UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El Teorema de Nehari multidimensional y formas de Hankel en espacios de Hardy.

Joaquín Camilo Singer

Director: Daniel Carando

Marzo de 2016

Agradecimientos

A mis viejos y a mi hermana.
Al grupo del Pelle.
A Dani Carando, en la dirección.
A los amigos de la facultad, que me acompañaron a lo largo de esta carrera.

Índice

Introducción

Dada una sucesión $q = (q_n)_{n\geq 0}$ en ℓ^2, su correspondiente forma de Hankel en $\ell^2 \times \ell^2$ (en principio, definida para sucesiones de soporte finito) está dada por

$$H(a,b) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k q_{k+j}.$$

Estas formas se pueden pensar también como operadores bilineales en $H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$, donde $H^2(\mathbb{T})$ es el espacio de Hardy en el toro $\mathbb{T}$, formado por las funciones en $L^2(\mathbb{T})$ cuyos coeficientes de Fourier negativos son cero. Para esto, identificamos las sucesiones (a_j) en ℓ^2 con funciones $f = \sum a_n e^{int}$. Si consideramos entonces la función $\psi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{q_n} e^{int}$, la forma de Hankel en $H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$ se puede expresar en términos la siguiente integral

$$H(f,g) = \int f(t)g(t)\overline{\psi(t)}dt.$$

Un resultado clásico, conocido como el Teorema de Nehari [10], dice que una forma de Hankel de este tipo es acotada si y sólo si existe una función ϕ en $L^\infty(\mathbb{T})$ tal que

$$H(f,g) = \int f(t)g(t)\overline{\phi}(t).$$

Resulta natural entonces preguntarse si este resultado vale para el toro d-dimensional y, de ser así, si sigue valiendo en el toro infinito-dimensional. S. Ferguson y M. Lacey probaron en [2] que vale el Teorema de Nehari en dimensión $d = 2$. El resultado fue extendido a toda dimensión finita $d > 2$ fue probado por M. Lacey y E. Terwilleger en [8]. El problema en dimensión infinita fue estudiado por H. Helson en [7], en donde sugiere una forma de probar que no vale el Teorema de Nehari en dimensión infinita, pero sin llegar a probar este resultado. A partir de lo propuesto por H. Helson, J. Ortega-Cerdá y K. Seip probaron en [11] que no vale el Teorema de Nehari en dimensión infinita.

El objetivo principal de esta Tesis es estudiar las formas de Hankel en infinitas variables y presentar el resultado de J. Ortega-Cerdá y K. Seip.

En el primer capítulo de esta Tesis presentamos algunas nociones básicas de análisis armónico como preliminares a lo que trabajaremos en los capítulos subsiguientes.

En el segundo capítulo introducimos los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ y $H^p(\mathbb{T})$ y probamos una serie de resultados que apuntan a demostrar un Teorema de factorización para funciones de $H^1(\mathbb{D})$ como producto de funciones en $H^2(\mathbb{D})$. Luego, a partir de este resultado, probamos que existe una isometría entre los espacios $H^p(\mathbb{D})$ y $H^p(\mathbb{T})$.

En el tercer capítulo introducimos las formas de Hankel en $\ell^2 \times \ell^2$ y vemos que podemos pensar a estas formas como operadores bilineales en $H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$. Probamos además el Teorema de Nehari, que caracteriza a las formas de Hankel acotadas. A partir de algunas aplicaciones del Teorema de Nehari, volvemos sobre los espacios $H^p(\mathbb{D})$ para probar un Teorema de Hardy y Littlewood y su correspondiente recíproco para funciones cuyos coeficientes de Fourier decrecen a cero.

El Capítulo 4 consta de tres partes. En la primera introducimos una notación multiplicativa para las series de Fourier de funciones definidas en el toro infinito-dimensional T^∞. Esta notación nos permitirá trabajar con formas de Hankel en infinitas variables. En la segunda parte, estudiamos el caso particular de las formas de Hankel de tipo Hilbert-Schmidt, para las cuales probamos que vale la generalización del Teorema de Nehari. Concluimos este capítulo estudiando el caso general de formas de Hankel en infinitas variables, para las cuales probamos que no vale el Tehorema de Nehari.

Concluimos esta Tesis estudiando las formas de Hankel en la clase de Schatten S_p, que tienen por caso particular a las formas de Hilbert-Schmidt estudiadas en el capítulo anterior. Como resultado principal de este capítulo, probamos que para ciertos valores de p, aún restringiéndonos a formas pertenecientes a la clase S_p, sigue sin valer el Teorema de Nehari en infinitas variables.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introducimos algunas nociones básicas de análisis armónico, definimos la transformada de Hilbert y la Proyección de Riesz y probamos dos Teoremas clásicos, el Teorema de aproximación de la identidad y el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz, que nos serán de utilidad en los capítulos subsiguientes.

1.1 Funciones en el toro, series y coeficientes de Fourier

Comencemos por introducir la notación que usaremos a lo largo de esta Tesis. Notamos con $\mathbb{D}$ al disco unitario en el plano complejo, es decir

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\},$$

y notamos con $\mathbb{T}$ al toro, esto es

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}.$$

A las funciones definidas en $\mathbb{T}$ las vamos a identificar con funciones definidas en $[-\pi, \pi]$, $2\pi-$periódicas vía

$$f(t) = f(e^{it}).$$

A partir de esta identificación, tenemos identificados también los espacios $L^p(\mathbb{T})$ con $L^p(-\pi, \pi)$, donde a ambos los consideramos con la medida de Lebesgue normalizada.

A partir de estas nociones, podemos introducir la siguiente definición

Definición 1.1.1. Sea f una función en $L^1(\mathbb{T})$, definimos para n en $\mathbb{Z}$ el $n-$ésimo coeficiente de Fourier de f de la siguiente forma

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

De manera análoga podemos definir ahora el $n-$ésimo coeficiente de Fourier para una medida μ en el toro, boreliana y de variación acotada como

$$\hat{\mu}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

Vamos a definir también la serie de Fourier de una función f en $L^1(\mathbb{T})$, en principio como la serie formal

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}.$$

Observación 1.1.2. Si f es una función en $L^1(\mathbb{T})$ y n es un entero, entonces la función que asigna $f \to \hat{f}(n)$ es lineal y se tiene

$$|\hat{f}(n)| = |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt| \leq \|f\|_1,$$

lo cual prueba además que es acotada.

Una herramienta importante que vamos a utilizar también a lo largo de esta tesis son los polinomios trigonométricos, que definimos a continuación.

Definición 1.1.3. Definimos los polinomios trigonométricos como las funciones $Q(z)$ con z en $\mathbb{T}$ y de la forma

$$Q(z) = \sum_{n=-N}^{N} c_n z^n,$$

donde N es un número natural.

Veamos ahora que los polinomios trigonométricos son densos en los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$.

Proposición 1.1.4. *Sea $1 \leq p < \infty$, se tiene entonces que los polinomios trigonométricos son densos en $L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración: Por el Teorema de Stone-Weierstrass, resulta que los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$ con la norma del supremo. Como la convergencia uniforme implica convergencia en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$, el resultado de la proposición es inmediato entonces de observar que las funciones continuas son densas en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p < \infty$. □

Además de los polinomios trigonométricos en general, nos van a resultar de particular interés las sumas parciales de la serie de Fourier de una función f, que definimos a continuación.

Definición 1.1.5. Definimos para una función f en $L^1(\mathbb{T})$ la suma parcial $S_N f$ dada por

$$S_N f(t) = \sum_{|n|\leq N} \hat{f}(n)e^{int}.$$

1.2 El espacio $L^2(\mathbb{T})$ y la transformada de Hilbert

Observación 1.2.1. Las funciones e^{int}, $n \in \mathbb{Z}$ forman un conjunto ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$. En efecto

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\overline{e^{imt}}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \delta_{n,m}.$$

Definición 1.2.2. Definimos el subespacio de los polinomios trigonométricos de grado menor o igual a N como

$$V_N = \{P_N \in L^2(-\pi,\pi) : P_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}, a_n \in \mathbb{C}\}.$$

Tenemos entonces la siguiente propiedad

Proposición 1.2.3. *$S_N f$ es la proyección ortogonal de f sobre V_N, es decir, $S_N f$ pertenece a V_N y para todo $P_N \in V_N$ se tiene*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f - S_N(f))\overline{P_N}dt = 0.$$

Demostración: Es claro a partir de la definición que $S_N f$ pertenece a V_N. Para completar la prueba veamos que $f - S_N f$ es ortogonal a las funciones e^{ikt} para $|k| \leq N$. En efecto,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t) - S_N f(t))\, e^{-ikt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt - \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi}\hat{f}(n)e^{int}e^{-ikt}dt = 0.$$

Como las funciones e^{ikt} son una base de V_N, se tiene lo que queríamos. □

Corolario 1.2.4. *A partir de la Proposición 1.2.3 es inmediato que para todo P_N en V_N vale que*

$$\|f - P_N\|_2^2 = \|f - S_N f\|_2^2 + \|S_N f - P_N\|_2^2.$$

En particular, resulta que $S_N f$ es la mejor aproximación de f en el subespacio V_N, es decir,

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - P_N\|_2,$$

para todo P_N en V_N.

Observación 1.2.5. Si P_N es un polinomio trigonométrico en V_N, $P_N = \sum_{|n|\leq N} a_n e^{int}$, entonces

$$\|P_N\|_2^2 = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2. \tag{1.1}$$

Esta igualdad es inmediata de la ortogonalidad de las funciones e^{int}.

Estamos ahora en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 1.2.6. *Sea f una función en $L^2(-\pi,\pi)$, entonces $S_N f \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$.*

Demostración: Sean f una función en $L^2(-\pi,\pi)$ y $\varepsilon > 0$. Por la Proposición 1.1.4 existen $M_0 = M_0(\varepsilon)$ y P_{M_0} un polinomio trigonométrico en V_{M_0} tal que $\|f - P_{M_0}\|_2 < \varepsilon$. Entonces, si $N \geq M_0$, resulta que $P_{M_0} \in V_N$ y por el Corolario 1.2.4 tenemos

$$\|f - S_N f\|_2 \leq \|f - P_{M_0}\|_2 < \varepsilon.$$

Luego $S_N f \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$ como queríamos. □

A partir de este resultado identificamos a las funciones en $L^2(\mathbb{T})$ con su serie de Fourier. Observemos además que como $\|S_N f\|_2 \to \|f\|_2$ tenemos la igualdad de Parseval

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2.$$

Estamos ahora en condiciones de definir la transformada de Hilbert y la Proyección de Riesz en para funciones en $L^2(\mathbb{T})$.

Definición 1.2.7. Dada una función f en $L^2(\mathbb{T})$, $f \sim \sum \hat{f}(n)e^{int}$, definimos la transformada de Hilbert de f como

$$\mathcal{H}f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)sg(n)\hat{f}(n)e^{int}. \tag{1.2}$$

Definimos la proyección de Riesz de f como

$$P^+(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{1.3}$$

Observación 1.2.8. La proyección de Riesz y la transformada de Hilbert se relancionan a partir de la siguiente igualdad

$$P^+ f = \frac{f + Hf}{2} + \frac{\hat{f}(0)}{2}. \tag{1.4}$$

Veamos que la transformada de Hilbert está bien definida como un operador de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$. En efecto, si f es una función en $L^2(\mathbb{T})$,$N, M \in \mathbb{N}$, $N > M$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\sum_{n=-N}^{N} (-i)sg(n)\hat{f}(n)e^{int} - \sum_{n=-M}^{M} (-i)sg(n)\hat{f}(n)e^{int}\|_2^2 &= \|\sum_{M<|n|\leq N} (-i)sg(n)\hat{f}(n)e^{int}\|_2^2 \\ &= \sum_{M<|n|\leq N} |(i)sg(n)|^2|\hat{f}(n)|^2 \\ &\leq \sum_{M<|n|} |\hat{f}(n)|^2.\end{aligned}$$

Como $\|f\|_2^2 = \sum |\hat{f}(n)|^2$, se tiene que

$$\sum_{M<|n|} |\hat{f}(n)|^2 \to 0, (M \to \infty).$$

Dado que el espacio $L^2(\mathbb{T})$ es completo, esto prueba que la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-i)sg(n)\hat{f}(n)e^{int},$$

define una función en $L^2(\mathbb{T})$. Por lo tanto, $\mathcal{H}$ está bien definido como operador de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$. Más aún, de la igualdad (1.4), se desprende la buena definición de la Proyección de Riesz como operador de $L^2(\mathbb{T})$ en $L^2(\mathbb{T})$. El siguiente Teorema nos permitirá extender la transformada de Hilbert a un operador acotado de $L^p(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$.

Teorema 1.2.9. *Sea $1 < p < \infty$, existe una constante $A_p > 0$ tal que para toda f en $C^\infty(\mathbb{T})$ se tiene*

$$\|\mathcal{H}f\|_p \leq A_p\|f\|_p.$$

Para la demostración de este Teorema referimos a [3, p. 215, Teorema 3.5.6.].

Corolario 1.2.10. *La transformada de Hilbert y la proyección de Riesz se extienden a operadores acotados de $L^p(\mathbb{T})$ en $L^p(\mathbb{T})$*

Demostración: En el caso de la transformada de Hilbert, el resultado es consecuencia del Teorema 1.2.9 y de la densidad de las funciones C^∞ en $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$. Se desprende entonces el mismo resultado para la proyección de Riesz de la igualdad (1.4). □

Veamos ahora que a partir de este resultado, podemos extender el Teorema 1.2.6 a los espacios $L^p(\mathbb{T})$ para $1 < p < \infty$, es decir, que $S_N f \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$. Para ello, vamos a probar necesitar la siguiente Proposición.

Proposición 1.2.11. *Sea $1 < p < \infty$, entonces $S_N f \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda f en $L^p(\mathbb{T})$ si y sólo si existe una constante $C > 0$ independiente de N y de f tal que*

$$\|S_N f\|_p \leq C\|f\|_p. \tag{1.5}$$

Demostración: $\Leftarrow$) Sea $1 < p < \infty$ y supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que se cumple (1.5). Dados $\varepsilon > 0$ y f en $L^p(\mathbb{T})$ sabemos que existen M_0 en $\mathbb{N}$ y un polinomio trigonométrico P_M en V_M tal que $\|f - P_M\|_p \leq \varepsilon$. Entonces, si $N \geq M_0$, como $S_N(P_M) = P_M$ tenemos

$$\begin{aligned}\|f - S_N f\|_p &\leq \|f - P_M\|_p + \|S_N(f - P_M)\|_p \\ &\leq (1 + C)\|f - P_M\|_p \\ &\leq (1 + C)\varepsilon.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$) Supongamos ahora que $S_N f \to f$ para toda f en $L^p(\mathbb{T})$. Entonces $\|S_N f\|_p \leq C(f)$ para todo N. Tenemos entonces por el principio de acotación uniforme que existe una constante independiente de f y de N tal que $\|S_N f\|_p \leq C\|f\|_p$. □

Estamos entonces en condiciones de probar el siguiente Teorema

Teorema 1.2.12. *Sea $1 < p < \infty$, entonces $S_N f \to f$ para toda f en $L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración: Dada f en $L^p(\mathbb{T})$, se tiene que

$$e^{-imt}P^{+}(e^{imt}f) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n-m)e^{i(n-m)t} = \sum_{n=-m}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}.$$

Se sigue entonces que

$$S_N(f) = e^{-iNt}P^{+}(e^{int}f) - e^{i(N+1)t}P^{+}(e^{-i(N+1)t}f).$$

Por lo tanto,

$$\|S_N f\|_p \leq 2\|P^{+}\|_{L^p(\mathbb{T})\to L^p(\mathbb{T})}\|f\|_p \leq C\|f\|_p.$$

Por la proposición 1.2.11 resulta que $S_N \to f$ en $L^p(\mathbb{T})$ para toda f en $L^p(\mathbb{T})$, como queríamos. □

1.3 Interpolación y aproximación de la identidad

Para finalizar el capítulo, vamos a probar dos Teoremas que nos serán de utilidad más adelante en esta Tesis.

Comencemos por definir una aproximación de la identidad en $\mathbb{T}$

Definición 1.3.1. Una aproximación de la identidad en $\mathbb{T}$ (con parámetro $\varepsilon \to 0$) es una familia de funciones k_ε en $L^1(\mathbb{T})$ con las siguientes propiedades

(i) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|k_\varepsilon\|_1 \leq c$ para todo $\varepsilon > 0$.

(ii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_\varepsilon(t)dt = 1$ para todo $\varepsilon > 0$.

(iii) Para todo $\delta > 0$ se tiene que $\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|t|<\pi} |k_\varepsilon(t)|dt \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.

