

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Un método de estabilización para el problema de Stokes

Juan Manuel Cáceres

Directora: Dra. María Gabriela Armentano

Marzo 2011

Agradecimientos

Quiero agradecer, principalmente, a mi directora de tesis Dra. María Gabriela Armentano, por la ayuda brindada durante estos años y el tiempo invertido en corregir mis errores.

Al S.E.G.B.E y al Licenciado Diego Picco, que me otorgaron la ayuda económica para poder estudiar y llegar a donde estoy.

A todos los Profesores y Ayudantes que tuve a lo largo de la carrera, por las horas de estudio compartidas.

A mi amor, Carolina, que es lo mejor de mi vida, por la paciencia que me tuvo desde el inicio de mi carrera y por estar conmigo en los peores y mejores momentos de mi vida.

A mi madre, por alentarme y tenerme confianza. A Susana, la mamá de Caro, por haber estado siempre y por la ayuda que me envía desde alguna estrella. A mi familia, por asombrarse con cada logro mío y estar presente.

Índice general

Introducción	4
Capítulo 1. Métodos Mixtos	6
1.1. El Problema de Stokes	6
1.2. Teoría General abstracta de Métodos Mixtos	7
Capítulo 2. Aproximación por elementos finitos	17
2.1. Teoría general de métodos mixtos discretos	17
2.2. Condiciones inf-sup débiles	22
2.3. El método de estabilización	25
Capítulo 3. Experimentos Numéricos	33
3.1. Aspectos Numéricos	33
3.2. Ejemplos numéricos	34
Bibliografía	43

Introducción

El problema de Stokes surge al modelar el movimiento de un fluido viscoso, incompresible, constituido por millones de partículas pequeñas que se mueven dentro de una cavidad con una cierta velocidad y que tienen una cierta presión. Encontrar la solución analítica a este problema es en general muy difícil, por lo cual se buscan aproximaciones, tanto de la velocidad como de la presión, mediante algún método numérico.

Los métodos de elementos finitos en los cuales dos espacios son utilizados para la aproximación de dos variables diferentes reciben el nombre de “métodos mixtos”. En algunos casos la segunda variable es introducida en la formulación del problema por interés físico y en otros casos, como en la ecuación de Stokes, el problema posee originalmente dos variables independientes, la velocidad del fluido y la presión, y la formulación mixta surge naturalmente [8, 10, 14, 17]). Cabe señalar que este tipo de formulación requiere estudiar, para cada elección de espacios de aproximación, la estabilidad del método propuesto, i.e, ver que se satisface la llamada condición inf-sup discreta, también llamada condición LBB, la cual es necesaria para garantizar la convergencia de los elementos finitos mixtos (ver, por ejemplo, [8, 14]).

Para el problema de Stokes se han desarrollado diversos métodos mixtos eficaces utilizando convenientes espacios diferentes para la presión y la velocidad; tal es el caso de los llamados elementos de Taylor-Hood [7, 8, 13] o de algunos métodos recientes como los introducidos en [1].

Es sabido que la elección de los mismos espacios de aproximación para la presión y la velocidad puede conducir a la presencia de oscilaciones como resultado de la violación de la condición inf-sup discreta, dando lugar a los llamados “modos de presión espúreos” (ver, por ejemplo, [8]). A pesar que el mismo tipo de aproximaciones de bajo orden para la velocidad y la presión resultan inestables su aplicación sigue siendo de gran interés por varios factores. En particular, porque su implementación requiere resolver problemas algebraicos con matrices de poco ancho de banda. Para contrarrestar la pérdida de estabilidad existe una amplia gama de métodos, conocidos como “métodos de estabilización”, en los cuales se propone una reformulación del problema mixto de forma tal de obtener aproximaciones estables usando los mismos espacios de

aproximación para la velocidad y la presión. El costo de utilizar métodos de estabilización se refleja en que estos involucran, en la mayoría de los casos, parámetros que se suelen ajustar empíricamente (ver [2, 4, 5, 6] y sus referencias) o en su defecto reformulaciones que conllevan a la pérdida de la simetría del problema [12, 16].

En esta tesis veremos un método de estabilización para resolver el problema de Stokes el cual establece una reformulación del problema que permite obtener estimaciones óptimas e incondicionalmente estables al utilizar los elementos de bajo orden P_1P_1 . Dicho método de estabilización fue desarrollado por Bochev, Dohrmann y Gunzburger [9] y su principal interés radica que, a diferencia de la mayoría de los métodos de estabilización presentes en la Bibliografía, su aplicación no involucra parámetros a ajustar y todos los sistemas a tratar son simétricos. Más aún, la implementación del método es simple ya que recae en cálculos locales standard en la implementación de métodos de elementos finitos y cualquier código clásico de métodos mixtos puede ser fácilmente modificado para incluir este proceso de estabilización.

En el primer capítulo plantearemos el problema de Stokes clásico en su forma débil como un problema mixto y usaremos las herramientas del análisis funcional para probar la existencia y unicidad de dicho problema.

En el segundo capítulo, plantearemos la aproximación por elementos finitos y veremos que, para que haya existencia y unicidad del problema débil discreto, los espacios de aproximación deben ser elegidos de forma tal que se satisfaga una condición inf-sup discreta. Veremos en particular que esta condición no se satisface si los elementos de bajo orden P_1P_1 son elegidos para la aproximación. Sin embargo, mostraremos como al agregar un término estabilizador a la ecuación variacional, obtenemos un nuevo problema variacional que tiene solución y es única. Veremos también que dicha solución aproxima, con orden óptimo, a la solución del problema de Stokes que estamos buscando.

Finalmente en el capítulo 3 veremos algunos ejemplos numéricos. En particular, resolveremos el clásico problema conocido como Cavity Flow y presentaremos otros ejemplos de aplicación, donde la solución analítica es conocida, a fin de estimar el error cometido y el orden de aproximación, tanto para la velocidad como para la presión, en normas de Sobolev. Los ejemplos expuestos muestran la buen performance y la accesible implementación del algoritmo de estabilización estudiado en esta tesis.

Métodos Mixtos

Los métodos de elementos finitos en los cuales dos espacios son utilizados para la aproximación de dos variables diferentes reciben el nombre de “métodos mixtos”. En algunos casos la segunda variable es introducida en la formulación del problema por interés físico y en otros casos la formulación mixta surge naturalmente [8, 10, 14, 17]). En el problema de Stokes, que modela los movimientos de un fluido viscoso incompresible que ocupa cierta cavidad, existen dos variables independientes, la velocidad del fluido y la presión, por ende la formulación mixta resulta naturalmente apropiada para el estudio y la resolución del problema.

En este capítulo formularemos el Problema de Stokes como un problema mixto. Presentaremos la Teoría General Abstracta de los métodos mixtos y estableceremos en particular la existencia y unicidad de solución para el Problema Mixto de Stokes.

1.1. El Problema de Stokes

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, acotado, con borde poligonal. Vamos a considerar el problema de Stokes clásico que modela el movimiento de un fluido incompresible que ocupa la cavidad Ω :

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} -\mu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma := \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es la velocidad del fluido, p es la presión, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$ es la fuerza por unidad de masa y $\mu > 0$ es la viscosidad que asumiremos constante.

Dado que el problema de Stokes involucra dos variables independientes, la presión y la velocidad, resulta natural plantear un espacio adecuado para cada una de ellas, dando lugar así a una formulación variacional mixta.

Sea $V := (H_0^1(\Omega))^2$ y $Q := L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q = 0\}$, multiplicando las ecuaciones por funciones test e integrando por partes obtenemos la forma débil de (1.1.1): Encontrar $\mathbf{u} \in V$ y $p \in Q$ tal que

$$(1.1.2) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 & \forall q \in Q, \end{cases}$$

donde $(\mathbf{f}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}$ y las formas bilineales $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ y $b(\cdot, \cdot) : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ están dadas por

$$(1.1.3) \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} & \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{v}, q) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \in V, q \in Q. \end{aligned}$$

donde $\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix}$ y si A y B están en $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ entonces $A : B = \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$.

La norma en $(H^1(\Omega))^2$ está definida como $\|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^2}^2 = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v} + \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2$.

Para simplificar notación, las normas y seminormas de los espacios de Sobolev $H^m(D)$, con m entero, serán denotadas por $\|\cdot\|_{m,D}$ y $|\cdot|_{m,D}$ respectivamente y en el caso en que $D = \Omega$ omitiremos el segundo índice, señalando las normas directamente por $\|\cdot\|_m$ y $|\cdot|_m$. Vamos a denotar con C , una constante genérica. Debe quedar claro que C podría no ser la misma a lo largo de los capítulos

Para mostrar la existencia y la unicidad de solución del problema variacional mixto (1.1.2) vamos a hacer uso de la Teoría General de Métodos Mixtos.

1.2. Teoría General abstracta de Métodos Mixtos

El problema de Stokes es un caso particular de una clase general de problemas, llamados problemas mixtos, cuya teoría desarrollaremos a lo largo de esta sección siguiendo los libros [8, 14, 20] y sus referencias.

Dados V y Q dos espacios de Hilbert, el problema mixto general es hallar (u, p) en $V \times Q$ tal que

$$(1.2.4) \quad \begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & v \in V, \\ b(u, q) = G(q) & q \in Q, \end{cases}$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$ son, respectivamente, formas bilineales continuas de $V \times V$ y $V \times Q$, i. e., existe $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq C \|u\|_V \|v\|_V & \forall u \in V & \forall v \in V \\ |b(u, q)| &\leq C \|u\|_V \|q\|_Q & \forall u \in V & \forall q \in Q \end{aligned}$$

y $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ y $G : Q \rightarrow \mathbb{R}$ son funcionales lineales y continuos.

Notemos que el problema (1.2.4) se puede escribir también de la siguiente manera: Llamamos $H = V \times Q$ y sea

$$c((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(v, p) + b(u, q)$$

una forma bilineal continua de $H \times H$. El problema (1.2.4) es equivalente a hallar $(u, p) \in H$ tal que

$$(1.2.5) \quad c((u, p), (v, q)) = F(v) + G(q) \quad \forall (v, q) \in H$$

La principal dificultad con este planteo es que, por ejemplo, para el Problema de Stokes la forma bilineal c no resulta ser coercitiva y en consecuencia la teoría clásica para garantizar la existencia y unicidad de solución, que hace uso del Teorema de Lax Millgram (ver, por ejemplo, [10, 15]), no puede ser aplicada.

Para mostrar la existencia y unicidad de solución del problema mixto general (1.2.4) vamos a trabajar con los siguientes operadores: $A : V \rightarrow V'$ y $B : V \rightarrow Q'$ definidos como:

$$\langle Au, v \rangle_{V' \times V} := a(u, v) \quad \forall v \in V$$

$$\langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} := b(v, q) \quad \forall q \in Q$$

y sus respectivos adjuntos: $A^* : V \rightarrow V'$ tal que $\langle u, A^*v \rangle_{V \times V'} := a(u, v) \quad \forall u \in V$
 $B^* : Q \rightarrow V'$ definido como $\langle v, B^*q \rangle_{V \times V'} := b(v, q) \quad \forall v \in V$

Con estos operadores el problema (1.2.4) puede describirse como hallar $(u, p) \in V \times Q$ tal que:

$$(1.2.6) \quad \begin{cases} Au + B^*p = F & \text{en } V' \\ Bu = G & \text{en } Q' \end{cases}$$

Antes de seguir vamos a dar unas definiciones y enunciar un lema que será una de las herramientas necesarias para llevar a cabo nuestras demostraciones.

Dado $A : V_1 \rightarrow V_2'$ un operador lineal y sea $S \subseteq V_1$ un subespacio, definimos:

$$\ker A = \{v \in V_1 : Av = 0\}$$

y

$$S^\circ = \{A \in V_1' : \langle A, v \rangle_{V_1' \times V_1} = 0 \quad \forall v \in S\}$$

a $S^\circ \subset V_1'$ se lo suele llamar el espacio anulador de S .

Sean V_1 y V_2 espacios de Hilbert y $A : V_1 \longrightarrow V_2'$ un operador lineal y continuo. Entonces tenemos el siguiente Lema:

LEMA 1.2.1. $(\ker A)^\circ = \overline{(ImA^*)}$ y $(\ker A^*)^\circ = \overline{ImA}$

Demostración: Veamos primero que $\overline{(ImA^*)} \subseteq (\ker A)^\circ$.

