

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática



Tesis de Licenciatura

ESTABILIDAD DE SOLUCIONES DE ECUACIONES DIFERENCIALES  
ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

María Marta Cannilla

Director: Pablo De Nápoli

Abril 2008

# Índice general

<b>1. Un poco de Historia</b>	<b>6</b>
1.1. El estudio del cosmos como motor de la ciencia . . . . .	6
1.2. Análisis de las perturbaciones . . . . .	7
1.3. El problema de los $n$ -cuerpos . . . . .	7
1.4. Poincaré, el gran precursor . . . . .	11
1.5. Formalización del concepto de Estabilidad . . . . .	13
<b>2. Preliminares</b>	<b>18</b>
2.1. Existencia y unicidad de soluciones . . . . .	18
2.2. Sistemas autónomos y equilibrio . . . . .	18
2.2.1. Estabilidad de Sistemas Lineales con coeficientes constantes . . . . .	22
2.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales. Funciones de Lyapunov . . . . .	22
2.3. Ecuaciones Lineales no autónomas . . . . .	24
2.3.1. Matrices Fundamentales . . . . .	24
2.3.2. Sistemas Periódicos . . . . .	27
2.3.3. Multiplicadores de Floquet . . . . .	28
2.4. Grupo Simpléctico . . . . .	31
2.4.1. Matrices Simplécticas . . . . .	31
2.4.2. Transformaciones Simplécticas . . . . .	31
2.5. Sistemas Hamiltonianos . . . . .	32
2.6. Teoría de Grado . . . . .	35
<b>3. Existencia de soluciones periódicas estables de ecuaciones diferenciales de Duffing</b>	<b>40</b>
<b>4. Estabilidad del equilibrio de un péndulo de longitud variable</b>	<b>47</b>
4.1. Un ejemplo sencillo de un péndulo de longitud variable . . . . .	47
4.2. Objetivo . . . . .	50
4.3. Estabilidad perpetua y sistemas dinámicos discretos . . . . .	50
4.4. La ecuación lineal y el grupo simpléctico . . . . .	52
4.5. Teoría de Grado e índice de ceros . . . . .	62
4.6. El índice de un equilibrio . . . . .	66
4.7. Estabilidad e índice . . . . .	73
4.8. El péndulo de longitud variable . . . . .	76

## **Agradecimientos:**

A mis padres, Marta y César y a mi hermano Ale, por tantos años de paciencia, comprensión y cariño; y a la Nona por seguirme cuidando desde arriba.

A Juanjo, mi amor, por ser mi compañero incondicional, por apoyarme siempre y por brindarme su amor.

A Pablo De Nápoli, por todo lo que me enseñó, a lo largo de la carrera y en especial durante la preparación de este trabajo. Por todo el tiempo que me dedicó y por su infinita paciencia.

A Pablo Amster y Juan Pablo Pinasco, por acceder a leer esta tesis, por sus aportes y correcciones.

A mi amiga del alma, Lau y a mis amigos de la facu: Mariana, Mercedes, Eze, Pablo, Meli, Marina, Ale y Leandro, por tantas horas de estudio compartidas, por el apoyo en las buenas y en las malas y por formar parte de mi vida.

## Introducción

Con mucha frecuencia ocurre que el estudio de fenómenos de distintas áreas del conocimiento, desde fenómenos naturales hasta económicos o sociales, conduce a la formulación de leyes dinámicas, muchas de las cuales pueden modelizarse mediante *ecuaciones diferenciales no lineales*.

La no linealidad de dichas ecuaciones hace que, en general, encontrar soluciones explícitas sea una tarea casi imposible. Por eso se han desarrollado técnicas numéricas que permiten obtener soluciones aproximadas a un problema de valores iniciales y métodos analíticos a partir de los cuales se pueden inferir propiedades cualitativas de las soluciones.

Un concepto de fundamental importancia en la teoría cualitativa de los *sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias* es el concepto de *estabilidad de soluciones*. La forma más sencilla de estudiar la estabilidad de las soluciones sería el análisis directo una vez obtenidas las soluciones, pero como mencionamos antes, son muy pocos los casos en que puede obtenerse una solución explícita de un problema de valores iniciales. Por eso a lo largo de los años se han ido desarrollando formas alternativas para estudiar la *estabilidad* de soluciones de ecuaciones diferenciales sin necesidad de obtener explícitamente las soluciones.

Pero, ¿qué entendemos por una solución estable? Ciertamente, todos coincidiremos en que se refiere a algo que no cambia o que ofrece resistencia al cambio, que se mantiene en estado estacionario o permanente.

El tema de la *estabilidad* ha desvelado a filósofos y científicos desde épocas muy remotas. En particular les preocupaba la estabilidad del sistema solar. A través del aporte de distintos científicos el concepto de estabilidad ha ido tomando forma y rigurosidad. Y desde, por lo menos 120 años atrás, gracias al aporte del matemático ruso A. M. Lyapunov, contamos con dos métodos para el estudio de la estabilidad, uno llamado *método directo*, basado en aproximaciones lineales de las ecuaciones diferenciales no lineales, y otro conocido como *segundo método*, que permite estudiar la estabilidad de las soluciones de los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias a partir de las propiedades de cierta función llamada *función de Lyapunov*, en honor a su creador.

Para entender el concepto de estabilidad, consideremos *una solución de una ecuación diferencial que representa un fenómeno físico o la evolución de algún sistema. Siempre existen dos fuentes de incertidumbre en las condiciones iniciales. De hecho, cuando uno intenta repetir un experimento dado, la reproducción de las condiciones iniciales nunca es completamente confiable: por ejemplo, un satélite sólo puede ser puesto en órbita desde un punto y con cierta velocidad que depende de distintas circunstancias relacionadas con el lanzamiento de cohetes espaciales. Es, por lo tanto, fundamental poder reconocer bajo qué circunstancias, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, producirán sólo pequeñas variaciones en lo que sigue del fenómeno.*

Este ejemplo describe claramente la idea de estabilidad, pero para el tipo de estudio que queremos hacer necesitamos introducir un marco matemático más estricto.

La *estabilidad* puede ser descrita como la propiedad de las soluciones de ecuaciones diferenciales por la cual, dada una solución de referencia  $x^*(t, t_0^*, x_0^*)$  de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x), \\ x_0^* &= x(t_0^*, t_0^*, x_0^*) ; \quad t \in \mathbb{R}_{\geq t_0^*}; \quad t_0^* \in \mathbb{R}_{\geq 0} \end{aligned} \tag{1}$$

cualquier otra solución  $x(t, t_0, x_0)$  que comience cerca de  $x^*(t, t_0^*, x_0^*)$ , es decir, tal que  $t_0^* \approx t_0$  y  $x_0^* \approx x_0$ , se mantiene cerca de  $x_0^* = x(t_0^*, t_0^*, x_0^*)$  para tiempos posteriores.

A simple vista podría parecer que la propiedad de continuidad de soluciones con respecto a las condiciones iniciales, y por lo tanto las condiciones suficientes para que esto suceda, podrían dar una respuesta al problema de la estabilidad. Sin embargo, el teorema acerca de la continuidad de soluciones

con respecto a las condiciones iniciales, establece condiciones suficientes para que una solución *perturbada* se mantenga cerca de una solución *no perturbada* en un intervalo de tiempo finito. Mientras que, si hablamos de estabilidad, lo que se pretende es tener información acerca del comportamiento a largo término de estas soluciones perturbadas. Nos interesa saber si permanecerá cerca de la solución  $x_0^* = x(t_0^*, t_0^*, x_0^*)$ , en todo momento, toda solución de (1) que esté cerca de  $x_0^*$  en el instante  $t_0$ , o si existen soluciones que terminan por alejarse de  $x^*(t, t_0^*, x_0^*)$  no importa lo cercanas que alguna ocasión estuvieron de  $x_0^*$ .

En el Capítulo 1 de este trabajo se intenta hacer un breve repaso del desarrollo histórico del concepto de estabilidad hasta la formulación definitiva que manejamos hoy en día.

En el Capítulo 2 se presentan en forma resumida las definiciones y teoremas acerca del concepto de *estabilidad* y de otros temas como la *formulación Hamiltoniana para sistemas dinámicos*, las propiedades del *grupo simpléctico* y la *Teoría de grado*, que serán de utilidad para comprender los resultados sobre estabilidad que se presentan en los capítulos siguientes.

En el Capítulo 3 se mostrarán cotas para la derivada de la fuerza de restauración de una ecuación diferencial de segundo orden periódica, con período  $T > 0$ , y amortiguación lineal, que garantizarán la existencia y unicidad de una solución  $T$ -periódica asintóticamente estable.

Por último, en el Capítulo 4 estudiaremos la estabilidad de la posición de equilibrio  $\theta = 0$  para la ecuación del péndulo de longitud variable. Veremos que en la mayoría de los casos el equilibrio se comporta de igual manera para la ecuación linearizada que para la ecuación original, pero existen excepciones. Por otro lado, mostraremos que el estudio de la estabilidad a partir de la aproximación de tercer orden permite arribar a las conclusiones correctas, es decir que,  $\theta = 0$  será estable para la ecuación del péndulo de longitud variable si y sólo si es estable para la aproximación de tercer orden. Para ello utilizaremos como herramienta la Teoría de Grado. En particular, nos interesará el cálculo de ciertos índices de la ecuación del péndulo que nos permitirán distinguir casos de inestabilidad.

Cabe mencionar que gran parte del análisis hecho en este capítulo se basa en el conocimiento de la estructura algebraica del grupo simpléctico  $Sp(\mathbb{R}^2)$ .

Los resultados de estos dos últimos capítulos pretenden ilustrar algunos de los métodos de análisis que se utilizan para el estudio de la estabilidad de soluciones periódicas de ecuaciones diferenciales de segundo orden.

# Capítulo 1

## Un poco de Historia

### 1.1. El estudio del cosmos como motor de la ciencia

Aún cuando hay indicios de que desde hace muchos siglos se ha estudiado una serie de problemas donde ya se halla inmersa una idea intuitiva de la noción de estabilidad, la formalización matemática del concepto es relativamente reciente.

Podemos citar como ejemplo de esta preocupación temprana por la *estabilidad* al filósofo griego Aristóteles (384-322), quien consideró la balanza en equilibrio, y estudió las fuerzas que podían alterar dicho estado y los diferentes movimientos que podían resultar.

En 1687 se publica la obra cumbre de la dinámica clásica y obra maestra de Isaac Newton (1642-1727), *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Aquí Newton rompe la barreras aristotélicas que separan los cielos de la tierra, pues logró probar que todos, absolutamente todos, los movimientos de los cuerpos celestes, obedecen a una única ley: *La Ley de gravitación universal*, que dice: *cualesquiera dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  se atraen con una fuerza cuya magnitud es directamente proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.*

Para la formulación de sus leyes de movimiento, Newton tuvo que introducir una matemática adecuada. Así, teniendo como motivación la descripción del movimiento de los cuerpos, inventa el Cálculo Diferencial e Integral, y es precisamente en sus términos que expresa sus leyes de movimiento. Con los *Principia* no sólo se realiza la primera síntesis de la ciencia, sino que abre la posibilidad de hacer realidad uno de los más viejos sueños de la humanidad: *entender el movimiento de los cuerpos celestes.*

El estudio del movimiento de los cuerpos celestes dio lugar a preguntas como las siguientes:

1. *En el futuro, durante miles de millones de años, ¿los planetas seguirán las mismas trayectorias o en algún momento algunos de ellos chocarán entre sí o quizás alguno escapará del sistema solar?*
2. *Los efectos de las interacciones mutuas de todos los cuerpos del sistema solar, ¿no modificarán de manera significativa las trayectorias actuales de los planetas y demás cuerpos de dichos sistemas o, por el contrario, las transformarán de forma radical e irreversible?*

En resumidas cuentas, la pregunta a la que intentaban dar respuesta era: *¿El sistema solar es estable?* Hasta aquí no había una definición precisa del concepto de estabilidad, por lo que la pregunta resultaba un poco vaga.

Antes de los *Principia* de Newton era prácticamente imposible dar respuesta a este interrogante. Es en los *Principia* donde, por primera vez, se plantea el problema del movimiento en términos de ecuaciones diferenciales no lineales asociadas a la posición de masas puntuales que se atraen con una fuerza cuya magnitud está dada por la *Ley de gravitación universal*.

## 1.2. Análisis de las perturbaciones

De la Ley de gravitación universal se deduce que si cualquier cuerpo del sistema solar fuese atraído únicamente por el sol, entonces dicho cuerpo se movería alrededor de él exactamente como estableció Johannes Kepler (1571-1630) en las leyes que enunció:

1. *La órbita de un planeta alrededor del sol es una elipse, con el sol colocado en uno de sus focos.*
2. *El vector de posición entre el sol y el planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.*
3. *Para cualquier planeta, el cuadrado de su período orbital (tiempo que tarda en dar una vuelta alrededor del Sol) es directamente proporcional al cubo de la distancia media con el Sol*

$$\frac{P^2}{r^3} = K$$

donde,  $P$  es el periodo orbital,  $r$  la distancia media del planeta con el Sol y  $K$  la constante de proporcionalidad.

La ley de las áreas es equivalente a la constancia del momento angular, es decir, cuando el planeta está más alejado del Sol (afelio) su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol (perihelio). En el afelio y en el perihelio, el momento angular  $L$  es el producto de la masa del planeta, por su velocidad y por su distancia al centro del Sol.

$$L = m.v_1.r_1 = m.v_2.r_2$$

A este tipo de movimiento se lo llama movimiento no perturbado. Pero todos los cuerpos del sistema solar sufren atracciones mutuas, por esta razón ninguno de ellos se mueve siguiendo exactamente una trayectoria elíptica.

A las desviaciones de los movimientos respecto de las Leyes de Kepler se las llama *perturbaciones*, y en consecuencia, al movimiento real de los cuerpos se lo llama *movimiento perturbado*. Las perturbaciones pueden ser de dos clases:

1. *Movimientos oscilatorios con períodos relativamente cortos, del orden de unos cuantos años.*
2. *Pequeños cambios en los parámetros de la elipse, que pueden ser oscilatorios con períodos muy largos, de decenas de miles de millones de años, o pueden ser no oscilatorios.*

A las de la primera clase se las llama *desigualdades periódicas*, y pueden pensarse como la respuesta de un cuerpo a las fuerzas periódicas ejercidas sobre él por sus vecinos al describir sus órbitas. Las de la segunda clase se conocen como *desigualdades seculares*, y lo importante es determinar si, al cabo de miles de años, estas perturbaciones conducirán a la destrucción del sistema solar.

Muchos matemáticos y astrónomos del siglo XVIII dedicaron sus investigaciones a demostrar que estas perturbaciones de las trayectorias de los cuerpos del sistema solar, estaban en concordancia con la Ley de gravitación.

## 1.3. El problema de los $n$ -cuerpos

Durante los siglos XVIII y XIX, la mayoría de los matemáticos dedicó parte de su actividad científica al estudio de la estabilidad del sistema solar. Abstrayéndonos de este problema en particular, el problema consistía en estudiar el comportamiento de  $n$ -partículas que se mueven en el espacio tridimensional si la ley que rige el movimiento es la Ley de gravitación universal. Este es el conocido

problema de los  $n$ -cuerpos que no ha dejado de generar investigaciones desde 1750 hasta la fecha y consiste en encontrar, dadas las posiciones iniciales, masas y velocidades de  $n$  cuerpos, sus posiciones para cualquier instante.

Si consideramos  $n$ -partículas de masa  $m_i > 0$  moviéndose bajo la acción gravitatoria de Newton en el espacio  $\mathbb{R}^3$  con  $n > 1$ , las ecuaciones de movimiento de las  $n$  partículas son  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden definidas en un abierto de  $\mathbb{R}^3$ , es decir, un sistema de  $6n$  ecuaciones diferenciales de primer orden. Si la  $i$ -ésima partícula tiene masa  $m_i > 0$  y posición  $x_i \in \mathbb{R}^3$ , aplicando la segunda ley de Newton se obtienen las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (x_j - x_i)}{\|x_j - x_i\|^3}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.1)$$

donde  $G$  es la constante de gravitación y  $\|\cdot\|$  es la norma euclídeana de  $\mathbb{R}^3$ .

Los elementos del conjunto  $\Delta_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^{3n}, x_i = x_j \text{ para } i \neq j\}$  corresponden a la colisión de dos o más cuerpos.

Las ecuaciones de movimiento (1.1) se pueden escribir

$$\dot{x} = M^{-1}y \quad (1.2)$$

$$\dot{y} = \nabla U(x)$$

donde  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ , es el vector de posición,  $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ , es el vector de momentos, esto es  $y_i = m_i \dot{x}_i$ ,  $M = \text{diag}(m_1, m_1, m_1, \dots, m_n, m_n, m_n)$  es la matriz de masas y  $\nabla U(x)$  es el vector gradiente del potencial

$$U(x) = U(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{G m_i m_j}{\|x_j - x_i\|}$$

El dominio de definición del sistema (1.3), o *espacio de fase* es  $\Omega = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta) \times \mathbb{R}^{3n}\}$ . Luego  $\dim \Omega = 6n$ . El *espacio de configuración* o espacio de posiciones es  $V = \{x \in \mathbb{R}^{3n} \setminus \Delta\}$

Las *integrales primeras*, para ecuaciones diferenciales ordinarias, son funciones que se mantienen constantes a lo largo de cualquier solución del sistema. La constante depende en cada caso de la solución. En otras palabras, las integrales establecen relaciones entre las variables del sistema, de forma que, normalmente, cada integral escalar permitirá reducir en una unidad la dimensión del sistema. Por supuesto, esta reducción será posible sólo si la integral es una función algebraica, no demasiado complicada, con respecto a sus variables. (Ver [2] pág. 67 y 68)

El problema de los  $n$ -cuerpos tiene 10 integrales algebraicamente independientes:

- 3 de los centros de masa:

$$at + b = \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^3$$

- 3 de los momentos lineales:

$$a = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^3$$

- 3 de los momentos angulares:

$$J = x \times y \quad \text{con } J \in \mathbb{R}^3$$

- 1 de la energía:

$$H(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n m_k |\dot{x}_k|^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad r_{ij} = |x_i - x_j|$$

( $H$  recibe el nombre de función Hamiltoniana)

Esto permite una reducción de las variables a  $6n - 10$ . La pregunta que surgía era si habría otras integrales aparte de estas 10. La respuesta llegó en 1887 de la mano de H. Bruns [7], que enunció y demostró el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.1 (Integrales primeras del problema de los  $n$ -cuerpos):** *Las únicas integrales linealmente independientes, que son algebraicas con respecto a  $q$ ,  $p$  y  $t$  son las 10 que mencionamos antes.*

En el teorema anterior,  $q = (q_1, \dots, q_n)$  y  $p = (p_1, \dots, p_n)$  representan las coordenadas generalizadas y los momentos generalizados del sistema. Informalmente, se denominan **coordenadas generalizadas** a un conjunto cualquiera de parámetros numéricos que sirven para determinar de manera unívoca la configuración de un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad. Más formalmente, las coordenadas generalizadas se definen como un sistema de coordenadas curvilíneas sobre la variedad de configuración de un sistema físico como por ejemplo el espacio de configuración o el espacio de fases de la mecánica clásica. Los momentos generalizados dependen de las coordenadas generalizadas: si la coordenada generalizada es la posición lineal, el momento correspondiente será el momento lineal o cantidad de movimiento, si la coordenada generalizada es la posición angular, el momento correspondiente será el momento angular.

Mientras que el *problema de los dos cuerpos* está resuelto, es decir que hay un conjunto de fórmulas que permiten realizar el cálculo para determinar la posición de los dos cuerpos para cualquier instante de tiempo (el movimiento de un cuerpo con respecto a otro es siempre un círculo, una elipse, una parábola, una hipérbola o una línea recta), no se puede afirmar lo mismo acerca del *problema de los tres cuerpos* (y el de los  $n$ -cuerpos con  $n > 3$ ). Cabe aclarar que esto no significa que sea imposible resolver el problema de los  $n$ -cuerpos como suele afirmarse. La afirmación de que el problema de los  $n$ -cuerpos no tiene solución, hace referencia a que no puede resolverse mediante el método de las *integrales primeras*.

En 1912, el finlandés Karl Sundman [37] presentó una solución general para el problema de los 3-cuerpos en forma de series de potencias de una variable de regularización que, sin embargo, debido a la lentitud de la convergencia de estas series, resultó no ser operativa, esto es, no permitían ni calcular las posiciones de los cuerpos en el espacio ni obtener conclusiones sobre el carácter de los movimientos. Finalmente el resultado de Sundman fue generalizado para el caso de  $n > 3$  por Q. Wang en 1990 [39].

Pero antes de llegar a estos resultados generales varios científicos realizaron aportes importantes para algunos casos particulares:

En 1767 **Leonhard Euler** (1707-1783), publicó un estudio del problema de los tres cuerpos. En él obtuvo una clase completa de soluciones periódicas. Probó que si tres partículas de masas arbitrarias inicialmente están colocadas sobre una línea recta en los puntos  $A, B$  y  $C$  respectivamente, si se cumple que  $\frac{AB}{BC}$  tiene un valor dado, y se le asignan velocidades adecuadas a cada una de las partículas, entonces éstas se mueven en órbitas elípticas, manteniendo todo el tiempo su configuración colineal.

**Pierre Simon Laplace** (1749-1827), en su "*Memoria sobre la Estabilidad*", publicada en 1773 enunció y demostró el siguiente teorema:

**Teorema 1.3.2** *En la primera aproximación de las series de potencias de las excentricidades, los ejes mayores de los planetas no tienen términos seculares.*

Los términos seculares dependen de la variable tiempo. Si los términos seculares no aparecían, era claro, que por no aparecer el tiempo, los ejes mayores de las órbitas de los planetas permanecían acotados, es decir, son funciones acotadas del tiempo.

Con este trabajo basado en el método de aproximación por series de potencias, Laplace inició lo que se conoce como *teoría de perturbación*. A grandes rasgos ésta consiste en lo siguiente: para resolver un problema, se toma una solución conocida para un problema semejante más simple, y sucesivamente se modifica para aproximar mejor la solución correcta, que no se puede calcular exactamente. Así, en el caso del movimiento de un planeta alrededor del Sol, se puede considerar que se trata de un problema de dos cuerpos (su movimiento es una elipse) y tratar la acción de los demás cuerpos como perturbaciones a esa elipse encontrada, que causarán variaciones de la excentricidad, oscilaciones del plano de la órbita que harán variar la posición del nodo, o el giro del eje mayor de la órbita que hará variar el perihelio (punto de la órbita de un planeta alrededor del Sol donde el planeta tiene la mínima distancia con el Sol).

Para aplicar este método se requiere un parámetro en términos del cual hacer la expansión en series de potencias. Laplace usó como este parámetro la excentricidad de la órbita de los planetas que expresa el grado de desviación con respecto a una órbita circular.

Laplace publicó los resultados de estos trabajos en 1799 en su obra *Mécanique Celeste* [22].

En 1772 **Joseph Louis Lagrange** (1736-1813), encontró otra clase importante de órbitas en el problema de los tres cuerpos. Mostró que, si en el momento inicial las tres partículas se colocan en los vértices de un triángulo equilátero, y tienen velocidades adecuadas, entonces se moverán periódicamente sobre elipses, preservando su configuración equilátera a pesar de que el tamaño del triángulo y la orientación de las órbitas se modifican.

Entre 1774 y 1776, Lagrange extendió el resultado sobre la estabilidad del sistema solar al probar que para todos los órdenes de aproximación del seno del ángulo de las inclinaciones mutuas, y para las perturbaciones de primer orden con respecto a las masas, los términos seculares no aparecen.

En 1778 publicó su obra maestra *Mécanique Analytique*[21] donde introduce por primera vez la idea de que la mecánica es la geometría de cuatro dimensiones: *tres coordenadas espaciales y una temporal*

En 1809, **Simeón Poisson** (1781-1840), obtuvo una aproximación mejor que la de Lagrange, al probar que *los ejes mayores de las órbitas de los planetas no tienen términos seculares en las perturbaciones de segundo orden respecto a las masas*.

Además, él introdujo una definición en la que precisa lo que entiende por estabilidad de un sistema de partículas. Esta es:

**Definición 1.3.3** *"El movimiento de un sistema de partículas es estable, si su configuración regresa a una posición cercana a la posición inicial una y otra vez"*

Los diferentes intentos que se hicieron por mejorar la aproximación de Poisson no tuvieron éxito durante mucho tiempo. Recién en 1878 se abrieron nuevas perspectivas al problema, cuando el matemático rumano Spiru Haretu (1851-1912) demostró que *en la tercera aproximación de las series de potencias con respecto a las masas, aparecen términos seculares en el valor de los ejes mayores de las órbitas de los planetas*. Con este resultado se daba la posibilidad de que las órbitas de los planetas no sólo cambiaran de tamaño, sino también de forma, lo cual no necesariamente implica la inestabilidad del sistema solar, porque las variaciones en el tamaño de los ejes no son necesariamente muy grandes. Pero esto, al menos ponía en duda la estabilidad del sistema solar.

Para un análisis más detallado del problema de los  $n$ -cuerpos se recomienda el libro de Birkhoff Capítulo 9 [4].

## 1.4. Poincaré, el gran precursor

Henri Poincaré (1854-1912) fue un prestigioso matemático, científico teórico y filósofo de la ciencia capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática y física. En particular, dentro de la Teoría Cualitativa de los Sistemas Dinámicos, que es de nuestro especial interés, estableció que:

*Una ecuación diferencial ordinaria (ODE) define una familia de curvas:*

*Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función suave (un campo vectorial) y consideramos la ecuación diferencial  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  entonces, para cualquier  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , existe una solución  $x(t, x_0)$  tal que  $x(0, x_0) = x_0$ , en un intervalo maximal  $(-\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})$  que contiene al cero.*

*Cada  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tiene asociada una curva  $\gamma(x_0) = \{x(t, x_0), t \in (-\alpha_{x_0}, \beta_{x_0})\}$*

*La familia de curvas  $EO = \{\gamma(x_0) : x_0 \in \mathbb{R}^n\}$  es denominada la "estructura orbital" de la ODE.*

Y determinó que los problemas básicos que debía resolver la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales eran:

- *Comprender la estructura orbital para un campo de vectores dados*
- *Analizar los cambios provocados en la estructura orbital por perturbaciones en el campo vectorial*
- *Caracterizar los campos vectoriales para los cuales la estructura orbital no cambia bajo perturbaciones*
- *Estudiar los campos vectoriales cuya estructura orbital cambia bajo perturbaciones*

Acerca de este tema Poincaré publica su *Memoria sobre las curvas definidas por una ecuación diferencial* [34], que consta de cuatro partes repartidas entre 1881 y 1886. En las dos últimas partes de su memoria Poincaré estudia campos vectoriales sobre el toro, donde se encuentra con problemas de pequeños denominadores, asociados a números de rotación irracionales. El número de rotación,  $W(\theta)$  de una aplicación  $f(\theta)$  con valor inicial  $\theta$  se define como:  $W(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^n(\theta) - \theta}{n}$  y representa el incremento promedio en el ángulo  $\theta$  por unidad de tiempo (frecuencia promedio).

Trabajando con campos vectoriales multidimensionales, Poincaré se da cuenta que puede utilizar las *aplicaciones de Poincaré*, las cuales definiremos y utilizaremos en el Capítulo 4, de manera que el estudio del comportamiento alrededor de una órbita periódica se reduce al de las iteraciones de una aplicación en un entorno de un punto fijo. Además introduce los *exponentes característicos* (que definimos en el apartado 2.3) asociados a una órbita periódica, los cuales le proporcionan, en primer orden información sobre su estabilidad, así como los *invariantes integrales*, que serán de gran importancia para los sistemas Hamiltonianos donde el volumen es una invariante integral (Ver Sección 2.5)

Además, como era de esperarse, también se interesó en el problema de los  $n$ -cuerpos. En 1889, y como parte de los festejos conmemorativos por su sexagésimo cumpleaños, el rey de Suecia Óscar II instituyó una competencia matemática cuyo objetivo era determinar la estabilidad del Sistema Solar, una variación del problema de los tres cuerpos.

El enunciado del problema a resolver era el siguiente: *"Dado un sistema formado por un número arbitrario de masas puntuales que se atraen mutuamente de acuerdo con las Leyes de Newton, tratar de encontrar, bajo la suposición de que dos masas puntuales cualesquiera nunca colisionan, una representación de las coordenadas de cada punto como una serie en una variable que es cierta función conocida del tiempo y que para todos cuyos valores la serie converge uniformemente".*

Poincaré señaló entonces que el problema no había sido planteado correctamente, y que de esa forma nadie lograría obtener una solución completa para el mismo. Su trabajo fue tan notable, que el jurado decidió otorgarle el premio en dinero previsto para el ganador de la competencia. La conclusión principal de Poincaré establecía que la evolución de un sistema como el ejemplificado era extremadamente caótica, en el sentido que una pequeña perturbación en el estado inicial (como por ejemplo una mínima variación en la posición inicial de un cuerpo) podía llevar eventualmente a un estado radicalmente diferente. Por lo tanto, si con los instrumentos de medición disponibles no se puede detectar esa mínima variación, sería imposible predecir el estado final del sistema.

En el llamado problema restringido de los tres cuerpos, donde se considera que el movimiento es en un plano y una de las masas se considera más pequeña con respecto a la de las otras dos, mostró que podían aparecer órbitas doblemente asintóticas, es decir, asintóticas a la órbita periódica para  $t \rightarrow \pm\infty$ , que llamó *órbitas homoclínicas*. Usando como modelo ilustrativo de un sistema conservativo con dos grados de libertad, un péndulo no amortiguado, pero con la característica de que el peso está unido por medio de una barra rígida al pivote, en el cual se imprimen impulsos periódicos (de manera semejante a como un niño se impulsa con sus piernas en una hamaca), se percató de la existencia de, no sólo *órbitas homoclínicas*, sino de "*madejas*" *homoclínicas*.

En relación con este extraño comportamiento, en su obra *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, Poincaré escribe: "*Cuando uno quiere representar la figura formada por las dos curvas, y sus infinitas intersecciones, cada una de las cuales corresponde a una solución doblemente asintótica, estas intersecciones forman una suerte de enrejado, de tejido, de red con mallas infinitamente apretadas; cada una de las dos curvas nunca debe autointersecarse, sino que debe doblarse hacia atrás sobre ella misma de una forma muy compleja a fin de intersectar a todas las mallas de la red una infinidad de veces. Es tal la complejidad de esta figura, que no he intentado trazarla. Nada es más adecuado para ilustrar la naturaleza múltiple del problema de tres cuerpos y en general de todos los problemas de la dinámica que no tienen una integral uniforme y que las series de Bohlín son divergentes*"[33]

En la actualidad, con las computadoras, es relativamente sencillo trazar dicha figura, pero no se puede dejar de reconocer el genio de Poincaré, que logró imaginársela sin dibujarla y consiguió demostrar que en los intersticios de sus innumerables intersecciones hay infinitas nuevas órbitas periódicas inestables, que a su vez crean nuevas intersecciones, y así sucesivamente sin límite. Ver figura 1.1

Para Poincaré los sistemas venían determinados por un conjunto de condiciones iniciales, sin embargo éstas nunca se podrían conocer con precisión absoluta y en consecuencia poco a poco se iría perdiendo el recuerdo de las mismas y los sistemas se harían impredecibles. Las leyes deterministas se cumplían pero era imposible la solución exacta de las ecuaciones que implicaban, así por ejemplo, los sistemas planetarios parecen evolucionar según las leyes de Kepler, que pueden deducirse por aplicación de las de Newton y la ley de gravitación, sin embargo estas leyes sólo son rigurosamente válidas si no se consideran interacciones entre los diferentes planetas. No obstante, éstas ocurren y producen perturbaciones infinitesimales en el movimiento de los planetas. ¿Quién asegura que estas perturbaciones no acabarán a lo largo del tiempo por desequilibrar el conjunto y éste se volverá "caótico"?