Tenemos entonces el siguiente Teorema

Teorema 1.3.2 (Teorema de aproximación de la identidad)**.** *Sea k_ε una aproximación de la identidad en $\mathbb{T}$, se tiene*

(1) *Si f es una función en $L^p(\mathbb{T})$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\|k_\varepsilon * f - f\|_p \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.*

(2) *Si f es una función contínua en $\mathbb{T}$, entonces $\|k_\varepsilon * f - f\|_\infty \to 0$ si $\varepsilon \to 0$.*

Demostración: Comencemos por ver (1). Dada una función g continua en $\mathbb{T}$, se tiene para t, s en $[-\pi, \pi]$ que

$$|g(t-s) - g(t)|^p \leq (2\|g\|_\infty)^p.$$

Aplicando entonces el Teorema de convergencia dominada, obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t-s) - g(t)|^p dt \to 0, \text{ si } s \to 0. \tag{1.6}$$

Si consideramos ahora una función f en $L^p(\mathbb{T})$ arbitraria, de aproximar a f por una función continua g se obtiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|^p dt \to 0, \text{ si } s \to 0. \tag{1.7}$$

Dado $\eta > 0$, por (1.7), existe un $\delta > 0$ tal que si $|s| \leq \delta$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t-s) - f(t)|^p dt < \left(\frac{\eta}{2c}\right)^p, \tag{1.8}$$

donde c es la constante de la Definición 1.3.1 (i). Si consideramos ahora $k_\varepsilon * f(t) - f(t)$, como k_ε tiene integral 1 para todo $\varepsilon > 0$, tenemos

$$\begin{aligned}
k_\varepsilon * f(t) - f(t) &= k_\varepsilon * f(t) - f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_\varepsilon(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t-s) - f(t))k_\varepsilon(s)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|s|\leq\delta} (f(t-s) - f(t))k_\varepsilon(s)ds \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leq\pi} (f(t-s) - f(t))k_\varepsilon(s)ds,
\end{aligned}$$

donde $\delta > 0$ es el valor determinado en (1.8). Tomando entonces norma p obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\frac{1}{2\pi}\int_{|s|\leq\delta} (f(t-s) - f(t))k_\varepsilon(s)ds\|_p &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|s|\leq\delta} \|f(t-s) - f(t)\|_p |k_\varepsilon(s)|ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{|s|\leq\delta} \frac{\delta}{2c}|k_\varepsilon(s)|ds \leq \frac{\eta}{2}.
\end{aligned}$$

Por otra parte, por la propiedad (iii) en 1.3.1, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_0$ se cumple

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leq\pi} |k_\varepsilon(s)|ds \leq \frac{\eta}{4\|f\|_p}.$$

Tenemos entonces para $\varepsilon > \varepsilon_0$

$$\|\frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leq\pi} (f(t-s) - f(t))k_\varepsilon(s)ds\|_p \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\delta<|s|\leq\pi} 2\|f\|_p |k_\varepsilon(s)|ds \leq \frac{\eta}{2}.$$

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$ se tiene

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p \leq \eta.$$

Como $\eta > 0$ era arbitrario, se sigue que

$$\|k_\varepsilon * f - f\|_p \to 0, \text{ si } \varepsilon \to 0.$$

Veamos ahora el caso (2). Sea f una función continua en $\mathbb{T}$. Como T es compacto, f es uniformemente continua en T, luego dado $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|s| \leq \delta$ entonces

$$|f(t-s) - f(t)| \leq \frac{\eta}{2c}, \tag{1.9}$$

para todo t en $[-\pi, \pi]$. Tomemos ahora $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| \leq \pi} |k_\varepsilon(s)| ds \leq \frac{\eta}{4\|f\|_p}. \tag{1.10}$$

Combinando (1.9) y (1.10), tenemos

$$\begin{aligned}
\|k_\varepsilon f - f\|_\infty &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s| \leq \delta} |k_\varepsilon(s)| \|f(t-s) - f(t)\|_\infty ds && (1.11)\\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| < \pi} |k_\varepsilon(s)| \|f(t-s) - f(t)\|_\infty ds && (1.12)\\
&\leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta, && (1.13)
\end{aligned}$$

lo cual prueba que $k_\varepsilon * f$ converge uniformemente a f si $\varepsilon \to 0$. □

Nuestro siguiente objetivo es probar el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Para ello introducimos las siguientes definiciones.

Definición 1.3.3. Si T es un operador lineal o sublineal y $1 \leq p, q \leq \infty$, diremos que T es de tipo fuerte (p, q) si $T : L^p \to L^q$ es acotado. Si $1 \leq p, q < \infty$ diremos que T es de tipo débil (p, q) si existe $C > 0$ tal que para todo $\lambda > 0$.

$$|\{x\colon |Tf(x)| > \lambda\}| \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q. \tag{1.14}$$

Observación 1.3.4. Si T es de tipo fuerte (p, q) entonces T es de tipo débil (p, q).

Demostración: Basta con observar que

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| = \int_{\{|Tf| > \lambda\}} dx \leq \int \frac{|Tf|^q}{\lambda^q} dx \leq \left(\frac{C\|f\|_p}{\lambda}\right)^q. \qquad \square$$

Definición 1.3.5. Definimos la función de distribución de una función f, $d_f(\lambda) : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ como

$$d_f(\lambda) = |\{x : |f(x)| > \lambda\}|.$$

Observación 1.3.6. Si $1 \leq p < \infty$, por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty p\lambda^{p-1} d_f(\lambda) d\lambda.$$

Veamos ahora si el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz.

Teorema 1.3.7 (Teorema de interpolación de Marcinkiewicz)**.** *Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq p$ y T un operador sublineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$ tal que T es de tipo débil (p_0, p_0) y (p_1, p_1). Entonces T es de tipo fuerte (p, p) para todo $p \in (p_0, p_1)$.*

Demostración: Dado λ, escribimos a f como $f = f_0 + f_1$, donde

$$\begin{aligned} f_0 &= f_{\chi\{x:|f(x)|>c\lambda\}} \\ f_1 &= f_{\chi\{x:|f(x)|\leq c\lambda\}}, \end{aligned}$$

para cierta constante c que vamos a elegir después. Como T es sublineal, $|Tf(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|$, entonces

$$d_{Tf}(\lambda) \leq d_{Tf_0}(\lambda/2) + d_{Tf_1}(\lambda/2).$$

Además, por hipótesis sabemos que

$$d_{Tf_0}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_0\|f_0\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0},$$

y que

$$d_{Tf_1}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_1\|f_1\|_{p_1}}{\lambda}\right)^{p_1}.$$

Para completar la demostración, separamos en dos casos. Si $p_1 = \infty$, tomamos $c = 1/2A_1$. Para este valor de c se verifica

$$\|Tf_1\|_\infty \leq A_1\|f_1\|_\infty \leq A_1 c\lambda = \lambda/2,$$

lo que implica que $d_{Tf_1}(\lambda/2) = 0$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_p^p &= p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{Tf}(\lambda) d\lambda \\ &\leq p\int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{Tf_0}(\lambda/2) d\lambda \\ &\leq p\int_0^\infty \lambda p - 1 \left(\frac{2A_0\|f_0\|_{p_0}}{\lambda}\right)^{p_0} d\lambda \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \int |f_0(x)|^{p_0} dx d\lambda \\ &= p(2A_0)^{p_0} \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} \int_{\{|f|>c\lambda\}} |f(x)|^{p_0} dx d\lambda \\ &= \int |f(x)|^{p_0} \int_0^{|f(x)|/c} \lambda^{p-1-p_0} d\lambda dx \\ &= \frac{p}{p-p_0}(2A_0)^{p_0}(2A_1)^{p-p_0}\|f\|_p^p. \end{aligned}$$

Si ahora $p_1 < \infty$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_p^p &= \int_0^\infty \lambda^{p-1} d_{Tf}(\lambda) d\lambda \\
&\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \left(d_{Tf_0}(\lambda/2) + d_{Tf_1}(\lambda/2)\right) d\lambda \\
&\leq p \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_0} (2A_0)^{p_0} \int_{|f|>c\lambda} |f(x)|^{p_0} dx d\lambda \\
&+ p \int_0^\infty \lambda^{p-1-p_1} (2A_1)^{p_1} \int_{|f|\leq c\lambda} |f(x)|^{p_1} dx d\lambda \\
&= \left(\frac{p2^{p_0}}{p-p_0} \frac{A_0^{p_0}}{c^{p-p_0}} + \frac{p2^{p_1}}{p_1-p} \frac{A_1^{p_1}}{c^{p-p_1}} \right) \|f\|_p^p.
\end{aligned}$$

Si elegimos c tal que $(2A_0c)^{p_0} = (2A_1c)^{p_1}$ se obtiene que

$$\|Tf\|_p \leq 2p^{1/p} \left(\frac{1}{p-p_0} + \frac{1}{p_1-p} \right)^{1/p} A_0^{1-\theta} A_1^{\theta} \|f\|_p,$$

donde

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_0}, 0 < \theta < 1.$$

Esto completa la prueba. $\square$

Capítulo 2

Espacios de Hardy

En este capítulo introducimos los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$, probamos una identificación de los espacios $H^p(\mathbb{D})$ con un subespacio de $L^p(\mathbb{T})$ y la relación de estas funciones con sus coeficientes de Fourier. Como consecuencia vamos a obtener una demostración a un Teorema de F. y M. Riesz sobre medidas de variación acotada en el toro.

2.1 Introducción a los espacios de Hardy

Definición 2.1.1. Definimos los espacios $H^p(\mathbb{D})$ para $1 \leq p < \infty$ como

$$H^p(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ analítica} : \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^p dt\right)^{1/p} < \infty\}.$$

Para $p = \infty$ definimos:

$$H^\infty(\mathbb{D}) = \{f : \mathbb{D} \to \mathbb{C} \text{ analítica} : \sup_{0<r<1} |f(re^{it})| < \infty\}.$$

Si notamos con $f_r(e^{it}) = f(re^{it})$, la norma de f en $H^p(\mathbb{D})$ es

$$\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f\|_p = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Observemos que $\|f\|_p$ cumple la desigualdad triangular. Para esto, fijemos $0 < r < 1$, se tiene entonces:

$$\|(f+g)_r\|_p = \|f_r + g_r\|_p \leq \|f_r\|_p + \|g_r\|_p,$$

y tomando supremos sobre r, se obtiene el resultado. Más aún, $H^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach, sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $H^p(\mathbb{D})$, y fijemos $0 < r < R < 1$. Aplicando la fórmula de Cauchy e integrando en el disco de centro 0 y radio R se tiene que

$$\begin{aligned}(R-r)|f_n(z)-f_m(z)| &= (R-r)\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R}\frac{f_n(w)-f_m(w)}{w-z}dw\right| \\ &\leq (R-r)\frac{1}{2\pi}\int_{|w|=R}\frac{|f_n(w)-f_m(w)|}{R-r}d|w| = R\|(f_n-f_m)_R\|_1 \\ &\leq \|(f_n-f_m)_R\|_1 \leq \|(f_n-f_m)_R\|_p \leq \|f_n-f_m\|_p,\end{aligned}$$

de lo que se sigue que las $\{f_n\}$ convergen uniformemente sobre compactos a una función f que resulta holomorfa en el disco. Dado $\varepsilon > 0$, existe un m_0 tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ para todo $n \geq m_0$. Luego, para cualquier $r < 1$,

$$\|(f-f_{m_0})r\|_{L^p(\mathbb{T})} = \lim_{n\to\infty}\|(f_n-f_{m_0})_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \lim_{n\to\infty}\|f_n-f_{m_0}\|_p < \varepsilon,$$

por lo que $\{f_n\}$ converge a f en $H^p(\mathbb{D})$. Esto muestra que $H^p(\mathbb{D})$ es un espacio de Banach. Más aún, se tiene de la desigualdad de Hölder que $H^\infty \subset H^p \subset H^s$ si $1 \leq s < p < \infty$.

2.2 Límites radiales y la integral de Poisson

Comencemos primero por definir los espacios $H^p(\mathbb{T})$

Definición 2.2.1. Definimos los espacios $H^p(\mathbb{T})$ para $1 \leq p \leq \infty$ como

$$H^p(\mathbb{T}) = \{f \in L^p(\mathbb{T}) \colon \hat{f}(n) = 0 \text{ para } n < 0\}.$$

En lo que sigue probaremos una serie de resultados que nos permiten relacionar las funciones de $H^p(\mathbb{D})$ con el espacio $H^p(\mathbb{T})$. El objetivo es que quede demostrado al final del capítulo el siguiente Teorema.

Teorema 2.2.2. *Sea $1 \leq p \leq \infty$ y f una función en $H^p(\mathbb{D})$, entonces $g(e^{it}) = \lim_{r\to 1^-} f(re^{it})$ en $L^p(\mathbb{T})$ define una función en $H^p(\mathbb{T})$, f resulta además la integral de Poisson de g y $\|g\|_p = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$. Más aún, la asignación que manda f a la función g definida de esta forma resulta un isomorfismo isométrico entre $H^p(\mathbb{D})$ y $H^p(\mathbb{T})$.*

Comencemos entonces por definir la integral de Poisson y ver que efectivamente las funciones de $H^p(\mathbb{D})$ se pueden recuperar como la integral de Poisson de una función g en las condiciones del Teorema 2.2.2. A esta función g la llamaremos el límite radial de f.

Definición 2.2.3. Definimos para $0 \leq r < 1$ el núcleo de Poisson $P_r(t) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ como:

$$P_r(s) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{ins}.$$

Con esta definición, introducimos entonces para funciones en $L^p(\mathbb{T})$ la integral de Poisson de g como la función $\tilde{g}(z)$ definida en $\mathbb{D}$ de la siguiente forma

$$\tilde{g}(re^{it}) = \frac{1}{2\pi}(P_r * f)(t).$$

Para medidas μ definidas en el toro y de variación acotada, definimos la integral de Poisson como

$$\tilde{\mu}(re^{it}) = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)d\mu(s).$$

Es importante observar que la función $\tilde{g}$ definida de esta forma resulta una función armónica en $\mathbb{D}$.

Observación 2.2.4. El núcleo de Poisson $P_r(t)$ cumple las condiciones del Teorema de aproximación de la identidad: Veamos primero que para todo $r < 1$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1.$$

En efecto, como la serie

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{int},$$

se encuentra dominada por la serie geométrica convergente $\sum r^{|n|}$, tenemos convergencia uniforme y podemos intercambiar la serie con la integral al calcular

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{int}dt = 1,$$

donde la última igualdad resulta de observar que los ${e^{int}}_{n\in\mathbb{Z}}$ son ortogonales a 1 si $n \neq 0$, por lo que el único término que no integra 0 en la serie es el correspondiente a $n = 0$. Por otra parte, tenemos que el núcleo de Poisson es una función positiva, ya que

$$\begin{aligned} P_r(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{ins} &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{ins} + \sum_{m=0}^{\infty} r^m e^{-ims} - 1 \\ &= \frac{1}{1-re^{is}} + \frac{1}{1-re^{-is}} - 1 \\ &= \frac{1-r^2}{|1-re^{is}|^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que para todo $r < 1$ vale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(t)|dt = 1.$$

Notemos además que la cuenta anterior prueba que

$$P_r(s) = \frac{1-r^2}{|1-re^{is}|^2} = Re\left(\frac{1+re^{is}}{1-re^{is}}\right).$$

Por último, dado $0 < \delta < \pi$, tenemos:

$$\int_{\delta<|s|<\pi} |P_r(t)|dt = \int_{\delta<|s|<\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{it}|^2}dt$$
$$\leq \int_{\delta<|s|<\pi} \frac{1-r^2}{|1-re^{i\delta}|^2}dt \leq 2\pi \frac{1-r^2}{|1-re^{i\delta}|^2} \xrightarrow{r\to 1^-} 0$$

Por lo tanto, $P_r(t)$ cumple las hipótesis del Teorema de aproximación de la identidad.

Proposición 2.2.5. *Sea $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ armónica y definamos para $0 < r < 1$ la función $g_r(\theta) = g(re^{i\theta})$. se tiene entonces que:*

(1) *Si $1 < p \leq \infty$, g es la integral de Poisson de una función $h \in L^p(\mathbb{T})$ si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|g_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c$ para todo $0 < r < 1$.*

(2) *g es la integral de Poisson de una función h continua si y sólo si las funciones $(g_r)_r$ convergen uniformemente cuando $r \to 1^-$.*

(3) *g es la integral de Poisson de una medida de variación acotada μ si y sólo si existe una constante $c > 0$ tal que $\|g_r\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq c$ para todo $0 < r < 1$.*

(4) *g es la integral de Poisson de una función $h \in L^1$ si y sólo si las funciones $(g_r)_r$ convergen en $L^1(\mathbb{T})$ cuando $r \to 1^-$.*

Demostración: $\Rightarrow$) Para $1 < p \leq \infty$ la implicación que estamos considerando en (1) resulta de aplicar la propiedad de la convolución

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

En nuestro caso, tenemos

$$\|g_r\|_{L^p(\mathbb{T})} = \|h * P_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|h\|_{L^p(\mathbb{T})} \|P_r\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|h\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

La implicación $\Rightarrow$) en los casos (2) y (4) resulta de observar que el núcleo de Poisson cumple las condiciones del Teorema de aproximación de la identidad.
Si, como indica (3), g es la integral de Poisson de una medida μ, tenemos

$$g_r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)d\mu(s)$$

Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} \|g_r\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_r(t)|dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)d|\mu(s)|dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)dtd|\mu(s)| = \|\mu\|. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) Para el caso (1), supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que para todo $0 < r < 1$ se tiene que $\|g_r\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c$ $(1 < p \leq \infty)$, entonces existe una subsucesión g_{r_j} tal que $g_{r_j} \overset{w^*}{\to} h \in L^p$ (por el Teorema de Alaoglu, sumado a que $L^q(\mathbb{T})$ es separable, lo que permite tomar sucesiones, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_{r_j}(t)u(t) \to \int_{-\pi}^{\pi} h(t)u(r)dt \ \forall u \in L^q(\mathbb{T}).$$

Veamos que g es la integral de Poisson de h, esto es, $g_r(t) = \frac{1}{2\pi}(P_r * h)(t)$. Como g es armónica, si notamos con c_n el n-ésimo coeficiente de Fourier de g, tenemos que

$$g(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{int} = g_r(t)$$

Si consideramos entonces los coeficientes de Fourier de estas funciones, tenemos que

$$\hat{g}_r(n) = c_n r^{|n|} \xrightarrow{r \to 1^-} c_n.$$

Tenemos luego que

$$\hat{g}_{r_j}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_{r_j}(t)e^{-int}dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int}dt = \hat{h}(n).$$

Esto implica que $\hat{h}(n) = c_n$, de lo que se obtiene

$$\frac{1}{2\pi}(h * P_r)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n r^{|n|} e^{int} = g_r(t).$$

Como queríamos.

Para la implicación restante en (2),tenemos que si las funciones f_r convergen uniformemente a h en $\mathbb{T}$, tomando $F(re^{it}) = f(re^{it}) - \frac{1}{2\pi}(P_r * h)(t)$ obtenemos una función armónica en $\mathbb{D}$, continua en $\bar{\mathbb{D}}$ que vale 0 en el borde, por lo que $F \equiv 0$.

Completemos ahora la prueba para el caso (4). Si las funciones g_r convergen en $L^1(\mathbb{T})$ a una función h, se tiene que

$$\hat{g}_r = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_r(t)e^{-int}dt \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-int}dt = \hat{h}(n).$$

Y razonando como antes, resulta que g es la integral de Poisson de h.

