UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Generalización de las Condiciones de Landesman-Lazer

Rocío Celeste Balderrama

Director: Dr. Pablo Amster

29 de Diciembre de 2011

A mis papás...

Agradecimientos

A Pablo, por su paciencia, por explicarme cuantas veces fuera necesario cuando no entendía algo, por incluirme desde un principio en su grupo y por confiar en mí. ¡¡Gracias!!.

A Pau K., miles de gracias por toda la ayuda que me brindaste y por darme ánimo, sos mi sister del alma y te estoy ultra agradecida. A Juan Sabia, gracias por ayudarme a leer en inglés, por responder cada una de mis preguntas y por aconsejarme y escucharme siempre, gracias por hacerme reir hasta cuando no tenía ganas, me encanta que seas mi papa de mentira.

A Pablo De Napoli un gran profesor, una persona que sabe transmitir conocimiento, gracias por dedicar el tiempo que fuera necesario a cada una de mis preguntas.

A todo el "grupo Amster" gracias por recibirme con tanta buena onda.

A mi tía Perla, por todo el apoyo desde el principio, por apostar en mí. Sos la mejor tía que uno puede tener.

A mis amigas de la infancia Mari y Natinat, son mi cable a tierra, las quiero en exceso, gracias por estar siempre ahí y por darme tanto cariño.

A mi familia, los amo. A vos ma que siempre tuviste una palabra de aliento a lo largo de mi carrera, admiro tu optimismo y tu fortaleza. A vos boliviano, me encantó ser tu sikimira llankadora, gracias por inculcarme el amor al estudio. A Zod, por alegrate por mis logros y por preguntarme despues de rendir "¿te tomaron Pitágoras?", me hinco ante Zod y juro lealtad eterna. A Naty, gracias por tus palabras de aliento cada vez que rendía un final. A Deivid y Carla por bancarme en momentos difíciles y por tantas noches en la "casa de estudio". A Belén y Tutina Pilar que me llenan de felicidad. Y por que no a mi compañera de estudio M. Donovan.

A Marce, gracias por bancarme y por explicarme millones de cosas, por empujarme a rendir cuando me daba miedo, por escucharme y darme tanto afecto, te quiero mucho.

A mis amigos y compañeros a lo largo de estos años, que lindo es haberlos conocido, cursar con ustedes y compartir momentos tan buenos y divertidos: Anita, Carito (mi hija), Fefe (mi hermanito), Flecoflopa, Georgi, Iri, Javi, La mari, Lau, Lucas, Lulu, Magali, Pau K., Pau T., Sol, Tata y Zeque .

A todos los que aportaron algo para que hoy esté acá.

A todos ustedes ¡muchas gracias!.

Introducción

En este trabajo estudiaremos la existencia de soluciones débiles del problema:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x), x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

bajo diversas condiciones sobre f y sobre el conjunto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Donde

$$(Lu)(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)$$

es uniformemente elíptico, un operador formalmente autoadjunto de segundo orden, en Ω.

Empezaremos abordando el problema bajo ciertas condiciones tanto sobre las funciones y operadores involucrados como así sobre Ω para luego poder generalizar los resultados a condiciones menos restrictivas. También analizaremos ejemplos donde la ecuación diferencial es ordinaria con condiciones de contorno periódicas.

Los problemas a estudiar son de gran importancia, tanto desde el punto de vista teórico como desde el de las aplicaciones. Por un lado, el desarrollo y la aplicación de técnicas variacionales a problemas de contorno ha sido un aspecto de creciente interés matemático en los últimos años. Por otro lado, muchos de los problemas no lineales tienen una motivación directa en la práctica, en variadas disciplinas. Entre los problemas no lineales, tienen especial importancia los llamados problemas *resonantes*. Un resultado elemental del análisis no lineal asegura la existencia de al menos una solución cuando la parte lineal del problema es un operador inversible (problema *no resonante*) y la no linealidad es acotada. En cambio, si se trata de un operador no inversible el problema es resonante, y la existencia de soluciones no puede asegurarse. En 1969, un paper de Lazer-Leach [10] para el problema periódico abrió el camino hacia las hoy llamadas

Condiciones de Landesman-Lazer introducidas un año después en [9] para un problema elíptico semilineal. Este tipo de condiciones ha inspirado a diversos autores en el intento de hallar formulaciones más abstractas y dar diferentes generalizaciones.