Curiosamente las perturbaciones a que se hace referencia no son producto del azar, son consecuencia de las propias leyes de Newton.

Si bien Poincaré se da cuenta de que los comportamientos regulares y caóticos de las soluciones del problema de los tres cuerpos, están íntimamente relacionados, se resiste a aceptar la idea del *caos*. Quizás por sentirse incapaz de convencer al mundo científico de que los métodos cuantitativos se encuentran con obstáculos insuperables y que el determinismo no implica predicción aproximada. Por eso, las ideas de Poincaré quedaron algo olvidadas, hasta que como ocurre tantas veces en ciencia, nuevos avances hicieron que estas ideas fueran rescatadas.

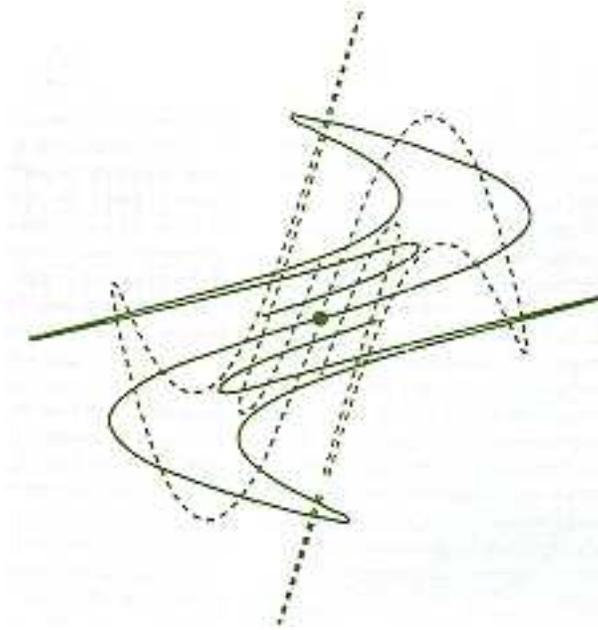


Figura 1.1: Madeja homoclínica

El trabajo de Poincaré fue completado en los años 60, por Kolmogorov, Arnold y Moser cuyos estudios condujeron a lo que se denomina la teoría KAM en su honor. La teoría KAM que trata con sistemas Hamiltonianos generales (sistemas que describen procesos de movimiento no amortiguados), demuestra que, dependiendo de las condiciones iniciales el movimiento puede ser cuasi-periódico y, en la práctica, predecible como en el caso integrable (es decir para sistemas Hamiltonianos que tengan una integral primera no degenerada), pero que para otras condiciones iniciales arbitrariamente cercanas pueden aparecer zonas de inestabilidad (o zonas caóticas) donde el movimiento no es predecible.

Al hablar de un movimiento cuasi-periódico estamos haciendo referencia al tipo de evolución temporal que presenta un fenómeno físico que, sin ser periódico, repite una y otra vez condiciones arbitrariamente cercanas a una posición previa del sistema. Una combinación de dos movimientos periódicos puros tal que el cociente de períodos entre ambos no sea un número racional es de hecho un movimiento cuasi-periódico.

Una propiedad interesante de los movimientos cuasi-periódicos es que la trayectoria es un conjunto denso en una hipersuperficie topológicamente equivalente a un  $n$ -toro,  $T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ .

No profundizaremos aquí acerca de la Teoría de KAM, pero puede leerse acerca de este tema en [14], [15], [16] y [17].

## 1.5. Formalización del concepto de Estabilidad

Los grandes esfuerzos encaminados a determinar la estabilidad del sistema solar, que se llevaron a cabo durante más de dos siglos arrojaron muchos resultados en torno al problema, aunque se desarrollaron sin disponer de una definición precisa y acabada del concepto matemático de estabilidad.

No obstante, en el caso particular del problema de los  $n$ -cuerpos, algunos matemáticos definieron lo que debía entenderse por estabilidad de ese sistema; entre ellos Poisson y Poincaré, el cual estableció su propia definición que dice:

**Definición 1.5.1** [33] *Para que haya estabilidad completa en el problema de los tres cuerpos, son necesarias las tres condiciones siguientes:*

1. *ninguno de los cuerpos puede alejarse indefinidamente,*
2. *dos de los cuerpos no pueden chocar uno con el otro, y la distancia de estos dos cuerpos no puede decrecer más bajo de cierto límite,*
3. *el sistema regresa un número infinito de veces tan cerca como se quiera de la posición inicial.*

Si sólo la tercera condición se cumple y, no sabemos si las otras dos se satisfacen, diremos que *el sistema es estable en el sentido de Poisson* (Ver Definición 1.3.3).

Lagrange fue probablemente el primero en dar una definición formal y hacer afirmaciones precisas acerca de la estabilidad del movimiento de sistemas dinámicos, esto es, sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, más precisamente de segundo orden. Lagrange afirma que el mínimo de la energía potencial de un sistema mecánico corresponde a un punto de equilibrio estable mientras que la función de energía potencial tiene un máximo en un punto correspondiente a un equilibrio inestable.

"...si esta función  $\Pi$  (energía potencial) es un mínimo, el equilibrio tendrá estabilidad, esto es, si el sistema se supone inicialmente en un estado de equilibrio, y luego es desplazado, no importa cuan poco, de tal estado, tenderá a volver a tal posición mientras realiza oscilaciones infinitamente pequeñas; por el contrario, en el caso que esa misma función sea un máximo, el equilibrio no tendrá estabilidad, y una vez perturbado, el sistema será capaz de realizar oscilaciones que no serán muy pequeñas, y que lo llevarán cada vez más lejos de su estado inicial"

Esta es la forma en la que Lagrange habla acerca de estabilidad; en términos modernos la estabilidad, como originalmente fue definida por Lagrange, puede ser interpretada como sigue:

**Definición 1.5.2 (Definición original de estabilidad de Lagrange)** *Consideremos un sistema mecánico descrito por una ecuación diferencial  $\ddot{q} = f(t, q, \dot{q})$  con estado  $[q, \dot{q}]$ . Decimos que el punto  $q = 0$  es **estable** si para cada  $\delta > 0$  (infinitamente pequeño) y  $t_0 \geq 0$*

$$|q(t_0)| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |q(t)| \rightarrow 0$$

El concepto de estabilidad de Lagrange establece que el sistema va a tender a volver a la posición de equilibrio, por lo tanto puede ser visto más como una noción de *convergencia* que de estabilidad.

Otra interpretación matemática de lo expresado por Lagrange es la siguiente:

**Definición 1.5.3 (estabilidad "interpretada" de Lagrange)** *Consideremos un sistema mecánico con estado  $[q, \dot{q}]$ . Decimos que el punto  $q = 0$  es **estable** si para cada  $\delta > 0$  (infinitamente pequeño) y  $t_0 \geq 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que*

$$|q(t_0)| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |q(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Lagrange afirma que el mínimo de la energía potencial corresponde a un punto estable. La prueba de esta afirmación se basa en la expansión en serie de la función  $\Pi$  y, según las palabras de Dirichlet, "hace un uso abusivo de la afirmación de que los términos de orden mayor son insignificantes". También según Dirichlet, Poisson parece haber sido el primero en señalar esta inexactitud y tratar de corregirla suponiendo que los términos de segundo orden dominan largamente sobre los términos de orden superior a dos. Fue Dirichlet quien dio la primera prueba rigurosa de la afirmación de Lagrange y reformuló la propiedad de estabilidad haciéndola más cercana a la de la Definición 1.5.5.

Una característica interesante de la estabilidad de Dirichlet es que agrega a su definición, con respecto a la de Lagrange, la condición de que las velocidades iniciales sean pequeñas de modo que produzcan pequeños desplazamientos.

**Definición 1.5.4 (estabilidad de Dirichlet)** Sea  $x = [q, \dot{q}]$ . Decimos que el punto  $q = 0$  es **estable** si para cada  $\delta > 0$  (infinitamente pequeño) y  $t_0 \geq 0$  existe  $\varepsilon > 0$  (infinitamente pequeño) tal que

$$|x(t_0)| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |q(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Lagrange y Dirichlet definieron estabilidad en sus propias palabras, en un lenguaje que, hoy en día, puede ser calificado como carente de rigor. Esto ciertamente condujo a diferentes interpretaciones.

La terminología "*estabilidad en el sentido de Lagrange*" le es atribuida por Hahn, a La Salle [23]; en éste último se lee: "*La acotación de todas las soluciones para  $t \geq 0$  es también una clase de estabilidad, llamada estabilidad de Lagrange*".

En otros términos, consideremos un sistema

$$\dot{x} = F(t, x) \tag{1.3}$$

donde  $F$  es continua, y  $F(t, \cdot)$  es localmente Lipschitz, uniformemente en  $t$  y  $F(t, 0) \equiv 0$ .

**Definición 1.5.5 (estabilidad de Lagrange)** El sistema (1.3) se dice estable según Lagrange si para cada  $\delta > 0$  y  $t_0 \geq 0$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$|x(t_0)| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t)| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

A finales del siglo XIX, el matemático ruso Aleksandr Mijailovich Lyapunov en su tesis doctoral "*El Problema General de la Estabilidad del Movimiento*" presentada en 1892, ofreció el primer intento de una teoría matemática de la estabilidad, donde lo primero que hace es dar una definición rigurosa de estabilidad de movimiento.

**Definición 1.5.6 (estabilidad de Lyapunov)** El origen es un **equilibrio estable** de la ecuación (1.3) si, para cada par de números  $\varepsilon > 0$  y  $t_0 \geq 0$ , existe  $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$  tal que

$$|x(t_0)| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \geq 0$$

Comparando las Definiciones 1.5.5 y 1.5.6, podemos ver que el concepto de estabilidad establecido por Lagrange y por Lyapunov es distinto, específicamente, ninguno implica el otro. Esto significa que un sistema puede tener soluciones no acotadas y sin embargo tener un equilibrio estable y por otra parte, el sistema puede ser inestable según Lyapunov pero esto no implica que las soluciones perturbadas sean no acotadas.

Los siguientes ejemplos sencillos ilustran estas diferencias:

**Ejemplo 1.5.7** Consideremos el oscilador de van der Pol

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{1.4}$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + (1 - x_1^2)x_2 \tag{1.5}$$

su gráfico de fase está representado en la figura siguiente, para dos soluciones particulares: empezando desde  $t_0 = 0$ ,  $x_1(t_0) = 0,3$ ,  $x_2(t_0) = 0$  y  $t_0 = 0$ ,  $x_1^*(t_0) = 0$ ,  $x_2^*(t_0) = 4$ . Todas las soluciones que comienzan dentro del disco de radio  $\varepsilon$ , excepto en el origen, tienden al atractor  $\mathcal{A}$ , esto significa, que para este  $\varepsilon$ , no importa cuan pequeñas sean las condiciones iniciales, las soluciones no permanecerán en el entorno de radio  $\varepsilon$  del origen. Por lo tanto, el sistema de van der Pol no es estable según Lyapunov en el origen. Sin embargo, es estable según Lagrange en el sentido de la Definición 1.5.5 porque las soluciones están acotadas.

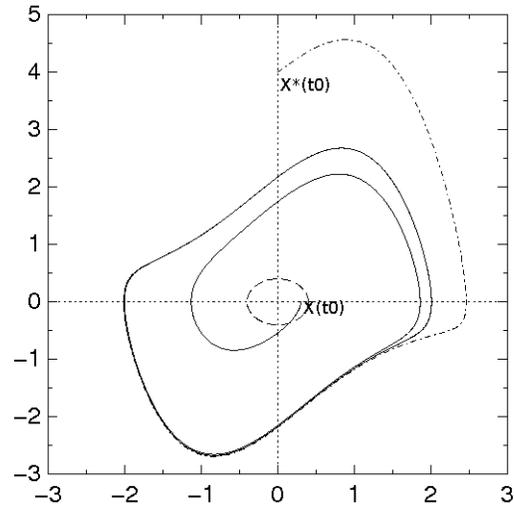


Figura 1.2: Oscilador de van der Pol

**Ejemplo 1.5.8** Consideremos la ecuación del péndulo

$$I\ddot{q} + mgl \sin(q) = 0$$

con masa  $m$ , longitud desde su centro de masa hasta el eje de rotación  $l$  e inercia  $I$ . El gráfico de fase del péndulo con  $I = 1$ ,  $m = 1$  y  $l = 1$  está representada en la Figura 1.3. Uno puede verificar a partir de esta figura que el origen es Lyapunov estable; en realidad lo son todos los puntos de equilibrio  $q = 2n\pi$ ,  $\dot{q} = 0$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Sin embargo, para velocidades iniciales suficientemente grandes en valor absoluto, las trayectorias  $q(t)$  crecen de manera no acotada en valor absoluto, por lo tanto no es Lagrange estable según la Definición 1.5.5. Vale la pena mencionar que los puntos de equilibrio  $q = 2n\pi$ ,  $\dot{q} = 0$  con  $n \in \mathbb{Z}$  también son estables en el sentido de Dirichlet (Definición 1.5.4).

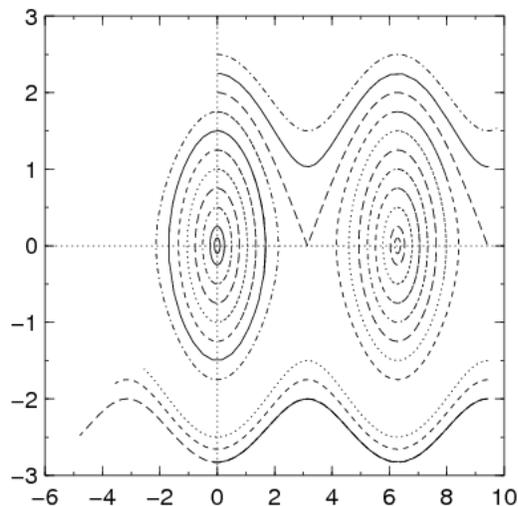


Figura 1.3: Plano de fase del péndulo

La formulación de *estabilidad de Lyapunov* del problema de estabilidad del movimiento fue en dos direcciones.

1. Por un lado, según el *método de la primera aproximación*, que es aplicable cuando la estabilidad puede determinarse a partir de las ecuaciones linealizadas. En este sentido obtuvo la solución completa para los llamados movimientos "estacionarios", en los que las ecuaciones del movimiento perturbado no dependen explícitamente del tiempo; también presentó soluciones para una gran cantidad de movimientos "no estacionarios", así como un detallado estudio de movimientos "periódicos".
2. Por otro lado está el llamado *segundo método directo de Lyapunov*, que permite estudiar la estabilidad sin ningún conocimiento de las soluciones de las ecuaciones diferenciales. Basta con que el sistema en estudio tenga una función con características apropiadas, la cual, actualmente se conoce como *función de Lyapunov*.

La función que se menciona, detecta si el flujo cruza una pequeña esfera alrededor del punto de equilibrio, de adentro hacia afuera o de afuera hacia adentro. En el primer caso, tenemos inestabilidad, mientras que en el segundo, el equilibrio es estable. Desafortunadamente, esta idea geométrica tan sencilla no es tan fácil de realizar, ya que no existe un procedimiento general para encontrar dichas funciones de Lyapunov.

Es intuitivamente claro que si cerca de un estado de equilibrio de un sistema físico, la energía del sistema es siempre decreciente, entonces el equilibrio es estable. Las funciones de Lyapunov son una simple extensión del concepto de energía. Los teoremas del método directo de Lyapunov, son una generalización de la idea física de equilibrio estable e inestable.

Lyapunov fue el primero en preguntarse acerca de la invertibilidad del teorema de Lagrange que afirmaba que "*una posición donde la energía potencial es un mínimo aislado, es un equilibrio estable*". ¿Podría uno establecer que si la energía potencial no tiene un mínimo, entonces el equilibrio es inestable?

Para dar respuesta a este cuestionamiento estableció dos teoremas:

**Teorema 1.5.9** *Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial no tiene mínimo y, olvidándose de los términos de orden superior, ésta puede ser expresada como un polinomio de segundo orden, entonces el equilibrio es inestable.*

**Teorema 1.5.10** *Si en una posición de equilibrio aislada la energía potencial del sistema tiene un máximo con respecto a las variables de orden más pequeño que aparecen en la expansión de esta función, entonces el equilibrio es inestable.*

La tesis doctoral de Lyapunov se convirtió en el punto de partida de la actual teoría de estabilidad. El estudio de la estabilidad fue separado del problema específico de la estabilidad del sistema solar, y pasó a formar parte de la teoría de ecuaciones diferenciales, completamente independiente de su origen.

Al trabajo realizado por Lyapunov le siguió una etapa de modificaciones, extensiones, reformulaciones y generalizaciones de sus teoremas de estabilidad e inestabilidad. También se realizaron investigaciones sobre los correspondientes teoremas inversos y las cuestiones relativas a la obtención de funciones de Lyapunov, en donde matemáticos de todo el mundo como: N.A.Cetaev [8], V.I.Zubov, A.Barbashin [3], N.N.Krasovskii [18] [19], W.Hahn [11] [12], L.S. Pontriaguin, G.D. Birkhoff [4] y R. Bellman entre otros, han hecho pequeños o grandes aportes a esta teoría de la que Lyapunov es considerado el iniciador.

Un estudio detallado de la formalización del concepto de estabilidad puede encontrarse en el trabajo *Stability, Told by Its Developers* de Loria y Panteley [13].

## Capítulo 2

# Preliminares

### 2.1. Existencia y unicidad de soluciones

**Definición 2.1.1** *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\dot{X} = F(t, X(t)) \tag{2.1}$$

en donde  $\dot{X}$  denota la derivada respecto del tiempo de la función vectorial  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ,  $(a, b)$  denota un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$  y  $F : (a, b) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continua localmente Lipschitz.

Un sistema de esta clase define un campo vectorial dependiente del tiempo en una región del espacio de dimensión  $n$ .

Dados  $t_0 \in (a, b)$  y  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ . Una *solución del problema de valores iniciales*

$$\dot{X} = F(t, X(t)); \quad X(t_0) = X_0 \tag{2.2}$$

es una función diferenciable  $X : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  que describe el camino o trayectoria de una partícula que se mueve en  $\mathbb{R}^n$  bajo la influencia de este campo dado que la partícula estaba en  $X_0$  cuando  $t = t_0$ .

En general puede ocurrir que la solución del problema de valores iniciales solo exista en un entorno de  $t_0$ . Por eso se define el *intervalo maximal de existencia* para (2.2) como el mayor intervalo abierto  $I = (t_*, t^*)$  tal que  $t_0 \in I$  en el que hay definida una solución de (2.2), o lo que es lo mismo como la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a  $t_0$  en los que hay definida una solución.

Una solución del problema de valores iniciales que está definida en el intervalo maximal de existencia recibe el nombre de *solución maximal*.

**Teorema 2.1.2** *El problema (2.2) posee exactamente una solución maximal.*

### 2.2. Sistemas autónomos y equilibrio

Vamos a concentrarnos en esta sección en aquellos campos vectoriales que son *estacionarios*, o independientes del tiempo, en cuyo caso el sistema se dice *autónomo* y asume la forma

$$\dot{X} = F(X) \tag{2.3}$$

Los puntos de  $\mathbb{R}^n$  en que  $F$  se anula son de especial importancia ya que son los puntos en los que cualquier proceso físico descrito por ese sistema está en equilibrio. Por ejemplo, si (2.3) representa

el campo de velocidades de un fluido que fluye en el espacio tridimensional y si  $X_0$  es un punto de  $\mathbb{R}^3$  en el que  $F(X_0) = 0$ , entonces el campo vectorial se anula en  $X_0$ , y una partícula en reposo en  $X_0$  permanecerá en reposo en tal punto. Luego la función constante  $X(t) = X_0$  será una solución de (2.3) y su trayectoria asociada se reducirá a un punto. Estas observaciones nos llevan a la siguiente definición:

**Definición 2.2.1** Un vector  $X_0$  en  $\mathbb{R}^n$  se llama un **punto crítico o de equilibrio** para el sistema autónomo  $\dot{X} = F(X)$  si  $F(X_0) = 0$ .

El primer problema de la teoría de la estabilidad es determinar las condiciones bajo las cuales aquellas soluciones de (2.3) que se originan cerca de un punto de equilibrio de ese sistema permanecen cerca de ese punto, en cuyo caso decimos que es un *punto de equilibrio estable*, y las condiciones bajo las cuales eso no ocurre, en cuyo caso decimos que el *punto es de equilibrio inestable*.

**Ejemplo 2.2.2** Un ejemplo excelente de un sistema físico que involucra ambos tipos de equilibrio y que nos será de utilidad para el estudio que llevaremos a cabo en el Capítulo 4, es el péndulo simple constituido por un hilo inextensible y de masa despreciable de longitud  $l$ , sostenido en su extremo superior de un punto fijo, con una masa puntual  $m$  en su extremo inferior que oscila libremente en el vacío. Consideraremos el caso en el que el movimiento de la masa se mantiene en un plano (péndulo plano) y al apartar la masa de su punto de equilibrio, oscila a ambos lados de dicha posición, realizando un movimiento armónico simple. En la posición de uno de los extremos, se produce un equilibrio de fuerzas. Para hallar las ecuaciones de movimiento del péndulo vamos a suponer que el rozamiento del aire es despreciable. La única fuerza que actúa sobre la masa es la fuerza de gravedad que puede ser descompuesta en sus componentes paralelos y perpendiculares al movimiento instantáneo de la masa.

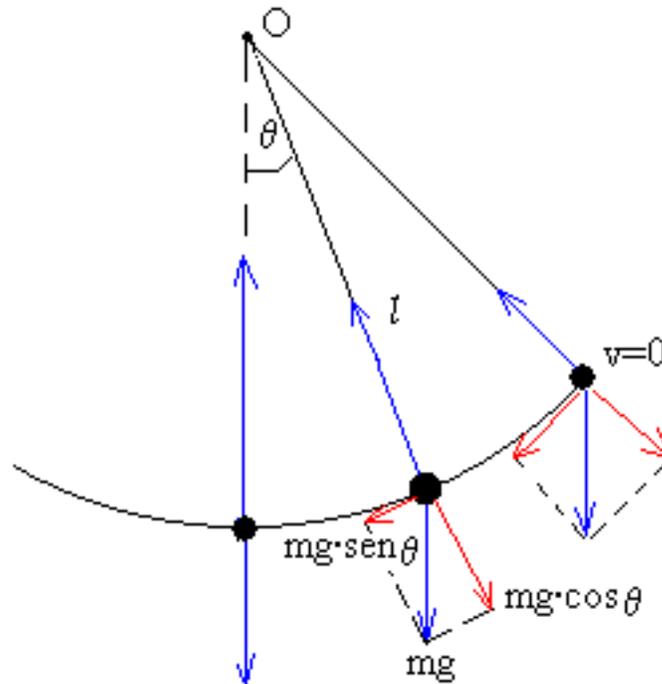


Figura 2.1: Diagramas de fuerzas que actúan en un péndulo simple

Según la segunda ley de Newton  $F = m.a$  donde  $F$  es la fuerza actuando sobre la masa  $m$ , haciendo que acelere a metros por segundo cuadrado. Ya que la masa está obligada a moverse en un trazo circular, no hay necesidad de considerar ninguna otra fuerza que la responsable de aceleración instantánea paralelo al movimiento instantáneo de la masa,

$$F_x = mg \cdot \sin \theta = ma$$

La fuerza perpendicular, que mantiene la masa en estado de equilibrio con la tensión del hilo es

$$F_y = mg \cdot \cos \theta$$

La aceleración lineal está relacionada con el cambio en el ángulo  $\theta$  por la fórmula para encontrar la longitud de arco:

$$s = l \cdot \theta$$

De donde se deduce que la velocidad y la aceleración vienen dadas por:

$$v = \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}$$

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

La ecuación de movimiento teniendo en cuenta que la aceleración  $a$  tiene que llevar un signo negativo viene dada por:

$$\ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \quad (2.4)$$

y si llamamos  $\omega = \dot{\theta}$ , podemos escribir a la ecuación (2.4) como un sistema autónomo plano de la forma

$$\dot{\theta} = \omega \quad (2.5)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Es intuitivamente claro que el péndulo está en equilibrio siempre que llegue al reposo en cualquiera de las posiciones  $\theta = n\pi$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Además, estas posiciones son estables o inestables según  $n$  sea par o impar, respectivamente; es decir, según si el péndulo está suspendido verticalmente hacia abajo o balanceado verticalmente hacia arriba sobre su punto de rotación.

Confirmemos matemáticamente estas conclusiones resolviendo el sistema (2.5). En efecto, cada uno de los puntos  $(n\pi; 0)$  con  $n \in \mathbb{Z}$  pertenecientes al plano  $\theta\omega$  es un punto de equilibrio para este sistema en el sentido de la Definición 2.2.1 y son los únicos puntos de equilibrio. Como

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \omega \frac{d\omega}{d\theta}$$

la segunda ecuación en (2.5) puede volverse a escribir como

$$\dot{\omega} = \omega \frac{d\omega}{d\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

Separando variables, encontramos que

$$\omega^2 = 2 \frac{g}{l} \cos \theta + c$$

donde  $c \geq -2\frac{g}{l}$  es una constante y representando varias de las curvas o trayectorias dadas por esta ecuación podemos obtener el diagrama o plano de fase del sistema que vimos en la Figura 1.3 del Ejemplo 1.5.8.

Analizando esta figura vemos que alrededor de cada punto de equilibrio de la forma  $(2n\pi; 0)$  hay una región con la propiedad de que una trayectoria que se origina dentro de dicha región nunca puede escapar de ella. Estos son puntos de equilibrio estable para el péndulo. Por el contrario, no existen regiones de este tipo alrededor de ninguno de los restantes puntos de equilibrio. Cuando  $n$  es impar, toda región alrededor de  $(n\pi; 0)$  contendrá trayectorias que terminan por apartarse tan lejos como se quiera de ese punto. Estas trayectorias errantes son correspondientes al movimiento circular del péndulo y corresponden a puntos de equilibrio inestables.

Si ahora tomamos en cuenta las fuerzas de amortiguación debidas a la fricción y a la resistencia del aire, la ecuación del péndulo amortiguado resulta

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta - \frac{k}{m} \dot{\theta}$$

donde  $k$  es el coeficiente de fricción. El péndulo tiene las mismas posiciones de equilibrio y éstas son, como antes estables o inestables. Sin embargo, el comportamiento de las trayectorias alrededor de un punto de equilibrio estable es algo distinto. Las fuerzas de amortiguación hacen que las oscilaciones desaparezcan con el transcurso del tiempo, y las trayectorias correspondientes en el plano  $\theta\omega$  formen una espiral hacia adentro que se dirige hacia el punto de equilibrio como muestra la Figura 2.2. Decimos que estos puntos son asintóticamente estables.

Luego de estas observaciones demos las definiciones formales de la clasificación de los puntos de equilibrio para un sistema autónomo como (2.3), que tiene solución única en una región  $\Omega$  del espacio una vez definidas las condiciones iniciales. Denotaremos la solución de este sistema que satisface la condición inicial  $X(0) = Y_0$  como  $X(t, Y_0)$ .

**Definición 2.2.3** Sea  $X_0$  un punto de equilibrio para (2.3). Entonces se dice que  $X_0$  es

1. **estable** si, dado cualquier  $\varepsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  tal que siempre que  $Y_0$  esté en  $\Omega$  y  $\|Y_0 - X_0\| < \delta$ , entonces  $\|X(t, Y_0) - X_0\| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ .
2. **asintóticamente estable** si, además de ser estable, existe un  $\delta > 0$  tal que siempre que  $Y_0$  esté en  $\Omega$  con  $\|Y_0 - X_0\| < \delta$ , entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t, Y_0) - X_0\| = 0$ .
3. **inestable** en cualquier otro caso.

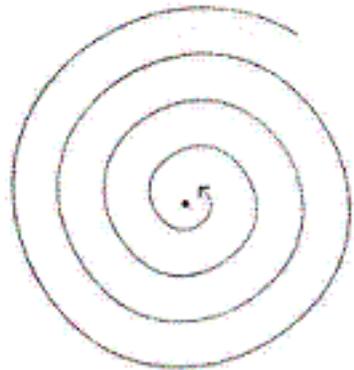


Figura 2.3: Punto asintóticamente estable

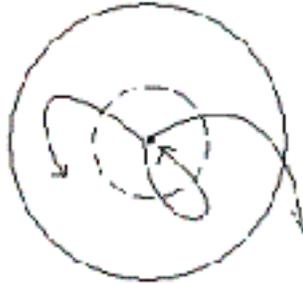


Figura 2.2: Clasificación de puntos de equilibrio

### 2.2.1. Estabilidad de Sistemas Lineales con coeficientes constantes

Consideremos el siguiente sistema autónomo de ecuaciones lineales con coeficientes constantes

$$\dot{X} = AX \quad (2.6)$$

donde  $A$  es una matriz real de  $n \times n$ . El origen de  $\mathbb{R}^n$  es un punto de equilibrio para tal sistema, y cuando cero no es un valor propio para  $A$ , es decir, cuando  $A$  es no singular, es el único.

Sabemos que las soluciones de (2.6) pueden describirse en términos de los autovalores de  $A$  y por lo tanto de ellos dependerá la estabilidad del origen como afirma el siguiente teorema:

**Teorema 2.2.4** *Si  $\dot{X} = AX$  es un sistema lineal autónomo de  $n \times n$  cuya matriz de coeficientes es no singular, entonces el origen de  $\mathbb{R}^n$  es*

1. *asintóticamente estable* si las partes reales de todos los autovalores de  $A$  son negativas
2. *estable, pero no asintóticamente estable*, si  $A$  tiene al menos un par de autovalores imaginarios puros de multiplicidad uno, ningún par de autovalores imaginarios de multiplicidad mayor que uno, y ningún autovalor con partes reales positivas
3. *inestable* en cualquier otro caso.

### 2.2.2. Estabilidad de sistemas no lineales. Funciones de Lyapunov

Volvamos al caso general del sistema autónomo

$$\dot{X} = F(X) \quad (2.7)$$

definido en una región  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  con un punto de equilibrio  $X_0$  en  $\Omega$ . Supongamos que  $F$  sea de clase  $C^1$  en  $\Omega$  lo que nos asegura que los problemas de valores iniciales para este sistema tienen solución única en todos los puntos de  $\Omega$ . Podemos suponer, mediante el cambio de variables  $X^* = X - X_0$ , que el punto de equilibrio  $X_0$  está en el origen.

