UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Muestreo Uniforme en Espacios Invariantes por Traslaciones

Trabajo de Seminario de la Licenciatura en Matemática
por
Eduardo Romero

Director: Dr. Carlos Cabrelli

Abril de 2006

a Pelo,
por lo que fuiste
y por lo que seguís siendo adentro mío.

Agradecimientos

Quiero agradecer especialmente a mi director Carlos Cabrelli por su constante ayuda, confianza, dedicación y por todo lo que aprendí de él. También al grupo de Análisis Real y Armónico de esta facultad por haber contribuido en mi aprendizaje y a Pablo de Nápoli por su ayuda con el LaTex.

Agradezco a todos los docentes de esta casa de estudios que me estimularon para que absorbiera algo de sus conocimientos a lo largo de esta carrera que disfruté tanto, y a la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad de Buenos Aires por el apoyo económico a través de la Beca Estímulo.

Aprovecho esta oportunidad para agradecer también a las personas que han sido y son mi apoyo afectivo. A mi mamá, Silvia Duhau, por el amor incondicional y la libertad, a mi papá, Edgardo Romero, por todo el apoyo y el amor que me brinda, y a mi hermano Abeto por ser mi compañía inseparable en la vida. Por ser mis cables a tierra y darme tanto afecto, a Nico Ortiz de Elguea, Marcelo Oglietti, a la familia Acosta, al Negro Gort y a toda la Champa-pandilla. A Dani Roisman por entenderme con tanta profundidad y por hacerme tanto bien.

A todos los que me acompañaron a lo largo de la carrera en la cursada de materias. En especial a José Luis, Vicky, Lean, Lau, Pablo, Magui, Isa, Martín, Carlos, Maia y Pablo de Nápoli, gracias por su amistad, por tantos metegoles compartidos y por la ayuda en los momentos difíciles. A los que recuerdo con cariño, Juli, María de las Lauras, Lucas, Mariela, Caro, Paula, Gustavo, Cynthia, María y Darío. Y también a Cynthia, Sol, Robert, Lucianita, Lucía, Bea y Tata.

Por último, por protegerme, a mis angelitos de la guarda, Pelo, Lucho Acosta y abuelas Angelita y Elvira.

Resumen

El teorema de muestreo uniforme de Shannon nos dice cómo recuperar una función de banda limitada a partir de los valores que toma en un reticulado uniforme. Más precisamente, el subespacio formado por las funciones de banda limitada posee una base ortonormal formada por traslaciones de una única función, conocida como seno cardinal. Para cada función de banda limitada, los coeficientes de la expansión en esta base corresponden a los valores que toma en el reticulado.

En este trabajo estudiamos condiciones necesarias y/o suficientes para obtener resultados similares al teorema de Shannon en espacios invariantes por traslaciones (EIT) vía la transformada de Zak. Se muestran resultados conocidos para EIT principales y se extienden algunos de estos al caso de EIT finitamente generados abarcando también de manera unificada el sobremuestreo uniforme. Se dán condiciones suficientes para que haya sobremuestro en EIT finitamente generados y también se tocan algunos temas relacionados, como el error de reconstrucción y propiedades de las funciones que pertenecen a espacios de muestreo.

Palabras Clave: banda limitada, muestreo uniforme, teorema de Shannon, transformada de Zak, espacios invariantes por traslaciones, marco, base ortonormal.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Presentación

El *muestreo* o *sampling* de una función (señal o imagen) consiste en el resultado obtenido al evaluar a la misma en un subconjunto X de su dominio, generalmente discreto. A este subconjunto lo llamamos *conjunto de muestreo*. Para que este procedimiento tenga sentido se suele trabajar en espacios de funciones con propiedades determinadas (por ejemplo, continuidad de las funciones). Esquemáticamente, si $f \in \mathcal{F}$, $f \mapsto \{f(x)\}_{x \in X}$.

Para el almacenamiento y procesamiento digital de funciones, imágenes o señales se utilizan versiones discretas de las mismas que en general se asume que son el resultado de un muestreo o sampling. Lo que se busca es poder reconstruir la función original a partir de su muestreo. Con este objetivo, la primer tarea es establecer un contexto teórico de trabajo, que se traduce en suposiciones sobre la función y sobre el subconjunto X, para que evaluar sea un proceso estable y donde se pueda expresar con claridad qué entendemos por reconstruir la función a partir de su muestreo. Algunas preguntas que surgen naturalmente en este contexto son las siguientes. Por un lado, si se pueden caracterizar los conjuntos que, vía el muestreo, determinan unívocamente cualquier función del espacio $\mathcal{F}$. También nos interesa saber cuándo una función puede ser reconstruida de una manera estable a partir de su muestreo en un conjunto.

En esta dirección, el teorema de Shannon sobre muestreo regular para funciones de banda limitada da una respuesta a estas cuestiones.

Teorema 1.1.1 *Sea* $PW_\sigma := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \mathrm{sop}\widehat{f} \subseteq [-\frac{\sigma}{2}, \frac{\sigma}{2}]\}$.
Entonces $\{\mathrm{senc}(\sigma \cdot -k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de PW, donde* $\mathrm{senc}(x) = \frac{\mathrm{sen}(\pi x)}{\pi x}$.

Más aún, para toda $f \in PW_\sigma$ *se tiene que*
$< f, \operatorname{senc}(\sigma \cdot -k) >= \sigma f\left(\frac{k}{\sigma}\right)$ *y*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma f\left(\frac{k}{\sigma}\right) \operatorname{senc}(\sigma x - k),$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R})$ *y uniforme sobre* $\mathbb{R}$*.*

A este tipo de expansiones se las suele llamar *series cardinales*.

Al espacio PW_1 se lo denota simplemente PW y se lo llama espacio de Paley-Wiener.

Este resultado, ampliamente difundido en muchas ramas de la ingeniería, de la física e incluso de la meteorología y de la oceanografía, es muy utilizado hoy en día. También ha servido sin lugar a duda como guía e inspiración en toda el área de la Teoría del Muestreo (Sampling Theory), lo que se verá reflejado en este escrito. Es por esto que existe una gran cantidad de artículos y libros donde se comentan la historia y las muchísimas generalizaciones que se han podido obtener de este teorema, por ejemplo, el artículo de Higgins o el de Jerri ([Hig85, Jer77]) y el libro de Zayed ([Zai93]).

Un hecho que resulta curioso es que lleva el nombre de Shannon porque éste fue el que lo hizo popular en la teoría de comunicaciones con su artículo [Sha49], aunque no fue el primero en probarlo. De hecho, versiones similares al resultado aparecen de manera implícita en el trabajo de una gran cantidad de matemáticos como Borel o Poisson a principios del siglo XX. Pero es E. T. Whittaker por el año 1915 el que primero da una prueba de dicho teorema (en una versión más general), y en un trabajo de su segundo hijo, J. M. Whittaker, que data de 1935, a la serie se la llama serie cardinal por primera vez de manera explícita . Paralelamente, en Rusia es Kotel'nikov por el año 1933 el que lo introduce en la teoría de comunicaciones y es por eso que en ese país al teorema se lo conoce con este nombre.

Algunas de las generalizaciones del teorema tratan, por ejemplo, sobre series cardinales para funciones de banda limitada que incluyen también el muestreo de derivadas de distintos órdenes de la función; versiones para cuando la función además de ser de banda limitada no posee frecuencias bajas (i.e. $\operatorname{sop}\widehat{f} \subset [a,b] \cup [c,d]$ con $a < b < 0 < c < d$); extensiones a funciones de varias variables; perturbaciones del conjunto de muestreo (vía el teorema de Kadec-1/4); generalizaciones para funciones cuyo dominio es un grupo abeliano topológico localmente compacto arbitrario en lugar de $(\mathbb{R}, +)$, con un análogo para la propiedad de banda limitada; etc. Este último resultado, muy general y aplicable en contextos de lo más variados, es debido a Kluvánek (1965).

El teorema de Shannon y la gran mayoría de sus distintas generalizaciones se aplican a funciones de banda limitada. En la práctica, cuando se trabaja con una función que no posee esta propiedad, lo que se suele hacer es transformar Fourier, truncar la transformada, antitransformar y trabajar con esta nueva función de banda limitada. A este procedimiento se lo llama prefiltrado de la función. Pero esto presenta un problema cuando las frecuencias altas de la función no son despreciables. Imaginemos por ejemplo una función infinitamente diferenciable y de soporte compacto, como su transformada no es de soporte compacto, con el prefiltrado estaríamos perdiendo información valiosa sobre la función. Pero como la función goza de propiedades especiales, es de esperar que vía algún muestreo uniforme podamos reconstruirla de manera exacta, al menos desde un punto de vista teórico.

Por otro lado, la suposición de banda limitada no es realista en muchas aplicaciones y el lento decaimiento del senocardinal dificulta la implementación numérica de este resultado, por ejemplo, cuando se quiere evaluar puntualmente una función reconstruida con este procedimiento. Todo esto hace necesaria la búsqueda de resultados similares pero con funciones interpolantes con características especiales (soporte compacto, suavidad, etc).

El espacio de Paley-Wiener, donde se aplica el teorema de Shannon, resulta ser un espacio invariante por traslaciones enteras (i.e. si $f \in PW$ y $k \in \mathbb{Z}$, entonces $f(\cdot - k) \in PW$). Además se obtiene la siguiente manera de describir al subespacio PW:

$$V(\text{senc}) := \{\textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \text{senc}(\cdot - k) : \{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})\} = PW.$$

Más aún, se puede ver que es el espacio inicial V_0 de un Análisis de Multiresolución que da origen a una base de wavelets conocida como wavelets de Shannon (por su relación con el teorema) donde el seno cardinal no es otra cosa que la función de escala.

Es por esto que resulta natural buscar resultados similares al teorema de Shannon en espacios iniciales de Análisis de Multirresolución, y más en general en espacios invariantes por traslaciones enteras.

En el segundo capítulo de este escrito exponemos resultados conocidos sobre este tema. Se dan condiciones necesarias y suficientes para obtener un resultado similar al teorema de Shannon en espacios invariantes por traslaciones enteras principales (Teorema 2.2.2) (a los espacios que cumplen estas condiciones los llamamos espacios de muestreo uniforme). También se muestran algunos resultados relacionados. Por ejemplo, propiedades de las funciones pertenecientes a espacios de muestreo y también el estudio de lo que más adelante llamaremos error de reconstrucción.

El tercer capítulo, que es la parte original de este trabajo, está separado en dos secciones. La primera sección consiste en la generalización del resultado más importante del segundo capítulo, (i.e. el Teorema 2.2.2) al contexto de espacios invariantes por traslaciones enteras finitamente generados (Teorema 3.1.1). Esta extensión tiene la ventaja de que abarca lo que llamaremos sobremuestreo uniforme, incluso para el caso principal. En la segunda sección se explota el Teorema 3.1.1, dando condiciones suficientes de fácil verificación para su aplicación.

1.2. Definiciones y algunos resultados generales

Aquí se incluyen definiciones y resultados propios del área para facilitar la lectura del texto. En general sólo serán demostrados aquellos que no se encuentren de manera explícita en la literatura, o algunos cuya demostración contribuya de manera fundamental al entendimiento del tema tratado. Usaremos a lo largo de este texto más que nada herramientas del Análisis Real y Funcional. Recomendamos antes repasar la lista de notaciones.

La transformada de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es la usual y será denotada por $\widehat{f}$. Para $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ viene dada por

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle}dx.$$

Como aparecerá bastante en este escrito, hacemos explícita la siguiente observación.

Observación 1.2.1 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, y sea $F(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x+k)|^2$. Entonces F es periódica y $F \in L^2([-1/2,1/2]^d)$, por lo tanto es finita en casi todo x.*

Demostración.

Basta hacer un cambio de variables y aplicar convergencia monótona de la siguiente manera,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[-1/2,1/2]^d+k} |f(x)|^2 dx =$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \int_{[-1/2,1/2]^d} |f(x+k)|^2 dx = \int_{[-1/2,1/2]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |f(x+k)|^2 dx.$$

■

1.2.1. Marcos y Bases de Riesz

Los marcos, bases de Riesz y bases de Schauder son fundamentales en el análisis y en muchas ramas de la matemática. Para más información de la aquí expuesta referimos al lector a la excelente introducción sobre estos temas [Heil87], donde además se hace un estudio general de las bases con convergencia incondicional en espacios de Banach.

Una sucesión $\{h_k\}$ en un espacio de Hilbert separable H se dice que es una *sucesión de Riesz* si existen $0 < A \leq B$ tales que para todo $\{c_k\} \in \ell^2$ de soporte finito se tiene que

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \| \sum_k c_k h_k \|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2. \tag{1.1}$$

Donde el conjunto de índices es un conjunto numerable que varía según el contexto. Y se dice que una sucesión es *base de Riesz* si además de ser de Riesz es completa en H.

El siguiente teorema es una caracterización de las bases de Riesz y nos muestra distintas formas en que pueden ser consideradas.

Teorema 1.2.2 *Sea $\{h_k\}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Son equivalentes:*

(a) *$\{h_k\}$ es una base de Riesz.*

(b) *$\{h_k\}$ es una base de Schauder acotada (i.e. $0 < \inf_k\{\|h_k\|\}$ y $\sup_k\{\|h_k\|\} < \infty$) con convergencia incondicional de las expansiones en dicha base.*

(c) *$\{h_k\}$ es una base de Schauder de H y además para toda sucesión de escalares:*

$$\sum_k c_k h_k \text{ converge } \Longleftrightarrow \{c_k\} \in \ell^2.$$

(d) *Existe un operador acotado e inversible $T \in \mathcal{B}(H)$ y una base ortonormal $\{e_k\}$ de H tal que $Te_k = h_k$.*

Una sucesión $\{h_k\}_k$ en un espacio de Hilbert separable H se dice que es una *sucesión marco* si existen $0 < A \leq B$ tales que para toda $f \in \text{gen}\{h_k\}_k$ se tiene que

$$A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, h_k\rangle|^2 \leq B\|f\|^2. \tag{1.2}$$

Y decimos que la sucesión es *de Bessel* si solo se cumple la desigualdad derecha de (1.2). Además, se dice que una sucesión es un *marco* de H si además de ser sucesión marco es completa. Es decir, si $\text{gen}\{h_k\}$ es un conjunto denso en H, o lo que es lo mismo, que las desigualdades (1.2) valen para toda $f \in H$.

Un marco se dice *exacto* si deja de ser un marco al quitarle cualquier elemento y se dice *ajustado* si $A = B$. Veamos algunas caracterizaciones y propiedades de los marcos.

Proposición 1.2.3 *Sea $\{h_k\}$ una sucesión en un espacio de Hilbert H. Son equivalentes:*

(*a*) *$\{h_k\}$ es un marco de H con constantes $0 < A \leq B$.*

(*b*) *El operador $S : H \to H$ dado por $Sx = \sum_k \langle x, h_k\rangle h_k$ es autoadjunto, positivo, acotado y satisface*

$$A\|x\|^2 \leq \langle Sx, x\rangle \leq B\|x\|^2 \text{ para todo } x \in H.$$

Proposición 1.2.4 *Sea $\{h_k\}$ un marco de H con constantes $0 < A \leq B$. Vale lo siguiente:*

(*a*) *El operador $S \in \mathcal{B}(H)$ es un isomorfismo de espacios de Banach y $\{S^{-1}h_k\}$ es un marco con constantes $0 < B^{-1} \leq A^{-1}$.*

(*b*) *Para cada $x \in H$ se tiene*

$$x = \sum_k \langle x, S^{-1}h_k\rangle h_k = \sum_k \langle x, h_k\rangle S^{-1}h_k,$$

con convergencia incondicional de las series.

(*c*) *Si el marco es acotado por abajo (i.e. $\inf_k\{\|h_k\|\} > 0$),*

$$\sum_k c_k h_k \text{ converge en } H \iff \{c_k\} \in \ell^2$$

(*d*) *Si el marco es ajustado, entonces S es un múltiplo de la identidad.*

Definición 1.2.5 *A $\{S^{-1}h_k\}$ se lo suele llamar marco dual canónico de $\{h_k\}$ y se lo nota $\widetilde{h}_k := S^{-1}h_k$.*

Lema 1.2.6 *Sea $\{h_k\}$ una sucesión de Bessel en H con constante B entonces, para todo $\{c_k\} \in \ell^2$,*

$$\|\sum_k c_k h_k\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2.$$

Por los resultados anteriores, se puede pensar a los marcos como una generalización de las bases de Riesz. Tenemos la siguiente proposición que los relaciona.

Proposición 1.2.7 *Sea $\{h_k\}$ una sucesión en H. Entonces $\{h_k\}$ es un marco exacto si y sólo si es una base de Riesz.*

Usando esta última proposición y la identidad de Parseval se deduce la siguiente observación .

Observación 1.2.8 *Una base de Riesz $\{h_k\}$ con constantes $A = B = 1$ es una base ortonormal.*

Por último, demostramos un lema simple que será usado más adelante.

Lema 1.2.9 *Sea $\{h_k\}_k$ un marco de H y V un subespacio cerrado de H. Si P_V es la proyección ortogonal de H sobre V, entonces $\{P_V h_k\}_k$ es un marco de V.*

Demostración.
Sean A, B las constantes de marco de la sucesión y sea $f \in V$, como la proyección es un operador autodajunto tenemos que

$$\sum_k |\langle f, P_V h_k \rangle|^2 = \sum_k |\langle P_V f, h_k \rangle|^2 = \sum_k |\langle f, h_k \rangle|^2.$$

Luego, $A\|f\|^2 \leq \sum_n |\langle f, P_V h_k \rangle|^2 \leq B\|f\|^2$ para toda $f \in V$. ■

Una pregunta puede surgir al leer lo anterior. ¿Para qué considerar marcos si todo subespacio cerrado de un Hilbert es un Hilbert en si mismo y por lo tanto posee una base ortonormal? Se pueden dar varias respuestas a esta pregunta. Una es que las expansiones con marcos son muy útiles en las aplicaciones cuando hay pérdida de datos debido a la redudancia de las mismas. Otra respuesta, más relacionada con los temas tratados aquí, es la siguiente. En los espacios invariantes por traslaciones se buscan bases ortonormales, o de Riesz, o marcos que vengan dados por traslaciones enteras de una o varias funciones fijas porque esto simplifica las expansiones, de hecho es uno de los motivos por los que se trabaja en dichos espacios. Resulta que es fácil construir ejemplos de estos espacios que no poseen ni bases ortonormales ni de Riesz de tales características, pero que si poseen marcos de ese tipo.

1.2.2. Espacios invariantes por traslaciones enteras

En nuestro contexto, un *espacio invariante por traslaciones enteras* (EIT) es un subespacio $V \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$, que usualmente consideramos cerrado, que cumple lo siguiente: para toda $f \in V$ y todo $k \in \mathbb{Z}^d$ se tiene que $T_k f \in V$, donde T_k es el operador de traslación ($T_k f(x) = f(x-k)$).

Dado un conjunto indexado $\{\varphi_l\}_{l\in L} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ el EIT generado por dicho conjunto es

$$S(\{\varphi_l\}_{l\in L}) := \overline{\mathrm{gen}(\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{l\in L, k\in\mathbb{Z}^d})}.$$

Dado un EIT V, sea $K \subset \mathbb{N}_0$ dado por $K := \{n \in \mathbb{N} : \text{existen } f_1, \dots f_n$ tales que $V = S(f_1, \dots f_n)\}$.

Definimos la *longitud* de V como $long(V) = \min K$ si $K \neq \emptyset$ y $long(V) = \infty$ si $K = \emptyset$.

Se dice que un EIT V es *principal* (EITP) si $long(V) = 1$ y se dice que es *finitamente generado* (EITFG) si $long(V) < \infty$.

