



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Cálculo de la homología de Hochschild de una familia de álgebras

Quimey Vivas

Director: Andrea Solotar

20/03/2009

Índice general

1. Definiciones y ejemplos	7
1.1. Primeras definiciones - Módulos y bimódulos	8
1.2. Homología de Hochschild	10
1.3. Cohomología de Hochschild	12
1.4. Funtores derivados - Tor y Ext	12
1.5. Resolución Bar	13
1.6. Cálculos en grados bajos	14
1.7. Algunos ejemplos	14
1.7.1. $A = k$	14
1.7.2. $A = k[x]$	14
1.7.3. $A = k[x]/(x^2)$	15
1.8. Derivaciones y formas diferenciales	15
1.9. Propiedades	18
1.10. Álgebras cuánticas de intersección completa	19
1.11. Conjeturas	20
2. Cálculo de homología y cohomología de un álgebra cuántica de intersección completa	23
2.1. Introducción	23
2.2. Preliminares	24
2.2.1. Algo de notación	24
2.2.2. Cálculos Auxiliares	24
2.3. Resolución	27
2.3.1. Construcción de un complejo doble	27
2.3.2. Exactitud	31
2.4. Homología	35
2.4.1. El caso $M = A$	36
2.5. Cohomología	41
2.5.1. El caso $M = A$	42
3. Una generalización	47
3.1. Introducción	47
3.2. Productos tensoriales torcidos	47

3.3. Resolución de A como A -bimódulo	48
3.3.1. El caso $n = 1$	49
3.3.2. El caso general	49

Agradecimientos

A mi familia por haberme aguantado todo el tiempo, el de estudio y el de preparación de esta tesis, siempre me apoyaron en lo que intenté.

A Xime por ser el amor de mi vida, acompañarme siempre y ayudarme en todo.

A Andrea Solotar por haberme mostrado el álgebra de una forma atrapante y porque sin ella no hubiera terminado esto.

A Mariano Suarez Alvarez por responder miles de preguntas, de matemática y de latex, siempre con la mejor onda.

A Gabriel Minian por la pasión con la que me transmitió parte de sus conocimientos.

A Pablo Amster por ser tan buena persona y por estar siempre dispuesto a ayudar.

A todos mis amigos de la facultad por haberme soportado en las infinitas horas que pasamos juntos.

A todos mis amigos de afuera de la facultad por acompañarme siempre.

A la UBA por brindarme la beca estímulo.

Introducción

Las propiedades homológicas de un álgebra de dimensión finita están fuertemente relacionadas con el comportamiento del álgebra mirada como bimódulo sobre si misma. Por ejemplo, si el álgebra tiene dimensión proyectiva finita como bimódulo, entonces su dimensión global también es finita. La afirmación recíproca se verifica si el cociente del álgebra por su radical de Jacobson es separable sobre el cuerpo de base, lo cual sucede automáticamente cuando el cuerpo de base es algebraicamente cerrado.

En particular, si un álgebra de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado tiene dimensión global finita, sus grupos de cohomología de Hochschild se anulan a partir de un cierto grado.

En 1989 D. Happel [Hap] conjeturó que, dada un álgebra A de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k , $\text{gldim } A < \infty$ sí y sólo si $\text{hchdim } A < \infty$, donde gldim es la dimensión global y hchdim es la dimensión cohomológica de Hochschild.

En [AI] los autores demuestran que la respuesta es afirmativa cuando el álgebra es conmutativa.

Sin embargo, en 2004, Buchweitz-Green-Madsen-Solberg [BGMS] dieron un contraejemplo para esta conjetura. Se trata del álgebra $A_q = k\langle X, Y \rangle / (X^2, XY - qYX, Y^2)$, donde $q \in k^*$ y no es una raíz de la unidad. Es sabido que $\text{gldim } A_q = \infty$ pero $\text{hchdim } A_q = 2$. Además, A_q es de Koszul, autoinyectiva - y por lo tanto de dimensión global infinita- y de dimensión 4 sobre el cuerpo k , y su cohomología de Hochschild es de dimensión 5. Constituye el ejemplo más chico de intersección completa no conmutativa cuántica [Ma].

Es un álgebra patológica en varios aspectos, pero su homología de Hochschild no lo es, ya que $\text{hhdim } A_q = \infty = \text{gldim } A_q$, donde hhdim es la dimensión homológica de Hochschild [Han]. Esto sugiere, según conjeturó Han en ese mismo artículo, que una versión razonable de la conjetura de Hochschild se obtendría reemplazando hchdim por hhdim . En [BE] se estudia una familia de álgebras que son intersecciones completas no conmutativas cuánticas, que tienen las mismas propiedades homológicas que las álgebras de [BGMS].

Un argumento que refuerza la plausibilidad de esta conjetura es que se verifica para el caso en que A es una k -álgebra conmutativa esencialmente de tipo finito [BACH], [AV], [V] -se trató en esos trabajos de la demostración de una conjetura enunciada por A. Rodicio en [Ro]. También se verifica para el caso en que A es un álgebra monomial de dimensión finita [Han], [Sk].

En el caso conmutativo, la afirmación que dice que si A es de dimensión global finita

entonces su homología de Hochschild se anula a partir de cierto grado es una consecuencia inmediata del Teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg [HKR].

Recientemente, Bergh y Madsen [BM] probaron que la conjetura homológica es verdadera para ciertos tipos de álgebras: álgebras graduadas locales, álgebras de Koszul y álgebras graduadas celulares -todas ellas de dimensión finita como k -espacios vectoriales-, cuando la característica del cuerpo de base k es cero. La demostración usa ciertas propiedades particulares de la matriz de Cartan graduada y del logaritmo de su determinante, conceptos estudiados en detalle en [Igu].

El objetivo principal de esta tesis es presentar un método de cálculo de la homología y la cohomología de Hochschild particularmente adecuado a las álgebras no conmutativas cuánticas que son intersección completa, con el objetivo a más largo plazo de demostrar la conjetura de Han para una familia más amplia de álgebras.

El esquema de la tesis es el siguiente:

En el Capítulo 1, introducimos las definiciones y los primeros ejemplos que van a estar involucrados en los siguientes capítulos.

En el Capítulo 2 nos dedicamos a estudiar un caso particular de un álgebra cuántica de intersección completa con la idea de desarrollar métodos que nos sirvan para poder calcular la homología y cohomología de Hochschild de una familia más general de álgebras.

En el Capítulo 3 damos los primeros pasos en dicha generalización, utilizando para eso el concepto de productos tensoriales torcidos que podemos encontrar en [BO].

Capítulo 1

Definiciones y ejemplos

En este capítulo vamos a introducir las nociones y ejemplos fundamentales sobre los cuales se basan los siguientes, es por eso que la mayoría de los resultados los vamos a exponer sin demostración. Como referencia general del capítulo citamos los libros de Loday ([Lo]) y Weibel ([W]).

En la Sección 1 damos las definiciones básicas sobre anillos y módulos que vamos a usar más adelante, más que nada para unificar notación.

Las Secciones 2 y 3 se dedican a definir homología y cohomología de Hochschild como la homología de ciertos complejos asociados a un álgebra y a un bimódulo.

Después de un rápido repaso de funtores derivados en la Sección 4, introducimos nuevas definiciones para la homología y la cohomología de Hochschild, esta vez presentándolas como un caso particular de funtores derivados.

En la Sección 5 se describe la resolución bar, una resolución estándar para k -álgebras como módulos sobre sí mismas.

En la Sección 6, usando esta la definición de la homología de Hochschild en términos de funtores derivados, calculamos algunos ejemplos básicos.

El estudio prosigue con la definición de derivación y de forma diferencial. Se muestran algunos ejemplos y se termina con el Teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg (ver [HKR]) que expone la relación entre las formas diferenciales y la homología de Hochschild para una cierta clase de álgebras conmutativas.

En la Sección 9 mostramos algunas de las propiedades principales de la homología y cohomología de Hochschild, destacándose la invariancia por equivalencias Morita.

En la siguiente Sección definimos la clase de álgebras sobre las cuales vamos a trabajar.

Por último, en la Sección 11 exponemos dos conjeturas que nos motivaron a estudiar este tipo de álgebras.

1.1. Primeras definiciones - Módulos y bimódulos

Desde ahora vamos a fijar un cuerpo k y notar al producto tensorial de dos espacios vectoriales V y W como $V \otimes W$ sin hacer mención explícita de k .

Una k -álgebra A es un k -espacio vectorial, que además es un anillo con unidad, de modo tal que las dos estructuras son compatibles, es decir:

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B, \forall \lambda \in k.$$

Si A y B son k -álgebras una transformación lineal $f : A \rightarrow B$ es un **morfismo de álgebras** si además de transformación lineal es un morfismo de anillos. Notamos $\text{Hom}_{k\text{-alg}}(A, B)$ al conjunto de morfismos de k -álgebras de A en B .

Dada una k -álgebra A , el **álgebra opuesta** A^{op} coincide con A como espacio vectorial. La estructura de anillo se define como $a \cdot_{op} b := ba$. Es claro que con esta estructura de anillo, A^{op} resulta una k -álgebra.

Un A -**módulo** (a izquierda) es un k -espacio vectorial M provisto de un morfismo de k -álgebras $\rho : A \rightarrow \text{End}(M)$ que notamos $a \cdot m := \rho(a)(m)$ para $a \in A$ y $m \in M$. Con esta notación se verifica que:

- $1_A \cdot m = m$
- $a(b \cdot m) = (ab) \cdot m$
- $a \cdot (m + m') = a \cdot m + a \cdot m'$
- $(a + b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$
- $\lambda(a \cdot m) = (\lambda a) \cdot m$

para todo $a, b \in A, m \in M$ y $\lambda \in k$.

Un **morfismo de A -módulos** entre dos A -módulos a izquierda M y N es una transformación lineal $f : M \rightarrow N$ que verifica $f(a \cdot m) = a \cdot f(m) \quad \forall a \in A, m \in M$. Notamos $\text{Hom}_A(M, N)$ al conjunto de morfismos de A -módulos entre M y N . Este conjunto tiene naturalmente una estructura de k -espacio vectorial pues sumas de morfismos y productos de morfismos por escalares resultan morfismos.

Los módulos a derecha y morfismos de módulos a derecha se definen de manera análoga. La acción de A es un morfismo de anillos $\rho : A \rightarrow \text{End}(M)^{op}$ y notamos $m \cdot a := \rho(a)(m)$.

Si A y B son k -álgebras decimos que M es un $A - B$ -**bimódulo** si M es un A -módulo a izquierda, un B -módulo a derecha y las dos estructuras son compatibles en el siguiente sentido:

$$(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b) \quad \forall a \in A, b \in B, m \in M.$$

Si M y N son dos $A - B$ -bimódulos decimos que $f : M \rightarrow N$ es un **morfismo de bimódulos** si es morfismo de A -módulos a izquierda y de B -módulos a derecha. Vamos

a notar $\text{Hom}_{A-B}(M, N)$ al conjunto de morfismos de bimódulos, que otra vez tiene una estructura natural de k -espacio vectorial.

Dadas dos k -álgebras A y B podemos darle a $A \otimes B$ una estructura de k -álgebra con el producto lugar a lugar, es decir, $a \otimes b \cdot a' \otimes b' := aa' \otimes bb'$.

Si A es una k -álgebra el **álgebra envolvente** de A es $A^e := A \otimes A^{op}$. Es inmediato a partir de las definiciones, que si tenemos un A -bimódulo M hay dos estructuras naturales de A^e -módulo que M hereda.

1. Estructura a izquierda: $(a \otimes b) \cdot m = amb$.
2. Estructura a derecha: $m \cdot (a \otimes b) = bma$.

Vamos a presentar dos clases de módulos que serán la piezas principales en el desarrollo que sigue:

Definición 1.1.1. Un A -módulo P se dice **proyectivo** si para todo epimorfismo $f : M \rightarrow N$ y todo morfismo $g : P \rightarrow N$ existe un (no necesariamente único) morfismo $h : P \rightarrow M$ tal que $g = f \circ h$.

Notemos que un A -módulo P es proyectivo si y solo si existe un A módulo libre F tal que P es un sumando directo de F .

Definición 1.1.2. Un A -módulo I se dice **inyectivo** si para todo monomorfismo $f : M \rightarrow N$ y todo morfismo $g : M \rightarrow I$ existe un (no necesariamente único) morfismo $h : N \rightarrow I$ tal que $g = h \circ f$.

Muchas veces sucede que aunque dos álgebras no sean isomorfas sus categorías de módulos son equivalentes; para precisar lo que estamos diciendo introducimos la noción de equivalencia Morita.

Definición 1.1.3. Dos k -álgebras A y B se dicen **equivalentes Morita** si existen un $(A - B)$ -bimódulo P , un $(B - A)$ -bimódulo Q e isomorfismos $u : P \otimes_B Q \cong A$ (de A -bimódulos) y $v : Q \otimes_A P \cong B$ (de B -bimódulos).

Observación 1.1.4. P y Q inducen las siguientes equivalencias de categorías:

- $Q \otimes_A (-) : A - \text{Mod} \rightarrow B - \text{Mod}$ con inversa $P \otimes_B (-)$
- $(-) \otimes_A P : \text{Mod} - A \rightarrow \text{Mod} - B$ con inversa $(-) \otimes_B Q$
- $Q \otimes_A (-) \otimes_A P : A - \text{biMod} \rightarrow B - \text{biMod}$ con inversa $P \otimes_B (-) \otimes_B Q$

En particular P es proyectivo finitamente generado y generador como A -módulo a izquierda y como B -módulo a derecha y lo mismo sucede con Q .

A continuación recordaremos la noción de localización. Localizar un anillo en el complemento de un ideal primo se corresponde con mirar un entorno de ese ideal primo en el espectro.

Definición 1.1.5. Sea R un anillo con unidad. Un subconjunto $S \subseteq R$ se dice **multiplicativamente cerrado** si:

1. $1 \in S$.
2. Si $a, b \in S$ entonces $ab \in S$.

Como habíamos dicho antes:

Ejemplo 1.1.6. Si R es un anillo conmutativo y P es un ideal primo de R entonces $S = R - P$ es multiplicativamente cerrado.