Sea $w \in ImA^*$ entonces, $w = A^*u$ con $u \in V_2$. Para cualquier $v \in \ker A$ tenemos que $\langle v, w \rangle_{V_1 \times V_1'} = \langle v, A^*u \rangle_{V_1 \times V_1'} = \langle Av, u \rangle_{V_2' \times V_2} = 0$ y en consecuencia $\overline{(ImA^*)} \subseteq \overline{(\ker A)^\circ}$. Restaría ver entonces que $(\ker A)^\circ$ es cerrado.

Sea $w_n \in (\ker A)^\circ$ tal que $w_n \longrightarrow w$ en $\|\cdot\|_{V_1'}$. Luego si $v \in \ker A$, $\langle w_n, v \rangle = 0$ y por ende $|\langle w, v \rangle| = |\langle w - w_n, v \rangle|$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|w - w_n\|_{V_1'} = 0$ resulta $\langle w, v \rangle = 0$ cualquiera sea $v \in \ker A$ y por ende, $w \in \overline{(\ker A)^\circ}$ lo que implica que $(\ker A)^\circ$ es cerrado. Tenemos entonces que $\overline{(ImA^*)} \subseteq \overline{(\ker A)^\circ} = (\ker A)^\circ$.

Ahora supongamos que exista $w_0 \in (\ker A)^\circ \setminus \overline{(ImA^*)}$. Por el teorema de Hahn-Banach existe un funcional lineal y continuo $F_0 : V_1' \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F_0(w) = 0$ para todo $w \in \overline{(ImA^*)}$ y $F_0(w_0) \neq 0$ (ver, por ejemplo, [11]).

Como V_1 es un espacio de Hilbert, V_1 es reflexivo. Luego existe $\Upsilon : V_1 \longrightarrow V_1''$ isomorfismo. Más aún el isomorfismo viene dado por $\Upsilon(v) = F_v$ donde $F_v : V_1' \longrightarrow \mathbb{R}$ $F_v(w) = \langle w, v \rangle$. Entonces existe algún $v_0 \in V_1$ tal que $F_0 = \Upsilon(v_0)$ o sea $F_0(w) = \langle w, v_0 \rangle_{V_1' \times V_1}$. Luego $\langle w_0, v_0 \rangle_{V_1' \times V_1} \neq 0$ y $\langle w, v_0 \rangle_{V_1' \times V_1} = 0$ para toda $w \in \overline{(ImA^*)}$. En particular si $u \in V_2$ entonces $A^*u \in \overline{(ImA^*)}$, luego $0 = \langle A^*u, v_0 \rangle_{V_1' \times V_1} = \langle u, Av_0 \rangle_{V_2 \times V_2'}$, entonces $\langle v_0, A^*u \rangle_{V_1 \times V_1'} = \langle Av_0, u \rangle_{V_2' \times V_2} = 0$ para toda $u \in V_2$. Luego $Av_0 = 0$. Entonces $v_0 \in \ker A$. Como $w_0 \in (\ker A)^\circ$ entonces $\langle w_0, v_0 \rangle_{V_1' \times V_1} = 0$, Absurdo.

En consecuencia, $(\ker A)^\circ \subseteq \overline{(ImA^*)}$ lo cual junto con la la otra inclusión implica la igualdad.

La otra igualdad, $(\ker A^*)^\circ = \overline{ImA}$, es una consecuencia directa de la igualdad anterior y el hecho que $(A^*)^* = A$

□

Definición: sean V_1 y V_2 espacios de Hilbert y sea $b : V_1 \times V_2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que b satisface la **condición inf-sup** si existe $\beta > 0$ tal que

$$\sup_{u \in V_1, u \neq 0} \frac{b(u, v)}{\|u\|_{V_1}} \geq \beta \|v\|_{V_2} \quad \forall v \in V_2$$

Para ver que el problema propuesto tiene solución vamos a hacer uso del siguiente Lema.

LEMA 1.2.2. *Sea $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ bilineal y continua. Son equivalentes:*

a) $\exists \beta > 0$ tal que

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

b) B^* es un isomorfismo de $Q \rightarrow (\ker B)^\circ$ y

$$\|B^*q\|_{V'} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

c) B es un isomorfismo de $(\ker B)^\perp \rightarrow Q'$ y

$$\|Bv\|_{Q'} \geq \beta \|v\|_V \quad \forall v \in (\ker B)^\perp$$

Demostración: Veamos primero que a) \iff b). Supongamos que a) se tiene. Entonces

$$\|B^*q\|_{V'} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\langle v, B^*q \rangle_{V \times V'}}{\|v\|_V} = \sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} \geq \beta \|q\|_Q$$

cualquiera sea $q \in Q$. En consecuencia B^* es inyectivo ya que si $q \in \ker(B^*)$ la desigualdad anterior implica que $\|q\|_Q = 0$ y por ende $q = 0$.

Veamos que $Im B^*$ es cerrado. Sea $v_n = B^*q_n$, $q_n \in Q$, tal que $v_n \rightarrow v$. Luego,

$$\|v_n - v_m\|_{V'} = \|B^*q_n - B^*q_m\|_{V'} = \|B^*(q_n - q_m)\|_{V'} \geq \beta \|q_n - q_m\|_Q$$

Como v_n es de Cauchy por ser convergente, q_n resulta ser de Cauchy y por lo tanto convergente. Luego existe $q \in Q$ tal que $q_n \rightarrow q$. Como B^* es continuo, $B^*q_n \rightarrow B^*q$ y por unicidad del límite $v = B^*q$ y por ende $v \in Im B^*$ lo que implica que $Im B^*$ es cerrado. Ahora por el lema anterior $Im B^* = \overline{Im B^*} = (\ker B)^\circ$. En consecuencia $B^* : Q \rightarrow (\ker B)^\circ$ es biyectiva y b) queda demostrado.

Es claro que si vale b) se tiene entonces

$$\sup_{v \in V, v \neq 0} \frac{\langle v, B^*q \rangle_{V \times V'}}{\|v\|_V} = \|B^*q\|_{V'} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

y tenemos a).

Veamos ahora que b) \iff c). Para ello vamos a ver que $((\ker B)^\perp)'$ es isomorfo a W° . Para simplificar notación llamamos $W = \ker B$.

Sea $p^\perp : V \rightarrow W^\perp$ la proyección ortogonal de V sobre W^\perp . Dada $g \in (W^\perp)'$ defino $H(g) := g \circ p^\perp$. Luego $H : (W^\perp)' \rightarrow W^\circ$ pues es claro que $g \circ p^\perp \in V'$ y

$\langle g \circ p^\perp, w \rangle_{V' \times V} = g(p^\perp(w)) = g(0) = 0, \forall w \in W$ lo que implica que $g \circ p^\perp \in W^\circ$ cualquiera sea $g \in (W^\perp)'$.

Claramente H es lineal y además H es inyectiva. En efecto, si $H(g) = 0$ con $g : W^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ entonces $H(g)(v) = 0, \forall v \in W^\perp$. Luego para todo $v \in W^\perp$ tenemos $0 = H(g)(v) = (g \circ p^\perp)(v) = g(p^\perp(v)) = g(v) = 0$ y en consecuencia $g \equiv 0$.

H es una isometría pues, dado $v \in W^\perp$ entonces $p^\perp(v) = v$ y $|H(g)(v)| = |(g \circ p^\perp)(v)| = |g(p^\perp(v))| = |g(v)|$ y en consecuencia $\|H\|_{(W^\perp)'} = \|g\|_{(W^\perp)'}$.

H es suryectiva, en efecto dado $L \in W^\circ$ definimos $g \in (W^\perp)'$ como $g(v) := \langle L, v \rangle_{V' \times V}$. Dado $v \in V$ tenemos que $g(p^\perp(v)) = \langle L, p^\perp(v) \rangle_{V' \times V}$ y como $\langle L, w \rangle_{V' \times V} = 0, \forall w \in W$ resulta que $\langle L, v - p^\perp(v) \rangle_{V' \times V} = 0$. En consecuencia $g(p^\perp(v)) = \langle L, p^\perp(v) \rangle_{V' \times V} = \langle L, v \rangle_{V' \times V}$ cualquiera sea $v \in V$. Por ende $L \in \text{Im}H$ y en consecuencia $W^\circ = \text{Im}H$.

Dado que W° es isomorfo a $(W^\perp)'$ la demostración se sigue facilmente ya que si $B : W^\perp \rightarrow Q'$ es un isomorfismo, entonces $B^* : Q \rightarrow (W^\perp)'$ es un isomorfismo y como $(W^\perp)'$ es isomorfo a W° entonces $B^* : Q \rightarrow W^\circ$ es un isomorfismo.

Recíprocamente si $B^* : Q \rightarrow W^\circ$ es un isomorfismo, entonces $B : (W^\circ)' \rightarrow Q'$ también lo es. Luego como W° es isomorfo a $(W^\perp)'$ entonces $B : W^\perp \rightarrow Q'$ es un isomorfismo.

□

Dada $G \in Q'$ definimos el espacio $W(G) = \{v \in V : Bv = G\}$. Notamos como antes $W(0) = \ker B = W$.

Consideremos los siguientes Problemas:

Problema A: Hallar $(u, p) \in V \times Q$ tal que

$$(1.2.7) \quad \begin{cases} Au + B^*p = F & F \in V' \\ Bu = G & G \in Q' \end{cases}$$

Problema B: Hallar $u \in V$ tal que

$$(1.2.8) \quad \begin{cases} a(u, v) = F(v) & \forall v \in W \\ u \in W(G) \end{cases}$$

Vamos a ver que si la forma bilineal b satisface la condición inf-sup los problemas A y B son equivalentes.

TEOREMA 1.2.1. *Si b satisface la condición inf-sup, i.e., $\exists \beta > 0$ tal que*

$$\sup_{u \in V, u \neq 0} \frac{b(u, q)}{\|u\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q$$

Entonces los Problemas A y B son equivalentes.

Demostración: Veamos primero que resolver el Problema A implica resolver el problema B.

Sea $(u, p) \in V \times Q$ solución de A. Entonces $\langle Au, v \rangle_{V' \times V} + \langle v, B^*p \rangle_{V \times V'} = \langle F, v \rangle_{V' \times V}$ para todo $v \in V$.

Como $Bu = G$ entonces $u \in W(G)$. Veamos que $a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in W$.

Si $v \in W \implies Bv = 0 \implies \langle v, B^*p \rangle_{V \times V'} = \langle Bv, p \rangle_{Q' \times Q} = 0$. Luego $\langle Au, v \rangle_{V' \times V} + \langle v, B^*p \rangle_{V \times V'} = \langle Au, v \rangle_{V' \times V} + 0 = F(v)$ y por ende $\langle Au, v \rangle_{V' \times V} = a(u, v) = F(v)$ cualquiera sea $v \in W$, i.e., u es solución del problema B.

Veamos ahora que resolver el Problema B implica resolver el problema A. Como $u \in W(G)$ entonces $Bu = G$. Dada $u \in V$ queremos ver que existe $p \in Q$ tal que $B^*p = F - Au$. Como b cumple la condición inf-sup por el Lema anterior $B^* : Q \rightarrow W^\circ$ es biyectivo y por lo tanto la existencia de p esta garantizada si probamos que $F - Au \in W^\circ$.

Notemos que si $v \in W$ entonces $\langle F - Au, v \rangle_{V' \times V} = \langle F, v \rangle_{V' \times V} - \langle Au, v \rangle_{V' \times V} = F(v) - a(u, v) = 0$ porque u es solución de B y en consecuencia $F - Au \in W^\circ$.

□

OBSERVACIÓN 1.2.1. *Vimos que u es solución de A si y solo si u es solución de B. Luego, si probamos que el problema B tiene solución y esta es única, la unicidad del problema A sale del hecho de que el operador $B^* : Q \rightarrow W^\circ$ es biyectivo.*

El siguiente Lema, el cual puede verse como una generalización del Teorema de Lax-Millgram, es una herramienta importante para la demostración del Teorema de existencia y unicidad del problema (1.2.4).