Estos espacios han sido objeto de gran estudio y además de en la teoría de Muestreo, tienen un gran protagonismo en otras ramas de la matemática. Por ejemplo, en la teoría de wavelets y en la teoría de aproximación.

En [Bow00] se da un teorema de estructura para estos espacios.

Dado $F = (f_1, \dots, f_L)$ con $f_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $S(F) := S(f_1, \dots, f_L)$ el EITFG correspondiente, veremos más adelante que existe $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_L)$ tal que $S(F) = S(\Phi)$ y $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d}$ constituye un marco ajustado de $S(\Phi)$. Por este motivo, a partir de ahora supondremos que todo EITFG viene dado de la forma (con la notación usual):

$$V(\Phi) := \left\{ \sum_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d} c_{lk}\varphi_l(\cdot - k) : \{c_{lk}\}_{l,k} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d \times \{1, \dots, L\}) \right\}.$$

Y además, $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\Phi)$.

Notar que si $long(V) = n$ entonces no puede haber un marco del espacio que esté generado por traslaciones de menos de n funciones.

El siguiente lema será usado más adelante.

Lema 1.2.10 *Sea $V \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ un EIT y P_V la proyección ortogonal sobre ese subespacio. Entonces los operadores de traslaciones enteras conmutan con la proyección, es decir, para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y todo $k \in \mathbb{Z}^d$ se tiene que $P_V T_k f = T_k P_V f$.*

Demostración.

Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces usando que V es invariante por traslaciones y que la traslación es un operador unitario tenemos que

$$\|P_V T_k f - T_k f\| = \min_{g \in V} \|g - T_k f\| = \min_{g \in V} \|g - f\| = \|P_V f - f\| = \|T_k P_V f - T_k f\|.$$

Y como esta propiedad caracteriza a la proyección, entonces $P_V T_k f = T_k P_V f$. ■

Análisis de Multirresolución y Wavelets

Para más información sobre este tema referimos al lector al ameno libro introductorio [ABH98]. Los EIT están íntimamente ligados a las wavelets como se ve a continuación.

Llamemos Δ_α al operador de dilatación $\Delta_\alpha f(x) := \alpha^{-1/2} f(x/\alpha)$.

Supongamos que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de $V_0 := V(\varphi) \subset L^2(\mathbb{R})$ (se puede ver que es lo mismo suponer que es una base de Riesz, pues con la base de Riesz se puede construir otra función que genere una base ortonormal).

Sea $V_j = \{\Delta_{2^{-j}} f : f \in V_0\}$ para $j \in \mathbb{Z}$. Decimos que $\{V_j : j \in \mathbb{Z}\}$ es un *Análisis de Multirresolución de* $L^2(\mathbb{R})$ (AMR) si se satisfacen las siguientes condiciones.

(*1*) $\cdots V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \cdots$

(*2*) $\overline{\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$

(*3*) $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$

Supongamos que tenemos un AMR.

Es fácil ver que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_0 si y solo si $\left\{2^{j/2}\varphi(2^j \cdot - k)\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de V_j.

Como $V_0 \subset V_1$ entonces $\varphi \in V_1$, por lo tanto existe $\{h_k\}_k \in \ell^2$ tal que $\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_k h_k \varphi(2x - k)$. A esta ecuación se la suele llamar *ecuación de escala* y a φ la *función de escala* del AMR. El estudio de las propiedades de los coeficientes $\{h_k\}_k$ y de su transformada discreta de Fourier es una herramienta fundamental en la teoría de wavelets.

Llamemos $W_j = V_{j+1} \ominus V_j$. En estas condiciones la teoría de wavelets asegura la existencia de una función $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal de W_0.

Además se cumple lo siguiente:

(*a*) $\oplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = L^2(\mathbb{R})$.

(b) $W_j = \Delta_{2^{-j}}(W_0)$.

(c) Si llamamos $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$, $\{\psi_{j,k}\}_{j,k}$ resulta una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$.

(d) $\psi(x) = \sum_k (-1)^{1-k} h_{1-k}\varphi_{1,k}(x)$, donde $\varphi_{1,k}(x) = \sqrt{2}\varphi(2x-k)$.

1.2.3. El Gramiano y el Gramiano dual

Dada una función $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ sabemos que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces por la Observación 1.2.1, para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$, la sucesión $\{\widehat{f}(w+k)\}_k$ pertenece al espacio $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Esto nos dice que está bien definido, para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$, $\mathscr{T}f(\omega) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ de la siguiente manera, $(\mathscr{T}f(\omega))_k = \widehat{f}(w+k)$.

Supongamos que tenemos un EITFG, $V(\Phi)$ con $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$. Dada $f \in V(\Phi)$ tenemos la expansión de marco $f = \sum_{l,k} c_{lk}\varphi_l(\cdot - k)$. Apliquemos $\mathscr{T}$ en esta igualdad y evaluamos en ω, recordando que la transformada de Fourier transforma traslaciones en modulaciones. Nos queda $\mathscr{T}f(\omega) = \sum_l (\sum_k c_{lk}e^{-2\pi ikw})\mathscr{T}\varphi_l(\omega)$. Esto nos dice que para casi todo ω fijo, $\mathscr{T}f(\omega)$ está generado por el conjunto $\{\varphi_l(\omega)\}_l$ (como sucesión de ℓ^2). Notar que lo que antes era un conjunto de generadores infinito ($\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{l,k}$), vía la aplicación $\mathscr{T}$, pasa a ser un conjunto de generadores finito ($\{\mathscr{T}\varphi_l(\omega)\}_l$), pero con ω como parámetro.

El siguiente teorema fundamental debido a Bownik ([Bow00]) ayuda a entender a los EITFG y nos da la pauta de la utilidad del operador $\mathscr{T}$.

Teorema 1.2.11 *Sea $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ con $\varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces,*

(a) *$\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $S(\Phi)$ con constantes A, B si y sólo si, para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$, $\{\mathscr{T}\varphi_l(\omega)\}_l$ es un marco de $J(\omega)$ con constantes A, B.*

(b) *$\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base de Riesz de $S(\Phi)$ con constantes A, B si y sólo si, para casi todo ω, $\{\mathscr{T}\varphi_l(\omega)\}_l$ es una base de Riesz de $J(\omega)$ con constantes A, B.*

Donde $J(\omega) = \{\mathscr{T}f(\omega) : f \in V(\Phi)\} \subset \ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

(Notar que en el teorema A y B no dependen de ω).

En el mismo artículo se demuestra que para casi todo ω, $J(\omega)$ es un subespacio cerrado de $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$. Y en cualquiera de los dos casos anteriores, $J(\omega) = \text{gen}(\{\mathscr{T}\varphi_l(\omega)\}_l)_{\ell^2}$.

Este teorema es una herramienta muy poderosa para trabajar con los EITFG como se detalla a continuación. Si queremos verificar alguna propiedad en $V(\Phi)$, la técnica consiste en aplicar $\mathscr{T}$, ver cómo se traduce dicha propiedad en $J(\omega)$, y tratar de verificar esta nueva propiedad en $J(\omega)$ para casi todo ω.

Introducimos ahora una herramienta fundamental que nos va a acompañar a lo largo de este escrito, y aunque a esta altura resulte un tanto críptica, está íntimamente relacionada con el Teorema 1.2.11 y es necesaria desde el comienzo para estudiar a los espacios invariantes por traslaciones.

Dado $L \in \mathbb{N}$ y un vector de funciones $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ tal que $\varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$ para todo $1 \leq l \leq L$ se definen el *Gramiano* y el *Gramiano dual* respectivamente como las funciones matriciales (en el caso del Gramiano dual la matriz es infinita):

$$\begin{aligned} G_\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}^{L\times L} \quad \text{tal que} \quad (G_\Phi(\omega))_{lt} &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{\varphi}_l(\omega+k)\overline{\widehat{\varphi}_t(\omega+k)} \\ &= \langle \mathscr{T}\varphi_l(\omega), \mathscr{T}\varphi_t(\omega)\rangle_{\ell^2} \end{aligned}$$

y

$$\widetilde{G}_\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^d\times\mathbb{Z}^d} \quad \text{tal que} \quad (\widetilde{G}_\Phi(\omega))_{kh} = \sum_{l=1}^{L} \widehat{\varphi}_l(\omega+k)\overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+h)}.$$

Notar que G_Φ y $\widetilde{G}_\Phi$ están bien definidas en casi todo ω pues las $\widehat{\varphi}'s$ están en L^2, lo que implica que para todo l, $\{\widehat{\varphi}_l(\omega-k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ para casi todo ω.

Observar que para todo ω para el que estén bien definidas, ambas matrices son autoadjuntas y además se pueden pensar como operadores actuando en $\mathbb{C}^L$ y en $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ respectivamente.

Si definimos $(\widehat{\Phi}_h(w))_{lk} := (\mathscr{T}\varphi_l(\omega))_k = \widehat{\varphi}_l(\omega+k)$ queda
$\widehat{\Phi}_h(w) \in (\ell^2(\mathbb{Z}^d))^L \subset \mathbb{C}^{\{1,\ldots,L\}\times\mathbb{Z}^d}$ para casi todo ω.

También definimos $\widehat{\Phi}_v(w) = (\widehat{\Phi}_h(w))^t$ (h de 'horizontal' y v de 'vertical').

Algunas relaciones que se obtienen son:

$$G_\Phi = \widehat{\Phi}_h\widehat{\Phi}_h^* = \widehat{\Phi}_v^t\overline{\widehat{\Phi}_v} \quad y \quad \widetilde{G}_\Phi = \widehat{\Phi}_v\widehat{\Phi}_v^*. \tag{1.3}$$

En la literatura, a veces, se suele llamar Gramiano a la matriz que se obtiene conjugando componente a componente a la matriz que aquí llamamos matriz Gramiana. Es decir, a veces se suele tomar como Gramiano a la matriz $\widehat{\Phi}_v^*\widehat{\Phi}_v$. Esta forma alternativa de definir al Gramiano es en cierto sentido más natural (como se puede notar en la demostración del Teorema 1.2.18, más adelante). Hemos elegido la otra definición porque con ella los enunciados de algunos resultados se expresan de una manera más clara. De todas formas, la ambigüedad que esto representa en general no trae problemas, porque la gran mayoría de los resultados que involucran al Gramiano pueden ser expresados con cualquiera de las dos definiciones. Notar que para el caso de un EIT principal las dos definiciones coinciden.

Observación 1.2.12 *Para el caso de un EIT principal el Gramiano es una función escalar* $G_\varphi(\omega) = \sum_{k\in Z^d} |\widehat{\varphi}(\omega+k)|^2$ *y dim(J(ω))=0 ó 1 dependiendo de si el Gramiano se anula o no.*

Para casi todo ω el Gramiano es una matriz autoadjunta no negativa. Entonces, fijado ω, existen dos matrices, $U(\omega)$ unitaria y $D(\omega)$ =diag$(\lambda_1,\dots,\lambda_L)$ diagonal, tales que $G_\Phi(\omega) = U(\omega)D(\omega)U^*(\omega)$. Así, los elementos de la diagonal $\{\lambda_1(\omega),\dots,\lambda_L(\omega)\}$ de $D(\omega)$ resultan los autovalores no negativos de $G_\Phi(\omega)$.

En [RS97] se demuestra que esta descomposición se puede realizar de manera medible. Es decir, existe una descomposición de ese estilo del Gramiano para casi todo ω de manera que las funciones componentes de cada una de las matrices involucradas resultan medibles como funciones de ω y son finitas para casi todo ω. Además, en esta descomposición medible en ω, los autovalores no negativos del Gramiano, que son los elementos de la matriz diagonal D están ordenados de mayor a menor para casi todo ω.

Dado $\alpha\in\mathbb{R}$, sea $D^{(\alpha)}$ la siguiente matriz

$$(D^{(\alpha)}(\omega))_{lt} = \begin{cases} \lambda_l^\alpha(\omega) & \text{si } t=l \text{ y } \lambda_l(\omega)\neq 0 \\ 0 & \text{si } t=l \text{ y } \lambda_l(\omega)=0 \\ 0 & \text{si } t\neq l. \end{cases}$$

Usando esto se definen $G_\Phi^{(-1)}$, la pseudoinversa de G_Φ, y la matriz $G_\Phi^{(-1/2)}$ como

$$G_\Phi^{(-1)}(\omega) = U(\omega)D^{(-1)}(\omega)U^*(\omega) \quad \text{y} \quad G_\Phi^{(-1/2)}(\omega) = U(\omega)D^{(-1/2)}(\omega)U^*(\omega).$$

Notar que para los ω donde el Gramiano es inversible la pseudoinversa coincide con la inversa.

Definición 1.2.13 *Para el caso de un EIT principal definimos el conjunto* E_φ *dado por*

$$E_\varphi := \{\omega\in\mathbb{R}^d : G_\varphi(w)\neq 0\}.$$

Notar que en este caso $G_\varphi^{(-1)} = G_\varphi^{-1}\chi_{E_\varphi}$.

Ahora, que ya hemos repasado un poco los conceptos de marco, base de Riesz, Gramiano, EIT, etc. veremos algunos resultados que los relacionan.

Relaciones

En [RS97] se demuestran los siguientes teoremas.

Teorema 1.2.14 *Supongamos que tenemos $S(F) := S(f_1, \dots, f_L)$ con $f_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$, entonces el vector de funciones $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_L)$ definido vía su transformada de Fourier por*

$$\widehat{\Phi}(\omega) = G_F^{(-1/2)}(\omega)\widehat{F}(\omega),$$

cumple lo siguiente: cada componente de $\widehat{\Phi}(\omega)$ está en $L^2(\mathbb{R}^d)$, $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco ajustado con constantes $A = B = 1$ de $V(\Phi)$ y $S(F) = V(\Phi)$ (por lo tanto el marco dual canónico coincide con el marco).

En particular, este teorema es una de las formas de ver que todo EIT finitamente generado posee un marco.

El siguiente es un corolario para el caso en que el EIT sea principal.

Corolario 1.2.15 *Si $\psi_1, \psi_2 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $S(\psi_1) = S(\psi_2)$, entonces $E_{\psi_1} = E_{\psi_2}$ (salvo un conjunto de medida nula). En particular si $\{\psi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\varphi)$ entonces $E_\psi = E_\varphi$*

Demostración. (Del corolario).

Sean φ_1 y φ_2 tales que $\widehat{\varphi_1} = G_{\psi_1}^{(-1/2)}\widehat{\psi}_1$ y $\widehat{\varphi_2} = G_{\psi_2}^{(-1/2)}\widehat{\psi_2}$. Por el Teorema 1.2.14 las traslaciones de estas funciones forman un marco de $V := S(\psi_1) = S(\psi_2)$, y además se ve fácil que $G_{\varphi_i} = G_{\psi_i}^{(1/2)}$ para $i = 1, 2$. Luego, $E_{\varphi_i} = E_{\psi_i}$ salvo medida nula, $i = 1, 2$. Por lo que alcanza probar que $E_{\varphi_1} = E_{\varphi_2}$ salvo un conjunto de medida nula.

Como $\{\varphi_1(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de V existe $\{c_k\} \in \ell^2$ tal que $\varphi_2(x) = \sum_k c_k\varphi_1(x - k)$ y calculando el Gramiano queda

$$G_{\varphi_2}(\omega) = \left|\sum_k c_k e^{-2\pi i\langle k,\omega\rangle}\right|^2 G_{\varphi_2}(\omega).$$

Lo que implica que $E_{\varphi_2} \subset E_{\varphi_1}$ salvo un conjunto de medida nula. La otra inclusión se obtiene cambiando los roles de φ_1 y φ_2 en el razonamiento anterior.

■

Teorema 1.2.16 *Supongamos que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\Phi)$, entonces su marco dual canónico también viene dado por traslaciones de L*

funciones. Es decir, existe $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_L)$ *tal que* $\{\widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d}$ *es el marco dual canónico. Más aún, tenemos la siguiente fórmula que expresa a* $\widetilde{\Phi}$ *en función del Gramiano y de* Φ*,*

$$\widehat{\widetilde{\Phi}} = G_\Phi^{(-1)}\widehat{\Phi} \qquad \textit{donde } \widehat{\Phi}(\omega) = (\widehat{\varphi}_1(\omega), \ldots, \widehat{\varphi}_L(\omega)).$$

Observación 1.2.17 *En las condiciones del teorema anterior se tiene que:* $G_{\widetilde{\Phi}} = G_\Phi^{(-1)}$.

Demostración. (De la observación).

Como por el teorema anterior $\widehat{\widetilde{\Phi}} = G_\Phi^{(-1)}\widehat{\Phi}$, entonces por periodicidad del gramiano, $\widehat{\widetilde{\Phi}}_h = G_\Phi^{(-1)}\widehat{\Phi}_h$. Entonces, por las relaciones (1.3),

$$\begin{aligned} G_{\widetilde{\Phi}} &= G_\Phi^{(-1)}\widehat{\Phi}_h\widehat{\Phi}_h^* G_\Phi^{(-1)*} = G_\Phi^{(-1)}G_\Phi G_\Phi^{(-1)} = UD^{(-1)}U^*UDU^*UD^{(-1)}U^* \\ &= UD^{(-1)}DD^{(-1)}U^* = UD^{(-1)}U^* = G_\Phi^{(-1)}. \end{aligned}$$

■

En [RS97] se estudian de una manera profunda las relaciones entre el Gramiano, Gramiano dual, los EIT, etc., y los siguientes teoremas aparecen de manera implícita. Versiones más generales de los mismos son demostradas en [Bow00].

Teorema 1.2.18 *Sea* $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ *con* $\varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$*. Entonces,*

(*a*) $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d}$ *es un marco de* $S(\Phi)$ *con constantes* $0 < A \le B$ *si y sólo si, para casi todo* $\omega \in \mathbb{R}^d$*,*

$$A\langle G_\Phi(\omega)x, x\rangle \le \langle G_\Phi^2(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^L} \le B\langle G_\Phi(\omega)x, x\rangle \textit{ para todo } x \in \mathbb{C}^L.$$

(*b*) $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}^d}$ *es una base de Riesz de* $S(\Phi)$ *con constantes* $0 < A \le B$ *si y sólo si, para casi todo* ω*,*

$$A\|x\|^2 \le \langle G_\Phi(\omega)x, x\rangle_{\mathbb{C}^L} \le B\|x\|^2 \textit{ para todo } x \in \mathbb{C}^L.$$

Demostración.

Sólo para ilustrar, veamos cómo (b) se deduce directamente del Teorema 1.2.11 (b). Por dicho teorema tenemos que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base de Riesz de $S(\Phi)$ con constantes $0 < A \leq B$ si y sólo si, para casi todo ω, $A\|x\|^2 \leq \|\sum_l x_l \mathscr{T}\varphi_l(\omega)\|^2_{\ell^2} \leq B\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{C}^L$.

Y la demostración se termina observando que $\|x\|^2 = \|\overline{x}\|^2$ y que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_l x_l \mathscr{T}\varphi_l(\omega)\right\|^2_{\ell^2} &= \sum_k \sum_{l,t} x_l \widehat{\varphi}_l(\omega+k)\overline{\widehat{\varphi}_t(\omega+k)x_t} \\
&= \sum_{l,t}\left(\sum_k \widehat{\varphi}_l(\omega+k)\overline{\widehat{\varphi}_t(\omega+k)}\right) x_l\overline{x_t} \\
&= \langle G_\Phi(\omega)\overline{x}, \overline{x}\rangle_{\mathbb{C}^L}.
\end{aligned}$$

Esto implica que para casi todo ω, $A\|x\|^2 \leq \langle G_\Phi(\omega)x, x\rangle \leq B\|x\|^2$ para todo $x \in \mathbb{C}^L$. ■

Otro resultado similar con el Gramiano dual.