Esta tesis está enfocada, tomando como punto de partida las condiciones de Landesman-Lazer dadas en [9], a dar distintas generalizaciones y formulaciones más abstractas así como también demostraciones más sencillas usando diversos métodos como por ejemplo métodos variacionales. También abordaremos una alternativa más general dada por Ahmad-Lazer-Paul en [1] que implica a las condiciones antes mencionadas. Cabe destacar que algunos de los resultados que veremos pueden ser demostrados usando métodos topológicos como teoría de grado.

Resumen de la Tesis

Esta tesis está compuesta de cuatro capítulos.
En el Capítulo 1 introduciremos los conceptos necesarios para la comprensión de los siguientes capítulos. Empezaremos definiendo los espacios y los operadores con los que trabajaremos, también daremos definiciones y teoremas generales de Análisis Funcional omitiendo las demostraciones ya que son resultados conocidos. Luego abordaremos los métodos variacionales que luego utilizaremos en distintas resoluciones y concluiremos con el método de Ritz-Galerkin para hallar soluciones aproximadas del problema restringiendonos a espacios de dimensión finita.

En el Capítulo 2 introduciremos las *Condiciones de Landesman-Lazer* y demostraremos que dichas condiciones son suficientes bajo ciertas hipótesis, para dicha demostración seguiremos los métodos utilizados por P. Hess en [8] ya que sólo usando resultados básicos se obtiene una demostración muy sencilla. Luego generalizaremos dichas condiciones para hipótesis más generales sobre la no linelidad y terminaremos probando que el resultado se extiende al caso general, para ello seguiremos lo hecho por Arcoya-Orsina [3], quienes usan métodos variacionales para demostrar tal resultado.

En el Capítulo 3 daremos un resultado alternativo a las condiciones de Landesman-Lazer dado por Ahmad-Lazer-Paul en [1]; usando una condición que se puede enunciar facilmente para asegurar que (1) tiene solución bajo la suposición de que el problema lineal homogeneo asociado tiene soluciones no triviales.

En el último Capítulo mostraremos que las condiciones de Ahmad-Lazer-Paul para problemas resonantes son más generales que las de Landesman-Lazer, discutiendo algunas relaciones con otras condiciones de existencia.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y propiedades necesarias para la comprensión de esta tesis.

1.1. Espacios de Sobolev

Empecemos definiendo los espacios en los que trabajaremos tanto en este capítulo como en los siguientes. En lo que sigue, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto acotado.

Definición $L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \int_K |u| < \infty \ \forall K$ abierto acotado con $\overline{K} \subset \Omega\}$.

Definición Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Diremos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la *derivada débil* de u respecto de x_i, si se cumple que

$$\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega v\phi \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Notación: $v = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Observación 1.1.1 *1. Si la derivada débil de u existe, es única.*

2. Si $u \in C^1(\Omega)$, las derivadas débiles de u existen y coinciden con las derivadas clásicas.

Definición Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq i \leq n$. Diremos que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la *derivada* α de u en sentido débil, si se cumple que

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v_\alpha \phi \ \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Notación: $v_\alpha = D^\alpha u$.

Definición Sea $k \geq 1$, $1 \leq p \leq +\infty$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Definimos el espacio de Sobolev

$$W^{k,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \text{ con } |\alpha| \leq k \ \ D^\alpha u \in L^P(\Omega) \right\}.$$

La norma en este espacio para $1 \leq p < \infty$ es

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^\alpha(u)||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Notación:$W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$.

Teorema 1.1.2 $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach y si* $p = 2$ *resulta ser un Hilbert.*

Definición $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$

$$= \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \text{ existe } u_n \in C_c^\infty(\Omega) \text{ tal que } u_n \to u \text{ en } W^{1,p}(\Omega) \right\}.$$

En particular, para el caso $n = 1$:

Definición Sea $1 < p < \infty$

$$W_T^{1,p}(0,T) = \left\{ u \in L^p(0,T;\mathbb{R}^n) \text{ tal que } u' \in L^P(0,T;\mathbb{R}^n) \right\}.$$

1.2. Operadores Uniformemente Elípticos

Definición Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado. Diremos que un operador L de segundo orden es un operador formalmente autoadjunto *en forma de divergencia* si se puede escribir de la siguiente manera:

$$L(u) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + c(x)u(x)$$

donde, $x \in \Omega, a^{ij}, b^i(x), c(x) \in L^\infty(\Omega)$ y $a^{ij}(x) = a^{ji}(x)$ (es decir, para cada $x \in \Omega$, $A(x) = (a^{ij}(x)) \in \mathbb{R}^{nxn}$ es una matriz simétrica).

