolución del sistema para un determinado procedimiento se representa a través de estos arcos de ejecución donde cada punto de la curva es un estado del sistema. Como mencionamos antes los arcos de ejecución no pueden ingresar a la región prohibida, sin embargo hay arcos que comienzan en $\vec{0}$ y que pueden ingresar a *regiones inseguras* (IS) formadas por *estados terminales* en las que quedarán atrapados no pudiendo alcanzar el estado final. Estos caminos no serán considerados arcos de ejecución y los llamaremos *arcos terminales*. De la misma forma existen *regiones inalcanzables* (IA) que no pueden ser atravesadas por los caminos que comiencen en el estado inicial $\vec{0}$, como se muestra en la figura anterior.

Para completar esta primera parte de definiciones nos quedaría por formalizar la noción de regiones prohibidas para dimensión mayor que dos. Para ello usaremos el orden parcial sobre los vectores de \mathbb{R}^n dado por

$$\vec{x} \leq \vec{y} \text{ sii } x_i \leq y_i \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n$$

Si $\vec{x} < \vec{y}$ la caja con vértices en \vec{x} e \vec{y} es justamente la región

$$\{\vec{v} \in \mathbb{R}^n / \vec{x} < \vec{v} < \vec{y}\}$$

Supongamos que tenemos n transacciones T_1, \dots, T_n y que a es un registro el cual es accedido por algún subconjunto de transacciones cuyos subíndices forman el conjunto $S \subseteq \{1, \dots, n\}$ donde $p = \text{cardinal}(S) \geq 2$.

Para cada par $i, j \in S \quad i \neq j$ consideramos la caja con vértices \vec{x} e \vec{y} donde

$$x_k = \begin{cases} P_a & k = i, j \\ 0 & k \neq i, j \end{cases} \quad y_k = \begin{cases} V_a & k = i, j \\ 1 & k \neq i, j \end{cases}$$

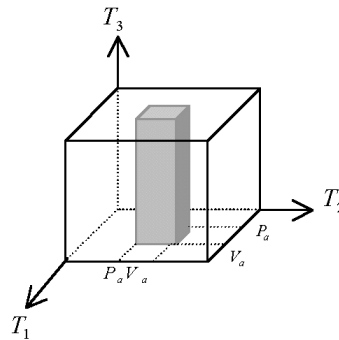
Claramente $\vec{x} < \vec{y}$ pues ninguna transacción puede liberar su cierre (V_a) sin antes adquirirlo (P_a). La región prohibida generada por el registro a es la unión de tales cajas obtenidas de todas las posibles elecciones de distintos $i, j \in S$. Hay $\frac{p \cdot (p-1)}{2}$ cajas.

Ejemplos

1- Supongamos que tenemos tres transacciones T_1, T_2, T_3 y T_1, T_2 son los únicos procesos que acceden al registro a . Luego $S = \{1, 2\}$. La caja con vértices

$$\vec{x} = (P_a, P_a, 0) \quad , \quad \vec{y} = (V_a, V_a, 1)$$

será la región prohibida correspondiente al registro a .



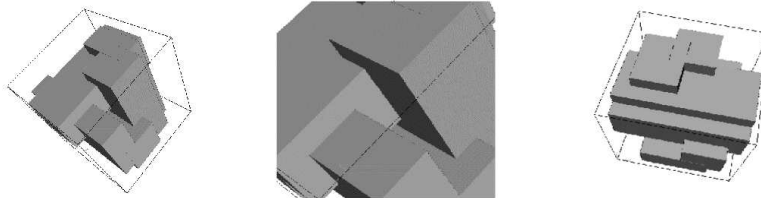
2- Consideremos un conocido sistema de transacciones dado por Lipsi y Papadimitriou.

$$T_1 = P_x \cdot P_y \cdot P_z \cdot V_x \cdot P_w \cdot V_z \cdot V_y \cdot V_w$$

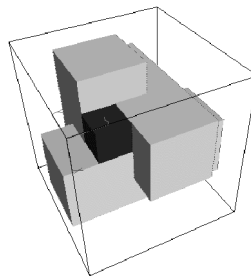
$$T_2 = P_u \cdot P_v \cdot P_x \cdot V_u \cdot P_z \cdot V_v \cdot V_x \cdot V_z$$

$$T_3 = P_y \cdot P_w \cdot V_y \cdot P_u \cdot V_w \cdot P_v \cdot V_u \cdot V_v$$

con el siguiente gráfico desarrollado



3- La siguiente figura representa la región prohibida y la región insegura de un sistema de transacciones con $n = 3$

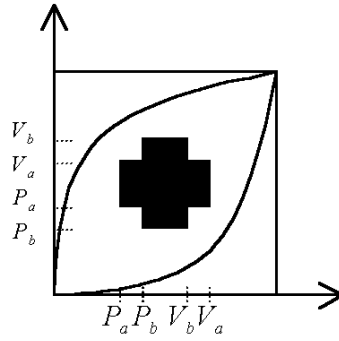


A partir de este momento comencemos a estudiar los distintos arcos de ejecución o caminos dirigidos que pueden desarrollarse en distintos sistemas de transacciones. Para ello estudiaremos tres nuevos ejemplos