Teorema 1.2.19 *Sea $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ con $\varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces,*

$\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $S(\Phi)$ con constantes $0 < A \leq B$ si y sólo si, para casi todo ω,

$$A\|c\|^2 \leq \langle \widetilde{G}_\Phi(\omega)c, c\rangle_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} \leq B\|c\|^2 \text{ para todo } c \in J(\omega).$$

Demostración.

Este teorema también se deduce de manera análoga al anterior (del Teorema 1.2.11), pero del item (a). Por dicho teorema tenemos que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $S(\Phi)$ con constantes $0 < A \leq B$ si y sólo si, para casi todo ω, $A\|c\|^2 \leq \sum_l |\langle c, \mathscr{T}\varphi_l(\omega)\rangle_{\ell^2}|^2 \leq B\|c\|^2$ para todo $c \in J(\omega)$.

Como antes, basta notar lo siguiente.

$$\begin{aligned}
\sum_l |\langle c, \mathscr{T}\varphi_l(\omega)\rangle|^2 &= \sum_l \left|\sum_k c_k \overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}\right|^2 \\
&= \sum_l \sum_{k,h} c_k \overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}\,\overline{c_h}\widehat{\varphi}_l(\omega+h) \\
&= \sum_{k,h}\left(\sum_l \widehat{\varphi}_l(\omega+h)\overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}\right) c_k\overline{c_h} \\
&= \langle \widetilde{G}_\Phi c, c\rangle_{\ell^2}.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Para estudiar EIT finitamente generados en general en la literatura se suele usar el Gramiano como herramienta de trabajo (vía el Teorema 1.2.18). Esta preferencia se debe a que el Gramiano es una matriz finita, a diferencia del Gramiano dual. Pero como lo muestran las demostraciones de los teoremas anteriores, para estudiar el caso marco la herramienta natural a utilizar es el Gramiano dual, y esto será lo que haremos para poder extender el resultado fundamental del segundo capítulo (Teorema 2.2.2) a espacios invariantes por traslaciones finitamente generados (Teorema 3.1.1).

1.2.4. La transformada de Zak y la fórmula de Poisson

Otra herramienta fundamental que usaremos frecuentemente es la Transformada de Zak.

Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, por la Observación 1.2.1, $\sum_k |f(x+k)|^2 < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, entonces estará bien definida para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ la siguiente función de ω en sentido de $L^2([-1/2, 1/2]^d)$:

$$Z_f(x,\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(x+k)e^{-2\pi i\langle k,\omega\rangle}$$

que llamamos *transformada de Zak* de f. La transformada de Zak satisface la siguiente propiedad de casi-periodicidad, para $h, k \in \mathbb{Z}^d$,

$$Z_f(x+k, \omega+h) = e^{2\pi i\langle k,\omega\rangle} Z_f(x,\omega),$$

por lo que $Z_f : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ está unívocamente determinada por los valores que toma en $[-1/2, 1/2]^d \times [-1/2, 1/2]^d$, y pensamos en este conjunto como su dominio fundamental.

La fórmula de Poisson está tan íntimamente relacionada con la transformada de Zak que puede ser expresada en términos de esta última. Veamos algunos casos.

Lema 1.2.20 *Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de Schwartz, entonces*

$$e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle} Z_f(x,\omega) = Z_{\widehat{f}}(\omega, -x), \text{ para todo } x, \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración.

Por la hipótesis sobre f, $e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle} Z_f(x,\omega)$ converge absoluta y uniformemente sobre compactos en x a una función C^∞. Calculemos sus coeficientes de Fourier (como función de x),

$$\int_{[-1/2,1/2]^d} \sum_k f(x+k)e^{-2\pi i\langle x+k,\omega\rangle} e^{-2\pi i\langle k',x\rangle} dx =$$

$$\sum_k \int_{[-1/2,1/2]^d+k} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle} e^{-2\pi i\langle k',x-k\rangle} dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-2\pi i\langle x,\omega+k'\rangle} dx = \widehat{f}(\omega+k').$$

■

Lema 1.2.21 *Sean $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ y $x \in [-1/2,1/2]^d$ tales que $\widehat{f} \in L^1$ y $\{f(x+k)\}_k \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, entonces*

$$e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle} Z_f(x,\omega) = Z_{\widehat{f}}(\omega,-x) \text{ para casi todo } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Demostración.

Es similar a la del lema anterior, pero se debe ser más cuidadoso. Probamos el caso $x=0$, el caso general se prueba de manera análoga. Como $\widehat{f} \in L^1$, entonces f es continua y la evaluación puntual en k tiene sentido.

Alcanza ver que la igualdad se da en el sentido de $L^2([-1/2,1/2])$.

Ya sabemos que $Z_f(0,\omega) \in L^2([-1/2,1/2]^d)$ pero de $Z_{\widehat{f}}(\omega,0)$ solo sabemos que está en L^1 porque $\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)| \in L^1$ debido a que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Gracias también a esto podemos aplicar convergencia mayorada en el siguiente cálculo, dado $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\begin{aligned}\int_{[-1/2,1/2]^d} Z_{\widehat{f}}(\omega,0)e^{2\pi i\langle k,\omega\rangle} d\omega &= \sum_n \int_{[-1/2,1/2]^d} \widehat{f}(\omega+n)e^{2\pi i\langle k,\omega\rangle} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\omega)e^{2\pi i\langle k,\omega\rangle} d\omega = f(k),\end{aligned}$$

donde usamos la periodicidad de las exponenciales y la fórmula de inversión para la transformada de Fourier ($\widehat{f} \in L^1$).

Esto nos dice que $\int_{[-1/2,1/2]^d} (Z_f(0,\omega) - Z_{\widehat{f}}(\omega,0))e^{2\pi i\langle k,\omega\rangle} = 0$ para todo k, y como los polinomios trigonométricos son densos en $(C([-1/2,1/2]^d), \|\cdot\|_\infty)$, por un argumento estandar de paso al límite en la integral, tenemos que

$$\int_{[-1/2,1/2]^d} (Z_f(0,\omega) - Z_{\widehat{f}}(\omega,0))\psi(\omega)d\omega = 0 \quad \forall \psi \in C([-1/2,1/2]^d).$$

Luego, usando una aproximación de la identidad, queda $Z_f(0,\omega) = Z_{\widehat{f}}(\omega, 0)$ para casi todo ω.

■

De manera análoga se prueba lo siguiente.

Lema 1.2.22 *Sean* $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d)$ *y* $\omega \in [-1/2, 1/2]^d$ *tales que* $\{\widehat{f}(w+k)\}_k \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, *entonces*

$$e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle} Z_f(x,\omega) = Z_{\widehat{f}}(\omega, -x) \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Otras versiones mucho más generales, en el sentido de debilitar las hipótesis sobre f, se pueden encontrar en [BZ97].

1.2.5. Espacios de Hilbert núcleo reproductivos

Hablando en general un *espacio de Hilbert núcleo reproductivo* (EHNR) es un $\mathbb{K}-$espacio de Hilbert H cuyos elementos son funciones a valores en $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y tal que la evaluación en x es un funcional continuo para todo x del dominio de las funciones de H. Si es el caso, por el teorema de representación de Riesz existirá una única función $N_x \in H$ tal que $f(x) = \langle f, N_x\rangle$ para toda $f \in H$. A la función N_x la llamamos núcleo reproductivo en x.

Supongamos por el momento que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\varphi)$ y que $V(\varphi)$ es un EHNR. Notemos primero que en este caso, por ser el operador de traslación una isometría, $\langle f, N_0(\cdot - k)\rangle = \langle f(\cdot + k), N_0\rangle = f(k) = \langle f, N_k\rangle$, para toda $f \in V(\varphi)$ y $k \in \mathbb{Z}^d$. Es decir, $N_0(\cdot - k) = N_k$. Supongamos también que $\{N_0(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco con marco dual $\{S(\cdot - k)\}$. Por la Proposición 1.2.4 (b) nos queda:

$$f(x) = \sum_k \langle f, N_0(\cdot - k)\rangle S(x-k) = \sum_k f(k)S(x-k). \tag{1.4}$$

Que es justamente el tipo de resultado que estamos buscando, aunque queremos que la convergencia sea también uniforme además de en L^2.

Espacios amalgama de Wiener

Para lidiar con el muestreo en general se debe poder, antes que nada, evaluar las funciones que se están muestreando. La suposición usual es pedir que la función sea continua. También es importante cierto decaimiento del muestreo para tener buena convergencia de la serie que reconstruya a la función. En [AG01], donde se trata el problema del muestreo no uniforme, esto se logra trabajando en los espacios amalgama de Wiener. Decimos que una función medible f pertenece a $W(L^p(\mathbb{R}^d))$, $1 \leq p < \infty$, si satisface:

$$\|f\|^p_{W(L^p)} := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{supes}_{x \in [-1/2,1/2]^d} |f(x+k)|^p < \infty.$$

Las suposiciones para lidiar con el muestreo no uniforme son que la φ, cuyas trasladadas forman un marco de $V(\varphi)$, sea continua y que $\varphi \in W(L^1(\mathbb{R}^d))$.

En nuestro caso particular de muestreo uniforme resulta que para obtener las propiedades requeridas (e.g. $V(\varphi) \subseteq C(\mathbb{R})$, $V(\varphi)$ sea núcleo reproductivo, etc) basta con condiciones mucho más débiles que veremos más adelante.

Conclusión

Si $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\varphi)$, lo que estamos buscando entonces son propiedades de la φ que garanticen lo siguiente.

(a) Toda función de $V(\varphi)$ es continua.

(b) $V(\varphi)$ es un EHNR.

(c) $\{N_0(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\varphi)$ y la convergencia en (1.4) es también uniforme.

Capítulo 2

Muestreo uniforme en EIT principales

Algunos de los resultados de este capítulo aparecen enunciados en la bibliografía para funciones de una variable. Pero como se verá aquí, muchas de las demostraciones siguen siendo válidas para el caso de funciones de varias variables.

2.1. Condiciones básicas

En esta sección demostramos algunos lemas que serán utilizados más adelante.

En [SZ99] se demuestra el siguiente lema que, como se ve en ese trabajo y se notará más adelante, ofrece una condición sobre φ muy apropiada para obtener lo que estamos buscando (téngase en mente la conclusión que aparece al final de la introducción).

Lema 2.1.1 *Sea $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Son equivalentes:*

(i) *Para cada $\{c_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$, $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\varphi(\cdot - k)$ converge uniformemente a una función continua en $\mathbb{R}^d$.*

(ii) *φ es continua y $\sup_{x\in[-1/2,1/2]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 < \infty$.*

Demostración.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz $\sum_k c_k\varphi(x-k)$ es uniformemente convergente en $\mathbb{R}^d$ y por lo tanto continua pues φ es continua. Notar que esta es la implicación que se obtiene de manera más natural y que hace que (ii) sea considerado.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Tomando $c_k = \delta_{1k}$ resulta φ continua por (i) (por lo tanto la evaluación puntual tiene sentido).

Por la Observación 1.2.1 sabemos que $\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 < \infty$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$. Veamos que esto pasa para todo x.

Fijado $x \in \mathbb{R}^d$, consideramos los funcionales $U_n \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)^*$ definidos por $U_n(\{c_k\}) = \sum_{\|k\|<n} c_k\varphi(x-k)$. Notar que por el teorema de representación de Riesz $\|U_n\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)^*} = \sum_{\|k\|<n} |\varphi(x-k)|^2$ y además por (i) sabemos que, para cada $\{c_k\}$, $\{U_n(\{c_k\})\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente y por lo tanto acotada. Luego, por el teorema de acotación uniforme,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\sum_{\|k\|<n} |\varphi(x-k)|^2) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\|U_n\|^2) < \infty.$$

Con esto queda bien definido $\Lambda_x(\{c_k\}) := \sum_k c_k\varphi(x-k)$, $\Lambda_x \in \ell^{2*}$ y $\|\Lambda_x\|^2 = \sum_k |\varphi(x-k)|^2$.

Fijemos ahora $\{c_k\} \in \ell^2$ y definamos $f(x) = \Lambda_x(\{c_k\})$, por hipótesis f es continua en $[-1/2, 1/2]^d$ y por lo tanto acotada en dicho intervalo. Es decir,

$$\sup_{x\in[-1/2,1/2]^d} |\Lambda_x(\{c_k\})| = \sup_{x\in[-1/2,1/2]^d} |f(x)| < \infty.$$

Nuevamente, por el teorema de acotación uniforme, $\sup_{x\in[-1/2,1/2]} \|\Lambda_x\| < \infty$, i.e., $\sup_{x\in[-1/2,1/2]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 < \infty$.

Notar que por periodicidad queda $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 < \infty$.

■

La condición (ii) es muy similar a pedir que la función φ pertenezca al espacio $W(L^2(\mathbb{R}^d))$, pero es más débil. Por esto, damos la siguiente definición.

Definición 2.1.2 *Decimos que φ es casi amalgama o de periodizada acotada con constante $M > 0$ si cumple que* $\sup_{x\in[-1/2,1/2]^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} |\varphi(x-k)|^2 < M$.

A continuación vemos que esta condición más la continuidad alcanza para que $V(\Phi)$ sea un espacio de Hilbert núcleo reproductivo (EHNR).

Lema 2.1.3 *Sean $\{\varphi_l\}_{1\leq l\leq L} \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ tales que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V := V(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ con marco dual $\{\widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\}_{l,k} \subseteq V$. Si cada φ_l es continua y de periodizada acotada entonces $V(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ es un EHNR.*

Demostración.

Observar primero que por el Lema 2.1.1 toda función de $V(\Phi)$ es contínua.

Sean A, B las constantes de marco de las $\varphi's$, M_l las constantes de periodizada acotada de las φ_l y $M = \sum_{l=1}^{L} M_l$.

Sea $f \in V$, entonces $f(x) = \sum_{l,k} < f, \widetilde{\varphi}_l(\cdot - k) > \varphi_l(x-k)$, con convergencia también uniforme y por lo tanto puntual, y es continua por lema previo. Aplicando la desigualdad de C-S,

$$|f(x)|^2 \leq \sum_{l,k} |\langle f, \widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\rangle|^2 \sum_{l,k} |\varphi_l(x-k)|^2 \leq M \sum_{l,k} |\langle f, \widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\rangle|^2.$$

Recordando ahora que las constantes del marco dual son $1/B$ y $1/A$ queda:

$$|f(x)| \leq \sqrt{\frac{M}{A}} \|f\|,$$

que nos dice que la evaluación es continua. Además esta desigualdad también demuestra que $V(\Phi) \subset L^\infty$, más aún, la inclusión de $V(\Phi) \hookrightarrow L^\infty$ es continua.
■

Por el teorema de representación de Riesz sabemos que en las condiciones anteriores existen los núcleos reproductivos. En lo que sigue encontraremos una expresión explícita para los mismos.

Notar que si N_x es el núcleo reproductivo entonces $\langle N_x, \varphi_l(\cdot - k)\rangle = \overline{\langle \varphi_l(\cdot - k), N_x\rangle} = \overline{\varphi_l(x-k)}$.

Luego, como $N_x \in V(\Phi)$ y el marco dual canónico $\{\widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\}_{1 \leq l \leq L, k \in \mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\Phi)$ en sí mismo, nos queda,

$$N_x(y) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \langle N_x, \varphi_l(\cdot - k)\rangle \widetilde{\varphi}_l(y-k) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_l(x-k)} \widetilde{\varphi}_l(y-k).$$

Observación 2.1.4 *Por un simple cambio de índices de suma queda*

$$N_x(y) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_l(x+k)} \widetilde{\varphi}_l(y+k).$$

El siguiente remarcable lema aparece en [Sun05] (esta es una versión apenas modificada).

Lema 2.1.5 *Sean $T, L \in \mathbb{N}$ y sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1 \leq l \leq L, k \in \mathbb{Z}^d}$ un marco de $V = V(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ con cada φ_l continua y de periodizada acotada. Supongamos que $\{S_t(\cdot - k)\}_{1 \leq t \leq T, k \in \mathbb{Z}^d}$ es una sucesión de Bessel de V. Entonces para cada t, S_t es continua y de periodizada acotada.*

Demostración.

Usando lo visto en el lema anterior (i.e., $|f(x)|^2 \leq \frac{M}{A}\|f\|^2$ para toda $f \in V(\Phi)$) y recordando la Proposición 1.2.6 (i.e. la cota de Bessel también sirve como 'cota superior de sucesión de Riesz'):

$$\sum_{l,k} |S_l(x-k)|^2 = \sup_{\|c\|_{\ell^2}=1} |\sum_{l,k} c_{lk} S_l(x-k)|^2 \leq$$

$$\frac{M}{A} \sup_{\|c\|=1} \|\sum_{l,k} c_{lk} S_l(\cdot - k)\|^2 \leq \frac{M}{A} B' \sup_{\|c\|=1} \|c\|^2_{\ell^2(\{1,\ldots,L\}\times\mathbb{Z}^d)} = \frac{MB'}{A}.$$

■

Una consecuencia importante de los lemas anteriores es que si las funciones Φ, generadoras del marco del EIT $V(\Phi)$, son continuas y de periodizada acotada, todo marco generado por traslaciones de finitas funciones cumple lo siguiente: las funciones son de periodizada acotada y se tiene convergencia uniforme en las expansines. Esto nos dice que estas propiedades son independiente del marco del espacio que elijamos, (generado por traslaciones de finitas funciones). Además, todas las funciones del espacio son continuas y $V(\Phi)$ es un EHNR. Es decir, solo con esta condición sobre las φ's expuesta en [SZ99, Sun05], obtenemos bastante de lo que estábamos buscando y nos resta únicamente concentrarnos en el problema de cuándo los núcleos reproductivos forman un marco.

Por otro lado, supongamos que tenemos un EIT con una función de muestreo S continua cuyas traslaciones constituyen una base de Riesz del espacio, con convergencia uniforme de las expansiones. Entonces, por los lemas previos S es de periodizada acotada, lo que implica que toda φ que genere un marco del espacio será continua y de periodizada acotada y el EIT será un EHNR. En otras palabras, la condición encontrada es la condición justa, no se puede pedir menos.

Usando el siguiente lema en [SZ99, Sun05] se demuestra una importante relación entre el conjunto E_φ y la transformada de Zak para el caso de un EIT principal.

Definición 2.1.6 *Dada $\{x_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ se define su transformada de Fourier discreta como la función $\widehat{x} : [-1/2, 1/2]^d \to \mathbb{C}$ tal que $\widehat{x}(\omega) = \sum_k x_k e^{-2\pi i <k,\omega>}$.*

Lema 2.1.7 *Sean $x, y \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ y $\widehat{x}, \widehat{y}$ las transformadas discretas de dichas sucesiones respectivamente. Entonces*

$$\sum_n |\sum_k x_k y_{n-k}|^2 = \int_{[-1/2,1/2]^d} |\widehat{x}(\omega)\widehat{y}(\omega)|^2 d\omega.$$

Además, cuando uno de los miembros de esta igualdad es finita la transformada discreta de $x * y(n) := \sum_k x_k y_{n-k}$ *es el producto de las transformadas, es decir,* $\widehat{x * y}(\omega) = \widehat{x}(\omega)\widehat{y}(\omega)$.

Demostración.

Llamemos $\mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d)$ a las sucesiones de soporte finito. Vía la transformada discreta hay una biyección entre $\mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d)$ y los polinomios trigonométricos (a estos los llamamos $\mathcal{P}$). Usando un resultado clásico de convolución sabemos que si $x = \{x_k\} \in \ell^2$ y $\{\alpha_k\} \in \ell^1$ entonces $(x * \alpha)_n := \sum_k x_k \alpha_{n-k}$ cumple que $\{(x * \alpha)_n\} \in \ell^2$. Más aún, usando la fórmula del producto de series de Cauchy tenemos que en este caso $\widehat{x * \alpha}(\omega) = \widehat{x}(\omega)\widehat{\alpha}(\omega)$ para casi todo ω.