Observación Los operadores en forma de divergencia son "*buenos*" cuando queremos trabajar con métodos basados en la integración por partes. Éste será el caso de los *Métodos Variacionales* que trataremos luego.

Definición Diremos que un operador en forma de divergencia es *uniformemente elíptico* si existe $\theta > 0$ tal que

$$Q_A(\epsilon) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\epsilon_i\epsilon_j \geq \theta \left|\epsilon\right|^2 \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \theta > 0$$

Observación Esta condición equivale a $\lambda_1(A, x) \geq \theta \quad \forall x \in \bar{\Omega}$ donde

$$\lambda_1(A, x) = \text{ el menor autovalor de } A(x).$$

1.3. Resultados Clásicos del Análisis Funcional.

En esta sección daremos ciertos resultados de Análisis Funcional que serán herramientas útiles tanto en las secciones como en los capítulos siguientes. Las demostraciones pueden encontrarse por ejemplo en [5].

Definición Sea H un espacio de Hilbert real. Definimos el *espacio dual de H* como

$$H' = \{L : H \to \mathbb{R} \text{ tal que L es lineal y continuo}\}.$$

Definición Se dice que un espacio de Banach X es *Uniformemente Convexo* si $\forall \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$(x, y \in X, \ \ ||x|| < 1 \ ||y|| \leq 1 \quad \text{y} \quad ||x - y|| > \epsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1 - \delta \right).$$

En particular, los espacios $W^{1,p}$ con $1 < p < \infty$ son uniformemente convexos.

Proposición 1.3.1 ***(Desigualdad de Gårding)***
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado. Consideramos el espacio de Sobolev $H^k(\Omega)$, sea L un operador uniformemente elíptico en forma de divergencia:

$$(Lu)(x) = \sum_{0 \leq |\alpha|, |\beta| \leq k} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \right).$$

Por último vamos a suponer que $a_{\alpha\beta}$ son acotadas y continuas en $\overline{\Omega}$ para $|\alpha| = |\beta| = k$ y que

$$a_{\alpha\beta} \in L^\infty \ \ \forall |\alpha|, |\beta| \leq k.$$

Bajo estas hipótesis se cumple que $\exists c_0$ y $c_1 \geq 0$ tal que

$$B(u,u) + c_0 ||u||^2_{L^2(\Omega)} \geq c_1 ||u||^2_{H^k(\Omega)} \ \ \forall u \in H^k_0.$$

Donde $B(u,v) = \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 1} \langle a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v \rangle_0$ es la forma bilineal asociada al operador L.

Teorema 1.3.2 ***(Teorema Espectral)***
Sea H un espacio de Hilbert separable y $T : H \to H$un operador lineal compacto autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal $\{\psi_k\}$ de H formada por autovectores de T, es decir $T\psi_k = \alpha_k \psi_k$. Donde cada α_k tiene multiplicidad finita y

$$|\alpha_1| \geq ... \geq |\alpha_r| \geq ... \to 0.$$

Observación 1.3.3 *Si en el Teorema anterior también pedimos T positivo entonces*

$$\alpha_1 \geq ... \geq \alpha_r ... \to 0.$$

Observación 1.3.4 *Si existe L tal que $LT = id$, diremos que L es operador inverso algebraico a izquierda de T, entonces los correspondientes autovalores de L son de la forma*

$$\lambda_k = \frac{1}{\alpha_k}$$

y $\{\psi_k\}$ es la base de autovectores asociados.

Teorema 1.3.5 ***(Teorema de Representación de Riesz)***
Para todo funcional lineal continuo L en H', existe una única $u \in H$ tal que L se puede representar de la siguiente manera

$$L(v) = (u, v)$$

(donde $(\cdot,\cdot)$ denota el producto interno de H). Además, $||L||_{H'} = ||u||_H$.

El vector u del Teorema 1.3.5 satisface la siguiente propiedad de minimización.