4-

$$T_1 = P_a \cdot P_b \cdot V_b \cdot V_a$$

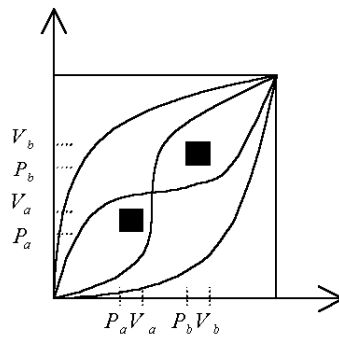
$$T_2 = P_b \cdot P_a \cdot V_a \cdot V_b$$



5-

$$T_1 = P_a \cdot V_a \cdot P_b \cdot V_b$$

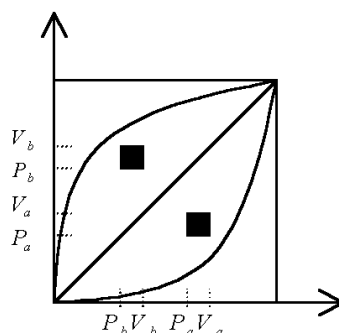
$$T_2 = P_a \cdot V_a \cdot P_b \cdot V_b$$



6-

$$T_1 = P_b \cdot V_b \cdot P_a \cdot V_a$$

$$T_2 = P_a \cdot V_a \cdot P_b \cdot V_b$$



Empecemos con el sistema (4). Todos los arcos de ejecución que pasan por sobre la región prohibida son equivalentes en algún sentido, dado que ellos están todos caracterizados por el hecho que T_2 consigue a los registros a y b antes que T_1 . Similarmente todos los caminos por debajo de la región prohibida se caracterizan por el hecho que T_1 consigue a a y a b antes que T_2 . Hay básicamente dos clases de arcos de ejecución, y en cada una de ellas las características que observamos referida a dichos arcos de ejecución son invariantes bajo alguna noción de deformación u homotopía. Es una clase particular de homotopía en el sentido que preservaría la *dirección del tiempo*.

Las figuras (5) y (6) a pesar de contener dos agujeros cada una, tienen una cantidad diferente de clases de caminos dirigidos; en la primera hay cuatro clases mientras que en la segunda hay tres.

Los técnicos en base de datos se interesan entre otras cosas por asegurar la consistencia de una base de datos con transacciones múltiples que acceden al mismo registro para varios propósitos. Un camino simple para asegurar tal consistencia es forzar a las transacciones a ejecutarse en serie; una después de otra. El truco es permitir algún nivel de concurrencia sin comprometer la consistencia.

Una ejecución particular de un conjunto de transacciones se llama *serializable* si tiene el *mismo efecto* sobre la base de datos que alguna ejecución en serie de estas transacciones. Un sistema de transacciones se dice que está *a salvo* si todo arco de ejecución no terminal es serializable.

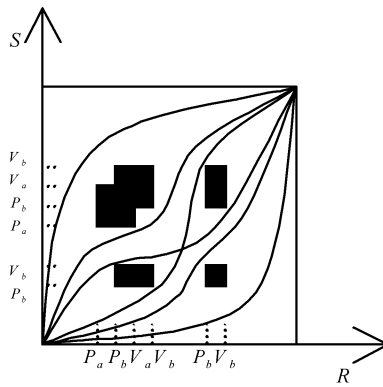
Por ejemplo, consideremos las siguientes transacciones R y S puestas en paralelo; y estudiemos todas las posibles ejecuciones concurrentes a fin de llegar a un resultado.

$R:$ PA, PB $A := B + 1$ VA, VB PB $B := 3$ VB	$S:$ PB $B := B + 2$ VB PA, PB $A := 2 \times B$ VA, VB
--	---

Comenzando con valores iniciales $A = 0$ y $B = 0$ podemos conseguir los siguientes resultados

$R: A = 1$	$R: A = 1$	$R: A = 1$	$S: B = 2$	$S: B = 2$	$S: B = 2$
$R: B = 3$	$S: B = 2$	$S: B = 2$	$R: A = 3$	$R: A = 3$	$S: A = 4$
$S: B = 5$	$R: B = 3$	$S: A = 4$	$S: A = 4$	$R: B = 3$	$R: A = 3$
$S: A = 10$	$S: A = 6$	$R: B = 3$	$R: B = 3$	$S: A = 6$	$R: B = 3$

Solamente el primero y el último son correctos. Es claro que dan el mismo resultado (o sea son equivalentes) a las ejecuciones en serie: R luego S o S luego R . La siguiente figura muestra el gráfico progresivo del sistema.



Parecería desprenderse de estos ejemplos que una condición necesaria para que el sistema sea serializable es pedirle a la región prohibida que sea conexa. Pero desafortunadamente no es una condición suficiente. Consideremos el ejemplo (2) de Lipsky Papadimitriou donde la región prohibida es conexa pero no es simplemente conexa (se puede ver que es homeomorfo a

un toro) pues hay un arco de ejecución atravesando el centro de esta región, y que no podrá ser deformado a una de los bordes exteriores del cubo de estado.