Sea $\{\alpha^N\}_{N\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d)$ tal que $\alpha^N \to y$ en ℓ^2. Por la desigualdad de C-S se tiene que, para todo $k \in \mathbb{Z}^d$, $(x * \alpha^N)_k \to (x * y)_k$ cuando $N \to \infty$.

Luego,

$$\sum_k (x * \alpha^N)_k \overline{s_k} \to \sum_k (x * y)_k \overline{s_k} \quad \text{cuando } N \to \infty, \quad \text{para toda } s \in \mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d).$$

Por lo dicho antes y usando que la transformada discreta es una isometría,

$$\langle x*\alpha^N, s\rangle_{\ell^2} = \langle \widehat{x * \alpha^N}, \widehat{s}\rangle_{L^2} = \langle \widehat{x}\widehat{\alpha^N}, \widehat{s}\rangle_{L^2} = \langle \widehat{\alpha^N}, \overline{\widehat{x}}\widehat{s}\rangle_{L^2} \to \langle \widehat{y}, \overline{\widehat{x}}\widehat{s}\rangle_{L^2} = \langle \widehat{x}\widehat{y}, \widehat{s}\rangle_{L^2}$$

pues $\widehat{\alpha^N} \to \widehat{y}$.

Es decir,

$$\langle x * y, s\rangle_{\ell^2} = \langle \widehat{x}\widehat{y}, \widehat{s}\rangle_{L^2} \quad \text{para toda } s \in \mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d). \tag{2.1}$$

Por lo tanto,

$$\|\widehat{x}\widehat{y}\|^2_{L^2} = \sup_{\|p\|=1, p\in\mathcal{P}} |\langle \widehat{x}\widehat{y}, p\rangle|^2 = \sup_{\|s\|=1, s\in\mathcal{SF}(\mathbb{Z}^d)} |\sum_k (x * y)_k \overline{s_k}|^2 = \sum_k |(x * y)_k|^2,$$

pues es fácil ver que tanto la primera como la última igualdad valen incluso en los casos en que $\|\widehat{x}\widehat{y}\|^2_{L^2} = \infty$ o $\sum_k |(x * y)_k|^2 = \infty$.

Veamos la segunda parte del lema. Si $\|\widehat{x}\widehat{y}\|^2_{L^2} = \|x * y\|^2_{\ell^2} < \infty$, usando que la transformada discreta es una isometría en (2.1), obtenemos que

$$\langle \widehat{x * y} - \widehat{x}\widehat{y}, p\rangle_{L^2} = 0 \quad \text{para todo } p \text{ polinomio trigonométrico},$$

lo que termina la demostración pues los polinomios trigonométricos son densos en $L^2([-1/2, 1/2]^d)$. ■

Lema 2.1.8 *Sea* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *continua y de periodizada acotada, entonces para todo* $x \in \mathbb{R}^d$ *se tiene que* $Z_\varphi(x, w) = 0$, *para casi todo* $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus E_\varphi$.

Demostración.

Sea $C(\omega) := 1 - \chi_{E_\varphi}$. Como E_φ es el soporte (sin clausurar) del Gramiano, que es periódico, entonces χ_{E_φ} es periódica. Por lo tanto $C(\omega)$ es periódica y se puede escribir como su serie de Fourier $C(\omega) = \sum_k c_k e^{-2\pi i \langle k, \omega \rangle}$.

Como $\widehat{\varphi}$ se anula en $\mathbb{R}^d \setminus E_\varphi$ tenemos que $C(\omega)\widehat{\varphi}(\omega) = 0$ para casi todo ω. Antitransformando,

$$\sum_k c_k \varphi(x - k) = 0 \text{ para casi todo } x \in \mathbb{R}^d, \tag{2.2}$$

pero como φ era continua y de periodizada acotada y $\{c_k\} \in \ell^2$, la serie converge uniformemente a una función continua. Entonces la igualdad (2.2) es en todo $x \in \mathbb{R}^d$. Usando el Lema 2.1.7 se sigue que

$$\int_{[-1/2,1/2]^d \setminus E_\varphi} |Z_\varphi(x, w)|^2 d\omega = \int_{[-1/2,1/2]^d} |C(\omega)|^2 |Z_\varphi(x, w)|^2 d\omega$$

$$= \int_{[-1/2,1/2]^d} \left| \sum_k c_k e^{-2\pi i \langle k, \omega \rangle} \right|^2 \left| \sum_k \varphi(x + k) e^{-2\pi i \langle k, \omega \rangle} \right|^2 d\omega$$
$$= \sum_n \left| \sum_k c_k \varphi(x + n - k) \right|^2 = 0.$$

■

2.2. Muestreo

El teorema de Shannon en su versión más rudimentaria es anterior a la segunda mitad del siglo XX. Décadas después, cuando la teoría de wavelets ya había alcanzado bastante popularidad, el espacio PW y la función seno cardinal pudieron ser considerados en este contexto. Es decir, el espacio PW puede ser pensado como un espacio inicial que genera un Análisis de Multirresolución, con el que construir una wavelet, cuya función de escala es el seno cardinal. Debido a la gran utilidad del Teorema de Shannon surge una pregunta muy interesante. ¿Habrá más espacios iniciales de Análisis de Multirresolución donde se pueda obtener un resultado similar al de Shannon? En 1992, G. Walter da una respuesta a esta pregunta con el siguiente teorema [Wal92].

Teorema 2.2.1 *Sea φ una función de escala real continua tal que*

(i) $\varphi(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ *cuando* $x \to \infty$ *con* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) $Z_\varphi(0, w) \neq 0$ *para todo* $\omega \in \mathbb{R}$, *y además* $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es una base ortonormal de* $V_0 := V(\varphi)$.

Entonces $\widehat{S}(\omega) := \widehat{\varphi}/Z_\varphi(0, w)$ *es tal que* $S \in V_0$, $\{S(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *es una base de Riesz de* V_0 *y además para toda* $f \in V_0$

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)S(x - k)$$

con convergencia uniforme y en $L^2(\mathbb{R})$.

Este teorema será una consecuencia de versiones más generales que veremos más adelante. En el mismo trabajo Walter también considera el error de reconstrucción para $f \notin V_0$.

Como ya se comentó, el siguiente problema a tratar es si vale algo similar al teorema anterior pero para el caso en que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ sea solo un marco de $V(\varphi)$ y que este espacio no esté asociado a ningún Análisis de Multirresolución. En [SZ99] se demuestra un teorema que contesta esto y en [Sun05] se generaliza a funciones de varias variables. El teorema es el siguiente.

Teorema 2.2.2 *Sea* $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *un marco de* $V(\varphi) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ *con* φ *continua y de periodizada acotada (en particular* $V(\varphi) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$*) y sea* $a \in [-1/2, 1/2]^d$. *Son equivalentes:*

(i) Existe un marco $\{S_a(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ *de* $V(\varphi)$ *tal que, para cada* $f \in V(\varphi)$, *se tiene que:*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(a + k)S_a(x - k),$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^d)$ *y uniforme.*

(ii) Existen constantes $0 < C_1 \leq C_2$ *tales que*

$$C_1\chi_{E_\varphi}(\omega) \leq |Z_\varphi(a, \omega)| \leq C_2\chi_{E_\varphi}(\omega) \quad \text{p.c.t. } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

En cualquiera de los casos anteriores se tiene que

$$\widehat{S}_a(\omega) = \begin{cases} \widehat{\varphi}(\omega)/Z_\varphi(a, \omega) & \text{si } \omega \in E_\varphi \\ 0 & \text{si } \omega \notin E_\varphi. \end{cases}$$

La demostración de este teorema utiliza como técnica clave el estudio del Gramiano de las distintas funciones involucradas. En la próxima sección obtenemos una generalización no trivial de este teorema estudiando el Gramiano dual de los núcleos reproductivos, por lo que será demostrado luego.

Notar que en el teorema anterior el muestreo no se hace en los enteros, sino en una traslación por a de los mismos. Es Janssen en [Jan93] el que advierte que esto puede ayudar a obtener teoremas de muestreo incluso en espacios donde la condición (ii) del Teorema 2.2.2 falla en $a = 0$. Más adelante se estudiará la relevancia de este hecho a la hora de estudiar el error de reconstrucción.

Aquí tenemos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 2.2.3 *Teorema de Shannon.*

Primero notemos que senc es claramente de periodizada acotada y $\widehat{\text{senc}}(\omega) = \chi_{[-1/2,1/2]}(\omega)$. Luego $G_{\text{senc}}(\omega) = \sum_k |\chi_{[-1/2,1/2]}(\omega - k)|^2 = 1$ para todo ω. De esto y del Teorema 1.2.18 más la Observación 1.2.8 se sigue que $\{\text{senc}(\cdot - k)\}_k$ es una base ortonormal de $V(\text{senc}) = PW$.

Podemos usar la fórmula de Poisson para obtener que para todo ω

$$Z_{\text{senc}}(0, \omega) = Z_{\widehat{\text{senc}}}(\omega, 0) = 1.$$

Por lo tanto se cumplen las hipótesis y el item (ii) del teorema anterior. Además $\widehat{S_0}(\omega) = \widehat{\text{senc}}(\omega)/Z_{\text{senc}}(0, \omega) = \widehat{\text{senc}}(\omega)$ por lo que la función de muestreo es S_0 =senc, y recuperamos así el teorema de Shannon.

Ejemplo 2.2.4 *Wavelet de Franklin.*

La función de escala φ asociada a la wavelet de Franklin es de soporte compacto y tiene como transformada de fourier

$$\widehat{\varphi}(\omega) = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\pi^2\omega^2} \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\pi\omega)\right)^{-1/2}.$$

Por lo tanto φ es de periodizada acotada, y además, como $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ pues el segundo factor es una función acotada, podemos aplicar la fórmula de Poisson para obtener que, para $\omega \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} Z_\varphi(0, \omega) &= Z_{\widehat{\varphi}}(\omega, 0) = \sum_k \widehat{\varphi}(\omega + k) \\ &= \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\pi^2} \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\pi\omega)\right)^{-1/2} \sum_k \frac{1}{(\omega + k)^2}. \end{aligned}$$

Usando ahora el conocido resultado de Análisis Complejo que dice que $\sum_k \frac{1}{(\omega+k)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\omega)}$ para $\omega \notin \mathbb{Z}$, nos queda

$$Z_\varphi(0,\omega) = \left(1 - \frac{2}{3}\sin^2(\pi\omega)\right)^{-1/2} \neq 0,$$

que también vale para $\omega \in \mathbb{Z}$. Podemos aplicar el Teorema 2.2.1 y obtener

$$\widehat{S}(\omega) := \widehat{\varphi}/Z_\varphi(0,w) = \frac{\sin^2(\pi\omega)}{\pi^2\omega^2},$$

cuya inversa de Fourier es la "función sombrero", $S(x) = (1-|x|)\chi_{[-1,1]}(x)$.

Ejemplo 2.2.5 *Wavelets de Meyer.*

La función de escala φ de Meyer es tal que $\widehat{\varphi} \in C^\infty$, y por lo tanto es continua y de periodizada acotada; $\widehat{\varphi}(\omega) = 1$ en $[-1/3, 1/3]$; su soporte está contenido en $[-2/3, 2/3]$ y entre estos valores cumple $[\widehat{\varphi}(1/2-\omega)]^2 + [\widehat{\varphi}(1/2+\omega)]^2 \equiv 1$. Notar que también vale la fórmula de Poisson. Luego,

$$Z_\varphi(0,\omega) = Z_{\widehat{\varphi}}(\omega,0) = \sum_k \widehat{\varphi}(\omega+k) \geq 1,$$

Por lo que el Teorema 2.2.1 se aplica.

2.3. Funciones en espacios de muestreo

En vista de los teoremas antes expuestos damos la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Sea V un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$ y $a \in [-1/2, 1/2]^d$. Decimos que V es un a-espacio de muestreo si existe una función $S_a \in V$ que satisface las siguientes condiciones.*

(i) S_a es continua y de periodizada acotada.

(ii) $\{S_a(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de V tal que para toda $f \in V$ la expansión en este marco (con el marco dual canónico) es

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(a+k)S_a(x-k)$$

con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y uniforme sobre $\mathbb{R}^d$.

Si $a = 0$ decimos simplemente que es un espacio de muestreo.

A la función S se la suele llamar *función de muestreo.*

Se puede observar una sutil diferencia entre el item (i) del Teorema 2.2.2 y esta definición. En esta última se pide además que el muestreo de f sean los coeficientes de la expansión con el marco dual canónico. En el próximo capítulo se demuestra que para el caso de EIT principales, son equivalentes. En particular, por definición, si f pertenece a algún espacio de muestreo, entonces $\{f(k)\}_k \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$.

En las aplicaciones, dada una función (o señal) arbitraria uno quisiera saber si pertenece a algún espacio de muestreo explícito para muestrearla y poder manejar una versión discreta de la misma. En esta sección nos vamos a ocupar de este problema y otros relacionados. Vale aclarar que todos los resultados aquí expuestos valen para a-espacios de muestreo y las demostraciones son análogas al caso $a = 0$ considerando $Z_\varphi(a, \omega)$ en lugar de $Z_\varphi(0, \omega)$. Los siguientes resultados relacionados con este tema pertenecen a [BCH05].

Lema 2.3.2 *Sea $V(\varphi)$ un espacio de muestreo y S su función de muestreo. Entonces la función de muestreo satisface $Z_S(0, \omega) = \chi_{E_S}(\omega)$ para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$.*

Demostración.

Como $S(x) = \sum_k S(k)S(x-k)$ transformando obtenemos $\widehat{S}(w+k) = Z_S(0,\omega)\widehat{S}(w+k)$ para casi todo ω. Lo que implica que $Z_S(0,\omega) = 1$ para casi todo $\omega \in E_S$. Además, por el Lema 2.1.8 $Z_S(0,\omega) = 0$ para casi todo $\omega \notin E_S$. ■

Teorema 2.3.3 *Sea $V(\varphi)$ un espacio de muestreo con función de muestreo S y $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si $f \in V(\varphi)$ entonces $S(f)$ es un espacio de muestreo con función de muestreo $S_f = P(S)$, donde $P(S)$ es la proyección ortogonal de S sobre $S(f)$. En este caso, $\widehat{S}_f = \widehat{S}\chi_{E_f}$.*

Demostración.

Por el Lema 1.2.9 la proyección de un marco es un marco y por el Lema 1.2.10 la proyección conmuta con la traslación, luego $\{PT_kS\}_k = \{T_kP(S)\}_k = \{S_f(\cdot - k)\}_k$ es un marco de $S(f)$.

Además, dada $g \in S(f) \subset V(\varphi)$,

$$g = P(g) = P(\sum_k g(k)S(\cdot - k)) = \sum_k g(k)S_f(\cdot - k).$$

Veamos que S_f es de periodizada acotada. Por el Lema 2.1.5 y la hipótesis basta probar que $\{S_f(\cdot - k)\}_k$ es una sucesión de Bessel en $V(\varphi)$. Sea B la cota superior de marco del marco generado por la función de muestreo de $V(\varphi)$ y sea $g \in V(\varphi)$, volviendo a usar que la proyección conmuta con la traslación tenemos

$$\sum_k |\langle g, S_f(\cdot - k)\rangle|^2 = \sum_k |\langle Pg, S(\cdot - k)\rangle|^2 \leq B\|Pg\|^2 \leq B\|g\|^2.$$

Todo esto nos dice que $S(f)$ es un espacio de muestreo y la demostración concluye si probamos la fórmula para S_f.

Como $S_f \in V(\varphi)$ tenemos la expansión $S_f = \sum_k S_f(k)S(\cdot - k)$, transformando

$$\widehat{S}_f = Z_{S_f}(0, \omega)\widehat{S}.$$

Pero por el lema anterior y por el Corolario 1.2.15 tenemos que $Z_{S_f}(0, \omega) = \chi_{E_{S_f}}(\omega) = \chi_{E_f}(\omega)$ para casi todo ω, pues f genera $S(f)$ por definición. ■

Una consecuencia inmediata del Teorema 2.2.2, del Corolario 1.2.15 y del Teorema 1.2.14 es lo siguiente.

Teorema 2.3.4 *Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Entonces f pertenece a un espacio de muestreo si y solo si la función φ definida por $\widehat{\varphi} = \widehat{f}/G_f^{1/2}$ en E_f y $\widehat{\varphi} = 0$ en $\mathbb{R}^d \setminus E_f$ satisface:*

(a) *φ es continua y de periodizada acotada.*

(b) *Existen $0 < A \leq B$ tales que*

$$A\chi_{E_f}(\omega) \leq |Z_\varphi(0, \omega)| \leq B\chi_{E_f}(\omega) \text{ para casi todo } \omega.$$

Un lema interesante en si mismo es el siguiente.

Lema 2.3.5 *Sea $V(\varphi)$ un espacio de muestreo y S su función de muestreo. Se satisfacen.*

(i) *Para toda $f \in V(\varphi)$ se tiene que $E_f = \{\omega \in \mathbb{R}^d : Z_f(0, \omega) \neq 0\}$ (salvo un conjunto de medida nula).*

(ii) *La función de muestreo S es única, salvo un conjunto de medida nula, y satisface $\widehat{S}(\omega) = \frac{\widehat{\psi}(\omega)}{Z_\psi(0,\omega)}\chi_{E_\varphi}(\omega)$ para toda ψ cuyas traslaciones formen un marco de $V(\varphi)$.*

Demostración.

(i) Sea $f \in V(\Phi)$, por el teorema anterior $S(f)$ es un espacio de muestreo con función de muestreo S_f y $E_{S_f} = E_f$. Como $f(x) = \sum_k f(k) S_f(x-k)$ transformando y 'tomando Gramiano' en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$G_f(\omega) = |Z_f(0,\omega)|^2 \, G_{S_f}(\omega) \text{ para casi todo } \omega,$$

lo que implica que $E_f \subset \{\omega \in \mathbb{R}^d : Z_f(0,\omega) \neq 0\}$ salvo medida nula.

Usando la misma expresión para f pero 'tomando trasformada de Zak' nos queda $Z_f(0,\omega) = \widehat{\{f(k)\} * \{S_f(k)\}}(\omega)$, y como f pertenece a un espacio de muestreo $\{f(k)\} \in \ell^2$ lo que implica que $Z_f(0,\omega) \in L^2$ como función de ω. Aplicando ahora el Lema 2.1.7 y el Lema 2.3.2 nos queda que

$$Z_f(0,\omega) = Z_f(0,\omega) Z_{S_f}(0,\omega) = Z_f(0,\omega)\chi_{E_f}(\omega) \quad \text{para casi todo } \omega,$$

lo que implica la inclusión inversa.

(ii) Escribiendo a ψ con el marco generado por la función de muestreo y transformando obtenemos $\widehat{\psi}(\omega) = Z_\psi(0,\omega)\widehat{S}(\omega)$. Podemos pasar dividiendo $Z_\psi(0,\omega)$ aplicando el item anterior a ψ. La unicidad de S se sigue de la fórmula anterior. ■

El siguiente resultado de Sun y Zhou ([SZ04]) da condiciones suficientes para que una función pertenezca a un espacio de muestreo. En [BCH05] se dan condiciones necesarias y suficientes.

Teorema 2.3.6 *Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Si existen $A, B > 0$ tales que para casi todo $\omega \in E_f$,*

$$A\left(\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|\right)^2 \leq \left|\sum_k \widehat{f}(\omega+k)\right|^2 \leq B\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|^2, \tag{2.3}$$

entonces f pertenece a un espacio de muestreo. Más aún, $S(f)$ es un espacio de muestreo con función de muestreo S tal que $\widehat{S}(\omega) = Z_f(0,\omega)^{-1}\widehat{f}(\omega)$ en E_f y $\widehat{S}(\omega) = 0$ en otro caso.