La técnica para determinar el comportamiento de las trayectorias de este sistema alrededor del origen cuando  $F(0) = 0$  fue diseñada por Lyapunov y se basa en el hecho de que un sistema físico pierde energía potencial en las cercanías de un punto de equilibrio estable. Por lo tanto, buscamos una función de valor real (función de energía)  $E(X) = E(x_1, \dots, x_n)$  de clase  $C^1$  en  $\Omega$ , o en alguna subregión de  $\Omega$  que contenga al origen, tal que  $E(X) \geq 0$ , y  $E(X) = 0$  si y sólo si  $X = 0$ .

Si  $X = X(t, X_0)$  es la solución de

$$\begin{aligned}\dot{X} &= F(X) \\ X(0) &= X_0\end{aligned}$$

con  $X_0$  en  $\Omega$ , la velocidad de cambio de la energía,  $\frac{\partial E}{\partial t}$ , a lo largo de la trayectoria definida por esta solución es

$$\nabla E \cdot \dot{X} = \nabla E \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} F_i$$

Si esta expresión es negativa en  $\Omega$ , una partícula que se mueve a lo largo de cualquiera de las trayectorias definidas por el sistema  $\dot{X} = F(X)$  estará disipando energía cuando interseca la superficie  $E(X) = c$ . Por consiguiente una partícula que entra en la región rodeada por dicha superficie nunca puede reunir la energía para escapar, y su trayectoria debe permanecer en esa región. Esto implica que el origen será estable, o incluso asintóticamente estable.

A partir de estas observaciones definamos:

**Definición 2.2.5** Sea  $\Omega$  una región de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, y sea  $E = E(X)$  una función de valor real de clase  $C^1$  en  $\Omega$ . Entonces  $E$  se dice que está **positivamente definida** si

- (i)  $E(X) \geq 0$  para todo  $X$  en  $\Omega$ , y
  - (ii)  $E(X) = 0$  si y sólo si  $X = 0$
- Si, además,

$$(iii) \nabla E \cdot F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial E}{\partial x_i} F_i \leq 0$$

en todos los puntos de  $\Omega$ , entonces se dice que  $E$  es una **función de Lyapunov** para el sistema autónomo  $\dot{X} = F(X)$ .

Se mencionan a continuación los teoremas principales del *método directo de Lyapunov*, se pueden encontrar sus demostraciones en Cap. 10 de [20], Cap. 8 de [36] o Cap. 5 de [38].

**Teorema 2.2.6** El origen es un **punto de equilibrio estable** para  $\dot{X} = F(X)$ ,  $F(0) = 0$ , si existe una función de Lyapunov  $E$  para el sistema.

Si  $E$  decreciera a lo largo de toda trayectoria de  $\dot{X} = F(X)$  en un entorno del origen, éstas trayectorias tendrían que dirigirse hacia el origen como requería la estabilidad asintótica. Eso es lo que afirma el siguiente teorema.

**Teorema 2.2.7** Si  $E$  es una función de Lyapunov para  $\dot{X} = F(X)$  con la propiedad de que  $-\nabla E \cdot F$  está positivamente definida en  $\Omega$ , entonces el origen es asintóticamente estable.

Por último, el siguiente teorema afirma que estos resultados son, en cierto sentido los mejores posibles.

**Teorema 2.2.8 (Teorema de Cetaev)** Sea  $E$  una función de valor real de clase  $C^1$  en  $\Omega$ , y supongamos que

- (i)  $E(0) = 0$
- (ii)  $\nabla E \cdot F$  es positiva definida en  $\Omega$ , y
- (iii) para cada  $\varepsilon > 0$  existe un  $X_0$  en  $\Omega$  con  $\|X_0\| < \varepsilon$  y  $E(X_0) > 0$  (es decir,  $E$  toma valores positivos en todo entorno del origen)

Entonces el origen es inestable para el sistema  $\dot{X} = F(X)$ ,  $F(0) = 0$ .

Estos teoremas permiten determinar la estabilidad o inestabilidad de los puntos de equilibrio para un sistema autónomo sin realmente resolver el sistema. Así, en casos donde las soluciones son imposibles de obtener de forma cerrada o difíciles de analizar, podemos obtener información valiosa sobre su estabilidad con la condición de que podamos construir su función de Lyapunov. Lamentablemente no hay ningún método general para construir estas funciones.

## 2.3. Ecuaciones Lineales no autónomas

Los conceptos y resultados que serán presentados en esta sección serán de gran utilidad para la comprensión de los Capítulos 3 y 4 en los cuales se estudiará la estabilidad de ciertos sistemas de ecuaciones periódicas.

### 2.3.1. Matrices Fundamentales

Consideraremos a continuación una ecuación lineal no autónoma

$$x' = A(t)x \quad (2.8)$$

donde  $A : (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  denota una función continua.

**Definición 2.3.1** Una *solución matricial* de (2.8) es una función diferenciable  $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\Phi'(t) = A(t) \circ \Phi(t)$ .

**Observación 2.3.2** a) Si  $\Phi(t)$  es solución matricial de (2.8) y  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces  $\Phi(t)x_0$  es solución de (2.8).

b) Si  $A$  es constante entonces  $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n \cdot A^n$  es solución matricial de (2.8).

**Lema 2.3.3** Sea  $\Phi : (a, b) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  una función tal que cada una de las funciones  $\Phi_i : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ;  $\Phi_i(t) = \Phi(t)e_i$ ; es diferenciable. Entonces  $\Phi$  es diferenciable y  $\Phi'(t)e_i = \Phi'_i(t)$ .

**Corolario 2.3.4** Dados  $t_0 \in (a, b)$  y  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , existe una única solución matricial  $\Phi$  de (2.8) tal que  $\Phi(t_0) = C$ .

**Demostración:** Para cada  $i = 1, \dots, n$ , sea  $u_i(t)$  la solución de (2.8) tal que  $u_i(t_0) = Ce_i$ . Sea ahora  $\Phi(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  determinada por  $\Phi(t)e_i = u_i(t)$ , entonces  $\Phi(t_0)e_i = Ce_i$ , de donde  $\Phi(t_0) = C$ .

Por otra parte, el Lema 2.3.3 dice que  $\Phi(t)$  es diferenciable y que  $\Phi'(t)e_i = u'_i(t)$ . Así,  $\Phi'(t)e_i = A(t)u_i(t) = A(t)\Phi(t)e_i$ , y en consecuencia,  $\Phi'(t) = A(t) \circ \Phi(t)$ , es decir que es una solución matricial.

Sean ahora  $\Phi_1, \Phi_2$  soluciones matriciales de (2.8) tales que  $\Phi_1(t_0) = \Phi_2(t_0)$ . Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene que  $\Phi_1(t)x$  y  $\Phi_2(t)x$  son soluciones de (2.8), y como  $\Phi_1(t_0)x = \Phi_2(t_0)x$ , concluimos del Teorema 2.1.2 que  $\Phi_1(t)x = \Phi_2(t)x$ , para cualquier valor de  $t \in (a, b)$ . Es decir,  $\Phi_1 = \Phi_2$ .  $\square$

Dada  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ , definimos el *determinante de T*, como el determinante de la matriz de  $n \times n$ , cuyos vectores columna son  $Te_1, \dots, Te_n$ ; en ese orden. En realidad puede definirse a partir de cualquier base, ya que el determinante es independiente de la base elegida.

Veamos a continuación el siguiente Lema que será de utilidad para la demostración del Teorema de Liouville

**Lema 2.3.5** Si  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ , entonces

$$\sum_{i=1}^n \det(u_1, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = \text{Tr}(A) \cdot \det(u_1, \dots, u_n) \quad (2.9)$$

**Demostración:** Dada  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  existe una única matriz  $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$  tal que

$$Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$$

Se define  $Tr(A) = Tr(M)$

Supongamos primero que  $u_1, \dots, u_n$  son linealmente dependientes, entonces  $\det(u_1, \dots, u_n) = 0$  y sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $u_1 = \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$  para ciertos  $\lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ .

Para  $i \geq 2$  se tiene

$$\det(u_1, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = \lambda_i \det(u_i, u_2, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \quad (2.10)$$

porque los términos correspondientes a  $\lambda_j u_j$  con  $j \neq i$  son nulos, ya que el determinante es una función alternada y en los argumentos aparecerán  $\lambda_j u_j$  y  $u_j$ .

Por otra parte,

$$\det(Au_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=2}^n \lambda_i \det(Au_i, u_2, \dots, u_n)$$

e intercambiando  $Au_i$  con  $u_i$  en  $\det(Au_i, u_2, \dots, u_n)$  queda:

$$\det(Au_1, u_2, \dots, u_n) = - \sum_{i=2}^n \lambda_i \det(u_i, u_2, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

De aquí y de (2.10) se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n \det(u_1, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$$

Ahora supongamos que  $u_1, \dots, u_n$  son linealmente independientes, entonces podemos escribir

$$Au_i = \sum_{j=1}^n b_{ji}u_j \quad (2.11)$$

para alguna matriz  $B = (b_{ij})$

Reemplazando  $Au_i$  por esta sumatoria en (2.9) y recordando que el determinante es una función lineal alternada concluimos que

$$\sum_{i=1}^n \det(u_1, \dots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \dots, u_n) = \left( \sum_{i=1}^n b_{ii} \right) \det(u_1, \dots, u_n)$$

Escribamos

$$u_i = \sum_{j=1}^n d_{ji}e_j \quad Ae_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j \quad (2.12)$$

y sean  $D = (d_{ij})$ ,  $M = (a_{ij})$

Reemplazando el valor de  $u_j$  en (2.11) queda:

$$Au_i = \sum_k \left( \sum_j d_{kj} b_{ji} \right) e_k$$

y de (2.12)

$$Au_i = \sum_{j=1}^n d_{ji} A e_j = \sum_k \left( \sum_j a_{kj} d_{ji} \right) e_k$$

Es decir,  $M \cdot D = D \cdot B$ . O sea,  $B = D^{-1} \cdot M \cdot D$ .

De aquí y del hecho conocido de que dadas dos matrices cualesquiera  $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$ , se verifica que  $Tr(P \cdot Q) = Tr(Q \cdot P)$ ,

$$\sum_{i=1}^n b_{ii} = Tr(B) = Tr(D^{-1}(M \cdot D)) = Tr(M \cdot D \cdot D^{-1}) = Tr(M) = Tr(A)$$

□

**Teorema 2.3.6 (Liouville)** Si  $\Phi$  es una solución matricial de (2.8) entonces,

$$\det \Phi(t_2) = \det \Phi(t_1) \exp \left( \int_{t_1}^{t_2} Tr(A(s)) ds \right)$$

cualesquiera sean  $t_1, t_2 \in (a, b)$ . Aquí  $Tr(A(s))$  denota la traza de la matriz  $A(s)$ .

**Demostración:** Pongamos  $u_i(t) = \Phi(t) e_i$  y  $\varphi(t) = \det \Phi(t)$ . Utilizando la regla de derivación del determinante y el Lema 2.3.5, tenemos,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^n \det(u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), u_i'(t), u_{i+1}(t), \dots, u_n(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^n \det(u_1(t), \dots, u_{i-1}(t), A(t)u_i(t), u_{i+1}(t), \dots, u_n(t)) = \\ &Tr(A(t)) \det(u_1(t), \dots, u_n(t)) = Tr(A(t)) \varphi(t) \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) \exp \left( \int_{t_0}^t Tr(A(s)) ds \right)$$

cualesquiera sean  $t, t_0 \in (a, b)$ .

□

**Observación 2.3.7** Supongamos que  $A$  es constante, entonces  $\Phi(t) := e^{tA}$  es solución matricial de (2.8) y por el Teorema de Liouville,

$$\det(e^{tA}) = e^{\int_0^t Tr(A) ds} = e^{tTr(A)}$$

De aquí,  $\det(e^A) = e^{Tr(A)}$ . En particular,  $\det(e^A) > 0$  si  $A \in L(\mathbb{R}^n)$ .

**Definición 2.3.8** Una solución matricial  $\Phi(t)$  de (2.8) es una **matriz fundamental** de (2.8) si  $\Phi(t_0)$  es inversible para algún  $t_0 \in (a, b)$ .

Y como consecuencia del Teorema de Liouville tenemos que  $\Phi(t)$  es una matriz fundamental si y sólo si  $\Phi(t)$  es inversible  $\forall t \in (a, b)$

**Observación 2.3.9** Sea  $\Phi(t)$  una matriz fundamental de (2.8) y sea  $u$  una solución de ese sistema. Entonces  $u(t) = \Phi(t)x_0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . En efecto, fijemos  $t_0 \in (a, b)$  y definamos  $x_0 = \Phi(t_0)^{-1}u(t_0)$ ; entonces  $u(t)$  y  $\Phi(t)x_0$  son ambas soluciones de (2.2) y el resultado se sigue del Teorema 2.1.2. Por lo tanto,  $u$  es solución de (2.8) si y sólo si  $u(t) = \Phi(t)x$  para algún  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.3.10** Sean  $\Phi_1, \Phi_2$  soluciones matriciales de (2.8). Si  $\Phi_1$  es fundamental entonces, existe  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\Phi_2(t) = \Phi_1(t)C$  para  $t \in (a, b)$ .

**Demostración:** Fijemos  $t_0 \in (a, b)$  y definamos  $C = \Phi_1(t_0)^{-1}\Phi_2(t_0)$ , entonces  $\Phi_2(t)$  y  $\Phi_1(t)C$  son soluciones matriciales de (2.8) que coinciden en  $t_0$  y el resultado se sigue del Corolario 2.3.4.  $\square$

### 2.3.2. Sistemas Periódicos

Estudiemos ahora el sistema

$$x' = A(t)x \quad (2.13)$$

donde  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  es continua y  $T$ -periódica para algún  $T > 0$ . Es decir,  $A(t+T) = A(t)$ , para cada  $t \in \mathbb{R}$ .

Se deducen inmediatamente los dos siguientes resultados

**Proposición 2.3.11** Si  $u(t)$  es una solución de (2.13) entonces,  $u(t+T)$  también lo es.

**Proposición 2.3.12** Si  $u$  es una solución de (2.13) y  $u(0) = u(T)$  entonces,  $u$  es  $T$ -periódica.

**Demostración:** Por la Proposición anterior se tiene que  $v(t) := u(t+T)$  es solución de (2.13), pero por hipótesis,  $v(0) = u(0)$  y por el Teorema 2.1.2,  $u \equiv v$ . Es decir,  $u(t) = u(t+T)$  y  $u$  resulta  $T$ -periódica.  $\square$

En lo que sigue,  $\Phi(t)$  va a denotar la matriz fundamental de (2.13) tal que  $\Phi(0) = I$ . Por la Proposición anterior sabemos que la solución  $\Phi(t)x$ ; con  $x \in \mathbb{R}^n$  de (2.13) es  $T$ -periódica sii  $\Phi(T)x = \Phi(0)x = x$ .

**Corolario 2.3.13** El sistema (2.13) posee una solución  $T$ -periódica no trivial si y sólo si 1 es un autovalor de  $\Phi(T)$ .

El siguiente teorema establece una relación entre las soluciones del sistema homogéneo y no homogéneo.

**Teorema 2.3.14** Si la única solución  $T$ -periódica de (2.13) es la trivial entonces, la ecuación

$$x' = A(t)x + p(t) \quad (2.14)$$

posee una única solución  $T$ -periódica para cada función  $T$ -periódica continua  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Demostración:** La unicidad se sigue del Teorema 2.1.2. Para probar la existencia, recordemos que, por la Fórmula de la Variación de las Constantes, cada solución  $\omega$  de (2.14) es de la forma

$$\omega(t) = \Phi(t) \left[ x_0 + \int_0^t \Phi(s)^{-1} p(s) ds \right]$$

para algún  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Ahora, de los argumentos de las Proposiciones 2.3.11 y 2.3.12, se tiene que  $\omega$  es  $T$ -periódica si y sólo si  $\omega(0) = \omega(T)$ . Pero  $\omega(0) = x_0$ , de modo que  $\omega$  es  $T$ -periódica si y sólo si

$$x_0 = \Phi(T)x_0 + \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1} p(s) ds$$

lo cual equivale a

$$[I - \Phi(T)] x_0 = \Phi(T) \int_0^T \Phi(s)^{-1} p(s) ds \quad (2.15)$$

$I - \Phi(T)$  es inversible, y en consecuencia, existe un único  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  que satisface (2.15).  $\square$

**Proposición 2.3.15** *Si (2.14) posee una solución acotada entonces posee también una solución  $T$ -periódica.*

La prueba de este resultado puede verse en [38] en el Corolario 5.7

### 2.3.3. Multiplicadores de Floquet

En la sección anterior se mencionó la relación existente entre los autovalores de la matriz correspondiente a un sistema lineal autónomo con coeficientes constantes y la estabilidad de los puntos de equilibrio. Lo que haremos ahora es asociarle a (2.13) un sistema de coeficientes constantes que determine el comportamiento asintótico de las soluciones de (2.13).

Utilizaremos el siguiente Lema para cuya demostración puede verse el libro [38] Lema 5.8

**Lema 2.3.16** *Dada  $B \in L(\mathbb{C}^n)$  inversible, existe  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  tal que  $\exp(A) = B$ .*

**Nota 2.3.17** *El resultado anterior no es, en general, válido en el caso real. En efecto, si  $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  y  $B = \exp(A)$  entonces  $\det(B) = \exp(\text{Tr}(A)) > 0$ .*

**Lema 2.3.18** *Sea  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  inversible, existe  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $e^A = B^2$ .*

**Teorema 2.3.19 (Descomposición de Floquet-Caso complejo)** *Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental de (2.13) con  $\Phi(0) = I$ . Entonces existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  y una función  $T$ -periódica  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  tal que  $\Phi(t) = P(t) \exp(tB)$ .*

**Demostración:** Igual que en la demostración de la Proposición 2.3.12, tenemos que  $\Phi(t+T)$  es una matriz fundamental de (2.13), de modo que por el Teorema 2.3.10, existe  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  tal que  $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$ . Para  $t = 0$  queda  $C = \Phi(T)$ , dando lugar a la relación  $\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi(T)$ . Por el Lema anterior, existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  tal que  $\exp(TB) = \Phi(T)$  y definiendo  $P(t) = \Phi(t) \exp(-tB)$  tenemos,

$$\begin{aligned} P(t+T) &= \Phi(t+T) \exp(-T B - tB) \\ &= \Phi(t) \Phi(T) \exp(-T B) \exp(-tB) = P(t) \end{aligned}$$

puesto que  $\Phi(T) \exp(-T B) = I$ .  $\square$

**Observación 2.3.20** *Si bien en la descomposición de Floquet la matriz  $B$  no es única, a los efectos del análisis de la estabilidad, que es nuestro tema de interés, es suficiente encontrar una posible  $B$ .*

**Nota 2.3.21** *Supongamos que estamos trabajando en  $\mathbb{C}$  y  $\Phi(t)$ ,  $P(t)$  y  $B$  son como en el Teorema precedente. Si  $u$  es una solución de (2.13) podemos escribir  $u(t) = \Phi(t)x_0$  para algún  $x_0 \in \mathbb{C}^n$  y así,  $u(t) = P(t)v(t)$ , donde  $v(t) = \exp(tB)x_0$  es una solución del sistema a coeficientes constantes*

$$x' = Bx \quad (2.16)$$

*Recíprocamente, si  $v$  es una solución de (2.16), entonces  $u(t) := P(t)v(t)$  es solución de (2.13). En efecto, recordemos que  $P(t) = \Phi(t) \exp(-tB)$ , donde  $\Phi(t)$  es una solución fundamental de (2.13) y por lo tanto verifica que  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ .*

Calculemos  $P'(t)$ ,

$$P'(t) = \Phi'(t) \exp(-tB) - \Phi(t) \exp(-tB) B = A(t) \Phi(t) \exp(-tB) - \Phi(t) \exp(-tB) B$$

Entonces,

$$\begin{aligned} u'(t) &= P'(t)v(t) + P(t)v'(t) = \\ &= A(t)\Phi(t)\exp(-tB)v(t) - \Phi(t)\exp(-tB)B.v(t) + \Phi(t)\exp(-tB)B.v(t) = A(t)u(t). \end{aligned}$$

Así, la correspondencia  $v \rightarrow Pv$  establece un isomorfismo entre el espacio de soluciones de (2.16) y el espacio de soluciones de (2.13). Esta correspondencia permite conocer el comportamiento de las soluciones de este último sistema a través del comportamiento de las soluciones de (2.16).

**Nota 2.3.22** En el caso real, se tiene una descomposición de Floquet  $\Phi(t) = P(t)e^{tB}$  para alguna función  $2T$ -periódica  $P(t)$  de clase  $C^1$  y alguna matriz constante  $B$ . En efecto, de la relación  $\Phi(t+T) = \Phi(t) \circ \Phi(T)$  concluimos que  $\Phi(t+2T) = \Phi(t) \circ \Phi(T)^2$  y del Lema 2.3.18,  $\Phi(T)^2 = e^{2TB}$  para alguna matriz  $B$ . Definimos entonces  $P(t) = \Phi(t)e^{-tB}$ .

**Definición 2.3.23** Sea  $\Phi(t)$  la matriz fundamental de (2.13) con  $\Phi(0) = I$ . Los autovalores de  $\Phi(T)$  son llamados los **multiplicadores de Floquet** de ese sistema.

**Proposición 2.3.24**  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un multiplicador de (2.13) si y sólo si ese sistema posee una solución no trivial  $u$  tal que  $u(t+T) = \lambda u(t) \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Demostración:** Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  un autovalor de  $\Phi(T)$  y fijemos  $x_0 \neq 0$  en  $\mathbb{C}^n$ , tal que  $\Phi(T)x_0 = \lambda x_0$ . Si definimos  $u(t) = \Phi(t)x_0$  tenemos,

$$u(t+T) = \Phi(t+T)x_0 = \Phi(t)\Phi(T)x_0 = \Phi(t)\lambda x_0 = \lambda\Phi(t)x_0 = \lambda u(t).$$

Recíprocamente, si  $u$  es una solución no trivial de (2.13), que satisface  $u(t+T) = \lambda u(t) \forall t \in \mathbb{R}$ , entonces, de la relación  $u(t) = \Phi(t)x_0$ , con  $x_0 = u(0) \neq 0$ , se tiene  $\Phi(T)x_0 = u(T) = \lambda u(0) = \lambda x_0$ . Por lo tanto  $\lambda$  es un multiplicador de Floquet de (2.13).  $\square$

**Definición 2.3.25** Los autovalores de la matriz  $B$ , dada por el Teorema de Floquet, son llamados los **exponentes característicos** de (2.13).

**Nota 2.3.26** Ya que  $\Phi(T) = e^{TB}$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  es un multiplicador de (2.13) si y sólo si  $\lambda = e^{\nu T}$  para algún  $\nu \in \sigma(B)$ .

**Teorema 2.3.27** Dado el sistema

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.17}$$

donde  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  es continua y  $T$ -periódica para algún  $T > 0$ , el origen será **asintóticamente estable**, si todos los exponentes característicos tienen parte real negativa.

Por la observación hecha en 2.3.26 esto equivalente a decir que el origen será **asintóticamente estable**, si los multiplicadores de Floquet del sistema tienen módulo menor que 1.

**Demostración:** Sea  $x(t)$  una solución de

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde  $\|x_0\| < \delta$ . Entonces, de lo visto anteriormente, será  $x(t) = \Phi(t)x_0$  donde  $\Phi(t)$  es una solución fundamental del sistema. Además por el Teorema 2.3.19

$$x(t) = \Phi(t)x_0 = P(t)e^{tB}x_0$$

donde  $B$  es una matriz constante y  $P(t)$  es periódica de clase  $C^1$  y por lo tanto es acotada.

Si  $\sigma(B) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , sabemos por hipótesis que  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < \mu < 0$ ,  $\forall 1 \leq i \leq n$

Entonces  $\|x(t)\| \leq \|P(t)\| \cdot \|e^{tB}\| \cdot \|x_0\| \leq C \cdot e^{-\mu t} \cdot \|x_0\| \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .  $\square$

El análisis de sistemas no autónomos a través de las matrices fundamentales y los multiplicadores de Floquet puede profundizarse en [9], [38] y en [35].

## 2.4. Grupo Simpléctico

Se presentan aquí algunas definiciones y propiedades que es necesario tener presente para el análisis del equilibrio del péndulo de longitud variable que se hará en el Capítulo 4. Aunque allí sólo trabajaremos en  $\mathbb{R}^2$  daremos las definiciones en forma general.

### 2.4.1. Matrices Simplécticas

Una *matriz simpléctica* es una matriz de  $2n \times 2n$ ,  $M$  (cuyos coeficientes están en general en  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ) que satisface la condición  $M^T \Omega M = \Omega$ , donde  $M^T$  denota la transpuesta de  $M$  y  $\Omega$  es una matriz inversible antisimétrica fija. En general  $\Omega$  se elige como la matriz de bloques  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$  donde  $I_n$  es la matriz identidad de  $n \times n$ . Notar que  $\Omega$  tiene determinante  $\pm 1$  y su inversa está dada por  $\Omega^{-1} = -\Omega$ .

Veamos que propiedades tienen esta clase de matrices:

- Toda matriz simpléctica es inversible con inversa dada por  $M^{-1} = \Omega^{-1} M^T \Omega$ .
- El producto de dos matrices simplécticas es una matriz simpléctica.

Esto le da al conjunto de todas las matrices simplécticas una estructura de grupo. Existe una estructura natural de variedad sobre este grupo que lo convierte en un grupo de Lie (real o complejo), llamado *Grupo Simpléctico*. Este grupo tiene dimensión  $n \cdot (2n + 1)$  y se sigue fácilmente de la definición que el determinante de cualquier matriz simpléctica es 1.

El grupo simpléctico sobre  $\mathbb{R}$  se denota por  $Sp(2n, \mathbb{R})$  y en el caso particular donde  $n = 1$ , representa al grupo de las matrices de  $2 \times 2$  con determinante igual a 1.

### 2.4.2. Transformaciones Simplécticas

En la formulación abstracta del álgebra lineal, las matrices son reemplazadas por transformaciones lineales de espacios vectoriales de dimensión finita. La analogía abstracta de una matriz simpléctica es una transformación simpléctica de un espacio de vectores simplécticos. En resumen, un espacio de vectores simpléctico es un espacio vectorial  $\mathbf{V}$  de dimensión  $2n$  equipado con una forma bilineal antisimétrica no degenerada  $\omega$ . Una transformación simpléctica es entonces una transformación lineal  $L : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$  que preserva  $\omega$ , es decir  $\omega(Lu; Lv) = \omega(u; v)$ . Fijada una base para  $\mathbf{V}$ ,  $\omega$  puede ser escrita como una matriz  $\Omega$  y  $L$  como una matriz  $M$ . La condición para que  $L$  sea una transformación simpléctica es precisamente la condición de que  $M$  sea una matriz simpléctica.

Vimos que las matrices simplécticas se definen a partir de una matriz fija  $\Omega$  inversible y antisimétrica. Dicha  $\Omega$  puede ser pensada como la representación en coordenadas de una forma bilineal no degenerada antisimétrica y sabemos que dos de tales matrices difieren sólo por un cambio de bases.

En el libro de Arnold [2] se presenta una formulación de la mecánica hamiltoniana utilizando el formalismo de la geometría simpléctica.

## 2.5. Sistemas Hamiltonianos

Sean  $q_1, \dots, q_n$  coordenadas cualquiera en la configuración espacial de un sistema de  $n$  puntos masa ( $q_1, \dots, q_n$  reciben el nombre de coordenadas generalizadas) y  $p_1, \dots, p_n$  los momentos generalizados ( $p_i = m \cdot v_i$ ).

Una función de Hamilton o **Hamiltoniano**  $H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t)$  es una función escalar de clase  $C^2$  a partir de la cual pueden obtenerse las ecuaciones de movimiento de un sistema. En un sistema autónomo, es decir, independiente del tiempo, representa la energía mecánica total del sistema:  $H = T + U$ , donde  $T$  es la energía cinética y  $U$  la energía potencial.

Un **sistema hamiltoniano** es un sistema simétrico de  $2n$  ecuaciones de primer orden que verifican

$$\begin{cases} \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

**Proposición 2.5.1** (*Ley de Conservación de la Energía*)  $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$ . En particular, para un sistema cuyo hamiltoniano no depende explícitamente del tiempo ( $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ ), se verifica la Ley de Conservación de la Energía de la función hamiltoniana:  $H(p(t), q(t)) = k$ , con  $k$  constante.

**Demostración:** Consideramos la variación de  $H$  a lo largo de la trayectoria  $H(p(t), q(t), t)$ , entonces por las ecuaciones hamiltonianas

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dt} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial t} \cdot 1 = \\ &= \frac{\partial H}{\partial p} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) + \frac{\partial H}{\partial q} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right) + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto la energía se mantiene constante.  $\square$

Esto dice que el hamiltoniano es una **integral de movimiento** o constante de movimiento, es decir, es una función de la posición y las velocidades que es constante a lo largo de una trayectoria del sistema a lo largo de las fases.

En general el conocimiento de una integral de movimiento permite reducir la dimensión de un sistema de las ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de un sistema mecánico. Análogamente permiten reducir un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias a otro sistema equivalente más pequeño.

Los sistemas hamiltonianos tienen, además, otra propiedad muy importante. Consideremos una región en el espacio de fases que evoluciona con el tiempo al desplazarse sobre su trayectoria cada uno de sus puntos, se transformará al cabo del tiempo en una región diferente, ubicada además en otra parte del espacio de fases. Veremos que a pesar de la traslación y el cambio de forma, el volumen total de dicha región permanecerá invariante. Además, debido a la continuidad de la evolución temporal, si la región es conexa inicialmente seguirá siendo conexa todo el tiempo.

Veamos en primer lugar un resultado que nos permitirá calcular el flujo de un sistema hamiltoniano.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales  $\dot{X}(t) = f(t, X(t))$ , donde  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función  $C^1$  Lipschitz y  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  y supongamos que las soluciones están definidas globalmente.

Podemos definir entonces el **flujo**  $\Phi_{t_1, t_2}(\cdot)$  asociado a este sistema desde el instante  $t_0$  al instante  $t_1$  del siguiente modo: tomemos  $X_0 \in \mathbb{R}^n$ , entonces se define  $\Phi_{t_1, t_2}(X_0)$  como  $\Phi_{t_0, t_1}(X_0) = X(t_1)$  donde  $X(t)$  es la única solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = f(t, X(t)) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases} \quad (2.18)$$

De la definición del flujo y la unicidad de la solución, se deduce que el flujo posee las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \Phi_{t_0, t_0} &= Id \\ \Phi_{t_1, t_2} \circ \Phi_{t_0, t_1} &= \Phi_{t_0, t_2} \end{aligned}$$

En el caso particular en que  $f$  no depende del tiempo (sistema autónomo), se puede demostrar en virtud de la unicidad que:

$$\Phi_{t_1, t_2} = \Phi_{0, t_2 - t_1}$$

(o sea que el flujo  $\Phi_{t_1, t_2}$  sólo depende de la longitud del intervalo de tiempo  $t_2 - t_1$ ). Entonces, para simplificar la notación escribimos  $\Phi_t = \Phi_{0, t}$

El flujo de un sistema autónomo verifica las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= Id \\ \Phi_{t_2} \circ \Phi_{t_1} &= \Phi_{t_1 + t_2} \\ \Phi_{t_1}^{-1} &= \Phi_{-t_1} \end{aligned}$$

Nos interesa calcular el diferencial del flujo  $D\Phi_{t_0, t}(X_0)$ , que consiste en derivar la solución respecto de la condición inicial. Para ello utilizaremos el siguiente teorema (ver [35] Teorema 11 de la Sección 5.2)

**Teorema 2.5.2** *Sea  $D$  un abierto conexo de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua tal que sus derivadas parciales  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , también son continuas. Entonces la solución  $X(t) = X(t, t_0, X_0)$  de (2.18) es de clase  $C^1$  en la variable  $X_0$ . Además, si  $\Phi_{t_0, t}(X_0)$  representa el flujo en  $X_0$ ,*

$$D\Phi_{t_0, t}(X_0) = M(t)$$

donde  $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  es la solución del problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = Df(\Phi_{t_0, t}(X_0)) \cdot M(t) \\ M(t_0) = I \end{cases} \quad (2.19)$$

En la sección anterior definimos una **matriz simpléctica** como una matriz  $M$  que verifica  $M^T \Omega M = \Omega$  donde  $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$ .