Una solución para lograr que el sistema de transacciones sea *seguro* lo daría el protocolo (regla o acuerdo para fijar procedimientos) de *cierre en dos fases* (CDF) que consiste en que cada transacción debe adquirir todas sus acciones de cierre P_s (primera fase) antes de cederlas (segunda fase). El orden en que estas acciones (P_s, V_s) ocurren en cada fase no importa. Esta estrategia asegura que un programa concurrente tenga el *mismo efecto* que una ejecución serial del programa individual.

Notar que CDF no es una condición necesaria para que el sistema sea seguro. Si volvemos al ejemplo (1) observamos que el sistema es seguro aunque no cumple con CDF, ya que T_1 cierra al registro c después de ceder al registro b . Pero CDF es una condición suficiente de seguridad, o sea cualquier sistema de transacciones que satisface CDF es necesariamente seguro. Más adelante volveremos sobre esto más formalmente.

Un gráfico desarrollado puede ser visto como un espacio topológico. Más concretamente, un subespacio de \mathbb{R}^n que se obtiene quitándole a los cubos las regiones prohibidas. La topología y el orden son necesarios para formalmente definir la noción de arcos de ejecución, los cuales tienen que ser continuos (ya que las ejecuciones no pueden saltar de un punto a otro en el tiempo) y crecientes (pues el tiempo no puede retroceder). Para ello necesitamos un orden parcial permitiéndonos caracterizar la dirección del tiempo, para interpretar el *pasado* y *futuro* de los puntos (los cuales son estados de un sistema concurrente). Comencemos con las definiciones elementales y propiedades de estos espacios para formalizar las ideas intuitivas dadas hasta ahora.

2.2. Funciones dirigidas

Definición 2.2.1 Sea X un espacio topológico.

- Un orden parcial \leq en X es una relación reflexiva, antisimétrica y transitiva. Decimos en este caso que X está parcialmente ordenado.
- Un orden parcial local en X es un cubrimiento \mathcal{U} de X por abiertos parcialmente ordenados (U, \leq_U) tales que para todo (U, \leq_U) y (V, \leq_V) en \mathcal{U} vale que:

$$\forall x, y \in U \cap V : x \leq_U y \Leftrightarrow x \leq_V y$$

En este caso, X se dice localmente parcialmente ordenado.

Escribiremos $x < y$ para indicar $x \leq y$ y $x \neq y$

Ejemplo La esfera $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}\}$ tiene un orden parcial local dado por $U_1 = \{e^{i\theta} \in S^1 / 0 < \theta < 2\pi\}$ y $U_2 = \{e^{i\theta} \in S^1 / \pi < \theta < 3\pi\}$ ambos parcialmente ordenados por el orden de θ .

Definición 2.2.2 Sean (X, \mathcal{U}) y (Y, \mathcal{V}) espacios localmente parcialmente ordenados.

- Un refinamiento de un orden parcial local $(\mathcal{U}, \{\leq_U\})$ sobre X consiste de un refinamiento \mathcal{U}' del cubrimiento \mathcal{U} con órdenes parciales tales que para todo

$$U' \subseteq U, U' \in \mathcal{U}', U \in \mathcal{U} \quad y \quad x, y \in U' : x \leq_{U'} y \Leftrightarrow x \leq_U y$$

- Una función continua $f : X \rightarrow Y$ se llama dirigida si existen refinamientos \mathcal{U}' de \mathcal{U} y \mathcal{V}' de \mathcal{V} tales que:

$$\forall U' \in \mathcal{U}', V' \in \mathcal{V}' \text{ si } x, y \in U' \cap f^{-1}(V') : x \leq_{U'} y \Rightarrow f(x) \leq_{V'} f(y)$$

- Un camino dirigido en X es una función dirigida $f : I \rightarrow X$ donde I es considerado como un espacio parcialmente ordenado con la topología usual y el orden natural. Es decir,

$$\forall V \in \mathcal{V} \quad t_1, t_2 \in f^{-1}(V) : t_1 \leq t_2 \Rightarrow f(t_1) \leq_V f(t_2)$$

- Sean $f_1, f_2 : I \rightarrow X$ caminos dirigidos con $f_1(1) = f_2(0)$. La concatenación de f_1 con f_2 , que notaremos $f_1 * f_2 : I \rightarrow X$ se define como:

$$f_1 * f_2 = \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_2(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Observar que $f_1 * f_2$ es continua.

Proposición 2.2.3 Sea X un espacio topológico parcialmente ordenado, entonces $f_1 * f_2 : I \rightarrow X$ es un camino dirigido.