Demostración.

Observar que la desigualdad de arriba se puede escribir como

$$A\left(\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|\right)^2 \leq |Z_{\widehat{f}}(w,0)|^2 \leq BG_f(\omega) \text{ p. c. t. } \omega,$$

de lo que se deduce que $\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)| \in L^2([-1/2,1/2]^d) \subset L^1([-1/2,1/2]^d)$, y por lo tanto $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Por los teoremas previos alcanza con ver que

$S(f)$ es un espacio de muestreo. Veamos primero que $\widehat{\varphi} = G_f^{(-1/2)}\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (recordar que esta función genera un marco de $S(f)$). Por convergencia monótona y por (2.3),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\varphi}(\omega)| d\omega &= \int_{[-1/2,1/2]^d} G_f^{(-1/2)}(\omega) \sum_k |\widehat{f}(\omega+k)| d\omega \\ &= \int_{[-1/2,1/2]^d \cap E_f} \frac{\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|}{(\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|^2)^{1/2}} d\omega \\ &\leq \int_{[-1/2,1/2]^d \cap E_f} \sqrt{B/A} d\omega \leq \sqrt{B/A}. \end{aligned}$$

En particular φ es continua.

Veamos que φ es de periodizada acotada. Fijemos un x. Como $\widehat{f} \in L^1$ y se satisface (2.3), tenemos que la sucesión de funciones de ω, $H_m(x,\omega) := G_f^{(-1/2)}(\omega) \sum_{\|k\|<m} \widehat{f}(\omega+k) e^{2\pi i \langle \omega+k, x\rangle}$ cumple lo siguiente. $H_m(x,\omega)$ converge puntualmente para casi todo ω a una función $H(x,\omega)$, y además $|H_m(x,\omega)| \leq \sqrt{B/A}$. Por esto y lo anterior podemos usar la fórmula de inversión de la transformada de Fourier y el teorema de convergencia mayorada para obtener que

$$\begin{aligned} \varphi(x+n) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(\omega) e^{2\pi i \langle \omega, x+n\rangle} d\omega \\ &= \int_{[-1/2,1/2]^d} G_f^{(-1/2)}(\omega) \sum_k \widehat{f}(\omega+k) e^{2\pi i \langle \omega+k, x\rangle} e^{2\pi i \langle n, \omega\rangle} d\omega \\ &= \int_{[-1/2,1/2]^d} H(x,\omega) e^{2\pi i \langle n, \omega\rangle} d\omega. \end{aligned}$$

Y como $H(x,\omega) \in L^2([-1/2,1/2]^d)$ como función de ω por ser una función acotada, entonces $\{\varphi(x+k)\}_k$ son los coeficientes de Fourier de $H(x,\omega)$. Calculando,

$$\sum_k |\varphi(x+k)|^2 = \int_{[-1/2,1/2]^d} |H(x,\omega)|^2 d\omega \leq B/A,$$

que es una cota uniforme en x, lo que implica que φ es de periodizada acotada.

Para terminar, tenemos que ver que se satisface (b) del Teorema 2.3.4. Como $\widehat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $\{\varphi(k)\}_k \in \ell^2$ podemos aplicar la fórmula de Poisson a la función φ,

$$\begin{aligned} Z_\varphi(0,\omega) &= Z_{\widehat{\varphi}}(\omega,0) = \sum_k \widehat{\varphi}(\omega+k) \\ &= G_f^{(-1/2)}(\omega)\sum_k \widehat{f}(\omega+k) = G_f^{(-1/2)}(\omega) Z_{\widehat{f}}(\omega,0). \end{aligned}$$

Luego, $|Z_\varphi(0,\omega)|^2 = 0$ si $\omega \notin E_\varphi$, y $A \le |Z_\varphi(0,\omega)|^2 \le B$ si $\omega \in E_\varphi$, para casi todo ω. Esto implica que $S(f)$ es un espacio de muestreo.

Por lo tanto $\{f(k)\}_k \in \ell^2$, y como $\widehat{f} \in L^1$ podemos aplicar la fórmula de Poisson a f (Lema 1.2.21), en la igualdad anterior y obtener que $Z_\varphi(0,\omega) = G_f^{(-1/2)}(\omega) Z_{\widehat{f}}(\omega,0) = G_f^{(-1/2)}(\omega) Z_f(0,\omega)$.

Veamos ahora la fórmula para $\widehat{S}$. Por el Lema 2.3.5 nos queda que

$$\widehat{S}(\omega) = \frac{\widehat{\varphi}(\omega)}{Z_\varphi(0,\omega)} = \frac{G_f^{(-1/2)}(\omega)\widehat{f}(\omega)}{G_f^{(-1/2)}(\omega) Z_f(0,\omega)} = \frac{\widehat{f}(\omega)}{Z_f(0,\omega)}.$$

■

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 2.3.7 *sop*$\widehat{f} \subset [-1/2,1/2]^d$.

El caso $d=1$ se deduce fácilmente del teorema de Shannon y del Teorema 2.3.3.

En este caso las series en (2.3) son iguales para todo ω (es a lo sumo no nulo solo el primer término de las mismas) y por lo tanto las desigualdades se cumplen para $A = B = 1$. Además, $Z_f(0,\omega) = Z_{\widehat{f}}(\omega,0) = \widehat{f}_p$ la extensión periódica de $\widehat{f}$. Luego, la función de muestreo de $S(f)$ viene dada por $\widehat{S} = \widehat{f}_p^{-1}\widehat{f} = \chi_{E_f \cap [-1/2,1/2]^d}$ pues $\mathrm{sop}\widehat{f} + \mathbb{Z}^d = E_f$. Por lo tanto,

$$S(x) = \int_{\mathrm{sop}\widehat{f}} e^{2\pi i \langle w,x\rangle} dw.$$

Ejemplo 2.3.8 *En $L^2(\mathbb{R})$ el EIT de Splines generado por $f_{2n-1} = \chi_{[-1/2,1/2]} * \cdots * \chi_{[-1/2,1/2]}$ (2n veces), $n \in \mathbb{N}$.*

El caso $n=1$ ya fue estudiado anteriormante como wavelet de Franklin. Para n cualquiera tenemos $\widehat{f}_n = (\frac{\mathrm{sen}(\pi\omega)}{\pi\omega})^{2n}$, el primer término de las desigualdades (2.3) coincide con el segundo y todos los términos de dichas desigualdades son funciones continuas, periódicas y positivas en $[-1/2,1/2]$ que no se anulan. Luego cada uno alcanza un máximo y un mínimo en dicho intervalo y por lo tanto (2.3) se satisface para $A=1$ y algún B.

Ejemplo 2.3.9 *$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de Schwartz, tal que $Z_f(0,\omega) \neq 0$ para todo ω.*

Notar primero que por la hipótesis y la versión más fuerte de la fórmula de Poisson se deduce que $E_\varphi = \mathbb{R}^d$. Y como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ su gramiano es una función continua por lo que alcanza un máximo y un mínimo en $[-1/2, 1/2]^d$ y por lo tanto f genera un marco de $V(f)$. Además todos los términos que aparecen en (2.3) son funciones continuas periódicas que no se anulan, por lo tanto alcanzan máximos y mínimos y esto asegura la existencia de A, B.

2.4. Error de reconstrucción

En esta sección las funciones se suponen de una variable. Es importante recordar que lo visto en la sección anterior vale también en a-espacios de muestreo, es decir cuando el muestreo es $\{f(a+k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

En sus inicios y debido a la aplicación del teorema de Shannon a la ingeniería eléctrica surgió el siguiente problema, ¿qué pasa si se aplica el esquema de reconstrucción con el senocardinal a una señal cuya banda de frecuencias es de mayor longitud que el intervalo $[-1/2, 1/2]$, o si ni siquiera es de banda limitada? Puesto que infinitas funciones continuas de $L^2(\mathbb{R}^d)$ pueden coincidir en los enteros, este problema es imposible de resolver sin ninguna hipótesis a priori sobre la función. Pero para el caso en que se sepa que la función es de banda limitada, pero el soporte de su transformada excede al intervalo $[-1/2, 1/2]$ mucho se puede decir.

Repasemos más detenidamente el caso del teorema de Shannon (una buena referencia para esto es el libro [Zai93]).

La función φ :=senc cumple la ecuación de escala

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\operatorname{sen}(k\pi/2)}{k\pi/2}\varphi(2x-k)$$

y si tomamos $V_0 = PW$ obtenemos un análisis de multiresolución donde φ es la función de escala. La wavelet asociada viene dada por $\psi(x) = \frac{\operatorname{sen}(2\pi x) - \operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$. Como una contracción del lado del tiempo se corresponde a una dilatación del lado de la frecuencia resulta que $\widehat{V_1}$ está formado por las funciones cuyo soporte está contenido en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces, del lado de la frecuencia, $V_1 \ominus V_0 = \{f : \operatorname{sop} \widehat{f} \subset [-1, -1/2] \cup [1/2, 1]\}$. Por esto, no debería sorprender que la transformada de Fourier de ψ sea $\widehat{\psi} = \chi_{[-1,-1/2]} + \chi_{[1/2,1]}$. Curiosamente ψ resulta una función de muestreo para el espacio $W_0 = V_1 \ominus V_0$.

Supongamos que tenemos una función f tal que $\operatorname{sop}\widehat{f} \subset [a, b]$. Para algún $j \in \mathbb{N}$ se tendrá $[a, b] \subset [-2^j, 2^j]$, es decir, $f \in V_j = \{f : \operatorname{sop} \widehat{f} \subset [-2^j, 2^j]\}$.

El problema planteado se traduce en este contexto a saber cuál es la diferencia entre $f \in V_j$ y $f_0 = \sum_k f(k)\mathrm{senc}(\cdot - k)$. A esta diferencia la vamos a llamar *error de reconstrucción* (se la conoce como *Aliasing Error*, nombre que proviene de la ingeniería eléctrica). En la literatura generalmente se trata este problema para el caso particular de que $f \in V_1$ y es lo que vamos a hacer.

Por lo tanto, en toda esta sección supondremos que $V(\varphi)$ es un a-espacio de muestreo y que φ genera por traslaciones una base ortonormal de $V_0 := V(\varphi)$. Además supondremos que V_0 genera un análisis de multiresolución con su respectiva wavelet ψ que genera por traslaciones una base ortonormal de $W_0 = V_1 \ominus V_0$ y φ es la función de escala.

Lema 2.4.1 *Sea $g \in V_1$. Si $\{g(\cdot - k)\}_k$ es una sucesión Bessel de V_1, entonces g es de periodizada acotada. En particular, ψ es de periodizada acotada (recordar que una base o.n. de un subespacio es Bessel en todo el espacio).*

Demostración.

Se deduce de manera análoga al Lema 2.1.5, usando que $\{\sqrt{2}\varphi(2\cdot -k)\}_k$ es una base ortonormal de V_1, y por lo tanto un marco, y que $\sup_{x\in\mathbb{R}} \sum_k |\sqrt{2}\varphi(2\cdot -k)|^2 < \infty$ debido a que φ es de periodizada acotada. ■

Del lema anterior se sigue que tanto V_1 como W_0 son también EHNR's.

Gracias a que estamos trabajando con un AMR, como $\{S_a(\cdot - k)\}_k$ es una base de Riesz de V_0 se deduce que $\{\sqrt{2}S_a(2\cdot -k)\}_k$ es una base de Riesz de V_1 con base dual $\{\sqrt{2}N_a(2\cdot -k)\}_k$.

Dada $f \in V_1$ es fácil ver que $\langle f, \sqrt{2}N_a(2\cdot -k)\rangle = \frac{f(a+k/2)}{\sqrt{2}}$, luego existen $A, B > 0$ tales que $A\|f\|^2 \leq \sum_k |f(a+k/2)|^2 \leq B\|f\|^2$, como era de esperarse por la analogía con el Teorema de Shannon. Es decir, en términos de lo que veremos en el próximo capítulo, V_1 es un espacio de sobremuestreo. Esto permite definir un operador acotado, el *operador de reconstrucción* $R : V_1 \to V_0$, $R(f) = f_0$ y justamente los problemas aparecen porque este operador, aunque es la identidad sobre V_0, no es la proyección ortogonal.

Definición 2.4.2 *El error de reconstrucción (aliasing error) para $f \in V_1$ es la diferencia*

$$e_{f,a}(x) = f(x) - \sum_k f(a+k)S_a(x-n) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Notar que por lo dicho antes el error de reconstrucción está bien definido y es una función de V_1.

La siguiente proposición se puede encontrar en [Wal92], pero con la hipótesis adicional de que $\varphi(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$.

Proposición 2.4.3 *Si $\{\psi(\cdot - k)\}_k$ es la base wavelet de W_0, entonces existe $C > 0$ tal que para toda $f \in V_1$,*

$$|e_{f,a}(x)|^2 \leq C\|b\|_{\ell^2}^2,$$

donde b son los coeficientes wavelet de f al nivel 0 (i.e., $b_k = \langle f, \psi(\cdot - k)\rangle$).

Demostración.
Escribimos $f = f_1 + f_0$ con $f_0 \in V_0$ y $f_1 \in W_0$, entonces $e(x) = f_1(x) - \sum_k f_1(a+k)S(x-n)$ pues f_0 coincide puntualmente con su desarrollo con la función de muestreo. Sean M_0, M_1 las constantes de periodizada acotada de S y de ψ respectivamente, entonces

$$|f_1(x)|^2 = |\sum_k b_k\psi(x-k)|^2 \leq \|b\|^2 M_1$$

y

$$|\sum_k f_1(a+k)S_a(x-n)|^2 \leq \sum_k |f_1(a+k/2)|^2 M_0 \leq M_0 B\|f_1\|^2 = M_0 B\|b\|^2.$$

Luego,

$$|e_{f,a}(t)|^2 \leq 2|f_1(x)|^2 + 2|\sum_k f_1(a+k)S_a(x-n)|^2 \leq C\|b\|^2.$$

■

Esta proposición nos dice que cuanto más cerca esté f a una función de V_0 menor será el error que se comete al considerar la reconstrucción con la función de muestreo y nos da una estimación de dicho error en función de los coeficientes wavelet de la función.

Las siguientes son otras estimaciones interesantes que se pueden encontrar en [Jan93], pero allí se demuestran con la hipótesis adicional de que $\sup_x \sum_k |\varphi(x+k)| < \infty$.

Proposición 2.4.4 *En las condiciones en que estamos trabajando,*

$$\sup_{f\in W_0, \|f\|_2=1} \|e_{f,a}\|^2 = 1 + \operatorname{supes}_\omega \left|\frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)}\right|^2 \qquad y$$

$$\inf_{f\in W_0, \|f\|_2=1} \|e_{f,a}\|^2 = 1 + \operatorname{infes}_\omega \left|\frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)}\right|^2.$$

Demostración.

Sea $f \in W_0$ tal que $\|f\|_2 = 1$, por ortogonalidad de f y V_0 y por el Lema 2.3.5 tenemos que

$$\|e_{f,a}\|^2 = \|f\|^2 + \|\sum_k f(a+k)S_a(\cdot - n)\|^2 = 1 + \|Z_f(a,\cdot)\widehat{S_a}(\cdot)\|^2$$

$$= 1 + \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{Z_f(a,\omega)\widehat{\varphi}(\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \chi_{E_\varphi}(\omega) \right|^2 d\omega = 1 + \int_{[-1/2,1/2]} \left| Z_f(a,\omega) \frac{G_\varphi(\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Recordemos ahora que una base ortonormal es una base de Riesz con constantes $A = B = 1$, luego $G_\varphi \equiv 1$ y el complemento de E_φ tiene medida nula. Además, como $f \in W_0$, se puede escribir $f(x) = \sum_k d_k \psi(x-k)$ con convergencia también uniforme y $1 = \|f\| = \|d\|_{\ell^2}$. Por un razonamiento idéntico al que aparece en la demostración del Lema 2.3.5 (i), lo anterior implica que $Z_f(a,\omega) = \widehat{d}(\omega) Z_\psi(a,\omega)$, donde $\widehat{d}(\omega)$ es la transformada discreta de d y por lo tanto $\|\widehat{d}\|_{L^2([-1/2,1/2])} = 1$. En resumen, nos queda:

$$\|e_{f,a}\|^2 = 1 + \int_{[-1/2,1/2]} |\widehat{d}(\omega)|^2 \left| \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \right|^2 d\omega.$$

Es claro entonces que

$$1 + \operatorname{infes}_\omega \left| \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \right|^2 \leq \inf_{f \in W_0, \|f\|_2 = 1} \|e_{f,a}\|^2$$

$$\leq \sup_{f \in W_0, \|f\|_2 = 1} \|e_{f,a}\|^2 \leq 1 + \operatorname{supes}_\omega \left| \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \right|^2.$$

La demostración se termina observando que el conjunto de todas las funciones $|\widehat{d}(\omega)|^2$ tales que $\|d\|_{\ell^2} = 1$ es denso en el conjunto de todas las funciones no negativas de $L^1([-1/2,1/2])$ de norma uno, por lo que usando aproximaciones de la identidad no negativas se obtiene el resultado. ■

A continuación veamos un corolario interesante.

Corolario 2.4.5 *$Z_\psi(a,\omega)$ está esencialmente acotado como función de ω.*

Demostración.

Como el operador error $e_{\cdot,a} : V_1 \to V_1$ es acotado (pues es la identidad menos un operador acotado) su restricción a W_0 también. De esto y de la proposición anterior se sigue que $\operatorname{supes}_\omega \left| \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} \right|^2 < \infty$. Pero como V_0 es un espacio de muestreo $Z_\varphi(a,\omega)$ está acotado por arriba y por abajo, luego $\operatorname{supes}_\omega |Z_\psi(a,\omega)| < \infty$. ■

Proposición 2.4.6 *En las condiciones en que estamos trabajando,*

$$\sup_{f\in W_0,\|f\|_2=1} |e_{f,a}(x)|^2 = \int_{[-1/2,1/2]} \left| Z_\psi(x,\omega) - \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} Z_\varphi(x,\omega)\right|^2 d\omega \quad y$$

$$\inf_{f\in W_0,\|f\|_2=1} |e_{f,a}(x)|^2 = 0.$$

Demostración.

Sean M_0, M_1 las constantes de periodizada acotada de S y de ψ respectivamente.

Sea $f \in W_0$, entonces existe $d \in \ell^2$ tal que $f(x) = \sum_k d_k \psi(x-k)$ y $\|d\| = \|f\|$. Por lo tanto, aplicando la expansión con la función de muestreo a $\psi(x-k)$ (es decir, aplicando el el operador acotado de reconstrucción), nos queda

$$\begin{aligned} R(f)(x) &= \sum_k d_k \left(\sum_n \psi(a+n) S_a(x-k-n) \right) \\ &= \sum_k d_k \left(\sum_n \psi(a+n-k) S_a(x-n) \right). \end{aligned}$$

Con igualdad puntual además de en L^2.

Por lo tanto, por la desigualdad de C-S, el Lema 2.1.7 y el Lema 2.3.5 (ii), tenemos que

$$\begin{aligned} |e_{f,a}(x)|^2 &= \left| \sum_k d_k \left[\psi(x-k) - \sum_n \psi(a+n-k) S_a(x-n) \right] \right|^2 \\ &\leq \|d\|^2 \sum_k \left| \psi(x-k) - \sum_n \psi(a+n-k) S_a(x-n) \right|^2 \\ &= \|f\|^2 \int_{[-1/2,1/2]} |Z_\psi(x,\omega) - Z_\psi(a,\omega) Z_{S_a}(x,\omega)|^2 d\omega \\ &= \|f\|^2 \int_{[-1/2,1/2]} |Z_\psi(x,\omega) - \frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} Z_\varphi(x,\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Por el corolario anterior sabemos que $\frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)} Z_\varphi(x,\omega) \in L^2[-1/2,1/2]$, por lo tanto la integral anterior es finita y por el Lema 2.1.7 la sucesión definida por $d_k = \psi(x-k) - \sum_n \psi(a+n-k) S_a(x-n)$ está en ℓ^2. Entonces para obtener la igualdad en la desigualdad de arriba basta tomar $f = \sum_k \overline{d_k}\psi(\cdot - k)$ para este $d \in \ell^2$.