Definición 1.1.7. Sea R un anillo conmutativo con unidad y $S \subseteq R$ multiplicativamente cerrado, decimos que $(R_S, i : R \rightarrow R_S)$ es la **localización** de R en S si R_S es un anillo, i es un morfismo de anillos y para todo anillo T y todo morfismo de anillos $f : R \rightarrow T$ tal que $f(S) \subseteq \mathcal{U}(T)$ existe un único morfismo de anillos $g : R_S \rightarrow T$ con $f = g \circ i$.

Notemos que la localización es única a menos de isomorfismo.

La construcción explícita de una localización y algunas propiedades se pueden consultar en el libro de Lang ([L]).

1.2. Homología de Hochschild

En esta sección queremos asociarle a cada k -álgebra A y a cada A -bimódulo M una familia de grupos abelianos $(HH_n(A, M))_{n \in \mathbb{N}}$, los grupos de homología de Hochschild de A con coeficientes en M . En el contexto en el que estamos trabajando, el de k -álgebras y módulos sobre k -álgebras, los grupos de (co)homología de Hochschild heredan una estructura de k -espacio vectorial.

Estos grupos van a ser los grupos de homología de un cierto complejo asociado a A y a M . Vamos a empezar definiendo los módulos involucrados.

Definición 1.2.1. Dados M un A -bimódulo y $n \in \mathbb{N}_0$, sea $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$.

Observación 1.2.2. $C_n(A, M)$ es un A -bimódulo.

Ahora necesitamos definir el morfismo de borde, para eso introduciremos morfismos auxiliares:

Definición 1.2.3. Definimos, también, morfismos k -lineales $d_i : C_n(A, M) \rightarrow C_{n-1}(A, M)$, $\forall i$, $0 \leq i \leq n$ via:

$$d_i(m, a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} (ma_1, a_2, \dots, a_n) & \text{si } i = 0 \\ (m, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ (a_n m, \dots, a_{n-1}) & \text{si } i = n. \end{cases}$$

Observación 1.2.4. Si $0 \leq i < j \leq n$ entonces $d_i d_j = d_{j-1} d_i$.

Definición 1.2.5. Dado $n \geq 1$, el morfismo de borde de Hochschild es $b : C_n(A, M) \rightarrow C_{n-1}(A, M)$ definido por $b = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$.

Observación 1.2.6. b tiene la siguiente fórmula explícita:

$$b(m, a_1, \dots, a_n) = (ma_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (m, a_1, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^n (a_n m, \dots, a_{n-1}).$$

Lema 1.2.7. Se verifica que $b \circ b = 0$.

Dem:

$$\begin{aligned} b \circ b &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{i+j} d_i d_j = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} d_i d_j + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} d_i d_j \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=i+1}^{n+1} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} d_i d_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{j=0}^{j-1} (-1)^{i+j} d_{j-1} d_i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i (-1)^{i+j} d_i d_j = 0. \end{aligned}$$

□

Ya verificamos que $(C_*(A, M), b)$ es un complejo, ahora podemos definir:

Definición 1.2.8. El n -ésimo grupo de homología de Hochschild de A con coeficientes en M es:

$$HH_n(A, M) := H_n(C_*(A, M), b).$$

La homología de Hochschild es funtorial en A y en M , más precisamente:

Observación 1.2.9. Dados dos A -bimódulos M y N y un morfismo de bimódulos $f : M \rightarrow N$ obtenemos un morfismo de complejos $f_* : (C_*(A, M), b) \rightarrow (C_*(A, N), b)$ donde $f_n : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow N \otimes A^{\otimes n}$ está definido como $f_n = f \otimes (Id_A)^{\otimes n}$. Luego f induce un morfismo k -lineal $f_* : HH_*(A, M) \rightarrow HH_*(A, N)$.

Observación 1.2.10. Además, si $\phi : A \rightarrow B$ es un morfismo de k -álgebras y M es un B -bimódulo, M adquiere una estructura de A -bimódulo vía $a \cdot m \cdot a' = \phi(a)m\phi(a')$. Usando esta estructura ϕ induce un morfismo de complejos $\phi_* : (C_*(A, M), b_A) \rightarrow (C_*(B, M), b_B)$ donde $\phi_n : M \otimes A^{\otimes n} \rightarrow M \otimes B^{\otimes n}$ está definido por $\phi_n = Id_M \otimes \phi^{\otimes n}$. Luego ϕ induce un morfismo $\phi_* : HH_*(A, M) \rightarrow HH_*(B, M)$.

1.3. Cohomología de Hochschild

Queremos definir la cohomología de Hochschild de una k -álgebra A con coeficientes en un A -bimódulo M . Vamos a seguir para eso el mismo camino que con la homología, definiendo la cohomología de Hochschild de A a partir de la homología de un complejo (cohomológico) de k -espacios vectoriales.

Definición 1.3.1. Dado $n \in \mathbb{N}_0$, sean $C^n(A, M) = \text{Hom}_k(A^{\otimes n}, M)$ y $d^n : C^n(A, M) \rightarrow C^{n+1}(A, M)$ definido por

$$(d^n(f))(a_0, \dots, a_n) = a_0 f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i-1} f(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) + (-1)^{n+1} f(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n$$

Observación 1.3.2. $(C^*(A, M), d^*)$ es un complejo.

Definición 1.3.3. El n -ésimo grupo de cohomología de una k -álgebra A con coeficientes en un A -bimódulo M es $HH^n(A, M) := H^n((C^*(A, M), d^*))$.

1.4. Funtores derivados - Tor y Ext

En esta sección vamos a presentar algunos hechos sobre funtores derivados. Si bien los resultados se verifican con mayor generalidad, aquí expondremos por simplicidad el caso que nos interesa, en el que las categorías que aparecen son siempre categorías de módulos sobre un anillo.

Definición 1.4.1. Sean R y S anillos con unidad y $F : R\text{-Mod} \rightarrow S\text{-Mod}$ un funtor aditivo. Decimos que F es **exacto a derecha** (resp. **a izquierda**) si para cada sucesión exacta corta $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow L \rightarrow 0$ de R -módulos, la sucesión inducida por F , $0 \rightarrow F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow F(L)$ (resp. $F(M) \rightarrow F(N) \rightarrow F(L) \rightarrow 0$) resulta exacta en $S\text{-Mod}$.

Además F se dice **exacto** si es exacto a derecha y a izquierda.

Definición 1.4.2. Si F es un funtor exacto a izquierda (resp. a derecha) el n -ésimo funtor derivado a derecha (resp. a izquierda) de F , notado $R^n F$ (resp. $L_n F$), es $R^n F(M) = H^n(F(P_*))$ (resp. $L_n F(M) = H_n(F(P_*))$), donde P_* es cualquier resolución inyectiva (resp. proyectiva) de M .

En los morfismos se define levantando el morfismo de M a N a la resolución inyectiva (resp. proyectiva) y después aplicando F y tomando cohomología (resp. homología).

Hay dos casos particulares que son de más interés para nosotros.

Dado M un R -módulo a izquierda podemos definir el funtor $\text{Hom}_R(M, -)$ como:

$$\text{Hom}_R(M, -)(N) = \text{Hom}_R(M, N) \text{ y } \text{Hom}_R(M, -)(f) = f_*$$

Como este funtor es exacto a izquierda, podemos entonces tomar los funtores derivados a derecha.

Definición 1.4.3. *Dados un R -módulo a izquierda M y $n \in \mathbb{N}_0$, sea:*

$$\text{Ext}_R^n(M, -) := R^n(\text{Hom}(M, -)).$$

Si M es un R -módulo a derecha podemos definir el funtor $M \otimes_R (-)$ como $M \otimes_R (-)(N) = M \otimes_R N$. Este funtor es exacto a derecha, luego podemos calcular los funtores derivados a izquierda.

Definición 1.4.4. *Dados M un R -módulo a derecha y $n \in \mathbb{N}_0$, sea*

$$\text{Tor}_n^R(M, -) := L_n(M \otimes (-)).$$

Para más detalles sobre estas definiciones se pueden ver [W] y [M].

1.5. Resolución Bar

Las definiciones anteriores de homología y cohomología de Hochschild son válidas en un contexto más general que en el que estamos trabajando, cuando k es un anillo conmutativo con unidad. Pero en el caso que nos concierne, si k es un cuerpo, podemos decir más. Vamos a definir una resolución estándar de A como A -bimódulo.

Definición 1.5.1. *La **resolución bar** de A es $(C_*^{\text{bar}}(A), b')$ donde $C_n^{\text{bar}}(A) = A^{\otimes n+1}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, $b' : C_n^{\text{bar}} \rightarrow C_{n-1}^{\text{bar}}$ está definido por $b' = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i d_i$.*

Observación 1.5.2. $b'(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} (a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n)$.

La aumentación de la resolución bar está dada por $\mu : A \otimes A \rightarrow A$, $\mu(a \otimes b) = ab$.

Proposición 1.5.3. *Vale que $b' \circ b' = 0$.*

Dem: La demostración es similar a la del Lema 1.2.7. □

Teorema 1.5.4. *La resolución bar junto con la aumentación dada por μ forman una resolución proyectiva de A como A^e -módulo a izquierda.*

Dem: Ya vimos que $(C_*^{\text{bar}}(A), b')$ es un complejo y es claro que $\mu \circ b' = 0$. Es inmediato que para todo $n \in \mathbb{N}_0$, $C_n^{\text{bar}}(A) = A^{\otimes(n+1)}$ es un A^e -módulo libre. Lo único que debemos ver es que este complejo es exacto.

Para esto vamos a construir una homotopía de morfismos de complejos entre el morfismo nulo y la identidad. Es decir, funciones $s_n : C_{n-1}^{\text{bar}}(A) \rightarrow C_n^{\text{bar}}(A)$ que verifiquen $b's + sb' = Id$. Es fácil comprobar que la familia $(s_n(a_0, \dots, a_{n-1}) = (1, a_0, \dots, a_{n-1}))_n$ sirve. □

Observación 1.5.5. *En la demostración anterior utilizamos que k es un cuerpo para justificar que $A^{\otimes(n+1)}$ es un A^e -módulo libre.*

Una vez obtenida esta resolución estándar de A podemos ver a la homología y cohomología de Hochschild de A como funtores derivados, más precisamente:

Proposición 1.5.6. Sean A una k -álgebra (con k un cuerpo), M un A -bimódulo y $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces:

- $HH_n(A, M) = \text{Tor}_n^{A^e}(A, M)$,
- $HH^n(A, M) = \text{Ext}_{A^e}^n(A, M)$.

Dem:

Es inmediato que si tensorizamos la resolución bar de A con M sobre A^e (resp. aplicamos el functor $\text{Hom}_{A^e}(-, M)$), obtenemos un complejo isomorfo al complejo que usamos para la definición de la homología de Hochschild (resp. cohomología de Hochschild). \square

1.6. Cálculos en grados bajos

Mirando directamente la definición de la homología (resp. cohomología) de Hochschild, podemos deducir la siguiente proposición:

Proposición 1.6.1. Sean A una k -álgebra y M un A -bimódulo, entonces:

- $HH_0(A, M) = M/[A, M] = M/\{am - ma : a \in A \wedge m \in M\}$,
- $HH^0(A, M) = M^A = \{m \in M : am = ma : \forall a \in A\}$.

Estos son respectivamente los módulos de coinvariantes y de invariantes de M por la acción de A .

Corolario 1.6.2. Si M es un A -bimódulo simétrico entonces $HH_0(A, M) = HH^0(A, M) = M$. En particular si A es una k -álgebra conmutativa, entonces $HH_0(A) = HH^0(A) = A$.

1.7. Algunos ejemplos

1.7.1. $A = k$.

Como k es un $k^e = k$ -módulo libre, k es una resolución libre de k como k^e -módulo, y entonces trivialmente:

$$HH_n(k) = HH^n(k) = \begin{cases} k & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

1.7.2. $A = k[x]$.

Tenemos una resolución de $k[x]$ como $k[x]^e$ -módulo dada por:

$$0 \longrightarrow k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{d} k[x] \otimes k[x] \xrightarrow{\mu} k[x] \longrightarrow 0$$

donde $d(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1$.

Para calcular la homología de Hochschild debemos aplicar el funtor $k[x] \otimes_{k[x]^e} (-)$ y despues tomar homología. Cuando aplicamos el funtor e identificamos $k[x] \otimes_{k[x]^e} k[x] \otimes k[x] \cong k[x]$ obtenemos $k[x] \xrightarrow{\tilde{d}} k[x]$ con la flecha dada por $\tilde{d}(p) = px - xp = 0$. Entonces:

$$HH_n(k[x]) = \begin{cases} k[x] & \text{si } n = 0 \text{ o } 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Para la cohomología debemos aplicar el funtor $\text{Hom}_{k[x]^e}(-, k[x])$. Pero hay un isomorfismo de k -espacios vectoriales $\text{Hom}_{k[x]^e}(k[x] \otimes k[x], k[x]) \cong k[x]$.

Con esta identificación obtenemos $k[x] \xrightarrow{\hat{d}} k[x]$ y el morfismo es $\hat{d}(p) = px - xp = 0$, luego la cohomología está dada por:

$$HH^n(k[x]) = \begin{cases} k[x] & \text{si } n = 0 \text{ o } 1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

1.7.3. $A = k[x]/(x^2)$.

Consideremos la siguiente resolución de $A = \frac{k[x]}{(x^2)}$ como A -bimódulo:

$$\dots \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{d^-} A \otimes A \xrightarrow{d^+} A \otimes A \xrightarrow{d^-} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0$$

donde $d^+(1 \otimes 1) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ y $d^-(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1$. De forma análoga al ejemplo anterior, al aplicar los funtores necesarios para el cálculo de la homología y de la cohomología de Hochschild de A , d^- se anula y d^+ se convierte en la multiplicación por $2x$.

Como A tiene dimensión 2 sobre k y el núcleo y la imágen de la multiplicación por $2x$ tienen dimensión 1, se deduce lo siguiente:

$$HH_n(A) = HH^n(A) = \begin{cases} A & \text{en el lugar } 0, \\ k & \text{en todos los otros lugares.} \end{cases}$$

1.8. Derivaciones y formas diferenciales

En esta sección vamos a estudiar la relación entre la (co)homología de Hochschild y las derivaciones.