Demostración Hay que ver que si $t_1, t_2 \in I$ tales que $t_1 \leq t_2$ entonces $f_1 * f_2(t_1) \leq f_1 * f_2(t_2)$. Si $t_1, t_2 \leq \frac{1}{2}$ entonces

$$f_1 * f_2(t_1) = f_1(2t_1) \leq f_1(2t_2) = f_1 * f_2(t_2)$$

pues f_1 es un camino dirigido. Análogamente para $t_1, t_2 \geq \frac{1}{2}$. Si $t_1 \leq \frac{1}{2}$ y $t_2 \geq \frac{1}{2}$ entonces

$$f_1 * f_2(t_1) = f_1(2t_1) \leq f_1(1) = f_2(0) \leq f_2(2t_2 - 1) = f_1 * f_2(t_2) \quad \square$$

Definición 2.2.4 Sea X un espacio localmente parcialmente ordenado. Definimos una relación \prec en X de la siguiente forma: $x \prec y$ si hay un camino dirigido de x a y en X , o sea si existe $f : I \rightarrow X$ continua y dirigida tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$.

Lema 2.2.5 Si X tiene un orden parcial \leq , entonces \prec es un orden parcial.

Demostración Claramente es reflexiva pues $x \prec x$ tomando el camino dirigido que vale constantemente x . Notemos que si $x \prec y$ entonces existe un camino dirigido $f : I \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Como $0 \leq 1$ y el orden en X es global entonces $f(0) \leq f(1)$, o sea $x \leq y$. Luego \prec es antisimétrica pues si $x \prec y$ e $y \prec x$ entonces $x \leq y$ y $y \leq x$, y por lo tanto $x = y$.

Veamos transitividad, o sea si $x \prec y$ e $y \prec z$ entonces se quiere ver que $x \prec z$. Existen caminos dirigidos $f_1 : I \rightarrow X$ y $f_2 : I \rightarrow X$ tales que $f_1(0) = x$, $f_1(1) = y$, $f_2(0) = y$ y $f_2(1) = z$. Consideremos $f_1 * f_2 : I \rightarrow X$. Luego $f_1 * f_2(0) = f_1(0) = x$ y $f_1 * f_2(1) = f_1(1) = z$. \square

Observación 2.2.6 Si X es localmente parcialmente ordenado, la relación \prec es aún transitiva pero no es necesariamente antisimétrica. Por ejemplo, la esfera $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}\}$ tiene un orden parcial local dado por

$$U_1 = \{e^{i\theta} \in S^1 / 0 < \theta < 2\pi\} \text{ y } U_2 = \{e^{i\theta} \in S^1 / \pi < \theta < 3\pi\}$$

ambos parcialmente ordenados por el orden de θ . Sea

$f_1 : I \rightarrow S^1$ tal que $f_1(0) = e^{i\frac{1}{2}\pi}$ y $f_1(1) = e^{i\frac{3}{2}\pi}$. Luego $\text{Im}f_1 \subseteq U_1$

$f_2 : I \rightarrow S^1$ tal que $f_2(0) = e^{i\frac{3}{2}\pi}$ y $f_2(1) = e^{i\frac{5}{2}\pi} = e^{i\frac{1}{2}\pi}$. Luego $\text{Im}f_2 \subseteq U_2$

Resulta que $e^{i\frac{1}{2}\pi} \prec e^{i\frac{3}{2}\pi}$ y $e^{i\frac{3}{2}\pi} \prec e^{i\frac{1}{2}\pi}$ pero $e^{i\frac{3}{2}\pi} \neq e^{i\frac{1}{2}\pi}$. \square

Definición 2.2.7 Sea X un espacio topológico parcialmente ordenado, $x, y \in X$ y $S \subseteq X$ un conjunto.

- Los conjuntos

$$\mathcal{J}^+(x) = \{y \in X / x \prec y\} \quad y \quad \mathcal{J}^-(x) = \{y \in X / y \prec x\}$$

se llaman futuro y pasado de x respectivamente.

- Sean $\mathcal{J}^+(S) = \bigcup_{x \in S} \mathcal{J}^+(x)$ y $\mathcal{J}^-(S) = \bigcup_{x \in S} \mathcal{J}^-(x)$

que llamaremos respectivamente el futuro y pasado de S .

Definición 2.2.8 Un punto $x \in X$ se llama punto inicial si $\mathcal{J}^-(x) = \{x\}$, y x se llama final si $\mathcal{J}^+(x) = \{x\}$.

Los puntos iniciales y finales son mínimos y máximos locales respectivamente con respecto al orden \prec . La idea es que un punto inicial es “inalcanzable” desde cualquier otro punto inicial.

Definición 2.2.9 Un camino dirigido $\alpha : I \rightarrow X$ se llama inextendible si no hay ningún camino dirigido $\beta : I \rightarrow X$ tal que $\alpha(I) \subsetneq \beta(I)$

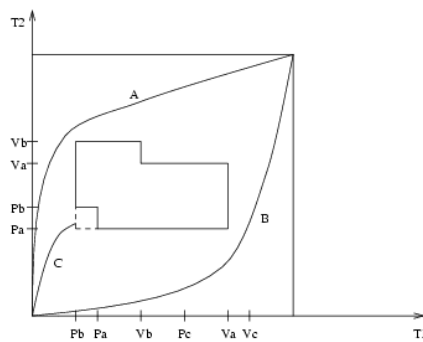
Como la imagen de los caminos dirigidos son compactos, un camino dirigido α es inextendible si y sólo si comienza en un punto inicial y termina en un punto final. Notaremos con $\vec{P}_1(X)$ al conjunto de todos los caminos inextendibles en X .