Notar también que para $x = a+k$ la integral siempre se anula (por la casi-periodicidad con respecto a x de las transformadas de Zak), esto corresponde al hecho de que la función reconstruida coincide con la original en dichos puntos.

Por último, para ver que $\inf_{f \in W_0, \|f\|_2=1} |e_{f,a}(x)|^2 = 0$ basta tomar algún $u \in \ell^2$ de norma uno ortogonal a d y construir una función como en el caso anterior con esta u. ■

Lo visto en esta sección deben ser usado para elegir convenientemente el a. Si se encuentra el a que hace mínimo a $\operatorname{supes}_\omega \left|\frac{Z_\psi(a,\omega)}{Z_\varphi(a,\omega)}\right|^2$ se obtendrá globalmente un menor error en norma de L^2. Si se es importante no tener mucho error al evaluar en un determinado x_0 se debe buscar el a que haga mínima a la integral de la proposición anterior. Este a óptimo puede ser hallado de manera numérica. En [Jan93] se dan varios ejemplos.

Veamos un ejemplo donde la elección del a es importante.

Ejemplo 2.4.7 $\varphi(x) = e^{-\pi x^2}(1 - 2\pi x^2) \in L^2(\mathbb{R})$ *la wavelet sombrero mexicano (salvo constante multiplicativa).*

Si se 'traduce' la Proposición 2.3 al caso a cualquiera, queda la condición

$$A\left(\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|\right)^2 \leq \left|Z_{\widehat{f}}(\omega,-a)\right|^2 \leq B\sum_k |\widehat{f}(\omega+k)|^2 \text{ p. c. t. } \omega.$$

Como en este caso $\varphi \in S(\mathbb{R})$, por el Ejemplo 2.3.9, basta ver que $Z_\varphi(a,\omega) \neq 0$ para todo ω. Además vale la versión más fuerte de la fórmula de Poisson.

Salvo una constante multiplicativa φ es la segunda derivada de la función Gaussiana $g(x) = e^{-\pi x^2}$. Por esto, es fácil ver que $\widehat{f}(\omega) = 2\pi\omega^2 e^{-\pi\omega^2}$. Luego

$$Z_\varphi(0,\omega) = Z_{\widehat{\varphi}}(\omega,0) = 2\pi\sum_k (\omega+k)^2 e^{-\pi(\omega+k)^2} > 0.$$

Esto nos dice que $S(\varphi)$ es un 0-espacio de muestreo, más aún, por el Lema 2.3.5 queda $\widehat{S}(\omega) = \frac{\omega^2 e^{-\pi\omega^2}}{\sum_k (\omega+k)^2 e^{-\pi\omega^2}}$.

Probemos con $a = 1/2$ y veamos que esta elección de a no es conveniente Por lo dicho antes y teniendo en cuenta que Z_φ es una función continua, basta ver que para algún ω, $Z_\varphi(1/2,\omega)=0$. Pero para $\omega=1/2$ tenemos que

$$\begin{aligned}
Z_\varphi(1/2,1/2) &= Z_{\widehat{\varphi}}(1/2,-1/2)=2\pi\sum_k(1/2+k)^2e^{-\pi(1/2+k)^2}(-1)^k\\
&= 2\pi\sum_{k\geq 0}(1/2+k)^2e^{-\pi(1/2+k)^2}(-1)^k\\
&\quad +2\pi\sum_{k\geq 0}(1/2-(k+1))^2e^{-\pi(1/2-(k+1))^2}(-1)^{-(k+1)}=0.
\end{aligned}$$

Por otro lado, es fácil ver que $\{\varphi(\cdot-k)\}_k$ es una base de Riesz de $S(\varphi)$ calculando el Gramiano. Todo esto dice que $S(\varphi)=V(\varphi)$ no es un 1/2-espacio de muestreo.

De hecho, si la transformada de Zak resulta una función continua podemos hacer la siguiente observación.

Observación 2.4.8 *Sea $\varphi\in L^2(\mathbb{R})$ una función a valores reales y supongamos que su transformada de Zak, Z_φ, resulta una función continua. Entonces existe $a\in[-1/2,1/2]$ tal que $Z_\varphi(a,1/2)=0$.*

Demostración.

Por un lado la función $Z_\varphi(x,1/2)=\sum_k\varphi(x+k)(-1)^k$ es real. Además, por la casi-periodicidad tenemos que $Z_\varphi(-1/2,1/2)=-Z_\varphi(1/2,1/2)$. Aplicando la hipótesis de continuidad y el teorema de Bolzano se termina la demostración.

■

Capítulo 3

Sobremuestreo en EIT finitamente generados

Llamamos sobremuestreo uniforme, o simplemente sobremuestreo, al muestreo realizado en 'varias copias de los enteros'. Es decir, dada una señal f y $a_1, \ldots, a_T \in \mathbb{R}^d$, el sobremuetreo de f es el conjunto $\{f(a_t - k)\}_{1 \leq t \leq T, k \in \mathbb{Z}^d}$.

Y como en el muestreo uniforme, lo que se busca son expansiones de la forma $f(x) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(a_t + k) S_t(x - k)$, donde $S_1, \ldots, S_T$ son llamadas funciones de sobremuestreo.

Antes de seguir, advertimos que la definición de sobremuestreo aquí expuesta puede diferir de la que aparece en la literatura, en otros contextos de la teoría de muestreo.

Supongamos que se desea obtener versiones discretas de una familia finita pero muy numerosa de señales $\mathcal{F}$, para manejarlas con mayor facilidad. Supongamos que se sabe que esta familia de señales posee ciertas propiedades especiales (soporte compacto, suavidad, etc). Para modelar este problema lo que se puede hacer es buscar un EIT finitamente generado por $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$, con L no muy grande, y suponer que $\mathcal{F} \subset S(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$, tratando de que las funciones $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ posean las propiedades de la familia $\mathcal{F}$.

Hay otros contextos donde aparecen los EITFG. Por ejemplo, cuando se trabaja con un AMR en uno de los espacios V_j (para una resolución muy alta). O también cuando se trabaja con multi-wavelets de $L^2(\mathbb{R}^d)$ con $d > 1$.

Por lo anterior, resulta interesante tratar de obtener un resultado similar al teorema de Shannon pero para un EITFG, $V := S(\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$. Un primer intento podría ser tratar de conseguir una función de muestreo en V. Encontrar tal función de muestreo, cuyas traslaciones formen un marco, implicaría que la longitud del espacio es uno, y si las señales $\varphi_1, \ldots, \varphi_L$ no se relacionan entre sí, hay pocas chances de que esto ocurra.

Por este motivo debemos encontrar algún método alternativo para lidiar con este problema.

Otro problema que puede aparecer es que en un EIT principal no se logre encontrar un a que verifique las condición (ii) del Teorema 2.2.2.

En este capítulo mostramos cómo el sobremuestreo es adecuado para manejar estos problemas y extendemos algunos de los resultados de EIT principales a EIT finitamente generados. Además se dan condiciones suficientes para que haya sobremuestreo en un EITFG. Estas condiciones generalizan algunas de las obtenidas por Hogan y Lakey en [HL00]. En ese trabajo se obtienen teoremas de sobremuestreo en casos en los que no se logra aplicar los resultados vistos en el capítulo anterior, o cuando se desea tener un mayor control del error de reconstrucción. Dichos teoremas se aplican a EITP, con $\{\varphi(\cdot - k)\}$ una base ortonormal de $V(\varphi)$.

La transformada de Zak generalizada

Así como el Gramiano, que cuando se pasa de estudiar EIT principales a EIT finitamente generados pasa de ser una función escalar a ser una función matricial, es natural suponer que la herramienta adecuada para tratar el sobremuestreo en EITFG sea una versión matricial de la transformada de Zak de una variable. Encontramos que una definición adecuada es, para $\Phi := (\varphi_1, \ldots, \varphi_L)$ tal que $\varphi_l \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\vec{a} \in (\mathbb{R}^d)^T$ y $\omega \in \mathbb{R}^d$,

$$(Z_\Phi(\vec{a}, \omega))_{lt} = Z_{\varphi_l}(a_t, \omega).$$

Notar que esta matriz en general va a ser rectangular pues T no tiene por qué coincidir con L. Además, el dominio de esta transformada de Zak generalizada depende de T. Esta ambigüedad no traerá dificultades.

3.1. Sobremuestreo

Teorema 3.1.1 *Sean $L, T \in \mathbb{N}$. Sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1 \le l \le L, k \in \mathbb{Z}^d}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ con φ_l continua y de periodizada acotada para cada l. Sea $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_T) \in \mathbb{R}^{d \times T}$ tal que $a_t \in [-1/2, 1/2]^d$ son todos distintos y N_t el núcleo de la evaluación en a_t. Son equivalentes:*

(i) *$\{N_t(\cdot - k)\}_{1 \le t \le T, k \in \mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\Phi)$. Más aún, para cada $f \in V(\Phi)$ se tiene que:*

$$f(x) = \sum_{t=1}^{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(a_t + k) S_t(x - k),$$

donde $\{S_t(\cdot - k)\}_{1\leq t\leq T, k\in\mathbb{Z}^d}$ es el marco dual canónico, con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y uniforme.

(ii) *Existen constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tales que para casi todo ω*

$$C_1\|u\| \leq \|Z^*_\Phi(\vec{a},\omega)u\| \leq C_2\|u\| \qquad \textit{para todo } u \in Rg(G_\Phi(\omega)).$$

Demostración.

Antes de empezar una aclaración importante. Vamos a hacer operaciones con matrices infinitas por lo que se podría dudar de que sigan siendo válidas muchas propiedades que valen para matrices finitas. Por ejemplo la asociatividad del producto, que se expresa como conmutatividad de sumas de series. Todos estos detalles han sido debidamente chequeados y son de fácil verificación, por lo que su justificación no será incluida en la demostración, pues atentaría contra la claridad expositiva.

Notar que por el Lema 2.1.3 tiene sentido hablar de los núcleos reproductivos.

$(i) \Rightarrow (ii)$.

Sean $0 < A \leq B$ las constantes de marco para las φ's y $0 < A' \leq B'$ las constantes de marco para las N_t's. Llamemos $\mathcal{N} := (N_1, \ldots, N_T)$. El lema 2.1.3 nos da la forma explícita de los núcleos reproductivos, $N_t(y) = \sum_{l=1}^L \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \overline{\varphi_l(a_t+k)}\widetilde{\varphi}_l(y+k)$. Transformando Fourier esta identidad nos queda

$$\widehat{N_t}(\omega) = \sum_{l=1}^{L}\sum_{k} \overline{\varphi_l(a_t+k)e^{-2\pi i\omega k}}\widehat{\widetilde{\varphi}}_l(\omega) = \sum_{l} \widehat{\widetilde{\varphi}}_l(\omega)\overline{Z_{\varphi_l}(a_t,\omega)},$$

Es decir, $\widehat{\mathcal{N}} = \widehat{\widetilde{\Phi}} \cdot \overline{Z_\Phi}$. Y como la transformada de Zak es periódica en ω se sigue que $\widehat{\mathcal{N}}_v = \widehat{\widetilde{\Phi}}_v \cdot \overline{Z_\Phi}$.

Por lo que, por la relación (1.3),

$$\widetilde{G}_{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{N}}_v \cdot \widehat{\mathcal{N}}_v^* = \widehat{\widetilde{\Phi}}_v \cdot \overline{Z_\Phi \cdot Z_\Phi^*} \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_v^*.$$

Por el Teorema 1.2.19 que $\{N_t(\cdot - k)\}_{1\leq t\leq T, k\in\mathbb{Z}^d}$ y que $\{\widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ sean marcos de $V(\Phi)$ viene caracterizado por la propiedad de que, para casi todo $\omega \in \mathbb{R}^d$,

$$A'\|c\|^2 \leq \langle \widetilde{G}_{\mathcal{N}}(\omega)c, c\rangle \leq B'\|c\|^2 \text{ para todo } c \in J(\omega), \tag{3.1}$$

y también (recordemos que las constantes de marco de las $\widetilde{\varphi}$'s son $0 < 1/B \leq 1/A$),

$$\frac{1}{B}\|c\|^2 \leq \langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}}(\omega)c, c\rangle \leq \frac{1}{A}\|c\|^2 \text{ para todo } c \in J(\omega). \tag{3.2}$$

Supongamos que $\omega \in \mathbb{R}^d$ satisface lo siguiente. Las desigualdades (3.1) y (3.2), para cada l y t, $\sum_{l,k} |\widehat{\varphi}_l(\omega + k)|^2 < \infty$, $\sum_{l,k} |\widehat{\widetilde{\varphi}}_l(\omega + k)|^2 < \infty$ y $Z_{\varphi_l}(a_t, \omega) \neq \infty$. Por el Teorema 1.2.19 y la Observación 1.2.1 esto pasa para casi todo ω. A partir de ahora obviamos la evaluación en ω en la notación.

De (3.1) y (3.2) se deduce que para este ω,

$$AA'\langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}}c, c\rangle \leq \langle \widetilde{G}_{\mathcal{N}}c, c\rangle \leq BB'\langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}}c, c\rangle \quad \text{para todo } c \in J(\omega). \tag{3.3}$$

Por un lado tenemos que

$$\langle \widetilde{G}_{\mathcal{N}}c, c\rangle = \langle \widehat{\widetilde{\Phi}}_v \cdot \overline{Z_\Phi \cdot Z_\Phi^*} \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c, c\rangle = \|\overline{Z_\Phi^*} \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c\|^2 = \|Z_\Phi^* \cdot \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2,$$

donde todas las conmutaciones de sumas se justifican por como fue elegido ω.

Por otro lado tenemos que $\langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}}c, c\rangle = \langle \widehat{\widetilde{\Phi}}_v \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c, c\rangle = \|\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c\|^2 = \|\overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2$.
Entonces (3.3) se transforma en

$$AA'\|\overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \leq \|\mathbb{Z}_\Phi^* \cdot \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \leq BB'\|\overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \quad \text{para todo } c \in J(\omega). \tag{3.4}$$

Por lo tanto, si llamamos $C_1 = \sqrt{AA'}$ y $C_2 = \sqrt{BB'}$, esta parte de la demostración se termina si vemos que

$$R := \left\{ \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c} : c \in J(\omega) \right\} = G_\Phi(\mathbb{C}^L).$$

Como $\{\widetilde{\varphi}_l(\cdot - k)\}_{1 \leq l \leq L, k \in \mathbb{Z}^d}$ también es un marco de $V(\Phi)$, por la observación posterior al Teorema 1.2.11 tenemos que $J(\omega) = \text{gen(columnas de } \widehat{\widetilde{\Phi}}_v) = \widehat{\widetilde{\Phi}}_v(\mathbb{C}^L)$. Luego,

$$R = \left\{ \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* \widehat{\widetilde{\Phi}}_v d} : d \in \mathbb{C}^L \right\} = \left\{ \widehat{\widetilde{\Phi}}_h \widehat{\widetilde{\Phi}}_h^* \overline{d} : d \in \mathbb{C}^L \right\} = \left\{ G_{\widetilde{\Phi}} \overline{d} : d \in \mathbb{C}^L \right\} = G_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{C}^L).$$

Pero por la Observación 1.2.17 sabemos que $G_{\widetilde{\Phi}} = G_\Phi^{(-1)}$, lo que implica que para todo $d \in \mathbb{C}^L$, $G_{\widetilde{\Phi}}d = G_\Phi G_{\widetilde{\Phi}} G_{\widetilde{\Phi}} d$ y $G_\Phi d = G_{\widetilde{\Phi}} G_\Phi G_\Phi d$. Por lo tanto $G_\Phi(\mathbb{C}^L) = G_{\widetilde{\Phi}}(\mathbb{C}^L)$, que era lo que faltaba probar.

$(ii) \Rightarrow (i)$.

Si las N_t forman un marco como el requerido, por el Lema 2.1.5 son continuas y de periodizada acotada, lo que implica la convergencia uniforme por el Lema 2.1.1. Es decir que alcanza probar que forman un marco, y haremos esto volviendo para atrás en la demostración anterior. Por lo dicho arriba sabemos que alcanza probar que existen $0 < A' \leq B'$ tales que (3.1) se satisface para casi todo ω. Supongamos que ω satisface: la condición (ii) del teorema, la desigualdad (3.2), y para cada l y t, $\sum_{l,k} |\widehat{\varphi}_l(\omega+k)|^2 < \infty$, $\sum_{l,k} |\widehat{\widetilde{\varphi}}_l(\omega+k)|^2 < \infty$ y $Z_{\varphi_l}(a_t,\omega) \neq \infty$. Notar que esto vale para casi todo ω.

Ya vimos que $\{G_\Phi d : d \in \mathbb{C}^L\} = \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}}_v^* J(\omega) = \{G_{\widetilde{\Phi}} \bar{d} : d \in \mathbb{C}^L\}$ por lo que (ii) es quivalente a

$$C_1^2 \|\overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \leq \|\mathbb{Z}_\Phi^* \cdot \overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \leq C_2^2 \|\overline{\widehat{\widetilde{\Phi}}_v^* c}\|^2 \quad \text{para todo } c \in J(\omega).$$

O sea que,

$$C_1^2 \langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}} c, c\rangle \leq \langle \widetilde{G}_{\mathcal{N}} c, c\rangle \leq C_2^2 \langle \widetilde{G}_{\widetilde{\Phi}} c, c\rangle \quad \text{para todo } c \in J(\omega),$$

lo que finalmente, por (3.2), da

$$\frac{C_1^2}{B}\|c\|^2 \leq \langle \widetilde{G}_{\mathcal{N}}(\omega) c, c\rangle \leq \frac{C_2^2}{A}\|c\|^2 \text{ para todo } c \in J(\omega).$$

Basta tomar $A' = \frac{C_1^2}{B}$ y $B' = \frac{C_2^2}{A}$ y la demostración concluye.

■

De manera análoga al caso del muestreo damos la siguiente definición.

Definición 3.1.2 *Sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ y $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_T) \in \mathbb{R}^{d\times T}$ tal que $a_t \in [-1/2, 1/2]^d$ son todos distintos. Decimos que $V(\Phi)$ es un $\vec{a}$-espacio de sobremuestreo si φ_l es continua y de periodizada acotada para cada l y además se cumple el item (ii) del teorema anterior.*

Si existe algún $\vec{a}$ tal que $V(\Phi)$ es un $\vec{a}$-espacio de sobremuestreo, decimos simplemente que el espacio es un espacio de sobremuestreo.

Vale la pena recalcar que para un EITFG la propiedad de ser un $\vec{a}$-espacio de sobremuestreo no depende de la elección de las funciones φ's que generen por traslaciones un marco de dicho espacio. Esto es porque la continuidad, la propiedad de ser de periodizada acotada, y el item (i) del teorema anterior no dependen de esta elección.

En la demostración del teorema está implícita la siguiente observación.

Observación 3.1.3 *Si $V(\Phi)$ es un $\vec{a}$-espacio de sobremuestreo entonces las constantes de marco A', B' de $\{N_t(\cdot - k)\}_{1\leq t\leq T, k\in\mathbb{Z}^d}$ vienen dadas respectivamente por*

$$\inf_{\|f\|=1, f\in V(\varphi)} (\sum_{k,t} |f(a_t+k)|^2) = \frac{\operatorname{infes}_\omega \left(\text{mín}_{\|u\|=1, u\in Rg(G_\Phi(\omega))} \|Z_\Phi^*(\vec{a},\omega)u\|^2\right)}{B}$$

y

$$\sup_{\|f\|=1, f\in V(\varphi)} (\sum_{k,t} |f(a_t+k)|^2) = \frac{\text{supes}_{\,\omega} \left(\text{máx}_{\|u\|=1, u\in Rg(G_\Phi(\omega))} \|Z_\Phi^*(\vec{a},\omega)u\|^2\right)}{A}.$$

donde A y B son las constantes de marco de las φ's.