LEMA 1.2.3. *Si existe $\alpha > 0$ tal que $a(\cdot, \cdot)$ cumple las siguientes dos condiciones inf-sup:*

i)

$$\sup_{u \in W, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} \geq \alpha \|v\|_V \quad \forall v \in W$$

ii)

$$\sup_{v \in W, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} \geq \alpha \|u\|_V \quad \forall u \in W$$

Entonces para todo $G \in W'$ existe una única $u \in W$ tal que $a(u, v) = G(v)$ para todo $v \in W$. Además $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha} \|G\|_{W'}$.

Demostración: Definamos los operadores lineales:

$$A : W \longrightarrow W' \quad \langle Au, v \rangle_{W' \times W} = a(u, v)$$

$$A^* : W \longrightarrow W' \quad \langle u, A^*v \rangle_{W \times W'} = a(u, v)$$

Por la continuidad de a es claro que estos operadores son continuos. Luego $(\ker A^*)^\circ = \overline{Im A}$ y las dos condiciones inf-sup se traducen en $\|A^*v\|_{W'} \geq \alpha \|v\|_V$ y $\|Au\|_{W'} \geq \alpha \|u\|_V$ respectivamente. Con la misma idea que en el Lema 1.2.2 se demuestra que $Im A$ es un subespacio cerrado de W' . Además la condición inf-sup implica que $\ker A^* = \{0\}$ y $\ker A = \{0\}$ lo que nos dice, en particular, que A es inyectiva.

Luego $W' = (\{0\})^\circ = (\ker A^*)^\circ = \overline{Im A} = Im A$ con lo cual A es sobreyectiva. Por lo tanto, por la biyectividad de A dado $G \in W'$ existe una única $u \in W$ tal que $a(u, v) = G(v)$ para todo $v \in W$. Además $\|G\|_{W'} = \|Au\|_{W'} \geq \alpha \|u\|_V$.

□

OBSERVACIÓN 1.2.2. Si el operador B es idénticamente nulo, entonces $W = \ker(B) = V$. Luego dado $G \in V'$ si a es continua y cumple las condiciones del lema anterior con $W = V$ entonces existe una única $u \in V$ tal que $a(u, v) = G(v) \quad \forall v \in V$.

Ahora sí, veamos la existencia y unicidad del problema mixto (1.2.4):

TEOREMA 1.2.2. Si a satisface las dos condiciones inf-sup del Lema 1.2.3 y b satisface la condición inf-sup del Lema 1.2.2 entonces existe un único $(u, p) \in V \times Q$ tal que

$$(1.2.9) \quad \begin{cases} a(u, v) + b(v, p) = F(v) & \forall v \in V \\ b(u, q) = G(q) & \forall q \in Q. \end{cases}$$

además

$$(1.2.10) \quad \begin{aligned} \|u\|_V &\leq \frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|G\|_Q \\ \|p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|F\|_{V'} + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}\right) \|G\|_Q \end{aligned}$$

Demostración: Dada $G \in Q'$ como b cumple la inf-sup el operador $B : W^\perp \rightarrow Q'$ es biyectivo. Luego existe una única $\tilde{u} \in W^\perp$ tal que $B\tilde{u} = G$ y además $\|G\|_{Q'} = \|B\tilde{u}\|_{Q'} \geq \beta\|\tilde{u}\|_V$.

Como b cumple la inf-sup el problema (1.2.4) es equivalente al Problema B. Veamos que el Problema B resulta ser equivalente a:

Hallar $w \in W$ tal que:

$$(1.2.11) \quad a(w, v) = F(v) - a(\tilde{u}, v) \quad \forall v \in W.$$

En efecto, si w es solución de la ecuación (1.2.11) entonces $u = w + \tilde{u}$ satisface $a(u, v) = a(w + \tilde{u}, v) = a(w, v) + a(\tilde{u}, v) = F(v)$ y $Bu = Bw + B\tilde{u} = 0 + G = G$ con lo cual u es solución del Problema B.

Recíprocamente si u es solución del Problema B entonces $w = u - \tilde{u} \in W$ pues $Bw = Bu - B\tilde{u} = 0$ y $a(w, v) = a(u, v) - a(\tilde{u}, v) = F(v) - a(\tilde{u}, v) \quad \forall v \in W$ y resulta ser w solución de (1.2.11).

Luego, para terminar la demostración bastará con ver que existe una única $w \in W$ solución del problema (1.2.11). Notemos que:

$$F(v) - a(\tilde{u}, v) = \langle F - A\tilde{u}, v \rangle_{W' \times W} \quad \forall v \in W,$$

i.e., $F - A\tilde{u} \in W'$. Por el Lema 1.2.3, como a satisface las dos inf-sup, tenemos que existe una única $w \in W$ tal que $a(w, v) = F(v) - a(\tilde{u}, v)$ para todo $v \in W$ y además $\|w\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|F - A\tilde{u}\|_{W'}$. Luego, $u = w + \tilde{u}$ satisface el Problema B y esta es única pues w es única. Por Teorema 1.2.1 y la Observación 1.2.1 concluimos que $\exists!(u, p) \in V \times Q$ solución del Problema (1.2.4).

Veamos ahora las estimaciones a priori.

$$\begin{aligned} \|u\|_V &= \|w + \tilde{u}\|_V \leq \|w\|_V + \|\tilde{u}\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|F - A\tilde{u}\|_{V'} + \|\tilde{u}\|_V \\ &\leq \frac{1}{\alpha}(\|F\|_{V'} + \|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}\|\tilde{u}\|_V) + \|\tilde{u}\|_V = \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'} + \|\tilde{u}\|_V(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}) \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta}\|G\|_{Q'}(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V, V')}}{\alpha}) \end{aligned}$$

Como $B^*p = F - Au$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|p\|_Q &\leq \frac{1}{\beta} \|B^*p\|_{V'} = \frac{1}{\beta} \|F - Au\|_{V'} \leq \frac{1}{\beta} (\|F\|_{V'} + \|Au\|_{V'}) \\
&\leq \frac{1}{\beta} (\|F\|_{V'} + \|A\|_{\mathbb{L}(V,V')} \|u\|_V) \\
&\leq \frac{1}{\beta} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \|A\|_{\mathbb{L}(V,V')} \left(\frac{1}{\alpha} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \|G\|_{Q'} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V,V')}}{\alpha}\right) \right) \\
&= \frac{1}{\beta} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta} \frac{1}{\alpha} \|A\|_{\mathbb{L}(V,V')} \|F\|_{V'} + \frac{1}{\beta^2} \|A\|_{\mathbb{L}(V,V')} \|G\|_{Q'} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V,V')}}{\alpha}\right) \\
&= \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V,V')}}{\alpha}\right) \|F\|_{V'} + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V,V')}}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|A\|_{\mathbb{L}(V,V')}}{\alpha}\right) \|G\|_{Q'}
\end{aligned}$$

y el Teorema queda demostrado .

□

En vista de los resultados previos, para garantizar que el problema de Stokes tenga solución y esta sea única hay que verificar que las correspondientes formas a y b sean bilineales, continuas y cumplan la condición inf-sup. Recordemos que para el problema de Stokes teníamos $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b : V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\begin{aligned}
(1.2.12) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v} \\
b(\mathbf{u}, q) &= - \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}
\end{aligned}$$

con $V = (H_0^1(\Omega))^2$ y $Q = L_0^2(\Omega)$.

Como $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$ haciendo uso de la desigualdad de Poincaré: $\|\mathbf{u}\|_0 \leq C_p \|\nabla \mathbf{u}\|_0$, con $C_p > 0$, vemos fácilmente que $\|\nabla \mathbf{u}\|_0$ y $\|\mathbf{u}\|_1$ son equivalentes y por ende a es coercitiva, i.e, existe una constante $C > 0$ tal que $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq C \|\mathbf{v}\|_1^2 \forall \mathbf{v} \in V$. En particular, a satisface las dos condiciones inf-sup del Lema 1.2.3 ya que: Dada $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \neq 0$,

$$\sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \frac{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|_1} \geq C \|\mathbf{u}\|_1$$

La otra inf-sup es consecuencia de la simetría de a .

Debemos ver ahora que b satisface la condición inf-sup dada en el Lema 1.2.2. Para ello vamos a hacer uso del siguiente resultado (ver, por ejemplo, [8, Lema 2.2])

TEOREMA 1.2.3. *Dada $f \in L_0^2(\Omega)$ existe $\mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$ y una constante $C > 0$ tal que*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = f \quad y \quad \|\mathbf{u}\|_1 \leq C\|f\|_0$$

Luego, dada $q \in L_0^2(\Omega)$ el Teorema anterior nos garantiza que $\exists \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2$: $-\nabla \cdot \mathbf{u} = q$ y en consecuencia

$$(1.2.13) \quad \|q\|_0 = \frac{(\|q\|_0)^2}{\|q\|_0} = \frac{\int_{\Omega} qq}{\|q\|_0} = -\frac{\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} q}{\|q\|_0}$$

$$(1.2.14) \quad = \frac{b(\mathbf{u}, q)}{\|q\|_0} \leq C \frac{b(\mathbf{u}, q)}{\|\mathbf{u}\|_1} \leq C \sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_V}$$

Por lo tanto, b cumple la inf-sup y estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.2.2 y concluir la existencia y unicidad de solución del problema (1.1.2).

COROLARIO 1.2.1. *Existe un único $(\mathbf{u}, p) \in V \times Q$ solución del Problema de Stokes (1.1.2).*

Aproximación por elementos finitos

A lo largo de este capítulo vamos a estudiar la resolución numérica, por elementos finitos mixtos, del Problema de Stokes (1.1.2). Vamos a mostrar que la elección de los mismos elementos de bajo orden para el par velocidad-presión nos conduce a aproximaciones inestables y siguiendo al trabajo [9] vamos a presentar un método de estabilización que nos permite eliminar los modos de presión espúreos y obtener aproximaciones numéricas incondicionalmente estables y con óptimo orden de convergencia.

2.1. Teoría general de métodos mixtos discretos

Consideremos ahora subespacios $V_h \subset V$ y $Q_h \subset Q$ ambos de dimension finita. El problema mixto discreto, asociado al problema mixto (1.2.4), es:

Hallar $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tales que

$$(2.1.15) \quad \begin{cases} a(u_h, v) + b(v, p_h) = F(v) & \forall v \in V_h \\ b(u_h, q) = G(q) & \forall q \in Q_h \end{cases}$$

Consideremos $B_h : V_h \rightarrow Q'_h$ definido por: $\langle B_h v, q \rangle_{Q'_h \times Q_h} := b(v, q) \forall q \in Q_h$. Llamemos $W_h = \ker B_h \subset V_h$.

Luego, en vista del Teorema 1.2.2 tenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 2.1.1. *Si las formas bilineales y continuas a y b satisfacen las siguientes condiciones inf-sup con constantes α^* y β^* independientes de h .*

$$(2.1.16) \quad \begin{aligned} \sup_{v \in W_h, v \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|v\|_V} &\geq \alpha^* \|u\|_V & \forall u \in W_h, \\ \sup_{u \in W_h, u \neq 0} \frac{a(u, v)}{\|u\|_V} &\geq \alpha^* \|v\|_V & \forall v \in W_h, \\ \sup_{v \in W_h, v \neq 0} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V} &\geq \beta^* \|q\|_V & \forall q \in Q_h, \end{aligned}$$

existe un único par $(u_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ solución del problema (2.1.15). Además existe $C > 0$ independiente de h tal que

$$(2.1.17) \quad \|u_h\|_V + \|p_h\|_Q \leq C(\|F\|_{V'} + \|G\|_{Q'})$$

En un problema mixto dado, si a y b satisfacen las condiciones inf-sup continuas del teorema 1.2.2 y para una determinada elección de los espacios V_h y Q_h se satisfacen las condiciones inf-sup discretas del corolario 2.1.1, tenemos el siguiente teorema.

TEOREMA 2.1.1. *Si a y b satisfacen las condiciones inf-sup continuas del teorema 1.2.2 con constantes α y β respectivamente y satisfacen las condiciones inf-sup discretas del corolario 2.1.1 con constantes α^* y β^* respectivamente, entonces*

$$(2.1.18) \quad \|u - u_h\|_V + \|p - p_h\|_Q \leq C \left(\inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V + \inf_{q \in Q_h} \|p - q\|_Q \right)$$

Si además $\ker B_h \subset \ker B$ entonces $\|u - u_h\|_V \leq C \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V$.