Definición 1.8.1. Sean A una k -álgebra y M un A -bimódulo. Una k -derivación de A con valores en M es una transformación k -lineal $D : A \rightarrow M$ que verifica la regla de Leibniz:

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b, \quad \forall a, b \in A.$$

Notamos al espacio vectorial de las derivaciones como $\text{Der}(A, M)$. Si $M = A$ notamos $\text{Der}(A)$.

Ejemplo 1.8.2. Si $u \in A$ sea $ad(u) \in \text{End}_k(A)$ definida por $ad(u)(a) = ua - au$. Es fácil ver que $\forall u \in A$, $ad(u)$ es una derivación. Este tipo de derivaciones se llaman **derivaciones interiores**.

Ejemplo 1.8.3. Mas ejemplos de derivaciones.

Si $A = k[x_1, \dots, x_n]$, tenemos una familia de derivaciones $(\partial_i)_{i=1}^n \subseteq \text{Der}(A)$, donde ∂_i es la derivada (formal) con respecto de x_i .

Si V es una variedad diferenciable compacta y $A = C^\infty(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } C^\infty\}$ un campo suave en V es lo mismo que una derivación en A .

Definición 1.8.4. Una derivación $d : A \rightarrow M$ se dice **universal** si para todo A -bimódulo N y para toda derivación $\delta : A \rightarrow N$, existe un único morfismo A -lineal $\phi : M \rightarrow N$ tal que $\delta = \phi \circ d$.

Proposición 1.8.5. Sea A una k -álgebra conmutativa con unidad. Entonces existe una derivación universal.

Dem: Consideremos $I = \text{Ker}(\mu) \subseteq A \otimes A$ (recordamos que $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ es la multiplicación). Entonces I es un A -bimódulo que está generado por $\{1 \otimes x - x \otimes 1 : x \in A\}$. Además I/I^2 es un A -bimódulo simétrico pues:

$$a(1 \otimes x - x \otimes 1) - (1 \otimes x - x \otimes 1)a = (a \otimes 1 - 1 \otimes a)(1 \otimes x - x \otimes 1) \in I^2.$$

Definamos $d : A \rightarrow I/I^2$ via $d(x) = \overline{1 \otimes x - x \otimes 1}$. Este morfismo es claramente k -lineal y es fácil ver que es una derivación.

Para ver que cumple con lo que queremos sea $\delta : A \rightarrow N$ una derivación, definamos $\phi : I/I^2 \rightarrow N$ por $\phi(\overline{1 \otimes x - x \otimes 1}) = \delta(x)$. Entonces ϕ está bien definido y verifica $\delta = \phi \circ d$. \square

Definición 1.8.6. Dada una k -álgebra conmutativa con unidad A , el módulo de **diferenciales de Kähler** de A es $\Omega_{A|k}^1 = I/I^2$. Más en general, el módulo de **n -formas diferenciales** de A es $\Omega_{A|k}^n = \bigwedge_A^n \Omega_{A|k}^1$.

De la definición de derivación universal se deduce inmediatamente la siguiente proposición:

Proposición 1.8.7. En las condiciones anteriores, el morfismo canónico $\text{Hom}_A(\Omega_{A|k}^1, M) \rightarrow \text{Der}(A, M)$, $f \mapsto f \circ d$ es un isomorfismo.

Dem: Ver [Lo], Sección 1.3. \square

Cuando sucede esto decimos que el funtor $\text{Der}(A, -)$ es representable y está representado por $\Omega_{A|k}^1$.

Si A es conmutativa hay también una relación entre las 1-formas diferenciales (el módulo de diferenciales de Kähler) de A y su homología de Hochschild.

Como estamos suponiendo A conmutativa el morfismo de borde $b : A \otimes A \rightarrow A$ es nulo y entonces $HH_1(A) = A \otimes A / \text{Im}(b)$. De la definición de b se desprende que $\text{Im}(b) = \{ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b : a, b, c \in A\}$.

Podemos definir dos morfismos $\phi : HH_1(A) \rightarrow \Omega_{A|k}^1$ y $\psi : \Omega_{A|k}^1 \rightarrow HH_1(A)$ como $\phi(a \otimes b) = a \otimes b - ab \otimes 1$ y $\psi(1 \otimes x - x \otimes 1) = 1 \otimes x$.

Es fácil ver que, en las condiciones en las que estamos, ambos morfismos están bien definidos y son mutuamente inversos, de lo que resulta:

Proposición 1.8.8. *Los morfismos que definimos anteriormente dan un isomorfismo:*

$$HH_1(A) \cong \Omega_{A|k}^1.$$

Más aún, si M es un A -bimódulo simétrico, entonces $HH_1(A, M) \cong M \otimes_A \Omega_{A|k}^1$.

Dem: Para ver mas detalles sobre la demostración se puede consultar [Lo], sección 1.1. \square

Ahora vamos a dedicarnos a estudiar la acción (a izquierda) del grupo simétrico S_n en $A^{\otimes n}$ y en $C_n(A, M)$. Si $\sigma \in S_n$ y $(m, a_1, \dots, a_n) \in C_n(A, M)$, sea $\sigma \cdot (m, a_1, \dots, a_n) = (m, a_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(n)})$.

Extendiendo por linealidad podemos definir una acción de $k[S_n]$ en $C_n(A, M)$.

Definición 1.8.9. *El elemento de antisimetrización es:*

$$\epsilon_n := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sg}(\sigma) \sigma \in k[S_n].$$

Abusando de la notación también llamaremos ϵ_n a la acción del elemento de antisimetrización en $C_n(A, M)$.

Definición 1.8.10. *El morfismo de antisimetrización es $\epsilon_n : M \otimes \bigwedge^n A \rightarrow C_n(A, M)$ definido por:*

$$\epsilon_n(m \otimes (a_1 \wedge \dots \wedge a_n)) = \epsilon_n(m, a_1, \dots, a_n).$$

Definición 1.8.11. *El morfismo de Chevalley-Eilenberg $\delta_n : M \otimes \bigwedge^n A \rightarrow M \otimes \bigwedge^{n-1} A$ está definido por:*

$$\begin{aligned} \delta_n(m \otimes (a_1 \wedge \dots \wedge a_n)) = & \sum_{i=1}^n (-1)^i [m, a_i] \otimes (a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_i \wedge \dots \wedge a_n) + \\ & \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} m \otimes ([a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \dots \wedge \hat{a}_i \wedge \dots \wedge \hat{a}_j \wedge \dots \wedge a_n). \end{aligned}$$

Ya tenemos todas las definiciones necesarias para entender la relación entre el morfismo de antisimetrización y la homología de Hochschild.

Proposición 1.8.12. *Dados un A -bimódulo M y $n \in \mathbb{N}$, hay un diagrama conmutativo:*

$$\begin{array}{ccc} M \otimes \bigwedge^n A & \xrightarrow{\epsilon_n} & C_n(A, M) \\ \downarrow \delta & & \downarrow b \\ M \otimes \bigwedge^{n-1} A & \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} & C_{n-1}(A, M) \end{array}$$

En particular si A es conmutativa y M es simétrico entonces $b \circ \epsilon_n = 0$.

Dem: Ver [Lo], Sección 1.3. □

Proposición 1.8.13. *Si A es conmutativa el morfismo de antisimetrización induce un morfismo natural:*

$$\epsilon_n : M \otimes_A \Omega_{A|k}^n \rightarrow HH_n(A, M)$$

En particular si $M = A$ tenemos $\epsilon_n : \Omega_{A|k}^n \rightarrow HH_n(A)$.

Dem: Ver [Lo], Sección 1.3. □

En algunos casos el morfismo de antisimetrización resulta un isomorfismo y este hecho es muy importante porque nos permite saber a priori que la homología de Hochschild de A se va a anular para n suficientemente grande, porque eso le sucede al producto exterior.

Para poder expresar el teorema principal sobre la relación entre formas diferenciales y homología de Hochschild necesitamos saber que significa que una k -álgebra sea suave. Eso es lo que vamos a definir a continuación:

Definición 1.8.14. *Sea A una k -álgebra conmutativa.*

- Un elemento $x \in A$ se dice **regular** si la multiplicación por x es inyectiva.
- Una sucesión finita (x_1, \dots, x_n) se dice **regular** si x_i es regular en $A/(x_1, \dots, x_{i-1})$.
- A se dice **suave** si A es playta sobre k (se verifica siempre cuando k es cuerpo) y $\forall \mathcal{M} \subseteq A$ ideal maximal, el núcleo del morfismo localizado:

$$\mu_{\mathcal{M}} : (A \otimes A)_{\mu^{-1}(\mathcal{M})} \rightarrow A_{\mathcal{M}}$$

está generado por una sucesión regular.

Teorema 1.8.15. (Hochschild-Konstant-Rosenberg) *Si A es suave entonces el morfismo de antisimetrización es un isomorfismo*

Dem: Ver [Lo], Sección 3.4 o [HKR]. □

1.9. Propiedades

Vamos a estudiar en esta sección algunas de las propiedades más importantes de la homología y cohomología de Hochschild.

Dadas dos k -álgebras A y B , la **k -álgebra producto** $A \times B$ como grupo abeliano es $A \times B$ y su estructura multiplicativa está dada por $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$. La relación con la (co)homología de Hochschild es:

Proposición 1.9.1. *Hay isomorfismos de k -espacios vectoriales:*

- $HH_n(A \times B) = HH_n(A) \oplus HH_n(B)$.
- $HH^n(A \times B) = HH^n(A) \oplus HH^n(B)$

Dem: Ver [Lo], Sección 1.2 o [CE] Capítulo IX. □

Es importante notar que la homología de Hochschild es invariante por equivalencias Morita, más precisamente:

Proposición 1.9.2. *Si A y B son dos k -álgebras equivalentes Morita (con la notación de la definición 1.1.3) y M es un A -bimódulo, hay un isomorfismo natural:*

$$HH_n(A, M) \cong HH_n(B, Q \otimes_A M \otimes_A P).$$

Dem: Ver [Lo], Sección 1.2. □

1.10. Álgebras cuánticas de intersección completa

En esta sección presentaremos las álgebras que vamos a estudiar en los siguientes capítulos.

Definición 1.10.1. *Una matriz $(q_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(k)$ se dice **multiplicativamente antisimétrica** si $q_{ij} = q_{ji}^{-1} \forall 1 \leq i, j \leq n$.*

Es claro que si $(q_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(k)$ es multiplicativamente antisimétrica entonces $q_{ii} = 1$.

Ahora estamos en condiciones de definir nuestro objeto de estudio:

Definición 1.10.2. *Decimos que una k -álgebra A es un **álgebra cuántica de intersección completa** si existen $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$, $(q_{ij})_{i,j=1}^n \in M_n(k)$ una matriz multiplicativamente antisimétrica y una presentación:*

$$A \cong k \langle x_1, \dots, x_n \rangle / (x_k^{a_k}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j : 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n)$$

Cada matriz multiplicativamente antisimétrica define una k -álgebra en general no conmutativa, que es el cociente de la k -álgebra libre en n generadores x_1, \dots, x_n por el ideal generado por $\{x_j x_i - q_{ij} x_i x_j : 1 \leq i < j \leq n\}$. Se trata de variantes no conmutativas de álgebras de polinomios que Manin denomina "álgebras simétricas cuánticas" (ver [Ma]). Si además se divide por el ideal generado por $x_k^{a_k} : 1 \leq k \leq n$, se obtienen álgebras de dimensión finita.

Dentro de esta familia podemos encontrar el álgebra $k \langle x, y \rangle / (x^2, y^2, xy - qyx)$ que sirvió como contraejemplo en [BGMS] a la conjetura de Happel, de la cual hablaremos luego más profundamente. Se trata de un álgebra de Koszul, cuya cohomología de Hochschild se anula en grados suficientemente grandes, pero cuya homología de Hochschild tiene dimensión infinita [Han].

1.11. Conjeturas

En esta sección vamos a hablar de dos conjeturas, ambas relacionadas con el concepto de dimensión global de un álgebra, que ahora definimos.

Definición 1.11.1. Sean A una k -álgebra, y M un A -módulo.

- La **dimensión proyectiva** de M es el infimo de los largos de las resoluciones proyectivas de M . Notamos $pd(M)$ a la dimensión proyectiva de M .
- La **dimensión global** de A es el supremo de las dimensiones proyectivas de los A -módulos. Notamos $gld(A)$ a la dimensión global de A .

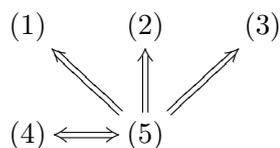
Ejemplo 1.11.2. Dos ejemplos fáciles:

- Un A -módulo P es proyectivo si y solo si $pd(P) = 0$.
- $gld(k) = 0$.

Consideremos las siguientes afirmaciones sobre una k -álgebra A :

1. $HH^n(A) = 0$ para n suficientemente grande.
2. $HH_n(A) = 0$ para n suficientemente grande.
3. La dimensión global de A es finita.
4. La dimensión proyectiva de A como A^e -módulo es finita.
5. La dimensión global de A^e es finita.

Cabe preguntarse si hay alguna relación entre ellas. Hay varias implicaciones que son fáciles de ver, en general se conocen las siguientes relaciones:



Se pueden encontrar referencias y algunas de las demostraciones en [BGMS].

En un artículo de 1989 Dieter Happel (ver [Han]) se pregunta si es cierto que si los grupos de cohomología de Hochschild de un álgebra se anulan para n suficientemente grande entonces la dimensión global del álgebra es finita.

La pregunta de Happel se respondió afirmativamente para álgebras conmutativas en un artículo de Avramov e Iyengar (ver [AI]).

Pero en general, la respuesta es no, Buchweitz, Green, Madsen y Solberg dan un contraejemplo en un artículo de 2005 (ver [BGMS]). Existe un álgebra de dimensión 4 sobre k

cuyos grupos de cohomología se anulan para n mayor que tres, pero su dimensión global es infinita. Este ejemplo es un álgebra cuántica de intersección completa.

Más tarde Han ([Han]) se pregunta si la anulación de los grupos de homología a partir de un cierto grado implica que la dimensión global del álgebra es finita.