Esto generaliza un resultado obtenido por Janssen en [Jan93] y debe ser utilizado si se quiere obtener un sobremuestreo con constantes de marco óptimas.

Obtenemos el siguiente corolario para el caso en que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ sea una base de Riesz de $V(\Phi)$.

Corolario 3.1.4 *Sea $L \in \mathbb{N}$. Sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ una base de Riesz $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$ con φ_l continua y de periodizada acotada para cada l. Sea $\vec{a} = (a_1, \dots, a_L) \in \mathbb{R}^{d\times L}$ tal que $a_l \in [-1/2, 1/2]^d$ son todos distintos y N_l el núcleo de la evaluación en a_l. Son equivalentes:*

(i) *$\{N_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base de Riesz de $V(\Phi)$.*

Más aún, para cada $f \in V(\Phi)$ se tiene que:

$$f(x) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} f(a_l + k) S_l(x - k),$$

donde $\{S_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es la base dual, con convergencia en $L^2(\mathbb{R}^d)$ y uniforme.

(ii) *Existen constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tales que para casi todo ω*

$$C_1\|u\| \leq \|Z_\Phi^*(\vec{a},\omega)u\| \leq C_2\|u\| \qquad \text{para todo } u \in \mathbb{C}^L.$$

Además tenemos una forma explícita para la base dual $\mathcal{S} = (S_1, \dots, S_L)$:

$$\widehat{\mathcal{S}}(\omega) = Z_\Phi^{-1}(\vec{a},\omega)\widehat{\Phi}(\omega)$$

¿Por qué se considera $L = T$? Si esperamos que lo núcleos reproductivos formen una base Riesz tenemos que tomarlo así. Esto se debe a que si $\{\psi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es una base de Riesz de V entonces $\dim(J(\omega)) = L$ para casi todo ω luego dos bases de Riesz de este tipo, del mismo espacio, deben estar generadas por la misma cantidad de funciones (lo que por otro lado da una buena razón para buscar teoremas de sobremuestreo).
Demostración.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Como Φ genera una base de Riesz entonces, por el Teorema 1.2.18 (ii), $G_\Phi(\omega)$ es inversible para casi todo ω. Luego $Rg(G_\Phi(\omega)) = \mathbb{C}^L$ para casi todo ω. (ii) se deduce entonces del teorema anterior.

$(ii) \Rightarrow (i)$.

Por el teorema anterior ya sabemos que $\{N_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}^d}$ es un marco de $V(\Phi)$. Veamos que es una base de Riesz. Por el Teorema 1.2.18 alcanza ver que $G_{\mathcal{N}}$ es inversible para casi todo ω. Por el mismo teorema y las hipótesis, $G_{\widetilde{\Phi}}(\omega)$ es inversible para casi todo ω.

Por lo ya visto en la demostración del teorema anterior, $\widehat{\mathcal{N}}_v = \widehat{\widetilde{\Phi}}_v \cdot \overline{Z_\Phi}$.

Luego, $\widehat{\mathcal{N}}_h = (\widehat{\mathcal{N}}_v)^t = Z_\Phi^* \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_h$.

Por lo tanto, por la relación (1.3), tenemos que

$$G_{\mathcal{N}} = \widehat{\mathcal{N}}_h \cdot \widehat{\mathcal{N}}_h^* = Z_\Phi^* \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_h \cdot \widehat{\widetilde{\Phi}}_h^* \cdot Z_\Phi = Z_\Phi^* \cdot G_{\widetilde{\Phi}} \cdot Z_\Phi,$$

que es un producto de tres matrices inversibles para casi todo ω ($Z_\Phi(\vec{a},\omega)$ es inversible por la hipótesis (ii)). Por lo tanto, $G_{\mathcal{N}}$ es inversible para casi todo ω, que es lo que faltaba probar.

Para ver el además, escribimos a las propias φ's usando la expansión de muestreo,

$$\varphi_{l'}(x) = \sum_{l=1}^{L} \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi_{l'}(a_t + k) S_l(x-k).$$

Transformando obtenemos, $\widehat{\varphi}_{l'}(\omega) = \sum_l Z_{\varphi_{l'}}(a_l,\omega)\widehat{S}_l(\omega)$, o escrito de otra manera, $\widehat{\Phi}(\omega) = Z_\Phi(\vec{a},\omega)\widehat{\mathcal{S}}(\omega)$ y ya sabemos que $Z_\Phi(\vec{a},\omega)$ es inversible para casi todo ω.

Más aún, como las constantes C_1, C_2 no dependen de ω, esta matriz es 'establemente' inversible (por serlo su adjunta) lo que implica que tanto sus componentes como los de su matriz inversa son funciones de L^∞, y por lo tanto las funciones de $\widehat{\mathcal{S}}$ están en L^2.

■

Veamos ahora cómo el Teorema 2.2.1 se desprende de lo anterior. Basta ver que las condiciones del Teorema 2.2.1 implican (ii) del último corolario (para el caso EIT principal). φ es continua por hipótesis. Como $\varphi(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ es claro que φ es de periodizada acotada y además $\{\varphi(k)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1$, por lo que $Z_\varphi(0,w)$ es continua y no se anula en cualquier intervalo de medida finita, luego está acotada por arriba y por abajo en un período, por lo que resulta acotada por arriba y por abajo en la recta real.

Demostremos el Teorema 2.2.2. Antes queremos recalcar que ese teorema no es simplemente considerar el caso $L = 1$ y $T = 1$ del Teorema 3.1.1. Existen sutiles pero no triviales diferencias que detallamos a continuación.

En dicho teorema el item (i) es más débil que el análogo del Teorema 3.1.1 y el (ii) es más fuerte. En el item (i) del Teorema 2.2.2 nada se dice sobre que el muestreo de cada función del espacio coincida con los coeficientes de marco de la expansión de f con el marco $\{S_a(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, o dicho de otra manera, podría ser el caso de que los núcleos reproductivos no fueran el marco dual de $\{S_a(\cdot - k)\}_{k\in\mathbb{Z}^d}$, incluso aunque se tuviera el tipo de expansión buscada (a continuación demostramos que esto no puede ser). En el Teorema 3.1.1 este hecho se deja explícito.

Corolario 3.1.5 *Para el caso de un EIT principal (i.e.,$L = 1$ y $T = 1$), (i), (ii) del Teorema 2.2.2 y (i), (ii) del Teorema 3.1.1 son todos equivalentes.*

Demostración.

Para no mezclar, llamemos *(i')*, *(ii')* respectivamente a los ítems correspondientes al Teorema 3.1.1.

(ii) $\Rightarrow$ *(ii')*

Sea $u \in G_\Phi(\omega)(\mathbb{C})$, entonces $u = G_\Phi(\omega)c$.

Usando (ii),

$$|Z_\varphi(a,\omega)u| = |Z_\varphi(a,\omega)||G_\Phi(\omega)c| \leq C_2\chi_{E_\varphi}(\omega)|G_\Phi(\omega)c| = C_2|G_\Phi(\omega)c| = C_2|u|$$

La cota por abajo se ve de manera análoga.

(ii') $\Rightarrow$ *(ii)* Se sigue de lo explicado para el caso anterior y usando el Lema 2.1.8 que dice que la tranformada de Zak se anula si $\omega \notin E_\varphi$ (de este Lema no tenemos versión para EITFG pues no hay un análogo exacto de E_φ).

Lo hecho hasta ahora muestra que pedir que la transformada de Zak, $Z(a,\cdot)$, se anule para $\omega \notin E_\varphi$ es una condición superflua a la hora de ver si un espacio es o no de muestreo. En realidad, basta recordar que el Lema 2.1.8 solo usa la propiedad de periodizada acotada de las funciones generadoras.

(ii') $\Rightarrow$ *(i')* Fue probado en el teorema.

(i') $\Rightarrow$ *(i)* Es directo.

(i) $\Rightarrow$ *(ii')* Si $\omega \notin E_\varphi$ no hay nada que probar, se deduce del Lema 2.1.8.

Supongamos $\omega \in E_\varphi$. Recordemos que $E_\varphi = E_S$ para casi todo ω por el Lema 1.2.15. Como $\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}\varphi(a+k)S_a(x-k)$ entonces transformando tenemos $\widehat{\varphi}(\omega) = Z_\varphi(a,\omega)\widehat{S}_a(\omega)$, lo que implica que $G_\varphi(\omega) = |Z_\varphi(a,\omega)|^2 G_{S_a}(\omega)$. El resultado se sigue ahora de que $G_\varphi(\omega)$ y $G_{S_a}(\omega)$ están acotados por arriba y por abajo en E_φ porque tanto las translaciones de φ como de S_a generan un marco de $V(\varphi)$.

Además es claro que $\widehat{S}_a(\omega) = \widehat{\varphi}(\omega)/Z_\varphi(a,\omega)$ en $E_\varphi = E_S$. ■

3.2. Aplicando el teorema de sobremuestreo

Para ir terminando vamos a mostrar cómo se puede aplicar el teorema de la sección anterior. Lo que queremos es encontrar condiciones sobre las funciones generadoras $\{\varphi_l\}_{1\leq l\leq L}$ que aseguren que $V(\Phi)$ sea un espacio de sobremuestreo y, cuando se pueda, dar una estimación de qué sobremuestreo tomar.

Para simplificar vamos a considerar $d=1$, pero muchos de estos resultados pueden ser extendidos para $L^2(\mathbb{R}^d)$ con $d\geq 1$.

Antes algunos preliminares.

Lema 3.2.1 *Sea $G\in\mathbb{C}^{L\times L}$ autoadjunta. Supongamos que existen $A,B>0$ tales que $AG\leq G^2\leq BG$, entonces $AG^2\leq G^3\leq BG^2$.*

Demostración.

Las hipótesis implican además que $G\geq 0$ y con esto el resultado se sigue fácil. ■

Corolario 3.2.2 *Sea $\{\varphi_l(\cdot-k)\}_{1\leq l\leq L,k\in\mathbb{Z}}$ un marco de $V(\Phi)\subseteq L^2(\mathbb{R})$ con constantes A,B. Entonces para casi todo ω se tiene que*

$$A\|u\|^2\leq\langle G_\Phi(\omega)u,u\rangle\leq B\|u\|^2 \text{ para todo } u\in Rg(G_\Phi(\omega)).$$

Demostración.

Se sigue del Teorema 1.2.18 y del lema anterior. ■

Observar que la condición que manejamos en la sección anterior para tener sobremuestreo era acotar por arriba y por abajo a $\|Z_\Phi^*(\vec{a},\omega)u\|$.

Ahora, si $\vec{a}_T:=(-1/2+\frac{1}{T},\ldots,-1/2+\frac{T-1}{T},1/2)$ nos queda que para un ω fijo,

$$\frac{1}{T}\|Z_\Phi^*(\vec{a}_T,\omega)u\|^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|\overline{\sum_l Z_{p_l}(-1/2+\frac{t}{T},\omega)u_l}|^2.$$

Pero el miembro de la derecha no es otra cosa que una suma de Riemman de la integral $\int_{[-1/2,1/2]}|\sum_l\overline{Z_{\varphi_l}(x,\omega)}u_l|^2dx$. Si las φ's son lo suficientemente buenas, para T grande la integral se parecerá a sus sumas de Riemman. Más aún, si las φ's son todavía mejores, podemos pensar que las sumas de Riemman pueden aproximar a la integral de una manera uniforme en ω (y en u). En este caso, el trabajo se reducirá a tomar T grande y tratar de acotar la integral por arriba y por abajo. Resulta ser que justamente, para φ's todavía más agradables, esta integral coincide con $\langle G_\Phi u,u\rangle$, que por el Corolario 3.2.2 está acotado por arriba y por abajo. Esta idea motiva la siguiente proposición.

Teorema 3.2.3 *Supongamos que tenemos la sucesión de particiones de* $[-1/2, 1/2]$, $\{\vec{a}_T\}_{T\in\mathbb{N}}$, *dadas por* $\vec{a}_T = (a_1^T, \dots, a_T^T)$ *donde* $a_t^T = \frac{-1}{2} + \frac{t}{T}$ *para todo* t, $1 \leq t \leq T$.

Sea $L \in \mathbb{N}$ *y sea* $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}}$ *un marco de* $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ *con* Φ *que cumple las siguientes condiciones.*

(a) φ_l *es continua para cada* l.

(b)

$$\frac{1}{T}\|Z_\Phi^*(\vec{a}_T, \omega)u\|^2 \stackrel{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[-1/2,1/2]} |\sum_l \overline{Z_{\varphi_l}(x,\omega)}u_l|^2 dx$$

de manera uniforme en $\omega \in [-1/2, 1/2]$ *y en* $u \in \mathbb{C}^L$, $\|u\| = 1$.

(c) *Para casi todo* ω *se tiene que:*

$$Z_{\varphi_l}(x,\omega) = Z_{\widehat{\varphi}_l}(\omega, -x)e^{2\pi i\langle x,\omega\rangle} \text{ para casi todo } x \in [-1/2, 1/2].$$

Entonces existe $T_0 \in \mathbb{N}$ *y constantes* $0 < C_1 \leq C_2$ *tales que, para casi todo* ω,

$$C_1\|u\| \leq \|Z_\Phi^*(\vec{a}_{T_0}, \omega)u\| \leq C_2\|u\| \quad \text{para todo } u \in Rg(G_\Phi(\omega)).$$

Demostración.

Normalizando, lo que queremos ver es equivalente a que para algún T_0 existan constantes $0 < C_1 \leq C_2$ tales que para casi todo ω

$$C_1 \leq \|Z_\Phi^*(\vec{a}_{T_0}, \omega)u\| \leq C_2 \quad \text{para todo } u \in Rg(G_\Phi(\omega)) \text{ tal que } \|u\| = 1$$

Usando (c) realizamos este interesante cálculo, para casi todo ω,

$$\int_{[-1/2,1/2]} |\sum_l \overline{Z_{\varphi_l}(x,\omega)}u_l|^2 dx = \int_{[-1/2,1/2]} |\sum_l \overline{Z_{\widehat{\varphi}_l}(\omega,-x)}e^{-2\pi i\langle x,\omega\rangle}u_l|^2 dx$$

$$= \int_{[-1/2,1/2]} |\sum_k \sum_l \overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}u_l e^{-2\pi i\langle k,x\rangle}|^2 dx = \sum_k |\sum_l \overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}u_l|^2$$

$$= \sum_k \sum_{l,l'} \widehat{\varphi}_{l'}(\omega+k)\overline{\widehat{\varphi}_l(\omega+k)}u_l\overline{u_{l'}} = \langle G_\Phi(\omega)u, u\rangle.$$

Donde usamos que la norma en $L^2([-1/2,1/2])$ de una función coincide con la norma ℓ^2 de sus coeficientes de Fourier, y la conmutatividad de las sumas se debe a que una de las dos es finita.

Como Φ genera un marco con constantes A, B entonces, normalizando el resultado del Corolario 3.2.2, tenemos equivalentemente que, para casi todo ω,

$$A \leq \langle G_\Phi(\omega)u, u\rangle \leq B \quad \forall\, u \in Rg(G_\Phi(\omega)),\ \|u\| = 1.$$

Sea $0 < \varepsilon < A$ arbitrario. Entonces juntando todo lo anterior (e 'intersecando' todos los 'para casi todo ω', que son finitos) por (b) existe T_0 tal que, para casi todo $\omega \in [-1/2, 1/2]$ y para todo $u \in Rg(G_\Phi(\omega))$ tal que $\|u\| = 1$,

$$\langle G_\Phi(\omega)u, u\rangle - \varepsilon \leq \frac{1}{T_0}\|Z_\Phi^*(\vec{a}_{T_0}, \omega)u\|^2 \leq \langle G_\Phi(\omega)u, u\rangle + \varepsilon$$

Esto implica que, para casi todo $\omega \in [-1/2, 1/2]$ y para todo $u \in Rg(G_\Phi(\omega))$ tal que $\|u\| = 1$,

$$0 < T_0(A - \varepsilon) \leq \|Z_\Phi^*(\vec{a}_{T_0}, \omega)u\|^2 \leq T_0(B + \varepsilon),$$

que es lo que queríamos ver. ■

Notar que las cotas para la transformada de Zak generalizada dependen de T_0 sensiblemente (aumentándolas). Esto era de esperarse pues cuanto mayor es T mayor es la redundancia del marco formado por los núcleos reproductivos.

Lo que queremos conseguir ahora son φ's que cumplan (a), (b) y (c). El siguiente lema técnico sirve para manejar la condición (b) del teorema. Recordar que para una función continua a valores complejos su integral significa la integral de la parte real más i por la integral de la parte imaginaria.

Lema 3.2.4 *Sean $F_l : [-1/2, 1/2]^2 \to \mathbb{C}$, $1 \leq l \leq L$, funciones continuas y $\{\vec{a}_T\}_T$ como en el teorema anterior, entonces*

(a)

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} |\sum_l F_l(a_t^T, \omega)u_l|^2 \overset{T\to\infty}{\longrightarrow} \int_{[-1/2,1/2]} |\sum_l F_l(x, \omega)u_l|^2 dx$$

de manera uniforme en $\omega \in [-1/2, 1/2]$ y en $u \in \mathbb{C}^L$, $\|u\| = 1$.

(b) *Además, si para cada l, F_l es Hölder continua (C, α) con respecto a la variable x (i.e. para cada ω vale que $|F(x_1, \omega) - F(x_2, \omega)| \leq C|x_1 - x_2|^\alpha$ para todo par $x_1, x_2 \in [-1/2, 1/2]$), entonces dado $\varepsilon > 0$, tomando*

$T_0 > \left(\frac{2MCL^2}{(\alpha+1)\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$ *se tiene que para todo* ω *y para todo* $u \in \mathbb{C}^L$ *tal que* $\|u\| = 1$,

$$\left| \frac{1}{T_0} \sum_{t=1}^{T_0} |\sum_l F_l(a_t^{T_0}, \omega) u_l|^2 - \int_{[-1/2,1/2]} |\sum_l F_l(x, \omega) u_l|^2 dx \right| < \varepsilon,$$

donde $M := \max_l \|F_l\|_{L^\infty([-1/2,1/2]^2)}$.

Demostración.

(a) Fijemos $1 \leq l, l' \leq L$. La función $F_l \overline{F_l'}$ es uniformemente continua en $[-1/2, 1/2]^2$ y además, por esto mismo, también es uniformemente continua cuando la restringimos al segmento $[-1/2, 1/2] \times \{w\}$, por lo que es integrable Riemman sobre cada segmento (como función a valores complejos).

Dicho esto, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Para $\frac{\varepsilon}{3L^2}$ tomamos un $\delta > 0$ que sirva para las continuidades uniformes de todas las funciones $\{F_l \overline{F_l'}\}_{1 \leq l, l' \leq L}$ simultaneamente (como de costumbre, tomamos el más chico de los que sirven para cada una individualmente).

Por compacidad, sean $\omega_1, \ldots, \omega_R \subset [-1/2, 1/2]$ tales que $[-1/2, 1/2] \subset \cup_r (\omega_r - \frac{\delta}{2}, \omega_r + \frac{\delta}{2})$.