En nuestro problema tenemos que $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$ es coercitiva y por lo tanto satisface la inf-sup continua y discreta en vista de que la coercitividad, que es una propiedad hereditaria, implica la condición inf-sup. Anteriormente vimos que b satisface la inf-sup continua. A diferencia de la coercitividad, la condición inf-sup no es hereditaria, i. e., la validez de la condición inf-sup en un espacio V no garantiza su validez en subespacios V_h de V . Entonces para poder garantizar la existencia y unicidad de solución del problema (2.1.15) deberíamos ver, para cada elección de los subespacios V_h y Q_h , que b cumple la condición inf-sup discreta (2.1.16).

Sea

$$M_h = \{q_h \in Q_h : b(v_h, q_h) = 0, \forall v_h \in V_h\}$$

i.e., $M_h = \ker(B_h^*)$. Una condición necesaria para que se cumpla la condición inf-sup (2.1.16) es que $M_h = \{0\}$, i.e, el operador B_h^* sea inyectivo. El espacio M_h es llamado **espacio de modos de presión espúreos**.

Como estamos en dimensión finita podemos hacer uso del teorema de la dimensión:

$$\dim(\ker B_h^*) = \dim(Q_h) - \dim(\text{Im} B_h^*) \geq \dim(Q_h) - \dim(V_h)$$

y concluir que una condición necesaria para que la condición inf-sup discreta se satisfaga es que

$$\dim(V_h) \geq \dim(Q_h)$$

En lo que sigue, dado un conjunto D denotaremos por $\mathcal{P}_k(D)$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo k en D .

Sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω tal que dos triángulos cualesquiera de la triangulación compartan a lo sumo un vértice o un lado. Notaremos por h el tamaño de la malla, i.e., $h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$, con h_T la longitud del mayor lado de T . Asumiremos que la triangulación \mathcal{T}_h satisface la condición del ángulo mínimo y en consecuencia, existe una constante $\sigma > 0$ tal que $h_T/\rho_T \leq \sigma$, donde ρ_T es el diámetro de la mayor bola contenida en T .

Ahora vamos a ver ejemplos de subespacios V_h y Q_h para los cuales no se cumple la condición inf-sup.

Antes de ello vamos a ver un resultado, conocido como relación de Euler, que vincula la cantidad de nodos, lados y elementos de una triangulación. Consideremos Ω un dominio con borde poligonal (sin agujeros) y una partición de Ω en triángulos T_k o en cuadriláteros Q_k .

Notamos:

$$\begin{aligned} N &= \text{número de nodos en } \Omega \\ Ni &= \text{número de nodos internos en } \Omega \\ Nl &= \text{número de lados en } \Omega \\ \partial Nl &= \text{número de lados en el borde de } \Omega \\ \partial N &= \text{número de nodos en el borde de } \Omega \\ Ne &= \text{número de elementos en } \Omega \end{aligned}$$

LEMA 2.1.1. *Relaciones de Euler*

$$(2.1.19) \quad Ne - Nl + N = 1$$

$$(2.1.20) \quad \partial Nl = \partial N$$

Si además los elementos son triángulos entonces

$$(2.1.21) \quad 2Nl - \partial Nl = 3Ne.$$

El siguiente ejemplo nos muestra que los elementos de más bajo orden que podríamos considerar no satisfacen la condición inf-sup.

2.1.1. El elemento P_1P_0 . Consideramos $\Omega = \bigcup T_k$ con T_k triángulo. Elegimos

$$V_h = \{\mathbf{v} \in C(\bar{\Omega})^2 : v|_{T_k} \in P_1(T_k)^2, \quad \forall T_k\} \cap (H_0^1(\Omega))^2$$

$$Q_h = \{q \in L_0^2(\Omega) : q|_{T_k} \in P_0(T_k)\}$$

Veamos que este ejemplo no verifica la condición inf-sup. Recordemos que esto es equivalente a que los operadores $B_h : W_h^\perp \rightarrow Q'_h$ y $B_h^* : Q_h \rightarrow W_h^\circ$ no son isomorfos.

Del teorema de la dimensión tenemos que

$$(2.1.22) \quad \dim(\ker B_h^*) = \dim(Q_h) - \dim(\text{Im} B_h^*) \geq \dim(Q_h) - \dim(V_h) \geq Ne - 1 - 2Ni,$$

donde Ne es la cantidad de triángulos.

Del lema 2.1.1 tenemos que

$$Nl = Ne + N - 1,$$

y usando (2.1.21) obtenemos

$$2Ne + 2N - 2 - \partial Nl = 3Ne.$$

Luego,

$$2(Ni + \partial N) - 2 - \partial Nl = Ne.$$

Entonces concluimos que

$$Ne - 2Ni - 1 = 2\partial N - 3 - \partial N = \partial N - 3 > 0,$$

salvo que $\partial N = 3$ o sea si Ω consta de un solo triángulo.

El siguiente ejemplo muestra que, si se utilizan elementos continuos de grado 1 en cada triángulo para el par velocidad-presión (i.e., el elemento finito P_1P_1) la condición inf-sup es violada dando lugar a la aparición de modos de presión espúreos y en consecuencia, aproximaciones inestables de la presión.

2.1.2. El inestable elemento P_1P_1 (Checkerboard mode). El elemento P_1P_1 es el elementos más sencillo y fácil de programar que se nos puede ocurrir si deseamos tener aproximaciones continuas de la presión. Es sabido, sin embargo, que este elemento nos conduce a la aparición de modos de presión espúreos [8, 17].

Sean

$$\begin{aligned} V_h &= \{\mathbf{v} \in (C(\bar{\Omega}))^2 : \mathbf{v}|_T \in (\mathcal{P}_1(T))^2, \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap (H_0^1(\Omega))^2 \\ Q_h &= \{q \in C(\bar{\Omega}) : q|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap L_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Vamos a construir $q^* \in Q_h$, $q^* \neq 0$, tal que $b(\mathbf{v}, q^*) = -\int_\Omega q^* \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_h$.

Esto nos dice que

$$\sup_{\mathbf{v} \in V_h, \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, q^*)}{\|\mathbf{v}\|_V} = 0$$

y por ende no se cumple la condición inf-sup.

Vamos a construirla de modo que $\int_T q^* = 0, \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$.

Para fijar ideas consideremos $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y tomemos una partición de Ω en cuadrados de tamaño h los cuales subdividimos por su diagonal obteniendo así una triangulación uniforme de Ω .

Dado un triángulo T cualquiera denotamos por z_1^T, z_2^T, z_3^T los vértices de T . Entonces tomamos $q^* \in \mathcal{P}_1(T)$ tal que $q^*(z_1^T) = 0, q^*(z_2^T) = 1, q^*(z_3^T) = -1$. No hay que olvidar que como queremos que q^* sea continua hay que construirla de forma tal que en los triángulos contiguos se peguen bien. Un ejemplo de tal construcción es mostrada en la Figura 2.1.1.

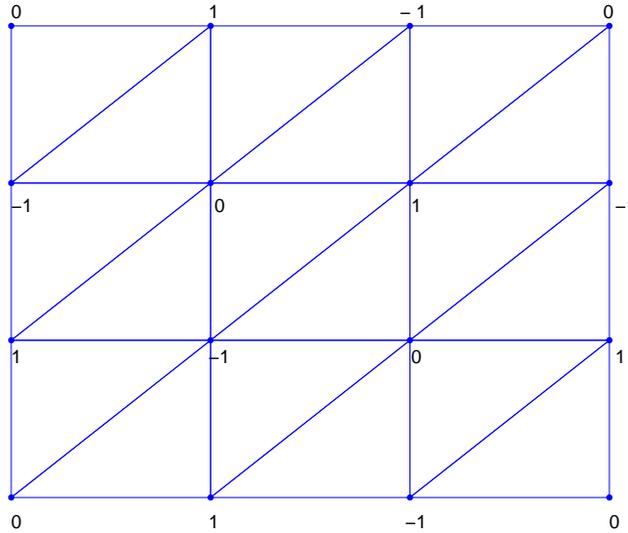


FIGURA 2.1.1. Un modo de presión espúreo

Como q^* tiene grado 1 en cada triángulo tenemos que:

$$(2.1.23) \quad \int_T q^* = \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 q^*(z_i^T) = 0$$

ya que la fórmula de integración numérica $Q(f) = \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 f(z_i^T)$ es exácta para polinomios de grado 1 en T .

Teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{v}$ es constante sobre cada T , tenemos que $\forall \mathbf{v} \in V_h$

$$(2.1.24) \quad \int_{\Omega} q^* \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_T \int_T q^* \nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_T \nabla \cdot \mathbf{v} \int_T q^* = 0$$

Modos de presión de la forma de q^* son llamados “Checkerboard mode”.

□

2.2. Condiciones inf-sup débiles

Nuestro propósito es ahora introducir un método de estabilización para los inestables elementos $P_1 P_1$. Para ello, vamos a agregar un término a la segunda ecuación de (1.1.2) de forma tal que el problema sea estable y vamos a probar que este nuevo problema tiene una única solución la cual aproxima a la solución del problema (1.1.2) con orden óptimo.

Sean

$$P_0 = \{v \in L^2(\Omega) : v|_T \in \mathcal{P}_0(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$P_1 = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\mathbf{P}_1 = \{v \in (C(\bar{\Omega}))^2 : v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

El siguiente lema establece la existencia de un operador de interpolación que nos permite establecer las propiedades de aproximación de los espacios P_0 y P_1 las cuales serán de suma utilidad para establecer la convergencia del método.

LEMA 2.2.1. (*Interpolante de Scott-Zhang*). Existe un operador lineal $\mathcal{I} : H^1(\Omega) \rightarrow P_1$ tal que:

$$(2.2.25) \quad \|q - \mathcal{I}(q)\|_0 \leq Ch\|q\|_1 \quad \forall q \in H^1(\Omega)$$

$$(2.2.26) \quad \|u - \mathcal{I}(u)\|_0 + h\|u - \mathcal{I}(u)\|_1 \leq Ch^2\|u\|_2 \quad \forall u \in H^2(\Omega)$$

Demostración: La demostración de ambas estimaciones puede verse en [21].

Vamos a considerar los subespacios $V_h = (H_0^1(\Omega))^2 \cap \mathbf{P}_1 \subset V$ y $Q_h = L_0^2(\Omega) \cap P_1 \subset Q$ ambos de dimensión finita.

Consideramos el problema mixto discreto: Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tal que

$$(2.2.27) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q) = 0 & \forall q \in Q_h \end{cases}$$

En la sección anterior vimos que con esta elección de subespacios b no cumple la condición inf-sup discreta. No obstante vamos a probar que para los subespacios definidos anteriormente se cumple una forma más débil de la condición inf-sup discreta.

Durante nuestras estimaciones vamos a hacer uso de la siguiente desigualdad inversa (ver, por ejemplo, [15]):

LEMA 2.2.2. Dada cualquier $q_h \in Q_h$, existe una constante C positiva tal que:

$$(2.2.28) \quad \|\nabla q_h\|_0 \leq Ch^{-1}\|q_h\|_0$$

Los siguientes lemas nos proporcionan desigualdades que nos ayudarán a entender la deficiencia de la condición inf-sup para estos espacios.

LEMA 2.2.3. Sean V_h y Q_h los espacios definidos anteriormente. Existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ tal que

$$(2.2.29) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq C_1 \|q_h\|_0 - C_2 h \|\nabla q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

Demostración: en vista de la condición inf-sup continua tenemos que

$$(2.2.30) \quad \sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|_1} \geq \beta \|q\|_0 \quad \forall q \in Q$$

en particular dado $q_h \in Q_h \subset Q$ existe $\mathbf{w} \in V$ tal que

$$(2.2.31) \quad \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w} \geq \beta \|q_h\|_0 \|\mathbf{w}\|_1$$

Dado \mathbf{w} , existe $\mathbf{w}_h \in V_h$ un interpolador de \mathbf{w} para el cual se cumple

$$(2.2.32) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_0 &\leq Ch \|\mathbf{w}\|_1 \\ \|\mathbf{w}_h\|_1 &\leq C \|\mathbf{w}\|_1, \end{aligned}$$

de hecho podemos, por ejemplo, tomar \mathbf{w}_h igual al interpolador de Clement de \mathbf{w} [15].