**Definición 2.5.3** *Diremos que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un **difeomorfismo simpléctico** si es un difeomorfismo y  $Df_x(t, x)$  es una matriz simpléctica en cada  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

Probaremos el siguiente teorema

**Teorema 2.5.4** *El flujo de un sistema Hamiltoniano define un grupo uniparamétrico de difeomorfismos simplécticos.*

**Demostración:** Para simplificar la notación lo demostraremos en el caso de un sistema autónomo

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

es decir que  $t_0 = 0$ .

Se dice que  $\{\Phi_t\}$  es un grupo local a un parámetro, y cuando las soluciones están definidas globalmente, como estamos suponiendo nosotros, las  $\Phi_t$  forman un grupo con respecto a la operación composición de funciones. Además, la aplicación  $t \rightarrow \Phi_t$  es un morfismo de grupos con el grupo aditivo de los reales como dominio.

Lo que tendríamos que ver es que  $D\Phi_t(X_0)$  es una matriz simpléctica. Por el Teorema 2.5.2 esto es equivalente a probar que la matriz  $M(t)$  es simpléctica siendo  $M(t)$  solución de

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = Df(\Phi_t(X_0)) \cdot M(t) \\ M(0) = I \end{cases}$$

Vamos a probar que  $M^T(t) \Omega M(t)$  es una matriz con coeficientes constantes y como  $M^T(0) \Omega M(0) = \Omega$  porque  $M(0) = I$ , entonces  $M^T(t) \Omega M(t) = \Omega \forall t \in \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (M^T(t) \Omega M(t)) &= \dot{M}^T(t) \Omega M(t) + M^T(t) \Omega \dot{M}(t) = \\ &= M^T(t) (Df(\Phi_t(X_0)))^T \Omega M(t) + M^T(t) \Omega Df(\Phi_t(X_0)) \cdot M(t) = \\ &= M^T(t) \left[ (Df(\Phi_t(X_0)))^T \Omega + \Omega Df(\Phi_t(X_0)) \right] M(t) \end{aligned}$$

Esta derivada es igual a cero si probamos que

$$(Df(\Phi_t(X_0)))^T \Omega + \Omega Df(\Phi_t(X_0)) = 0 \quad (2.20)$$

Como estamos considerando un sistema Hamiltoniano, el campo vectorial es

$$f(q, p) = \left( \frac{\partial H}{\partial p}(q, p), -\frac{\partial H}{\partial q}(q, p) \right)$$

y su diferencial resulta

$$\begin{aligned} Df(\Phi_t(X_0)) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial pq} & \frac{\partial H}{\partial pp} \\ -\frac{\partial H}{\partial qq} & -\frac{\partial H}{\partial qp} \end{bmatrix}_{\Phi_t(X_0)} \\ (Df(\Phi_t(X_0)))^T \Omega &= \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial pq} & -\frac{\partial H}{\partial qq} \\ \frac{\partial H}{\partial pp} & -\frac{\partial H}{\partial qp} \end{bmatrix}_{\Phi_t(X_0)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial qq} & \frac{\partial H}{\partial pq} \\ \frac{\partial H}{\partial qp} & \frac{\partial H}{\partial pp} \end{bmatrix}_{\Phi_t(X_0)} \\ \Omega Df(\Phi_t(X_0)) &= \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial pq} & \frac{\partial H}{\partial pp} \\ -\frac{\partial H}{\partial qq} & -\frac{\partial H}{\partial qp} \end{bmatrix}_{\Phi_t(X_0)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial qq} & -\frac{\partial H}{\partial qp} \\ \frac{\partial H}{\partial pq} & \frac{\partial H}{\partial pp} \end{bmatrix}_{\Phi_t(X_0)} \end{aligned}$$

Como  $H$  es de clase  $C^2$  las derivadas cruzadas coinciden  $\frac{\partial H}{\partial pq} = \frac{\partial H}{\partial qp}$  se verifica (2.20) y  $M(t)$  resulta simpléctica.  $\square$

Como toda matriz simpléctica tiene determinante 1 podemos enunciar el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.5** (Teorema de Liouville) *El flujo de fase de las ecuaciones Hamiltonianas preserva el volumen de fase.*

Otra forma de demostrar este teorema es la siguiente: Vamos a aplicar el Teorema 2.3.6 al sistema (2.19)

$$\begin{cases} \dot{M}(t) = Df(\Phi_t(X_0)) \cdot M(t) \\ M(0) = I \end{cases}$$

Si  $M(t)$  es una solución matricial de este sistema, entonces

$$\det M(t_2) = \det M(t_1) \exp\left(\int_{t_1}^{t_2} \text{Tr}(Df(\Phi_s(X_0))) ds\right)$$

Como estamos trabajando con un sistema Hamiltoniano  $\text{Tr}(Df(\Phi_s(X_0))) = 0$ , por lo tanto

$$\det M(t) = C$$

con  $C$  constante, pero como  $M(0) = I$ , entonces

$$\det M(t) = \det(D\Phi_t(X_0)) = 1$$

## 2.6. Teoría de Grado

Como una primera aproximación, podríamos decir que la teoría de grado se ocupa del problema de encontrar soluciones de la ecuación  $f(x) = y$ .

Definiremos en primer lugar el grado para funciones de clase  $C^1$  y luego extenderemos este concepto a las funciones continuas.

**Definición 2.6.1** Sea  $f \in C^1(\overline{D})$ , donde  $D \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto acotado. Decimos que  $x$  es un punto crítico de  $f$  si  $J_f(x) = 0$ , es decir, si  $Df(x)$  es singular, caso contrario  $x$  será un punto regular. Además,  $y$  es un valor regular de  $f$  si  $\forall x \in D$  tal que  $f(x) = y$ ,  $x$  es un punto regular. En caso contrario se dice que  $y$  es un valor crítico. Denotamos con  $Z_f$  al conjunto de todos los puntos críticos de  $f$  y  $f(Z_f)$  al conjunto de los valores críticos de  $f$ .

Sabemos por el Teorema de la función inversa que si  $x$  es un punto regular de  $f$  entonces  $f$  es localmente inversible. La motivación para nuestra definición es que si  $J_f(x) = 0$ , entonces uno no puede concluir por el Teorema de la Función Inversa que  $f(a) = y$  tiene una solución con  $y \neq f(x)$  cerca de  $f(x)$ . Estamos en el caso crítico.

El siguiente teorema nos dice cuan grande es el conjunto  $f^{-1}(y)$  para un valor regular  $y$ .

**Teorema 2.6.2** Si  $f \in C^1(\overline{D})$  e  $y$  es un valor regular de  $f$  entonces  $f^{-1}(y)$  es finito.

**Definición 2.6.3** Supongamos que  $f \in C^1(\overline{D})$ ,  $p \notin f(\partial D)$  y  $p$  es un valor regular de  $f$ . Definimos el grado de  $f$  en  $p$  relativo a  $D$  como el entero

$$d(f, D, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} \text{sgn} J_f(x)$$

Nuestro objetivo es quitar la restricción de que  $f \in C^1$  y que  $p$  sea un valor regular. El siguiente teorema afirma que si  $g$  es una función que está lo suficientemente cerca de  $f$  con la topología de  $C^1$  y  $p$  es un valor regular que no está en  $f(\partial D)$  entonces  $d(g, D, p)$  está definido y vale  $d(g, D, p) = d(f, D, p)$

**Teorema 2.6.4** *Sea  $f \in C^1(\overline{D})$  y  $p$  un valor regular de  $f$  tal que  $p \notin f(\partial D)$ . Entonces existe un  $\varepsilon > 0$ , que depende de  $f$  y  $p$  tal que si  $\|g - f\|_{C^1} < \varepsilon$ , entonces  $p$  es un valor regular de  $g$  tal que  $p \notin g(\partial D)$ , y  $d(f, D, p) = d(g, D, p)$ .*

El próximo teorema nos dice que el grado de una aplicación es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .

**Teorema 2.6.5** *Sea  $f \in C^1(\overline{D})$ . Supongamos que  $p_1, p_2$  sean valores regulares de  $f$  y estén en la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Entonces  $d(f, D, p_1) = d(f, D, p_2)$ .*

El teorema anterior nos permite definir el grado de una aplicación cuando  $p$  no es un valor regular.

**Definición 2.6.6** *Si  $f \in C^1(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$  pero  $p$  no es un valor regular de  $f$ , definimos  $d(f, D, p) = d(f, D, q)$ , donde  $q$  es un valor regular de  $f$  y  $|q - p| < \text{dist}(p, f(\partial D))$ .*

Recordemos el Teorema de Sard que dice que el conjunto de valores críticos  $f(Z_f) \subset \mathbb{R}^n$  tiene medida cero y por consiguiente el conjunto de valores regulares de  $f$  es denso en  $\mathbb{R}^n$ . Esto nos permite asegurar que cada bola  $B(p, r)$  contiene un valor regular de  $f$ .

**Definición 2.6.7** *Una homotopía de clase  $C^1$  entre elementos  $f, g \in C^1(\overline{D})$  es una función  $H : \overline{D} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $H(x, 0) = f(x)$ ,  $H(x, 1) = g(x)$ ,  $H(\cdot, t) \in C^1(\overline{D})$  para  $0 \leq t \leq 1$ , y  $H(\cdot, s) \rightarrow H(\cdot, t)$  en  $C^1(\overline{D})$  cuando  $s \rightarrow t$ .*

*En otras palabras, una homotopía es una deformación de  $f$  en  $g$  que varía en forma continua con la topología de  $C^1$ .*

**Teorema 2.6.8** *Sea  $f \in C^1(\overline{D})$*

- i.  $d(f, D, \cdot)$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .*
- ii. Si  $p \notin f(\partial D)$ , existe un  $\varepsilon > 0$ , que depende de  $p$  y de  $f$ , tal que  $d(f, D, p) = d(g, D, p)$  siempre que  $\|g - f\|_{C^1} < \varepsilon$ .*
- iii. Sea  $H(x, t)$  una  $C^1$ -homotopía entre  $f$  y  $g$ . Si  $p \notin H(\partial D, t)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , entonces  $d(f, D, p) = d(g, D, p)$ .*

Las partes (i)- (ii) del Teorema generalizan a los Teoremas 2.6.5 y 2.6.4 respectivamente, pues aquí no se pide que  $p$  sea un valor regular. La parte (iii) dice que el grado en  $p$  de dos aplicaciones que pueden ser deformadas una en la otra vía una homotopía coincide si se verifica que  $p$  se mantiene como un valor regular durante la deformación.

Los resultados anteriores nos van a permitir definir ahora el grado para funciones continuas. El hecho de que esto sea posible demuestra que el concepto de grado es una propiedad topológica.

**Definición 2.6.9** *Supongamos que  $f \in C(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Definimos  $d(f, D, p)$  como  $d(g, D, p)$  donde  $g$  es una función  $C^1(\overline{D})$  que satisface  $\|f - g\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial D))$  (la cota usada aquí no es importante, sólo es necesario que  $\|f - g\|_\infty$  sea suficientemente pequeño)*

**Teorema 2.6.10** *En la Definición 2.6.9, la función  $g$  puede ser elegida de forma tal que  $p$  no sea necesariamente un valor regular de  $g$ .*

El siguiente teorema dice que el grado de una aplicación es invariante bajo cambios de coordenadas de tipo  $C^1$ . Esto implica que la teoría desarrollada hasta ahora es aplicable a cualquier espacio real normado  $X$  de dimensión finita, ya que  $X$  puede ser identificado con  $\mathbb{R}^n$  una vez elegida una base y cambiar de una base a otra es una aplicación  $C^1$ . El mismo argumento permite definir el grado para variedades (ver [27])

**Teorema 2.6.11** *Si  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$ , entonces  $d(f, D, p)$  es invariante bajo cambios de coordenadas  $C^1$  no singulares.*

Veamos ahora algunas propiedades del grado .

**Teorema 2.6.12 (Existencia)** *Supongamos que  $f \in C(\overline{D})$ . Si  $d(f, D, p)$  está definido y es no nulo, entonces existe un  $x \in D$  tal que  $p = f(x)$ .*

Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos, decimos que  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X \rightarrow Y$  son homotópicas si existe una función continua  $H : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $H(0, x) = f(x)$  y  $H(1, x) = g(x)$ .

**Teorema 2.6.13** *i. Supongamos que  $f \in C(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Si  $\|f - g\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial D))$ , entonces  $d(g, D, p)$  está definido y es igual a  $d(f, D, p)$*

*ii. (Invariancia por Homotopía) Si  $H$  es una homotopía y  $p \notin H(t, \partial D)$  para  $0 \leq t \leq 1$ , entonces  $d(H(t, \cdot), D, p)$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ .*

La parte (i) del teorema anterior dice que la aplicación  $d(\cdot, D, p) : C(\overline{D}) \rightarrow \mathbb{Z}$  es localmente constante, es decir, si  $f, g \in C(\overline{D})$  están suficientemente cerca sus grados serán iguales. La parte (ii) dice que el grado es homotópicamente invariante, siempre que  $p$  se mantenga como un valor regular durante la deformación.

**Corolario 2.6.14** *Sea  $f \in C(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$ , y supongamos que  $(f_k)$  es una sucesión de funciones continuas sobre  $\overline{D}$  que convergen uniformemente a  $f$ . Entonces existe un entero  $N > 0$  tal que  $d(f, D, p) = d(f_k, D, p)$  para todo  $k \geq N$ .*

**Teorema 2.6.15** *Sea  $f \in C(\overline{D})$ , entonces  $d(f, D, p)$  es constante sobre las componentes conexas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .*

El siguiente teorema afirma que  $d(f, D, p)$  depende solamente de  $f(\partial D)$ , es decir, de los valores que toma  $f$  sobre el borde de  $D$ .

**Teorema 2.6.16** *Si  $f, g \in C(\overline{D})$  y  $f = g$  sobre  $\partial D$ , entonces  $d(f, D, p) = d(g, D, p)$ , siempre que  $p \notin f(\partial D)$ .*

**Teorema 2.6.17 (Poincaré-Bohl)** *Sean  $f, g \in C(\overline{D})$ , y supongamos que para todo  $x \in \partial D$ , el segmento  $[f(x), g(x)] = \{sf(x) + (1-s)g(x) / 0 \leq s \leq 1\}$  no contiene a  $p$ . Entonces  $d(f, D, p) = d(g, D, p)$ .*

El siguiente teorema dice que el grado de una aplicación es invariante por traslaciones.

**Teorema 2.6.18 (Invariancia por traslaciones)** *Supongamos que  $f \in C(\overline{D})$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Entonces para todo  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $d(f, D, p) = d(f - q, D, p - q)$ , donde  $f - q$  es la aplicación  $x \rightarrow f(x) - q$ .*

El teorema previo nos permite enunciar la siguiente versión de invariancia por homotopía.

**Teorema 2.6.19** *Supongamos que  $H : [0, 1] \times \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una homotopía en  $C(\overline{D})$  y  $p_t$  es un camino continuo en  $\mathbb{R}^n$ . Si  $p_t \notin H(t, \partial D)$ , entonces  $d(H(t, \cdot), D, p_t)$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ .*

**Teorema 2.6.20** Sea  $f \in C(\overline{D})$  y supongamos que  $p \notin f(\partial D)$

i. **(Aditividad)** Si  $D$  es unión disjunta de conjuntos abiertos  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , entonces

$$d(f, D, p) = \sum_i d(f, D_i, p).$$

ii. **(Escisión)** Si  $K \subset \overline{D}$  es cerrado y  $p \notin f(K)$ , entonces  $d(f, D, p) = d(f, D \setminus K, p)$ .

**Nota 2.6.21** La Teoría de Grado puede ser usada para dar una demostración sencilla del Teorema de Punto Fijo de Brouwer que establece que una aplicación continua de la bola unitaria en sí misma tiene un punto fijo.

Para finalizar esta sección calcularemos el grado de algunas funciones sencillas para familiarizarnos con este nuevo concepto.

**Ejemplo 2.6.22** Consideremos una función continua  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(a) < f(b)$  y supongamos que  $p$  es un valor regular de  $f$ . Entonces claramente, si  $p < f(a)$  o  $p > f(b)$  entonces  $d(f, D, p) = 0$ . Por el otro lado, si  $f(a) < p < f(b)$  entonces  $d(f, D, p) = 1$ . De hecho, el conjunto  $f^{-1}(p) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  debe contener un número impar de puntos (considerar cómo debe ser el gráfico de  $f$ ). Por lo tanto, si  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$  entonces

$$d(f, D, p) = \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} f'(x_i) = \underbrace{+1 - 1 + 1 - 1 + \dots - 1 + 1}_{=0} = 1$$

Intuitivamente,  $f$  es creciente en  $x_1$ , decreciente en  $x_2$ , creciente en  $x_3, \dots$ , creciente en  $x_m$ . Análogamente, si  $f(a) > p > f(b)$  entonces  $d(f, D, p) = -1$

**Ejemplo 2.6.23** Sea  $F(x) = x^2$ , 0 es un cero aislado de esta función, entonces queremos calcular

$$\operatorname{deg}(F, B_\delta(0), 0)$$

donde  $B_\delta(0)$  es el intervalo  $(-\delta, \delta)$ . Como 0 no es un valor regular de  $F$  porque  $F'(0) = 0$ , entonces

$$\operatorname{deg}(F, B_\delta(0), 0) = \operatorname{deg}(F, B_\delta(0), q)$$

donde  $q$  es un valor regular de  $F$  tal que  $|q| < \operatorname{dist}(F(\partial B_\delta(0)), 0) = \delta^2$

$$\operatorname{deg}(F, B_\delta(0), q) = \operatorname{sgn}(\det F'(x_1)) + \operatorname{sgn}(\det F'(x_2)) = 0$$

donde  $x_1, x_2$  son las soluciones de  $x^2 = q$ .

En dimensión dos ( $d = 2$ ) el grado puede tomar cualquier valor entero. Veamos dos ejemplos simples.

**Ejemplo 2.6.24** Consideremos en primer lugar la función  $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  donde miramos a  $\mathbb{C}$  como  $\mathbb{R}^2$ ,  $F(z) = z^n$ . Queremos calcular el grado en cero, y como cero no es un valor regular

$$\operatorname{deg}(F, B_\delta(0), 0) = \operatorname{deg}(F, B_\delta(0), q)$$

donde  $q$  es un valor regular de  $F$  tal que  $|q| < \operatorname{dist}(F(\partial B_\delta(0)), 0) = \delta^n$

$$\operatorname{deg}(F, B_\delta(0), q) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\det F'(z_k))$$

donde  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  son las soluciones de  $z^n = q$ .

La función  $F(z) = z^n$  es una función holomorfa (diferenciable en el sentido complejo en todo punto), de hecho lo son todas las funciones polinómicas en  $z$  con coeficientes complejos. Si se identifica  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ , las funciones holomorfas coinciden con las funciones de dos variables reales que cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann. Si escribimos  $z = x + yi$  y  $F(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ , entonces

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix}$$

y  $\det(DF(x, y)) = u_x^2 + v_x^2 > 0$  y esto vale para cualquier punto en el plano complejo. Entonces

$$\deg(F, B_\delta(0), q) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\det F'(z_k)) = n \cdot 1 = n$$

**Ejemplo 2.6.25** Si ahora consideramos la función  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $F(z) = \bar{z}^n$  y queremos calcular el índice en cero que es un valor no regular, tendremos, otra vez, que buscar un valor regular  $q$  que verifique  $|q| < \operatorname{dist}(F(\partial B_\delta(0)), 0) = \delta^n$  y valdrá

$$\deg(F, B_\delta(0), 0) = \deg(F, B_\delta(0), q) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\det F'(z_k))$$

donde  $z_k$ ,  $1 \leq k \leq n$  son las soluciones de  $\bar{z}^n = q$ .

En general, vale el siguiente resultado:

**Lema 2.6.26** Sea  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa no constante,  $z_0$  un cero de  $F$  y  $\delta > 0$  pequeño, entonces  $\deg(F, B_\delta(z_0), z_0)$  es igual al orden de  $z_0$  como raíz de  $F$ .

**Ejemplo 2.6.27** Pero como  $F(z) = \bar{z}^n$  no es una función holomorfa no podemos repetir el argumento anterior. Vamos a usar el Teorema 2.6.11 que afirma que el grado es invariante bajo cambio de coordenadas  $C^1$  no singulares. Esto nos permite calcular el grado trabajando en coordenadas polares.

Si  $z = r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$ , en coordenadas polares  $z = (r, \theta)$  y  $F(r, \theta) = (r^n, -n\theta)$ , por lo tanto

$$DF(r, \theta) = \begin{pmatrix} n \cdot r^{n-1} & 0 \\ 0 & -n \end{pmatrix}$$

y se verifica  $\det(DF(r, \theta)) = -n^2 \cdot r^{n-1} < 0 \forall (r, \theta) \neq (0, 0)$ . Entonces

$$\operatorname{ind}[F, 0] = n \cdot (-1) = -n$$

Para ver las demostraciones de todos los teoremas aquí enunciados y profundizar acerca de la Teoría de Grado se puede recurrir al libro de Lloyd [25] o al de Schmitt [35].

## Capítulo 3

# Existencia de soluciones periódicas estables de ecuaciones diferenciales de Duffing

En este Capítulo nos basaremos en el trabajo [26] de Lazer y Mc.Kenna en el cual se considera una ecuación diferencial de segundo orden periódica en  $t$  con período  $T > 0$  y con amortiguación lineal. Se dan cotas para la derivada de la fuerza de restauración que garantizan la existencia y unicidad de una solución  $T$ -periódica de forma que la única solución  $T$ -periódica es asintóticamente estable.

Consideraremos soluciones periódicas de la ecuación diferencial

$$u'' + ku' + g(t, u) = 0 \quad (3.1)$$

donde  $k > 0$  es constante,  $g$  y su derivada parcial con respecto a la segunda variable, denotada por  $D_2g$ , son continuas, y  $g$  es  $T$ -periódica en  $t$  para algún  $T > 0$ . Nuestro objetivo es encontrar condiciones de la forma

$$a \leq D_2g(t, \xi) \leq b \quad (3.2)$$

para  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$  que garanticen la existencia y unicidad de una solución  $T$ -periódica  $u_0$  que sea localmente, exponencialmente, asintóticamente estable, es decir, tal que existan constantes  $C > 0$  y  $\alpha > 0$  tales que si  $u$  es otra solución con  $|u(0) - u_0(0)|$  y  $|u'(0) - u'_0(0)|$  suficientemente pequeños, entonces  $|u(t) - u_0(t)| \leq Cde^{-\alpha t}$ ,  $|u'(t) - u'_0(t)| \leq Cde^{-\alpha t}$  para todo  $t > 0$ , donde  $d = |u(0) - u_0(0)| + |u'(0) - u'_0(0)|$ .

El problema de existencia y unicidad de soluciones para esta ecuación ha sido analizado en varios papers cuando  $k = 0$ . En este caso, si existe un entero  $N \geq 0$  tal que  $\frac{4\pi^2 N^2}{T^2} < a \leq b < \frac{4\pi^2 (N+1)^2}{T^2}$  y se verifica (3.2), entonces existe una única solución  $T$ -periódica de (3.1). Esto está demostrado en el trabajo de Leach [24].

También existen trabajos en los cuales se han dado condiciones sobre  $D_2g$  que implican la existencia de soluciones periódicas de (3.1) con  $k \neq 0$ , pero la estabilidad de estas soluciones periódicas no ha sido estudiada.

Lo que demostraremos en los teoremas que siguen es que si el rango de  $D_2g$  es un intervalo contenido en un disco cerrado en el plano complejo que no contiene autovalores (complejos)  $\lambda$  del problema

$$\begin{cases} -u'' - ku' = \lambda u \\ u(0) = u(2T), \quad u'(0) = u'(2T) \end{cases}$$

entonces (3.1) tiene una única solución  $T$ -periódica que es localmente, exponencialmente, asintóticamente estable. Notar que las condiciones de borde corresponden a un período igual a  $2T$  y no igual a  $T$ .

**Lema 3.0.28** Sea  $k \in \mathbb{R}$  y sea  $g(t, \xi)$  definida y continua para  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , tal que su derivada con respecto a  $\xi$  es continua a trozos, y es  $T$ -periódica en  $t$  donde  $T > 0$ . Si existen números  $a$  y  $b$  tales que se verifica la condición (3.2) para todo  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$  y tal que existe un disco cerrado  $B$  en el plano complejo centrado en  $\gamma = \frac{a+b}{2}$  de radio  $r > \frac{b-a}{2}$  de modo que

$$\frac{4\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{2\pi i m}{T} k \notin B \quad (3.3)$$

para todo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , entonces existe una única solución  $T$ -periódica de (3.1).

**Demostración:** Sea  $L$  el operador diferencial lineal definido por  $Lu = -u'' - ku' - \gamma u$  y sea  $\mathbf{E}$  el espacio de Hilbert que consiste de funciones  $T$ -periódicas a valores complejos definidas en  $(-\infty; \infty)$  cuyas restricciones al intervalo  $[0, T]$  pertenecen a  $L^2[0, T]$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$ . Si  $h \in \mathbf{E}$ , entonces existe una única función  $T$ -periódica  $u$  tal que  $u$  es de clase  $C^1$ ,  $u'$  es absolutamente continua,  $u'' \in L^2$  y  $Lu = h$ . De hecho, si consideramos la base ortogonal de  $\mathbf{E}$ ,  $\{e^{2\pi i m t/T} : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ,  $h$  puede escribirse como

$$h(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m t/T} \quad (3.4)$$

entonces

$$u(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_m \left( \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{2\pi i m k}{T} - \gamma \right)^{-1} \cdot e^{2\pi i m t/T} \quad (3.5)$$

Si denotamos  $u$  por  $Kh$ , es decir que  $K = L^{-1}$ , entonces  $K$  resulta una aplicación lineal compacta de  $L^2$  en  $L^2$ . En efecto, sea  $h \in L^2[0, T]$ , su desarrollo de Fourier es

$$h(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{\frac{2\pi i m t}{T}}$$

Por la identidad de Plancherel

$$\|h\|_{L^2}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2$$

En el espacio de Sobolev

$$H_{per}^2[0, T] = \{h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad T\text{-periódicas} : h', h'' \in L^2[0, T]\}$$

consideramos la norma

$$\|h\|_{H^2}^2 = \|h''\|_{L^2}^2 + \|h\|_{L^2}^2$$

Y, en virtud de la identidad de Plancherel, podemos escribir

$$\|h\|_{H^2}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_m|^2 (1 + m^2)^2$$

Ahora sean

$$\lambda_m = \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{2\pi i m k}{T} - \gamma$$

los autovalores del operador lineal  $L$  definido anteriormente y sea  $K$  su operador inverso. Entonces  $K$  viene expresado en términos de los coeficientes de Fourier  $c_m$  de  $h$  del siguiente modo:

$$Kh = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \lambda_m^{-1} e^{\frac{2\pi i m t}{T}}$$

como mostraba la ecuación (3.5) y en consecuencia tenemos que:

$$\|Kh\|_{H^2}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2 |\lambda_m|^{-2} (1 + m^2)^2$$

Observemos que los autovalores  $\lambda_m$  tienen crecimiento cuadrático cuando  $m$  tiende a infinito (Esto refleja el hecho de que  $L$  es un operador diferencial de segundo orden). En consecuencia:

$$|\lambda_m| \leq C.m^2$$

o sea  $\lambda_m = O(m^2)$

Si miramos entonces el comportamiento de la sucesión de números  $|\lambda_m|^{-2}(1 + m^2)^2$ , observamos que está acotada independientemente de  $m \in \mathbb{Z}$ . Para  $m$  pequeño  $\lambda_m$  no se anula por la hipótesis del lema que dice que  $\frac{4\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{2\pi i m}{T} k \notin B$ , o sea que  $|\lambda_m| > r > 0$ , y para  $m$  grande está acotada por la acotación que mencionamos antes, por lo tanto:

$$|\lambda_m^{-2}(1 + m^2)^2| \leq C_2$$

Se deduce que:

$$\|Kh\|_{H^2}^2 \leq C_2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2 \leq C_2 \|h\|_{L^2}^2$$

Por consiguiente  $K$  es un operador lineal y continuo de  $L^2[0, T]$  en  $H^2[0, T]$ .

Recordemos el siguiente teorema cuya demostración puede encontrarse en [6].

**Teorema (Rellich-Kondrachov)** *La inmersión  $H_{per}^2[0, T] \subset C[0, T]$  es compacta. En particular,  $H_{per}^2[0, T] \subset L^2[0, T]$  resulta una inmersión compacta.*

Usando el hecho de que la inclusión de  $H^2$  en  $L^2$  es compacta, se deduce que si miramos a  $K$  como un operador de  $L^2$  en  $L^2$  resulta compacto. En efecto, si  $(h_n)_n$  es una sucesión acotada de funciones de  $L^2$ , por lo anterior  $Kh_n$  es acotada en  $H^2$  y entonces por el Teorema de Rellich  $Kh_n$  tiene una subsucesión convergente en  $L^2$  (y de hecho también en  $C[0, T]$ ).

Además, por la desigualdad  $\left| \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{2\pi i m k}{T} - \gamma \right| > r$  que se sigue de (3.3) para todo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , se sigue que

$$\|Kh\|_{L^2}^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2 \cdot |\lambda_m|^{-2} \leq \frac{1}{r^2} \cdot \sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m|^2$$

por lo tanto,

$$\|Kh\|_{L^2} \leq \frac{1}{r} \cdot \|h\|_{L^2} \quad (\forall h \in H_{per}^2) \quad (3.6)$$

Si denotamos como  $H$  al espacio de Hilbert real que consiste de las funciones en  $H_{per}^2$  a valores reales (Si  $h \in H$ , entonces  $c_{-m} = \overline{c_m}$  en (3.4)), entonces  $K(H) \subset H$ .