Ejemplo

Un gráfico progresivo o desarrollado es un subespacio de \mathbb{R}^n construido a partir del cubo unitario (cubo de estado) quitándoles las regiones prohibidas. El orden parcial (global) \leq es el definido anteriormente, o sea si $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq n$$

Los arcos de ejecución no son otra cosa que los caminos dirigidos inextendibles con punto inicial en $(0, \dots, 0)$ y punto final en $(1, \dots, 1)$. Un punto terminal, sin embargo, es un punto final, el cual no está entre los puntos finales que representan resultados exitosos en los cálculos. Por ejemplo en el siguiente gráfico desarrollado



se observan dos arcos de ejecución y un tercer camino (que no es arco de ejecución) que está entrando en la región insegura para finalizar en un punto terminal.

Retomemos el problema de la serialización y la aplicación del protocolo CDF. Este problema fue analizado por Guanawardena [Gua] para programas con 1-semáforos. El objetivo en un sistema de transacciones múltiples es permitir un cierto nivel de concurrencia sin comprometer la consistencia de la base de datos. Recordemos que una ejecución particular de un conjunto de transacciones se dice serializable si tiene el “mismo efecto” sobre la base de datos que alguna ejecución en serie de las mismas transacciones.

Es importante aclarar qué significa que dos ejecuciones tengan el “mismo efecto”. Supongamos que tenemos un registro a con valor inicial 0 . Tomemos dos transacciones, T_1 que es la operación $a \mapsto a + 1$ mientras que T_2 es la operación $a \mapsto a^2 + 1$. Hacer T_1 y luego T_2 ó T_2 y luego T_1 ciertamente dan el mismo resultado 2 sin importar en qué orden se aplicaron las transacciones. Sin embargo esto es un accidente del estado particular de la base de datos y de las operaciones particulares en las transacciones. El significado real de “tener el mismo efecto que” es que la base de datos debería

ser la misma (luego de producidas la ejecuciones) independientemente de su estado inicial y de las operaciones particulares en las transacciones.

CDF (cierre en dos faces) es una regla para asegurar *seguridad* al sistema, o sea que toda ejecución *no terminal* sea serializable. Consiste en que todas las acciones P (no importa el orden) se produzcan antes de todas las acciones V (tampoco importa el orden interno) en cada una de las transacciones del sistema (todos los registros son 1-semáforos). Ésto asegura una región común entre todas las regiones prohibidas de cada registro. Si consideramos la caja $C = [P_{s_1}, V_{s_1}] \times \dots \times [P_{s_n}, V_{s_n}]$ donde P_{s_i} es la última acción P de la transacción T_i y V_{s_i} es la primera acción V de T_i . Se tiene que C está contenida en la región prohibida que genera cada registro. El conjunto C tiene la siguiente propiedad: supongamos que $\vec{u} \in C$ y \vec{v} es un punto de la región prohibida. Luego \vec{u} y \vec{v} pertenecen a la misma caja de la región prohibida, y por ser convexa, el segmento que los une está contenido en dicha caja. La región prohibida no es necesariamente convexa pero tiene esta propiedad, si se cumple la regla CDF.

Queremos ver en una primera etapa que dos arcos de ejecución homotópicos deben tener exáctamente el “mismo efecto” sobre la base de datos, y en una segunda etapa que ambos deben ser serializables.

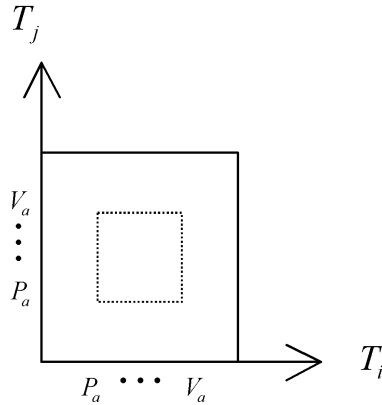
Supongamos que tenemos dos arcos de ejecución $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ homotópicos (X es el gráfico desarrollado), y sea $H : I \times I \rightarrow X$ una homotopía tal que

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \alpha(x) \\ H(x, 1) &= \beta(x) \\ H(0, t) &= \vec{0} \\ H(1, t) &= \vec{1} \end{aligned}$$

Como $H(I \times I)$ no interseca la región prohibida queremos ver que es imposible alterar el orden en el cual las dos ejecuciones acceden a los registros compartidos en cada transacción. Ésto es lo que se entiende cuando afirmamos que ambas ejecuciones deben tener el mismo efecto sobre la base de datos.