Para ver el caso restante, (3), definimos para $0 \leq r < 1$ las siguientes funcionales lineales Λ_r en $C(\mathbb{T})$

$$\Lambda_r f = \int_{\mathbb{T}} f g_r d\sigma,$$

donde σ es la medida de Lebesgue normalizada. Por hipótesis $\|\Lambda_r\| \leq c$ para todo $0 \leq r < 1$. Como $C(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach separable, existe una medida μ en $\mathbb{T}$, con $\|\mu\| \leq c$ y una subsucesión $r_j \to 1$ tal que $\Lambda_{r_j} \to \mu \ w^*$. Como las funciones

$h_{r_j}(z) = g(r_j z)$ son armónicas en $\mathbb{D}$, continuas en $\bar{\mathbb{D}}$, por (2) se pueden calcular como la integral de Poisson de sus restricciones al toro. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} g(z) &= \lim_j h_{r_j}(z) \\ &= \lim_j \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s) h_{r_j}(e^{is}) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s) d\mu(e^{is}) ds, \end{aligned}$$

que es la integral de Poisson de la medida μ, como queríamos. □

Es importante notar que como el espacio $H^p(\mathbb{D})$ está compuesto por funciones holomorfas, podemos aplicar la proposición anterior en este contexto.

Proposición 2.2.6. *Si $1 \leq p \leq \infty$ y $g \in H^p(\mathbb{T})$, $\tilde{g}(re^{it})$, la integral de Poisson de g, pertenece a $H^p(\mathbb{D})$ y para $1 \leq p < \infty$, resulta que $\tilde{g}_r$ converge a g en $L^p(\mathbb{T})$.*

Demostración: Si $z = re^{it} \in \mathbb{D}$, tenemos que

$$\tilde{g}(z) = \int g(w) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \overline{w^n} d\sigma(w),$$

donde por $d\sigma$ entendemos la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$. Entonces, como la serie converge uniformemente para $|w| = 1$,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{int} \int g(w) \overline{w^n} d\sigma(w) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) r^{|n|} e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{g}(n) z^n, \end{aligned}$$

pues, por hipótesis, $\hat{g}(n) = 0$ para $n < 0$. Por lo tanto, $\tilde{g}$ resulta analítica. Además, aplicando el Teorema de Aproximación de la identidad para la integral de Poisson, tenemos que si $1 \leq p < \infty$, $\|\tilde{g}_r - g\|_{L^p(\mathbb{T})} \to 0$ si $r \to 1^-$. Si $p = \infty$, $\|\tilde{g}_r\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ por lo que se tiene que $\tilde{g} \in H^\infty(\mathbb{D})$. □

Observación 2.2.7. Con el mismo argumento, si μ es una medida compleja de variación acotada en $\mathbb{T}$ con $\hat{\mu}(n) = 0$ para $n < 0$ entonces la integral de Poisson de μ define una función en $H^1(\mathbb{D})$

A la inversa, tenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.8. *Sea $1 < p \leq \infty$ y $f \in H^p(\mathbb{D})$, entonces existe $g(w) = \lim_{r \to 1^-} f(rw)$ en $L^p(\mathbb{T})$. Además, $\hat{g}(n) = 0$ para $n < 0$ y $\tilde{g} = f$.*

Demostración: Supongamos que $f \in H^p(\mathbb{D})$, $1 < p \leq \infty$, por la Proposición 2.2.5 el límite del enunciado existe (y f resulta la integral de Poisson de g). Ahora, si $1 < p < \infty$, $\|f_r - g\|_p \to 0$, por lo que

$$\begin{aligned}\hat{g}(n) &= \int g(w)\overline{w^n}d\sigma(w)\\ &= \lim_{r\to 1^-}\int f_r(w)\overline{w^n}d\sigma(w)\\ &= \lim_{r\to 1^-}\hat{f}_r(n).\end{aligned}$$

Pero $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ y luego $\hat{f}_r(n) = a_n r^n$ si $n \geq 0$ y $\hat{f}_r(n) = 0$ si $n < 0$. Si $p = \infty$ se tiene que $f_r \xrightarrow{w^*} g$ si $r \to 1^-$. Como $\overline{w^n} \in L^1(\mathbb{T})$ para todo n, el mismo argumento muestra que $\hat{g}(n) = 0$ para $n < 0$. □

Es importante notar que esta Proposición prueba el Teorema 2.2.2 para $1 < p \leq \infty$.

2.3 Factorización en $H^1(\mathbb{D})$ y productos de Blaschke

En lo que sigue, probaremos varios resultados sobre los ceros de funciones en $H^1(\mathbb{D})$ para obtener un resultado de factorización de funciones de $H^1(\mathbb{D})$ como producto de funciones de $H^2(\mathbb{D})$. Además probaremos el caso $p = 1$ del Teorema 2.2.2, concluyendo con su demostración.

Proposición 2.3.1. *Sea $f \in H^1(\mathbb{D}), f \not\equiv 0$ y sea $(z_n)_n$ la sucesión ceros de f. Entonces*

$$\sum (1 - |z_n|) < \infty.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, suponemos $f(0) \neq 0$ (si no, podemos tomar $\tilde{f} = \frac{f(z)}{z^k}$ para un k adecuado). Sea $r < 1$ tal que $f(rz)$ no se anula y consideramos los ceros $z_1, z_2..., z_m$ de f en $|z| < r$, contados con multiplicidad (como son aislados, son finitos). Como $f \in H^1(\mathbb{D})$, la función $f_r(z) = f(rz)$ es analítica en $|z| \leq 1$ y sus ceros son $\frac{z_1}{r}, \frac{z_2}{r}, ..., \frac{z_m}{r}$. Luego, podemos escribir

$$f(rz) = g(z)\prod_{n=1}^{m}\frac{z - z_n/r}{1 - \overline{z_n}z/r}, \tag{2.1}$$

donde g es analítica y no se anula en un abierto que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$. En consecuencia, $\log|g|$ es armónica y, por el Teorema de valor medio para funciones armónicas, tenemos

$$\log|g(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log(|g(e^{i\theta})|)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta, \tag{2.2}$$

pues para cada k el factor $k-$ésimo del producto en (2.1) cumple

$$\left|\frac{e^{i\theta}-z_k/r}{1-\overline{z_k}e^{i\theta}/r}\right| = \left|\frac{e^{i\theta}-z_k/r}{e^{-i\theta}-\overline{z_k}/r}\right| = 1.$$

Por (2.1) tenemos que

$$f(0) = g(0)\prod_{n=1}^{m}\frac{-z_n}{r},$$

y por lo tanto

$$|g(0)| = |f(0)|\prod_{n=1}^{m}\left|\frac{r}{z_n}\right|.$$

Combinando esto con (2.2), obtenemos

$$\log|f(0)| + \sum_{|z_n|<r}\log\left(\frac{r}{|z_n|}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|d\theta.$$

Como $-\log(x)$ es convexa, aplicamos la desigualdad de Jensen

$$\begin{aligned}\log|f(0)| + \sum_{|z_n|<r}\log\left(\frac{r}{|z_n|}\right) &\leq \frac{1}{2\pi}\log\left(\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta\right)\\ &\leq \log\|f\|_{H^1(\mathbb{D})}.\end{aligned}$$

Sea ahora $0<r'<1$ y N en $\mathbb{N}$, y consideramos

$$\sum_{n=1}^{N}\log\left(\frac{r'}{|z_n|}\right).$$

Como estamos tomando finitos z_n, podemos encontrar un $r>r'$ y suficientemente cerca de 1 tal que para todo $1\leq n\leq N$ se cumple $|z_n|<r$ y tal que $f(rz)$ no se anule en $|z|=1$. Tenemos entonces que

$$\sum_{n=0}^{N}\log\left(\frac{r'}{|z_n|}\right) \leq \sum_{|z_n|<r}\log\left(\frac{r}{|z_n|}\right) \leq \log\|f\|_{H^1(\mathbb{D})}.$$

Tomando $r'\to 1^-$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N}\log\frac{1}{|z_n|} \leq \|f\|_{H^1(\mathbb{D})}$$

. Como las sumas parciales están acotadas, concluimos que

$$\sum\log\frac{1}{|z_n|} < \infty. \tag{2.3}$$

Dado que para $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$ se tiene

$$1 - |z| \leq \log\left(\frac{1}{|z|}\right) \leq 2(1 - |z|),$$

la condición (2.3) es entonces equivalente a

$$\sum (1 - |z_n|) < \infty,$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

En la siguiente Proposición introducimos los productos de Blaschke, que serán fundamentales para los resultados posteriores.

Proposición 2.3.2. *Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{D}$ con $z_n \neq 0$ para todo n y $\sum(1 - |z_n|) < \infty$. Sea $k \in \mathbb{N}_0$ y definamos para $z \in \mathbb{D}$*

$$B(z) := z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z - z_n}{1 - \overline{z_n} z}. \tag{2.4}$$

Entonces, $B \in H^\infty(\mathbb{D})$ y B no tiene ceros excepto en los puntos $(z_n)_n$ (y en el origen, si $k > 0$). Además, la función $B(z)$ cumple que $|B(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto. A la función $B(z)$ se la llama un producto de Blaschke.

Demostración: Para ver que el producto converge y define una función holomorfa, veamos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \frac{|z_n|}{z_n} \right|, \tag{2.5}$$

converge uniformemente sobre compactos del disco $\mathbb{D}$. Dado $0 < r < 1$, si $|z| \leq r$, el término general de la serie se acota como

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_n + |z_n| z}{(1 - \overline{z_n} z) z_n} \right| (1 - |z_n|) &\leq \frac{|z_n||z| + |z_n|}{|z_n|(1 - |z_n||z|)} (1 - |z_n|) \\ &\leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |z_n|). \end{aligned}$$

Por hipótesis, la serie con este término general converge, por lo que la serie en (2.5) converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, lo que equivale a la convergencia del producto. Más aún, se tiene que B es holomorfa en $\mathbb{D}$ y tiene los ceros correspondientes. Podemos además calcular el módulo de cada factor de (2.4) en $\mathbb{T}$ de la siguiente forma:

$$\frac{|z_n|}{|z_n|} \frac{|e^{i\theta} - z_n|}{|1 - \overline{z_n} e^{i\theta}|} = \frac{|e^{i\theta} - z_n|}{|e^{i\theta}||e^{-i\theta} - \overline{z_n}|} = 1,$$

y por el Teorema de módulo máximo, podemos afirmar que cada factor tiene módulo menor o igual a 1 en $\mathbb{D}$, y por lo tanto $|B(z)| \leq 1$ en $\mathbb{D}$. Consideramos ahora

$$B_N(z) := \prod_{n=1}^{N} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n} z} \frac{|z_n|}{z_n}.$$

Se tiene que $\frac{B(z)}{B_N(z)}$ es otro producto de Blaschke y

$$\left| \frac{B(0)}{B_N(0)} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{B(e^{i\theta})}{B_N(e^{i\theta})} \right| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta \leq 1,$$

pues $|B_N(e^{i\theta})| = 1$, ya que se trata de un producto finito de factores que, como vimos antes, tienen módulo 1 en $\mathbb{T}$.
Tomando $N \to \infty$, obtenemos que $\int_0^{2\pi} |B(e^{i\theta})| d\theta = 1$. Como además $|B(e^{i\theta})| \leq 1$, resulta que $|B(e^{i\theta})| = 1$ en casi todo punto. □

Con estos resultados, podemos probar el siguiente Teorema:

Teorema 2.3.3. *Sea $0 < p < \infty, f \in H^p(\mathbb{D}), f \not\equiv 0$. Sea B el producto de Blaschke formado con los ceros de f. Luego existe una función h sin ceros en $\mathbb{D}$, $h \in H^2(\mathbb{D})$, con $\|h\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$, tal que*

$$f = Bh^{2/p}. \tag{2.6}$$

En particular,toda $f \in H^1(\mathbb{D})$ es un producto

$$f = gh, \tag{2.7}$$

donde ambos factores están en $H^2(\mathbb{D})$ y $\|f\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^2(\mathbb{D})} \|h\|_{H^2(\mathbb{D})}$.

Demostración: Por la Proposición 2.3.2 basta observar que si tomamos $g = f/B$, se tiene que $g \in H^p(\mathbb{D})$. Además, dado que $|B(z)| = 1$ para casi todo z en $\mathbb{T}$, $\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}$. Como $\mathbb{D}$ es símplemente conexo y g no se anula en $\mathbb{D}$, existe h holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $|h|^2 = |g|^p$, de lo que obtenemos (2.6). Observemos además que $\|h\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}$.
Para obtener (2.7), escribimos $f = (Bh)h$ como en (2.6). □

Con estos resultados, podemos completar la demostración del Teorema 2.2.2 para el caso $p = 1$.

Teorema 2.3.4. *Sea $f \in H^1(\mathbb{D})$, entonces existe $g(w) = \lim_{r \to 1^-} f(rw)$ en $L^1(\mathbb{T})$, g pertenece a $H^1(\mathbb{T})$; f resulta la integral de Poisson de g y $\|g\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|f\|_{H^1(\mathbb{D})}$.*

Demostración: Si $f \in H^1(\mathbb{D})$, por el Teorema 2.3.3, existen funciones $h, k \in H^2(\mathbb{D})$ tales que $f = hk$. Llamamos también h y k a las funciones que éstas definen en el toro por límite radial. Por lo visto anteriormente, podemos recuperar h y k a partir de las integrales de Poisson de sus límites radiales. Si $0 < r, s < 1$, entonces

$$\begin{aligned}\int |f(rw) - f(sw)| d\sigma(w) &\leq \int |h(rw)||k(rw) - k(sw)| d\sigma(w) \\ &+ \int |k(sw)||h(rw) - h(sw)| d\sigma(w) \\ &\leq \|h_r\|_2 \|k_r - k_s\|_{L^2(\mathbb{T})} + \|k_s\|_{L^2(\mathbb{T})} \|h_r - h_s\|_{L^2(\mathbb{T})}\end{aligned}$$

Acotando $\|k_r\|_{L^2(\mathbb{T})}$ y $\|k_s\|_{L^2(\mathbb{T})}$ por $\max\{\|h\|_{H^2(\mathbb{D})}, \|k\|_{H^2(\mathbb{D})}\}$ resulta que f_r es de Cauchy en $L^1(\mathbb{T})$. Sea g su límite, tenemos entonces que f es la integral de Poisson de g. Mas aún, tenemos que

$$\|f(re^{it})\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|P_r * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|P_r\|_1 \|g\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Usando ahora que $\|f_r\|_{L^1(\mathbb{T})} \to \|g\|$ en $L^1(\mathbb{T})$, obtenemos

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{D})} = \sup_{0<r<1} \|f_r\|_{L^1(\mathbb{T})} = \lim_{r \to 1^-} \|f_r\|_{L^1(\mathbb{T})} = \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

Por otra parte, $f_r \to g$ en L^1 implica que $\hat{f}_r(n) \to \hat{g}(n)$ para todo n, por lo que $\hat{g}(n) = 0$ para $n < 0$, lo cual completa la prueba. $\square$

Finalmente, si volvemos sobre la Proposición 2.2.5, ya vimos a lo largo del capítulo la identificación entre funciones en $H^p(\mathbb{D})$ y $H^p(\mathbb{T})$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. Concluimos el capítulo con un Teorema que relaciona el caso restante de esta Proposición, es decir, sobre medidas complejas de variación acotada en $\mathbb{T}$.

Teorema 2.3.5 (Teorema de F. y M. Riesz)**.** *Si μ es una medida compleja (de variación acotada) en $\mathbb{T}$ tal que $\hat{\mu}(n) = 0$ para $n < 0$ entonces μ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue y $g = d\mu/dm$ pertenece a $H^1(\mathbb{T})$*

Demostración: Como ya vimos, si $\tilde{\mu} = f$, se tiene que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\mu}(n) z^n$ para $|z| < 1$, por lo que f es analítica. Además, $\|f_r\|_1 \leq \|\mu\|$, por lo que $f \in H^1(\mathbb{D})$. Si $g(w) = \lim_{r \to 1^-} f(rw)$, entonces $\tilde{g} = f$, por lo que la integral de Poisson $\mu - g$ es idénticamente cero, de lo que se obtiene que $\hat{\mu}(n) = \hat{g}(n)$ para todo n. Observemos que esto dice que para todo n, se tiene

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} d\mu(t).$$

Por linealidad, podemos extender esta igualdad a los polinomios trigonométricos. Como los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$, resulta que $d\mu = g d\sigma$. $\square$

Capítulo 3

El Teorema de Nehari en el disco

En este capítulo, basándonos en lo trabajado por Z. Nehari en [10], introducimos las formas de Hankel en $H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$ y probamos el Teorema de Nehari en dimensión $d = 1$. A partir de aplicaciones del Teorema, retomamos los espacios de Hardy para probar un Teorema debido a Hardy y Littlewood y luego el resultado recíproco para funciones con coeficientes de Fourier decrecientes.

3.1 Formas de Hankel y el Teorema de Nehari

Definición 3.1.1. Dado un espacio normado E, diremos que una forma bilineal $A : E \times E \to \mathbb{C}$ es acotada si existe una constante $M > 0$ tal que

$$|A(v, w)| \leq M\|v\|\|w\|. \tag{3.1}$$

Definición 3.1.2. Una forma de Hankel multiplicativa en $\ell^2 \times \ell^2$ es un operador del tipo:

$$H(a, b) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k q_{k+j}, \tag{3.2}$$

donde $(q_n)_{n\geq 0}$ es una sucesión en ℓ^2. Cambiando de índices, podemos reescribir la fórmula anterior como

$$H(a, b) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} q_k.$$

Observemos que si tomamos

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}, \; g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt},$$

se tiene que

$$fg(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} e^{ikt}. \tag{3.3}$$

Podemos pensar una forma de Hankel como un operador en $H^2(\mathbb{T})\times H^2(\mathbb{T})$, en principio, bien definido para polinomios trigonométricos, que, siguiendo con la notación anterior, esta dado por

$$H(f,g) = H(a,b) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} q_k.$$

Es importante remarcar que, como $\|f\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|(a_j)\|_{\ell^2}$ la forma de Hankel es acotada en $\ell^2\times\ell^2$ si y sólo si es acotada en $H^2(\mathbb{T})\times H^2(\mathbb{T})$, por lo que vamos a usar uno u otro indistintamente. Por otra parte, de (3.3) se desprende que $H(f,g)$ depende del producto fg pero no de f ni de g individualmente. El Teorema de Nehari, que veremos a continuación, indica cuándo un operador de este tipo resulta acotado.

Teorema 3.1.3 (Teorema de Nehari)**.** *Sea $H(a,b)$ una forma de Hankel,*

$$H(a,b) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_j b_k q_{k+j}.$$

Si $H(a,b)$ está acotada por $M>0$, entonces existe una función $F(t)$ en $L^2(0,2\pi)$ tal que para todo $n\geq 0$ se tiene

$$\overline{q_n} = \int_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}dt \tag{3.4}$$

y salvo en un conjunto de medida cero, $|F(t)|\leq M$. Recíprocamente, si existe una $F(t)$ con estas propiedades, la forma de Hankel asociada está acotada por M.