Y por último, elegimos un T_0 tal que

$$\left| \frac{1}{T_0} \sum_{t=1}^{T_0} F_l(a_t^{T_0}, \omega_r) \overline{F_{l'}(a_t^{T_0}, \omega_r)} - \int_{[-1/2,1/2]} F_l(x, \omega_r) \overline{F_{l'}(x, \omega_r)} dx \right| < \frac{\varepsilon}{3L^2},$$

Para cada elección de l, l' y r (simultáneamente, elegimos el mayor de los $L^2 R$ candidatos a T_0). Notar que esto se puede hacer debido a las aclaraciones hechas al principio. En lo que sigue no escribimos el T_0 en $a_t^{T_0}$.

Sean $u \in \mathbb{C}^L$ tal que $\|u\| = 1$ y $\omega \in [-1/2, 1/2]$ cualesquiera. Entonces existe r_0, $1 \leq r_0 \leq R$ tal que $|\omega - \omega_{r_0}| < \delta$. Además, como $\|u\| = 1$ entonces $|u_l u_l'| \leq 1$ para todo par l, l'. Acotemos.

$$\left| \frac{1}{T_0} \sum_{1 \leq t \leq T_0} \left| \sum_{1 \leq l \leq L} F_l(a_t, \omega) u_l \right|^2 - \int_{[-1/2,1/2]} \left| \sum_{1 \leq l \leq L} F_l(x, \omega) u_l \right|^2 dx \right| =$$

$$\left| \sum_{l,l'} u_l \overline{u_l'} \left(\frac{1}{T_0} \sum_t F_l(a_t, \omega) \overline{F_{l'}(a_t, \omega)} - \int_{[-1/2,1/2]} F_l(x, \omega) \overline{F_{l'}(x, \omega)} dx \right) \right| \leq$$

$$\sum_{l,l'}\left|\frac{1}{T_0}\sum_t F_l(a_t,\omega)\overline{F_{l'}(a_t,\omega)}-\int_{[-1/2,1/2]}F_l(x,\omega)\overline{F_{l'}(x,\omega)}dx\right|:=\sum_{l,l'}U_{ll'}$$

y resulta, $U_{ll'}\leq V_{1ll'}+V_{2ll'}+V_{3ll'}$, donde

$$V_{1ll'}=\left|\frac{1}{T_0}\sum_t\left[F_l(a_t,\omega)\overline{F_{l'}(a_t,\omega)}-F_l(a_t,\omega_{r_0})\overline{F_{l'}(a_t,\omega_{r_0})}\right]\right|\leq\frac{\varepsilon}{3L^2},$$

$$V_{2ll'}=\left|\frac{1}{T_0}\sum_t F_l(a_t,\omega_{r_0})\overline{F_{l'}(a_t,\omega_{r_0})}-\int_{[-1/2,1/2]}F_l(x,\omega_{r_0})\overline{F_{l'}(x,\omega_{r_0})}dx\right|<\frac{\varepsilon}{3L^2},$$

$$V_{3ll'}=\left|\int_{[-1/2,1/2]}\left[F_l(x,\omega_{r_0})\overline{F_{l'}(x,\omega_{r_0})}-F_l(x,\omega)\overline{F_{l'}(x,\omega)}\right]dx\right|<\frac{\varepsilon}{3L^2}.$$

En el primer y último caso estamos usando la continuidad uniforme y en el del medio la elección de T_0.

Luego $\sum_{l,l'}U_{ll'}<\varepsilon$. Esto termina la demostración de la primera parte.

(b) Notemos lo siguiente, dados l,l', usando la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}|(F_l\overline{F}_{l'})(x_1,\omega)-(F_l\overline{F}_{l'})(x_2,\omega)| &\leq |F_l(x_1,\omega)||\overline{F}_{l'}(x_1,\omega)-\overline{F}_{l'}(x_2,\omega)|\\ &+ |\overline{F}_{l'}(x_2,\omega)||F_l(x_1,\omega)-F_l(x_2,\omega)|\\ &\leq 2MC|x_1-x_2|^\alpha.\end{aligned}$$

Esto nos dice que para casi todo ω la función $(F_l\overline{F}_{l'})(\cdot,\omega)$ es Hölder continua $(2MC,\alpha)$ con respecto a la variable x. Ahora, con la misma cuenta que antes tenemos que, dado $T\in\mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{t=T}|\sum_l F_l(a_t,\omega)u_l|^2-\int_{[-1/2,1/2]}|\sum_l F_l(x,\omega)u_l|^2dx\right|\leq\sum_{l,l'}U_{ll'},$$

pero acotamos los $U_{ll'}$ de la siguiente manera. Recordemos que $a_t^T=-\frac{1}{2}+\frac{t}{T}$. (que no depende de ω).

$$U_{ll'}\leq\sum_{t=1}^{t=T_0}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{t-1}{T}}^{-\frac{1}{2}+\frac{t}{T}}|(F_l\overline{F}_{l'})(-\frac{1}{2}+\frac{t}{T},\omega)-(F_l\overline{F}_{l'})(x,\omega)|dx$$

$$\leq 2MC\sum_{t=1}^{t=T_0}\int_{-\frac{1}{2}+\frac{t-1}{T}}^{-\frac{1}{2}+\frac{t}{T}}\left(-\frac{1}{2}+\frac{t}{T}-x\right)^\alpha dx=2MCT\frac{1}{(\alpha+1)T^{\alpha+1}}=\frac{2MC}{(\alpha+1)T^\alpha}.$$

Entonces $\sum_{l,l'}U_{ll'}\leq\frac{2MCL^2}{(\alpha+1)T^\alpha}$.

Luego, si queremos que $\frac{2MCL^2}{(\alpha+1)T^\alpha} < \varepsilon$ basta tomar $T > \left(\frac{2MCL^2}{(\alpha+1)\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. ■

Veamos una condición suficiente para poder aplicar la parte (a) del lema anterior.

Proposición 3.2.5 *Sea $L \in \mathbb{N}$. Sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ con φ_l continuas y tales que $F^l_M(x) = \sum_{|k|\le M} |\varphi_l(x+k)|$ converge uniformemente en $[-1/2, 1/2]$ a una función F^l, para cada l. Entonces $\{\varphi_l\}_{1\le l\le L}$ cumple las condiciones del Teorema 3.2.3.*

Demostración.

(b) Para cada ω llamemos $e_k(\omega) := e^{-2\pi i\langle k,\omega\rangle}$. Entonces por la hipótesis $Z^l_M(x,\omega) = \sum_{|k|<M} \varphi_l(x+k)e_k(\omega)$ converge uniformemente en $[-1/2, 1/2]^2$ a Z_{φ_l} y como φ_l es continua, Z_{φ_l} resulta continua. Aplicamos el Lema 3.2.4 y listo.

(c) $\varphi_l \in L^1$ pues $sup_x \sum_k |\varphi_l(x+k)| = \sup_{x\in[-1/2,1/2]} F^l(x) < \infty$ debido a que F^l es continua. Además, $\sum_k |\widehat{\varphi}_l(\omega+k)|^2 < \infty$ para casi todo ω pues $\widehat{\varphi}_l \in L^2$. Se aplica el Lema 1.2.22 y listo. ■

Por ejemplo, las funciones amalgama continuas $W_0(L^1(\mathbb{R}))$ (i.e. f continua tal que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \text{supes}_{x\in[0,1]}|f(x+k)| < \infty$) cumplen las hipótesis de la proposición anterior, y además son de periodizada acotada. Esto, sumado a los teoremas 3.2.3 y 3.1.1, implica que si Φ está formado por funciones amalgama continuas y sus traslaciones forman un marco de $V(\Phi)$, entonces existe un T_0 tal que $V(\Phi)$ es un a_{T_0}-espacio de sobremuestreo.

A continuación damos una condición fácil de chequear que alcanza para obtener lo anterior. Este resultado es una generalización del obtenido por Hogan y Lakey en [HL00] (allí se prueba lo mismo pero para EITP tales que $\{\varphi(\cdot - k)\}$ es una base ortonormal de $V(\varphi)$ y φ es Hölder continua de soporte compacto, y para este caso tan general no se dan estimaciones sobre qué sobremuestreo tomar).

Proposición 3.2.6 *Sea $L \in \mathbb{N}$. Sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\le l\le L, k\in\mathbb{Z}}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ con φ_l continuas y tales que existe una constante $C > 0$ y otra $\beta > 1$ tal que $|(1+|x|^\beta)\varphi_l(x)| \le C$ para cada l y cada $x \in \mathbb{R}$. Entonces $V(\Phi)$ es un espacio de sobremuestreo.*

Demostración.

Que φ_l resulta de periodizada acotada se sigue de que $\frac{C}{1+|x|^\beta}$ es de periodizada acotada y además

$$\sum_k |\varphi_l(x+k)|^2 \le \sum_k \left(\frac{C}{1+|x+k|^\beta}\right)^2.$$

Por otro lado, debido a la siguiente acotación, vale la hipótesis de la proposición anterior (Proposición 3.2.5).

$$|\sum_{|k|>M} e_k\varphi_l(x+k)| \leq \sum_{|k|>M} \frac{C}{1+|x+k|^{\beta}} \stackrel{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ uniformemente en } x.$$

Hemos probado que $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}}$ cumple las condiciones del Teorema 3.2.3. Esto sumado al Teorema 3.1.1 implica que que $V(\Phi)$ es un espacio de sobremuestreo. ■

A modo de ilustración recordamos que, por ejemplo, las funciones continuas de soporte compacto y las funciones de la clase de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ cumplen lo anterior.

Hasta el momento solo dimos condiciones suficientes para que un EITFG dado sea un espacio de sobremuestreo, en términos de la existencia del 'T_0' de la Proposición 3.2.3.

Pero es importante saber, además de la existencia, alguna estimación sobre un T_0 que sirva. Con la parte (b) de la Proposición 3.2.3 mostraremos que esto se puede hacer bajo ciertas hipótesis sobre las funciones generadoras.

Proposición 3.2.7 *Sea $L \in \mathbb{N}$ y sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ con constantes A, B. Si para cada l la función φ_l es Hölder continua (C,α) y de soporte compacto, con $\operatorname{diam}(\operatorname{sop}\varphi_L) \leq D$, entonces $V(\Phi)$ es un $\vec{a}_{T_0}$-espacio de sobremuestreo con T_0 cualquiera que cumpla $T_0 > \left(\frac{8MD^2CL^2}{(\alpha+1)A}\right)^{1/\alpha}$ (donde $M = \max_l \|\varphi_l\|_\infty$).*

Demostración.

Como p_l tiene soporte compacto es de periodizada acotada y Z_{φ_l} es continua pues localmente es una suma finita de funciones continuas. Veamos que Z_{φ_l} es Hölder continua $(2DC, \alpha)$ con respecto a x.

$$|Z_{\varphi_l}(x_1,\omega) - Z_{\varphi_l}(x_2,\omega)| \leq \sum_k |\varphi_l(x_1+k) - \varphi_l(x_2+k)| \leq 2DC|x_1-x_2|^{\alpha}.$$

Además, para cada l,

$$|Z_{\varphi_l}(x,\omega)| \leq \sum_k |\varphi_l(x+k)| \leq D\|\varphi_l\|_\infty.$$

Por lo anterior el Lema 3.2.4 parte (b) se aplica y obtenemos, dado $\varepsilon > 0$, $T_0 > \left(\frac{4MCD^2L^2}{(\alpha+1)\varepsilon}\right)^{1/\alpha}$. Y para terminar recordemos que en la demostración del

Teorema 3.2.3 alcanzaba con tomar cualquier $\varepsilon < A$, si elegimos $\varepsilon = A/2$ nos queda $T_0 > \left(\frac{8MCD^2L^2}{(\alpha+1)A}\right)^{1/\alpha}$. $\blacksquare$

Vale la pena decir que si las funciones generadoras de soporte compacto son Lipschitz o $C^1(\mathbb{R})$ entonces son Hölder continuas (y si las constantes (C_l, α_l) son distintas para cada l basta con tomar $C = \text{máx}_l C_l$ y $\alpha = \text{mín}_l \alpha_l$).

Por último, también tenemos la siguiente aplicación.

Proposición 3.2.8 *Sea $L \in \mathbb{N}$ y sea $\{\varphi_l(\cdot - k)\}_{1\leq l\leq L, k\in\mathbb{Z}}$ un marco de $V(\Phi) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ con constantes A, B. Supongamos que para cada l la función φ_l es derivable y $\varphi_l, \varphi_l' \in W_0(L^1(\mathbb{R}))$. Entonces $V(\Phi)$ es un $\vec{a}_{T_0}$-espacio de sobremuestreo con T_0 cualquiera que cumpla*

$$T_0 > \frac{2\,\text{máx}_l \|\varphi_l\|_{W(L^1)}\,\text{máx}_l \|\varphi_l'\|_{W(L^1)} L^2}{A}.$$

Demostración.

Como $\varphi_l \in W_0(L^1(\mathbb{R}))$ tenemos que $\|Z_\varphi(x,\omega)\|_\infty \leq \|\varphi_l\|_{W(L^1)}$, para cada l. Además también se puede aplicar la Proposición 3.2.5. Por otro lado, debido al teorema del valor medio de Lagrange, para $-1/2 \leq x_1 < x_2 \leq 1/2$, existen $\xi_k \in [x_1 + k, x_2 + k]$ tales que

$$|Z_{\varphi_l}(x_2,\omega) - Z_{\varphi_l}(x_1,\omega)| \leq |x_2 - x_1| \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\varphi'(\xi_k)| \leq |x_2 - x_1| \|\varphi_l'\|_{W(L^1)}.$$

De manera similar a la Proposición anterior obtenemos la cota para T_0. $\blacksquare$

En particular, si las funciones que generan un marco de $V(\Phi)$ pertenecen a la clase de Schwartz, se cumple lo anterior.

Conclusión final

Muchos de los resultados obtenidos en el segundo capítulo sobre EITP y espacios de muestreo pueden ser extendidos sin dificultad al contexto EITFG y espacios de sobremuestreo. Para citar un ejemplo, el Teorema 2.3.3. Este teorema dice que un EITP, que sea subespacio de un espacio de muestreo, es en sí mismo un espacio de muestreo. Con una demostración análoga se puede ver que un EITFG, que sea subespacio de un espacio de sobremuestreo, es en sí mismo un espacio de sobremuestreo.

Otros resultados no son de tan fácil generalización, como por ejemplo el Teorema 2.3.6. Este teorema nos da condiciones suficientes para que una función pertenezca a algún espacio de muestreo. Es de esperar que se pueda obtener un resultado similar para espacios de sobremuestreo.

Dado un EIT que sea un EHNR, decimos que $X \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de muestreo estable si los núcleos reproductivos $\{N_x\}_{x\in X}$ forman un marco de dicho espacio y a las funciones del marco dual canónico las llamamos funciones de muestreo o interpolantes.

Los resultados vistos en la sección anterior nos dicen en esencia que, para un EITFG, alcanza que las funciones que generan un marco por traslaciones cumplan algunas condiciones bastante generales, para que el espacio sea un espacio de sobremuestreo. Estos resultados son en espíritu cualitativos, pues la estimación para la densidad del sobremuestreo necesario no es del todo satisfactoria. De todas formas estos resultados nos garantizan la existencia de conjuntos de muestreo estable en dichos espacios. Y se tiene la ventaja adicional de que, para este tipo en particular de conjuntos de muestreo, alcanza con hallar una cantidad finita de funciones de muestreo (pues su totalidad se obtiene a través de traslaciones).

Algunas notaciones utilizadas

$\mathbb{R}^d$	Espacio Euclideo d-dimensional
X^*	El dual del espacio de Banach X
gen(F)	El espacio formado por las combinaciones lineales finitas de elementos de F
$\overline{S}$	Clausura topológica de S
$\overline{A}$ (para A matriz)	Conjugación compleja componente a componente
diam(D)	Para $D \subset X$ donde $(X$,d) es un espacio métrico diam(D)=$\sup_{x,y\in D}$ d(x,y)
δ_{kj}	Delta de Kronecker
$Rg(U)$	Rango o imagen de un operador lineal
C^∞	Funciones infinitamente diferenciables
$L^2(\mathbb{R}^d)$	Funciones cuyo módulo es de cuadrado integrable
$\{x_k\}$ o $\{x_k\}_k$	Sucesión indexada. Por abuso de notación el conjunto de índices se entiende según el contexto
ℓ^2	Sucesiones escalares $\{x_k\}$ tales que $\sum_k \lvert x_k\rvert^2 < \infty$
infes y supes	Ínfimo esencial y supremo esencial
sop(f)	Soporte de f
$\widehat{f}$ y $\widehat{d}$	Para f función y d sucesión, la Transformada de Fourier de f y la trasformada discreta de d respectivamente
$f(\alpha\cdot -k)$	La función tal que $f(\alpha\cdot -k)(x) = f(\alpha x - k)$
$V_2 \ominus V_1$	Si $V_1 \subset V_2$, es el complemento ortogonal de V_1 en V_2
$G \leq H$	Para G y H matrices autoadjuntas, quiere decir que $\langle (H-G)x, x\rangle \geq 0$ para todo x.
$f * g$	La convolución de f con g
$\blacksquare$	La demostración ha terminado

Bibliografía

[ABH98] H. Aimar, A. Bernardis y I. Hernández, *Construcción de bases de onditas en espacios funcionales a partir de un Análisis Multiresolución*, 'Cuadernos de Matemática y Mecánica', PEMA-CIMEC, (1998).

[AG01] A. Aldroubi y K. Gröchenig, *Nonuniform sampling and reconstruction in shift-invariant spaces*, SIAM Rev. 4, **43**,585-620, (2001).

[BZ97] J. J. Benedetto y G. Zimmermann, *Sampling multipliers and the Poisson summation formula* J. Fourier Anal. Appl. 3, **5**, 505-523, (1997).

[BCH05] C. Blanco, C. Cabrelli y S. Heineken, *Functions in sampling spaces*, Sampl. Theory Signal Image Process, (2005). In Press.

[Bow00] M. Bownik, *The structure of shift-invariant subspaces of* $L^2(\mathbb{R}^n)$, J. Funct. Anal. 2, **177**, 282-309, (2000).

[Heil87] C. Heil, *A basis theory primer*, manuscrito, 93 págs, 1987 revisado 1997.

[Hig85] J. R. Higgins *Five short stories about the cardinal series*, Bull. Amer. Math. Soc. 1, **12**, 45-89, (1985).

[HL00] J. A. Hogan y J. Lakey, *Sampling for shift-invariant and wavelet subspaces*, "Wavelet Applications in Signal and Image Processing VIII", Proc. SPIE, **4119**, 36-47, (2000).

[Jan93] A. Janssen, *The Zak transform and sampling theorems for wavelet subspaces*, IEEE Trans. Signal proc., **41**, 3360-3364, (1993).

[Jer77] A. J. Jerri, *The Shannon sampling Theorem - its various extensions and applications: a tutorial review*, Proc. IEEE, **65**, 1565-1596, (1977).

[RS97] A. Ron y Z. Shen, *Frames and stable bases for shift-invariant subspaces of $L^2(\mathbb{R}^d)$*, Canad. J. Math. **47**, 1051-1094, (1995).

[Sha49] C. E. Shannon, *Communications in the presence of noise*, Proc. IRE, **37**, 10-21, (1949).

[Sun05] W. Sun, *Sampling theorems for multivariate shift invariant subspaces*, Sampl. Theory Signal Image Process. 1, **4**, 73-98, (2005).

[SZ99] W. Sun y X. Zhou, *On the sampling theorem for wavelet subspaces*, J. Fourier Anal. Appl., **5**, 347-354, (1999).

[SZ04] W. Sun y X. Zhou, *An aspect of the sampling theorem*, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, (2004). In Press.

[Wal92] G. Walter, *A sampling theorem for wavelet subspaces*, IEEE Trans. Inform. Theory 2, **38**, 881-884, (1992).

[Zai93] A. I. Zayed, *Advances in Shannon's sampling theory*, CRC Press, (1993).