Tenemos que  $u$  es una solución  $T$ -periódica de (3.1) si y sólo si  $u \in H$  y

$$-u'' - ku' - \gamma u = Lu = g(t, u) - \gamma u$$

y por lo tanto,

$$u = KG(u) \equiv F(u)$$

donde  $G : H \rightarrow H$  es la aplicación de Nemytskii definida por

$$u \rightarrow g(\cdot, u) - \gamma u$$

De (3.2) se deduce que  $|D_2g(t, \xi) - \gamma| \leq \frac{b-a}{2}$  y utilizando el Teorema del Valor Medio tenemos que

$$\begin{aligned} \|G(u_1) - G(u_2)\|_{L^2}^2 &= \|g(t, u_1) - \gamma u_1 - g(t, u_2) + \gamma u_2\|_{L^2}^2 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |g(t, u_1) - \gamma u_1 - g(t, u_2) + \gamma u_2|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |D_2g(t, \xi) \cdot (u_1 - u_2) - \gamma \cdot (u_1 - u_2)|^2 = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T |u_1 - u_2|^2 \cdot |D_2g(t, \xi) - \gamma|^2 \leq \frac{b-a}{2} \cdot \|u_1 - u_2\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Es decir que, para todo  $u_1, u_2 \in H$ ,

$$\|G(u_1) - G(u_2)\|_{L^2} \leq \frac{b-a}{2} \cdot \|u_1 - u_2\|_{L^2}$$

y por lo tanto, por (3.6)

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_{L^2} \leq c \cdot \|u_1 - u_2\|_{L^2}$$

donde  $c = \frac{b-a}{2r} < 1$ , lo que prueba que  $F$  es contractivo con la norma de  $L^2$  y por lo tanto tiene un punto fijo  $u$  en  $L^2$ .

Pero como  $\|u\|_{H^2} = \|F(u)\|_{H^2} = \|KG(u)\|_{H^2} \leq c \cdot \|G(u)\|_{L^2} \leq c' \cdot \|u\|_{L^2}$ , entonces el punto fijo  $u \in H^2$ .  $\square$

Antes de probar nuestro resultado principal acerca de (3.1), vamos a demostrar un resultado sobre los multiplicadores de Floquet de un sistema lineal.

**Teorema 3.0.29** *Sea  $p(t)$  una función  $T$ -periódica continua y sea  $X(t)$  la matriz fundamental para el sistema lineal*

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (3.7)$$

donde  $x = (x_1, x_2)$ ,  $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p(t) & -k \end{pmatrix}$  y  $k > 0$  es constante. Si existen números  $a$  y  $b$  tales que para todo  $t \in \mathbb{R}$

$$a \leq p(t) \leq b, \quad (3.8)$$

y tal que existe un disco cerrado  $B$  en el plano complejo centrado en  $\gamma = \frac{a+b}{2}$  de radio  $r > \frac{b-a}{2}$  tal que

$$\frac{\pi^2 m^2}{T^2} - \frac{\pi i m}{T} k \notin B \quad (3.9)$$

para todo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , entonces los autovalores  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  de  $X(T)$  satisfacen que  $|\alpha_j| < 1$  para  $j = 1, 2$ .

**Demostración:** Para cada  $s$  con  $0 \leq s \leq 1$  tenemos

$$a \leq (1-s)\gamma + sp(t) \leq b \quad (3.10)$$

para todo  $t$ . Por lo tanto, por el Lema 3.0.28 y por (3.9), para cada  $s \in [0, 1]$ , existe una única solución periódica de período  $2T$  de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$u'' + ku' + (1-s)\gamma + sp(t)u = 0 \quad (3.11)$$

Pero  $u \equiv 0$  es una solución de esa ecuación. Por lo tanto, bajo las hipótesis del teorema, no existe una solución no trivial  $2T$ -periódica de (3.11) para todo  $s \in [0, 1]$ . Si

$$B(t, s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -(1-s)\gamma - sp(t) & -k \end{pmatrix}$$

entonces  $y = (y_1, y_2)$  es una solución  $2T$ -periódica de

$$y'(t) = B(t, s)y(t) \quad (3.12)$$

si y sólo si  $y_1 = u$  y  $y_2 = u'$  donde  $u$  es una solución no trivial  $2T$ -periódica de (3.11). Por lo tanto, el sistema (3.12) no tiene solución no trivial  $2T$ -periódica para  $0 \leq s \leq 1$ .

Denotemos por  $Y(t, s)$  la matriz fundamental asociada al sistema (3.12) para  $0 \leq s \leq 1$ . Tenemos que

$$Y'(t, s) = B(t, s)Y(t, s) \quad Y(0, s) = I$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ . Si para algún  $v \in \mathbb{R}^2$

$$Y(T, s)v = -v,$$

es decir que  $-1$  sería un autovalor, entonces  $y(t) = Y(t, s)v$  es una solución del sistema (3.12) (ver Observación 2.3.2 en el Capítulo de Preliminares) que satisface que  $y(T) = -y(0)$ . Debido a que tanto  $-y(t)$  como  $y(t+T)$  son soluciones de (3.12) que coinciden para  $t=0$  y por la unicidad de solución, se sigue que  $y(t+T) \equiv -y(t)$ .

Por lo tanto,  $y(t+2T) \equiv -y(t+T) = -(-y(t)) = y(t)$ , lo que implica que  $y(t) \equiv 0$  porque el sistema (3.12) no admite soluciones no triviales  $2T$ -periódicas. Se sigue que  $-1$  no es un autovalor de  $Y(T, s)$  para  $s \in [0, 1]$ .

Análogamente, se demuestra que si  $Y(T, s)v = v$ , entonces  $y(t) = Y(t, s)v$  es una solución  $T$ -periódica y por lo tanto  $2T$ -periódica de (3.12). Por lo tanto, para  $0 \leq s \leq 1$ ,  $1$  tampoco es un autovalor de  $Y(T, s)$ .

Para cada  $s$  con  $0 \leq s \leq 1$ , sean  $\mu_1(s)$  y  $\mu_2(s)$  los autovalores de  $Y(T, s)$  (multiplicadores del sistema). Vamos a mostrar que  $|\mu_j(s)| < 1$  para  $j = 1, 2$ ,  $0 \leq s \leq 1$  y como la matriz fundamental de (3.7) es  $X(T) = Y(T, 1)$  habremos demostrado el teorema.

Por el Teorema de Liouville (Teorema 2.3.6), para  $0 \leq s \leq 1$

$$\det(Y(T, s)) = \mu_1(s)\mu_2(s) = \exp\left(\int_0^T \text{tr}B(t, s) dx\right) = e^{-kT} < 1 \quad (3.13)$$

Para  $s = 0$ ,  $B(s, t)$  es la matriz con coeficientes constantes  $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma & -k \end{pmatrix}$ , entonces  $Y(t, 0) = e^{CT}$  y  $\mu_j(0) = e^{\lambda_j T}$  con  $j = 1, 2$ , donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son autovalores de  $C$  (ver Nota 2.3.26).

Como  $k > 0$  y  $\gamma > 0$ , es fácil ver que tanto  $\lambda_1$  como  $\lambda_2$  tienen partes reales negativas por lo que  $|\mu_j(0)| = |e^{\lambda_j T}| < 1$  para  $j = 1, 2$ .

Sea  $A = \{0 < s \leq 1/|\mu_j(s)| \geq 1, \text{ para algún } j\}$ , si  $A \neq \emptyset$  entonces existe el ínf  $A$ , llamemos  $s_0 = \inf A$ , queremos ver que  $\exists s^*$  con  $0 < s^* \leq 1$  tal que  $|\mu_1(s^*)| = 1$ , y eso sería una contradicción, por lo que  $A$  deberá ser vacío.

Si  $|\mu_1(s_0)| = 1$ , entonces tomamos  $s^* = s_0$  y esto terminaría la demostración.

Si  $|\mu_1(s_0)| > 1$ , veamos que puede suceder con  $\mu_2(s_0)$

\* Si  $\mu_2(s_0) = \mu_1(s_0)$ , entonces  $\mu_1(s_0)\mu_2(s_0) = |\mu_1(s_0)|^2 > 1$ , y esto es absurdo por (3.13).

\* Si  $\mu_1(s_0)$  y  $\mu_2(s_0)$  son reales, entonces como  $\mu_1(s_0)\mu_2(s_0) < 1$  y  $|\mu_1(s_0)| > 1$ , debe ser  $|\mu_2(s_0)| < 1$  y por lo tanto,  $\mu_1(s_0) \neq \mu_2(s_0)$  y,  $\mu_1(s_0)$  y  $\mu_2(s_0)$  deben ser dos raíces reales simple, esto implica que existe un entorno  $(s_0 - \delta; s_0 + \delta)$  donde puedo definir  $\mu_1(s)$  y  $\mu_2(s)$  como funciones continuas de  $s$  (Teorema de la Función Implícita).

Como  $s_0 \neq 0$  y es el ínfimo de  $A$ , tomo  $0 < s_1 < s_0$  en el intervalo  $(s_0 - \delta; s_0 + \delta)$  donde  $\mu_1(s)$  es continua tal que  $|\mu_1(s_1)| < 1$ , entonces por el Teorema de Bolzano  $\exists s^*, s_1 < s^* < s_0$  tal que  $|\mu_1(s^*)| = 1$  y esto contradice el hecho de que  $Y(T, s)$  no tenía como autovalores ni a 1 ni  $-1$ ,  $\forall s \in [0, 1]$ .  $\square$

Ahora nuestro resultado principal se deduce fácilmente.

**Teorema 3.0.30** Sean  $g(t, \xi)$  y  $D_2g(t, \xi)$  continuas para todo  $(t, \xi) \in \mathbb{R}^2$ , sea  $g$   $T$ -periódica en  $t$ , y  $k > 0$  constante. Si existen constantes  $a$  y  $b$  tales que vale (3.2) y tal que existe un disco cerrado  $B$  en el plano complejo centrado en  $\gamma = \frac{a+b}{2}$  de radio  $r > \frac{b-a}{2}$  tal que vale (3.9), entonces (3.1) tiene una única solución  $T$ -periódica que es localmente, exponencialmente, asintóticamente estable.

**Demostración:** Como (3.9) claramente implica (3.3), existe, por el Lema 3.0.28, una única solución  $T$ -periódica de (3.1), llamémosla  $u_0(t)$ . Como  $(u_0(t), u'_0(t))$  es una solución  $T$ -periódica del sistema

$$u' = v$$

$$v' = -kv - g(t, u)$$

y sabemos que si los multiplicadores de Floquet correspondientes a esta solución tienen módulo menor que 1, entonces esta solución es localmente exponencialmente estable. Como los multiplicadores son los autovalores de la matriz de  $2 \times 2$ ,  $X(T)$ , donde  $X(t)$  es la función matricial definida por

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad X(0) = I,$$

donde

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -D_2g(t, u_0(t)) & -k \end{pmatrix}$$

la afirmación del teorema se sigue de (3.2), de (3.9) y del Teorema 3.0.29.

Notar que las condiciones del teorema implican que no existen soluciones  $2T$ -periódicas distintas de  $u_0$ .  $\square$

Finalmente, daremos un ejemplo que muestra que si las condiciones del Lema 3.0.28 se cumplen pero no se verifican las condiciones del Teorema 3.0.29, entonces la única solución periódica puede ser inestable.

**Ejemplo 3.0.31** Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$u''(t) + ku'(t) + \frac{1}{4}[1 + \varepsilon \cos t]u(t) = 0 \tag{3.14}$$

donde  $k$  es positivo y pequeño,  $|\varepsilon|$  es pequeño y  $\varepsilon \neq 0$ . Es claro que para  $|\varepsilon|$  pequeño existen números  $a$  y  $b$  tales que se verifican las condiciones del Lema 3.0.28. Siendo en este caso  $g(t, u) = \frac{1}{4}[1 + \varepsilon \cos t]u(t)$ , se cumple que

$$\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon}{4} \leq D_2g(t, u) \leq \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{4},$$

y

$$\frac{4\pi^2 m^2}{4\pi^2} - \frac{2\pi i m}{2\pi} k = m^2 - mik \notin B\left(\frac{1}{4}; \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

pues

$$\sqrt{\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)^2 + (mk)^2} > \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Entonces existe una única solución  $2\pi$ -periódica,  $u \equiv 0$ .

Por el otro lado, para todo  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño, los multiplicadores de Floquet  $\mu_1$  y  $\mu_2$  correspondientes a la solución trivial de

$$u''(t) + \frac{1}{4}[1 + \varepsilon \cos t]u(t) = 0 \quad (3.15)$$

son reales y satisfacen

$$\mu_1 < -1 < \mu_2 < 0 \quad (3.16)$$

De hecho, si  $y_j(t, \varepsilon)$ , con  $j = 1, 2$ , son las soluciones de (3.15) definidas por las condiciones iniciales  $y_1(0, \varepsilon) = y_2'(0, \varepsilon) = 1$ ,  $y_2(0, \varepsilon) = y_1'(0, \varepsilon) = 0$ , y  $\Delta(\varepsilon) = y_1(2\pi, \varepsilon) + y_2'(2\pi, \varepsilon)$ , entonces  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son las raíces de la ecuación

$$\mu^2 - \Delta(\varepsilon)\mu + 1 = 0$$

Usando el hecho de que  $y_j(t, \varepsilon)$  son analíticas en  $\varepsilon$ , se comprueba que

$$\Delta(\varepsilon) = -2 - \frac{\pi}{64}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Fijemos  $\varepsilon \neq 0$  de forma que se verifique (3.16). Como los multiplicadores correspondientes a la solución trivial de (3.14) son los autovalores de  $X(2\pi)$ , donde  $X(t)$  es la matriz fundamental de (3.7), donde  $p(t) = \frac{1}{4}[1 + \varepsilon \cos t]$ , y para  $k = 0$  estos son los números  $\mu_1$  y  $\mu_2$  en (3.16), se sigue por la dependencia continua de las soluciones con respecto a los parámetros, que para  $k$  pequeño y positivo, los multiplicadores de la solución trivial de (3.14) también satisfacen (3.16). Por lo tanto,  $|\mu_1| > 1$  y la solución será inestable. Esto se debe a que si bien se verifican las condiciones del Lema 3.0.28, como mostramos antes, no se cumplen las condiciones del Teorema 3.0.29. En efecto, una vez fijado  $\varepsilon \neq 0$  suficientemente pequeño se elige  $k > 0$  suficientemente pequeño, por lo tanto  $k = k(\varepsilon)$ .

Debería cumplirse que para todo  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$\frac{\pi^2 m^2}{4\pi^2} - \frac{\pi i m}{2\pi} k = \frac{m^2}{4} - \frac{mik}{2} \notin B\left(\frac{1}{4}; \frac{\varepsilon}{4}\right)$$

Sin embargo,

$$\sqrt{\left(\frac{m^2}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{(mk)^2}{4}} \not\leq \frac{\varepsilon}{4},$$

por ejemplo para  $m = 1$ .

## Capítulo 4

# Estabilidad del equilibrio de un péndulo de longitud variable

En este Capítulo analizaremos la estabilidad de un péndulo de longitud variable a partir de la caracterización de la aproximación de orden tres basándonos en el trabajo de Rafael Ortega [30].

### 4.1. Un ejemplo sencillo de un péndulo de longitud variable

Se dice que un oscilador es paramétrico cuando sus parámetros, por ejemplo su frecuencia angular  $\omega$  o la longitud, son funciones del tiempo. Un péndulo de longitud variable  $l$  es un ejemplo de oscilador paramétrico, tal es el caso de un niño que flexiona sus rodillas periódicamente mientras se mece en una hamaca, desplazando hacia arriba y abajo su centro de masa: hacia arriba cuando pasa por la posición de equilibrio y hacia abajo cuando alcanza la máxima elongación, o sea al máxima altura. Este caso de oscilaciones en una hamaca justifica que sea denominada hamaca activa. En contraposición, en una hamaca pasiva el chico simplemente se sienta en la hamaca y sus oscilaciones se mantienen mientras exista un agente externo, por ejemplo su hermano, que le proporcione impulsos periódicos.

La conveniencia mecánica de esta maniobra deriva del hecho de que la hamaca es un péndulo físico cuya longitud vale la distancia del punto de suspensión al centro en masas de la carga que se mece. Cuando nos ponemos de cuclillas, baja el centro de masas de la carga en movimiento; cuando nos enderezamos, su posición se eleva. Por ello la longitud del péndulo aumenta y disminuye alternativamente variando dos veces en una oscilación.

En una hamaca activa un niño logra mecarse a sí mismo, luego de un pequeño impulso inicial externo, agachándose y parándose en la hamaca, sin el auxilio de otra persona, y la experiencia común muestra que un niño diestro en el uso de la hamaca puede llegar a oscilar con gran amplitud.

Para el caso de este péndulo activo se tiene que la longitud del péndulo varía periódicamente y se puede escribir:  $l = l_0[1 + \beta \cos(\omega t)]$ , donde  $\beta$  es un número real pequeño llamado ganancia del oscilador y  $\omega$ , que es la frecuencia angular, depende de cómo se hace variar la longitud.

Como puede ser observado, en el caso del péndulo activo, la amplitud de oscilación de un péndulo de longitud variable puede crecer indefinidamente. En general este oscilador es en particular no-lineal; su ecuación diferencial de movimiento es no-lineal pues como es bien conocido contiene un término proporcional a la función seno del ángulo de oscilación, y por supuesto no es el caso más simple de oscilador paramétrico que se puede estudiar.

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

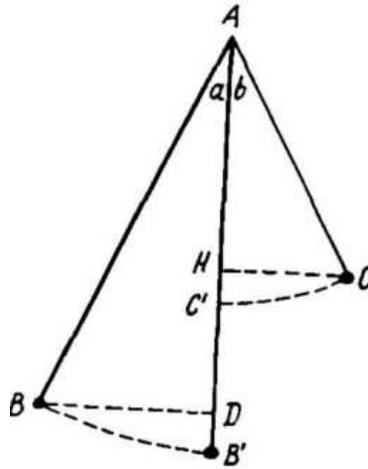


Figura 4.1: Movimiento directo de la hamaca

Las experiencias reales con el péndulo de longitud variable nos muestran que la amplitud variable  $A$  de un oscilador paramétrico puede crecer indefinidamente si se bombea energía a la frecuencia adecuada, que es aproximadamente:  $\omega = 2\omega_0$ . Esto nos dice que, cuando la excitación externa es aproximadamente dos veces la frecuencia natural de oscilación del péndulo, estos sistemas se vuelven inestables y las oscilaciones se incrementan en el tiempo.

En el caso de la hamaca activa, de longitud o momento de inercia variable, los niños descubren que una vez de pie sobre la tabla del columpio, deben flexionar sus rodillas con una frecuencia igual al doble de la frecuencia natural de oscilación del columpio para poder aumentar la amplitud de sus oscilaciones. Se observa entonces que la amplitud de oscilación  $A(t)$  crece exponencialmente:  $A(t) \approx \exp(\gamma t)$ . Este fenómeno de acoplamiento de energía entre bomba de energía (el niño) y el oscilador (hamaca con niño encima) donde se observa crecimiento exponencial, o cuasiexponencial, de la amplitud se denomina excitación paramétrica resonante. La física de la resonancia paramétrica nos garantiza oscilaciones cada vez más violentas. Es un fenómeno fácilmente observable cuando se cumple la condición  $\omega = 2\omega_0$ . Analicemos por qué:

Observando la Figura 4.1, supongamos que el péndulo de longitud  $\overline{AB}$  se acorta hasta  $\overline{AC'}$  al ocupar la posición vertical  $AB'$ . Como su peso baja en una magnitud  $\overline{DB'}$ , el mismo acumula cierta reserva de energía cinética que debe, en el tramo siguiente de la trayectoria, elevarlo a una altura igual. Mientras su peso sube del punto  $B'$  a  $C'$ , esta reserva no disminuye, pues el trabajo invertido en la elevación no fue realizado a expensas de la energía acumulada. Por esta razón, el peso debe elevarse del punto  $C'$  en una magnitud  $\overline{C'H}$  igual a  $\overline{B'D}$ , cuando la cuerda se desvía a la posición  $AC$ . Se deduce que el nuevo ángulo  $\hat{b}$  de desviación de la cuerda del péndulo debe superar al ángulo inicial  $\hat{a}$ :

$$\overline{DB'} = \overline{AB'} - \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (1 - \cos \hat{a})$$

$$\overline{HC'} = \overline{AC'} - \overline{AH} = \overline{AC} \cdot (1 - \cos \hat{b})$$

Dado que  $\overline{DB'} = \overline{HC'}$ ,

$$\overline{AB} \cdot (1 - \cos \hat{a}) = \overline{AC} \cdot (1 - \cos \hat{b})$$

y, por consiguiente

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1 - \cos \hat{a}}{1 - \cos \hat{b}}$$

Transformando las expresiones  $1 - \cos \hat{a}$  y  $1 - \cos \hat{b}$ , obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{1 - \cos \hat{a}}{1 - \cos \hat{b}} = \left( \frac{\text{sen} \frac{\hat{a}}{2}}{\text{sen} \frac{\hat{b}}{2}} \right)^2,$$

como  $\overline{AC}$  es menor que  $\overline{AB}$ , entonces  $\text{sen} \frac{\hat{a}}{2} < \text{sen} \frac{\hat{b}}{2}$ , como ambos ángulos son agudos debe ser  $a < b$ .

De modo que el hilo del péndulo ( y la cuerda de la hamaca) debe desviarse de la posición vertical en una magnitud mayor que la vez anterior. Este efecto se observa cuando una persona, hamacándose, se yergue mientras la tabla asciende.

Ahora vamos a analizar el movimiento inverso de la hamaca, o sea el trayecto del peso desde el punto extremo superior hasta su posición inferior, teniendo en cuenta que en este caso la longitud del péndulo aumenta. Miremos la Figura 4.2. El peso desciende del punto  $C$  al  $G$ . Cuando el péndulo se desvía de la posición  $AG$  y pasa a ocupar la posición  $AG'$ , el peso, que desciende en  $\overline{HG'}$ , acumula cierta reserva de energía potencial, la cual deberá elevarlo seguidamente a la misma altura en la parte restante de la trayectoria. Pero pasando a la posición  $AG'$  el peso se eleva de  $G'$  a  $K'$ , por tanto, acto seguido, el hilo se desviará un ángulo  $\hat{c}$ , mayor que  $\hat{b}$ , por el análisis hecho anteriormente. Así pues,

$$c > b > a$$

Cuando se aplica el procedimiento descrito, el ángulo de desviación del hilo del péndulo y, por lo tanto las cuerdas de la hamaca, aumenta en cada oscilación y puede elevarse paulatinamente hasta la magnitud que se desee.

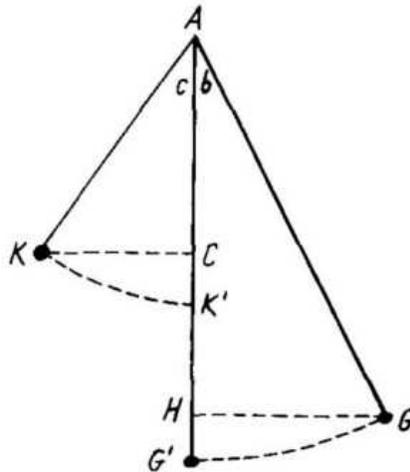


Figura 4.2: Movimiento inverso de la hamaca

La importancia científica de este fenómeno es obvia, de hecho puede ser explotado con ventajas en la ciencia y en la tecnología.

## 4.2. Objetivo

Como mencionamos en la sección anterior, en varios textos de Mecánica, el fenómeno de *resonancia paramétrica* es ilustrado mediante el péndulo de longitud variable. Esta clase de péndulo puede ser modelado por la ecuación

$$\ddot{\theta} + \alpha(t) \operatorname{sen} \theta = 0 \quad (4.1)$$

donde

$$\alpha(t) = \frac{g}{l(t)}$$

y  $l(t) > 0$  es la longitud en el instante  $t$ . Tradicionalmente se asume que  $\alpha$  es periódica, digamos de período  $T > 0$ . Este modelo conduce a ejemplos sugestivos de resonancia debido a que el equilibrio  $\theta = 0$  se vuelve inestable si  $\alpha(t)$  oscila de manera apropiada. Aunque el sistema posee sólo un grado de libertad, el estudio de la estabilidad de  $\theta = 0$  no es elemental. Esto quizás explica por qué es costumbre sustituir la ecuación original por su aproximación lineal

$$\ddot{\theta} + \alpha(t) \theta = 0 \quad (4.2)$$

Intentaremos validar este procedimiento. Veremos que el principio de linearización conduce a conclusiones acertadas en la mayoría de los casos, pero existen excepciones. En algunos casos la ecuación (4.2) puede ser inestable mientras que el equilibrio  $\theta = 0$  es estable para (4.1). En contraposición, veremos que la aproximación de tercer orden del tipo de Duffing

$$\ddot{\theta} + \alpha(t) \theta - \frac{1}{3!} \alpha(t) \theta^3 = 0 \quad (4.3)$$

es confiable. Esto significa que el equilibrio  $\theta = 0$  es estable para (4.1) si y sólo si lo mismo sucede para (4.3). La positividad de  $\alpha$  es crucial para este resultado. Si  $\alpha(t)$  pudiera cambiar de signo, probablemente ninguna de las aproximaciones obtenidas truncando la expansión de la función seno sería confiable.

La idea de reemplazar una ecuación complicada por una aproximación es central en la Teoría de Estabilidad. El primer método de Lyapunov es la instancia más simple. Puede ser aplicada a nuestra ecuación para probar inestabilidad en los casos más sencillos pero no es de ayuda para probar estabilidad. Esto se debe a que la noción de estabilidad asintótica (considerada en el primer método de Lyapunov) es ajena a la Mecánica Hamiltoniana. El estudio de la estabilidad del equilibrio requiere de técnicas sofisticadas como las de la Teoría de KAM que usan información de aproximaciones no lineales.

En este trabajo mostraremos cómo obtener un criterio de inestabilidad usando una aproximación menos estándar. Utilizaremos el grado topológico para reducir las pruebas de inestabilidad al cálculo de ciertos índices (versiones locales del grado).

## 4.3. Estabilidad perpetua y sistemas dinámicos discretos

Trabajaremos con la clase de ecuaciones

$$\ddot{\theta} = f(t, \theta) \quad (4.4)$$

donde  $f$  está definida alrededor de  $\theta = 0$ , digamos  $f : \mathbb{R} \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\epsilon > 0$ . La función  $f$  satisface

$$f(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y, por lo tanto  $\theta = 0$  es un punto de equilibrio de la ecuación. Además,  $f$  es continua,  $T$ -periódica en  $t$  y hay unicidad de solución para el problema de valores iniciales asociado a (4.4).

Dado un punto

$$(\theta_0, \omega_0) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \mathbb{R}$$

la solución que satisface

$$\theta(0) = \theta_0 \quad \text{y} \quad \dot{\theta}(0) = \omega_0$$

va a ser notada como  $\theta(t, \theta_0, \omega_0)$ . En general, no podemos afirmar que la solución está definida en toda la recta real, pero por lo menos está definida en un gran intervalo para valores pequeños de  $|\theta_0|$  y  $|\omega_0|$ .

**Definición 4.3.1** *El equilibrio  $\theta = 0$  se dice **estable** si dado cualquier entorno del origen en  $\mathbb{R}^2$ , digamos  $\mathcal{U}$ , existe otro entorno  $\mathcal{V}$  tal que si  $(\theta_0, \omega_0)$  pertenece a  $\mathcal{V}$ , entonces la solución  $\theta(t, \theta_0, \omega_0)$  está definida en  $(-\infty, \infty)$  y*

$$\left( \theta(t, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(t, \theta_0, \omega_0) \right) \in \mathcal{U} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Esa es la noción de **estabilidad perpetua** que se utiliza frecuentemente en la dinámica hamiltoniana y equivale a la estabilidad de Lyapunov para el pasado y el futuro.

Dos ejemplos sencillos son las ecuaciones

$$\ddot{\theta} + \theta = 0 \quad \text{y} \quad \ddot{\theta} - \theta = 0$$

El equilibrio es estable sólo para la primera ecuación cuyos autovalores son  $\lambda = \pm i$ , mientras que la segunda ecuación tiene por autovalores a  $\lambda = \pm 1$ , por lo tanto como tiene un autovalor con parte real positiva será inestable.

Consideremos la ecuación en diferencias

$$\xi_{n+1} = M(\xi_n) \tag{4.5}$$

donde  $M : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una aplicación biyectiva y continua definida en un conjunto abierto  $\mathcal{D}$ . También se supone que el origen está en  $\mathcal{D}$  y es un punto fijo de  $M$ . Dada una condición inicial  $\xi_0 \in \mathcal{D}$ , la solución

$$\{\xi_n\}_{n \in I}, \quad \xi_n = M^n(\xi_0),$$

está definida en algún subconjunto  $I$  de  $\mathbb{Z}$ .

**Definición 4.3.2** *El **punto fijo**  $\xi = 0$  se dice **estable** si para cada entorno  $\mathcal{U}(0)$ , existe otro entorno  $\mathcal{V}(0)$  tal que si  $\xi_0 \in \mathcal{V}$  entonces  $\xi_n$  está definida en  $\mathbb{Z}$  y*

$$\xi_n \in \mathcal{U} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Para familiarizarnos con esta definición podemos considerar las aplicaciones lineales  $M$  definidas por las matrices

$$R[\Theta] = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sen\Theta \\ -\sen\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix}, \quad H_+[\Theta] = \begin{pmatrix} \cosh\Theta & \senh\Theta \\ \senh\Theta & \cosh\Theta \end{pmatrix}, \quad \Theta \neq 0,$$

es decir,  $\xi_{n+1} = M(\xi_n)$  donde  $M(\xi_n) = R[\Theta] \cdot \xi_n$

En el primer caso  $\xi = 0$  es estable ya que  $R[\Theta]$  tiene autovalores complejos conjugados ( $\lambda = \cos\theta \pm i \sen\theta$ ) mientras que en el segundo es inestable pues tiene dos autovalores reales ( $\lambda = \cosh\theta \pm \sqrt{\cosh^2\theta - 1}$ ) y uno de ellos tiene módulo mayor que 1.

Existe, por supuesto, una analogía entre las definiciones de estabilidad para las situaciones discretas y continuas. Ahora vamos a sumergir el estudio de la estabilidad para ecuaciones diferenciales en la

teoría de ecuaciones en diferencias. Esta es una idea central en los sistemas dinámicos y le pertenece a Poincaré.

La aplicación

$$P(\theta_0, \omega_0) = \left( \theta(T, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(T, \theta_0, \omega_0) \right)$$

está bien definido en un entorno de  $\theta_0 = \omega_0 = 0$  y, debido a la unicidad para el problema de valores iniciales, es biyectiva y continua. Además, las iteraciones  $P^n$  se obtienen evaluando las soluciones para el tiempo  $t = nT$ . Esta propiedad es crucial para probar que el equilibrio  $\theta = 0$  es estable para (4.4) si y sólo si el punto fijo  $\theta_0 = \omega_0 = 0$  es estable para la aplicación con  $M = P$ .