Proposición 1.3.6 *Sea $L : H \to \mathbb{R}$ lineal y continua. Entonces $u \in H$ satisface*

$$L(v) = (u, v) \ \ \forall v \in H;$$

si y sólo si u es un mínimo del funcional $\varphi : H \to \mathbb{R}$ dado por

$$\varphi(v) := \frac{1}{2}||v||_H^2 - Lv.$$

<u>*Demostración*</u>: Si $L(v) = (u, v)$ para todo $v \in H$, entonces

$$\varphi(v) = \varphi(u + (v-u)) = \frac{1}{2}||u + (v-u)||^2 - L(u + (v-u))$$

$$= \frac{1}{2}(u + (v-u), u + (v-u)) - L(u) - L(v-u)$$

$$= \frac{1}{2}||u||^2 + (u, v-u) + \frac{1}{2}||v-u||^2 - L(u) - L(v-u)$$

$$= \frac{1}{2}||u||^2 + L(u-v) + \frac{1}{2}||v-u||^2 - L(u)$$

$$= \varphi(u) + \frac{1}{2}||v-u||^2 \geq \varphi(u)$$

para todo $v \in H$. Por tanto u es un mínimo de φ.
Inversamente, supongamos que u es un mínimo de φ. Entonces, para cada $v \in H$, la función $\varphi_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\varphi_v(t) := \varphi(u+tv) = \frac{1}{2}||u||^2 - L(u) + [(u,v) - L(v)]t + \frac{1}{2}||v||^2 t^2$$

tiene un mínimo en 0. En consecuencia,

$$0 = \varphi_v'(0) = (u,v) - L(v).$$

Es decir, $L(v) = (u,v) \ \ \forall v \in H$. $\square$

Definición Sea H un Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{R}$ se dice
bilineal si es lineal en cada componente,
continua si $|a(u,v)| \leq C||u||_H||v||_H$, para todo $u, v \in H$
coerciva si $a(u,u) \to \infty$ cuando $||u|| \to \infty$.

Teorema 1.3.7 ***(Teorema de Lax-Milgram)*** *Sea H un Hilbert y a una forma bilineal, continua y coerciva. Entonces, para todo L, funcional lineal, continuo en H existe un único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = L(v) \quad \textit{para todo } v \in H.$$

A diferencia de lo que ocurre en $\mathbb{R}^n$, en cualquier espacio de Hilbert de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no contienen ninguna subsucesión convergente. Por ejemplo, si consideramos la sucesión de vectores canónicos $(e_k) \subset l^2$ esta sucesión esta acotada ya que $||e_k||_2 = 1$, también es claro que $||e_i - e_j||_2 \geq 1$ para todo $i \neq j$ y esto nos afirma que (e_k) no tiene subsucesiones convergentes.

Una noción de convergencia, más débil que la usual, que sí tiene esa propiedad es la siguiente.

Definición Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión (u_k) en H converge débilmente a u en H si, para cada $v \in H$; se cumple que $\lim_{k\to\infty} \langle u_k, v\rangle = \langle u, v\rangle$.

Notación: Vamos a escribir

$$u_k \rightharpoonup u \text{ en } H$$

para denotar la convergencia débil.

Teorema 1.3.8 ***(Propiedad fundamental de la convergencia débil)*** *Sea H un espacio de Hilbert separable. Entonces toda sucesión acotada en H contiene una subsucesión débilmente convergente en H.*

Observación 1.3.9 *Esta propiedad será importante ya que más adelante querremos dar condiciones para hallar mínimos de un operador. Trabajaremos en la topología débil ya que en la topología fuerte tenemos la dificultad de hallar compactos y esto es un problema para nuestro objetivo de hallar mínimos, por ejemplo, la bola unitaria cerrada de un espacio normado de dimensión infinita nunca es compacta. Sin embargo, si es reflexivo sí lo es en la topología débil de dicho espacio.*

Teorema 1.3.10 ***(Principio Variacional de Ekeland)***
Sea X un espacio de Banach, $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ acotada inferiormente, $v \in X$ y $\epsilon, \delta > 0$. Si

$$\varphi(v) \leq \inf_X \varphi + \epsilon$$

entonces existe $u \in X$ tal que

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + 2\epsilon, \ \ ||\varphi'(u)|| < 8\epsilon/\delta, \ \ ||u - v|| \leq 2\delta.$$

Corolario 1.3.11 *Sea $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R})$ acotada inferiormente. Si φ satisface la condición de Palais-Smale con $c := \inf_X \varphi$ entonces toda sucesión minimizante para φ tiene una subsucesión convergente. En particular, existe un minimizante de φ.*

Teorema 1.3.12 ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)***
Si Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $p \in [1, 2^*)$, entonces toda sucesión acotada en $H_0^1(\Omega)$ contiene una subsucesión que converge fuertemente en $L^p(\Omega)$. Donde $p^* = \frac{2n}{n-2}$.

Además de los teoremas antes mencionados emplearemos los siguientes teoremas topológicos.

Teorema 1.3.13 ***(Teorema de Punto Fijo de Brouwer)***
Sea $r : B^n \to B^n$ continua, donde $B^n \subset \mathbb{R}^n$ denota la bola unitaria cerrada. Entonces r tiene al menos un punto fijo.