Es conocido desde 1994 que la conjetura de Han es cierta para k -álgebras conmutativas y localmente finitamente generadas (ver [AV] y [BACH]). De hecho se trata de la afirmación recíproca del Teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg cuando el cuerpo k es perfecto.

En el ejemplo dado por [BGMS] los grupos de cohomología se anulaban pero los de homología no. En el artículo de Han se da una demostración de que la conjetura es cierta para álgebras monomiales.

A partir de ese artículo esa pregunta se conoce como la conjetura de Han.

En un artículo posterior Bergh y Madsen ([BM]) analizan varias clases de álgebras en donde vale la conjetura de Han, usando métodos relacionados con el determinante de Cartan.

Capítulo 2

Cálculo de homología y cohomología de un álgebra cuántica de intersección completa

2.1. Introducción

Sean k un cuerpo de característica cero, $q \in k^\times$ y definamos $A = \frac{k\langle x, y \rangle}{(x^2, y^3, xy - qyx)}$. Nuestro objetivo es estudiar las propiedades de A como bimódulo sobre sí misma desde el punto de vista homológico.

Para llevar a cabo esto, primero introducimos un álgebra auxiliar $B = \frac{k\langle x, y \rangle}{(xy - qyx)}$ y calculamos una resolución proyectiva de B como B -bimódulo. Como A es un cociente de B podemos calcular una resolución de A como B -módulo a derecha. La resolución de B que habíamos calculado se parte a izquierda, entonces cuando la tensorizamos a derecha con A (sobre B) sigue siendo exacta y constituye otra resolución de A como B -módulo a derecha. Comparando estas dos resoluciones de A podemos calcular la página E^1 de una sucesión espectral asociada a una filtración por filas de un complejo doble asociado a A cuyo complejo total es un candidato a resolución de A como bimódulo sobre sí misma.

Después de esto, calculamos la página E^2 de esta sucesión espectral y observamos que es nula; lo que nos permite concluir que el complejo total del complejo doble era exacto.

Una vez obtenida, en el Teorema 2.3.10 la resolución de A , procedemos a calcular la homología y cohomología de Hochschild de A con coeficientes en A , usando los mismos métodos que para mostrar que el complejo doble que construimos es exacto, es decir, un argumento de sucesiones espectrales, que en la página E^2 degenera y nos permite obtener el resultado.

Este método, que también puede aplicarse al contraejemplo de [BGMS], calculando así la cohomología y homología de Hochschild de dicha álgebra con un método más claro que el utilizado en ese trabajo, fue utilizado en AAAA para el cálculo de la (co)homología de Hochschild de álgebras de Weyl generalizadas.

Los resultados que obtuvimos se encuentran en el artículo de Bergh y Erdmann (ver [BE]), aunque destacamos que utilizamos un método distinto.

Esta familia de álgebras se comporta, desde el punto de vista homológico, de la misma manera en que se comporta el contraejemplo de [BGMS]. Tiene dimensión cohomológica finita, dimensión homológica infinita y dimensión global infinita. Tal como predice la conjetura de Han.

De todas formas este hecho lo sabíamos a priori, porque en el artículo [BM], se demuestra la conjetura de Han para álgebras graduadas conexas sobre un cuerpo de característica cero, que es el caso del álgebra que estudiamos.

En el próximo capítulo intentamos generalizar el cálculo de este capítulo a un álgebra del mismo estilo pero con n generadores.

El resultado que obtenemos es:

Teorema 2.1.1. *Sea A la k -álgebra que definimos antes, y tomemos $q \in k^\times$ que no sea raíz de la unidad, entonces:*

$$\begin{aligned} \blacksquare HH^n(A) &= \begin{cases} k^2 & \text{si } n = 0, \\ k^2 & \text{si } n = 1, \\ k & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \\ \blacksquare HH_n(A) &= \begin{cases} k^4 & \text{si } n = 0, \\ k^3 & \text{si no.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.2. Preliminares

2.2.1. Algo de notación

Como antes, todos los productos tensoriales serán sobre k a menos que se especifique lo contrario y una k -álgebra será un k -espacio vectorial provisto de una estructura compatible de anillo asociativo con unidad.

Si S es una k -álgebra notaremos $S^e = S \otimes S^{op}$, donde $S^{op} = (S, +, *_{op})$ es el álgebra opuesta.

Otra notación que vamos a usar es $\sum_{(k,l,i)} \equiv \sum_{k+l=i-1}$ (la suma es con $k, l \geq 0$).

Cuando escribamos $A \otimes_{e_1 e_2} A$ entendemos $A \otimes_{k e_1 e_2} A$, donde $k e_1 e_2$ es el k -espacio vectorial con base $e_1 e_2$ y análogamente para $A \otimes_{k e_i} A$ con $i = 1, 2$.

2.2.2. Cálculos Auxiliares

Vamos a comenzar estudiando una k -álgebra relacionada con A . La información que obtendremos será útil más adelante.

Sea $B = \frac{k\langle x, y \rangle}{(xy - qyx)}$, observemos que $A \cong \frac{B}{(x^2, y^3)}$ como k -álgebra y que a partir de esto podemos darle a A una estructura de B -bimódulo. Queremos construir una resolución

de B como B -bimódulo, para eso vamos a imitar la construcción que se hace para los anillos de polinomios, adaptándola al caso no conmutativo. Concretamente:

Teorema 2.2.1. *Si definimos $\mu(a \otimes b) = ab$, $d_1(e_1) = 1 \otimes x - x \otimes 1$, $d_1(e_2) = 1 \otimes y - y \otimes 1$ y $d_2(e_1 \wedge e_2) = q \otimes e_2 \otimes x - x \otimes e_2 \otimes 1 + qy \otimes e_1 \otimes 1 - 1 \otimes e_1 \otimes y$. Entonces*

$$0 \longrightarrow B \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes B \xrightarrow{d_2} (B \otimes e_1 \otimes B) \oplus (B \otimes e_2 \otimes B) \xrightarrow{d_1} B \otimes B \xrightarrow{\mu} B \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de B como B -bimódulo. Más aún, esta resolución se parte a izquierda con una homotopía s definida por:

$$\begin{aligned} s_0(1) &= 1 \otimes 1, \\ s_1(1 \otimes x^i y^j) &= \sum_{(k,l,i)} x^k \otimes e_1 \otimes x^l y^j + \sum_{(k,l,j)} x^i y^k \otimes e_2 \otimes y^l, \\ s_2(1 \otimes e_1 \otimes x^i y^j) &= 0, \\ s_2(1 \otimes e_2 \otimes x^i y^j) &= \sum_{(k,l,i)} q^{-k-1} x^k \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes x^l y^j. \end{aligned}$$

Dem:

Es claro que todos los módulos que aparecen son B^e -libres y se puede comprobar que es un complejo con un cálculo directo.

Es inmediato verificar que $\mu s_0 = Id$, $s_0 \mu + d_1 s_1 = Id$, $s_1 d_1 + d_2 s_2 = Id$ y $s_2 d_2 = Id$. \square

Necesitamos más información sobre B que la que obtuvimos hasta ahora, es por eso que vamos a generalizar los resultados anteriores introduciendo una modificación en los morfismos. Para poder llevar a cabo esto vamos a definir para cada $(i, j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ un nuevo B -bimódulo que llamaremos B_{ij} que como conjunto es B y cuya estructura de módulo a izquierda es la misma que la de B , lo que cambia es la estructura de módulo a derecha, que definimos como $(x^u y^v) \times (x^k y^l) = q^{-3kj - kv + 2il} x^{u+k} y^{v+l}$ extendiendo k -linealmente.

Observación 2.2.2. *La estructura de B -bimódulo que definimos en B_{ij} es la que se obtiene de considerar el ideal bilátero de B generado por $x^{2i} y^{3j}$ e identificarlo con B via la asignación $x^{2i} y^{3j} \leftrightarrow 1_B$, es decir, la estructura definida es la que hace de esta identificación un isomorfismo de B -bimódulos*

La generalización que necesitamos es la siguiente:

Teorema 2.2.3. *Fijemos $i, j \in \mathbb{N}_0$ y definamos $d_0(1 \otimes 1) = 1$, $d_1(e_1) = q^{3j} \otimes x - x \otimes 1$ (extendiendo B -bilinealmente), $d_1(e_2) = q^{-2i} \otimes y - y \otimes 1$ y $d_2(e_1 \wedge e_2) = q^{3j+1} \otimes e_2 \otimes x - x \otimes e_2 \otimes 1 + qy \otimes e_1 \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 \otimes y$. Entonces*

$$0 \longrightarrow (B \otimes e_1 \otimes B) \oplus (B \otimes e_2 \otimes B) \xrightarrow{d_1} B \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes B \xrightarrow{d_2} B \otimes B \xrightarrow{d_0} B_{ij} \longrightarrow 0$$

es una resolución libre de B_{ij} como B -bimódulo. Más aún, esta resolución se parte a izquierda con una homotopía s definida por:

$$\begin{aligned} s_0(1) &= 1 \otimes 1, \\ s_1(1 \otimes x^u y^v) &= \sum_{(k,l,u)} q^{-3j(k+1)} x^k \otimes e_1 \otimes x^l y^v + \sum_{(k,l,v)} q^{-3ju+2i(k+1)} x^i y^k \otimes e_2 \otimes y^l, \\ s_2(1 \otimes e_1 \otimes x^u y^v) &= 0, \\ s_2(1 \otimes e_2 \otimes x^u y^v) &= \sum_{(k,l,u)} q^{-(3j+1)(k+1)} x^k \otimes e_1 \wedge e_2 \otimes x^l y^v. \end{aligned}$$

Observación 2.2.4. $d_0(a \otimes b) = a \cdot_{B_{ij}} b$.

Dem: Es claro que todos los módulos que aparecen son B^e -libres y nuevamente se puede comprobar que es un complejo con un cálculo directo.

Es inmediato verificar que $d_0 s_0 = Id$, $s_0 d_0 + d_1 s_1 = Id$, $s_1 d_1 + d_2 s_2 = Id$ y $s_2 d_2 = Id$. \square

Por otra parte, usando que A es un cociente de B , obtenemos la siguiente sucesión exacta de B -módulos a derecha:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{g} B \oplus B \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

donde π es la proyección al cociente, $f((1,0)) = x^2$, $f((0,1)) = y^3$ y $g(1) = (-y^3, q^6 x^2)$.

Esta resolución libre de A como B -módulo nos permite calcular:

Proposición 2.2.5. Hay un isomorfismo de B -bimódulos:

$$Tor_n^B(A, A) = \begin{cases} A & \text{si } n=0,2, \\ A \oplus A & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si } n>2. \end{cases}$$

Dem: Tomamos la resolución anterior y la tensorizamos sobre B con A . Al hacer esto todos los morfismos se vuelven nulos y el resultado se deduce inmediatamente, conservándose la estructura exterior de B -bimódulo. \square

Por último definamos un B -bimódulo A_{ij} cuyo conjunto subyacente es A , la estructura de módulo a izquierda es la de A pero la estructura de módulo a derecha está torcida, más precisamente $(x^u y^v) \times (x^k y^l) = q^{-3kj-kv+2il} x^{u+k} y^{v+l}$ y extendemos por linealidad.

Observación 2.2.6. $A_{ij} \cong A \otimes_B B_{ij}$.

Buscamos una resolución de A_{ij} como B -módulo a derecha, usando la que ya calculamos para A . Es inmediato que la siguiente sirve:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{g} B \oplus B \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\pi} A_{ij} \longrightarrow 0$$

donde las flechas son las mismas, con la excepción de que $\pi(b) = \bar{1}.b$ Ahora podemos calcular $Tor_n^B(A_{ij}, A)$:

Proposición 2.2.7. *Hay un isomorfismo de B -bimódulos:*

$$Tor_n^B(A_{ij}, A) = \begin{cases} A & \text{si } n=0,2, \\ A \oplus A & \text{si } n=1, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Dem: Es análoga a la de la proposición anterior. □

2.3. Resolución

El objetivo de esta sección es calcular una resolución proyectiva de A como A -bimódulo.

Notación 2.3.1. *Vamos a notar $e_1e_2 := e_1 \wedge e_2$ durante esta sección.*

2.3.1. Construcción de un complejo doble

La idea es construir un complejo doble cuyo complejo total sea la resolución buscada. Definamos:

Definición 2.3.2. *Los módulos del complejo doble están dados por:*

$$C_{n,m} = \begin{cases} \bigoplus_{i+j=n} (A \otimes f_1^i f_2^j \otimes A) & \text{si } m = n, \\ \bigoplus_{i+j=n} (A \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes A) \oplus \bigoplus_{i+j=n} (A \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes A) & \text{si } m = n + 1, \\ \bigoplus_{i+j=n} (A \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes A) & \text{si } m = n + 2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observemos que los $C_{n,m}$ son A^e -módulos libres. Tenemos que definir los diferenciales de este complejo doble. Primero los diferenciales horizontales:

Definición 2.3.3. *Los diferenciales horizontales del complejo doble están dados por:*

- $d^h(e_1 e_2 f_1^i f_2^j) = q^{3j+1} \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes y + qy \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes 1.$
- $d^h(e_1 f_1^i f_2^j) = q^{3j} \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1.$

- $d^h(e_2 f_1^i f_2^j) = q^{-2i} \otimes f_1^i f_2^j \otimes y - y \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1.$
- $d^h(f_1^i f_2^j) = 0.$

Ahora los diferenciales verticales:

Definición 2.3.4. *Los diferenciales verticales del complejo doble están dados por:*

- $d^v(e_1 e_2 f_1^i f_2^j) = 0.$
- $d^v(e_1 f_1^i f_2^j) = q^{6i+2} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i+1} y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2.$
- $d^v(e_2 f_1^i f_2^j) = -q^{3j-1} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - q^{-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1.$
- $d^v(f_1^i f_2^j) = q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 +$
 $q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2.$

En la definición anterior entendemos que los términos que aparecen con exponentes negativos son nulos.