Tomemos dos transacciones T_i y T_j que acceden al registro a . Asumimos sin pérdida de generalidad que $i < j$. Consideremos la proyección $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $p(\vec{x}) = (x_i, x_j)$. Observar que p es monótona. Los dos arcos de ejecución se proyectan a dos arcos (también crecientes) desde $(0, 0)$ al $(1, 1)$. La homotopía original de \mathbb{R}^n se proyecta a una homotopía en \mathbb{R}^2 . El registro a sobre las transacciones T_i y T_j genera una región prohibida en \mathbb{R}^2 que tiene esquinas (P_a, P_a) y (V_a, V_a) (si las transacciones acceden

al registro a una sola vez, en caso contrario se trataría de una unión de rectángulos que volvería a dar un rectángulo por estar en la situación CDF, y el problema se resolvería de manera similar).



La homotopía (mejor dicho $p(H(I \times I))$) debe evitar el rectángulo de vértices (P_a, P_a) , (V_a, V_a) , porque en caso contrario la homotopía original debería intersecar la caja de vértices

$$(0, \dots, P_a, 0, \dots, 0, P_a, \dots, 0), \quad (1, \dots, V_a, 1, \dots, 1, V_a, \dots, 1)$$

Luego ambos arcos deben desarrollarse del mismo lado de la caja. Se sigue que ambas ejecuciones acceden al registro a en el mismo orden en cada transacción, o sea T_i cierra al registro a primero en ambas ejecuciones (ésto es, las curvas se desarrollan por abajo y a la derecha en ambas ejecuciones); o T_j lo cierra primero en ambas ejecuciones (si los arcos se encuentran arriba y a la izquierda del rectángulo).

Como ésto vale para todos los pares de transacciones y todos los registros compartidos, la afirmación resulta correcta, o sea en un programa compuesto de 1-semáforos que cumple con la regla CDF dos arcos de ejecución homotópicos producen el mismo efecto. Más aún, veamos ahora que son serializables.

Sabemos que un camino es serializable si tiene el mismo efecto que alguna ejecución en serie de las transacciones. Una ejecución serial corresponde a recorrer el borde unidimensional del cubo, ejecutando una transacción completamente antes de pasar a la otra.

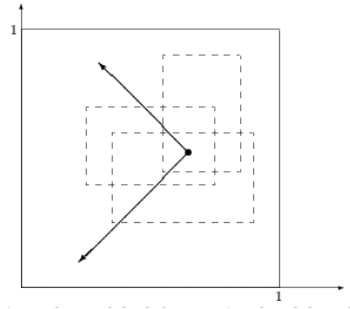
Sea $c = (c_1, \dots, c_n) \in C = [P_{s_1}, V_{s_1}] \times \dots \times [P_{s_n}, V_{s_n}]$, entonces debe pertenecer a la región prohibida generada por cada registro. Consideremos una proyección radial desde ese punto hacia el borde del cubo unidad pasando por el arco de ejecución (que podemos llamar $\alpha(t)$). Esta manera de proyectar proporciona una homotopía que mantiene fijos los puntos iniciales y finales de $\alpha(t)$. Observar que esta homotopía (o mejor dicho su imagen) no cruza la región prohibida debido a que, a pesar de no ser convexa tiene la propiedad descrita en párrafos anteriores.

El primer problema que encontramos con este procedimiento es que el camino proyectado sobre las caras del cubo no tiene por qué ser creciente, pero la deformación todavía no ha terminado.

Cada cara del cubo de estado corresponde a un sistema de transacciones obtenido del sistema original T_1, \dots, T_n omitiendo una de ellas, por ejemplo T_k . Consideremos los puntos

$$(c_1, \dots, c_{k-1}, 0, c_{k+1}, \dots, c_n) \quad \text{y} \quad (c_1, \dots, c_{k-1}, 1, c_{k+1}, \dots, c_n)$$

que se encuentran, cada una, en el “centro” de la región prohibida generada sobre la cara del cubo que contiene los puntos con $x_k = 0$ y $x_k = 1$ respectivamente. Repetimos la proyección radial sobre ambos lados y esto lo hacemos además, para todas las caras de dimensión $n - 1$. Procedemos en forma iterada, llegando a las caras de dimensión 2 correspondiendo a un par de transacciones del sistema original.



El último arco proyectado se mueve sobre los bordes del cubo desde $(0, \dots, 0)$ hasta $(1, \dots, 1)$ pero no necesariamente en forma creciente, pudiendo retroceder en una cantidad finita de pasos (porque hubo finitas proyecciones). Más aún, comenzando en $(0, \dots, 0)$ el arco proyectado (final), pudo haber recorrido algún segmento en algún borde del cubo para luego retroceder y seguir por otro hasta completarlo (necesariamente porque debe llegar al $(1, \dots, 1)$).

Finalmente a través de una cantidad finita de homotopías (que mantienen extremos fijos) se pueden “quitar” todos estos recorridos dobles para quedarnos al final con un arco que recorre en forma creciente n bordes del cubo de estado.