Este teorema es equivalente a:

Corolario 1.3.14 *No existen retracciones de* $\mathbb{R}^n$ *a la esfera unitaria, es decir, no existe* $r : \mathbb{R}^n \to S^{n-1}$ *continua tal que* $r(x) = x$ *para todo* $x \in S^{n-1}$

Teorema 1.3.15 ***(Teorema de Punto Fijo de Schauder)*** *Sea* X *un espacio normado. Si* $K \subset X$ *es un conjunto cerrado, acotado y convexo, y además* $T : K \to K$ *es una función continua tal que* $\overline{T(K)}$ *es compacto. Entonces* T *tiene al menos un punto fijo.*

1.4. Métodos Variacionales

Muchos fenómenos de la física, la ingeniería, la biología, la medicina, las finanzas, etc, se modelan mediante una ecuación diferencial, y muchos de estos modelos tienen una formulación variacional, es decir, las soluciones de la ecuación diferencial son los puntos críticos de un funcional, dado por una integral, en un espacio adecuado de funciones. Dicha integral representa alguna energía, una acción, una función de costo, etc. En esta sección empezaremos analizando modelos que tienen formulación variacional y luego daremos criterios para asegurar la existencia de un minimizante del funcional asociado a dicho modelo.

Queremos resolver una ecuación diferencial, que escribiremos en forma abstracta como

$$A[u] = 0. \tag{1.1}$$

El operador no lineal $A[\cdot]$ es la $''$*derivada*$''$ de un funcional $\varphi[\cdot]$ apropiado. De esta forma, el problema (1.1) se lee

$$\varphi'[u] = 0. \tag{1.2}$$

La ventaja de esta formulación es que ahora podemos reconocer soluciones de (1.1) como puntos críticos de $\varphi[\cdot]$, y esto, en muchos casos resulta ser más simple de resolver.

1.4.1. Ecuación de Euler-Lagrange

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, acotado y con borde regular. Consideramos la siguiente función regular

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$$

a la que llamaremos Lagrangiano.

Notación: $L = L(p, z, x) = L(p_1, ..., p_n, z, x_1, ..., x_n)$ Sustituiremos a p por $Du(x)$, y a z por $u(x)$.
Más notación:$D_pL = (L_{p_1}, ..., L_{p_n})$, $D_z = L_z$ y $D_xL = (L_{x_1}, ..., L_{x_n})$.
Sea

$$\varphi[u] := \int_\Omega L(Du(x), u(x), x)dx,$$

donde $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es una función regular satisfaciendo la condición de frontera

$$u = g \quad \text{en } \partial\Omega.$$

Observación Para introducir conceptos más generales en principio supondremos que $u = g$ en $\partial\Omega$ con g no necesariamente nula. Sin embargo, los casos que vamos a trabajar son ecuaciones con condiciones de Dirichlet homogeneas.

Supongamos que u es una función regular que satisface la condición de frontera $u = g$ en $\partial\Omega$ y que es un mínimo de $\varphi[\cdot]$. Demostraremos que u es solución de una cierta ecuación diferencial no lineal.Sea $v \in C_c^\infty$, consideremos la siguiente función

$$r(t) := \varphi[u + tv] \text{ donde } t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Como u es un mínimo de φ, $\varphi[u] \leq \varphi[u + tv]$ y de este modo $r(0) \leq r(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto

$$r^{'}(0) = 0.$$

Además, como

$$r(t) = \int_\Omega L(\nabla u + t\nabla v, u + tv, t)dx$$

derivando nos queda

$$r'(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} L_{p_i}(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x)v_{x_i} + L_z(\nabla u + t\nabla v, u + tv, x)vdx.$$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$0 = r'(0) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(\nabla u, u, x))v_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x)v dx.$$

Como v tiene soporte compacto, podemos integrar por partes

$$0 = r'(0) = \int_\Omega \left[- \sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) \right] v dx.$$

Esta igualdad vale para toda función test v, de esta forma dado que C_c^∞ es denso en $L^2(\Omega)$ concluimos que u es solución de la ecuación diferencial

$$- \sum_{i=1}^{n} (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \text{ en } \Omega. \tag{1.3}$$

Esta es la **Ecuación de Euler-Lagrange** .

Observación Es importante observar que (1.3) es una ecuación de segundo orden en forma de divergencia.