Nos falta verificar que $d^h \circ d^h = d^v \circ d^v = d^h \circ d^v + d^v \circ d^h = 0$

Si miramos en el siguiente diagrama cuáles son los módulos no nulos del complejo doble, nos damos cuenta de que sólo hace falta verificar en tres lugares las condiciones anteriores:

$$\begin{array}{ccccccccc}
C_{0,0} & \longleftarrow & C_{0,1} & \longleftarrow & C_{0,2} & \longleftarrow & 0 & & 0 & & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow & C_{1,3} & \longleftarrow & 0 & & \dots \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\dots & & 0 & \longleftarrow & C_{2,2} & \longleftarrow & C_{2,3} & \longleftarrow & C_{2,4} & & \dots \\
& & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\dots & & \dots
\end{array}$$

Comprobar esas condiciones es un cálculo directo. Además, como los morfismos involucrados son de bimódulos basta chequear las composiciones sólo en los generadores como bimódulos.

Comenzamos verificando que $d^h \circ d^h = 0$:

$$\begin{aligned}
& d^h \circ d^h(e_1 e_2 f_1^i f_2^j) = \\
& d^h(q^{3j+1} \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes y + qy \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes 1) \\
& = q^{3j+1}(q^{-2i} \otimes f_1^i f_2^j \otimes y - y \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1)x - x(q^{-2i} \otimes f_1^i f_2^j \otimes y - y \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1)1 - \\
& q^{-2i}(q^{3j} \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1)y + qy(q^{3j} \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1)1 \\
& = q^{3j+1-2i} \otimes f_1^i f_2^j \otimes yx - q^{3j+1} y \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - q^{-2i} x \otimes f_1^i f_2^j \otimes y + xy \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1 - \\
& q^{-2i+3j} \otimes f_1^i f_2^j \otimes xy + q^{-2i} x \otimes f_1^i f_2^j \otimes y + q^{3j+1} y \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - qyx \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1 = 0.
\end{aligned}$$

En este ultimo paso utilizamos varias veces la relación $xy = qyx$.

Ahora proseguimos verificando que $d^v \circ d^v = 0$:

$$\begin{aligned}
d^v \circ d^v(f_1^i f_2^j) &= d^v(q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&+ q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2) \\
&= q^{3j}(q^{6i-4} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i-3} y \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y + \\
&q^{2i-2} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y^2)x + x(q^{6i-4} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1 + \\
&q^{4i-3} y \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i-2} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y^2)1 + \\
&q^{6i} y^2(-q^{3j-4} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes x - q^{-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1)1 + \\
&q^{4i} y(-q^{3j-4} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes x - q^{-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1)y + \\
&q^{2i}(-q^{3j-4} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes x - q^{-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1)y^2 \\
&= q^{3j+6i-4} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes x + q^{3j+4i-3} y \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes xy + \\
&q^{3j+2i-2} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y^2 x + q^{6i-4} xy^2 \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1 \\
&+ q^{4i-3} xy \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y^2 \\
&- q^{6i+3j-4} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes x - q^{6i-2} y^2 x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes 1 + \\
&- q^{4i+3j-4} y \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes xy - q^{4i-2} yx \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y + \\
&- q^{2i+3j-4} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes xy^2 - q^{2i-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \otimes y^2 = 0.
\end{aligned}$$

Lo único que falta es ver que $d^v \circ d^h + d^h \circ d^v = 0$. Vamos a calcular por separado esas dos composiciones. Este caso es el único en el que los módulos involucrados tienen dos generadores, así que la cuenta hay que hacerla una vez para cada uno.

Primero $d^v \circ d^h$:

$$\begin{aligned}
d^v \circ d^h(e_1 f_1^i f_2^j) &= d^v(q^{3j} \otimes f_1^i f_2^j \otimes x - x \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1) \\
&= q^{3j}(q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&+ q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2)x \\
&- x(q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&+ q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2)1 \\
&= q^{6i+3j} y^2 \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + q^{4i+3j} y \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes yx + q^{2i+3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes y^2 x \\
&- q^{6i} xy^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{4i} xy \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y - q^{2i} x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^v \circ d^h(e_2 f_1^i f_2^j) &= d^v(q^{-2i} \otimes f_1^i f_2^j \otimes y - y \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1) \\
&= q^{-2i}(q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&\quad + q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2) y \\
&\quad - y(q^{3j} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&\quad + q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2) 1 \\
&= q^{3j-2i} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes xy + q^{-2i} x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes y \\
&\quad + q^{4i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2 + 1 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^3 \\
&\quad - q^{3j} y \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - yx \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
&\quad - q^{6i} y^3 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{4i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y - q^{2i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2.
\end{aligned}$$

Luego $d^h \circ d^v$:

$$\begin{aligned}
d^h \circ d^v(e_1 f_1^i f_2^j) &= \\
d^h(q^{6i+2} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i+1} y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{2i} \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2) &= \\
q^{6i+2} y^2 (q^{3j-2} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes x - x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + \\
qy \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1) 1 + \\
q^{4i+1} y (q^{3j-2} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes x - x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + \\
qy \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1) y + \\
q^{2i} (q^{3j-2} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes x - x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{-2i} \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + \\
qy \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1) y^2 = \\
q^{6i+3j} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes x - q^{6i+2} y^2 x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 - q^{4i+2} y^2 \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + \\
q^{6i+3} y^3 \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes 1 + q^{4i+3j-1} y \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes xy - q^{4i+1} yx \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y - \\
q^{2i+1} y \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2 + q^{4i+2} y^2 \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y + q^{3j+2i-2} \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes xy^2 - \\
q^{2i} x \otimes e_2 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2 - 1 \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^3 + q^{2i+1} y \otimes e_1 f_1^i f_2^{j-1} \otimes y^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^h \circ d^v(e_2 f_1^i f_2^j) &= \\
d^h(-q^{3j-1} \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - q^{-2} x \otimes e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1) &= \\
-q^{3j-1}(q^{3j+1} \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - x \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 - q^{-2i+2} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes y + \\
qy \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1)x - \\
q^{-2} x(q^{3j+1} \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - x \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 - q^{-2i+2} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes y + \\
qy \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1)1 = \\
-q^{6j} \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x^2 + q^{3j-1} x \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + q^{3j-2i+1} \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes yx \\
-q^{3j} y \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x - q^{3j-1} x \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes x + q^{-2} x^2 \otimes e_2 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1 \\
+ q^{-2i} x \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes y - q^{-1} xy \otimes e_1 f_1^{i-1} f_2^j \otimes 1.
\end{aligned}$$

Notamos que pudimos verificar que $d^h \circ d^h = 0$ y que $d^v \circ d^v = 0$ pero $d^h \circ d^v = d^v \circ d^h$, esto no es problema porque le podemos cambiar el signo a algunos morfismos para que esto resulte un complejo doble lo cual no altera ninguno de los cálculos que vamos a hacer en este trabajo porque las imágenes y núcleos no cambian.

2.3.2. Exactitud

En esta parte vamos a mostrar que el complejo total del complejo doble construido anteriormente es una resolución proyectiva de A como A -bimódulo. Para hacer esto vamos a considerar la sucesión espectral asociada a una filtración del complejo doble (por filas por ejemplo). Esta sucesión degenera en el paso E^2 permitiéndonos mostrar la exactitud deseada.

El paso E^0

El primer paso es considerar el complejo doble, pero sólo con los diferenciales horizontales:

$$\begin{array}{cccccccc}
C_{0,0} & \longleftarrow & C_{0,1} & \longleftarrow & C_{0,2} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\
0 & \longleftarrow & C_{1,1} & \longleftarrow & C_{1,2} & \longleftarrow & C_{1,3} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\
0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & C_{2,2} & \longleftarrow & C_{2,3} & \longleftarrow & C_{2,4} & \longleftarrow & \dots \\
\dots & & \dots
\end{array}$$

Tenemos que calcular la homología de las filas para obtener el siguiente paso.

El paso E^1

Las flechas verticales son las inducidas en la homología por las del complejo original:

$$\begin{array}{cccccc}
 \text{Coker}d^h & \frac{\text{Ker}d^h}{\text{Im}d^h} & \text{Ker}d^h & 0 & 0 & \dots \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 0 & \text{Coker}d^h & \frac{\text{Ker}d^h}{\text{Im}d^h} & \text{Ker}d^h & 0 & \dots \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 0 & 0 & \text{Coker}d^h & \frac{\text{Ker}d^h}{\text{Im}d^h} & \text{Ker}d^h & \dots \\
 \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array}$$

Ahora tenemos que calcular la homología de las columnas para tener el paso E^2 , pero en ese paso el bigrado de los diferenciales tiene que ser $(1, 2)$, y si observamos atentamente el complejo no puede haber flechas no nulas con ese bigrado. Si lo que queremos es que el complejo sea exacto es necesario que en este paso la homología sea nula. Es decir, debemos demostrar que las columnas son exactas. Como en la Sección 2.2 llamemos $B = \frac{k\langle x, y \rangle}{(xy - qyx)}$, entonces $A \cong \frac{B}{(x^2, y^3)}$. Esta relación entre A y B , sumado al hecho de que una resolución de B es fácil de calcular, nos va a permitir mostrar que el complejo que construimos es exacto.

Fijemos $i, j \in \mathbb{N}$ y consideremos la resolución dada por 2.2.3:

$$0 \longrightarrow B \otimes e_1 e_2 \otimes B \xrightleftharpoons[s_2]{d_2} (B \otimes e_1 \otimes B) \oplus (B \otimes e_2 \otimes B) \xrightleftharpoons[s_1]{d_1} B \otimes B \xrightleftharpoons[s_0]{d_0} B_{ij} \longrightarrow 0$$

Si tensorizamos (sobre B) esta resolución con A de ambos lados obtenemos uno de los sumandos directos de la $(i + j)$ -ésima fila del complejo doble. Los morfismos que aparecen en la homotopía son B -lineales a izquierda. Entonces cuando tensorizamos con A a izquierda la exactitud se preserva (la misma homotopía sirve). Teniendo en cuenta la Observación 2.2.6 notamos que tenemos una resolución proyectiva de A_{ij} como B -módulo a derecha. Si ahora tensorizamos con A a derecha y tomamos homología estamos calculando $\text{Tor}_\bullet^B(A_{ij}, A)$. Pero esto lo podemos calcular, como en 2.2.7, utilizando otra resolución de A como B -módulo a izquierda.

Usando este resultado podemos concluir que la homología del siguiente complejo, en el que omitimos $f_1^i f_2^j$ por comodidad, es A en grados 0 y 2 y $A \oplus A$ en grado 1.

$$0 \longrightarrow A \otimes e_1 e_2 \otimes A \xrightarrow{d_2^h} (A \otimes e_1 \otimes A) \oplus (A \otimes e_2 \otimes A) \xrightarrow{d_1^h} A \otimes A \longrightarrow 0$$

Estos isomorfismos que acabamos de presentar son como A -bimódulos. Lo que necesitamos ahora es identificar bajo estos isomorfismos a las flechas verticales de nuestro

complejo doble para verificar lo que buscamos. Algo que también sería útil es buscar un elemento cuya clase genere la homología como A -bimódulo en cada lugar. Para hacer esas dos cosas necesitamos los morfismos de comparación de las dos resoluciones de A_{ij} que tenemos.

Vamos a construir estos morfismos de comparación que llamaremos c_l ($l = 1, 2, 3$). Recordemos que según el Teorema 2.2.3, hay morfismos B -lineales a izquierda s_l que cumplen $d_0 s_0 = Id$, $s_0 d_0 + d_1 s_1 = Id$, $s_1 d_1 + d_2 s_2 = Id$ y $s_2 d_2 = Id$.

Cuando tensorizamos con A estas relaciones se conservan, salvo que los morfismos (que seguiremos llamando s_l y d_k) ahora son A -lineales a izquierda.

Queremos que c_1 sea tal que $\pi = d_0 \circ c_1$, podemos definir $c_1(1) = s_0 \circ \pi(1)$ y extender de forma B -lineal a derecha. En este caso, dado $b \in B$, $d_0(c_1(b)) = d_0(c_1(1))b = d_0(s_0 \circ \pi(1))b = \pi(1)b = \pi(b)$.

Ahora tenemos que definir c_2 de manera que $c_1 \circ f = d_1 \circ c_2$, poniendo $c_2(e_i) = s_1 \circ c_1 \circ f(e_i)$ ($i = 1, 2$) y extendiendo de forma B -lineal a derecha se obtiene:

$$d_1 \circ c_2(e_i) = d_1 \circ s_1 \circ c_1 \circ f(e_i) = (Id - s_0 \circ d_0) \circ c_1 \circ f(e_i) =$$

$$c_1 \circ f(e_i) - s_0 \circ d_0 \circ c_1 \circ f(e_i) = c_1 \circ f(e_i) - s_0 \circ \pi \circ f(e_i) = c_1 \circ f(e_i).$$

Por último queremos que $d_2 \circ c_3 = c_2 \circ g$, repitiendo el proceso definimos $c_3(1) = s_2 \circ c_2 \circ g(1)$.

Verificamos:

$$d_2 \circ c_3(1) = d_2 \circ s_2 \circ c_2 \circ g(1) = (Id - s_1 \circ d_1) \circ c_2 \circ g(1) =$$

$$c_2 \circ g(1) - s_1 \circ d_1 \circ c_2 \circ g(1) = c_2 \circ g(1),$$

pues $s_1 \circ d_1 \circ c_2 \circ g(1) = s_1 \circ c_1 \circ f \circ g(1) = 0$.