Demostración: $\Leftarrow$) Sean $(a_j),(b_k)$ sucesiones de soporte finito y F en $L^\infty(\mathbb{T})$ que cumple (3.4). Consideramos los polinomios trigonométricos $f(t)=\sum a_j e^{ijt}$ y $g(t) = \sum b_k e^{ikt}$ se tiene entonces que

$$\int f(t)g(t)\overline{F}(t)dt = \int \sum_{j,k\geq 0} a_j b_k e^{i(j+k)t}\overline{F}(t)dt.$$

Como se trata de una suma finita, podemos intercambiarla con la integral y obtener

$$\begin{aligned}\int f(t)g(t)\overline{F}(t)dt &= \sum_{j,k\geq 0} a_j b_k \int e^{i(j+k)t}\overline{F}(t)dt\\ &= \sum_{j,k\geq 0} a_j b_k \overline{\int F(t)e^{-i(j+k)t}dt}\\ &= \sum a_j b_k q_{j+k} = H(a,b).\end{aligned}$$

A partir de esta igualdad, tenemos que

$$\begin{aligned}|H(a,b)| &= |\int f(t)g(t)\overline{F}(t)dt|\\ &\leq \int |f(t)g(t)\overline{F}(t)|dt\\ &\leq \|F\|_\infty \|f\|_{H^2(\mathbb{T})}\|g\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|F\|_\infty\|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, como las sucesiones de soporte finito son densas en ℓ^2, la forma de Hankel $H(a,b)$ resulta acodada.
$\Rightarrow$) Recordemos que si tomamos

$$f(e^{it}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j e^{ijt}, \; g(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k e^{ikt}.$$

como $a_j, b_k \in \ell^2$ resulta que $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ y $H(a,b)$ depende sólo de fg. Definimos entonces para $h \in H^1(\mathbb{T})$,

$$\tilde{H}(h) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{h}(k) q_k.$$

Como $h \in H^1(\mathbb{T})$, por el Teorema 2.3.3 existen $f, g \in H^2(\mathbb{T})$ tales que $fg = h$ y $\|f\|_{H^2(\mathbb{T})}\|g\|_{H^2(\mathbb{T})} = \|h\|_{H^1(\mathbb{T})}$. Por hipótesis, H es acotada en $H^2(\mathbb{T}) \times H^2(\mathbb{T})$ como forma bilineal, por lo que

$$|\tilde{H}(h)| = |H(f,g)| \leq M\|f\|_2\|g\|_2 = M\|h\|_1.$$

Esto prueba que $\tilde{H}$ es una forma lineal acotada en $H^1(\mathbb{T})$. Como $H^1(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ es un subespacio, por Hahn-Banach, podemos extender $\tilde{H}$ a todo $L^1(\mathbb{T})$ con la misma norma. Pero una funcional lineal en $L^1(\mathbb{T})$ está dada por una función acotada, luego existe $F \in L^\infty(\mathbb{T})$ (y que podemos pensar como $F(t) = F(e^{it})$, definida en $(0, 2\pi)$) tal que $\tilde{H}(h) = \int h(t)\overline{F}(t)dt$. Tenemos entonces, para todo $n \geq 0$, que

$$\begin{aligned} q_n &= \tilde{H}(e^{int}) \\ &= \int e^{int}\overline{F}(t)dt \\ &= \overline{\int F(t)e^{-int}dt} = \overline{\hat{F}(n)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, F verifica (3.4), como queríamos. $\square$

Observación 3.1.4. De la demostración del Teorema, se desprende la siguiente caracterización de las formas de Hankel. Dadas $(a_j), (b_j)$ y (q_j) sucesiones en ℓ^2, consideramos las funciones f, g y ψ en $H^2(\mathbb{T})$ dadas por $f(t) = \sum a_j e^{ijt}$, $g = \sum b_j e^{ijt}$ y $\psi(t) = \sum \overline{q_j} e^{ijt}$ Para estas funciones, se tiene que

$$H(f,g) = \int f(t)g(t)\overline{\psi}(t),$$

donde $H(f,g)$ es la forma de Hankel definida como en (3.2). Esta igualdad tiene sentido, en principio cuando f y g son polinomios trigonométricos. A la función ψ la llamaremos el símbolo de la forma de Hankel $H(f,g)$ y usaremos la notación $H(f,g) = H_\psi(f,g)$ en este caso.

Observación 3.1.5. Antes de avanzar sobre algunas aplicaciones del Teorema de Nehari, queremos mencionar que este resultado vale también en dimensión finita. En efecto, S. Ferguson y M. Lacey [2] ($d = 2$) y M. Lacey y E. Terwilleger [8] ($d > 2$) probaron que una forma de Hankel H_ψ se extiende a una forma acotada en $H^2(\mathbb{T}^d) \times H^2(\mathbb{T}^d)$ si y sólo si los coeficientes de H, $(\varrho_{n_1,n_2,\dots,n_d})_{n_1,n_2\dots,n_d\geq 0}$ coinciden con los coeficientes $\overline{\hat{\varphi}(n_1, n_2 \dots, n_d)}$ para cierta φ en $L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Equivalentemente, H es acotada si y sólo si existe una función φ en $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ tal que $H(f,g) = H_\varphi(f,g) = \int fg\overline{\varphi}$.

Veamos ahora, como Corolario al Teorema de Nehari en $d = 1$, las siguientes desigualdades debidas a Hardy y Hilbert respectivamente, siendo la primera de particular importancia en lo que desarrollaremos a continuación.

Corolario 3.1.6 (Desigualdad de Hardy)**.** *Si* $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1$*, entonces*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} \leq \pi \|f\|_1 \tag{3.5}$$

Demostración: Basta con aplicar el Teorema 3.1.3 para la función $\varphi(t) = -ite^{-it}$, $t \in [-\pi, \pi]$ para la que se tiene que

$$\hat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -ite^{-it} e^{-int} dt = \frac{-i}{2\pi} \int_0^{2\pi} te^{-it(n+1)} dt = \frac{1}{n+1},$$

y $\|\varphi\|_\infty = \pi$. □

Corolario 3.1.7 (Desigualdad de Hilbert)**.**

$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leq \pi \|x\|_2 \|y\|_2$$

Demostración: Como antes, resulta de aplicar el Teorema 3.1.3, para el operador definido por la función $\varphi(t) = -ite^{-it}$ y evaluado en las funciones $f = \sum x_n z^n$, $g = \sum y_n z^n$. □

3.2 Espacios de Hardy y funciones analíticas con coeficientes decrecientes

A partir de lo visto hasta el momento y siguiendo el artículo de M. Pavlovic [12] y los resultados previos de [4] y [5] podemos probar resultados adicionales sobre los espacios de Hardy.

Para introducir el Teorema principal de esta sección, tenemos el siguiente resultado previo de Hardy y Littlewood,

Teorema 3.2.1 (Hardy y Littlewood). *Sea*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

analítica en $\mathbb{D}$, luego f cumple las siguientes condiciones

$$f \in H^p \implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} |a_n|^p < \infty \qquad (1 \leq p \leq 2) \tag{3.6}$$

y

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} |a_n|^p \implies f \in H^p \qquad (2 \leq p < \infty). \tag{3.7}$$

Demostración: Supongamos primero $1 \leq p \leq 2$. Si $p = 1$, la implicación en (3.6) resulta de aplicar la desigualdad (3.5). Si $p = 2$, la implicación es inmediata de aplicar la igualdad de Parseval. Para obtener el resultado en los valores intermedios de p podemos aplicar el Teorema 1.3.7.

Para el caso $p \geq 2$, sea $q = p/(p-1)$ y sea

$$G(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt},$$

un polinomio trigonométrico con $\|G\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq 1$. Si consideramos su proyección analítica

$$g(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt},$$

se tiene que $g = (G + i\mathcal{H}(G))/2 + \hat{G}(0)/2$ donde $\mathcal{H}$ en este caso denota la transformada de Hilbert. Como vimos en 1.2.10, trata de un operador acotado. Se tiene entonces que

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq A_p \|G\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq A_p \tag{3.8}$$

Tomando ahora

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

resulta que

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it}) \overline{s_n(re^{it})} dt \right| \leq \sum_{k=0}^{n} |c_k||a_k|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} |c_k|(k+1)^{(q-2)/q} |a_k|(k+1)^{(p-2)/p}$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{n} (k-1)^{q-2} |c_k|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)^{p-2} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Aplicando el caso $p \leq 2$ a la suma que involucra a g obtenemos que la última expresión se acota por

$$C_q \|g\|_{L^q(\mathbb{T})} \left(\sum_{k=0}^{n} (k+1)^{p-2} |a_k|^p \right)^{1/p} = C_p A_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Tomando supremo sobre los polinomios trigonométricos G de norma en $L^q(\mathbb{T})$ menor o igual a 1, obtenemos

$$\|s_n(re^{it})\|_{L^p(\mathbb{D})} \leq C_p A_p \left(\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^{p-2} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

El resultado se sigue de tomar $n \to \infty$. □

Las recíprocas de las implicaciones anteriores no valen en general, pero agregando la hipótesis de que a_n decrezca a cero, tenemos el siguiente Teorema.

Teorema 3.2.2. *Sea $1 < p < \infty$. Si $a_n \searrow 0$ con $n \to \infty$, entonces la función $f(z) = \sum a_n z^n$ pertenece a $H^p(\mathbb{D})$ si y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p < \infty.$$

En lo que sigue veremos una serie de resultados con el objetivo de poder demostrar luego este Teorema. El primero corresponde al caso $p = 1$ del Teorema.

Proposición 3.2.3. *Si $a_n \searrow 0$ con $n \to \infty$ entonces $f(z) = \sum a_n z^n \in H^1(\mathbb{D})$ si y sólo si*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} < \infty.$$

Además, existe una constante C independiente de $(a_n)_n$ tal que

$$C^{-1} \|f\|_1 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \leq C \|f\|_1.$$

Demostración: Vimos que si $f \in H^1(\mathbb{D})$, la serie del enunciado converge, debido a la Desigualdad de Hardy (3.1.6). Para ver la recíproca, consideremos primero para $0 < r < 1$

$$f(re^{it}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}.$$

Si tomamos entonces

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n r^n e^{int},$$

podemos reescribir esta suma como

$$S_N = a_N \sum_{k=0}^{N} r^k e^{ikt} - \sum_{k=0}^{N-1} (a_{k+1} - a_k) \sum_{j=0}^{k} r^j e^{ijt}.$$

Como $a_n \searrow 0$ y $|\sum r^k e^{ikt}| \leq 1/(1-r)$, podemos tomar límite en N y obtener

$$f(re^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} r^j e^{ijt}.$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})| dt &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{j=0}^{k} r^j e^{ijt}| dt \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ijt}| dt \\
&\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \log(k+2),
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad resulta de la acotación

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{j=0}^{k} e^{ijt}| dt \leq C \log(k+2),$$

donde C es una constante. Si consideramos ahora la función $g(x) = 1/x$, podemos acotar su integral en $[1, k+2]$ por la suma superior de Riemann asociada a la partición $\{x_0 = 1, 2, \ldots, k+2 = x_n\}$ de lo que resulta que

$$\log(k+2) = \int_{1}^{k+2} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{j=1}^{k+1} \frac{1}{j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1}.$$

Aplicando esta desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})| dt &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j+1} \\
&= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} \sum_{k=j}^{\infty} (a_k - a_{k+1}) \\
&= C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} a_j,
\end{aligned}$$

como queríamos. La existencia de las constantes en la segunda desigualdad surge de la demostración. □

Sea ahora

$$\Delta_n(z) = \sum_{k\in I_n} z^k,$$

donde

$$I_n = \{k\colon 2^{n-1} \leq k \leq 2^n\},$$

para $n \geq 1$. Para $n = 0$ definimos $I_0 = 0$. Sea $\Delta_n f$ el producto de Hadamard de Δ_n por f:

$$\Delta_n f(z) = \sum_{k\in I_n} a_k z^k.$$

Tenemos entonces la siguiente Proposición:

Proposición 3.2.4. *Sea $1 < p < \infty$ y $\alpha > -1$. Las siguientes cantidades son equivalentes:*

$$Q_1(g) = \int_{\mathbb{D}} |g(z)|^p(1 - |z|)^\alpha dA(z),$$
$$Q_2(g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(\alpha+1)}\|\Delta_n g\|_p^p,$$

donde equivalentes significa que $Q_1(g) < \infty \iff Q_2(g) < \infty$ y que existe C independiente de g para la cual $C^{-1}Q_1(g) < Q_2(g) < CQ_1(g)$.

Podemos probar este resultado a partir de otro más general. Para ello introducimos la siguiente notación: decimos que una función Φ real, no negativa, definida en $[0, +\infty)$ Φ pertenece a $\Delta(p, q)$ $(p \geq q > 0)$ si $\Phi(0) = 0$, $\Phi(t)/t^p$ es no creciente y $\Phi(t)/t^q$ es no decreciente. Por ejemplo, $t^p \in \Delta(p, p)$, $t^p \log(1 + t) \in \Delta(p + 1, p)$ si $p > 0$. Tenemos el siguiente resultado:

Proposición 3.2.5. *Sean $(a_k)_{k\geq1}$ una sucesión de números reales no negativos y $\Phi \in \Delta(p, q), (p \geq q > 0)$ y $\alpha > 0$. Entonces*

$$\int_0^1 \Phi(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k)(1 - r)^{\alpha-1}dr < \infty,$$

si y sólo si

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n\alpha}\Phi(\sum_{k\in I_n} a_k) < \infty.$$

Antes de poder probar este resultado, necesitamos los siguientes lemas.

Lema 3.2.6. *Sea $\Phi \in \Delta(p, q)$ $(p \geq q > 0)$. Entonces:*

(a) *para $0 \leq \theta \leq 1$, $t \geq 0$ se tiene*

$$\theta^p\Phi(t) \leq \Phi(\theta t) \leq \theta^q\Phi(t).$$

(b) *Si* $(t_n)_{n\geq 1}$ *es una sucesión de números no negativos,*

$$\Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \Phi(t_n)^{1/p}\right)^p.$$

Demostración: La desigualdad en (a) es inmediata si $t = 0$ por la condición $\Phi(0) = 0$. Sea $t \neq 0$ y $0 \leq \theta \leq 1$. Como $\Phi(t)/t^p$ es no creciente, tenemos

$$\frac{\Phi(t)}{t^p} \leq \frac{\Phi(\theta t)}{\theta^p t^p},$$

de lo que se sigue el lado izquierdo de la desigualdad en (a). Por otra parte, como $\Phi(t)/t^q$ es no decreciente, tenemos

$$\frac{\Phi(\theta t)}{\theta^q t^q} \leq \frac{\Phi(t)}{t^q},$$

lo cual da la desigualdad del lado derecho. La desigualdad de (b) resulta de observar que como $\Phi(t)^{1/p}/t$ es no creciente, datos $0 < t' \leq t$, tenemos que

$$\Phi(t+t')^{1/p} \leq (t+t')\frac{\Phi(t)^{1/p}}{t} = \Phi(t)^{1/p} + t'\frac{\Phi(t)^{1/p}}{t} \leq \Phi(t)^{1/p} + t'\frac{\Phi(t')^{1/p}}{t'} = \Phi(t)^{1/p} + \Phi(t')^{1/p},$$

por lo que $\Phi(t)^{1/p}$ resulta subaditiva. □

Lema 3.2.7. *Sea* $0 < \gamma \leq 1$ *y definamos*

$$\eta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\gamma} r^{2^n},$$

con $0 \leq r < 1$. *Se tiene entonces la siguiente desigualdad*

$$\eta(r) \leq 2\Gamma(\gamma)|\log r|^{-\gamma}.$$

Demostración: Tenemos

$$2\Gamma(\gamma)|\log r|^{-\gamma} = 2^{1-\gamma}\int_0^{+\infty} t^{\gamma-1} r^{t/2} dt,$$

acotando inferiormente la integral de la derecha por la suma inferior de Riemann asociada a la partición $\{x_0 = 0, 1, 2, \dots\}$ y observando que el integrando es una función decreciente, obtenemos que

$$\begin{aligned} 2^{1-\gamma}\int_0^{+\infty} t^{\gamma-1} r^{t/2} dt &\geq 2^{1-\gamma}\sum_{k=1}^{\infty} k^{\gamma-1} r^{k/2} \\ &\geq 2^{1-\gamma}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n 2^{(n+1)(\gamma-1)} r^{2^n} = \eta(r). \end{aligned}$$ □

Demostración de la Proposición 3.2.5: $\Longrightarrow$) Sean $t_n = \sum_{I_n} a_k$ y $r_n = 1-2^{-n}$. Tenemos entonces que

$$\int_0^1 \Phi\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n\right)(1-r)^{\alpha-1}dr \geq \int_{1/2}^1 \Phi\left(\sum_{k=0}^{\infty} t_k r^{2^{k+1}-1}\right)(1-r)^{\alpha-1}dr$$
$$\geq \sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k r_{n+1}^{2^{k+1}-1}\right)\int_{r_{n+1}}^{r_{n+2}}(1-r)^{\alpha-1}dr.$$

Podemos acotar la integral anterior como

$$\int_{r_{n+1}}^{r_{n+2}}(1-r)^{\alpha-1}dr = \frac{2^{-(n+1)\alpha}-2^{-(n+2)\alpha}}{\alpha} \geq 2^{-(n+2)\alpha}\log 2,$$

y aplicando esta desigualdad y usando que para $0 \leq k \leq n$ vale $r_{n+1}^{2^{k+1}-1} \geq e^{-1}$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Phi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k r_{n+1}^{2^{k+1}-1}\right)\int_{r_{n+1}}^{r_{n+2}}(1-r)^{\alpha-1}dr \geq \sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(e^{-1}\sum_{k=0}^{n} t_k\right)2^{-(n+2)\alpha}\log 2.$$

Como Φ pertenece a $\Delta(p,q)$, por la primera desigualdad del Lema 3.2.6, tenemos que

$$\geq \sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(e^{-1}\sum_{k=0}^{n} t_k\right)2^{-(n+2)\alpha}\log 2 \geq K_1\sum_{n=0}^{\infty}\Phi\left(\sum_{k=0}^{n} t_k\right)2^{-n\alpha},$$

donde $K_1 = e^{-p}2^{-2\alpha}\log 2$. $\Longleftarrow$) Lo vemos para $p>1$, que es el resultado que necesitamos. Por la segunda desigualdad del Lema 3.2.6 podemos tomar $\Phi(t) = t^p$. Si $\gamma = \min\{1, \alpha/p\}$ y $\eta(r) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\gamma} r^{2^n}$, $0 \leq r < 1$. Por la desigualdad de Jensen se tiene que

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\right)^p \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} t_n r^{2^n}\right)^p \leq \eta(r)^{p-1}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n\gamma} r^{2^n} 2^{-n\gamma p}|t_n|^p.$$

Aplicando ahora el Lema 3.2.7, la desigualdad $r(1-r)^{\alpha-1} \leq |\log r|^{\alpha-1}$ y la igualdad $\int_0^1 |\log r|^{\gamma-1} r^{2^n-1}dr = \Gamma(\gamma)2^{-n\gamma}$ se tiene que

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k r^k\right)^p(1-r)^{\alpha-1}dr \leq K_2\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n\alpha}t_n^p,$$

donde $K_2 = 2^{p-1}\Gamma(\gamma)^p$. □

Otro de los resultados previos que necesitamos previo a la demostración del Teorema 3.2.2, es el siguiente Lema.