Analizando el procedimiento anterior podemos concluir que para hallar una solución regular de la ecuación de Euler-Lagrange alcanza con encontrar un mínimo del funcional

$$\varphi[u] = \int_\Omega L(\nabla u(x), u(x), x) dx.$$

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.4.1 *Si* $L(p, z, x) = \frac{1}{2}|p|^2$, *entonces* $L_{p_i} = p_i$, *para* $i = 1, ..., n$, $L_z = 0$, *el funcional nos queda*

$$\varphi[u] = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2$$

y de este modo, la ecuación asociada es $\Delta u = 0 \quad en\ \Omega$

Ejemplo 1.4.2 *Si* $L(p,z,x) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)p_i p_j - zf(x)$*, con* $a^{ij} = a^{ji}$ *para* $i,j = 1,...,n$*, entonces* $L_{p_i} = \sum_{j=1}^{n} a^{ij}(x)p_j$ *para* $i = 1,...,n$*,* $L_z = -f(x)$*, el funcional nos queda*

$$\varphi[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}u_i u_j - ufdx$$

y de este modo la ecuación asociada es $-\sum_{i,j=1}^{n}(a^{i,j}u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad en\ \Omega.$

Por último:

Ejemplo 1.4.3 *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función regular y* $F(z) = \int_0^z f(y)dy$*. Aquí,*

$$\varphi[u] = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - F(u)dx$$

y la ecuación es

$$-\Delta u = f(u) \quad en\ \Omega.$$

Sin embargo no todos los problemas tienen estructura variacional y no todos los funcionales tienen un mínimo, veamos un ejemplo para cada una de estas situaciones:

Ejemplo 1.4.4 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto acotada con frontera suave y* $f \in L^2(\Omega)$*. Consideramos la ecuación*

$$-\Delta u = f(x,u,\nabla u)$$

en este caso no se pueden emplear métodos variacionales ya que f depende de ∇u, en este caso el problema se puede tratar por ejemplo, usando teoremas de punto fijo.

Ejemplo 1.4.5 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto acotado con frontera suave, y sea* $p > 2$*, consideramos*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{p-2} \ \ si\ x \in \Omega \\ \quad u = 0 \ \ si\ x \in \Omega \end{cases} \tag{1.4}$$

el funcional asociado a este problema es

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{p}\int_\Omega |u|^p$$

veamos que no tiene mínimo, fijemos $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ *y evaluemos* J *en* $t\tilde{u}$ *con* $t \in \mathbb{R}$

$$J(t\tilde{u}) = \frac{1}{2}t^2 \int_\Omega |\nabla \tilde{u}|^2 - \frac{1}{p}t^p \int_\Omega |\tilde{u}|^p$$

$$= t^2 A - t^p B \to -\infty, \quad \textit{cuando } t \to +\infty \ (p > 2).$$

De esta manera, concluimos que J *no está acotado inferiormente.*

1.4.2. Soluciones Débiles.

Empecemos con un ejemplo simple. Sea $f \in C(\overline{\Omega})$. Queremos averiguar si existe una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que cumpla lo siguiente:

$$\begin{cases} \Delta u + u = f \ \text{ si } u \in \Omega \\ u = 0 \ \ \text{ si } u \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

Si u satisface $\Delta u + u = f$ multiplicando esta ecuación por $v \in C_c^\infty(\Omega)$ e integrando, obtenemos que

$$-\int_\Omega (\Delta u)v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \ \ \forall v \in C_c^\infty(\Omega)$$

y haciendo partes en el primer sumando obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \ \ \forall v \in C_c^\infty(\Omega) \tag{1.6}$$

Podemos entonces empezar investigando si existe una función u que satisfaga esta igualdad. Si $C_c^\infty(\Omega)$ con el producto escalar dado por $\int_\Omega \nabla u.\nabla v + \int_\Omega uv$ fuese un espacio de Hilbert, el teorema de representación de Riesz nos daría la existencia de una función u satisfaciendo (1.6). Pero no lo es.
¿Cómo lo solucionamos?
Trabajamos en $H_0^1(\Omega)$ ya que es un espacio de Hilbert y contiene a $C_c^\infty(\Omega)$ como subespacio denso.

Definición Una función u que satisface (1.5) se llama una solución clasica de (1.5).

Definición Una función u que satisface (1.6) se llama solución débil de (1.5)

El lado izquierdo de la igualdad (1.6) es el producto interno en $H^1(\Omega)$, entonces por Riesz existe una única solución débil.