La aplicación  $P$  recibe el nombre de la aplicación de Poincaré asociada a la ecuación (4.4) y tiene una propiedad importante: preserva la orientación y el área. Para ecuaciones suaves esto es equivalente a la identidad

$$\det P'(\theta_0, \omega_0) = 1$$

y es una consecuencia del Teorema de Liouville de Mecánica Hamiltoniana que afirma que el flujo de fase de las ecuaciones Hamiltonianas preserva el volumen de fase (ver [2] Capítulo 3 Sección 16)

Para finalizar esta sección veamos que la noción de estabilidad es invariante bajo cambio de variables. Por ejemplo, si  $\varphi$  es un homeomorfismo local (continua con inversa continua) tal que  $\varphi(0) = 0$ , el cambio

$$\xi = \varphi(\eta)$$

transforma

$$\xi_{n+1} = M(\xi_n)$$

en

$$\eta_{n+1} = M^*(\eta_n)$$

con

$$M^* = \varphi^{-1} \circ M \circ \varphi$$

y las estabilidades de  $\xi = 0$  y  $\eta = 0$  son equivalentes.

Supongamos que sabemos que  $\xi = 0$  es estable para (4.5) y queremos ver que, dada la condición inicial  $\eta_0 \in \mathcal{D}$ ,  $\eta = 0$  es estable para  $\eta_{n+1} = M^*(\eta_n)$ .

Dado  $\mathcal{U}(0)$  entorno de  $\eta = 0$ ,  $\varphi(\mathcal{U})$  es un entorno de  $\xi = 0$  y sabemos que existe  $\mathcal{V}(0)$  tal que si  $\xi_0 = \varphi(\eta_0) \in \mathcal{V}$ , entonces  $\{\xi_n = \varphi(\eta_n)\} \in \varphi(\mathcal{U}) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ . Basta tomar,  $\mathcal{V}' = \varphi^{-1}(\mathcal{V})$  y se verifica que si  $\eta_0 \in \mathcal{V}'$ , entonces  $\{\eta_n\} \in \varphi^{-1}(\varphi(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$ .

## 4.4. La ecuación lineal y el grupo simpléctico

La ecuación lineal

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta = 0 \tag{4.6}$$

donde  $\alpha(t)$  es continua y  $T$ -periódica recibe el nombre de ecuación de Hill y existen varios estudios acerca de la misma. Una referencia clásica acerca de este tema es el libro de Magnus y Winkler [28].

Luego de pasar al sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{\omega} = -\alpha(t)\theta \end{cases}$$

que puede expresarse como

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \text{donde} \quad \xi = \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix},$$

encontramos la solución matricial  $X(t)$  que satisfaga  $X(0) = I$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ . La solución matricial  $X(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) & \theta_2(t) \\ \theta'_1(t) & \theta'_2(t) \end{pmatrix}$  donde  $\theta_i(t)$  con  $i = 1, 2$  son las soluciones de (4.6) que satisfacen  $\theta_1(0) = 1$ ,  $\theta_2(0) = 0$ ,  $\theta'_1(0) = 0$  y  $\theta'_2(0) = 1$  y la solución de (4.6) que satisface  $\theta(0) = \theta_0$  y  $\dot{\theta}(0) = \omega_0$  es  $\theta(t, \theta_0, \omega_0) = \theta_1(t)\theta_0 + \theta_2(t)\omega_0$ .

La aplicación de Poincaré asociada a (4.6) es lineal y se cumple que

$$P \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix}, \quad L = X(T)$$

$$\text{En efecto, } P \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = X(T) \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(T) & \theta_2(T) \\ \theta'_1(T) & \theta'_2(T) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(T)\theta_0 + \theta_2(T)\omega_0 \\ \theta'_1(T)\theta_0 + \theta'_2(T)\omega_0 \end{pmatrix}$$

Veamos dos ejemplos: En primer lugar, veamos que para el oscilador armónico ( $\alpha \equiv 1$ ) y un período fijo  $T$ ,  $L$  es la rotación  $R[T]$  definida en la sección anterior.

En este caso la ecuación (4.6) queda  $\ddot{\theta} + \theta = 0$  y sus autovalores son  $\lambda = \pm i$ , por lo tanto  $\theta_1(t) = a e^{it} + b e^{-it}$  y  $\theta_2(t) = c e^{it} + d e^{-it}$ , como debe cumplirse que  $X(0) = I$ , resulta  $\theta_1(t) = \cos t$  y  $\theta_2(t) = \sin t$  y

$$L = X(T) = \begin{pmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{pmatrix}$$

Para el caso repulsivo ( $\alpha \equiv -1$ ), la ecuación  $\ddot{\theta} - \theta = 0$  tiene por autovalores a  $\lambda = \pm 1$ , por lo tanto  $\theta_1(t) = a e^t + b e^{-t}$  y  $\theta_2(t) = c e^t + d e^{-t}$ , con lo que resulta

$$L = X(T) = \begin{pmatrix} \frac{e^T + e^{-T}}{2} & \frac{e^T - e^{-T}}{2} \\ \frac{e^T - e^{-T}}{2} & \frac{e^T + e^{-T}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh T & \sinh T \\ \sinh T & \cosh T \end{pmatrix} = H_+[T]$$

Por el Teorema de Liouville (ver Teorema 2.3.6),

$$\det X(t) = e^{\int_0^t \text{tr} A(s) ds} = e^0 = 1$$

Esta propiedad motiva nuestro interés en el grupo simpléctico que fue definido en la Sección 4 del Capítulo de Preliminares. El grupo de matrices con determinante distinto de cero lo denotaremos como  $Gl(\mathbb{R}^2)$ . El subgrupo de matrices de  $Gl(\mathbb{R}^2)$  compuesto de las matrices  $L$  que satisfacen  $\det L = 1$  es el grupo simpléctico, denotado por  $Sp(\mathbb{R}^2)$ . Dada una matriz  $L$  en  $Sp(\mathbb{R}^2)$ , si analizamos su polinomio característico, podemos distinguir los siguientes casos:

- **Caso elíptico:** Tiene dos autovalores complejos conjugados,  $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ ,  $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$
- **Caso hiperbólico:** Tiene dos autovalores reales distintos,  $\mu_1 \neq \mu_2 \in \mathbb{R}$  y  $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$ , entonces  $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$ . La matriz  $L$  resulta diagonalizable y por lo tanto será semejante a una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} \mu_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2} \end{pmatrix}$$

- **Caso parabólico:** Tiene un autovalor doble (multiplicidad algebraica dos),  $\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$ . Según la Teoría de las formas canónicas de Jordan, si la multiplicidad geométrica de  $\mu_1$  es 1, entonces  $L$  será semejante a

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

si la multiplicidad geométrica de  $\mu_1$  es 2, entonces  $L$  será semejante a

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Las clases de conjugación en el grupo  $Sp(\mathbb{R}^2)$  pueden ser descritas de acuerdo a esta clasificación:

- Para una matriz elíptica  $L$  existe  $Q \in Sp(\mathbb{R}^2)$  tal que  $Q^{-1}LQ$  es una rotación

$$Q^{-1}LQ = R[\Theta], \quad \Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

- Una matriz hiperbólica es conjugada a una matriz en alguna de las dos familias según el signo de los autovalores

$$H_{\pm}[\Theta] = \begin{pmatrix} \pm \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \pm \cosh \Theta \end{pmatrix}, \quad \Theta \in (0, \infty)$$

- Una matriz parabólica será conjugada a una de las siguientes seis matrices

$$I, -I, P_+, P_-, -P_+, -P_- \quad \text{donde } P_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos mencionar un hecho sutil que no se deduce de la Forma canónica de Jordan. Desde el punto de vista del grupo  $Gl(\mathbb{R}^2)$ , las rotaciones  $R[\Theta]$  y  $R[2\pi - \Theta]$  son conjugadas. Esto no es cierto en el grupo simpléctico, porque si  $Q \in Gl(\mathbb{R}^2)$  satisface

$$Q^{-1}R[\Theta]Q = R[2\pi - \Theta]$$

entonces  $\det Q < 0$ , por lo tanto  $Q \notin Sp(\mathbb{R}^2)$ .

En vista de esta propiedad podemos decir que el ángulo  $\Theta$  es un *invariante simpléctico* en el siguiente sentido:

Dado un conjunto  $X$  y un grupo  $G$ , consideramos una acción de  $G$  sobre  $X$  y la notamos como  $x \rightarrow g.x$ . En particular, nos interesa la acción por conjugación de un grupo  $G$  en sí mismo, es decir,  $x \rightarrow g^{-1}.x.g$

Dados dos conjuntos  $X$  e  $Y$ , un *invariante por una acción* es una función  $f : X \rightarrow Y$  tal que  $f(g.x) = f(x) \quad \forall x \in X$  y  $\forall g \in G$ .

Si consideramos la acción por conjugación de  $G = \text{grupo simpléctico}$  sobre el conjunto  $X$  de las matrices elípticas en  $G$ , dada  $L \in X$ , definimos la función  $f(L) = \Theta$ , donde  $\Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  es el único que satisface  $R[\Theta] = Q^{-1}LQ$  para alguna  $Q \in Sp(\mathbb{R}^2)$ .

Entonces decimos que  $\Theta$  es un invariante simpléctico, porque si  $\tilde{L} = Q_2^{-1}LQ_2$ , con  $Q_2 \in Sp(\mathbb{R}^2)$  se verifica, por lo dicho anteriormente que  $\tilde{f}(\tilde{L}) = f(L) = \Theta$ .

Una situación similar se da en el caso parabólico para las matrices  $P_+$  y  $P_-$  ( $0 - P_+$  y  $-P_-$ ).

**Observación 4.4.1** Una matriz fundamental de un sistema periódico evaluada en el período recibe el nombre de **matriz de monodromía**.

Cualquier solución del sistema

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) \\ \xi(0) = \xi_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

es de la forma

$$\xi(t) = X(t)\xi_0 = P(t)e^{tB}\xi_0$$

donde  $X(t)$  es la matriz fundamental del sistema tal que  $X(0) = I$ ,  $B$  es una matriz constante que es una solución particular de  $e^{TB} = X(T)$  y  $P(t)$  es una función periódica y continua (Ver Teorema 2.3.19).

Vamos a ver en qué casos, dependiendo de la matriz  $X(T)$ , el origen  $\theta = 0$  es estable para (4.6) :

- **Caso elíptico:** Sabemos que en una base de autovectores, la matriz de monodromía puede expresarse como

$$X(T) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

siendo  $\mu_1, \mu_2$  complejos conjugados de módulo 1, digamos  $\mu_1 = e^{aiT}$ ,  $\mu_2 = e^{-aiT}$ .

Por lo tanto, como  $X(T) = e^{TB}$ , una posible  $B$  sería:

$$B = \begin{bmatrix} ia & 0 \\ 0 & -ia \end{bmatrix}$$

Una solución del sistema se escribirá como

$$\xi(t) = P(t) \begin{bmatrix} e^{iat} & 0 \\ 0 & e^{-iat} \end{bmatrix} \xi_0$$

entonces  $\|\xi(t)\| \leq C \|\xi_0\| \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , ya que  $P(t)$  es acotada, por ser continua y periódica, y la matriz tiene norma acotada ya que  $|e^{iat}| = |e^{-iat}| = 1$ .

Esto nos dice que  $\theta = 0$  es **estable** según la definición de estabilidad perpetua.

- **Caso hiperbólico:** En este caso, sabemos que en una base de autovectores

$$X(T) = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$$

siendo  $\mu_1, \mu_2$  números reales tales que  $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$  y  $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$ , por lo tanto  $\mu_1$  y  $\mu_2$  tienen el mismo signo.

Supongamos que  $\mu_1, \mu_2 > 0$ .

Sabiendo además que  $X(T) = e^{TB}$  para una matriz constante  $B$ , podemos tomar

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\ln \mu_1}{T} & 0 \\ 0 & \frac{\ln \mu_2}{T} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto una solución de (4.7) será de la forma

$$\xi(t) = P(t)e^{tB}\xi_0 = P(t) \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{T} \ln \mu_1} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{T} \ln \mu_2} \end{bmatrix} \xi_0$$

donde  $\ln \mu_1 < 0$  y  $\ln \mu_2 > 0$ .

En este caso  $\theta = 0$  **no será estable**. En efecto, si tomamos  $t = nT$ , vemos que  $P(nT) = P(T) = I$ , es decir que  $P(t)$  no tiende a cero en el infinito y sea  $\xi_0 = v_2$  el autovector de  $X(T)$  correspondiente a  $\mu_2$ , entonces

$$\|\xi(t)\| = \|P(t)\| \|e^{tB}v_2\| = \|P(t)\| \left\| e^{\frac{t}{T} \ln \mu_2} v_2 \right\| \rightarrow +\infty$$

Si  $\mu_1, \mu_2 < 0$ , entonces una posible  $B$  sería de la forma

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\ln|\mu_1|}{T} + \frac{\pi}{T}i & 0 \\ 0 & \frac{\ln|\mu_2|}{T} + \frac{\pi}{T}i \end{bmatrix}$$

Por lo tanto una solución de (4.7) será de la forma

$$\xi(t) = P(t) e^{tB} \xi_0 = P(t) \begin{bmatrix} e^{\frac{t}{T} \ln|\mu_1| + \frac{\pi t}{T} i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{t}{T} \ln|\mu_2| + \frac{\pi t}{T} i} \end{bmatrix} \xi_0$$

donde  $\ln|\mu_1| < 0$  y  $\ln|\mu_2| > 0$ .

Vemos que  $\theta = 0$  **no será estable**, ya que

$$\left| e^{\frac{t}{T} \ln|\mu_2| + \frac{\pi t}{T} i} \right| = \left| e^{\frac{t}{T} \ln|\mu_2|} \cdot \left( \cos \frac{t\pi}{T} + i \operatorname{sen} \frac{t\pi}{T} \right) \right| = \left| e^{\frac{t}{T} \ln|\mu_2|} \right| \rightarrow +\infty$$

y  $P(t)$  no tiende a cero en el infinito.

■ **Caso Parabólico:** Vimos que  $X(T)$  resulta semejante a alguna de estas seis matrices

$$I, -I, P_+, P_-, -P_+, -P_- \quad \text{donde } P_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 & \pm 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si  $X(T) = e^{TB} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ , entonces una posibilidad sería tomar  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y la solución será

$$\xi(t) = X(t) \xi_0 = P(t) \xi_0$$

que está acotada  $\forall t \in \mathbb{R}$ , por lo tanto  $\theta = 0$  es **estable**.

Si  $X(T) = e^{TB} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{bmatrix}$  entonces podríamos tomar  $B = \begin{bmatrix} \frac{i\pi}{T} & 0 \\ 0 & \frac{i\pi}{T} \end{bmatrix}$  y la solución será

$$\xi(t) = P(t) \begin{bmatrix} e^{\frac{i\pi t}{T}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\pi t}{T}} \end{bmatrix} \xi_0$$

que también está acotada para todo tiempo, entonces  $\theta = 0$  es **estable**.

Veamos que sucede si  $X(T) = e^{TB} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Tendremos que  $B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{T} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  es una opción posible y notemos que  $B$  es una matriz nilpotente ( $B^2 = I$ ) y por lo tanto

$$e^{tB} = I + tB + \underbrace{\frac{t^2 B^2}{2!} + \dots}_{=0} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La solución se escribirá como

$$\xi(t) = P(t) \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{T} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_0 \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$$

y por consiguiente,  $\theta = 0$  **no es estable** .

Lo mismo sucederá para  $X(T) = -P_+$ ,  $P_-$  y  $-P_-$  .

Resumiendo, el origen  $\theta = 0$  es estable para (4.6) si y sólo si la matriz de monodromía  $X(T)$  es elíptica o parabólica con  $X(T) = \pm I$ .

**Observación 4.4.2** *Veamos que la ecuación de Hill es invariante bajo traslaciones y reescalamientos de tiempo. Esto significa que el cambio*

$$t = \lambda(s + \tau), \quad \theta = \theta(s)$$

con  $\lambda > 0$  y  $\tau \in \mathbb{R}$ , transforma la ecuación de Hill en otra ecuación del mismo tipo, llamada

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \alpha^*(s)\theta = 0 \tag{4.8}$$

con

$$\alpha^*(s) = \lambda^2 \alpha(\lambda(s + \tau))$$

En efecto, si en

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta = 0$$

reemplazamos  $t = \lambda(s + \tau)$ , tenemos

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \alpha(\lambda(s + \tau))\theta = 0$$

y calculando  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$  por la regla de la cadena,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \alpha(\lambda(s + \tau))\theta = 0$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \lambda^2 \cdot \alpha(\lambda(s + \tau))\theta = 0$$

Verifiquemos que el nuevo período es

$$T^* = \frac{T}{\lambda}$$

$$\alpha^*\left(s + \frac{T}{\lambda}\right) = \lambda^2 \alpha\left(\lambda\left(s + \frac{T}{\lambda} + \tau\right)\right) =$$

$$= \lambda^2 \alpha(\lambda s + T + \lambda \tau) = \lambda^2 \alpha(\lambda(s + \tau) + T) =$$

$$\lambda^2 \alpha(t + T) = \lambda^2 \alpha(t) = \lambda^2 \alpha(\lambda(s + \tau)) = \alpha^*(s)$$

Hicimos referencia a esta clase de cambios porque tienen una propiedad notable, son suficientes para llegar a la forma canónica de las matrices de monodromía. Más precisamente,

**Proposición 4.4.3** *Dado  $\alpha(t)$ , continua y  $T$ -periódica, existe  $\tau \in \mathbb{R}$  y  $\lambda > 0$  tal que la matriz de monodromía asociada a (4.8) es una de las siguientes matrices:*

- \*  $R[\Theta]$ ,  $\Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  (caso elíptico)
- \*  $H_{\pm}[\Theta]$ ,  $\Theta \neq 0$  (caso hiperbólico)
- \*  $I, -I, P_+, P_-, -P_+, -P_-$  (caso parabólico)

**Demostración:** Veamos en primer lugar la demostración para el caso hiperbólico. Supongamos que los autovalores de  $X(T)$  para el sistema (4.6) son  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y verifican  $\mu_1 \mu_2 = 1$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  y  $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$ . Encontramos las soluciones de Floquet asociadas a estos autovalores (ver Proposición 2.2.25). Estas son soluciones no triviales que satisfacen

$$\varphi(t+T) = \mu_1 \varphi(t), \quad \psi(t+T) = \mu_2 \psi(t)$$

El producto

$$\Pi = \varphi \psi$$

es  $T$ -periódico ya que,

$$\Pi(t+T) = \varphi(t+T) \psi(t+T) = \mu_1 \mu_2 \varphi(t) \psi(t) = \varphi(t) \psi(t)$$

y por lo tanto existe  $\tau \in \mathbb{R}$  con  $\dot{\Pi}(\tau) = 0$ .

La independencia lineal de  $\varphi$  y  $\psi$  implica que  $\varphi(\tau)$  y  $\psi(\tau)$  no pueden anularse al mismo tiempo, porque el Wronskiano

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{pmatrix} = \det \Phi(t),$$

donde  $\Phi(t)$  es una solución matricial de (4.6), entonces, por el Teorema de Liouville,

$$\det \Phi(t_2) = \det \Phi(t_1) \exp \left( \int_{t_1}^{t_2} \text{Tr}(A(s)) ds \right)$$

y en nuestro caso,

$$W(t_2) = W(t_1) \exp \left( \int_{t_1}^{t_2} 0 ds \right) = W(t_1),$$

porque recordemos que  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha(t) & 0 \end{pmatrix}$ . Esto nos dice que el Wronskiano es constante, si  $W(\tau) = 0 \Rightarrow W \equiv 0$  y esto es absurdo porque  $\varphi$  y  $\psi$  son linealmente independientes.

Elijamos

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 1$$

y definamos

$$u = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad v = \frac{1}{2}(\varphi - \psi)$$

Entonces

$$u(\tau) = 1, \quad v(\tau) = 0, \quad \dot{u}(\tau) = 0, \quad \dot{v}(\tau) \neq 0$$

Las dos primeras afirmaciones son obvias. Para ver que  $\dot{u}(\tau) = 0$ , recordemos que  $\Pi = \varphi \psi$ , entonces

$$\dot{\Pi}(\tau) = \dot{\varphi}(\tau) \psi(\tau) + \varphi(\tau) \dot{\psi}(\tau) = 0$$

por lo que,

$$\dot{\varphi}(\tau) + \dot{\psi}(\tau) = 0$$

Y la última afirmación se deduce, otra vez, de la independencia lineal entre  $\varphi$  y  $\psi$ .

A partir de aquí vamos a suponer que  $\dot{v}(\tau) > 0$ , en el caso de que esta derivada fuera negativa alcanza con invertir los roles de  $\varphi$  y  $\psi$ .

De la definición de  $u$  y  $v$ , podemos deducir que

$$u^2 - v^2 = \Pi$$

es una función  $T$ -periódica y por lo tanto

$$u^2(\tau + T) - v^2(\tau + T) = 1$$

Como

$$\dot{\Pi}(\tau + T) = 0$$

encontramos que

$$\dot{u}(\tau + T)u(\tau + T) - \dot{v}(\tau + T)v(\tau + T) = 0 \quad (4.9)$$

Por otro lado,

$$u(\tau + T)\dot{v}(\tau + T) - \dot{u}(\tau + T)v(\tau + T) = \dot{v}(\tau) \quad (4.10)$$

En efecto,

$$\begin{aligned} u(\tau + T)\dot{v}(\tau + T) - \dot{u}(\tau + T)v(\tau + T) &= \frac{1}{2} \left[ \dot{\varphi}(\tau + T)\psi(\tau + T) - \varphi(\tau + T)\dot{\psi}(\tau + T) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \mu_1\dot{\varphi}(\tau)\mu_2\psi(\tau) - \mu_1\varphi(\tau)\mu_2\dot{\psi}(\tau) \right] = \frac{1}{2}\mu_1\mu_2 \left[ \dot{\varphi}(\tau) - \dot{\psi}(\tau) \right] = \dot{v}(\tau) \end{aligned}$$

De las ecuaciones (4.9) y (4.10) obtenemos que

$$\dot{u}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T), \quad \dot{v}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)u(\tau + T)$$

Para obtener la primera de las igualdades, multiplicamos la ecuación (4.10) por  $v(\tau + T)$

$$u(\tau + T)v(\tau + T)\dot{v}(\tau + T) - \dot{u}(\tau + T)v(\tau + T)v(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T)$$

y por la ecuación (4.9),

$$u(\tau + T)u(\tau + T)\dot{u}(\tau + T) - v(\tau + T)\dot{u}(\tau + T)v(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T)$$

Entonces,

$$\left[ u(\tau + T)^2 - v(\tau + T)^2 \right] \cdot \dot{u}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T)$$

y se obtiene que,

$$\dot{u}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T)$$

La otra igualdad es análoga.

Realicemos el siguiente cambio de variables,

$$t = \lambda \cdot s + \tau, \quad \text{con } \lambda = \frac{1}{\dot{v}(\tau)}$$

y veamos que

$$X(s) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) & \tilde{v}(s) \\ \dot{\tilde{u}}(s) & \dot{\tilde{v}}(s) \end{pmatrix}$$

es una matriz fundamental de

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \tilde{\alpha}(s)\theta = 0, \quad \text{con} \quad \tilde{\alpha}(s) = \lambda^2\alpha(\lambda s + \tau)$$

siendo  $\tilde{\alpha}$  una función  $\tilde{T}$ -periódica con  $\tilde{T} = \frac{T}{\lambda}$  y  $\tilde{u}(s) = u(\lambda s + \tau) = u(t)$ ,  $\tilde{v}(s) = v(\lambda s + \tau) = v(t)$ . Debemos ver que  $X(0) = I$ , en efecto

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) &= u(\tau) = 1, & \tilde{v}(0) &= v(\tau) = 0 \\ \dot{\tilde{u}}(0) &= \lambda\dot{u}(\tau) = 0, & \dot{\tilde{v}}(0) &= \lambda\dot{v}(\tau) = 1 \end{aligned}$$

Calculemos la matriz de monodromía  $X\left(\frac{T}{\lambda}\right)$  de este sistema,

$$\begin{aligned} \tilde{u}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= u\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = u(T + \tau) \\ \tilde{v}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= v\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = v(T + \tau) \\ \dot{\tilde{u}}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= \lambda\dot{u}\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = \lambda\dot{v}(\tau)v(T + \tau) = v(T + \tau) \\ \dot{\tilde{v}}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= \lambda\dot{v}\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = \lambda\dot{v}(\tau)u(T + \tau) = u(T + \tau) \end{aligned}$$

Por lo tanto resulta,

$$X\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} u(T + \tau) & v(T + \tau) \\ v(T + \tau) & u(T + \tau) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora, } u(T + \tau) &= \frac{1}{2}[\varphi(T + \tau) + \psi(T + \tau)] = \frac{1}{2}[\mu_1\varphi(\tau) + \mu_2\psi(\tau)] = \frac{1}{2}[\mu_1 + \mu_2] \quad \text{y} \\ v(T + \tau) &= \frac{1}{2}[\mu_1 - \mu_2] \end{aligned}$$

Como  $\mu_1$  y  $\mu_2$  verifican que  $\mu_1\mu_2 = 1$ ,  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$  y  $0 < |\mu_1| < 1 < |\mu_2|$ , existe  $\Theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  tal que  $\mu_1 = e^\Theta$  y  $\mu_2 = e^{-\Theta}$  y resultan

$$u(T + \tau) = \frac{e^\Theta + e^{-\Theta}}{2} = \cosh \Theta \quad \text{y} \quad v(T + \tau) = \frac{e^\Theta - e^{-\Theta}}{2} = \sinh \Theta$$

Así, obtenemos que

$$X\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} \cosh \Theta & \sinh \Theta \\ \sinh \Theta & \cosh \Theta \end{pmatrix} = H_\pm[\Theta]$$

como queríamos demostrar.

Veamos ahora la demostración para el caso elíptico. Supongamos que los autovalores de  $X(T)$  para el sistema (4.6) son  $\mu_1$  y  $\mu_2$  y verifican  $\mu_1\mu_2 = 1$ ,  $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ ,  $|\mu_1| = 1$ ,  $\mu_1 \neq \pm 1$ . Igual que en el caso hiperbólico encontramos las soluciones de Floquet asociadas a estos autovalores,

$$\varphi(t + T) = \mu_1\varphi(t), \quad \psi(t + T) = \mu_2\psi(t)$$

El producto

$$\Pi = \varphi\psi$$

es  $T$ -periódico y entonces existe  $\tau \in \mathbb{R}$  con

$$\dot{\Pi}(\tau) = 0$$

Como  $\varphi$  y  $\psi$  son linealmente independientes podemos afirmar, igual que en el caso anterior, que  $\varphi(\tau)$  y  $\psi(\tau)$  no se anulan y elegir

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) = 1$$

En este caso definimos

$$u = \frac{1}{2}(\varphi + \psi), \quad v = \frac{1}{2i}(\varphi - \psi)$$

y se sigue verificando que

$$u(\tau) = 1, \quad v(\tau) = 0, \quad \dot{u}(\tau) = 0, \quad \dot{v}(\tau) \neq 0$$

Nuevamente vamos a suponer que  $\dot{v}(\tau) > 0$ . La función

$$u^2 + v^2 = \Pi$$

es  $T$ -periódica y por lo tanto

$$u^2(\tau + T) + v^2(\tau + T) = 1$$

De acá se deduce que

$$\dot{u}(\tau + T)u(\tau + T) + \dot{v}(\tau + T)v(\tau + T) = 0$$

Realizando la misma cuenta que en el caso hiperbólico para las nuevas definiciones de  $u$  y  $v$ , de la fórmula del Wronskiano resulta

$$u(\tau + T)\dot{v}(\tau + T) - \dot{u}(\tau + T)v(\tau + T) = \dot{v}(\tau)$$

De estas dos ecuaciones se obtiene que

$$-\dot{u}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)v(\tau + T), \quad \dot{v}(\tau + T) = \dot{v}(\tau)u(\tau + T)$$

Nuevamente realizamos el cambio de variables,

$$t = \lambda s + \tau, \quad \text{con } \lambda = \frac{1}{\dot{v}(\tau)}$$

y consideramos la matriz

$$X(s) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) & \tilde{v}(s) \\ \dot{\tilde{u}}(s) & \dot{\tilde{v}}(s) \end{pmatrix}$$

que es una matriz fundamental ( $X(0) = I$ ) de

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \tilde{\alpha}(s)\theta = 0, \quad \text{con } \tilde{\alpha}(s) = \lambda^2\alpha(\lambda s + \tau)$$

siendo  $\tilde{\alpha}$  una función  $\tilde{T}$ -periódica con  $\tilde{T} = \frac{T}{\lambda}$  y  $\tilde{u}(s) = u(\lambda s + \tau) = u(t)$ ,  $\tilde{v}(s) = v(\lambda s + \tau) = v(t)$ .

Veamos como resulta la matriz de monodromía de este sistema:

$$\begin{aligned}\tilde{u}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= u\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = u(T + \tau) \\ \tilde{v}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= v\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = v(T + \tau) \\ \dot{\tilde{u}}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= \lambda\dot{u}\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = -\lambda\dot{v}(\tau)v(T + \tau) = -v(T + \tau) \\ \dot{\tilde{v}}\left(\frac{T}{\lambda}\right) &= \lambda\dot{v}\left(\lambda\frac{T}{\lambda} + \tau\right) = \lambda\dot{v}(\tau)u(T + \tau) = u(T + \tau)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} u(T + \tau) & v(T + \tau) \\ -v(T + \tau) & u(T + \tau) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{donde, } u(T + \tau) &= \frac{1}{2}[\varphi(T + \tau) + \psi(T + \tau)] = \frac{1}{2}[\mu_1\varphi(\tau) + \mu_2\psi(\tau)] = \frac{1}{2}[\mu_1 + \mu_2] \quad y \\ v(T + \tau) &= \frac{1}{2i}[\mu_1 - \mu_2]\end{aligned}$$

Como  $\mu_1$  y  $\mu_2$  verifican que  $\mu_1 \cdot \mu_2 = 1$ ,  $\mu_1 = \overline{\mu_2}$ ,  $|\mu_1| = 1$ ,  $\mu_1 \neq \pm 1$ , existe  $\Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  tal que  $\mu_1 = e^{i\Theta}$  y  $\mu_2 = e^{-i\Theta}$  y por las Fórmulas de Euler resultan

$$u(T + \tau) = \frac{e^{i\Theta} + e^{-i\Theta}}{2} = \cos\Theta \quad y \quad v(T + \tau) = \frac{e^{i\Theta} - e^{-i\Theta}}{2i} = \sen\Theta$$

Así, se obtiene que

$$X\left(\frac{T}{\lambda}\right) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sen\Theta \\ -\sen\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} = R[\Theta]$$

La demostración del caso parabólico puede verse en [29] en el Lema 2.1.  $\square$

## 4.5. Teoría de Grado e índice de ceros

Fijemos un conjunto abierto y acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$ . Vimos que el **grado** está definido para aplicaciones continuas de  $\overline{\Omega}$  en  $\mathbb{R}^d$  que no se anulan en el borde. Más precisamente, dada

$$F \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d), \quad F(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \partial\Omega \quad (4.11)$$

podemos asignarle un número entero que denotamos como  $\deg(F, \Omega)$  y que verifica las propiedades mencionadas en la Sección 5 del Capítulo 2.