Lema 3.2.8. *Sea $\lambda = (\lambda_n)$ una sucesión monótona, no negativa y sea $f = \sum a_n z^n$. Si notamos con λf a la serie $\sum \lambda_n a_n z^n$, se tiene entonces*

$$C^{-1}\lambda_{2^{n-1}}\|\Delta_n f\|_p \leq \|\Delta_n \lambda f\|_p \leq C\lambda_{2^n}\|\Delta_n f\|_p,$$

si λ es no decreciente y

$$C^{-1}\lambda_{2^n}\|\Delta_n f\|_p \leq \|\Delta_n \lambda f\|_p \leq C\lambda_{2^{n-1}}\|\Delta_n f\|_p,$$

cuando λ es no creciente.

Demostración: Para probar este resultado, usaremos que para $n > m$ y $1 < p < \infty$ existe una constante $K = K(p) > 0$ tal que

$$\|\sum_{k=0}^{m} a_k e^{ikt}\|_p \leq K\|\sum_{k=0}^{n} a_k e^{ikt}\|_p. \tag{3.9}$$

Esta es una propiedad general sobre bases de Schauder, para más información referimos a [9, p.2 Proposición 1.a.3].

Sea ahora λ_n una sucesión de números reales no negativos y $f = \sum a_n z^n$. Si notamos con $A_k = \sum_{j=2^{n-1}}^{k} a_j z^j$, se tiene entonces que

$$\Delta_n(\lambda f) = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n} \lambda_k a_k z^k = \lambda_2^n A_{2^n} - \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} A_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k) \tag{3.10}$$

Si suponemos que λ_n es no decreciente, tomando norma p en (3.10) y aplicando la desigualdad (3.9) obtenemos,

$$\|\Delta_n f\|_p \leq (C+1)\|A_{2^n}\|_p(2\lambda_{2^n} - a_{2^{n-1}}) \leq \tilde{C}\lambda_{2^n}\|\Delta_n f\|_p.$$

Para λ_n no creciente, tomando norma p en (3.10) obtenemos

$$\|\Delta_n f\|_p \leq C\|A_{2^n}\|_p(\lambda_{2^n} - \lambda_{2^n} + \lambda_{2^{n-1}}) = C\|\Delta_n f\|_p.$$

La prueba de la cota inferior para ambos casos es similar y se basa también en la fórmula de sumación por partes, por lo que la omitimos. □

Para completar los resultados previos, tenemos la siguiente Proposición.

Proposición 3.2.9. *Sea $p > 2$ y f una función en $H^p(\mathbb{D})$, entonces existe una constante C tal que*

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p (1-|z|)^{p-1} dA(z) \leq C\|f\|^p_{H^p(\mathbb{D})}, \tag{3.11}$$

donde dA nota la medida de Lebesgue normalizada en el disco.

Para probar esta Proposición, vamos a probar primero la siguiente fórmula,

Lema 3.2.10. *Sean $p > 2$, f una función en $L^p(\mathbb{T})$ a valores reales y u la integral de Poisson de f. Se verifica entonces la siguiente igualdad*

$$\|f\|_p^p - |u(0)|^p = \frac{(p^2-p)}{2}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 |u|^{p-2} \log\frac{1}{|z|} dA(z). \tag{3.12}$$

Demostración: Para probar esta igualdad, vamos a aplicar la sigiente identidad de Green

$$\int_R (g\nabla v - v\nabla g)dxdy = \int_{\partial R} (g\frac{\partial v}{\partial \eta} - v\frac{\partial g}{\partial \eta})ds,$$

donde $\partial\eta$ denota la derivada normal. Aplicamos esta identidad a las funciones $v = |u|^p$ y $g = \log\frac{1}{|z|}$ e integramos en la región $R = \mathbb{D}\setminus\varepsilon\overline{\mathbb{D}}$. Como $\nabla|u|^p = (p^2-p)|u|^{p-2}|\nabla u|^2$ obtenemos

$$\pi\int_R (p^2-p)|u|^{p-2}|\nabla u|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z) = 2\pi\int_{\mathbb{T}} |f|^p d\sigma - \int_{\partial\varepsilon\overline{\mathbb{D}}} |u|^p \frac{ds}{\varepsilon}.$$

Si tomamos ε tendiendo a cero, obtenemos

$$\int |f|^p d\sigma = |u(0)|^p + \frac{p^2-p}{2}\int (p^2-p)|u|^{p-2}|\nabla u|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z),$$

que es la igualdad (3.12) que queríamos probar. □

A partir de este resultado, tenemos el siguiente Corolario

Corolario 3.2.11. *Sean $p > 2$, f una función en $L^p(\mathbb{T})$ a valores reales y u la integral de Poisson de f, entonces*

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^p (1-|z|^2)^{p-1} dA(z) \leq C_p(\|f\|_p^p - |u(0)|^p), \tag{3.13}$$

donde C_p es una constante que depende sólo de p.

Demostración: Sean $p > 2$ y f una función en $L^p(\mathbb{T})$ a valores reales. Definimos u_i para $i = 1, 2$ la integral de Poisson de f_i, con $f_1 = \max(f, 0)$ y $f_2 = \max(-f, 0)$, luego $u_i \geq 0$, $u = u_1 - u_2$ y además

$$\|f\|_p^p = \|f_1\|_p^p + \|f_2\|_p^p. \tag{3.14}$$

Además, como

$$|\nabla u|^p \leq 2^{p-1}(|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p), \tag{3.15}$$

podemos restringirnos al caso $u > 0$. Para u armónica y positiva en $\mathbb{D}$ se tiene que

$$|\nabla u(z)| \leq 2(1-|z|^2)^{-1}u(z).$$

Aplicando esta desigualdad y que

$$\log \frac{1}{|z|} \geq \frac{1-|z|^2}{2},$$

podemos acotar en (3.12) de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p - |u(0)|^p &\geq \frac{p^2-p}{4}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 u^{p-2}(1-|z|^2)dA(z)\\ &\geq \frac{p^2-p}{4}\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^2 2^{2-p}|\nabla u|^{p-2}(1-|z|^2)^{p-1}dA(z).\end{aligned}$$

Esto prueba (3.13) para $f > 0$. Si f es arbitraria usamos (3.14), (3.15) y la desigualdad

$$|a-b|^p \leq a^p + b^p,$$

donde $a, b \geq 0$, para obtener

$$\begin{aligned}\|f\|_p^p - |u(0)|^p &\geq \|f_1\|_p^p - |u_1(0)|^p + \|f_2\|_p^p - |u_2(0)|^p\\ &\geq (p^2-p)/2^p \int_{\mathbb{D}} (|\nabla u_1|^p + |\nabla u_2|^p)(1-|z|)^{p-1}dA(z)\\ &\geq 2^{1-p}(p^2-p)/2^p \int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^p(1-|z|^2)^{p-1}dA(z),\end{aligned}$$

por lo que tenemos

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^p(1-|z|^2)^{p-1}dA(z) \leq C_p(\|f\|_p^p - |u(0)|^p),$$

que es la desigualdad que queríamos probar. □

Con estos resultados, estamos en condiciones de demostrar la Proposición 3.2.9.

Demostración de la Proposición 3.2.9: Sea f una función en $H^p(\mathbb{D})$ con $p > 2$. Consideramos la función $u = Re(f)$. Sabemos que u es armónica a valores reales y además tenemos que $\|u(re^{it})\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D})}$. Por la Proposición 2.2.5, u es la integral de Poisson una función g en $L^p(\mathbb{T})$. Podemos entonces aplicar el Corolario 3.2.11 y obtener

$$\int_{\mathbb{D}} |\nabla u|^p(1-|z|^2)^{p-1}dA(z) \leq C_p\|g\|_p^p.$$

Como $|\nabla u| = |f'|$ y

$$\|g\|_p^p = \lim_{r\to 1^-} \|u(re^{it})\|_p^p \leq \|f\|_{H^p(\mathbb{D})},$$

podemos cambiar la desigualdad anterior por

$$\int_{\mathbb{D}} |f'|^p(1-|z|^2)^{p-1}dA(z) \leq C_p\|f\|_{H^p(\mathbb{D})}^p. \tag{3.16}$$

La desigualdad (3.11) se obtiene a partir (3.16) y de observar que en $|z| \leq 1$ se cumple $(1-|z|)^{p-1} \leq (1-|z|^2)^{p-1}$. □

Para completar los resultados previos a la demostración del Teorema 3.2.2, vamos a probar los siguientes Lemas.

Lema 3.2.12. *Sean $0 \leq m \leq n$ y $g(z)$ dada por*

$$g(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^k,$$

se tiene entonces que

$$r^n \|g\|_{H^p(\mathbb{D})} \leq \|g(rz)\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq r^m \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}. \tag{3.17}$$

Demostración: Sean $0 \leq m \leq n$ y

$$g(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^k.$$

Consideramos primero la función $h(z)$ dada por

$$h(z) = \sum_{k=m}^{n} \overline{a_k} z^{n-k}.$$

Veamos que para $0 < r < 1$ se tiene que

$$\|g(re^{it})\|_p = r^n \|h(\frac{1}{r}e^{it})\|_p. \tag{3.18}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
2\pi\|h(\frac{1}{r}e^{it})\|_p &= r^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} \overline{a_k}(1/r)^{n-k} e^{i(n-k)t}|^p dt \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} \overline{a_k} r^{k-n} r^n e^{i(n-k)t}|^p dt \right)^{1/p} \\
&= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}||\sum_{k=m}^{n} \overline{a_k} r^k e^{-ikt}|^p dt \right)^{1/p},
\end{aligned}$$

conjugando adentro del módulo obtenemos

$$\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} a_k r^k e^{ikt}|^p dt \right)^{1/p} = 2\pi\|g(re^{it})\|_p,$$

como queríamos. Por otra parte, si consideramos la función

$$\tilde{h}(z) = \sum_{k=m}^{n} \tilde{a}_k z^{n-k},$$

donde $\tilde{a_k} = \overline{a_k}(\frac{1}{r})^{n-k}$ tenemos que

$$\|h(\frac{1}{r}e^{it})\|_p = \|\tilde{h}(e^{it})\|_p\| = \|\tilde{h}\|_{H^p(\mathbb{D})} \geq \|\tilde{h}(re^{it})\|_p.$$

Como

$$\|\tilde{h}(re^{it})\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} \overline{a_k}(1/r)^{n-k} r^{n-k} e^{i(n-k)t}|^p dt\right)^{1/p} = \|h(e^{it})\|_p,$$

tenemos la desigualdad

$$\|h(\frac{1}{r}e^{it})\|_p \geq \|h(e^{it})\|_p. \tag{3.19}$$

Combinando la igualdad (3.18) con la desigualdad (3.19), obtenemos la desigualdad

$$\|g(rz)\|_{L^p(\mathbb{T})} = r^n\|h(\frac{1}{r}e^{it})\|_p \geq r^n\|h(e^{it})\|_p = r^n\|g(e^{it})\|_p = r^n\|g\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

Para probar la cota superior de (3.17), consideramos ahora la función

$$f(z) = \sum_{k=m}^{n} a_k z^{k-m}.$$

Para esta función, tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi r^m\|f(re^{it})\|_p &= r^m\left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} a_k r^{k-m} e^{i(k-m)t}|^p dt\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{-imt}||\sum_{k=m}^{n} a_k r^k e^{i(kt}|^p dt\right)^{1/p} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=m}^{n} a_k r^k e^{ikt}|^p dt\right)^{1/p} = 2\pi\|g(re^{it})\|_p. \end{aligned}$$

En particular,

$$\|f(z)\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|f(e^{it})\|_p = \|g(e^{it})\|_p = \|g(z)\|_{H^p(\mathbb{D})}.$$

Por lo tanto,

$$r^m\|g\|_{H^p(\mathbb{D})} = r^m\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} \geq r^m\|f(re^{it}\|_p = \|g(re^{it})\|_p = \|g(rz)\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Lo cual completa la prueba. $\square$

Lema 3.2.13. *Sean* $1 \leq p < \infty$, f *una función en* $H^p(\mathbb{D})$. *Entonces, para* $0 < r < 1$ *y* z *tal que* $|z| = r$ *se tiene*

$$|f(z)| \leq 2^{1/p}\|f\|_{H^p(\mathbb{D})}(1-r)^{-1/p}. \tag{3.20}$$

Demostración: Veamos primero el caso $p = 1$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
|f(z)| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)f(e^{is})ds| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| Re\left(\frac{1+re^{i(t-s)}}{1-re^{i(t-s)}}\right) f(e^{is})\right| ds \\
&\leq \frac{2}{1-r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{is})|ds. \\
&= 2(1-r)^{-1}\|f\|_{H^p(\mathbb{D})}.
\end{aligned}$$

Sean ahora $p > 1$ y f en $H^p(\mathbb{D})$. Como en 2.3.3, escribimos a f como $B.g$ donde B es el producto de Blaschke de los ceros de f. Luego g es una función en $H^p(\mathbb{D})$ que no se anula y $\|f\|_{H^p(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}$. Dado que g es analítica en $\mathbb{D}$ y no se anula, existe una rama analítica de g^p y además $\|g^p\|_{H^1(\mathbb{D})} = \|g\|_{H^p(\mathbb{D})}$. Aplicando entonces el caso $p = 1$ obtenemos

$$|f(z)|^p = |g(z)|^p = |g^p(z)| \leq 2(1-r)^{-1}\|g^p\|_{H^1(\mathbb{D})}.$$

De aquí el resultado es inmediato. □

Ahora si estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta seccion, el Teorema 3.2.2.

Demostración del Teorema 3.2.2: Sean $2 < p < \infty$ y f en $H^p(\mathbb{D})$ como en el enunciado. Veamos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p < \infty. \tag{3.21}$$

Sabemos por la Proposición 3.2.9 que

$$\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^p(1-|z|)^{p-1}dA(z) \leq C\|f\|_p^p.$$

Como $|z| \leq 1$ en $\mathbb{D}$ de la desigualdad anterior se desprende que

$$\int_{\mathbb{D}} |zf'(z)|^p(1-|z|)^{p-1}dA(z) \leq C\|f\|_p^p.$$

Aplicando ahora la Proposición 3.2.4 obtenemos, para otra constante que volvemos a llamar C, la desigualdad

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-np}\|\Delta_n(zf')\|_p^p \leq C\|f\|_p^p. \tag{3.22}$$

Observemos ahora que si

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

podemos escribir entonces la derivada como

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1},$$

de lo que se sigue que

$$zf'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k z^k.$$

Si consideramos ahora la sucesión λ dada por $\lambda_k = k$ resulta entonces que

$$\Delta_n(zf') = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} k a_k z^k = \sum_{k=2^{n-1}}^{2^n-1} \lambda_k a_k z^k = \Delta_n(\lambda f). \tag{3.23}$$

Podemos aplicar entonces el Lema 3.2.8 obtenemos que

$$C_1^{-1} \lambda_{2^{n-1}}^p \|\Delta_n f\|_p^p \leq \|\Delta_n(\lambda f)\|_p^p = \|\Delta_n(zf')\|_p^p.$$

Juntando esta desigualdad con (3.22) y observando que $\lambda_{2^{n-1}} = 2^{n-1}$ obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_1^{-1} 2^{-p} \|\Delta_n f\|_p^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-np} \|\Delta_n(zf')\|_p^p \leq C\|f\|_p^p. \tag{3.24}$$

Como además tenemos que $a_n \searrow 0$, podemos volver a apelar al Lema 3.2.8, ahora con $\lambda_n = a_n$, para obtener

$$C_1^{-1} a_{2^n} \|\Delta_n\|_p \leq \|\Delta_n f\|_p \leq C_1 a_{2^{n-1}} \|\Delta_n\|_p. \tag{3.25}$$

Para completar la prueba en el caso $p > 2$ necesitamos estimar $\|\Delta_n\|_p$. Sabemos por la definición que $\|\Delta_n\|_\infty = 2^{n-1}$ para $n \geq 1$. Aplicando el Lema 3.2.13 para la función Δ_n y $r = 1 - 2^{-n-1}$, obtenemos

$$\|\Delta_n\|_\infty \leq C 2^{n/p} \|\Delta_n\|_p,$$

lo que implica que $\|\Delta_n\|_p \geq C^{-1} 2^{n(1-1/p)}$. Para obtener una cota superior para $\|\Delta_n\|_p$, consideramos $g(z) = (1-z)^{-1}$ y $g_r(z) = g(rz)$, con $0 < r < 1$. Se tiene entonces

$$\Delta_n g_r = g_r - e^{i(2^n+1)t} P^+(e^{-i(2^n+1)t} g_r),$$

donde P^+ denota la proyección de Riesz dada por (1.3). Por 1.2.10 existe una cons-tante $C > 0$ tal que

$$\|\Delta_n g_r\|_p^p \leq C\|g_r\|_p.$$

Como además

$$\|g_r\|_p^p \leq \bar{C}(1-r)^{1-p}.$$

Se tiene entonces que

$$\|\Delta_n g_r\|_p^p \leq \tilde{C}\|g_r\|_p^p \leq \tilde{C}(1-r)^{1-p}. \tag{3.26}$$

Por otra parte, de escribir a g como la serie geométrica (para $|z| < 1$) y aplicar el Lema 3.2.12 se obtiene que

$$r^{2^n}\|\Delta_n g\|_p = \|\Delta_n\| \leq \|\Delta_n g_r\|_p.$$

A partir de esta desigualdad, tomando $r = 1 - 2^{-n-1}$, obtenemos que

$$\|\Delta_n\|_p \leq C2^{n(1-1/p)}.$$

Por lo tanto, para cierta constante K y $p > 1$ resulta

$$K^{-1}2^{n(1-1/p)} \leq \|\Delta_n\|_p \leq K2^{n(1-1/p)}. \tag{3.27}$$

Combinando este resultado con (3.24) y (3.25) obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2^n}^p 2^{n(p-1)} \leq C\|f\|_p^p.$$

Por el criterio de condensación de Cauchy, esto prueba (3.21). Notemos además que el resultado recíproco lo probamos en el Teorema 3.2.1.