Usando (2.2.31) y (2.2.32) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h}{\|\mathbf{w}_h\|_1} &\geq \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h}{C \|\mathbf{w}\|_1} = \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\mathbf{w}_h - \mathbf{w}) + \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}}{C \|\mathbf{w}\|_1} \\ &\geq \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}}{C \|\mathbf{w}\|_1} - \frac{|\int_{\Omega} \nabla q_h (\mathbf{w}_h - \mathbf{w})|}{C \|\mathbf{w}\|_1} \\ &\geq \frac{\beta}{C} \|q_h\|_0 - \frac{\|\nabla q_h\|_0 \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_h\|_0}{C \|\mathbf{w}\|_1} \geq C_1 \|q_h\|_0 - C_2 h \|\nabla q_h\|_0 \end{aligned}$$

Como

$$(2.2.33) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h}{\|\mathbf{w}_h\|_1}$$

Tenemos el lema probado. □

Notemos que el término $-h \|\nabla q_h\|_0$ que aparece en el lema 2.2.3 caracteriza la deficiencia de la condición inf-sup para el inestable par $P_1 P_1$. Esta observación nos lleva a buscar un camino alternativo, con el fin de contrarrestar este término, y poder resolver con eficacia el problema de Stokes. En otras palabras, vamos a aproximar usando otro problema discreto en el cual desaparezca el término $-h \|\nabla q_h\|_0$.

Existen numerosos trabajos referentes a los llamados métodos de estabilización cuyo propósito es modificar el problema de forma tal que la deficiencia de la condición inf-sup sea superada (ver, [2], [3], [18], [19]). En este trabajo la caracterización de la deficiencia de la condición inf-sup será planteada en términos de ciertos operadores abstractos.

Sea $\Pi : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ el operador definido de forma tal que

$$\int_T \Pi(q) = \int_T q \quad \forall T \in \mathcal{T}_h$$

Es fácil ver que $\Pi(q)|_T = \frac{1}{|T|} \int_T q$

LEMA 2.2.4. *Existe $C > 0$ tal que*

$$(2.2.34) \quad Ch \|\nabla q_h\|_0 \leq \|q_h - \Pi(q_h)\|_0 \quad \forall q_h \in P_1$$

Demostración: Para probar (2.2.34) hay que notar que $\Pi(q_h)$ es constante sobre cada triángulo T y por ende $\nabla(\Pi(q_h))|_T = 0$.

Usando este hecho y la desigualdad inversa del lema 2.2.2 tenemos que,

$$\begin{aligned} h^2 \|\nabla q_h\|_0^2 &= \sum_T h^2 \|\nabla q_h|_T\|_{0,T}^2 \\ &= \sum_T h^2 \|\nabla(q_h|_T - \Pi(q_h)|_T)\|_{0,T}^2 \leq \sum_T C \|q_h|_T - \Pi(q_h)|_T\|_{0,T}^2 \\ &= C \|q_h - \Pi(q_h)\|_0^2 \end{aligned}$$

□

Combinando los Lemas 2.2.3 y 2.2.4 obtenemos:

COROLARIO 2.2.1. *Existen $C_1 > 0$ y $C_2 > 0$ independientes de h tales que*

$$(2.2.35) \quad \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq C_1 \|q_h\|_0 - C_2 \|(I - \Pi)q_h\|_0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

2.3. El método de estabilización

Con el fin de compensar la deficiencia de la condición inf-sup vamos a considerar el siguiente problema variacional discreto que es una modificación del problema (1.1.2).

Hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tal que:

$$(2.3.36) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q) - G(p_h, q) = 0 & \forall q \in Q_h \end{cases}$$

donde $G(p_h, q) = \int_{\Omega} (p_h - \Pi(p_h))(q - \Pi(q))$.

Notemos que este problema es equivalente al de hallar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ tal que

$$(2.3.37) \quad \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in V_h \times Q_h$$

donde $\tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}, q) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q) - G(p_h, q)$

Este problema variacional no es equivalente al problema de Stokes (1.1.2). No obstante, vamos a ver que el problema (2.3.37) tiene una única solución y bajo alguna hipótesis adicional sobre \mathbf{u} veremos que la solución $\mathbf{u}_h \in V_h$ converge en norma H^1 a \mathbf{u} y $p_h \in Q_h$ converge en norma L^2 a p donde \mathbf{u} y p son soluciones del problema (1.1.2).

Definamos $\mathcal{W}_h = V_h \times Q_h$. Luego, si $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_h$ entonces $\mathbf{w} = (\mathbf{v}, q)$ con $\mathbf{v} \in V_h$ y $q \in Q_h$.

En \mathcal{W}_h definimos naturalmente la norma: $\|\mathbf{w}\|_1 = \|(\mathbf{v}, q)\|_1 = \|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0$.

Además, como V_h y Q_h son espacios de Hilbert entonces \mathcal{W}_h también lo es con el producto interno $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}_h} = (\cdot, \cdot)_{H^1} + (\cdot, \cdot)_{L^2}$ y por ende, tenemos también definida

$$\|\cdot\|_0 = (\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}_h}^{1/2}.$$

Es fácil ver que la forma $\tilde{Q} : \mathcal{W}_h \times \mathcal{W}_h \rightarrow \mathbb{R}$ es bilineal y simétrica. Para ver que el problema (2.3.36) tiene una única solución, probaremos que $\tilde{Q} : \mathcal{W}_h \times \mathcal{W}_h \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y cumple la condición inf-sup. Debido a la simetría de \tilde{Q} se tiene que, si se cumple una condición inf-sup, automáticamente se cumple la otra condición. Luego por la observación 1.2.2, se tiene la existencia y unicidad del problema (2.3.37).

Veamos en primer lugar que \tilde{Q} es continua. Para ello necesitamos ver la continuidad del operador $\Pi : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

LEMA 2.3.1. Si $q \in L^2(\Omega)$ entonces

$$(2.3.38) \quad \|\Pi(q)\|_0 \leq \|q\|_0$$

Demostración: Usando la desigualdad de Hölder tenemos que para cada $T \in \mathcal{T}_h$

$$\|\Pi q\|_{0,T}^2 = \int_T \left(\frac{1}{|T|} \int_T q \right)^2 \leq \int_T q^2 = \|q\|_{0,T}^2$$

luego

$$\|\Pi q\|_0^2 = \sum_T \|\Pi q\|_{0,T}^2 \leq \sum_T \|q\|_{0,T}^2 = \|q\|_0^2.$$

□

El siguiente Corolario demuestra la continuidad de la forma bilineal \tilde{Q} .

COROLARIO 2.3.1. *Existe $C > 0$ tal que*

$$(2.3.39) \quad \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}, q) \leq C(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0)$$

Demostración: Por la continuidad de las formas bilineales a , b y el lema anterior tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}, q) &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) + b(\mathbf{u}_h, q) - G(p_h, q) \\ &\leq \|\mathbf{u}_h\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1 \|p_h\|_0 + \|\mathbf{u}_h\|_1 \|q\|_0 + \|p_h - \Pi p_h\|_0 \|q - \Pi q\|_0 \\ &\leq \|\mathbf{u}_h\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1 \|p_h\|_0 + \|\mathbf{u}_h\|_1 \|q\|_0 + 4\|p_h\|_0 \|q\|_0 \\ &\leq 4(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0) \end{aligned}$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar que \tilde{Q} cumple la condición inf-sup.

TEOREMA 2.3.1. *Existe $C > 0$ independiente de h tal que*

$$(2.3.40) \quad \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{W}_h, (\mathbf{v}_h, q_h) \neq (0,0)} \frac{\tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \geq C(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0) \quad \forall (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{W}_h$$

Demostración: Para probar la inf-sup basta con construir $(\tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h) \in \mathcal{W}_h$ tal que

$$(2.3.41) \quad \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \tilde{\mathbf{v}}_h, \tilde{q}_h) \geq C(\|\mathbf{u}_h\|_1 + \|p_h\|_0)(\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_1 + \|\tilde{q}_h\|_0)$$

para alguna constante $C > 0$. Dado $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathcal{W}_h$ tenemos que:

$$(2.3.42) \quad \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h, -p_h) = \mu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 + \|(I - \Pi)p_h\|_0^2$$

Dado p_h sabemos que existe $\mathbf{w} \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(2.3.43) \quad \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{w} \geq \tilde{C} \|p_h\|_0 \|\mathbf{w}\|_1$$

Sea \mathbf{w}_h el interpolador de \mathbf{w} introducido en el lema 2.2.3 podemos suponer que \mathbf{w}_h está normalizado de forma tal que cumple

$$(2.3.44) \quad \|\nabla \mathbf{w}_h\|_0 = \sqrt{\mu} \|p_h\|_0$$

Por los mismos argumentos que usamos en la demostración del lema 2.2.3 tenemos que

$$(2.3.45) \quad \frac{\int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h}{\|\nabla \mathbf{w}_h\|_0} \geq C_1 \|p_h\|_0 - C_2 \|(I - \Pi)p_h\|_0$$

luego

$$(2.3.46) \quad \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \geq C_1 \mu^{1/2} \|p_h\|_0^2 - C_2 \mu^{1/2} \|(I - \Pi)p_h\|_0 \|p_h\|_0$$

Como no nos va a importar que C_1 y C_2 dependan de μ redefinimos $C_1 := C_1 \mu^{1/2}$ y $C_2 := C_2 \mu^{1/2}$

Ahora fijamos $(\mathbf{v}_h, q_h) = (-\alpha \mathbf{w}_h, 0)$ donde $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ será elegido luego. Usando (2.3.44) y (2.3.46) tenemos que:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, -\alpha \mathbf{w}_h, 0) &= a(\mathbf{u}_h, -\alpha \mathbf{w}_h) + b(-\alpha \mathbf{w}_h, p_h) \\ &= -\alpha \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h : \nabla \mathbf{w}_h + \alpha \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \mathbf{w}_h \\ &\geq -\alpha \sqrt{\mu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0 \|p_h\|_0 + \alpha (C_1 \|p_h\|_0^2 - C_2 \|(I - \Pi)p_h\|_0 \|p_h\|_0). \end{aligned}$$

Para $(\mathbf{v}_h, q_h) = (\mathbf{u}_h - \alpha \mathbf{w}_h, -p_h)$ usando (2.3.42) y la desigualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h - \alpha \mathbf{w}_h, -p_h) &= \tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h, -p_h) + (\mathbf{u}_h, p_h, -\alpha \mathbf{w}_h, 0) \\ &\geq \mu \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 + \|(I - \Pi)p_h\|_0^2 + \alpha C_1 \|p_h\|_0^2 \\ &\quad - \alpha \sqrt{\mu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0 \|p_h\|_0 - \alpha C_2 \|(I - \Pi)p_h\|_0 \|p_h\|_0 \end{aligned}$$

Ahora usando la desigualdad de Young:

$$ab = \frac{a}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon} b \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2}$$

con $\epsilon = \frac{C_1}{2} > 0$ obtenemos

$$\sqrt{\mu} \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0 \|p_h\|_0 \leq \mu \frac{\|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2}{C_1} + \frac{C_1}{4} \|p_h\|_0^2$$

y

$$C_2 \|(I - \Pi)p_h\|_0 \|p_h\|_0 \leq \frac{C_2^2}{C_1} \|(I - \Pi)p_h\|_0^2 + \frac{C_1}{4} \|p_h\|_0^2$$

Luego combinando todas las desigualdades obtenemos

$$\tilde{Q}(\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{u}_h - \alpha \mathbf{w}_h, -p_h) \geq \mu \left(1 - \frac{\alpha}{C_1}\right) \|\nabla \mathbf{u}_h\|_0^2 + \left(1 - \alpha \frac{C_2^2}{C_1}\right) \|(I - \Pi)p_h\|_0^2 + \frac{\alpha C_1}{2} \|p_h\|_0^2.$$

Tomando $\tilde{\alpha} = \min\{\frac{C_1}{2}, \frac{C_1}{2C_2^2}\}$ tenemos que $1 - \frac{\tilde{\alpha}}{C_1} \geq \frac{1}{2}$ y $1 - \frac{\tilde{\alpha}C_2^2}{C_1} \geq \frac{1}{2}$.