Dado un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^d$  y  $F \in C(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$ , supongamos que  $\xi_* \in \mathcal{U}$  es una raíz aislada de  $F(\xi) = 0$ . Esto significa que

$$F(\xi_*) = 0$$

y, para algún  $\delta > 0$ ,

$$F(\xi) \neq 0 \quad \text{si } 0 < |\xi - \xi_*| \leq \delta.$$

**Definición 4.5.1** Definimos el **índice** de  $F$  en  $\xi_*$  como

$$\text{ind}[F, \xi_*] = \deg(F, B_\delta(\xi_*))$$

La propiedad de escisión del grado (Teorema 2.6.20) muestra que esta bola puede ser reemplazada por cualquier entorno más pequeño de  $\xi_*$ .

En dimensión uno ( $d = 1$ ), el índice sólo puede tomar como valores  $\pm 1$  y 0.

$$\text{ind}[F, \xi_*] = 1 \quad \text{si} \quad F(\xi_* - \delta) < 0 < F(\xi_* + \delta)$$

$$\text{ind}[F, \xi_*] = -1 \quad \text{si} \quad F(\xi_* - \delta) > 0 > F(\xi_* + \delta)$$

$$\text{ind}[F, \xi_*] = 0 \quad \text{en cualquier otro caso}$$

Esto se deduce inmediatamente de la definición del grado. Ver los ejemplos 2.6.22 y 2.6.23

En dimensión dos ( $d = 2$ ) el índice puede tomar cualquier valor entero como muestran los ejemplos 2.6.24 y 2.6.25.

El procedimiento más simple para calcular el índice es por *linearización*. Dada  $F \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^d)$  y  $\xi_* \in \mathcal{U}$  con  $F(\xi_*) = 0$ , si la matriz Jacobiana  $F'(\xi_*)$  es no singular entonces

$$\text{ind}[F, \xi_*] = \text{sign}\{\det F'(\xi_*)\}$$

La técnica de linearización también es útil para ceros degenerados ( $\det F'(\xi_*) = 0$ ) con la condición de que la matriz Jacobiana no sea idénticamente cero. En este caso el cálculo del índice no es directo pero permite reducir la dimensión.

A continuación vamos a describir la situación más simple.

Supongamos que  $d = 2$  y  $F = (F_1, F_2)$  es una aplicación de clase  $C^1$  con

$$F_1(0, 0) = F_2(0, 0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0, 0) \neq 0$$

Recordemos el Teorema de la Función Implícita

**Teorema 4.5.2 (TFI)** Sea  $f$  una aplicación  $C^1$  de un conjunto abierto  $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$  en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $f(a, b) = 0$  para algún  $(a, b) \in E$ .

Sea  $A = Df(a, b)$  y asumamos que  $A_x = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  es inversible, entonces existe un conjunto abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+m}$  y  $\mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$ , con  $(a, b) \in \mathcal{U}$  y  $b \in \mathcal{W}$  con la siguiente propiedad:

Para cada  $y \in \mathcal{W}$  corresponde un único  $x$  tal que  $(x, y) \in \mathcal{U}$  y  $f(x, y) = 0$ . Si este  $x$  está definido como  $g(y)$ , entonces  $g$  es una aplicación  $C^1$  de  $\mathcal{W}$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $g(b) = a$ ,

$$f(g(y), y) = 0 \quad \text{para} \quad y \in \mathcal{W}$$

y

$$Dg(b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial y_j} \\ 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{pmatrix} = -(A_x)^{-1} A_y$$

$$\text{donde} \quad A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \\ 1 \leq i, j \leq n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \\ 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{pmatrix}$$

Podemos aplicar el Teorema de la Función Implícita a

$$F_1(\xi_1, \xi_2) = 0$$

Como  $F_1(0, 0) = 0$  y  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0, 0) \neq 0$ , podemos despejar  $\xi_2$  en función de  $\xi_1$ , digamos  $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$ . Definamos la función

$$\Phi(\xi_1) = F_2(\xi_1, \varphi(\xi_1))$$

y supongamos que  $\xi_1 = 0$  es un cero aislado de esta función. Entonces  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  es un cero aislado de  $F$  y

$$\text{ind}_{\mathbb{R}^2}[F, 0] = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0]$$

donde

$$\sigma = \text{sgn} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0, 0) \right\}$$

Probemos esta afirmación. Supongamos que estamos en el caso

$$\frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0, 0) > 0$$

y, para  $\lambda \in [0, 1]$ , consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda F_1(\xi_1, \xi_2) + (1 - \lambda)(\xi_2 - \varphi(\xi_1)) = 0 \\ \lambda F_2(\xi_1, \xi_2) + (1 - \lambda)\Phi(\xi_1) = 0 \end{cases}$$

Si llamamos  $\mathcal{F}_1(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \lambda F_1(\xi_1, \xi_2) + (1 - \lambda)(\xi_2 - \varphi(\xi_1))$  y aplicamos el Teorema 4.5.2 (TFI) a  $\mathcal{F}_1(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0$ , siendo  $\mathcal{F}_1(0, 0, \lambda) = 0$  y

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(0, 0, \lambda)}{\partial \xi_2} = \lambda \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0, 0) + (1 - \lambda) > 0$$

Como  $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$  es una solución de  $\mathcal{F}_1(\xi_1, \xi_2, \lambda) = 0$  en un entorno de  $(0, 0, \lambda)$ , por la unicidad del TFI, es la única solución en ese entorno.

Una vez que resolvimos la primera ecuación, reemplazamos en la segunda y deducimos que esta ecuación es equivalente a

$$\Phi(\xi_1) = 0$$

En efecto, si reemplazamos  $\xi_2 = \varphi(\xi_1)$  en la segunda ecuación

$$\lambda F_2(\xi_1, \varphi(\xi_1)) + (1 - \lambda)\Phi(\xi_1) = 0$$

esto es equivalente a

$$\lambda \Phi(\xi_1) + (1 - \lambda)\Phi(\xi_1) = 0$$

En consecuencia la única solución del sistema en un entorno de  $(0, 0, \lambda)$  es  $\xi_1 = \xi_2 = 0$  porque  $\xi_1 = 0$  es un cero aislado de  $\Phi = 0$ . Vamos a usar la propiedad de invariancia por homotopía del grado para calcular el índice. Consideramos la homotopía  $H: \mathcal{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$H((\xi_1, \xi_2), \lambda) = (\lambda F_1(\xi_1, \xi_2) + (1 - \lambda)(\xi_2 - \varphi(\xi_1)); \lambda F_2(\xi_1, \xi_2) + (1 - \lambda)\Phi(\xi_1))$$

que deforma la función  $G(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2 - \varphi(\xi_1); \Phi(\xi_1))$  en  $F(\xi_1, \xi_2) = (F_1(\xi_1, \xi_2); F_2(\xi_1, \xi_2))$

Entonces

$$\text{ind}[F, (0, 0)] = \text{ind}[G, (0, 0)]$$

Si  $\det(G'(0,0)) \neq 0$ , entonces  $\text{ind}[G, (0,0)] = \text{sgn}(\det(G'(0,0)))$

Calculemos

$$\det(G'(\xi_1, \xi_2)) = \begin{vmatrix} -\varphi'(\xi_1) & 1 \\ \Phi'(\xi_1) & 0 \end{vmatrix} = -\Phi'(\xi_1)$$

Por lo tanto, cuando  $\Phi'(0) \neq 0$  el índice se puede calcular por linealización y

$$\text{ind}[F, (0,0)] = \text{ind}[G, (0,0)] = \text{sgn}(\det(G'(0,0))) = \text{sgn}(-\Phi'(0)) = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0]$$

porque habíamos supuesto que  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0,0) > 0$ .

En el caso en que  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0,0) < 0$ , definimos

$$\mathcal{F}_1(\xi_1, \xi_2, \lambda) = \lambda F_1(\xi_1, \xi_2) + (1-\lambda)(\varphi(\xi_1) - \xi_2)$$

y se puede aplicar el TFI porque

$$\frac{\partial \mathcal{F}_1(0,0,\lambda)}{\partial \xi_2} = \lambda \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0,0) + (\lambda-1) < 0$$

En este caso

$$\det(G'(\xi_1, \xi_2)) = \begin{vmatrix} \varphi'(\xi_1) & -1 \\ \Phi'(\xi_1) & 0 \end{vmatrix} = \Phi'(\xi_1)$$

y si  $\Phi'(0) \neq 0$ , se verifica que

$$\text{ind}_{\mathbb{R}^2}[F, 0] = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0] = \text{ind}[\Phi, 0] = \text{sgn}(\Phi'(0))$$

Finalizamos esta sección con un ejemplo de cómo calcular el índice usando la tercera aproximación. Consideremos una aplicación suave  $F$  en el plano con expansión de Taylor

$$\begin{aligned} F(\xi_1, \xi_2) &= (F_1(\xi_1, \xi_2), F_2(\xi_1, \xi_2)) = \\ &= (k\xi_2 + \alpha\xi_1^3 + \beta\xi_1^2\xi_2 + \gamma\xi_1\xi_2^2 + \delta\xi_2^3 + \dots; a\xi_1^3 + b\xi_1^2\xi_2 + c\xi_1\xi_2^2 + d\xi_2^3 + \dots) \end{aligned}$$

Vamos a ver que, si  $k \neq 0$  y  $a \neq 0$ , entonces

$$\text{ind}[F, (0,0)] = -\text{sgn}(k.a)$$

Para probar esto vamos a aplicar el TFI a  $F_1(\xi_1, \xi_2) = 0$  y como  $\frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0,0) = k \neq 0$  encontramos

$$\xi_2 = \varphi(\xi_1) = O(\xi_1^3)$$

Por lo tanto,

$$\Phi(\xi_1) = a\xi_1^3 + O(\xi_1^4)$$

Vimos que

$$\text{ind}[F, (0,0)] = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0]$$

donde

$$\sigma = \text{sgn} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2}(0,0) \right\}$$

Aplicémosla a este caso,

$$\text{ind}[F, (0,0)] = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0] = -\text{sgn}(k) \cdot \text{deg}(\Phi, B_\delta(0), 0)$$

En primer lugar, notemos que  $\deg(\Phi, B_\delta(0), 0) = \deg(\bar{\Phi}, B_\delta(0), 0)$  donde  $\bar{\Phi}(\xi_1) = a\xi_1^3$ . Para verificar esto basta considerar la homotopía  $H(\lambda, \xi_1) = a\xi_1^3 + \lambda \cdot O(\xi_1^4)$  que deforma  $H(0, \xi_1) = \bar{\Phi}(\xi_1)$  en  $H(1, \xi_1) = \Phi(\xi_1)$  en forma continua.

Como 0 no es un valor regular de  $\bar{\Phi}$  porque  $\bar{\Phi}'(0) = 0$ , tomamos  $q$  un valor regular de  $\bar{\Phi}$  tal que  $|q| < \text{dist}(\bar{\Phi}(\partial B_\delta(0)), 0) = a\delta^3$  y calculamos  $\deg(\bar{\Phi}, B_\delta(0), q)$ .

Como la función  $\bar{\Phi}(\xi_1) = a\xi_1^3$  es estrictamente creciente si  $a > 0$  y estrictamente decreciente si  $a < 0$ , por lo tanto, habrá una única solución de  $a\xi_1^3 = q$  y se verifica

$$\text{ind}[F, (0, 0)] = -\text{sgn}(k) \cdot \text{sgn}(a)$$

## 4.6. El índice de un equilibrio

Consideremos nuevamente la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} = f(t, \theta) \quad (4.12)$$

donde  $f: \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  es continua,  $T$ -periódica y  $f(t, 0) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ , es decir que  $\theta = 0$  es un punto de equilibrio.

**Definición 4.6.1** *El equilibrio  $\theta = 0$  se dice **aislado (período  $T$ )** si existe un  $\delta > 0$  tal que la ecuación (4.12) no tiene soluciones  $T$ -periódicas que satisfagan*

$$0 < |\theta(t)| + |\dot{\theta}(t)| \leq \delta, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (4.13)$$

Como ejemplo podemos considerar la ecuación

$$\ddot{\theta} + \theta = 0$$

entonces  $\theta = 0$  es aislado (período  $T$ ) si  $T$  no es un múltiplo de  $2\pi$ . Si  $T = 2k\pi$ , dado  $\delta > 0$  siempre se pueden elegir constantes  $a$  y  $b$  suficientemente pequeñas de modo que  $\theta(t) = a \cos t + b \sin t$  es una solución  $T$ -periódica que satisface (4.13).

**Observación 4.6.2** *Se verifica que,  $\theta = 0$  es aislado (período  $T$ ) si y sólo si el origen de  $\mathbb{R}^2$  es una raíz aislada de la ecuación*

$$(I - P)(\xi) = 0,$$

donde  $I$  es la identidad y  $P$  es la aplicación de Poincaré.

En efecto, si suponemos que  $\theta = 0$  es aislado (período  $T$ ), como  $\theta = 0$  es solución de

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = f(t, \theta) \\ \theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases},$$

por unicidad del problema de valores iniciales  $(0, 0)$  es raíz de  $(I - P)(\xi)$  y además resulta aislada.

Por el otro lado, si  $(0, 0)$  es raíz aislada de  $(I - P)(\xi)$ , existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|\theta_0| + |\omega_0| < \delta$  entonces

$$(\theta_0, \omega_0) = \left( \theta(0, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(0, \theta_0, \omega_0) \right) \neq \left( \theta(T, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(T, \theta_0, \omega_0) \right)$$

Esto significa que para condiciones iniciales  $(\theta_0, \omega_0)$  tal que  $|\theta_0| + |\omega_0| < \delta$ , no puede haber soluciones  $T$ -periódicas.

Si  $\theta(t)$  es cualquier solución que verifica

$$0 < |\theta(t)| + |\dot{\theta}(t)| < \delta \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

en particular cumple que  $|\theta(0)| + |\dot{\theta}(0)| = |\theta_0| + |\omega_0| < \delta$ , por lo tanto no puede ser  $T$ -periódica, y  $\theta = 0$  resulta aislado (período  $T$ )

Definimos el **índice de  $\theta = 0$**  como

$$\gamma_T(0) = \text{ind}[I - P, 0]$$

La ecuación diferencial es periódica en el tiempo y hemos fijado el período como  $T$ . Pero los múltiplos  $nT$ ,  $n \geq 2$ , también son admisibles como períodos de (4.12) y por lo tanto podemos considerar los índices iterados

$$\gamma_{nT}(0) = \text{ind}[I - P^n, 0]$$

cuando  $\theta = 0$  es aislado (período  $nT$ ).

Para entender esta definición debemos recordar que la aplicación de Poincaré para período  $nT$  es exactamente la iteración

$$P^n = P \circ \dots \circ P$$

Además, notemos que si  $\gamma_{nT}(0)$  está bien definida entonces lo mismo sucede para  $\gamma_{kT}(0)$  si  $k$  es un divisor de  $n$ . En efecto, para que  $\gamma_{nT}(0)$  esté bien definida,  $0$  debe ser una raíz aislada de  $I - P^n$ , por lo tanto también debe ser una raíz aislada de  $I - P^k$  si  $k/n$  y eso implica que  $\gamma_{kT}(0)$  está bien definido.

En esta sección nos concentraremos en el primer índice  $\gamma_T(0)$  y describiremos algunos métodos para calcularlo. Para esto vamos a suponer que la fuerza  $f(t, \theta)$  es suave en  $\theta$ , esto significa que las derivadas parciales  $\frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}(t, \theta)$  existen para todo punto en  $\mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  y las funciones

$$(t, \theta) \rightarrow \frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}(t, \theta)$$

son continuas para cada  $n \geq 1$ . La primera aproximación de (4.12) es

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta = 0, \quad \text{con } \alpha(t) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0) \tag{4.14}$$

Por la diferenciabilidad del flujo (Teorema 2.4.2)  $P$  es una aplicación suave y, como vimos en la Sección 4, la matriz  $P^l(0)$  es precisamente la matriz de monodromía  $X(T)$ . Si  $X(T)$  es elíptica, hiperbólica o parabólica con  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ , el índice puede ser computado por linealización porque  $\det(I - X(T)) \neq 0$ .

$$\gamma_T(0) = \text{ind}[I - P, 0] = \text{sgn}\{\det(I - P^l(0))\} = \text{sgn}\{\det(I - X(T))\} = \text{sgn}\{(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)\},$$

donde  $\mu_1, \mu_2$  son los autovalores de  $X(T)$ , es decir, los multiplicadores de Floquet.

Si obtenemos en cada caso la forma de Jordan de  $X(T)$  vemos que:

- En el caso elíptico,  $\gamma_T(0) = \begin{vmatrix} 1 - e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-i\theta} \end{vmatrix} = (1 - e^{i\theta}) \cdot (1 - e^{-i\theta}) = 2 - 2\cos\theta > 0$ , siendo  $\theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ .
- En el caso hiperbólico,  $\gamma_T(0) = (1 - e^\theta) \cdot (1 - e^{-\theta}) = 2 - 2\cosh\theta < 0$  siendo  $\theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$

- En el caso parabólico con  $\mu_1 = \mu_2 = -1$ ,  $\gamma_T(0) = (1 - (-1)) \cdot (1 - (-1)) = 4 > 0$

El cálculo del índice en el caso degenerado  $\mu_1 = \mu_2 = 1$  es más delicado y requiere información acerca de aproximaciones no lineales.

Supongamos ahora que (4.12) puede desarrollarse como

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta + c(t)\theta^p + O(\theta^{p+1}) = 0$$

donde  $c(t)$  no es idénticamente cero.

Vamos a ver que la expansión no lineal de  $P$  hasta el orden  $p$  es

$$P \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} = X(T) \cdot \begin{pmatrix} \theta_0 + \frac{\partial H(\theta_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} + O(\theta^{p+1}) \\ \omega_0 - \frac{\partial H(\theta_0, \omega_0)}{\partial \theta_0} + O(\theta^{p+1}) \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde

$$H(\theta_0, \omega_0) = \frac{1}{p+1} \int_0^T c(t) (y_1(t)\theta_0 + y_2(t)\omega_0)^{p+1} dt$$

e  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  son las soluciones de la ecuación lineal (4.14) que satisfacen

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$$

Para ello observemos en primer lugar que la solución de

$$\ddot{\delta} + a(t)\delta = b(t) \quad \delta(0) = \dot{\delta}(0) = 0$$

es

$$\delta(t) = \int_0^t [y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)] b(s) ds$$

Es claro que esta función verifica las condiciones iniciales, y si derivamos respecto de  $t$  obtenemos

$$\dot{\delta}(t) = \underbrace{[y_1(t)y_2(t) - y_1(t)y_2(t)]}_{=0} b(t) + \int_0^t [y_1(s)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(s)] b(s) ds$$

y

$$\ddot{\delta}(t) = [y_1(t)\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t)y_2(t)] b(t) + \int_0^t [y_1(s)\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t)y_2(s)] b(s) ds$$

Como

$$X(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) & \dot{y}_2(t) \end{pmatrix}$$

verifica que  $X(0) = I$ , entonces esta matriz es una solución fundamental de  $\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta = 0$  y vimos que, por el Teorema de Liouville, siempre se satisface que  $\det(X(t)) = y_1(t)\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)y_2(t) = 1$ .

Por lo tanto, reemplazando  $\delta(t)$  en la ecuación vemos que

$$\begin{aligned} \ddot{\delta} + a(t)\delta &= b(t) + \int_0^t [y_1(s)\ddot{y}_2(t) - \ddot{y}_1(t)y_2(s)] b(s) ds + a(t) \int_0^t [y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)] b(s) ds = \\ &= b(t) + \int_0^t \left[ y_1(s) \left( \underbrace{\ddot{y}_2(t) + a(t)y_2(t)}_{=0} \right) - \left( \underbrace{\ddot{y}_1(t) + a(t)y_1(t)}_{=0} \right) y_2(s) \right] b(s) ds = b(t) \end{aligned}$$

Como la solución de (4.12) satisface

$$\theta(t, \theta_0, \omega_0) = y_1(t) \theta_0 + y_2(t) \omega_0 + R(\theta_0, \omega_0)$$

donde  $R(\theta_0, \omega_0)$  es un resto de orden mayor o igual que  $p$ , podemos aplicar la fórmula previa con

$$\delta(t) = \theta(t, \theta_0, \omega_0) - y_1(t) \theta_0 - y_2(t) \omega_0$$

y

$$b(t) = -c(t) \theta(t, \theta_0, \omega_0)^p + O(\theta^{p+1})$$

Así obtenemos,

$$\theta(t, \theta_0, \omega_0) - y_1(t) \theta_0 - y_2(t) \omega_0 = \int_0^t [y_1(s) y_2(t) - y_1(t) y_2(s)] (-c(s) \theta(s, \theta_0, \omega_0)^p + O(\theta^{p+1})) ds$$

o equivalentemente

$$\theta(t, \theta_0, \omega_0) = y_1(t) \theta_0 + y_2(t) \omega_0 - \int_0^t [y_1(s) y_2(t) - y_1(t) y_2(s)] c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p ds + O(\theta^{p+1})$$

derivando esta expresión obtenemos

$$\dot{\theta}(t, \theta_0, \omega_0) = \dot{y}_1(t) \theta_0 + \dot{y}_2(t) \omega_0 - \int_0^t [y_1(s) \dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t) y_2(s)] c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p ds + O(\theta^{p+1})$$

Evaluando estas expresiones en  $t = T$  tenemos una expresión de la expansión no lineal hasta orden  $p$  de  $P(\theta_0, \omega_0) = (\theta(T, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(T, \theta_0, \omega_0))$ . Faltaría ver que esta expresión coincide con (4.15).

Si

$$H(\theta_0, \omega_0) = \frac{1}{p+1} \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^{p+1} ds$$

entonces

$$\frac{\partial H(\theta_0, \omega_0)}{\partial \omega_0} = \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_2(s) ds$$

y

$$\frac{\partial H(\theta_0, \omega_0)}{\partial \theta_0} = \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_1(s) ds$$

Calculemos

$$\begin{pmatrix} y_1(T) & y_2(T) \\ \dot{y}_1(T) & \dot{y}_2(T) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \theta_0 + \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_2(s) ds + O(\theta^{p+1}) \\ \omega_0 - \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_1(s) ds + O(\theta^{p+1}) \end{pmatrix}$$

En la primer coordenada tenemos:

$$\begin{aligned} & y_1(t) \theta_0 + y_1(t) \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_2(s) ds + O(\theta^{p+1}) + \\ & + y_2(t) \omega_0 - y_2(t) \int_0^T c(s) (y_1(s) \theta_0 + y_2(s) \omega_0)^p y_1(s) ds + O(\theta^{p+1}) = \theta(T, \theta_0, \omega_0) \end{aligned}$$

Y análogamente, la segunda coordenada será igual a  $\dot{\theta}(T, \theta_0, \omega_0)$ , obteniendo así la expresión deseada de la expansión de  $P$ .

Una vez que tenemos una expansión no lineal de  $P$ , utilizaremos los métodos de la sección anterior para calcular el índice. Supongamos primero que  $X(T)$  es una de las matrices  $P_+$  o  $P_-$ . La función

$$F = I - P, \quad F = F(\theta_0, \omega_0)$$

satisface

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_0}(0, 0) = \pm 1$$

En efecto,

$$F_1(\theta_0, \omega_0) = \theta_0 - y_1(T)\theta_0 - y_2(T)\omega_0 + \int_0^T [y_1(s)y_2(T) - y_1(T)y_2(s)]c(s)(y_1(s)\theta_0 + y_2(s)\omega_0)^p ds + O(\theta^{p+1})$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial F_1}{\partial \omega_0}(0, 0) = -y_2(T) = \begin{cases} -1 & \text{si } X(T) = P_+ \\ 1 & \text{si } X(T) = P_- \end{cases}$$

Entonces, aplicando el TFI a  $F_1(\theta_0, \omega_0) = 0$ , obtenemos que

$$\omega_0 = \varphi(\theta_0) = O(\theta_0^p)$$

y resulta

$$\begin{aligned} \Phi(\theta_0) &= F_2(\theta_0, \varphi(\theta_0)) = \\ & \varphi(\theta_0) - \underbrace{y_1(T)\theta_0}_{=0} - \underbrace{y_2(T)\varphi(\theta_0)}_{=1} + \int_0^T \left[ \underbrace{y_1(s)y_2(T)}_{=1} - \underbrace{y_1(T)y_2(s)}_{=0} \right] c(s)(y_1(s)\theta_0 + y_2(s)\varphi(\theta_0))^p ds + O(\theta^{p+1}) = \\ & = \int_0^T y_1(s)c(s)(y_1(s)\theta_0 + y_2(s)\varphi(\theta_0))^p ds + O(\theta^{p+1}) = \frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \varphi(\theta_0)) + O(\theta^{p+1}) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\Phi(\theta_0) = \left( \int_0^T c(t)y_1(t)^{p+1} dt \right) \theta_0^p + O(\theta_0^{p+1}) = C\theta_0^p + O(\theta_0^{p+1})$$

Supongamos ahora que la constante  $C$  que corresponde a la integral que aparece en la fórmula anterior es distinta de cero, entonces  $\theta_0 = 0$  es una raíz aislada para  $\Phi$ , lo que implica que  $(0, 0)$  es una raíz aislada de  $I - P$  y por lo tanto  $\theta = 0$  es aislado (período  $T$ ) y puedo definir el índice. Entonces,

$$\gamma_T(0) = -\sigma \text{ind}[\Phi, 0] = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ es par} \\ -\sigma \cdot \text{sgn } C & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases}$$

donde

$$\sigma = \text{sgn} \left\{ \frac{\partial F_1}{\partial \omega_0}(0, 0) \right\} = \begin{cases} -1 & \text{si } X(T) = P_+ \\ 1 & \text{si } X(T) = P_- \end{cases}$$

El caso en que  $p$  es par es análogo al del Ejemplo 2.6.23 y el caso en que  $p$  es impar se deduce igual que el cálculo del índice que hicimos, usando la tercera aproximación, al final de la sección anterior.

El cálculo del índice cuando  $X(T) = I$  se basa en ideas diferentes. Supongamos que el origen es el único punto crítico de  $H$ , vamos a probar que  $\theta = 0$  es aislado (período  $T$ ) y

$$\gamma_T(0) = \text{ind}[\nabla H, 0]$$

En primer lugar notemos que, como  $X(T)$  es la identidad, la aplicación

$$F = I - P = \begin{bmatrix} -\frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0) + R_1(\theta_0, \omega_0) \\ \frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \omega_0) + R_2(\theta_0, \omega_0) \end{bmatrix} = J\nabla H + R,$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y  $R = R(\theta_0, \omega_0)$  es un resto de orden mayor que  $p$ .

Consideremos el sistema de ecuaciones

$$J\nabla H(\theta_0, \omega_0) + \lambda R(\theta_0, \omega_0) = 0, \quad \lambda \in [0, 1] \quad (4.16)$$

Vamos a probar que, en un pequeño entorno del origen, no existen soluciones distintas de

$$\theta_0 = \omega_0 = 0$$

Probémoslo por el absurdo. Supongamos que existe una sucesión de soluciones

$$\xi_n = (\theta_{0n}, \omega_{0n}), \quad \lambda_n \in [0, 1]$$

con

$$\xi_n \neq 0 \quad \text{y} \quad |\xi_n| \rightarrow 0$$

Definamos

$$\eta_n = \frac{\xi_n}{|\xi_n|}$$

y extraigamos una subsucesión convergente, digamos

$$\eta_n \rightarrow \eta_*, \quad \lambda_n \rightarrow \lambda_*$$

Dividiendo las ecuaciones por  $|\xi_n|^p$  y pasando al límite concluimos que  $\eta_*$  es un punto crítico de  $H$ .

En efecto,

$$\begin{cases} \frac{\partial H_{\omega_0}(\xi_n)}{|\xi_n|^p} = \lambda_n \frac{R_1(\xi_n)}{|\xi_n|^p} \\ \frac{\partial H_{\theta_0}(\xi_n)}{|\xi_n|^p} = -\lambda_n \frac{R_2(\xi_n)}{|\xi_n|^p} \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} \partial H_{\omega_0}(\eta_n) = \lambda_n \frac{R_1(\eta_n)}{|\eta_n|^p} \\ \partial H_{\theta_0}(\eta_n) = -\lambda_n \frac{R_2(\eta_n)}{|\eta_n|^p} \end{cases}$$

Tomando límite tenemos que,

$$\begin{aligned} \partial H_{\omega_0}(\eta_n) &\rightarrow \partial H_{\omega_0}(\eta_*), & \partial H_{\theta_0}(\eta_n) &\rightarrow \partial H_{\theta_0}(\eta_*), \\ \lambda_n &\rightarrow \lambda_* \end{aligned}$$

y como  $R_i(\xi_n) = O(\xi_n^{p+1})$  para  $i = 1, 2$

$$\lambda_n \frac{R_i(\xi_n)}{|\xi_n|^p} \rightarrow 0$$

Por lo tanto,  $\nabla H(\eta_*) = (0, 0)$ , lo cual es imposible ya que  $|\eta_*| = 1$  y  $(0, 0)$  era el único punto crítico de  $H$ . Entonces, probamos que, en un pequeño entorno del origen, no existe ninguna solución de (4.16) y por lo tanto, podemos definir el índice de  $F_\lambda = J\nabla H + \lambda R$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ .

$h(\lambda, \theta_0, \omega_0) = J\nabla H(\theta_0, \omega_0) + \lambda R(\theta_0, \omega_0)$  con  $\lambda \in [0, 1]$  es una homotopía que deforma  $h(0, \theta_0, \omega_0) = J\nabla H(\theta_0, \omega_0)$  en  $h(1, \theta_0, \omega_0) = F(\theta_0, \omega_0)$ .

Entonces, por la propiedad de invariancia por homotopía del grado

$$\gamma_T(0) = \text{ind}[I - P, 0] = \text{ind}[F, 0] = \text{ind}[J\nabla H, 0]$$

Por otro lado, como  $\det J = 1$ , entonces  $J$  e  $I$  están en la misma componente de  $Gl(\mathbb{R}^2)$ . Sea  $J_\lambda = \lambda J + (1 - \lambda)I$  con  $\lambda \in [0, 1]$ , un camino continuo en  $Gl(\mathbb{R}^2)$  que une  $I$  y  $J$ .

Veamos que la ecuación  $J_\lambda \nabla H = 0$  es equivalente a  $\nabla H = 0$ , es decir que tienen las mismas raíces.

Supongamos que  $J_\lambda \nabla H(\theta_0, \omega_0) = 0$ , entonces

$$\begin{cases} (1 - \lambda) \frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \omega_0) - \lambda \frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0) = 0 \\ \lambda \frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \omega_0) + (1 - \lambda) \frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0) = 0 \end{cases}$$

Si  $\lambda \neq 1$  (para el caso  $\lambda = 1$  es claro que se cumple) despejamos de la primera ecuación,

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \omega_0) = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0)$$

y reemplazando en la segunda ecuación tenemos

$$\underbrace{\frac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{1 - \lambda}}_{\neq 0} \frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0) = 0 \implies \frac{\partial H}{\partial \omega_0}(\theta_0, \omega_0) = 0$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial H}{\partial \theta_0}(\theta_0, \omega_0) = 0$$

con lo cual  $\nabla H(\theta_0, \omega_0) = 0$ . La otra implicación es obvia.

Por lo tanto  $(0, 0)$  es una raíz aislada de  $J_\lambda \nabla H(\theta_0, \omega_0) = 0$ , para todo  $\lambda \in [0, 1]$  y podemos definir entonces el índice para estas aplicaciones en  $(0, 0)$ .