Sean ahora $1 < p < 2$, $q = p(p-1)$ y $f(z) = \sum a_k z^k$ tal que $a_k \searrow 0$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{p-2}a_n^p < \infty. \tag{3.28}$$

Veamos que f pertenece a $H^p(\mathbb{D})$. Para ello, consideremos

$$G(e^{it}) = \sum_{k=-2^n+1}^{2^n-1} c_k e^{ikt},$$

un polinomio trigonométrico de norma q menor o igual que 1. Si tomamos

$$g(e^{it}) = \sum_{k=0}^{2^n-1} c_k e^{ikt},$$

su proyección de Riesz. Por el Corolario 1.2.10, g cumple (3.8). Definimos ahora $s_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k z^k$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} G(e^{it})\overline{s_n(e^{it})}dt| &= |\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{n}\Delta_k G(e^{it})\overline{\Delta_k s_n(e^{it})}dt| \\ &\leq (\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k g\|_q^q)^{1/q}(\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k f\|_p^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Aplicando ahora el caso $p > 2$ obtenemos

$$\begin{aligned}(\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k g\|_q^q)^{1/q}(\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k f\|_p^p)^{1/p} &\leq C\|g\|_q(\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k f\|_p^p)^{1/p} \\ &\leq CA_q(\sum_{k=0}^{n}\|\Delta_k f\|_p^p)^{1/p}.\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre los polinomios trigonométricos G obtenemos que

$$\|s_n\|_p \leq C(\sum_{k=0}^{\infty} \|\Delta_k f\|_p^p)^{1/p}.$$

Si hacemos tender n a infinito, obtenemos

$$\|f\|_p^p \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n f\|_p^p. \tag{3.29}$$

Aplicando nuevamente el Lema 3.2.8, con $\lambda_n = a_n$, tenemos

$$\|f\|_p^p \leq C \sum_{n=0}^{\infty} \|\Delta_n f\|_p^p \leq \tilde{C} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n-1}^p \|\Delta_n\|_p^p.$$

Usamos ahora la desigualdad (3.27) para obtener

$$\|f\|_p^p \leq \tilde{C} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n-1}^p \|\Delta_n\|_p^p. \leq \tilde{K} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n-1}^p 2^{n(p-1)}.$$

Por el Criterio de condensación de Cauchy, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2^n-1}^p 2^{n(p-1)},$$

converge si (y sólo si) converge la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{p-2} a_n^p,$$

que es convergente por hipótesis. Nuevamente, esto prueba el resultado recíproco al visto en 3.2.1. La prueba del Teorema se completa al observar que si $f(z) = \sum a_k z^k$, entonces, por la igualdad de Parseval,

$$\|f\|_{H^2(\mathbb{D})} = \|f\|_{H^2(\mathbb{T})} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2,$$

por lo que f es una función de $H^2(\mathbb{D})$ si y sólo si la serie $\sum a_n^2$ es convergente. $\square$

Capítulo 4

Formas de Hankel en infinitas variables

4.1 Formas de Hankel de tipo Hilbert-Schmidt

En en esta sección introducimos, basándonos en lo trabajado por H. Helson en [7], la definición de una forma de Hankel en dimensión infinita y una notación que nos permitirá trabajar con formas de Hankel de manera similar a lo que sucedía en dimensión finita.

Vamos a notar con $\mathbb{T}^\infty$ al toro de dimensión infinita, es decir, el grupo de sucesiones

$$z = (e^{ix_1}, e^{ix_2}, \dots),$$

donde los x_j son reales, con multiplicación coordenada a coordenada. Notamos con Γ el grupo de sucesiones de enteros $\vec{r} = (n_1, n_2, \dots)$ con finitos elementos no nulos, con suma coordenada a coordenada. El grupo Γ resulta dual a $\mathbb{T}^\infty$ y la dualidad está dada por

$$(z, \vec{r}) = e^{i \sum n_j xj},$$

Si notamos con $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ a los números primos, vamos a identificar a cada $\vec{r} \in \Gamma$ con el número racional

$$r = \prod p_j^{n_j}$$

De esta forma, podemos representar la serie de Fourier de una f

$$f(e^{ix_1}, e^{ix_2} \dots) \sim \sum a(n_1, n_2, \dots) e^{i \sum n_j x_j},$$

como

$$f(e^{ix_1}, e^{ix_2}, \dots) \sim \sum a_r z^r,$$

donde si $r = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ y y $z_j = e^{ix_j}$, luego $a_r = a(n_1, n_2, \dots)$ denota el coeficiente de Fourier con respecto al monomio $z_1^{n_1} \dots z_k^{n_k}$, al que identificamos con z^r.

Definición 4.1.1. Definimos el espacio $H^p(\mathbb{T}^\infty)$ $(p \geq 1)$, como

$$H^p(\mathbb{T}^\infty) = \{f \in L^p(\mathbb{T}^\infty) \colon \hat{f}(n_1, n_2, \dots) = 0 \text{ si } n_j < 0 \text{ para algún } j\}$$

Equivalentemente, en términos de la notación multiplicativa, tenemos

$$H^p(\mathbb{T}^\infty) = \{f \in L^p(\mathbb{T}^\infty) \colon \hat{f}(r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus \mathbb{Z}_{\geq 1}\}.$$

Con esta notación podemos definir las formas de Hankel en infinitas variables.

Definición 4.1.2. Dada una función ψ en $H^2(\mathbb{T}^\infty)$ definimos en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$ la forma de Hankel con símbolo ψ de la siguiente forma

$$H_\psi(f, g) = \sum_{j,k\geq 1}^{\infty} a_j b_k q_{jk}, \tag{4.1}$$

donde (a_j) y (b_j) son los coeficientes de Fourier de f y g y los coeficientes (q_n) verifican $\hat{\psi}(n) = \overline{q_n}$ para todo $n \geq 1$. Es importante remarcar también que jk no representa un doble índice, sino el producto. Esta forma está en principio bien definida para polinomios trigonométricos. A $q = (q_n)$ lo llamaremos el núcleo de la forma de Hankel.

Observación 4.1.3. De manera análoga a lo que sucedía en dimensión finita, la forma de Hankel H_ψ definida como en (4.1) verifica

$$H_\psi(f, g) = \int fg\hat{\psi},$$

donde la igualdad tiene sentido en principio para polinomios trigonométricos.

Definición 4.1.4. Dada $\varrho = (\varrho_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en ℓ^2 definimos el operador $T_\varrho : \ell^2 \to \ell^2$ de la siguiente forma

$$T_\varrho((a_j)_{j\geq 1}) = (\sum_{j=1}^{\infty} \varrho_{1j} a_j, \sum_{j=1}^{\infty} \varrho_{2j} a_j, \dots), \tag{4.2}$$

donde ij denota el producto. Este operador está en principio bien definido para sucesiones de soporte finito. Definimos ahora la forma de Hankel multiplicativa asociada a ϱ como el operador $\tilde{\varrho}(a, b) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ dado por

$$\tilde{\varrho}(a, b) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_j b_k \varrho_{jk}. \tag{4.3}$$

Nuevamente, este operador está en principio bien definido para sucesiones de soporte finito.

Observación 4.1.5. Dada $\varrho = (\varrho_n)_{n\geq 1}$ una sucesión en ℓ^2, los operadores asociados, T_ϱ y $\tilde{\varrho}(a, b)$ verifican

$$\tilde{\varrho}(a, b) = \langle T_\varrho(a), \overline{b} \rangle. \tag{4.4}$$

Por lo tanto, el operador T_ϱ es acotado si y sólo si la forma bilineal $\tilde{\varrho}(a, b)$ resulta acotada. Más aún, T_ϱ y $\tilde{\varrho}(a, b)$ tienen la misma norma.

Observación 4.1.6. Dada una función ψ y polinomios trigonométricos f, g en $H^2(\mathbb{T}^\infty)$, $f = \sum a_n z^n$, $g = \sum b_n z^n$, si llamamos $q = (\overline{\hat{\psi}(n)})_{n\geq 1}$ tenemos entonces la igualdad

$$\tilde{\varrho}(a, b) = H_\psi(f, g), \tag{4.5}$$

donde $\tilde{\varrho}(a, b)$ es la forma de Hankel multiplicativa en $\ell^2 \times \ell^2$ definida como en (4.3). Más aún, como $\|f\|_{H^2(\mathbb{T}^\infty)} = \|a\|_{\ell^2}$, $\|g\|_{H^2}(\mathbb{T}^\infty) = \|b\|_{\ell^2}$, se tiene que $\tilde{\varrho}(a, b)$ es acotada en $\ell^2 \times \ell^2$ si y sólo si H_ψ es acotada en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$.

Una clase particular de formas de Hankel que nos resultará de interés es la clase de formas de Hankel de tipo Hilbert-Schmidt, que definimos a continuación.

Definición 4.1.7. Decimos que una forma de Hankel con núcleo $q = (q_n)$ es de Hilbert-Schmidt si cumple

$$\sum_{j,k=1}^{\infty} |q_{jk}|^2 < \infty.$$

Obsevemos que en ese caso, la forma resulta acotada en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$ y su cota es a lo sumo la raíz cuadrada de la suma anterior. Como los términos de la suma coinciden para todo par (j, k) tales que el producto jk es igual a un n fijo, podemos reescribir la suma anterior como

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|^2 d(n),$$

donde $d(n)$ es la cantidad de divisores de n.

4.2 El Teorema de Nehari para formas de Hilbert-Schmidt

En esta sección y siguiendo principalmente lo trabajado por H. Helson en [6], apuntamos a probar el siguiente Teorema, que da un análogo al Teorema de Nehari en dimensión infinita, pero con la hipótesis adicional de que la forma de Hankel sea de tipo Hilbert-Schmidt. Como veremos más adelante en el capítulo, esta hipótesis resulta necesaria.

Teorema 4.2.1. *Toda forma de Hankel $H_\psi(f, g)$ de tipo Hilbert-Schmidt está generada por un símbolo acotado en $\mathbb{T}^\infty$, esto es, existe una función ϕ acotada en $\mathbb{T}^\infty$ tal que $H_\psi(f, g) = H_\phi(f, g)$.*

Antes de poder probar este resultado, necesitamos un resultado previo, y una serie de definiciones que introducimos a continuación.

Definición 4.2.2. Sea $dA(z) = rdrd\theta$ la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$. El espacio de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ se define como el conjunto de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ tales que

$$\|f\|_{A^p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z)\right)^{1/p} < \infty.$$

Observación 4.2.3. En el caso particular $p = 2$, para $f \in A^2(\mathbb{D})$, $f = \sum a_n z^n$, tenemos que

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^2}^2 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{n=0}^{\infty} r a_n r^n e^{in\theta}|^2 drd\theta\right) \\ &= \int_0^1 2r \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 |r|^{2n} dr = 2\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n+1} dr \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \tag{4.6}$$

Notemos además que para $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^p} &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z)\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|^p rdrd\theta\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\frac{1}{\pi}\int_0^1 r\|f_r\|_{L^p(\mathbb{T})}^p dr\right)^{1/p} \leq \|f\|_{H^p}.\end{aligned}$$

El siguiente Teorema relaciona los espacios de Bergman $A^p(\mathbb{D})$ con los espacios de Hardy $H^p(\mathbb{D})$ con los que veníamos trabajando.

Teorema 4.2.4 (Hardy-Littlewood)**.** *Sea $1 \leq p \leq \infty$, se tiene entonces que toda función f en $H^p(\mathbb{D})$ pertenece a $A^{2p}(\mathbb{D})$, $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$. Además, vale la igualdad entre las normas sólo para*

$$f(z) = k\left(\frac{1}{1-\lambda z}\right)^{2/p}, \ (|\lambda| < 1).$$

Demostración: Para probar este resultado, seguiremos la demostración dada por D. Vukotic en [14]. Comencemos por ver que si f es una función de $H^2(\mathbb{D})$ entonces f pertenece a $A^4(\mathbb{D})$. Usando la Observación 4.2.3 tenemos

$$\begin{aligned}\|f\|_{A^4}^4 &= \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^4 dA(z)\right) = \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)^2|^2 dA(z)\right) \\ &= \|f^2\|_{A^2}^2 = \|\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}) z^n\|_{A^2}^2.\end{aligned}$$

Aplicando ahora (4.6) obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}) z^n\|_{A^2}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}|^2}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|.1)^2|}{n+1}) \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sum_{k=0}^{n} |a_k a_{n-k}|^2)(n+1)}{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 = (\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2)^2 = (\|f\|_{H^2}^2)^2.
\end{aligned}$$

Luego $\|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}$. Notemos que la igualdad en la anterior cadena de desigualdades sucede si y sólo si para cada $n \geq 2$ existe una constante C_n tal que

$$a_k a_{n-k} = \frac{C_n}{\sqrt{n+1}},$$

para $k = 0, 1, \ldots, n$. Las igualdades con $n = 0, 1$ suceden trivialmente. Observemos que, si $a_0 = 0$, tomando en la igualdad anterior los términos $2n$ y 0 se tiene que $a_0 a_{2n} = a_n^2$ por lo que $a_n = 0$ para todo n, y $f \equiv 0$. Si $a_0 \neq 0$, tomando $a_1/a_0 = \lambda$, sabemos de las igualdades anteriores que

$$a_0 a_n = a_1 a_{n-1} = \ldots.$$

Por lo tanto,

$$a_m = \frac{a_1}{a_0} a_{n-1} = \lambda a_{n-1},$$

para todo n, de lo que se obtiene que $a_n = \lambda^n a_0$. Luego, si $\|f\|_{A^4} = \|f\|_{H^2}$, $f(z)$ tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \lambda^n z^n = \frac{a_0}{1-\lambda z}.$$

Tomemos ahora f en $H^p(\mathbb{D})$ y veamos que f pertenece a $A^{2p}(\mathbb{D})$. Supongamos primero que f no se anula en $\mathbb{D}$. Entonces existe g holomorfa en $\mathbb{D}$ tal que $g^{2/p} = f$. Usando el caso anterior para g, tenemos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^{2p}}^{2p} &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^{2p} dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g(z)^{2/p}|^{2p} dA(z) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{D}} |g(z)|^4 dA(z) = \|g\|_{H^2}^4 \\
&= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} |g(e^{it})|^2 dt)^2 \\
&= \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{it})|^p dt)^2 = \|f\|_{H^p}^{2p}.
\end{aligned}$$

Luego $f \in A^{2p}(\mathbb{D})$ y $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$.

Sea ahora f en $H^p(\mathbb{D})$ arbitraria. Por el Teorema 2.3.3 podemos escribir a f como $f = B\tilde{f}$ con $|B| = 1$ en casi todo punto de $\mathbb{T}$, $|B| \leq 1$ en $\mathbb{D}$, $\|\tilde{f}\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$ y $\tilde{f}$ sin ceros. Luego,

$$\frac{\|f\|_{A^{2p}}}{\|f\|_{H^p}} = \frac{\|B\tilde{f}\|_{A^{2p}}}{\|B\tilde{f}\|_{H^p}} \leq \frac{\|\tilde{f}\|_{A^{2p}}}{\|\tilde{f}\|_{H^p}} \leq 1,$$

lo que completa la prueba. □

A partir de este Teorema vamos a probar la desigualdad isoperimétrica que, si bien no es del tema de la Tesis, es de interés por sí mismo y resulta una aplicación curiosa del resultado anterior. Omitimos al respecto algunos detalles y definiciones.

Corolario 4.2.5. *Sea Ω un dominio de Jordan de área finita $A(\Omega)$ cuyo borde es una curva rectificable $\partial\Omega$ de longitud $L(\partial\Omega)$. Entonces $A(\Omega) \leq (4\pi)^{-1}L(\partial\Omega)^2$. La igualdad se cumple si y sólo si Ω es un disco.*

Demostración: Por el Teorema de representación conforme de Riemmann, podemos tomar una función biyectiva, biholomorfa F de $\mathbb{D}$ en Ω. Se tiene entonces

$$L(\partial\Omega) = \lim_{r\to 1^-} L(F(\{|z| = r\})) = \lim_{r\to 1^-} r\int_0^{2\pi} |F'(re^{it})|dt = 2\pi\|F'\|_{H^1(\mathbb{D})}.$$

Por otra parte, tenemos que

$$A(\Omega) = \int_0^1\int_0^{2\pi} |F'(z))|^2 r dt dr = \pi\|F'\|_{A^2}^2.$$

Tomando $p = 1$ en el Teorema 4.2.4, aplicado a $f = F'$ obtenemos la desigualdad

$$(1/\pi)A(\Omega) = \|F'\|_{A^2}^2 \leq \|F'\|_{H^1(\mathbb{D})}^2 = (4\pi^2)^{-1}L(\Omega)^2.$$

De aquí la desigualdad del enunciado es inmediata. Más aún, la prueba del Teorema 4.2.4 muestra que la igualdad sólo es posible para F' de la forma

$$F'(z) = \frac{C}{(1-\lambda z)^2},$$

para cierta constante C. Esto implica que la función F debe ser una homografía. Pero este tipo de funciones mandan discos en discos o semiplanos. Como suponíamos que Ω es acotado, debe tratarse de un disco. □

Observación 4.2.6. Notemos que si tomamos $p = 1$ en el Teorema 4.2.4 y usamos (4.6), obtenemos que para $f = \sum a_n z^n$ se tiene

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1}\right)^{1/2} \leq \|f\|_{H^1}. \tag{4.7}$$

Ahora si estamos en condiciones de probar el resultado sobre formas de Hankel de tipo Hilbert-Schmidt.