Tomemos ahora $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}} = \mathbf{u}_{\mathbf{h}} - \tilde{\alpha}\mathbf{w}_{\mathbf{h}}$ y $\tilde{q}_h = -p_h$. Entonces usando $(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$ tenemos

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}, p_h, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}, \tilde{q}_h) &\geq \frac{1}{2} (\mu \|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0^2 + \tilde{\alpha} C_1 \|p_h\|_0^2 + \|(I - \Pi)p_h\|_0^2) \\ &\geq \frac{1}{6} (\sqrt{\mu} \|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \sqrt{\tilde{\alpha} C_1} \|p_h\|_0 + \|(I - \Pi)p_h\|_0)^2 \geq \gamma (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0)^2 \end{aligned}$$

con $\gamma = \frac{1}{6} \min\{\mu, \tilde{\alpha} C_1\}$

Finalmente, usando (2.3.44) llegamos a

$$\begin{aligned} \|\nabla \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|\tilde{q}_h\|_0 &= \|\nabla(\mathbf{u}_{\mathbf{h}} - \tilde{\alpha}\mathbf{w}_{\mathbf{h}})\|_0 + \|p_h\|_0 \leq \|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \tilde{\alpha} \|\nabla \mathbf{w}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0 \\ &= \|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + (1 + \tilde{\alpha}\sqrt{\mu}) \|p_h\|_0 \leq \delta (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0), \end{aligned}$$

donde $\delta = 1 + \tilde{\alpha}\sqrt{\mu}$. Luego, tomando $C = \frac{\gamma}{\delta}$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}, p_h, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}, \tilde{q}_h) &\geq \gamma (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0) (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0) \\ &= \delta (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0) \frac{\gamma}{\delta} (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0) \\ &\geq C (\|\nabla \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|\tilde{q}_h\|_0) (\|\nabla \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_0 + \|p_h\|_0) \end{aligned}$$

y el teorema queda demostrado. □

COROLARIO 2.3.2. *Existe un único $(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}, p_h)$ que satisface 2.3.36*

El siguiente teorema establece las relaciones de aproximación del método de estabilización y puede verse como una generalización del teorema 2.1.1,

TEOREMA 2.3.2. *Sea $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \times L_0^2(\Omega)$ solución del problema (1.1.2). Sea $(\mathbf{u}_{\mathbf{h}}, p_h) \in V_h \times Q_h$ solución del problema (2.3.36). Existe $C > 0$ tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathbf{h}}\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left(\inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_0 + \inf_{\mathbf{v}_{\mathbf{h}} \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathbf{h}}\|_1 + \|(I - \Pi)p\|_0 \right)$$

Demostración: Dado que $V_h \times Q_h \subset V \times Q$ de la formulación (1.1.2) sabemos que

$$(2.3.47) \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p) &= F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

También de la formulación (2.3.36) resulta que

$$(2.3.48) \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= F(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= G(p_h, q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones tenemos

$$(2.3.49) \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h - p) &= 0 & \forall \mathbf{v}_h \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, q_h) &= G(p_h, q_h) & \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

Equivalentemente tenemos

$$(2.3.50) \quad a(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h - p) + b(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, q_h) = G(p_h, q_h)$$

lo que puede escribirse como:

$$(2.3.51) \quad \tilde{Q}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p, \mathbf{v}_h, q_h) = G(p, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h.$$

Sea $(\mathbf{w}_h, r_h) \in V_h \times Q_h$ cualquiera. Como \tilde{Q} verifica la inf-sup en $V_h \times Q_h$ tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} C(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p_h - r_h\|_0) &\leq \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h} \frac{\tilde{Q}(\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h, p_h - r_h, \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ &= \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h} \frac{\tilde{Q}(\mathbf{u}_h - \mathbf{u}, p_h - p, \mathbf{v}_h, q_h) + \tilde{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h, \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \\ &= \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in V_h \times Q_h} \frac{G(p, q_h) + \tilde{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h, \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} \end{aligned}$$

Del corolario 2.3.1 se deduce que

$$\tilde{Q}(\mathbf{u} - \mathbf{w}_h, p - r_h, \mathbf{v}_h, q_h) \leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0)(\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0)$$

y por la continuidad de Π tenemos que existe $C > 0$ tal que

$$G(p, q_h) \leq CG(p, p)^{1/2} \|q_h\|_0$$

luego tenemos

$$\begin{aligned}
C(\|\mathbf{u}_h - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p_h - r_h\|_0) &\leq \sup_{(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{W}_h} G(p, p)^{1/2} \frac{\|q_h\|_0}{\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0 \\
&\leq G(p, p)^{1/2} + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0 \\
&= \|(I - \Pi)p\|_0 + \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0
\end{aligned}$$

Por la desigualdad triangular tenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0 + \|\mathbf{w}_h - \mathbf{u}_h\|_1 + \|r_h - p_h\|_0 \\
&\leq C(\|\mathbf{u} - \mathbf{w}_h\|_1 + \|p - r_h\|_0 + \|(I - \Pi)p\|_0)
\end{aligned}$$

Tomando ínfimos con $\mathbf{w}_h \in V_h$ y $r_h \in Q_h$ se tiene demostrado el teorema. □

Observemos que por la definición de Π tenemos que $\int_T (p - \Pi p) = 0$. Luego si $p \in H^1(T)$ entonces $p - \Pi p \in H^1(T)$ y podemos usar el teorema de Poincaré para funciones de promedio cero para establecer que:

$$\|p - \Pi p\|_{0,T} \leq c_p h \|\nabla(p - \Pi p)\|_{0,T} = c_p h \|\nabla p\|_{0,T} \leq c_p h \|p\|_{1,T}$$

donde c_p es una constante que no depende de T .

Para luego concluir que

$$(2.3.52) \quad \|p - \Pi p\|_0^2 = \sum_T \|p - \Pi p\|_{0,T}^2 \leq \sum_T c_e h \|p\|_{1,T}^2 \leq Ch \|p\|_1$$

Suponiendo un poco más de regularidad para \mathbf{u} y p esta observación nos permite mostrar la convergencia de \mathbf{u}_h a \mathbf{u} y p_h a p .

COROLARIO 2.3.3. *Supongamos que $(\mathbf{u}, p) \in (H_0^1(\Omega))^2 \cap H^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ es solución del problema (1.1.2). Supongamos que $(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \in V_h \times Q_h$ es solución del problema (2.3.36). Entonces*

$$(2.3.53) \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1)$$

Demostración: por la estimación (2.2.26) del lema 2.2.1 sabemos que dada $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2$ existe $\tilde{\mathbf{u}}_h \in V_h$ tal que

$$(2.3.54) \quad \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_0 + h\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 \leq Ch^2\|\mathbf{u}\|_2$$

En particular,

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 \leq Ch\|\mathbf{u}\|_2$$

Por otro lado, la afirmación (2.2.25) del lema 2.2.1 nos dice que dada $p \in H^1(\Omega)$ existe $\mathcal{I}(p) \in P_1$ tal que

$$\|p - \mathcal{I}(p)\|_0 \leq Ch\|p\|_1$$

Luego, si definimos $\tilde{p}_h = \mathcal{I}(p) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathcal{I}(p)$, es claro que $\tilde{p}_h \in Q_h$ y como $\int_{\Omega} p = 0$ usando la desigualdad de Hölder concluimos que

$$\begin{aligned} \|p - \tilde{p}_h\|_0 &= \|p - \left(\mathcal{I}(p) - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \mathcal{I}(p) \right)\|_0 \leq \|p - \mathcal{I}(p)\|_0 + \frac{1}{|\Omega|} \left\| \int_{\Omega} (p - \mathcal{I}(p)) \right\|_0 \\ &\leq \|p - \mathcal{I}(p)\|_0 + \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \left| \int_{\Omega} (p - \mathcal{I}(p)) \right| \leq \|p - \mathcal{I}(p)\|_0 + \|p - \mathcal{I}(p)\|_0 \\ &\leq Ch\|p\|_1 \end{aligned}$$

En consecuencia, usando estas estimaciones de error de interpolación, el teorema anterior y la desigualdad (2.3.52) tenemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 &\leq C(\|p - \tilde{p}_h\|_0 + \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_1 + \|(I - \Pi)p\|_0) \\ &\leq Ch(\|\mathbf{u}\|_2 + \|p\|_1) \end{aligned}$$

finalizando así la demostración. □

Experimentos Numéricos

En este capítulo, presentaremos una serie de experimentos numéricos en dimensión 2 los cuales muestran la performance del método de estabilización analizado en el capítulo anterior.

En todos los ejemplos, tomaremos $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y, tanto la velocidad como la presión, se interpolan con polinomios de grado 1 en una malla de elementos triangulares.

3.1. Aspectos Numéricos

Sea $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ y sea \mathcal{T}_h una triangulación de Ω que satisface la condición del ángulo mínimo. Consideremos los siguientes subespacios

$$P_1 = \{v \in C(\bar{\Omega}) : v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

$$\mathbf{P}_1 = \{v \in (C(\bar{\Omega}))^2 : v|_T \in \mathcal{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}_h\}$$

Para h fijo llamemos, como en el capítulo anterior, $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Q_h$ a la solución del problema estabilizado (2.3.36).

Denotamos por $n = \dim V_h$ y por $m = \dim Q_h$, entonces existen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ y q_1, \dots, q_m bases de V_h y Q_h respectivamente tales que $\mathbf{u}_h = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$ y $p_h = \sum_{j=1}^m \beta_j q_j$.

Sabemos que (\mathbf{u}_h, p_h) satisfacen

$$(3.1.55) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p_h) = F(\mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in V_h \\ b(\mathbf{u}_h, q) - G(p_h, q) = 0 & \forall q \in Q_h \end{cases}$$

Es claro que este problema es equivalente al de hallar $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y β_1, \dots, β_m tales que

$$(3.1.56) \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j a(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i) + \sum_{j=1}^m \beta_j b(\mathbf{v}_i, q_j) = F(\mathbf{v}_i) & \forall i, 1 \leq i \leq n \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j b(\mathbf{v}_j, q_i) - \sum_{j=1}^m \beta_j G(q_j, q_i) = 0 & \forall i, 1 \leq i \leq m \end{cases}$$

Sean $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ y $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$ las matrices definidas por:

$$(3.1.57) \quad \begin{aligned} (A)_{ij} &= a(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \mu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_i : \nabla \mathbf{v}_j \\ (B)_{ij} &= b(\mathbf{v}_i, q_j) = - \int_{\Omega} q_j \nabla \cdot \mathbf{v}_i \\ (G)_{ij} &= G(q_i, q_j) = \int_{\Omega} (q_i - \Pi q_i) (q_j - \Pi q_j) \end{aligned}$$

Notemos que, tanto la matriz de rigidez A como la matriz G , resultan ser simétricas. Llamemos

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} F(\mathbf{v}_1) \\ \vdots \\ F(\mathbf{v}_n) \end{pmatrix} \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

Llegamos así al sistema

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^t & -G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{pmatrix}$$

El cual tiene una única solución pues es equivalente al problema (2.3.36).

3.2. Ejemplos numéricos

En todos los ejemplos, hemos utilizado el comando delaunay de Matlab para generar la malla de triángulos y la siguiente regla de integración numérica, la cual es exacta para polinomios de grado 2, para aproximar las integrales en un triángulo T ,

$$\int_{\Omega} f \simeq \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^n f(\eta_i)$$

donde η_i son los puntos medios de los bordes del triángulo T .

Para cada uno de los ejemplos, calcularemos el error en norma L^2 para las presiones, y en norma L^2 y H_0^1 para las velocidades.

3.2.1. Ejemplo 1 - Cavity Flow. El primer ejemplo que vamos a ver es el conocido en la bibliografía como “Cavity Flow” (ver, por ejemplo, [1]).

En este ejemplo tomamos $\mu = 1$, $\mathbf{f} = (0, 0)$ y se asumen condiciones de Dirichlet homogéneas en Ω salvo en el lado $y = 1$, $0 < x < 1$ donde $\mathbf{u} = (1, 0)$.