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 2.3.5. *Hay un diagrama conmutativo de filas exactas de morfismos de B -módulos a derecha:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{g} & B \oplus B & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{\pi} & A_{ij} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow c_3 & & \downarrow c_2 & & \downarrow c_1 & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & A \otimes B & \xrightarrow{d_2} & (A \otimes e_1 \otimes B) \oplus (A \otimes e_2 \otimes B) & \xrightarrow{d_1} & A \otimes B & \xrightarrow{d_0} & A_{ij} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

donde:

$$\begin{cases} c_1(1) = 1 \otimes 1, \\ c_2(1, 0) = -q^{-6j}x \otimes e_1 \otimes 1 - q^{-3j} \otimes e_1 \otimes x, \\ c_2(0, 1) = -q^{6i}y^2 \otimes e_2 \otimes 1 - q^{4i}y \otimes e_2 \otimes y - q^{2i} \otimes e_2 \otimes y^2, \\ c_3(1) = -q^{6i-3j+5}y^2 \otimes x - q^{6i-6j+2}xy^2 \otimes 1 - q^{4i-3j+3}y \otimes xy - q^{-4i-6j+1}xy \otimes y - \\ q^{2i-3j+1} \otimes xy^2 - q^{2i-6j}x \otimes y^2. \end{cases}$$

Dem: Se puede verificar inmediatamente que estas formulas se corresponden con los cálculos y definiciones anteriores. \square

Corolario 2.3.6. *La homología del complejo:*

$$0 \longrightarrow A \otimes e_1 e_2 \otimes A \xrightarrow{d_2^h} (A \otimes e_1 \otimes A) \oplus (A \otimes e_2 \otimes A) \xrightarrow{d_1^h} A \otimes A \longrightarrow 0$$

está generada por las clases de los siguientes ciclos:

- En el lugar 0:

$$1 \otimes f_1^i f_2^j \otimes 1.$$

- En el lugar 1:

$$-q^{-6j} \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes x - q^{-3j} x \otimes e_1 f_1^i f_2^j \otimes 1,$$

$$-q^{6i} y^2 \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes 1 - q^{4i} y \otimes e_2 f_1^i f_2^j \otimes y - q^{2i} \otimes y^2.$$

- En el lugar 2:

$$\begin{aligned} & -q^{6i-3j+5} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x - q^{6i-6j+2} x y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes 1 - q^{4i-3j+3} y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x y - \\ & q^{4i-6j+1} x y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes y - q^{2i-3j+1} \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x y^2 - q^{2i-6j} x \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes y^2. \end{aligned}$$

Notación 2.3.7. Llamemos $\overline{f_1^i f_2^j}$, $\overline{e_1 f_1^i f_2^j}$, $\overline{e_2 f_1^i f_2^j}$, \overline{y} , $\overline{e_1 e_2 f_1^i f_2^j}$ a los generadores de la homología de las filas en cada lugar.

Ejemplo 2.3.8. $\overline{e_1 e_2 f_1^i f_2^j} = [-q^{6i-3j+5} y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x - q^{6i-6j+2} x y^2 \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes 1 - q^{4i-3j+3} y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x y - q^{4i-6j+1} x y \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes y - q^{2i-3j+1} \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes x y^2 - q^{2i-6j} x \otimes e_1 e_2 f_1^i f_2^j \otimes y^2]$ donde los corchetes simbolizan la clase en la homología.

Con todas estas identificaciones estamos en condiciones de verificar que las columnas del complejo doble (en el paso E^1) son exactas.

Convengamos en que los términos que aparezcan con exponentes negativos son nulos.

Fijemos i, j y consideremos el siguiente complejo:

$$0 \longrightarrow A f_1^i f_2^j \xrightarrow{d_1^v} (A e_1 f_1^{i-1} f_2^j) \oplus (A e_2 f_1^i f_2^{j-1}) \xrightarrow{d_2^v} A e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \longrightarrow 0$$

Queremos ver que después de tomar homología en las filas, la sucesión inducida es exacta, para eso debemos identificar los morfismos usando el corolario 2.3.6.

Observación 2.3.9. *Vale que:*

- $d_1^v(\overline{f_1^i f_2^j}) = -q^{6j} \overline{e_1 f_1^{i-1} f_2^j} - \overline{e_2 f_1^i f_2^{j-1}}$,

- $d_2^v(\overline{e_1 f_1^i f_2^j}) = q^6 \overline{e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1}}$,
- $d_2^v(\overline{e_2 f_1^i f_2^j}) = -q^{-6j} \overline{e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j}$.

Con estas fórmulas es inmediato verificar la exactitud deseada siempre y cuando $i, j \geq 1$.

Si $i \neq 0$ o $j \neq 0$ el complejo anterior tiene sólo dos términos no nulos y el único diferencial es un isomorfismo pues es multiplicar por un escalar distinto de cero.

El único caso en el que las columnas no son exactas (en el paso E^1) es si $i = j = 0$, en este caso la homología de esta columna da A (hay un isomorfismo de A -bimódulos). Pero esto no molesta, porque no estamos considerando la aumentación del complejo (para convertirlo en una resolución de A). Al considerar esto la homología de la primera fila en el lugar 0 pasa de ser A a ser 0 y luego esta primera columna que no era exacta ahora lo es.

Hemos probado que el complejo que construimos es exacto y por lo tanto el complejo total asociado es una resolución libre de A como A -bimódulo que era lo que queríamos.

Demostramos el siguiente teorema:

Teorema 2.3.10. *El complejo total del complejo doble que definimos en 2.3.2 es una resolución proyectiva de A como A -bimódulo. Más precisamente, si:*

$$M_r = \bigoplus_{n+m=r} C_{m,n}$$

y consideramos los morfismos definidos por 2.3.3 y 2.3.4 con el cambio de signo correspondiente en las columnas impares obtenemos una resolución libre de A como A -bimódulo.

2.4. Homología

Una vez obtenida una resolución libre de A como A -bimódulo, calcularemos la homología de A con coeficientes en un bimódulo M . Lo que debemos hacer es aplicar el funtor $M \otimes_{A^e} -$ al complejo doble. Bajo la identificación $M \otimes_{A^e} (A \otimes A) \cong M$ via el isomorfismo de A^e -módulos a derecha $m \otimes (a \otimes b) \leftrightarrow bma$, nos queda el complejo doble CM :

$$\begin{array}{ccccccc}
 CM_{0,0} & \longleftarrow & CM_{0,1} & \longleftarrow & CM_{0,2} & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longleftarrow & CM_{1,1} & \longleftarrow & CM_{1,2} & \longleftarrow & CM_{1,3} & \longleftarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & CM_{2,2} & \longleftarrow & CM_{2,3} & \longleftarrow & \dots \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
 \end{array}$$

que explicitamos como sigue:

En general:

$$CM_{n,m} = \begin{cases} \bigoplus_{i+j=n} M f_1^i f_2^j & \text{si } m = n, \\ \bigoplus_{i+j=n} (M e_1 f_1^i f_2^j) \oplus \bigoplus_{i+j=n} (M e_2 f_1^i f_2^j) & \text{si } m = n + 1, \\ \bigoplus_{i+j=n} M e_1 e_2 f_1^i f_2^j & \text{si } m = n + 2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Tenemos que identificar los diferenciales para poder aplicar después un argumento de sucesiones espectrales que nos permita calcular la homología de Hochschild de A con coeficientes en M .

Definición 2.4.1. *Los diferenciales horizontales del complejo doble están dados por:*

- $d_2^h(m e_1 e_2 f_1^i f_2^j) = (q^{3j+1} x m - m x) e_2 f_1^i f_2^j - (q^{-2i} y m + q m y) e_1 f_1^i f_2^j.$
- $d_1^h(m e_1 f_1^i f_2^j) = (q^{3j} x m - m x) f_1^i f_2^j.$
- $d_1^h(m e_2 f_1^i f_2^j) = (q^{-2i} y m - m y) f_1^i f_2^j.$
- $d^h(m f_1^i f_2^j) = 0.$

Definición 2.4.2. *Los diferenciales verticales del complejo doble están dados por:*

- $d^v(m e_1 e_2 f_1^i f_2^j) = 0.$
- $d_1^v(m e_1 f_1^i f_2^j) = (q^{6i+2} m y^2 + q^{4i+1} y m y + q^{2i} y^2 m) e_1 e_2 f_1^i f_2^{j-1}.$
- $d_1^v(m e_2 f_1^i f_2^j) = (-q^{3j-1} x m - q^{-2} m x) e_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^j.$
- $d_2^v(m f_1^i f_2^j) = (q^{3j} x m + m x) e_1 f_1^{i-1} f_2^j + (q^{6i} m y^2 + q^{4i} y m y + q^{2i} y^2 m) e_2 f_1^i f_2^{j-1}.$

donde entendemos que si en un término hay un exponente negativo entonces el término es nulo.

2.4.1. El caso $M = A$

Vamos a considerar, igual que antes, la sucesión espectral asociada a una filtración por filas del complejo doble. Lo que vamos a hacer es: primero calcular la homología de las filas, después la de las columnas, y en el paso E^2 , todos los diferenciales van a ser nulos porque el soporte del complejo doble es el mismo que antes. Tomemos $\mathcal{B} = \{1, x, y, y^2, xy, xy^2\}$ una base de A como k -espacio vectorial. Notemos que los diferenciales horizontales respetan los sumandos directos indexados por (i, j) .

Primero nos concentramos en uno de los sumandos directos de las filas:

$$0 \longrightarrow A e_1 e_2 f_1^i f_2^j \xrightarrow{d_2^h} (A e_1 f_1^i f_2^j) \oplus (A e_2 f_1^i f_2^j) \xrightarrow{d_1^h} A f_1^i f_2^j \longrightarrow 0$$

Por un momento vamos a omitir en la notación las f para ser más claros. Si miramos las matrices de los diferenciales en la base \mathcal{B} podemos calcular inmediatamente bases para las imágenes y los núcleos de éstos. Necesitamos la hipótesis de que $q^n \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}$.

Llamemos $\alpha = (q^{-2i-1}-1)ye_1 - (q^{3j}-q^{-1})xe_2$ y $\beta = (-q^{-2i-1}-1)y^2e_1 - (q^{3j}-q^{-2})xye_2$.

De la siguiente tabla, que indica cuanto valen los diferenciales en cada elemento de la base:

	e_1	e_2	e_1e_2
1	$(q^{3j}-1)x$	$(q^{-2i}-1)y$	$(-q^{-2i}+q)ye_1 + (q^{3j+1}-1)xe_2$
x	0	$(q^{-2i}-q^{-1})xy$	$(-q^{-2i}+1)xye_1$
y	$(q^{3j-1}-1)xy$	$(q^{-2i}-1)y^2$	$(-q^{-2i}+q)y^2e_1 + (q^{3j}-1)xye_2$
y^2	$(q^{3j-2}-1)xy^2$	0	$(q^{3j-1}-1)xy^2e_2$
xy	0	$(q^{-2i}-q^{-1})xy^2$	$(-q^{-2i}+1)xy^2e_1$
xy^2	0	0	0

inmediatamente deducimos que:

$$\text{Ker}(d_1^h) = \begin{cases} \langle xe_1, xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2, y^2e_2, \alpha, \beta \rangle & \text{si } i \neq 0 \wedge j \neq 0, \\ \langle xe_1, xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2, e_2, ye_2, y^2e_2, \alpha, \beta \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j \neq 0, \\ \langle e_1, xe_1, xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2, y^2e_2, \alpha, \beta \rangle & \text{si } i \neq 0 \wedge j = 0, \\ \langle e_1, xe_1, xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2, e_2, ye_2, y^2e_2, \alpha, \beta \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

$$\text{Im}(d_1^h) = \begin{cases} \langle x, y, y^2, xy, xy^2 \rangle & \text{si } i \neq 0 \wedge j \neq 0, \\ \langle x, xy, xy^2 \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j \neq 0, \\ \langle y, y^2, xy, xy^2 \rangle & \text{si } i \neq 0 \wedge j = 0, \\ \langle xy, xy^2 \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ker}(d_2^h) = \langle xy^2e_1e_2 \rangle .$$

$$\text{Im}(d_2^h) = \langle xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2, \alpha, \beta \rangle .$$

Como corolario de estos cálculos obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.3. *La homología del complejo anterior (uno de los sumandos directos de las filas) es como k -espacio vectorial, si $i \neq 0 \wedge j \neq 0$, la homología es:*

$$\begin{cases} k & \text{en el lugar } 0, \\ k^2 & \text{en el lugar } 1, \\ k & \text{en el lugar } 2. \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j \neq 0$, la homología es:

$$\begin{cases} k^3 & \text{en el lugar } 0, \\ k^4 & \text{en el lugar } 1, \\ k & \text{en el lugar } 2. \end{cases}$$

Si $i \neq 0 \wedge j = 0$, la homología es:

$$\begin{cases} k^2 & \text{en el lugar 0,} \\ k^3 & \text{en el lugar 1,} \\ k & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j = 0$, la homología es:

$$\begin{cases} k^4 & \text{en el lugar 0,} \\ k^5 & \text{en el lugar 1,} \\ k & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Más aún, los siguientes elementos son base de la homología:

Si $i \neq 0 \wedge j \neq 0$:

$$\begin{cases} 1 & \text{en el lugar 0,} \\ xe_1, y^2e_2 & \text{en el lugar 1,} \\ xy^2e_1e_2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j \neq 0$:

$$\begin{cases} 1, y, y^2 & \text{en el lugar 0,} \\ xe_1, e_2, ye_2, y^2e_2 & \text{en el lugar 1,} \\ xy^2e_1e_2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Si $i \neq 0 \wedge j = 0$:

$$\begin{cases} 1, x & \text{en el lugar 0,} \\ e_1, xe_1, y^2e_2 & \text{en el lugar 1,} \\ xy^2e_1e_2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j = 0$:

$$\begin{cases} 1, x, y, y^2 & \text{en el lugar 0,} \\ e_1, xe_1, e_2, ye_2, y^2e_2 & \text{en el lugar 1,} \\ xy^2e_1e_2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Ahora podemos pasar a las columnas:

Antes de tomar homología en las filas tenemos, para cada $i, j \geq 0$, complejos columna del siguiente tipo:

$$0 \longrightarrow Af_1^i f_2^j \xrightarrow{d_2^j} (Ae_1 f_1^{i-1} f_2^j) \oplus (Ae_2 f_1^i f_2^{j-1}) \xrightarrow{d_1^i} Ae_1 e_2 f_1^{i-1} f_2^{j-1} \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

Queremos estudiar qué sucede con estos complejos luego de calcular homología en las filas. A partir de ahora vamos a considerar el complejo inducido por el complejo (2.1) en el paso E^1 de la sucesión espectral que estábamos calculando, al cual llamaremos C .

Analizando el núcleo de d_2^v podemos leer la homología de las columnas de las dimensiones de los espacios vectoriales involucrados.