Demostración del Teorema 4.2.1: Sea $n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots = \prod p_j^{n_j}$. Los divisores de n se obtienen al reemplazar cada n_j por k_j con $0 \leq k_j \leq n_j$, luego la cantidad de divisores de n es

$$\prod_j (n_j + 1),$$

donde $n_j = 0$ salvo para finitos valores de j. Veamos primero que para f en $H^1(\mathbb{T}^\infty)$

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{n_j \geq 0} \frac{|\hat{f}(n_1, n_2, \dots)|^2}{(n_1 + 1)(n_2 + 1) \dots} \leq \|f\|_1.$$

Por densidad, basta verlo para polinomios trigonométricos. Supongamos que f depende de las primeras k variables. Para $m = 1, \dots, k$, sea T_m el operador definido por

$$T_m \left(\sum a(n_1, n_2, \dots) e^{i \sum n_j x_j} \right) = \sum \frac{a(n_1, n_2, \dots)}{\sqrt{n_m + 1}} e^{i \sum n_j x_j}.$$

Luego la desigualdad que queremos probar equivale en este caso a ver

$$\|T_1 \dots, T_k f\|_2 \leq \|f\|_1.$$

Si ahora notamos con $d\sigma$ a la medida de Lebesgue normalizada en el toro, tenemos

$$\left(\int |T_1 \dots T_k f|^2 d\sigma(x_1 \dots x_k) \right)^{1/2} = \left(\int \left(\int |T_1 T_2 \dots T_k f|^2 d\sigma(x_1) \right) d\sigma(x_2 \dots x_k) \right)^{1/2}$$

Aplicando ahora el resultado de (4.7) en la primer variable, obtenemos

$$\left(\int \left(\int |T_1 T_2 \dots T_k f|^2 d\sigma(x_1) \right) d\sigma(x_2 \dots x_k) \right)^{1/2} \leq \left(\int \left(\int |T_2 \dots T_k f| d\sigma(x_1) \right)^2 d\sigma(x_2 \dots x_k) \right)^{1/2}.$$

Aplicando ahora la desigualdad de Minkowski tenemos que el término de la derecha es menor o igual a

$$\int \left(\int |T_2 \dots T_k f|^2 d\sigma(x_2 \dots x_k) \right)^{1/2} d\sigma(x_1).$$

Siguiendo el procedimiento, luego del paso k obtenemos la desigualdad

$$\left(\int |T_1 \dots T_k f|^2 d\sigma(x_1 \dots x_k) \right)^{1/2} \leq \|f\|_1, \tag{4.8}$$

que es lo que queríamos. Esta desigualdad la podemos reescribir como

$$\left(\sum_{n \geq 1} |\hat{f}(n)|^2 / d(n) \leq \|f\|_1 \right). \tag{4.9}$$

Definimos ahora el operador $T : H^1(\mathbb{T}^\infty) \to H^2(\mathbb{T}^\infty)$ que manda un polinomio trigonométrico f en k variables a $T_1 \dots T_k f$. Por (4.8) este operador tiene norma menor o igual a 1. Su adjunto, T^* manda $H^2(\mathbb{T}^\infty)$ en el dual de $H^1(\mathbb{T}^\infty)$. Notemos que si $q = (q_n)$ cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty} |q_n|^2 d(n) < \infty,$$

luego la función $g(z) = \sum q_n \sqrt{d(n)} z^n$ pertenece a $H^2(\mathbb{T}^\infty)$. Resulta entonces que $T^*(g)$ pertenece al dual de $H^1(\mathbb{T}^\infty)$. Como $H^1(\mathbb{T}^\infty)$ es un subespacio de $L^1(\mathbb{T}^\infty)$, por Hahn-Banach, podemos extender $T^*(g)$ a $L^1(\mathbb{T}^\infty)$ con la misma norma. Se sigue entonces que existe una función ϕ en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, tal que para toda h en $L^1(\mathbb{T}^\infty)$ se verifica

$$T^*(g)(h) = \int h\overline{\phi}.$$

Por otra parte, como tenemos

$$T^*(g)(z^n) = q_n,$$

resulta que para todo $n \geq 1$, $\overline{q_n} = \hat{\phi}(n)$. Se sigue inmediatamente que si ψ es la función en $H^2(\mathbb{T}^\infty)$ dada por

$$\psi = \sum_{n \geq 1} \overline{q_n} z^n,$$

se verifica entonces que $H_\psi = H_\Phi$, como queríamos. $\square$

Una aplicación interesante de este resultado es la siguiente. Si consideramos la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{ix_n},$$

donde las x_n son variables aleatorias reales independientes, podemos probar al respecto el siguiente resultado.

Proposición 4.2.7. *Sea m un entero positivo y f una función en $H^1(\mathbb{T}^\infty)$ tal que su serie de Fourier es homogénea de grado m, esto es*

$$f(x) \sim \sum_{\sum n_j = m} a(n_1, a_2 \dots) e^{i \sum n_j x_j}.$$

Entonces f pertenece a $H^q(\mathbb{T}^\infty)$ para todo $1 \leq q < \infty$. Para $q = 2$ se tiene además que

$$\|f\|_2 \leq 2^{m/2} \|f\|_1.$$

Es importante remarcar que la cota en el caso $p = 2$ no es óptima. J. Sawa demostró en [13] que para el caso $m = 1$ (que corresponde a las series de Steinhaus), la mejor cota es $2/\pi^{1/2}$.

Demostración: Sea f como en el enunciado, por lo visto en la demostración del Teorema 4.2.1, tenemos que

$$\left(\sum |\hat{f}(n)|^2/d(n)\right)^{1/2} \leq \|f\|_1.$$

Como además f es homogénea de grado m, si $\hat{f}(n) \neq 0$, entonces n tiene a lo sumo m factores primos. Si n es el producto de m primos distintos, entonces $d(n) = 2^m$. Si alguno de los primos en la factorización de n se repite, entonces $d(n)$ resulta menor a 2^m. Tenemos entonces a partir de la desigualdad anterior que

$$\left(\sum |\hat{f}(n_1, n_2 \dots)|^2/2^m\right)^{1/2} \leq \|f\|_1,$$

lo que prueba la segunda parte del enunciado. Se deduce entonces que $f^2 \in H^1(\mathbb{T}^\infty)$. Como además su serie de Fourier es también homogénea (de grado $2m$) repitiendo el mismo argumento, tenemos que $f^2 \in H^2(\mathbb{T}^\infty)$ y por lo tanto, f pertenece a $H^4(\mathbb{T}^\infty)$. Continuando así, obtenemos que f pertenece a $H^q(\mathbb{T}^\infty)$ para todo $1 \leq q < \infty$. $\square$

4.3 El problema de Nehari en infinitas variables

En esta sección, siguiendo lo trabajado por J. Ortega-Cerdà y K. Seip en [11], probaremos que no vale el Teorema de Nehari en infinitas variables. Para poder probar este resultado, necesitamos una herramienta que nos permita definir operadores acotados y estimar su norma. Con ese fin, probamos el siguiente Teorema.

Teorema 4.3.1 (Test de Schur). *Sean $(\rho_{j,k})_{j,k\geq 1}$ números reales no negativos. Supongamos que existe una sucesión $(P_l)_{l\geq 1}$ de números reales no negativos y constantes c, d tales que:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_{j,k} P_k \leq c P_j \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

y

$$\sum_{j=1}^{\infty} \rho_{j,k} P_j \leq d P_k \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Entonces el operador $A : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$A(a_1, a_2, \dots) = \left(\sum_j \rho_{1j} a_j, \sum_j \rho_{2j} a_j, \dots\right),$$

es acotado y con cota a lo sumo $(cd)^{1/2}$.

Demostración: Sea $(a_i)_{i\geq 1}$ de soporte finito. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\|A(a_1, a_2, \dots)\|_2^2 &= \sum_i |\sum_j \rho_{i,j} a_j|^2 \\
&= \sum_i |\sum_j \rho_{i,j}^{1/2} P_j^{1/2} (\frac{\rho_{i,j}^{1/2} a_j}{P_j^{1/2}})|^2 \\
&\leq \sum_i (\sum_j \rho_{i,j} P_j)(\sum_j \frac{\rho_{i,j}|a_j|^2}{P_j}) \\
&\leq \sum_i cP_i (\sum_j \frac{\rho_{ij}|a_j|^2}{P_j}) \\
&= c\sum_j \frac{|a_j|^2}{P_j} \sum_i \rho_{ij} P_i \\
&\leq cd \sum_j \frac{|a_j|^2}{P_j} P_j = cd \sum_j |a_j|^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como las sucesiones de soporte finito son densas en ℓ^2, se sigue que el operador A resulta acotado. □

Observación 4.3.2. Por las Observaciones 4.1.5 y 4.1.6,podemos aplicar este resultado a formas de Hankel en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$. Para el caso particular de formas de Hankel, como los coeficientes cumplen $\rho_{i,j} = \rho_{j,i} = \rho_{ij}$, podemos tomar $c = d$ y verificar una sóla condición. La cota en este caso resulta ser c.

Lema 4.3.3. *Sea BH el espacio de Banach de las formas de Hankel acotadas en $H^2(\mathbb{D}^d)$, con la norma de operadores. Se tiene entonces que el operador $T : L^\infty(\mathbb{D}^d) \to BH$ dado por*

$$T(\varphi) = H_\varphi, \tag{4.10}$$

es sobreyectivo y continuo.

Demostración: Que el operador T definido como en (4.10) resulta sobreyectivo es inmediato del Teorema de Nehari para dimensión $d \geq 2$, resultado para el cual referimos a [8]. Para ver que T es acotado, por linealidad, basta ver que cumple la condición de gráfico cerrado. Sean entonces φ_n funciones en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ tales que $\varphi_n \to \varphi$ y tales que las formas de Hankel asociadas H_{φ_n} convergen a una forma de Hankel acotada H, de 4.1.2 se desprende que para $r \geq 0$ se tiene

$$\overline{\hat{\varphi}_n(r)} = H_{\varphi_n}(z^1, z^r). \tag{4.11}$$

Por otra parte, sabemos que, al menos para polinomios trigonométricos f, g, $H(f, g)$ es de la forma

$$H(f, g) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_j b_k q_{jk},$$

donde $(a_j), (b_j)$ son los coeficientes de Fourier de f y g respectivamente. Como las formas de Hankel H_{φ_n} convergen a H, de (4.11) se desprende que

$$\overline{\hat{\varphi}_n(r)} = H_{\varphi_n}(z^1, z^r) \to H(z^1, z^r) = q_r,$$

para $n \to \infty$. Dado además que $\varphi_n \to \varphi$ implica que $\hat{\varphi}_n(r) \to \hat{\varphi}(r)$, tenemos entonces que $q_r = \overline{\hat{\varphi}(r)}$. Esto implica que $H(f,g) = H_\varphi(f,g)$ para f, g polinomios trigonométricos. Por la densidad de los polinomios trigonométricos, concluimos que $H = H_\varphi$. Esto prueba que el operador T tiene gráfico cerrado y por lo tanto es acotado. $\square$

Corolario 4.3.4. *Sea $1 \leq d < \infty$, entonces existe una constante C con la propiedad que para toda forma de Hankel H_φ acotada en $H^2(\mathbb{T}^d) \times H^2(\mathbb{T}^d)$, existe una función ψ en $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ tal que $H_\varphi = H_\psi$ y además*

$$\|\psi\|_\infty \leq C\|H_\varphi\|.$$

Demostración: Si consideramos el operador T definido en 4.3.3, sabemos que T es continuo y sobreyectivo. Por el Teorema de la aplicación abierta, pasando al cociente (y notando que el Núcleo de T consiste en las funciones de $L^\infty(\mathbb{D}^d)$ cuyos coeficientes de Fourier no negativos son cero) tenemos un operador inversible, con inversa acotada, que llamamos T^{-1}. Si tomamos $C = \|T^{-1}\|$ tenemos que para una forma de Hankel H arbitraria, existe $\psi \in L^\infty(\mathbb{D}^d)$ representante de $T^{-1}(H)$ tal que $H = H_\psi$ y además

$$\|\psi\|_\infty \leq C\|H\|,$$

como queríamos. $\square$

Si para cada d llamamos C_d a la menor constante que cumple la condición anterior, se tiene el siguiente resultado, debido a J. Ortega-Cerdá y K. Seip [11].

Teorema 4.3.5. *Para d par, mayor o igual que 2, la constante C_d es por lo menos $(\pi/8)^{d/4}$.*

Demostración: Sea d un entero par, vamos a definir una forma de Hankel que nos permita acotar por debajo a la constante C_d. Para ello, si como antes notamos con $(p_k)_k$ a los números primos ordenados, podemos definir entonces el siguiente conjunto

$$I = \left\{ n \in \mathbb{N} \colon n = \prod_{j=1}^{d/2} q_j \text{ y } q_j = p_{2j-1} \text{ ó } q_j = p_{2j} \right\}.$$

Es decir, en nuestro conjunto I tenemos a los números naturales que se escriben como $n = q_1 q_2 \dots q_{d/2}$ donde $q_1 = 2$ ó $q_1 = 3$, $q_2 = 5$ ó $q_2 = 7$ y así sucesivamente.

Como antes, escribimos una forma de Hankel en $\mathbb{T}^d$ como

$$H_\psi(fg) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \rho_{jk} a_j b_k,$$

con la notación multiplicativa que vimos anteriormente, donde (a_j) y (b_k) son los coeficientes de Fourier de f y g respectivamente y ψ es la función en $H^2(\mathbb{T}^d)$ tal que $\hat{\psi}(n) = \overline{\rho_n}$.

Tomamos entonces la forma de Hankel cuyos coeficientes son $\rho_n = 1$ si $n \in I$ y $\rho_n = 0$ en otro caso.

Vamos a utilizar el Test de Schur para poder estimar la norma del operador. Para ello, necesitamos definir una sucesión de números positivos para verificar la hipótesis. Sea entonces para j que divide a algún elemento de I

$$c_j = 2^{-\Omega(j)/2},$$

donde $\Omega(j)$ es el número de factores primos de j y $c_j = 0$ en otro caso. Como indica el Test de Schur, debemos calcular para cada j fijo

$$\sum_k \rho_{jk} c_k.$$

Dado j fijo tal que $j|n$ para algún $n \in I$, se tiene que $\rho_{jk} \neq 0$ si y sólo si k es tal que $jk \in I$. Como j es un producto de primos distintos, la cantidad de posibles valores k tales que $jk \in I$ resulta ser $2^{d/2-\Omega(j)}$ pues cada k sale de completar una $d/2$-úpla $q_1 \dots q_{d/2}$ de la cual $\Omega(j)$ de los q_i corresponden a los factores en j y los restantes a k y para cada q_i factor de k se tienen dos primos posibles. Por la misma razón, $\Omega(k) = d/2 - \Omega(j)$ por lo que

$$\sum_k \rho_{jk} c_k = 2^{d/2-\Omega(j)} 2^{-(d/2-\Omega(j))/2} = 2^{d/4} c_j.$$

Entonces, por el Test de Schur, $\|H_\psi\| \leq 2^{d/4}$. Más aún, por el Teorema de Nehari para $d \geq 2$, existe una función φ en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ tal que $H_\psi = H_\varphi$, es decir, tal que $H_\psi(f,g) = \int fg\overline{\varphi}$.

Sea ahora $f \in H^1(\mathbb{T}^d)$ con coeficientes de Fourier a_n. Definimos

$$\tilde{H}_\psi(f) = H_\psi(f, z^1) = \sum_{n \geq 1} a_n \rho_n = \int f\overline{\varphi}.$$

Consideramos entonces la siguiente función f

$$f(z) = \prod_{j=1}^{d/2} (z_{2j-1} + z_{2j}),$$

para la cual se tiene que $a_n = \rho_n$ y por lo tanto que $H_\psi(f) = 2^{d/2}$. Observemos que si $h(z_1, z_2) = z_1 + z_2$, podemos calcular

$$\|h\|_{H^1(\mathbb{T}^2)} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left((cos(t) + cos(s))^2 + (sen(t) + sen(s))^2 \right)^{1/2} dtds = \frac{4}{\pi}.$$

Luego, la norma de la función f definida antes es

$$\|f\|_{H^1(\mathbb{T}^d)} = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{d/2}.$$

Con estos datos podemos acotar la constante C_d de la siguiente forma

$$|\tilde{H}_\psi(f)| = 2^{d/2} \leq \|\varphi\|_\infty \|f\|_{H^1} = \|\varphi\|_\infty \left(\frac{4}{\pi}\right)^{d/2}.$$

Esto implica que

$$\|\varphi\|_\infty \geq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2}.$$

Ahora

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{d/2} \leq \|\varphi\|_\infty \leq C_d \|H_\psi\| \leq C_d\ 2^{d/4}.$$

Lo que implica que $C_d \geq (\pi^2/8)^{d/4}$ como queríamos. □

Como Corolario de este resultado vamos a probar que no vale el Teorema de Nehari en infinitas variables.

Corolario 4.3.6. *Existen en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$ formas de Hankel acotadas que no provienen de una función en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$. Es decir, no vale el Teorema de Nehari para formas de Hankel en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$.*

Demostración: Supongamos que esto no es cierto, es decir, que vale el Teorema de Nehari en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$. Razonando como en el Corolario 4.3.3, se tiene que existe una constante C tal que para toda forma de Hankel acotada H existe $\psi \in L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ tal que $H = H_\psi$ y además

$$\|\psi\|_\infty \leq C\|H\|.$$

Llamamos C_∞ a la menor constante con esta propiedad. Como necesariamente $C_\infty \geq C_d$ para todo $d \geq 1$, por el Teorema 4.3.5 se tiene que

$$C_\infty \geq (\pi^2/8)^{d/4},$$

para todo d par, $d \geq 2$. Esto deriva una contradicción. Por lo tanto, no vale el Teorema de Nehari para formas de Hankel en $H^2(\mathbb{T}^\infty) \times H^2(\mathbb{T}^\infty)$. □

Capítulo 5

La clase de Schatten y el problema de Nehari

En este capítulo y siguiendo lo trabajado por O. F. Brevig y K-M Perfekt en [1] introducimos las formas de Hankel en la clase de Schatten S_p y probamos que, aún con esta condición adicional, para ciertos valores de p existen formas de Hankel en S_p que no provienen de una función en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$.