Procedemos a resolver tanto con el método estabilizado como con el sin estabilizar. Observamos que, en ambos casos, las velocidades se aproximan bastante bien (ver Figura 3.2.1).

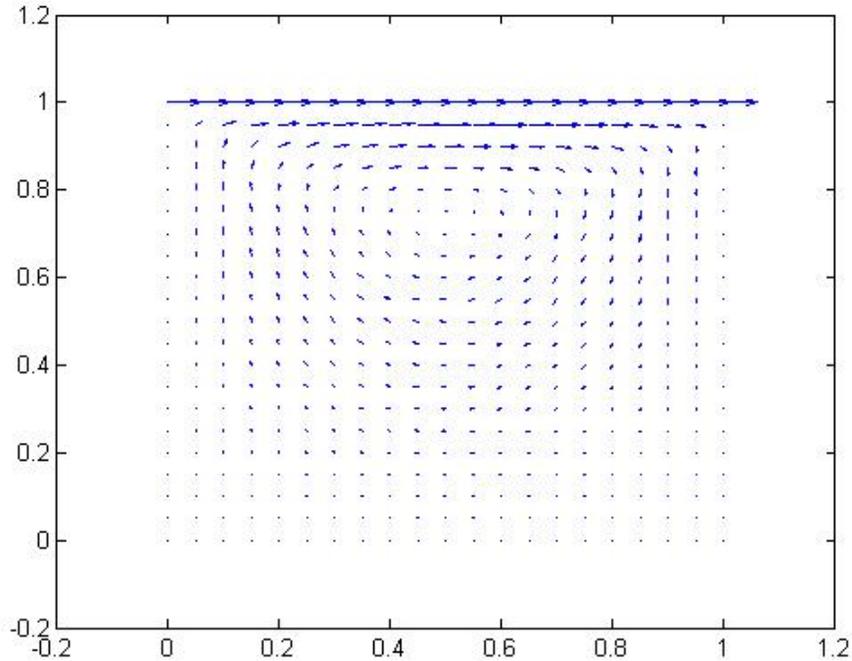


FIGURA 3.2.1. Velocidad del cavity flow

Por otra parte, como hemos predicho en el capítulo previo, no sucede lo mismo con la presión, ya que la aproximación por elementos P_1P_1 , conduce a la presencia de modos de presión espúeos como se puede apreciar en la Figura 3.2.1.

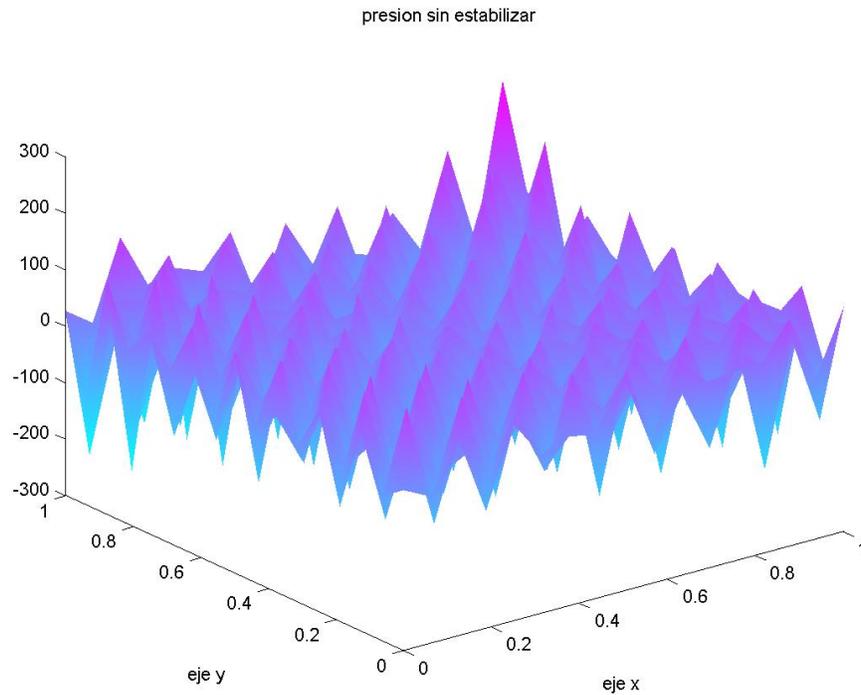


FIGURA 3.2.2. Cavity Flow -Presión inestable

Al agregar el término estabilizador la presión se suaviza, obteniendo así una buena aproximación como se muestra en la Figura 3.2.1

En los siguientes ejemplos, la solución exacta del problema es conocida, lo cual nos permite calcular el error cometido tanto para la velocidad como para la presión, i. e., calcularemos $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$.

Para hacer una estimación del orden del error cometido, notemos que si suponemos que $E \sim Ch^\alpha$, donde E es el error en alguna de las normas, entonces $\alpha \sim -\frac{\log E}{\log N}$ donde $N = \frac{1}{h}$.

3.2.2. Ejemplo 2. Tomamos $\mu = 1$, $\mathbf{u} = (x, -y)$, $p = x^3 - \frac{1}{4}$ y $\mathbf{f} = (3x^2, 0)$.

En la Figura 3.2.2 se muestra el campo de velocidades del fluido y en la Figuras 3.2.2 y 3.2.2 los gráficos de la presión sin estabilizar y con el método de estabilización respectivamente.

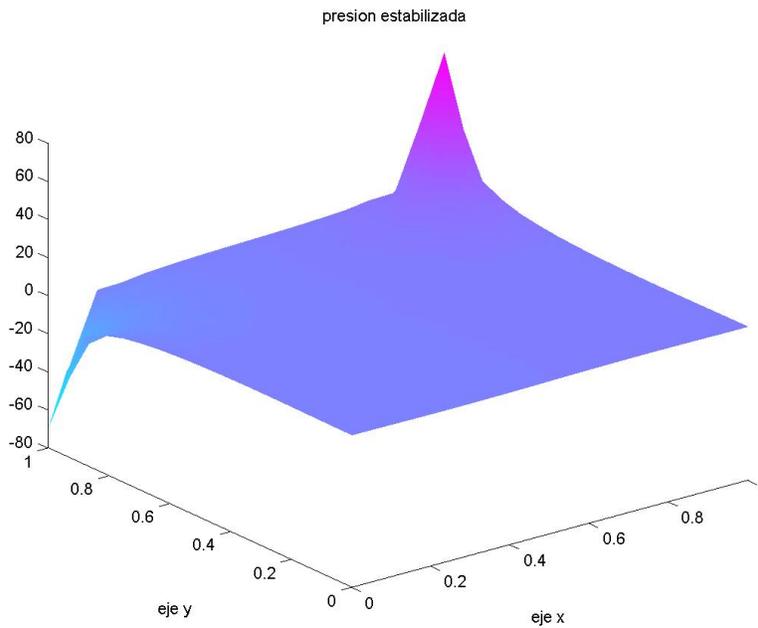


FIGURA 3.2.3. Cavity Flow - Presión estable

La tabla 3.2.2 muestra los errores obtenidos y la estimación del orden del error en norma L^2 y en norma H^1 para las velocidades y en norma L^2 para las presiones; los ordenes estimados son denotados por α_1 , α_2 y α_3 respectivamente.

N	α_1	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	α_2	$\ \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ _0$	α_3	$\ p - p_h\ _0$
8	1,7949	0,001109	1,3532	0,010714	1,5620	0,02588
12	1,8661	0,000491	1,3344	0,006335	1,5019	0,014793
16	1,8693	0,000292	1,3875	0,003892	1,5725	0,008279
20	1,8915	0,000182	1,3725	0,003089	1,5622	0,006317
24	1,9050	0,000128	1,3761	0,002332	1,5638	0,004664
28	1,9156	0,000094	1,3733	0,001919	1,5481	0,003907
32	1,9157	0,000075	1,4045	0,001375	1,5795	0,002641
36	1,9218	0,000058	1,3932	0,00137	1,5537	0,002788

CUADRO 1. Error en normas del ejemplo 2

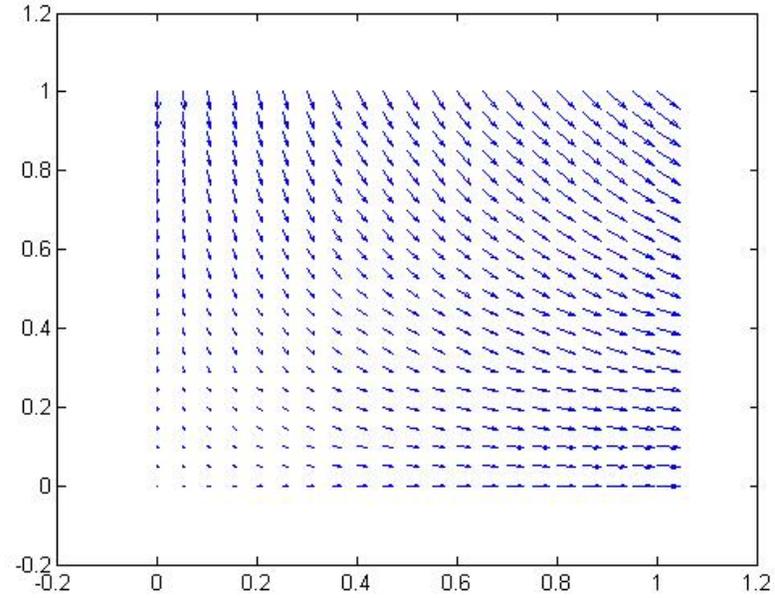


FIGURA 3.2.4. Campo de velocidades del ejemplo 2

3.2.3. Ejemplo 3. El tercer ejemplo corresponde a:
 $\mu = 1$, $\mathbf{u} = (-e^x(y \cos(y) + \sin(y)), e^x y \sin(y))$, $p = 2e^x \sin(y) - 2(e^1 - 1)(1 - \cos(1))$
 y $\mathbf{f} = (0, 0)$.

En la Figura 3.2.3 se muestra el campo de velocidades del fluido y en la Figura 3.2.3 la presión.

Los errores obtenidos al utilizar el método de estabilización presentado en el Capítulo 2 y la estimación del orden del error, tanto en norma L^2 como en norma H^1 para las velocidades y en norma L^2 para las presiones, son presentados en la tabla 3.2.3; los ordenes estimados son denotados por α_1 , α_2 y α_3 respectivamente.

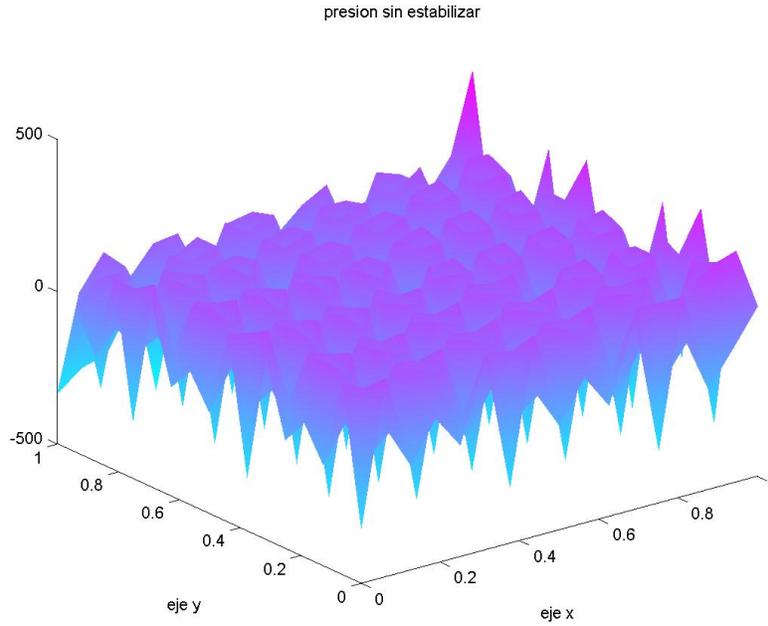


FIGURA 3.2.5. Presión inestable del ejemplo 2

N	α_1	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	α_2	$\ \nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\ _0$	α_3	$\ p - p_h\ _0$
8	1,9561	0,0115	1,0072	0,2829	1,6450	0,1349
12	1,9581	0,0052	0,9954	0,1908	1,5082	0,0819
16	1,9678	0,0029	1,0031	0,1408	1,5906	0,0437
20	1,9737	0,0019	1,0008	0,1139	1,5196	0,0390
24	1,9796	0,0013	1,0004	0,0947	1,4891	0,0296
28	1,9812	0,0009	0,9995	0,0814	1,4467	0,0261
32	1,9825	0,0007	1,0022	0,0702	1,5094	0,0145
36	1,9834	0,0006	1,0015	0,0631	1,4737	0,0180
40	1,9848	0,0005	1,0011	0,0568	1,4365	0,0168