Observación Si ya no tenemos condiciones de Dirichlet homogeneas o sea,ahora queremos hallar una $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u + u = f \quad \text{si } u \in \Omega \\ u = g \quad \text{si } u \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

con $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$.
Como dijimos en un principio, el espacio donde vamos a trabajar depende del problema que estemos tratando, de esta manera la solución débil ya no la vamos a buscar en $H_0^1(\Omega)$ ya que las condiciones de borde no son homogeneas, ahora el espacio de funciones admisibles será $H_g^1 = \{u \in H^1 \text{ tal que } u - g \in H_0^1(\Omega)\}$.

Siguiendo el mismo espíritu del ejemplo volvamos al caso más general de la Ecuación de Euler-Lagrange.

$$\begin{cases} -\sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))_{x_i} + L_z(\nabla u, u, x) = 0 \text{ en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

Definamos una solución débil

Definición Diremos que $u \in W_g^{1,q}(\Omega) := \{u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ tal que } u - g \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$ es solución débil de (1.8) si satisface

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n (L_{p_i}(\nabla u, u, x))v_i + L_z(\nabla u, u, x)v dx = 0 \;\; \forall v \in C_c^{\infty(\Omega)}$$

El espacio ya no es un Hilbert y además no siempre vamos a tener una ecuación sea del estilo

$$L(u) = f(x)$$

con f sólo dependiendo de x.
Por tal motivo ya no tenemos por ejemplo herramientas como Lax-Milgram o Riesz. En la siguiente sección veremos resultados que nos asegurarán la existencia de un minimizante del funcional asociado a la ecuación que nos garantice la existencia de una solución débil, es decir

$$(A'(u), v) = (\varphi'(u), v).$$

1.4.3. Existencia de Minimizantes de $\varphi[\cdot]$

En esta sección deremos condiciones que aseguren que el funcional $\varphi[\cdot]$ tiene al menos un elemento u minimizante.

Observación 1.4.6 *Empecemos analizando la existencia de minimizantes para un ejemplo de una función a valores reales. Si consideramos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\varphi(x) = e^x$, sabemos que está acotada inferiormente en los reales pero no necesariamente tiene un mínimo.*

Definición *Diremos que una sucesión$(a_k)_k$ es una sucesión minimizante para φ si se cumple*

$$\varphi(a_k) \to \text{ínf}\, \varphi$$

cuando $k \to \infty$

Una condición necesaria para el número real a que cumple

$$\varphi(a) = \text{ínf}\, \varphi$$

es que φ tenga una sucesión minimizante que converja a a.Sin adecuadas hipótesis de continuidad sobre φ, esta condición no será suficiente, por ejemplo, lo podemos ver con el siguiente ejemplo, sea $\varphi(x) = |x|$ para $x \neq 0$ y $\varphi(0) = 1$, no alcanza su ínfimo 0, sin embargo, todas sus sucesiones minimizantes convergen a cero.

Dado que el límite a de la sucesión minimizante debe ser tal que $\varphi(a) = \text{ínf}\, \varphi$, debemos pedir que

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(a_k) \geq \varphi(a).$$

Este sera el caso si φ es semicontinua inferiormente en $\mathbb{R}$, i.e. si

$$\liminf_{k\to\infty} \varphi(u_k) \geq \varphi(u)$$

donde $u_k \to u$.

Así, en $\mathbb{R}$, la existencia de una sucesión minimizante convergente es equivalente a la de una sucesión minimizante acotada, un hecho que se pierde cuando reemplazamos $\mathbb{R}$ por un espacio de Banach de dimensión infinita con la topología dada por su norma.

1.4.4. Funciones Semicontinuas Inferiormente

Definición Sea X un espacio normado. Diremos que (u_k) es una sucesión minimizante para $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ si

$$\varphi(u_k) \to \text{ínf}\, \varphi$$

donde $k \to \infty$.

Definición Sea X un espacio normado. Una función $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ es semicontinua inferiormente (resp. débilmente semicontinua inferiormente) si

$$u_k \to u \Rightarrow \text{lím inf}\, \varphi_k(u_k) \geq \varphi(u)$$

$$(\text{resp } .u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \text{lím inf}\, \varphi_k(u) \geq \varphi(u)).$$

Propiedades 1.4.7

1. *La suma de dos funciones s.c.i. (resp. d.s.c.i.) es s.c.i. (resp. d.s.c.i.) .*

2. *El producto de una función s.c.i. (resp. d.s.c.i.) por una constante positiva es s.c.i. (resp. d.s.c.i.) .*

3. *Si $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de funciones s.c.i (resp. d.s.c.i), la función $\sup_{\lambda\in\Lambda}$ definido por*

$$\left(\sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda\right)(u) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(u)$$

   es s.c.i (resp. d.s.c.i.)