Además  $J_\lambda \nabla H(\theta_0, \omega_0)$  es una homotopía que deforma  $\nabla H$  en  $J\nabla H(\theta_0, \omega_0)$ , por lo tanto

$$\gamma_T(0) = \text{ind}[J\nabla H, 0] = \text{ind}[\nabla H, 0]$$

como queríamos probar.

En resumen, vimos que si los multiplicadores de Floquet del sistema (4.12) son distintos de 1, el índice puede calcularse a partir de la ecuación variacional

$$\ddot{\theta} + a(t)\theta = 0 \quad \text{con } a(t) = \frac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0)$$

En el caso crítico  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ , se puede usar la primer aproximación no lineal para calcular el índice en varios casos.

## 4.7. Estabilidad e índice

Existe una relación delicada entre la estabilidad y el índice de una ecuación diferencial, y aunque todavía no se ha descubierto cuál es dicha relación para muchos casos, se han probado algunos resultados que nos ayudarán en el estudio de la estabilidad del péndulo de longitud variable.

Por ejemplo, para un sistema autónomo

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

que tiene a  $x = 0$  como un equilibrio estable y aislado, nos interesaría saber el índice del campo vectorial  $X$ .

Para  $d = 2$  se sabe que  $\text{ind}[X, 0] = 1$ , pero para  $d \geq 3$  el índice puede tomar cualquier valor entero, por lo menos para campos vectoriales  $C^\infty$ . Este tema está desarrollado en el trabajo de Bonati y Villadelprat [5].

Dada una ecuación  $T$ -periódica

$$\dot{x} = X(t, x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

que tiene a  $x = 0$  como un equilibrio estable y aislado (período  $T$ ), lo que nos interesa es el índice  $\gamma_T(0)$ . Para dimensión  $d \geq 3$ , se puede adaptar la construcción para el caso autónomo de modo que el índice puede tomar cualquier valor. Esta construcción está hecha en [31].

Para el caso que nosotros queremos analizar nos interesa el índice para  $d = 2$ , que se obtiene como consecuencia del siguiente teorema que relaciona estabilidad e índice de un punto fijo.

**Teorema 4.7.1** *Sea  $U$  un dominio de  $\mathbb{R}^2$ ,  $p \in U$  un punto dado y  $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  un homeomorfismo sobre su imagen que preserva la orientación. Si  $p$  es un punto fijo de  $F$  que es Lyapunov estable y aislado, entonces*

$$\text{ind}[F, p] = 1$$

La prueba de este teorema, que se basa en algunos aspectos específicos de la topología del plano y utiliza una versión del Lema de Brouer sobre traslación de arcos, puede verse en [10].

Nosotros utilizaremos el siguiente teorema que se deduce del anterior.

**Teorema 4.7.2** *Supongamos que  $\theta = 0$  es un equilibrio de (4.12) que es aislado (período  $T$ ) y estable. Entonces  $\gamma_T(0) = \text{ind}[I - P, 0] = 1$*

Si en el Teorema 4.7.1 tomamos  $F = I - P$  donde  $P$  es el operador de Poincaré asociado a (4.12), se verifica, por el Teorema de Liouville, que  $F$  preserva la orientación. Por otro lado, si  $\theta = 0$  es un equilibrio aislado (período  $T$ ) de (4.12) vimos que  $(0, 0)$  es una raíz aislada de  $F$ .

Para estar en las condiciones del Teorema 4.7.1 faltaría ver que  $(0, 0)$  es un punto fijo estable de  $F$ , lo que equivale a ver que es un punto fijo estable de  $P$ .

Para ello debemos ver que para cada entorno  $\mathcal{U}$  del origen existe otro entorno  $\mathcal{V}$  del origen tal que si  $(\theta_0, \omega_0) \in \mathcal{V}$ , entonces  $P^n(\theta_0, \omega_0) = (\theta(nT, \theta_0, \omega_0), \dot{\theta}(nT, \theta_0, \omega_0)) \in \mathcal{U} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$  y esto claramente se cumple porque  $\theta = 0$  verifica la propiedad de estabilidad perpetua (Ver Definición 4.3.1).

Notemos que si las ecuaciones son periódicas de período  $T$  entonces también son  $nT$ -periódicas para  $n \geq 2$ . Esto nos lleva al siguiente corolario,

**Corolario 4.7.3** *Supongamos que  $\theta = 0$  es un equilibrio de (4.12) que es aislado (período  $nT$ ) y estable. Entonces  $\gamma_{nT}(0) = \text{ind}[I - P^n, 0] = 1$ .*

Este resultado tiene un importante valor práctico. Nos permite obtener un criterio de inestabilidad a partir de la Teoría de Grado. De hecho, si alguno de los índices  $\gamma_{nT}(0)$  es distinto de 1, podemos afirmar que  $\theta = 0$  es inestable.

**Ejemplo 4.7.4** Consideremos la siguiente ecuación

$$\ddot{\theta} + \theta + c(t)\theta^2 = 0 \quad (4.17)$$

y supongamos que  $c(t)$  tiene período

$$T = \frac{2\pi}{3}$$

La linearización ( $\ddot{\theta} + \theta = 0$ ) tiene matrices de monodromía, para períodos  $T$ ,  $2T$  y  $3T$ ,

$$X(T) = R\left[\frac{2\pi}{3}\right], \quad X(2T) = R\left[\frac{4\pi}{3}\right], \quad X(3T) = R[2\pi] = I$$

Esto implica que, para períodos  $T$  y  $2T$ , es posible calcular el índice por linearización. Se tiene que  $\theta = 0$  es aislado (período  $2T$ ) y

$$\gamma_T(0) = \operatorname{sgn}\{\det(I - X(T))\} = \operatorname{sgn}\left\{\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\} = 1$$

$$\gamma_{2T}(0) = \operatorname{sgn}\{\det(I - X(2T))\} = \operatorname{sgn}\left\{\det\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\right\} = 1$$

Para calcular el tercer índice debemos utilizar la discusión acerca del caso degenerado de la Sección 4.6. Como  $X(3T) = I$  y

$$y_1(t) = \cos t, \quad y_2(t) = \sin t$$

son las soluciones de la ecuación lineal  $\ddot{\theta} + \theta = 0$  que satisfacen

$$y_1(0) = y_2(0) = 1, \quad \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0,$$

para el período  $3T = 2\pi$  la función  $H$  tiene la forma

$$H(\theta_0, \omega_0) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} c(t) (\cos t \cdot \theta_0 + \sin t \cdot \omega_0)^3 dt$$

En notación compleja,

$$\xi = \theta_0 + i\omega_0, \quad \bar{\xi} = \theta_0 - i\omega_0$$

y podemos escribir

$$\begin{aligned} H(\theta_0, \omega_0) &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} c(t) \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \cdot \theta_0 - \frac{e^{it} - e^{-it}}{2} \cdot i\omega_0 \right)^3 dt = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} c(t) \left( \frac{e^{it}}{2} \cdot (\theta_0 - i\omega_0) + \frac{e^{-it}}{2} \cdot (\theta_0 + i\omega_0) \right)^3 dt \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$H(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} c(t) (e^{it} \cdot \bar{\xi} + e^{-it} \cdot \xi)^3 dt$$

La función  $c(t)$  tiene período  $\frac{2\pi}{3}$  y esto implica que

$$\int_0^{2\pi} c(t) e^{it} dt = 0$$

En efecto,

$$\int_0^{2\pi} c(t) e^{it} dt = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{it} dt + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} c(t) e^{it} dt + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} c(t) e^{it} dt$$

Si en la segunda integral del lado derecho de la igualdad realizamos la sustitución  $u = t - \frac{2\pi}{3}$  y en la tercera integral reemplazamos por  $z = t - \frac{4\pi}{3}$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} c(t) e^{it} dt &= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{it} dt + e^{i\frac{2\pi}{3}} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c\left(u + \frac{2\pi}{3}\right) e^{iu} du + e^{i\frac{4\pi}{3}} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c\left(z + \frac{4\pi}{3}\right) e^{iz} dz = \\ &= \underbrace{\left(1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}\right)}_{=0} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{it} dt = 0 \end{aligned}$$

Aquí utilizamos que la suma de las raíces cúbicas de la unidad es cero y que  $c(t)$  tiene período  $\frac{2\pi}{3}$ . Análogamente vemos que

$$\int_0^{2\pi} c(t) e^{-it} dt = 0$$

Ahora veamos que

$$H(\xi, \bar{\xi}) = \frac{1}{8} (\gamma \bar{\xi}^3 + \bar{\gamma} \xi^3)$$

donde

$$\gamma = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{3it} dt \quad (4.18)$$

En efecto, desarrollando el cubo de binomio, tenemos que

$$\begin{aligned} H(\xi, \bar{\xi}) &= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{i3t} \bar{\xi}^3 dt + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} c(t) e^{it} \bar{\xi}^2 \xi dt + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} c(t) e^{-it} \xi^2 \bar{\xi} dt + \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{-i3t} \xi^3 dt = \\ &= \frac{1}{24} \bar{\xi}^3 \cdot \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{i3t} dt + \frac{1}{8} \bar{\xi}^2 \xi \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} c(t) e^{it} dt}_{=0} + \frac{1}{8} \xi^2 \bar{\xi} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} c(t) e^{-it} dt}_{=0} + \frac{1}{24} \xi^3 \cdot \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{-i3t} dt = \\ &= \frac{1}{8} \bar{\xi}^3 \cdot \left( \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{i3t} dt \right) + \frac{1}{8} \xi^3 \cdot \left( \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} c(t) \cdot e^{-i3t} dt \right) = \\ &= \frac{1}{8} \bar{\xi}^3 \cdot \underbrace{\left( \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{3it} dt \right)}_{\gamma} + \frac{1}{8} \xi^3 \cdot \underbrace{\left( \int_0^{\frac{2\pi}{3}} c(t) e^{-3it} dt \right)}_{\bar{\gamma}} \end{aligned}$$

Calculemos las derivadas parciales de  $H$ ,

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\xi}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H}{\partial \theta_0} + i \frac{\partial H}{\partial \omega_0} \right) = \frac{3}{8} \gamma \bar{\xi}^2$$

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial H}{\partial \theta_0} - i \frac{\partial H}{\partial \omega_0} \right) = \frac{3}{8} \gamma \xi^2$$

Vemos que si  $\gamma \neq 0$ , el único punto crítico de  $H$  es el origen. Por lo tanto se sigue que  $\theta = 0$  es aislado (período  $3T$ ) y

$$\gamma_{3T}(0) = \text{ind}[\nabla H, 0] = 2$$

En efecto,

$$\text{ind}[\nabla H, 0] = \text{deg}(\nabla H, B_\delta(0), 0) = \text{deg}(\nabla H, B_\delta(0), q)$$

donde  $q = (q_1, \bar{q}_1)$  es un valor regular de  $\nabla H$  tal que  $|q| < \text{dist}(\nabla H(\partial B_\delta(0)), 0)$

Sean  $\xi_0 = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot z_1$  y  $\bar{\xi}_0 = \sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \bar{z}_1$  donde  $z_1^2 = \frac{1}{\gamma} \cdot q_1$ , o sea que  $z_1$  es una raíz cuadrada de  $\frac{1}{\gamma} \cdot q_1$ , entonces

$$\det\{D\nabla H(\xi_0, \bar{\xi}_0)\} = \det \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \gamma \xi_0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \gamma \bar{\xi}_0 \end{pmatrix} = \frac{16}{9} |\gamma|^2 |\xi_0|^2 > 0$$

Podemos concluir que  $\theta = 0$  es inestable siempre que la cantidad definida por (4.18) no sea nula.

Este ejemplo muestra que el procedimiento de linealización no es válido para una ecuación general del tipo (4.12). En este ejemplo  $\theta = 0$  es estable para la linealización ( $\ddot{\theta} + \theta = 0$ ) ya que su matriz de monodromía resulta  $X(t) = R[\Theta]$  con  $\Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$  pero inestable para la ecuación original ya que uno de sus índices es distinto de 1.

## 4.8. El péndulo de longitud variable

Consideremos nuevamente la ecuación

$$\ddot{\theta} + \alpha(t) \text{sen} \theta = 0 \tag{4.19}$$

donde  $\alpha(t)$  es continua,  $T$ -periódica y positiva. Vamos a calcular el segundo índice  $\gamma_{2T}(0)$ . Comencemos por el principio de linealización.

En primer lugar observemos que

$$X(2T) = X(T)^2,$$

ya que vimos en la demostración del Teorema 2.3.19 que  $X(t+T) = X(t) \cdot X(T)$

Si  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son los multiplicadores de Floquet de la ecuación linealizada de período  $T$ , los autovalores de

$$X(2T) = X(T)^2$$

son  $\mu_1^2$  y  $\mu_2^2$ .

En el caso elíptico,

$$\mu_1 = \bar{\mu}_2, \quad \mu_1 \neq \pm 1,$$

y

$$\gamma_{2T}(0) = \text{sgn}\{\det(I - X(2T))\} = \text{sgn}\{(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)\} = \text{sgn}|1 - \mu_1^2|^2 = 1$$

En el *caso hiperbólico*,

$$|\mu_1| < 1 < |\mu_2|, \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \frac{1}{\mu_1},$$

por lo tanto podemos escribir  $\mu_1 = e^{-\Theta}$  y  $\mu_2 = e^{\Theta}$  para algún  $\Theta \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  y,

$$\gamma_{2T}(0) = \text{sgn} \left\{ (1 - \mu_1^2) (1 - \mu_2^2) \right\} = \text{sgn} \left\{ 2 - \mu_2^2 - \frac{1}{\mu_2^2} \right\} = \text{sgn} \left\{ 2 - e^{2\Theta} - e^{-2\Theta} \right\} = \text{sgn} \left\{ 2 - 2 \underbrace{\cosh 2\Theta}_{>1} \right\} = -1$$

Esto dice que el equilibrio  $\theta = 0$  es inestable.

En el *caso parabólico*,

$$\mu_1 = \mu_2 = \pm 1$$

sabemos que  $X(2T)$  debe ser conjugada en  $Sp(\mathbb{R}^2)$  a alguna de las matrices  $I$ ,  $P_+$ ,  $P_-$ .

Volviendo a los métodos de cálculo del índice para el caso degenerado, y considerando la tercera aproximación

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta - \frac{1}{3!}\alpha(t)\theta^3 = 0 \quad (4.20)$$

obtenemos una expansión del operador de Poincaré como en la Sección 4.6, con

$$H(\theta_0, \omega_0) = -\frac{1}{24} \cdot \int_0^{2T} \underbrace{\alpha(t)(y_1(t)\theta_0 + y_2(t)\omega_0)^4}_{>0} dt < 0 \quad \forall (\theta_0, \omega_0) \neq (0, 0)$$

De aquí se deduce que  $H$  tiene un máximo estricto en el origen  $\xi = 0$ .

A continuación utilizaremos el hecho de que  $H$  es una función homogénea de grado 4.

**Definición 4.8.1** Una función  $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  se dice **homogénea de grado  $n$**  si  $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$  para todo  $t > 0$  y todo  $(x, y) \in D$ .

Las funciones homogéneas verifican el siguiente teorema que recibe el nombre de Teorema de Euler para funciones homogéneas.

**Teorema 4.8.2** Sea  $f(x, y)$  una función homogénea de orden  $n$ . Definimos  $\tilde{x} = x.t$  e  $\tilde{y} = y.t$ , entonces

$$n.t^{n-1}.f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \cdot \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \cdot \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \cdot y = \frac{\partial f}{\partial (t.x)} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial (t.y)} \cdot y$$

Tomando  $t = 1$ , obtenemos que

$$n.f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y,$$

es decir,

$$n.f(x, y) = (x, y) \cdot \nabla f(x, y)$$

Como  $H$  es homogénea de orden 4, entonces

$$\xi \cdot \nabla H(\xi) = 4H(\xi) < 0 \quad \forall \xi \neq 0$$

Esta desigualdad implica que  $\xi = 0$  es el único punto crítico de  $H$  y entonces podemos analizar el caso

$$X(2T) = I$$

Más precisamente,  $\theta = 0$  es aislado (período  $2T$ ) con

$$\gamma_{2T}(0) = \text{ind}[\nabla H, 0] = 1,$$

Aquí utilizamos la siguiente propiedad del índice para operadores gradientes cuya demostración puede verse en [1].

**Teorema 4.8.3** *Supongamos que  $\xi_0$  es un punto crítico aislado de  $f$  en el cual  $f$  tiene un mínimo local. Entonces*

$$\text{ind}[\nabla f, \xi_0] = 1$$

En nuestro caso, tomando la función  $G = -H$ , se verifica que  $(0, 0)$  es un punto crítico aislado de  $G$  y  $G$  tiene un mínimo estricto en  $(0, 0)$ . Por lo tanto se verifica que  $\text{ind}[\nabla G, 0] = 1$

Veamos que  $\text{ind}[\nabla G, 0] = \text{ind}[\nabla H, 0]$

$$\text{ind}[\nabla G, 0] = \text{deg}(-\nabla H, B_\delta(0), 0) = \text{deg}(-\nabla H, B_\delta(0), q)$$

donde  $q$  es un valor regular de  $-\nabla H$  tal que  $|q| < \text{dist}(-\nabla H(\partial B_\delta(0)), 0)$

Observemos que si  $q$  es un valor regular de  $-\nabla H$  entonces  $-q$  es un valor regular de  $\nabla H$  y si  $q \notin -\nabla H(\partial B_\delta(0))$  entonces  $-q \notin \nabla H(\partial B_\delta(0))$ .

Por otra parte,

$$(-\nabla H)^{-1}(q) = (\nabla H)^{-1}(-q) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$$

y

$$D(-\nabla H)(\xi_i) = (-1)^2 \cdot D(\nabla H)(\xi_i)$$

y esto implica que

$$\text{deg}(-\nabla H, B_\delta(0), q) = (-1)^2 \cdot \text{deg}(\nabla H, B_\delta(0), -q) = \text{deg}(\nabla H, B_\delta(0), 0) = \text{ind}[\nabla H, 0]$$

Supongamos ahora que  $X(2T)$  es conjugada a  $P_+$  o  $P_-$ . Aplicamos la Proposición 4.4.3 y encontramos un cambio en la variable independiente

$$t = \lambda(s + \tau)$$

de forma que la ecuación (4.19) se transforma en

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \alpha^*(s)\theta - \frac{\alpha^*(s)}{3!}\theta^3 + \dots = 0, \quad \alpha^*(s) = \lambda^2\alpha(\lambda(s + \tau)) \quad (4.21)$$

y la matriz de monodromía  $X^*(2T^*)$  de la linearización es precisamente  $P_+$  o  $P_-$ , donde  $T^* = \frac{T}{\lambda}$ . Veamos qué relación existe entre el operador de Poincaré  $P^*$  de la nueva ecuación y el operador de Poincaré  $P$  de (4.19).

Notemos que,  $\theta\left(t, \theta_0, \frac{1}{\lambda}\omega_0\right)$  es solución de (4.19) con  $\begin{cases} \theta(\tau\lambda) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(\tau\lambda) = \frac{1}{\lambda}\omega_0 \end{cases}$ , si y sólo si  $\theta^*(s) =$

$\theta(\lambda(s + \tau))$  es solución de (4.21) con  $\begin{cases} \theta^*(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}^*(0) = \omega_0 \end{cases}$

**Observación 4.8.4** Dada una ecuación  $\dot{\theta} = f(t, \theta)$  con  $f$  una función localmente Lipschitz y  $T$ -periódica, hemos definido el operador de Poincaré como

$$P(\theta_0) = \Phi_{0,T}(\theta_0)$$

donde  $\Phi_{0,T}$  representa el flujo de 0 hasta  $T$ . Entonces, llamaremos  $P_{\lambda\tau}(\theta_0) = \Phi_{\lambda\tau, T+\lambda\tau}(\theta_0)$ .

La relación existente entre  $P$  y  $P_{\lambda\tau}$  es la siguiente:

$$P = \Phi_{0,\lambda\tau}^{-1} \circ P_{\lambda\tau} \circ \Phi_{0,\lambda\tau}$$

Sea  $L(\theta_0, \omega_0) = (\theta_0, \lambda\omega_0)$ , entonces

$$\begin{aligned} P^*(\theta_0, \omega_0) &= \left( \theta^* \left( T^*, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right), \dot{\theta}^* \left( T^*, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right) \right) = \\ &= \left( \theta \left( T + \lambda\tau, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right), \lambda \dot{\theta} \left( T + \lambda\tau, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right) \right) = \\ &= L \left( \theta \left( T + \lambda\tau, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right), \dot{\theta} \left( T + \lambda\tau, \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right) \right) = \\ &= L \circ P_{\lambda\tau} \left( \theta_0, \frac{1}{\lambda} \omega_0 \right) = L \circ P_{\lambda\tau} \circ L^{-1}(\theta_0, \omega_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$P^*(\theta_0, \omega_0) = L \circ P_{\lambda\tau} \circ L^{-1}(\theta_0, \omega_0)$$

y

$$P^* = L \circ \Phi_{0,\lambda\tau} \circ P \circ \Phi_{0,\lambda\tau}^{-1} \circ L^{-1}$$

Como el grado es invariante respecto de cambios de coordenadas  $C^1$ , los índices de  $I - P$  y  $I - P^*$  coinciden. En consecuencia la estabilidad de  $\theta = 0$  también se preserva. Aplicando nuevamente las discusiones de las Sección 4.6 concluimos que

$$\gamma_{2T}(0) = -\sigma \operatorname{sgn} \left\{ -\frac{1}{3!} \int_0^{2T^*} \underbrace{\alpha^*(s) y_1^*(s)^4}_{>0} ds \right\} = \begin{cases} 1 & \text{si } X(2T) \sim P_- \\ -1 & \text{si } X(2T) \sim P_+ \end{cases}$$

Esto nos dice que  $\theta = 0$  es inestable si  $X(2T) \sim P_+$ .

Las mismas herramientas utilizadas para calcular el segundo índice permiten calcular los restantes índices  $\gamma_{kT}(0)$  para todo  $k \geq 2$ , y es inmediato ver que se obtienen los mismos resultados, es decir que sólo habrá estabilidad para el caso elíptico y el caso parabólico con  $X(kT)$  conjugada a  $I$  o a  $P_-$ .

Para concluir este estudio de la estabilidad del equilibrio del péndulo de longitud variable, es interesante mencionar que la ecuación (4.19), que puede ser escrita como

$$\ddot{\theta} + \alpha(t)\theta - \frac{1}{3!}\alpha(t)\theta^3 + \dots = 0$$

es un caso particular de la ecuación diferencial

$$\ddot{\theta} + a(t)\theta + c(t)\theta^{2n-1} + d(t, \theta) = 0 \quad (4.22)$$

con  $n \geq 2$ ,  $a, c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas y  $T$ -periódicas,  $\int_0^T |c(t)| dt \neq 0$  y

$d : \mathbb{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\varepsilon > 0$  una función continua con derivadas continuas de todos los órdenes con respecto a  $\theta$ ,  $T$ -periódica con respecto a  $t$  y tal que  $d(t, \theta) = O(|\theta|^{2n})$ .

Esta ecuación puede verse como una versión no lineal de la ecuación de Hill clásica.

La linearización de (4.22) alrededor del origen conduce a la ecuación de Hill clásica

$$\ddot{\theta} + a(t)\theta = 0 \tag{4.23}$$

Acerca de la estabilidad de estas ecuaciones Rafael Ortega probó en [32], utilizando herramientas que exceden a este trabajo, el siguiente resultado:

**Teorema 4.8.5** *Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones:*

(i)  $\theta = 0$  es una solución estable de (4.23)

(ii)  $c \geq 0$  o  $c \leq 0$

Entonces  $\theta = 0$  es una solución estable de (4.22)

En el caso del péndulo esto sólo dejaría abierto el caso parabólico en el cual los multiplicadores de Floquet tienen multiplicidad geométrica igual a 1. Este tema fue resuelto por Ortega junto con Nuñez en [29]. Allí asocia dos números  $\sigma(A)$  y  $\nu(A)$  a cada matriz parabólica  $A$ . Estos números sólo dependen de la clase de conjugación en  $Sp(\mathbb{R}^2)$  y son tales que:

$$\begin{aligned} \sigma(P_+) = \sigma(P_-) = \sigma(I) = 1, \quad \sigma(-P_+) = \sigma(-P_-) = \sigma(-I) = -1, \\ \nu(P_+) = \nu(-P_-) = 1, \quad \nu(P_-) = \nu(-P_+) = -1, \quad \nu(I) = \nu(-I) = 0 \end{aligned}$$

El teorema que completa el estudio de la estabilidad de (4.22) en el caso en que  $c(t)$  no cambia de signo es el siguiente:

**Teorema 4.8.6** *Supongamos que la ecuación lineal (4.23) es parabólica inestable ( $\nu \neq 0$ ). Entonces  $\theta = 0$  es estable para (4.22) si*

$$\sigma\nu c(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

*y es inestable si*

$$\sigma\nu c(t) \leq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Resumiendo las discusiones previas de este trabajo y los resultados de los Teoremas 4.8.5 y 4.8.6 obtenemos:

**Teorema 4.8.7** *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i)  $\theta = 0$  es estable para (4.19)

(ii)  $\theta = 0$  es aislado (período  $2T$ ) y  $\gamma_{2T}(0) = 1$

(iii)  $\theta = 0$  es estable para la ecuación de Duffing (4.20)

(iv) la matriz de monodromía  $X(2T)$  de (4.19) es conjugada en  $Sp(\mathbb{R}^2)$  a  $R[\Theta]$  para algún  $\Theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$ , a  $I$  o a  $P_-$ .

# Bibliografía

- [1] **H.Amann**, A note on degree for gradient mappings, Proc. Amer. Soc. 85 (1982), p. 591-595
- [2] **V.I. Arnold**, Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition, Springer-Verlag, 1989
- [3] **E.A. Barbashin**, Introduction to the theory of stability, Wolters-Noorhoff, Groningen, The Netherlands. Translated by Transcripta Service, London, edited by T. Lukes, 1970
- [4] **G.D.Birkhoff**, Dynamical Systems, Providence, RI: A. M. S. Colloquium Publications, 1966
- [5] **C.Bonati y J.Villadelprat**, The index of stable critical points, Topology Appl. 126 (2002), p. 263-271
- [6] **H.Brézis**, Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial, 1984
- [7] **H. Bruns**, Ueber die Integrale der vierkörperprobleme, Acta Math, p. 25-96, 1887
- [8] **N.G.Cetaev**, Stability of motion, Gostehizdat, 1956
- [9] **E. A. Coddington**, N. Levinson. Theory of Ordinary Differential Equations
- [10] **E.N.Dancer y R.Ortega**, The index of Lyapunov stable fixed points in two dimensions, J.Dynam. Diff. Eqns. 6 (1994), p. 631-637.
- [11] **W.Hahn**, Theory and Application of Lyapunov's Direct Method. Prentice Hall, New York, 1963
- [12] **W.Hahn**, Stability of motion, Springer-Verlag, New York, 1967
- [13] **A. Loría y E. Panteley**, Stability, Told by Its Developers, C.N.R.S., Laboratoire des Signaux et Systèmes, Supélec, France
- [14] **L.Chierchia**, KAM Theory and Celestial Mechanics, Università Roma Tre, Italia, 2005
- [15] **H. W. Broer**, KAM Theory: The legacy of Kolmogorov's 1954 paper, University of Groningen, The Netherlands, 2003
- [16] **A.N.Kolmogorov**, The general Theory of dynamical systems and classical mechanics. Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Amsterdam 1954) Vol I, pages 315-333, North Holland, Amsterdam, 1957
- [17] **A.N.Kolmogorov**, Sobre la conservación de movimientos periódicos condicionales para cambios pequeños en la función Hamiltoniana [en ruso], Dokl. Akad. Nauk SSSR. 98 (1954) 525-530. Traducida al inglés en LNP 93 (1979) 51-56

- [18] **N.N. Krasovskii**, Problems of the theory of stability of motion, Stanford Univ. Press, 1963. Traducción de la edición rusa, Moscow, 1959
- [19] **N.N. Krasovskii**, Stability of motion. Application of Lyapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay. Stanford University Press, 1963
- [20] **D.L.Kreider**, Ecuaciones Diferenciales, Fondo Educativo Interamericano, Bogotá, 1973
- [21] **J. L. Lagrange**, Mécanique Analytique, Gauthier-Villars et fils, Paris, 4ème edition. Publiée par Gaston Darboux, 1888
- [22] **P.S.Laplace**, Traité de Mécanique Celeste, 1799-1825. (Reimpreso como Vol. 1-5 de Oeuvres, Gauthier- Villars, Paris, 1878-1912)
- [23] **J.P.La Salle**, Some extensions of Lyapunov's second method. IRE Trans. Circs. Th., CT-7(4): 520-527, 1960
- [24] **D.E.Leach**, On Poincare's perturbation theorem and a theorem of W. S. Loud, J.Differential Equations 7 (1970), 34-53
- [25] **N.G.Lloyd**, Degree Theory, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University press, 1978
- [26] **A.C.Lazer y P.J.McKenna**, On the existence of stable periodic solutions of differential equations of duffing type, Proceedings of the Mathematical Society, Vol 110, Number 1, 1990
- [27] **J.Milnor**, Topology from the differentiable viewpoint. Revised reprint of the 1965 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, 1997
- [28] **W.Magnus y S.Winkler**, Hill's equation, Dover, 1979
- [29] **D.Nuñez y R.Ortega**, Parabolic fixed points and stability criteria for nonlinear Hill's equation, Z.Angew. Math.Phys. 51 (2000) , pages 890-911
- [30] **R. Ortega**, The stability of the equilibrium: a search for the right approximation, "Ten Mathematical Essays on Approximation in Analysis and Topology" (J. Ferrera, J. López-Gómez and F.R. Ruiz del Portal, Eds.), 215-234, Elsevier, 2005
- [31] **R.Ortega**, Some applications of the topological degree to stability theory, in Topological Methods in Differential Equations and Inclusions (Granás, A. and Frigon, M. Eds.), pages 377-409, Kluwer Academic, 1995
- [32] **R.Ortega**, The stability of the equilibrium of a nonlinear Hill's equation, SIAM J. Math.Anal. Vol 25, N°5 (1994), pages 1393-1401.
- [33] **H.Poincaré**, Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste vol. 1, Chap. 5, Paris, 1892
- [34] **H.Poincaré**, Oeuvres, Tomo I, Equations différentielles, pág. 3-44, 44-84, 90-161 y 167-222, Editions Jacques Gabay, 1928
- [35] **K. Schmitt**, Non linear Analysis and Differential Equations, An Introduction. Department of Mathematics, University of Utah, 2004
- [36] **J. Sotomayor**, Lições de Equações Diferenciais Ordinarias, Coleção Projeto Euclides, CNPq, 1979

- [37] **K.E.Sundman**, Memoire sur le probleme de trois corps, Acta Math. 36 : 105–179, 1912
- [38] **A. Tineo** y J. Rivero, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Dpto de Matemática Universidad de los Andes, Mérida-Venezuela
- [39] **Q. Wang**, The global solution of the n-body problem (Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy)(ISSN 0923-2958), vol. 50, no. 1, 1991, p. 73–88., URI retrieved on 2007-05-05)