5.1 Formas de Hankel en la clase de Schatten

Comencemos por recordar la notación multiplicativa que introdujimos en el capítulo anterior. Dada una función ψ en $L^2(\mathbb{T}^\infty)$ y $r = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots$ un número racional positivo, notamos $\hat{\psi}(r) = \hat{(\psi)}(n_1, n_2, \dots)$. En lo que sigue introducimos una serie de definiciones que nos permitirán asociar una forma de Hankel con un operador entre subespacios de $L^2(\mathbb{T}^\infty)$.

Definición 5.1.1. Definimos el espacio $\overline{H^2}(\mathbb{T}^\infty)$ de la siguiente forma

$$\overline{H^2}(\mathbb{T}^\infty) = \{f \in L^2(\mathbb{T}^\infty) \colon \hat{f}(r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{Q}_{>0} \setminus \{1/m\}_{m \geq 1}\}.$$

Observemos que $\overline{H^2}(\mathbb{T}^\infty)$ es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{T}^\infty)$. Notaremos con $\overline{P}$ a la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{T}^\infty)$ en $\overline{H^2}(\mathbb{T}^\infty)$.

Definición 5.1.2. Dada una función φ en $H^2(\mathbb{T})$ definimos el pequeño operador de Hankel asociado, $\mathbf{H}_\varphi : H^2(\mathbb{T}^\infty) \to \overline{H^2}(\mathbb{T}^\infty)$ de la siguiente forma

$$\mathbf{H}_\varphi(f) = \overline{P}(\overline{\varphi} f). \tag{5.1}$$

Este operador esta bien definido en principio para polinomios trigonométricos.

Veamos ahora cómo se relacionan estos operadores con las formas de Hankel bilineales con las que veníamos trabajando.

Observación 5.1.3. Dada una función φ en $H^2(\mathbb{T})$ y polinomios trigonométricos $f = \sum a_n z^n$ y $g = \sum b_n z^n$, sabemos que la forma de Hankel $H_\varphi(f, g)$ resulta

$$H_\varphi(f, g) = \sum a_n b_m \overline{\hat{\varphi}(nm)}.$$

Por otra parte, si consideramos ahora el operador $\mathbf{H}_\varphi$ definido como en (5.1), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_\varphi(f) &= \overline{P}(\overline{\varphi} f) \\
&= \overline{P}((\sum_{n\geq 1} \overline{\hat{\varphi}(n) z^n})(\sum_{k\geq 1} a_k z^k)) \\
&= \overline{P}((\sum_{n\geq 1} \overline{\hat{\varphi}(n)} z^{1/n})(\sum_{k\geq 1} a_k z^k)) \\
&= \overline{P}(\sum_{k,n\geq 1} a_k \overline{\hat{\varphi}(n)} z^{k/n}) \\
&= \sum_{k,m\geq 1} \overline{\hat{\varphi}(nm)} a_k z^{1/m}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{H}_\varphi(f) g &= \int (\sum_{k,m\geq 1} \overline{\hat{\varphi}(nm)} a_k z^{1/m})(\sum_{l\geq 1} b_l z^l) \\
&= \sum_{k,l\geq 1} a_k b_l \overline{\hat{\varphi}(kl)} = H_\varphi(f, g).
\end{aligned}$$

Definición 5.1.4. Dada una función φ en $H^2(\mathbb{T}^\infty)$, diremos que la forma de Hankel H_φ es compacta si el operador pequeño operador de Hankel $\mathbf{H}_\varphi$ definido como en (5.1), es compacto.

Observación 5.1.5. Sea φ una función en $H^2(\mathbb{T}^\infty)$ y $\varrho = (\overline{\hat{\varphi}(n)})_{n\geq 1}$. Por la Observación 5.1.3, se tiene que, en las coordenadas correspondientes, al operador $\mathbf{H}_\varphi$ y la forma de Hankel H_φ les corresponde la misma matriz. Si llamamos M_ϱ a dicha matriz, resulta

$$M_\varrho = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \varrho_2 & \varrho_3 & \cdots \\ \varrho_2 & \varrho_4 & \varrho_6 & \cdots \\ \varrho_3 & \varrho_6 & \varrho_9 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Si suponemos además que la forma de Hankel H_φ es compacta, podemos considerar los valores singulares del operador $\mathbf{H}_\varphi$, que resultan los valores singulares de la matriz M_ϱ, esto es, los autovalores de $(M_\varrho M_\varrho^*)^{1/2}$.

Definición 5.1.6. Sea H_φ una forma de Hankel compacta y $\Lambda = \{\lambda_n\}$ el conjunto de valores singulares de M_ϱ. Diremos que H_φ pertenece a la clase de Schatten S_p si $\Lambda \in \ell^p$. En tal caso, definimos

$$\|H_\psi\|_{S_p} = \|\mathbf{H}_\varphi\|_{S_p} = \|\Lambda\|_{\ell^p}.$$

La clase de Schatten y la norma S_p se pueden definir también en términos de la traza del operador $\mathbf{H}_\varphi$ como

$$\|H_\psi\|_{S_p} = tr(|\mathbf{H}_\varphi|^p)^{1/p}.$$

A partir de esta definición se puede ver que las formas de Hankel en S_2 son las formas de tipo Hilbert-Schmidt que definimos en el capítulo anterior. Es importante remarcar también que la clase de Schatten S_p resulta un espacio de Banach y que $\|T\|_{S_p} \geq \|T\|$ para todo operador T en S_p.

5.2 El problema de Nehari para formas en S_p

Nuestro objetivo principal en esta sección es probar el siguiente resultado

Teorema 5.2.1. *Sea $p_0 = (1 - \log \pi / \log 4)^{-1}$, entonces para todo $p > p_0$ existen formas de Hankel en S_p que no provienen de una función en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$.*

Para probar que existen formas de Hankel multiplicativas en S_p sin símbolo acotado (es decir, cuyos coeficientes no provienen de una función en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$, vamos a suponer que esto sí sucede y derivar una contradicción. Comenzamos por probar el siguiente resultado

Lema 5.2.2. *Sea $p \geq 1$. Supongamos que toda H_φ en S_p tiene un símbolo acotado en $\mathbb{T}^\infty$. Entonces existe una constante $C_p > 0$ con la propiedad que toda H_φ en S_p tiene un símbolo ψ en $L^\infty(\mathbb{T}^\infty)$ tal que $H_\varphi = H_\psi$ y además*

$$\|\psi\|_\infty \leq C_p \|H_\varphi\|_{S_p}.$$

La demostración de este resultado es análoga a la del Lema 4.3.3 y el Corolario 4.3.4, por lo que la omitimos. Dada la suposición del Lema 5.2.2, para cada polinomio trigonométrico f y forma de Hankel $H_\varphi \in S_p$ se tiene que

$$|\langle f, \varphi \rangle| = |H_\varphi(f, z^1)| = |H_\psi(f, z^1)| = |\langle f, \psi \rangle| \leq \|\psi\|_\infty \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^\infty)} \leq C_p \|H_\varphi\|_{S_p} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^\infty)}.$$

Se sigue que si H_φ y f no son idénticamente cero, tenemos la desigualdad

$$\frac{|\langle f, \varphi \rangle|}{\|H_\varphi\|_{S_p} \|f\|_{L^1(\mathbb{T}^\infty)}} \leq C_p. \tag{5.2}$$

Para probar el Teorema 5.2.1 vamos a construir una sucesión de polinomios y formas de rango finito para probar que ninguna constante C_p puede cumplir (5.2) para $p > p_0$. Vamos a necesitar el siguiente Lema.

Lema 5.2.3. *Sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ funciones en $L^2(\mathbb{T}^\infty)$ que dependen de distintas variables y que generan las formas multiplicativas de Hankel $H_{\varphi_j} \in S_p$, con $1 \leq j \leq m$. Entonces*

$$\|H_\varphi\|_{S_p} = \|H_{\varphi_1}\|_{S_p} \|H_{\varphi_2}\|_{S_p} \ldots \|H_{\varphi_m}\|_{S_p}, \tag{5.3}$$

donde $\varphi = \varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_m$.

Demostración: Para $1 \leq j \leq m$, notamos con X_j al espacio de Hardy en las variables en las que depende el símbolo φ_j y, de ser necesario, notamos con X_0 al espacio de Hardy formado por las variables restantes. Podemos escribir entonces a $H^2(\mathbb{T}^\infty)$ como el siguiente producto tensorial

$$H^2(\mathbb{T}^\infty) = X_0 \otimes X_1 \otimes X_2 \otimes \cdots \otimes X_m.$$

Definimos entonces $\varphi_0 = 1$ y consideramos los operadores $\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_j} : X_j \to \overline{X_j}$, definidos como en (5.1) para $0 \leq j \leq m$. Si tomamos $f_j \in X_j$, para $0 \leq j \leq m$, tenemos que

$$\mathbf{H}_\varphi(f_0 f_1 \dots f_m) = \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_0}(f_0)\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_1}(f_1) \dots \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_m}(f_m),$$

de lo que se sigue que

$$\mathbf{H}_\varphi = \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_0} \otimes \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_m}.$$

Notemos que $\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_0}$ tiene como único valor singular al 1, con multiplicidad 1, por lo que los valores singulares λ de $\mathbf{H}_\varphi$ se pueden obtener como productos $\lambda = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_m$, donde cada λ_j es un valor singular de $\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_j}$. La multiplicidad de λ también se puede calcular de esta forma, de lo que se sigue que

$$\|\mathbf{H}_\varphi\|_{S_p} = \prod_j \|\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_j}\|_{S_p}.$$

Para competar el resultado, alcanza con observar que $\mathbf{H}_{\varphi_j}$ resulta de extender el operador $\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_0}$ por el operador asociado a la función $\psi_0 = 1$ en las variables restantes, es decir $\mathbf{H}_{\varphi_j} = \tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_0} \otimes \tilde{\mathbf{H}}_{\psi_0}$. Como en este producto los operadores dependen de variables diferentes, razonando como antes obtenemos que

$$\|\mathbf{H}_{\varphi_j}\|_{S_p} = \|\tilde{\mathbf{H}}_{\varphi_j}\|_{S_p},$$

lo cual completa la prueba. $\square$

Si tomamos ahora para cada j un polinomio trigonométrico f_j en las mismas variables que $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ y definimos $f = f_1 f_2 \dots f_m$ y $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_m$, entonces

$$|\langle f, \varphi\rangle| = |\langle f_1, \varphi_1\rangle||\langle f_2, \varphi_2\rangle| \dots |\langle f_m, \varphi_m\rangle|;$$
$$\|f\|_1 = \|f_1\|_1\|f_2\|_1 \dots \|f_m\|_1.$$

Sea S el operador shift, $Sf(z_1, z_2, \dots) = f(z_2, z_3, \dots)$. Supongamos que podemos encontrar polinomios F y Φ que dependen de las primeras d variables $z_1, \dots, z_d$ y cumplen

$$\frac{|\langle F, \Phi\rangle|}{\|H_\Phi\|_{S_p}\|F\|_1} > 1. \tag{5.4}$$

Entonces, para $1 \leq j \leq m$ consideramos las funciones $\varphi_j(z) = S^{d(j-1)}\Phi(z)$ y $f_j(z) = S^{d(j-1)}F(z)$. Tomando $\varphi = \varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_m$ y $f = f_1 f_2 \dots f_m$ y aplicando el Lema 5.3 se obtiene

$$\frac{|\langle f, \varphi\rangle|}{\|H_{\varphi\|_{S_p}\|f\|_1}} = \left(\frac{|\langle F, \Phi\rangle|}{\|H_\Phi\|_{S_p}\|F\|_1}\right)^m \to \infty, \tag{5.5}$$

si $m \to \infty$, lo cual contradice e(5.2). Estamos ahora en condiciones de probar el Teorema 5.2.1.

Demostración del Teorema 5.2.1. Sea d un entero positivo a determinar más adelante y consideramos el símbolo

$$\varphi(z) = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_d}{\sqrt{d}}.$$

Es claro que la sucesión $\varrho = (\varrho_n)_{n\geq 1}$ de la matriz H_φ está dada por

$$\varrho_n = \begin{cases} 1/\sqrt{d} & \text{si } n = p_j \text{ y } 1 \leq j \leq d \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde p_j denota al j-ésimo número primo. Si consideramos la matriz M_ϱ de H_φ, omitiendo las filas y columnas de ceros, el resultado es la siguiente matriz de $(d+1) \times (d+1)$

$$\frac{1}{\sqrt{d}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Para calcular los valores singulares de esta matriz, calculamos el producto $M_\varrho M_\varrho^*$

$$M_\varrho M_\varrho^* = \frac{1}{d} \begin{pmatrix} d & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Resulta inmediato que esta matriz tiene autovalores 1 (doble) y 0 (con multiplicidad $d-1$), en consecuencia,

$$\|H_\varphi\|_{S_p} = 2^{1/p}.$$

Si tomamos ahora $f(z) = \varphi(z)$, entonces $\langle f, \varphi \rangle = 1$. Más aún, si pensamos a los z_j como variables aleatorias, podemos aplicar el Teorema central del límite para variables complejas y obtener

$$\lim_{d\to\infty} \|f\|_1 = \lim_{d\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_d|}{\sqrt{d}} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

En particular, para cada $\delta > 0$ existe d suficientemente grande tal que

$$\|f\|_1 \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \delta.$$

Observemos ahora que $p_0 = \left(1 - \frac{\log \pi}{\log 4}\right)^{-1}$ es la solución de la ecuación

$$2^{1/p} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1,$$

y tomando $p > p_0$ podemos encontrar $\delta > 0$ suficientemente chico tal que

$$\|H_\varphi\|_{S_p}\|f\|_1 \leq 2^{1/p}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \delta\right) < 1.$$

Esto implica que si d es suficientemente grande, f y φ satisfacen (5.4). Esto completa la prueba, siguiendo como en (5.5). $\square$

El siguiente resultado muestra que no podemos mejorar el valor de p_0 en el Teorema 5.2.1 a partir de considerar símbolos lineales y funciones test de la misma forma.

Teorema 5.2.4. *Sea $p \leq p_0$ y consideremos*

$$\varphi(z) = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \cdots + a_d z_d,$$
$$f(z) = b_1 z_1 + b_2 z_2 + \cdots + b_d z_d,$$

para $a_j, b_j \in \mathbb{C}$. Entonces

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|H_\varphi\|_{S_p}\|f\|_1.$$

Demostración: Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leq \|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2}.$$

Si consideramos la matriz M_ϱ asociada a H_φ, tenemos que

$$M_\varrho M_\varrho^* = \begin{pmatrix} \|a\|_{\ell^2}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1\overline{a_1} & a_1\overline{a_2} & \dots & a_1\overline{a_d} \\ 0 & a_2\overline{a_1} & a_2\overline{a_2} & \dots & a_2\overline{a_d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_d\overline{a_1} & a_d\overline{a_2} & \dots & a_d\overline{a_d} \end{pmatrix},$$

donde nuevamente omitimos las filas y columnas de ceros. Notemos que el bloque inferior derecho tiene rango 1. Considerando el vector $(0, a_1, a_2, \dots, a_d)$ es claro que el bloque tiene como autovalor a $\|a\|_{\ell^2}^2$ (y es el único autovalor no nulo). En consecuencia, la sucesión de valores singulares de M_ϱ es $\Lambda = \{\|a\|_{\ell^2}, \|a\|_{\ell^2}, 0, \dots\}$, por lo que se tiene que

$$\|H_\varphi\|_{S_p} = 2^{1/p}\|a\|_{\ell^2}.$$

Usamos ahora la cota óptima en la desigualdad de Khintchine para variables de Steinhaus, con $p = 1$, para la cual referimos a [13], y obtenemos

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\|b\|_{\ell^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\Big(\sum_{j=1}^{d}|b_j|^2\Big)^{1/2} \leq \mathbb{E}\Big(\Big|\sum_{j=1}^{d} b_j e^{ix_j}\Big|\Big) = \|f\|_1$$

Por hipótesis, $p \leq p_0$, por lo que $2^{1/p}\sqrt{\pi}/2 \geq 1$. La prueba se completa siguiendo la cadena de desigualdades

$$\|H_\varphi\|_{S_p}\|f\|_1 \geq 2^{1/p}\|a\|_{\ell^2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\|b\|_{\ell^2} \geq \|a\|_{\ell^2}\|b\|_{\ell^2} \geq |\langle f, \varphi\rangle|.$$ $\square$

Bibliografía

[1] O. F. Brevig y K-M. Perfekt, *Failure of Nehari's theorem for multiplicative Hankel forms in Schatten classes*, Studia Math. 228 (2015), 101-108.

[2] S. Ferguson y M. Lacey, *A characterization of product BMO by commutators*, Acta Math. 189 (2002), 143-160.

[3] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis, Second Edition*, Springer-Verlag New York (2008).

[4] M. Mateljevic y M. Pavlovic, *L^p-behavior of power series with positive coefficients and Hardy spaces*, Proc. Am. Math. Soc. 87(2) (1983), 309-316.

[5] M. Mateljevic y M. Pavlovic, *L^p-behaviour of the integral means of analytic functions*, Studia Math. 77 (1984), 219-237.

[6] H. Helson, *Hankel forms and sums of random variables*, Studia Math. 176 (2006), 85-92.

[7] H. Helson, *Hankel forms*, Studia Math. 198 (2010), 79-84.

[8] M. Lacey y E. Terwilleger, *Hankel operators in several complex variables and product BMO*, Houston J. Math. 35 (2009), 159-183.

[9] J. Lindenstrauss y L. Tzafiri, *Classical Banach spaces, I, Sequence spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Volume 92, (Springer, 1977).

[10] Z. Nehari, *On bounded bilinear forms*, Ann. of Math. (2) 65 (1957), 153-162.

[11] J. Ortega-Cerdà y K. Seip, *A lower bound in Nehari?s theorem on the polydisc*, J. Anal. Math. 118 (2012), no. 1, 339-342.

[12] M. Pavlovic, *Analytic functions with decreasing coefficients and Hardy and Bloch spaces*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2), 56, 623-635.

[13] J. Sawa, *The best constant in the Khintchine inequality for complex Steinhaus variables, the case $p = 1$*, Studia Math. 81 (1985), no. 1, 107-126.

[14] D. Vukotic, *The Isoperimetric Inequality and a Theorem of Hardy and Littlewood.*, The Am. Math. Monthly, 110(6) (2003), 532-536.