Veamos más precisamente esto último, o sea por qué podemos asegurar que el arco resultante sea creciente. Debido a qué podemos garantizar que la curva “no retrocede” (recordar cómo se encuentran ordenados los puntos del cubo) un borde hasta completarlo y seguir por otro distinto.

Sea $\alpha(t)$ el arco de ejecución original y $\omega(t)$ la curva que resulta luego de la última proyección radial. Elegimos una proyección $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, por ejemplo, $p(x) = x_i$ donde $x = (x_1, \dots, x_n)$. Esta proyección satisface la siguiente propiedad: si y es la proyección radial de x desde u , los tres puntos están alineados. Como p es lineal y preserva la orientación $p(y)$, $p(x)$ y $p(u)$ se encuentran en la misma línea y con el mismo orden.

Si pensamos por un instante cómo fueron elegidos los centros en cada proyección radial entonces vale lo siguiente

$$p(\alpha(t)) \leq c_i \Rightarrow p(\omega(t)) \leq p(\alpha(t)) \quad \text{y} \quad p(\alpha(t)) \geq c_i \Rightarrow p(\omega(t)) \geq p(\alpha(t))$$

Interpretemos esto: $p(\omega(t))$ puede oscilar un intervalo finito de tiempo en $[0, c_i]$. Sin embargo una vez que lo haya pasado nunca más regresará debido a la propiedad anterior y al hecho que $\alpha(t)$ es creciente. Es decir como $\alpha(t)$ es monótona $p(\alpha(t))$ supera a c_i en algún momento y por lo tanto debe hacerlo $p(\omega(t))$, para llegar finalmente a 1 (pues $\omega(t)$ llega a $(1, \dots, 1)$). Este argumento se repite para todo i , $1 \leq i \leq n$.

2.3. Homotopía dirigida versus homotopía

Ahora queremos formalizar la noción de deformación de caminos dirigidos de la que hablamos en la introducción, esto es la homotopía dirigida. Tendremos una nueva noción de conexión y componentes conexas pues ahora “el tiempo corre”. Habrá una interacción entre el orden parcial y la topología.

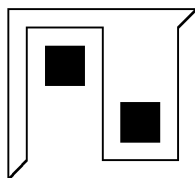
Definición 2.3.1 Sea (X, \leq) un espacio topológico parcialmente ordenado.

- Una homotopía dirigida o di-homotopía $H : I \times I \rightarrow X$ es una función continua tal que cada función parcial $H_t(s) = H(t, s)$, $H_t : I \rightarrow X$, es un camino dirigido inextensible.

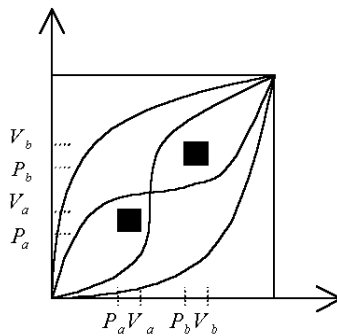
- Dos caminos dirigidos inextendibles $\alpha, \beta : I \rightarrow X$ con los mismos puntos iniciales y finales son homotópicamente dirigidos si existe una homotopía dirigida $H : I \times I \rightarrow X$ relativa a los extremos con $H_0 = \alpha$ y $H_1 = \beta$. Escribiremos $\alpha \rightsquigarrow \beta$

Observar que la homotopía dirigida es claramente una relación de equivalencia, pues se deduce del hecho que una homotopía común lo es. Notaremos con $\vec{\pi}_1(X)$ al conjunto de las clases homotópicamente dirigidas de caminos dirigidos inextendibles en X .

1- La siguiente figura contenida en \mathbb{R}^2 , (el cubo unidad sin los cubos negros), con el orden definido anteriormente muestra un ejemplo de un camino que no puede ser homotópico a ninguno dirigido



2- El siguiente gráfico desarrollado consta de cuatro clases homotópicamente dirigidas.



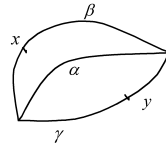
Definición 2.3.2 Sea $\alpha : I \rightarrow X$ un camino dirigido inextendible.

- La historia homotópica de α está definida como

$h_\alpha = \{x \in X \mid \text{existe un camino inextendible } \beta \text{ que pasa por } x \text{ y } \alpha \rightsquigarrow \beta\}$

- Dos puntos son históricamente homotópicamente equivalentes si

$$x \in h_\alpha \Leftrightarrow y \in h_\alpha \quad \forall \alpha \in \vec{P}_1(X)$$



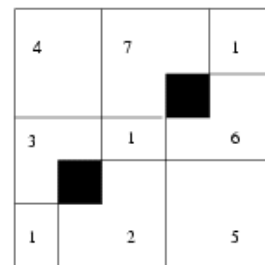
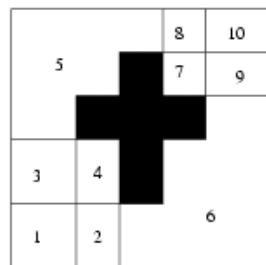
De la definición se desprende que x, y son históricamente homotópicamente equivalentes si y sólo si cada camino inextendible que pasa por x es homotópicamente dirigido a uno que pasa por y y cada camino inextendible que pasa por y es homotópicamente dirigido a uno que pasa por x .