Observación 2.4.4. *Se verifica trivialmente que:*

- $d_2^v(f_1^i f_2^j) = (q^{3j} + 1)e_1 f_1^{i-1} f_2^j + (q^{6i} + q^{4i} + q^{2i})e_2 f_1^i f_2^{j-1}$,
- $d_2^v(x f_1^i f_2^j) = (q^{6i} + q^{4i-1} + q^{2i-2})xy^2 e_2 f_1^i f_2^{j-1}$,
- $d_2^v(y f_1^i f_2^j) = (q^{3j} + q^{-1})xy e_1 f_1^{i-1} f_2^j$,
- $d_2^v(y^2 f_1^i f_2^j) = (q^{3j} + q^{-2})xy^2 e_1 f_1^{i-1} f_2^j$.

A partir de esto es claro que:

$$\begin{cases} \dim_k \text{Ker}(d_2^v) = 0 & \text{si } i \neq 0 \wedge j \neq 0, \\ \dim_k \text{Ker}(d_2^v) = 2 & \text{si } i = 0 \wedge j \neq 0, \\ \dim_k \text{Ker}(d_2^v) = 1 & \text{si } i \neq 0 \wedge j = 0, \\ \dim_k \text{Ker}(d_2^v) = 4 & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

De la definición de d_1^v , en 2.4.2 podemos observar que si $i \neq 0$ y $j \neq 0$ entonces la dimensión de la imagen de d_1^v es 1 y que en caso contrario es 0. En cualquiera de los casos la homología del complejo C en el lugar 0 es nula, es decir que d_1^v es epimorfismo.

Para estudiar los otros lugares necesitamos un análisis mas profundo del Teorema 2.4.3, la homología de las filas en el lugar 1 se descompone en suma directa de dos sumandos, uno correspondiente a e_1 y el otro a e_2 y las bases que menciona el Teorema 2.4.3 son la unión de dos bases, una base por cada uno de los sumandos.

Teniendo en cuenta esto, y la Observación 2.4.4 es claro que si $i \geq 2$ y $j \geq 2$ el complejo C es exacto. Estudiando a mano los casos restantes podemos concluir el estudio de las columnas.

Lo que hacemos en cada uno de estos casos es calcular cuánto valen los morfismos verticales en cada uno de los elementos de las bases de los módulos que aparecen al calcular la homología de las filas, esto lo expresamos en la otra base correspondiente y calculamos la dimensión del núcleo y de la imagen. Con todos estos datos es inmediata la siguiente conclusión:

- Caso $i \geq 2$ y $j = 1$:

$$H(C) = \begin{cases} 0 & \text{en el lugar 1,} \\ 0 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i \geq 2$ y $j = 0$:

$$H(C) = \begin{cases} k & \text{en el lugar 1,} \\ k & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 1$ y $j \geq 2$:

$$H(C) = \begin{cases} 0 & \text{en el lugar 1,} \\ 0 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 1$ y $j = 1$:

$$H(C) = \begin{cases} 0 & \text{en el lugar 1,} \\ 0 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 1$ y $j = 0$:

$$H(C) = \begin{cases} k & \text{en el lugar 1,} \\ k & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 0$ y $j \geq 2$:

$$H(C) = \begin{cases} k^2 & \text{en el lugar 1,} \\ k^2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 0$ y $j = 1$:

$$H(C) = \begin{cases} k^2 & \text{en el lugar 1,} \\ k^2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

- Caso $i = 0$ y $j = 0$:

$$H(C) = \begin{cases} 0 & \text{en el lugar 1,} \\ k^4 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Para terminar el cálculo de la homología debemos contar cuantas veces aparecen cada uno de estos casos en cada columna, a partir de la tercera columna, como $i + j$ es el número de columna, sólo importan los casos $i \geq 2$ y $j = 0$ y $i = 0$ y $j \geq 2$ (los otros casos son exactos). En las tres primeras columnas se puede ver a mano cual es el aporte en la homología. Estos aportes están resumidos en el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{cccccc}
k^4 & & k^3 & & 0 & & 0 & & \dots \\
0 & & k^3 & & k^3 & & 0 & & \dots \\
0 & & 0 & & k^3 & & k^3 & & \dots \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots
\end{array}$$

Podemos resumir todo lo que obtuvimos en el siguiente teorema.

Teorema 2.4.5. Sea $A = \frac{k\langle x,y \rangle}{(x^2, y^3, xy-qyx)}$, con q tal que $q^n \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. La homología de Hochschild de A es:

$$HH_n(A) = \begin{cases} k^4 & \text{si } n = 0 \\ k^3 & \text{si no.} \end{cases}$$

2.5. Cohomología

Sea M un A -bimódulo, para calcular la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M debemos tomar la resolución de A que construimos en 2.3.10 y a eso aplicarle el funtor (contravariante) $Hom_{A^e}(-, M)$.

Si luego usamos el isomorfismo de k -espacios vectoriales $Hom_{A^e}(A \otimes A, M) \cong M$ dado por $f \leftrightarrow f(1 \otimes 1)$ obtenemos el siguiente complejo doble $(CM^{n,m})$:

$$\begin{array}{ccccccc}
CM^{0,0} & \longrightarrow & CM^{0,1} & \longrightarrow & CM^{0,2} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & CM^{1,1} & \longrightarrow & CM^{1,2} & \longrightarrow & CM^{1,3} & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & CM^{2,2} & \longrightarrow & CM^{2,3} & \longrightarrow & \dots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}$$

que describiremos explícitamente a continuación.

En general:

$$CM^{n,m} = \begin{cases} \bigoplus_{i+j=n} M f_1^i f_2^j & \text{si } m = n, \\ \bigoplus_{i+j=n} (M e_1 f_1^i f_2^j) \oplus \bigoplus_{i+j=n} (M e_2 f_1^i f_2^j) & \text{si } m = n + 1, \\ \bigoplus_{i+j=n} M e_1 e_2 f_1^i f_2^j & \text{si } m = n + 2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Como antes, debemos identificar los diferenciales para poder aplicar después un argumento de sucesiones espectrales que nos permita calcular la cohomología de Hochschild de A con coeficientes en M .

Definición 2.5.1. *Los diferenciales horizontales del complejo doble están dados por:*

- $d_h^2(me_1f_1^if_2^j) = (-q^{-2i}my + qym)e_1e_2f_1^if_2^j,$
- $d_h^2(me_2f_1^if_2^j) = (q^{3j+1}mx - xm)e_1e_2f_1^if_2^j,$
- $d_h^1(mf_1^if_2^j) = (q^{3j}mx - xm)e_1f_1^if_2^j + (q^{-2i}my - ym)e_2f_1^if_2^j,$
- $d_h(me_1e_2f_1^if_2^j) = 0.$

Definición 2.5.2. *Los diferenciales verticales del complejo doble están dados por:*

- $d_v^2(me_1e_2f_1^if_2^j) = (q^{6i+2}y^2m + q^{4i+1}ymy + q^{2i}my^2)e_1f_1^if_2^{j+1} + (-q^{3j-1}mx - q^{-2}xm)e_2f_1^{i+1}f_2^j,$
- $d_v^1(me_1f_1^if_2^j) = (q^{3j}mx + xm)f_1^{i+1}f_2^j,$
- $d_v^1(me_2f_1^if_2^j) = (q^{6i}y^2m + q^{4i}ymy + q^{2i}my^2)f_1^if_2^{j+1},$
- $d_v(mf_1^if_2^j) = 0.$

Como siempre, los términos con exponentes negativos son nulos.

2.5.1. El caso $M = A$

Consideremos la base de A como k -espacio vectorial $\mathcal{B} = \{1, x, y, y^2, xy, xy^2\}$.

Vamos a trabajar como antes primero con las filas y después con las columnas, con el mismo argumento que ya usamos varias veces. Es un ejercicio de álgebra lineal calcular los núcleos e imágenes de los morfismos involucrados en cada sumando directo de cada fila. Concretamente, vamos a considerar el complejo:

$$0 \longrightarrow Af_1^if_2^j \xrightarrow{d_h^1} (Ae_1f_1^if_2^j) \oplus (Ae_2f_1^if_2^j) \xrightarrow{d_h^2} Ae_1e_2f_1^if_2^j \longrightarrow 0$$

En lo que sigue omitiremos en la notación las f .

Manteniendo la hipótesis de que $q^n \neq 1 \forall n$, podemos calcular núcleo e imagen de cada uno de los morfismos involucrados.

Llamemos $\gamma = (q^{3j} - 1)xe_1 + (q^{-2i} - 1)ye_2$ y $\delta = (q^{3j-1} - 1)xye_1 + (q^{-2i} - 1)y^2e_2$.

A partir de la definición de los morfismos se puede armar la siguiente tabla, construida de forma análoga a la de la sección anterior:

	e_1	e_2	1
1	$(-q^{-2i} + q)ye_1e_2$	$(q^{3j+1} - 1)xe_1e_2$	$(q^{3j} - 1)xe_1 + (q^{-2i} - 1)ye_2$
x	$(-q^{-2i} + 1)xye_1e_2$	0	$(q^{-2i} - q^{-1})xye_2$
y	$(-q^{-2i} + q)y^2e_1e_2$	$(q^{3j} - 1)xye_1e_2$	$(q^{3j-1} - 1)xye_1 + (q^{-2i} - 1)y^2e_2$
y^2	0	$(q^{3j-1} - 1)xy^2e_1e_2$	$(q^{3j-2} - 1)xy^2e_1$
xy	$(-q^{-2i} + 1)xy^2e_1e_2$	0	$(q^{-2i} - q^{-1})xy^2e_2$
xy^2	0	0	0

Usando la tabla concluimos que:

$$\text{Ker}(d_h^1) = \begin{cases} \langle xy^2 \rangle & \text{si } i \neq 0 \vee j \neq 0, \\ \langle 1, xy^2 \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

$$\text{Im}(d_h^1) = \begin{cases} \langle xye_2, xy^2e_2, xy^2e_1, \gamma, \delta \rangle & \text{si } i \neq 0 \vee j \neq 0, \\ \langle xye_2, xye_1, xy^2e_1, xy^2e_2 \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ker}(d_h^2) = \begin{cases} \langle xe_2, xye_2, xy^2e_2, xy^2e_1, y^2e_1, \gamma, \delta \rangle & \text{si } i \neq 0 \vee j \neq 0, \\ \langle xe_2, xye_2, xy^2e_2, xy^2e_1, y^2e_1, xe_1, ye_2, \delta \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

$$\text{Im}(d_h^2) = \begin{cases} \langle xe_1e_2, ye_1e_2, xye_1e_2, xy^2e_1e_2, y^2e_1e_2 \rangle & \text{si } i \neq 0 \vee j \neq 0, \\ \langle xe_1e_2, ye_1e_2, xy^2e_1e_2, y^2e_1e_2 \rangle & \text{si } i = 0 \wedge j = 0. \end{cases}$$

Una vez hechos estos cálculos el siguiente teorema se deduce inmediatamente:

Teorema 2.5.3. *La homología del complejo que estamos considerando es:*

Si $i \neq 0 \vee j \neq 0$:

$$\begin{cases} k & \text{en el lugar } 0, \\ k^2 & \text{en el lugar } 1, \\ k & \text{en el lugar } 2. \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j = 0$:

$$\begin{cases} k^2 & \text{en el lugar } 0, \\ k^4 & \text{en el lugar } 1, \\ k^2 & \text{en el lugar } 2. \end{cases}$$

Más aún, las clases de los siguientes elementos son base de la homología:

Si $i \neq 0 \vee j \neq 0$:

$$\begin{cases} xy^2 & \text{en el lugar } 0, \\ xe_2, y^2e_1 & \text{en el lugar } 1, \\ 1e_1e_2 & \text{en el lugar } 2. \end{cases}$$

Si $i = 0 \wedge j = 0$:

$$\begin{cases} 1, xy^2 & \text{en el lugar 0,} \\ xe_2, y^2e_1, xe_1, ye_2 & \text{en el lugar 1,} \\ 1e_1e_2, xye_1e_2 & \text{en el lugar 2.} \end{cases}$$

Ahora debemos calcular la homología de las columnas. Podemos descomponer cada columna en varios sumandos directos tal como hicimos con las filas; dados i, j tenemos un complejo de la forma:

$$0 \longrightarrow Ae_1e_2f_1^if_2^j \xrightarrow{d_v^2} (Ae_1f_1^if_2^{j+1}) \oplus (Ae_2f_1^{i+1}f_2^j) \xrightarrow{d_v^1} Af_1^{i+1}f_2^{j+1} \longrightarrow 0$$

Si i y j no son ambos nulos, cuando tomamos homología respecto de las filas este complejo se transforma en:

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\bar{d}_v^2} k \oplus k \xrightarrow{\bar{d}_v^1} k \longrightarrow 0$$

Cuando identificamos las flechas usando el Teorema 2.5.3 podemos observar que el complejo es exacto, porque la primera flecha se corresponde con la inclusión en la diagonal y la segunda con la suma de las coordenadas, a menos de escalares no nulos, despreciados para facilitar la escritura de las bases de la homología.

Falta considerar algunos morfismos, además de cuando $i = j = 0$, pues en la sucesión exacta que estudiamos antes aparecen términos $e_1f_1^if_2^{j+1}$ y $e_2f_1^{i+1}f_2^j$, lo que hace que nunca consideremos los términos $e_1f_1^i$ y $e_2f_2^j$.

Observación 2.5.4. *Observemos que:*

- $d_v^1(y^2e_1f_1^i) = (q^{3j-2} + 1)xy^2f_1^{i+1}$,
- $d_v^1(xe_2f_2^j) = (q^{6i-2} + q^{4i-1} + q^{2i})xy^2f_2^{j+1}$.

Como los escalares involucrados no son nulos, estos dos morfismos resultan isomorfismos y por lo tanto no aportan nada a la homología.

Hemos demostrado entonces que el único aporte a la homología proviene de la fila 0 de nuestro complejo doble. Debemos inspeccionar los morfismos (verticales) que salen de la fila 0 del mismo.

Hay 3 columnas que intersecan a la primer fila, una de largo 3, una de largo 2 y la restante de largo 1.