CUADRO 2. Error en normas del ejemplo 3

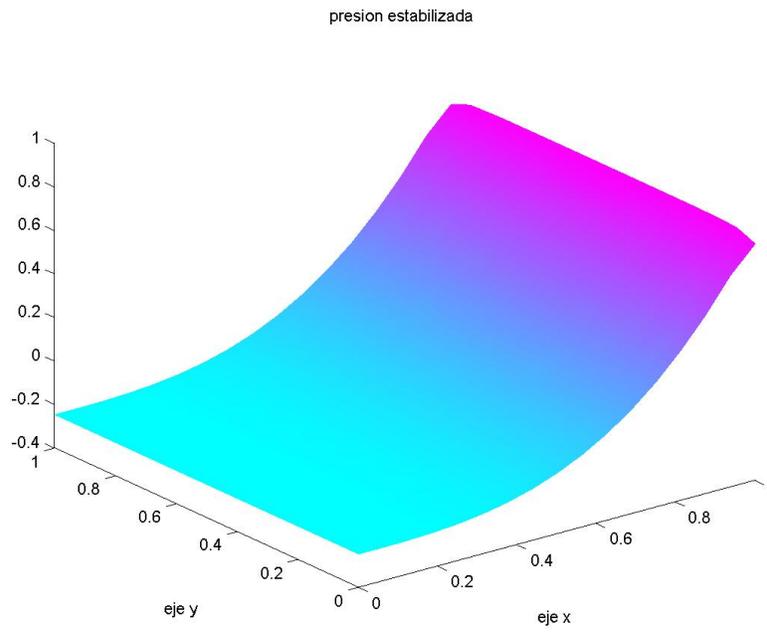


FIGURA 3.2.6. Presión estable del ejemplo 2

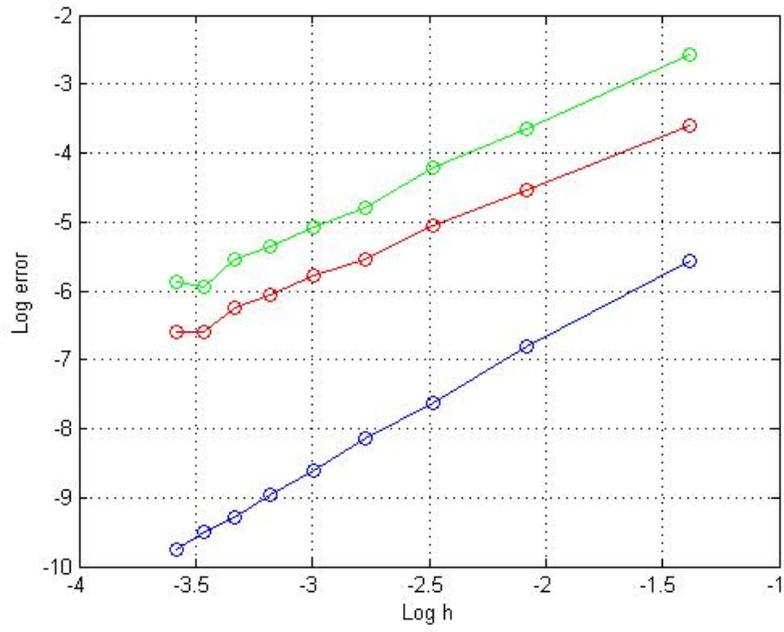


FIGURA 3.2.7. Presión estable del ejemplo 2

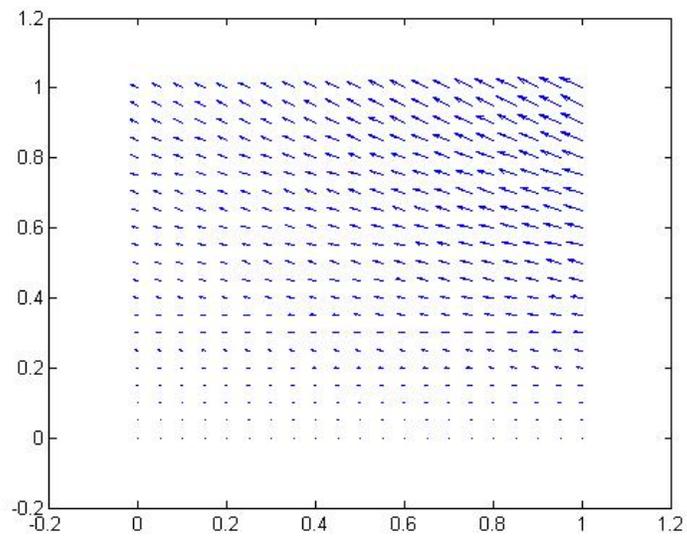


FIGURA 3.2.8. Campo de velocidades del ejemplo 3

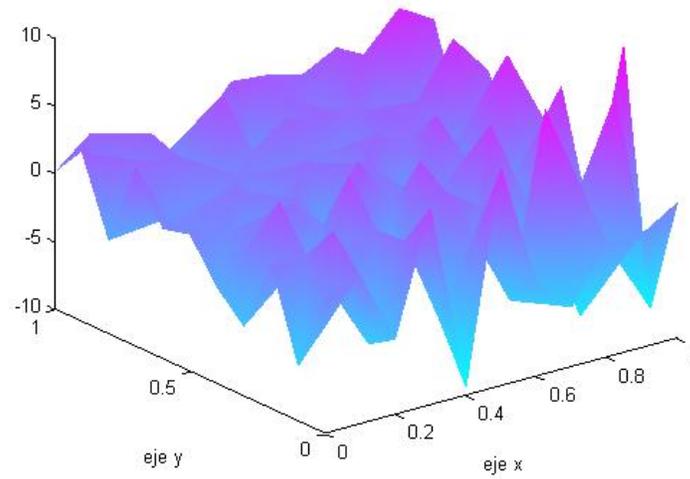


FIGURA 3.2.9. Presión estable del ejemplo 3

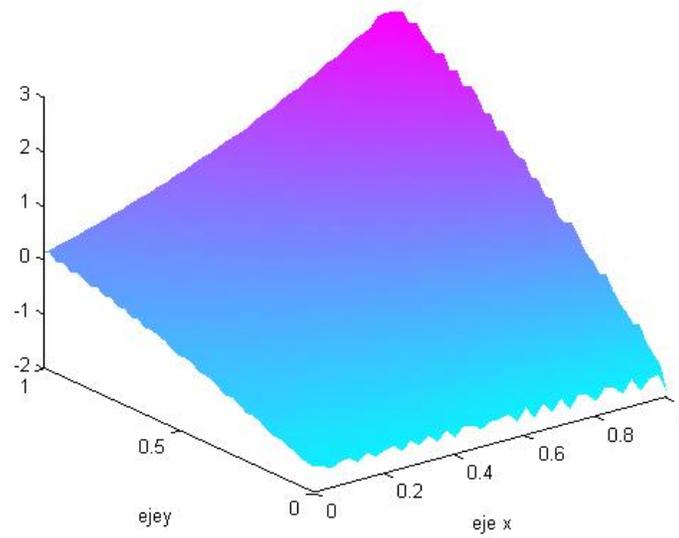


FIGURA 3.2.10. Presión estable del ejemplo 3

Bibliografía

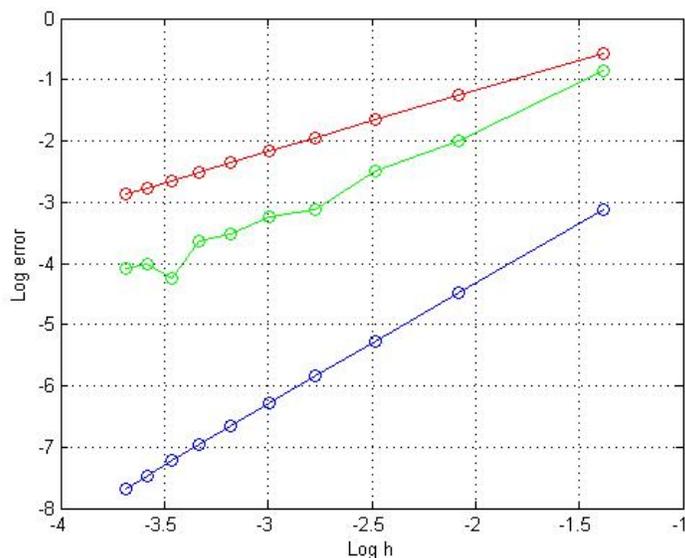


FIGURA 3.2.11. Presión estable del ejemplo 3

- [1] M. G. Armentano and J. Blasco, *Stable and unstable cross-grid P_kQ_l mixed finite elements for the Stokes problem*, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234 (5), pp. 1404-1416, 2010.
- [2] Baiocchi and Brezzi, *Stabilization of unstable numerical methods*, in Current Problems of Analysis and Mathematical Physics (Taormina, 1992), Univ. Roma "La Sapienza, Rome, pp. 59-63, 1993.
- [3] T. Barth, P. Bochev, M. Gunzburger, and J. Shadid, *A taxonomy of consistently stabilized finite element methods for the Stokes problem*, Siam J. Sci. Comput., vol. 25, pp. 1585-1607, 2004.
- [4] M. Behr, L. Franca, and T. Tezduyar, *Stabilized finite element methods for the velocity-pressure-stress formulation of incompressible flows*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 104, pp. 31-48, 1993.
- [5] J. Blasco and R. Codina, *Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 182, pp. 277-300, 2000.

- [6] J. Blasco and R. Codina, *Space and time error estimates for a first-order, pressure stabilized finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations*, Appl. Numer. Math., vol. 38, pp. 475-497, 2001.
- [7] D. Boffi, *Three-dimensional finite element methods for the Stokes problem*, SIAM J. Numer. Anal., 34, pp. 664-670, 1994.
- [8] D. Boffi, F. Brezzi, L. Demkowicz, R. G. Durán, R. Falk and M. Fortin, *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions, and Applications*, Lectures Notes in Mathematics vol. 1939, 2008.
- [9] P. Bochev, C. Dohrmann and M. D. Gunzburger, *Stabilization of low-order mixed finite elements for the Stokes equations*, Siam J. Numer. Anal. vol. 44, No. 1, pp. 82-101, 2006.
- [10] S. C. Brenner and L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [11] H. Brezis, *Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones*, Masson, París, 1983.
- [12] F. Brezzi and J. Douglas, *Stabilized mixed methods for the Stokes problem*. Numer. Math. vol. 53 , pp. 225-235, 1988.
- [13] F. Brezzi and R.S. Falk, *Stability of higher-order Hood-Taylor methods*, SIAM J. Numer. Anal. vol. 28, pp. 581-590, 1991.
- [14] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1991.
- [15] P. G. Ciarlet *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [16] J. Douglas and J. Wang, *An absolutely stabilized finite element method for the Stokes problem*, Math. Comput., vol. 52, pp. 495-508, 1989.
- [17] A. Ern and J-L. Guermond, *Theory and Practice of Finite Elements*, Springer, Applied Mathematical Sciences 159, 2004.
- [18] R. Falk, *An analysis of the penalty method and extrapolation for the stationary Stokes equations*, in *Advances in Computer Methods for partial Differential Equations*, R. Vichnevetsky, ed., AICA, 1975. pp. 66-69.
- [19] C. Johnson and J. Pitkaranta, *Analysis of mixed finite element methods related to reduced integration*, Math. Comp., vol. 42, pp. 9-23, 1984.
- [20] V. Girault and P. Raviart *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Theory and Algorithms*, Springer-Verlag, 1978.
- [21] L. R. Scott and S. Zhang, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, Math. Comp. vol. 54 , pp. 483-493, 1990.