Observación 2.3.3 *Camino inextendibles en la misma clase de homotopía dirigida tienen la misma historia homotópica.*

Es claro que “ser históricamente homotópicamente equivalente” define una relación de equivalencia, y que por lo tanto genera una partición de X formada por clases de equivalencia históricamente homotópicas.

Definición 2.3.4 *Las componentes di-conexas de X consisten de las componentes conexas (en el sentido clásico) de las clases de equivalencia históricamente homotópicas de X .*

Ejemplos Las figuras siguientes representan dos procesos T_1 y T_2 en paralelo cuyos registros son 1–semáforos.

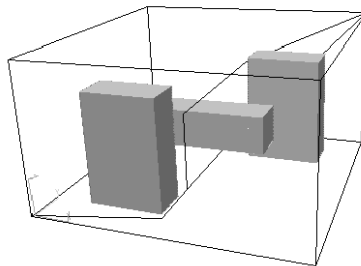


En la primer figura hay diez componentes (clases) históricamente homotópicas. Todas ellas son conexas, con lo cual son diez componentes di-conexas. La segunda figura tiene siete componentes históricamente homotópicas. Una de ellas se descompone en tres componentes conexas. En total hay diez componentes di-conexas.

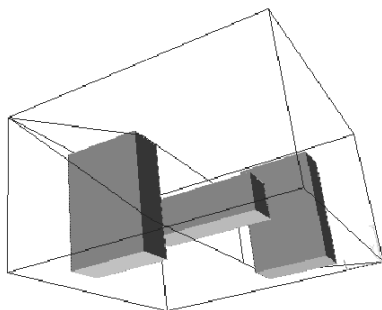
En los programas que involucran solamente 1-semáforos la noción de homotopía dirigida y homotopía de caminos dirigidos son equivalentes. Cuando el programa involucra n -semáforos para $n \geq 2$ la noción de di-homotopía es má fina como se observa en el siguiente ejemplo.

2- Aquí se tiene un conocido ejemplo de dos caminos dirigidos que son homotópicos pero no homotópicamente dirigidos, donde x, y son 1-semáforos y z es un 2-semáforo.

$$\begin{aligned}
 T_1 &= P_x \cdot P_z \cdot V_x \cdot P_y \cdot V_z \cdot V_y \\
 T_2 &= P_x \cdot V_x \cdot P_z \cdot V_z \cdot P_y \cdot V_y \\
 T_3 &= P_z \cdot V_z
 \end{aligned}$$



La siguiente es una vista del lado opuesto



Por lo tanto para este tipo de problemas se debe incorporar la noción de homotopía dirigida. La teoría de di-homotopía comenzó a desarrollarse en los últimos años y hasta el momento se utiliza entre otras cosas para demostrar de manera más formal y general (para programas que involucran n -semáforos con $n \geq 2$) el resultado de Guanawardena [Gua] visto en esta sección. Una demostración para ese resultado mucho más amplio se puede encontrar en [FGR].

Bibliografía

- [Mun] Munkres, J. *Topology*, Prentice Hall (1975)
- [Spa] Spanier, E.J., *Algebraic Topology*, McGraw Hill, (1996)
- [Swi] Switzer, R. *Algebraic Topology: Homology and Homotopy*, Springer-Verlag (1975)
- [Hat] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press (2002).
Electrónicamente disponible en <http://math.cornell.edu/~hatcher/>
- [KPt] Kamps, K.H., Puppe, D. y tom Dieck, T. *Homotopietheorie*, Springer-Verlag (1970)
- [Gua] Guanawardena, J., *Homotopy and Concurrency*, Bulletin of the ESTCS, 54, (94), 184-193
- [FGR] Fajstrup, L., Goubault, E y Raussen, M., *Algebraic topology and concurrency*, Tech. Report R-99-2008, Department of Mathematical Sciences, Aalborg University (1999)
- [Gou] Goubault, E., *Some Geometric Perspectives in concurrency theory*, Homology, Homotopy and Applications (2001), 1-36
- [GR] Goubault, E. y Raussen, M., *Dihomotopy as a tool in state space analysis*, disponible en <http://www.di.ens.fr/~goubault>
- [GG] Gaucher, P. y Goubault, E., *Topological Deformation of Higher Dimensional Automata*, ar Xiv: math. AT/0107060 v2 (2002)
- [Fa] Fajstrup, L., *Loops, ditopology and deadlocks*, Mathematical Structures in Computer Science 10 (2000)
- [GFR] Goubault, E., Fajstrup, L. y Raussen, M., *Detecting deadlocks in concurrent systems*, proceedings of the 9th International Conference on Concurrency Theory (1998)

- [Gau] Gaucher, P., *From concurrency to algebraic topology*, electronic notes in Computer Science 39 (2000)
- [Go] Goubault, E., *Geometry and Concurrency: A User's guide*, Mathematical Structures in Computer Science (2000)