Primero estudiamos esto:

$$0 \longrightarrow Ae_1e_2 \xrightarrow{d_v^2} (Ae_1f_2) \oplus (Ae_2f_1) \xrightarrow{d_v^1} Af_1f_2 \longrightarrow 0$$

Ya analizamos la segunda flecha, que tiene núcleo de dimensión 1, y como la primera flecha es no nula, la homología en los lugares 1 y 2 debe ser nula. Como el dominio de d_v^2 tiene dimensión 2 resulta que $\dim_k \text{Ker}(d_v^2) = 1$ (pues tiene rango 1).

Seguimos estudiando los morfismos que salen de la fila 0, veamos ahora:

$$0 \longrightarrow Ae_1 \xrightarrow{d_v^1} Af_1 \longrightarrow 0$$

Pero como $d_v^1(xe_1) = 0$ y $d_v(y^2e_1) \neq 0$ deducimos que $\dim_k \text{Ker}(d_v) = 1$. La sucesión:

$$0 \longrightarrow Ae_2 \xrightarrow{d_v^1} Af_2 \longrightarrow 0$$

se comporta de forma análoga. Deducimos entonces que $\dim(\text{Ker}(d_v)) = 1$.

Para verlo mejor, podemos poner lo que dedujimos en un diagrama que muestra el aporte a la cohomología de cada lugar:

$$\begin{array}{cccccc}
 k^2 & k^2 & k & 0 & \cdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
 \end{array}$$

En consecuencia hemos probado lo siguiente:

Teorema 2.5.5. *Si q no es raíz de la unidad, entonces hay un isomorfismo de k -espacios vectoriales:*

$$HH^n(A) = \begin{cases} k^2 & \text{si } n = 0, \\ k^2 & \text{si } n = 1, \\ k & \text{si } n = 2, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Observación 2.5.6. *Supongamos que queremos calcular la homología y la cohomología de Hochschild de un álgebra $A = k\langle x, y \rangle / (x^a, y^b, xy - qyx)$. Es claro que las técnicas anteriores pueden aplicarse sin problemas, adaptándolas de manera conveniente, de acuerdo con la variación de los exponentes.*

Si bien este problema fue resuelto recientemente con técnicas diferentes en [BE], consideramos que el método presentado en este trabajo se generaliza más fácilmente.

Capítulo 3

Una generalización

3.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es estudiar la homología y cohomología de Hochschild de una familia de álgebras cuánticas de intersección completa.

Fijemos un cuerpo k , $n \in \mathbb{N}$, $(q_{ij}) \in M_n(k)$ multiplicativamente antisimétrica y exponentes $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$. Sea $A = k \langle x_1, \dots, x_n \rangle / (x_k^{a_k}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j : 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n)$.

Notemos que A es una k -álgebra de dimensión $\prod a_i$.

En la siguiente Sección vamos a introducir algunos conceptos y resultados tomados de [BO].

Posteriormente construiremos inductivamente una resolución de A como A -bimódulo. Una vez obtenida la resolución, el cálculo de la homología de Hochschild, si bien no lo llevaremos a cabo en este trabajo, puede realizarse utilizando herramientas análogas a las de capítulo anterior, luego de realizadas las identificaciones correspondientes.

3.2. Productos tensoriales torcidos

Vamos a hacer un breve recorrido por el artículo de P. Bergh y S. Oppermann (ver [BO]).

Definición 3.2.1. Sean G, H grupos abelianos, Λ una k -álgebra G -graduada y Γ una k -álgebra H -graduada. Dado un morfismo de grupos definimos $t : G \otimes_{\mathbb{Z}} H \rightarrow k^\times$ una nueva k -álgebra $G \otimes_{\mathbb{Z}} H$ -graduada $\Lambda \otimes^t \Gamma$ que como espacio vectorial es $\Lambda \otimes \Gamma$ y cuya estructura de álgebra está dada por:

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') := t(|a'| \otimes |b|)aa' \otimes bb',$$

para elementos homogéneos $a, a' \in \Lambda$ y $b, b' \in \Gamma$.

Definición 3.2.2. Dados un Λ -módulo graduado M y un Γ -módulo graduado N podemos construir un $\Lambda \otimes^t \Gamma$ -módulo graduado $M \otimes^t N$ que como espacio vectorial está dado por $M \otimes N$ y

cuya estructura de módulo es:

$$(a \otimes b)(m \otimes n) := t(|m| \otimes |b|)am \otimes bn,$$

para elementos homogéneos $a \in \Lambda, b \in \Gamma, m \in M$ y $n \in N$.

Notación 3.2.3. Notaremos $t(m \otimes n) := t(|m| \otimes_{\mathbb{Z}} |n|)$ para $m \in M$ y $n \in N$ elementos homogéneos.

La observación más importante para nosotros es la siguiente:

Observación 3.2.4. Sean $A = k \langle x_1, \dots, x_n \rangle / (x_k^{a_k}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j : 1 \leq k \leq n, 1 \leq i < j \leq n)$ y $A' = k \langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle / (x_k^{a_k}, x_j x_i - q_{ij} x_i x_j : 1 \leq k \leq n-1, 1 \leq i < j \leq n-1)$. Definamos $t((d_1, \dots, d_{n-1}), d_n) = \prod_{i=1}^{n-1} q_{in}^{d_i d_n}$, entonces $A \cong A' \otimes^t k[x_n] / (x_n^{a_n})$.

La Observación anterior es esencial para construir inductivamente la resolución de A que estamos buscando.

Definición 3.2.5. Sean G un grupo abeliano, Λ una k -álgebra G -graduada, M un Λ -módulo graduado y $g \in G$, el g -ésimo *shift* de M es un Λ -módulo graduado $M[g]$ cuya componente de grado g' es $M[g]_{g'} = M_{g'-g}$.

Consideremos el morfismo k -lineal $\phi : (\Lambda \otimes^t \Gamma)^e[a \otimes b] \rightarrow \Lambda^e[a] \otimes^t \Gamma^e[b]$ definido por:

$$\phi((l \otimes g) \otimes (l' \otimes g')) = t(l' \otimes g)t(a \otimes g)t(l' \otimes b)(l \otimes l') \otimes (g \otimes g').$$

Entonces vale que:

Proposición 3.2.6. ϕ es un isomorfismo de $(\Lambda \otimes^t \Gamma)^e$ -módulos graduados.

Dem: Se comprueba fácilmente. □

Ahora deducimos el siguiente corolario:

Corolario 3.2.7. Dados un Λ^e -módulo graduado proyectivo X y un Γ^e -módulo graduado proyectivo Y , el producto tensorial torcido $X \otimes^t Y$ es un $(\Lambda \otimes^t \Gamma)^e$ -módulo graduado proyectivo.

Lema 3.2.8. (cf. Lemma 4.5 de [BO]). Dados un Λ^e -módulo graduado X , un Γ^e -módulo graduado Y y resoluciones proyectivas graduadas de bimódulos:

$$\mathbb{P}_* \rightarrow X \text{ y } \mathbb{Q}_* \rightarrow Y,$$

el complejo total de $\mathbb{P} \otimes^t \mathbb{Q}$ es una resolución proyectiva graduada de $X \otimes^t Y$ como $\Lambda \otimes^t \Gamma$ -bimódulo. □

3.3. Resolución de A como A -bimódulo

Vamos a construir la resolución inductivamente, comencemos tratando el caso $n = 1$.

3.3.1. El caso $n = 1$

Si $A = \frac{k[x]}{(x^a)}$ queremos construir una resolución proyectiva de A como A -bimódulo. Definamos morfismos de bimódulos $d_i : A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ ($i = 1, 2$) via:

$$d_1(1 \otimes 1) = 1 \otimes x - x \otimes 1,$$

$$d_2(1 \otimes 1) = \sum_{k,l,a} x^k \otimes x^l.$$

Entonces:

Proposición 3.3.1. *El siguiente complejo es una resolución libre de A como A -bimódulo:*

$$\dots \longrightarrow A \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes A \xrightarrow{d_2} A \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0.$$

Dem: Se puede verificar directamente que el complejo anterior es exacto construyendo una homotopía, para más detalles ver [BACH2]. \square

3.3.2. El caso general

Ahora que ya tratamos el caso $n = 1$ aplicaremos los teoremas del artículo [BO] y la Observación 3.2.4 para construir la resolución que estábamos buscando.

Recordemos que habíamos fijado al principio un $n \in \mathbb{N}$, una matriz $(q_{ij}) \in M_n(k)$ multiplicativamente antisimétrica y $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$.

Notación 3.3.2. Llamemos $A_l = k[x_l]/(x_l^{a_l})$.

En la Proposición 3.3.1 construimos una resolución proyectiva como bimódulo de A_l .

Notación 3.3.3. Notemos:

$$\dots \longrightarrow A_l \otimes e_l^2 \otimes A_l \longrightarrow A_l \otimes e_l^1 \otimes A_l \longrightarrow A_l \otimes e_l^0 \otimes A_l \longrightarrow A_l \longrightarrow 0,$$

a la resolución construida en 3.3.1.

Notemos además $d_i^l : A_l \otimes e_l^i \otimes A_l \rightarrow A_l \otimes e_l^{i-1} \otimes A_l$ a los diferenciales de esta resolución.

Es inmediato observar que si i es par $d_i^l = d_2$ y si no $d_i^l = d_1$.

Definición 3.3.4. Dado $p \in \mathbb{N}$, definimos:

$$M_p = \bigoplus_{i_1 + \dots + i_n = p} (\dots ((A_1 \otimes e_1^{i_1} \otimes A_1) \otimes^t (A_2 \otimes e_2^{i_2} \otimes A_2)) \otimes^t \dots \otimes^t (A_n \otimes e_n^{i_n} \otimes A_n)).$$

Si $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ es un conjunto de índices, notemos $\sum I = i_1 + \dots + i_n$ y $M_I = (\dots ((A_1 \otimes e_1^{i_1} \otimes A_1) \otimes^t (A_2 \otimes e_2^{i_2} \otimes A_2)) \dots \otimes^t (A_n \otimes e_n^{i_n} \otimes A_n))$. De esta forma $M_p = \bigoplus_{\sum I = p} M_I$.

Acabamos de definir los módulos involucrados en la resolución que estábamos buscando, ahora debemos definir los morfismos, utilizando el Lemma 4.4 de [BO].

Definición 3.3.5. Dado $p \in \mathbb{N}$, sea $d_p : M_p \rightarrow M_{p-1}$ dado por:

$$d_p|_{M_I} = \sum_{l=1}^n (\dots (Id^1 \otimes^t Id^2) \otimes^t \dots \otimes^t d_{i_l}^l) \dots \otimes^t Id^n).$$

Por la forma en que construimos M_p y d_p y teniendo en cuenta la Observación 3.2.4 deducimos que (M_*, d_*) es el producto tensorial torcido de resoluciones de A_1, \dots, A_n en ese orden y por lo tanto, usando el Lema 3.2.8, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.3.6. (M_*, d_*) es una resolución proyectiva de A como A -bimódulo.

Bibliografía

- [AI] L. Avramov, S. Iyengar. Gaps in Hochschild cohomology imply smoothness for commutative algebras. *Math. Res. Lett.* **12** (5-6) (2005), pp. 789–804.
- [AV] L. Avramov and M. Vigueé-Poirrier. Hochschild homology criteria for smoothness. *Internat. Math. Research Notices* **1** (1992), pp. 17–25.
- [BACH] A. Campillo, J. Guccione, J.J. Guccione, M.J. Redondo, A. Solotar and O. Villamayor. A Hochschild homology criterium for smoothness. *Comment. Math. Helv.* **69** (1994), pp. 163–168.
- [BACH2] J. Guccione, J.J. Guccione, M.J. Redondo, A. Solotar and O. Villamayor. *Cyclic homology of algebras with one generator*. *K-Theory* **5** (1) (1991), pp. 51–69.
- [BE] P. Bergh and K. Erdmann. (Co)homology of quantum complete intersections. *Algebra Number Theory* **2**(5) (2008), pp. 501–522.
- [BGMS] R. Buchweitz, E. Green, D. Madsen and Ø. Solberg. Finite Hochschild cohomology without finite global dimension. *Math. Res. Lett.* **12** (5-6) (2005), pp. 805–816.
- [BM] P. Bergh and D. Madsen. Hochschild homology and global dimension. [arXiv:0803.3550v1](https://arxiv.org/abs/0803.3550v1).
- [BO] P. Bergh and S. Oppermann. Cohomology of twisted tensor products. *J. Algebra* **320** (8) (2008), pp. 3327–3338.
- [CE] H. Cartan and S. Eilenberg. *Homological algebra*. With an appendix by David A. Buchsbaum. Reprint of the 1956 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999. xvi+390 pp.
- [FSS] M. Farinati, A. Solotar and M. Suárez-Alvarez. Hochschild homology and cohomology of generalized Weyl algebras. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **53** (2) (2003), pp. 465–488.
- [Han] Y. Han. Hochschild (co)homology dimension. *J. London Math. Soc. (2)* **73** (3) (2006), pp. 657–668.

- [Hap] D. Happel. Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras. *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, Lecture Notes in Mathematics **1404** (1989), pp. 108–126.
- [HKR] G. Hochschild, B. Konstant and A. Rosemberg. Differential forms on regular affine algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.* **102** (1962), pp. 383–408.
- [Igu] K. Igusa. Cyclic homology and the determinant of the Cartan matrix. *J. Pure Appl. Algebra* **83** (2) (1992), pp. 101–119.
- [L] S. Lang. *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.
- [Lo] J.-L. Loday. *Cyclic Homology* Cyclic homology. Appendix E by María O. Ronco. Second edition. Chapter 13 by the author in collaboration with Teimuraz Pirashvili. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998. xx+513 pp.
- [M] S. Mac Lane. *Homology*. Reprint of the 1975 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. x+422 pp.
- [Ma] Y. Manin. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **37** (1987), pp. 191–205.
- [Ro] A. Rodicio. Smooth algebras and vanishing of Hochschild homology. *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), pp. 474–477.
- [Sk] E. Sköldberg. The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebras. *J. London Math. Soc.* **59** (1999), pp. 76–86.
- [V] M. Vigué-Poirrier. Critères de nullité pour l'homologie des algèbres graduées. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **317** (1993), 7, pp. 647–649.
- [W] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.