La demostración es consecuencia de la definición.

Teorema 1.4.8 *Si φ es d.s.c.i. en un espacio de Banach reflexivo X y tiene una sucesión minimizante acotada, entonces φ tiene un mínimo en X.*

<u>*Demostración*</u>: Sea (u_k) una sucesión minimizante, $\varphi(u_k) \to \alpha = \text{ínf}\, \varphi(u)$. Dado que u_k es acotada, existe $M > 0$ tal que $||u_k|| < M$ y como X es reflexivo entonces tomando, si es necesario, una subsucesión de (u_k) tenemos que $u_k \rightharpoonup u_0$ para cierta $u_0 \in X$. Así, siendo que φ es *d.s.c.i* se tiene que

$$\alpha = \text{lím inf}\, \varphi(u_k) \geq \varphi(u_0) \geq \alpha$$

la primera desigualdad es debido a que φ es *d.s.c.i* y la segunda por definición de ínfimo.

Luego, $\varphi(u_0) = \text{ínf}_X\, \varphi$. □

Observación 1.4.9 *Cuando φ es coerciva toda sucesión minimizante está acotada. Pues, si (u_k) es una sucesión minimizante, $\varphi(u_k) \to \alpha$, si (u_k) no estuviera acotada existiría una subsucesión (u_{k_j}) tal que $||u_{k_j}|| \to +\infty$ entonces por la coercividad $\varphi(u_k) \to \infty$ y esto contradice que $\varphi(u_k) \to \alpha$, luego existe M tal que $||u_k|| \leq M$.*

1.4.5. Funciones Convexas

En vista del Teorema 1.4.8 es importante obtener condiciones suficientes para la semicontinuidad inferior débil. En esta sección daremos condiciones que aseguran *d.s.c.i* ya que probarlo de forma directa en general es complicado.

Definición Una función $\varphi : (-\infty, +\infty]$ se dice convexa si

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi(v) + \lambda\varphi(v)$$

para todo $\lambda \in (0,1), u, v \in X$.

Propiedades 1.4.10

1. *La suma de dos funciones convexas es una función convexa.*
2. *El producto de una función convexa por una constante positiva es una función convexa.*
3. *Si $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una familia de funciones convexas entonces $\sup_{\lambda\in\Lambda}$ es una función convexa.*

Del siguiente resultado obtendremos una condición para la semicontinuidad inferior débil.

Teorema de Mazur Si (u_k) es una sucesión en un espacio normado X tal que $u_k \rightharpoonup u$, entonces existe una sucesión de combinaciones convexas

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} u_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} = 1, \alpha_{k_j} \geq 0, \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

tal que $v_k \to u$ en X

Teorema 1.4.11 *Si X es un espacio normado y $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ es s.c.i. y convexa, entonces φ es d.s.c.i..*

<u>*Demostración*</u>: Consideremos que $u_i \rightharpoonup u$, si $\liminf \varphi(u_i) = +\infty$ el resultado es inmediato. Sino, sea c tal que $c > \liminf \varphi(u_i)$. Tomando si es necesario una subsucesión, podemos asumir que $c > \varphi(u_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Por el Teorema de Mazur, existe una sucesión (v_k) de la forma

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} u_j, \ \ \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} = 1, \alpha_{k_j} \geq 0$$

tal que $v_k \to u$. Como φ es *s.c.i.* y convexa, obtenemos

$$\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_k) \leq \liminf \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} \varphi(u_j) \right) \leq \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} \right) c = c.$$

Como $c > \liminf \varphi(u_i)$ es arbitrario, tenemos que $\varphi(u) \leq \liminf \varphi(u_i)$, de este modo, φ es *d.s.c.i.* □

1.4.6. Funciones con Condiciones de Frontera Periódicas.

La siguiente Propiedad será de utilidad en la demostración de la siguiente Proposición .

Propiedad 1.4.12 *Existe $c > 0$ tal que, si $u \in W_T^{1,p}$ entonces*

$$||u||_\infty \leq c||u||_{W_T}^{1,p}$$

<u>*Demostración*</u>: Para la demostración basta probar el resultado para una de las componentes, de esta forma estamos en el caso $n = 1$. Si $u \in W_T^{1,p}$, por el teorema del valor medio

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(s) ds = u(\xi)$$

para algún $\xi \in (0, T)$. De esta forma, para $t \in [0, T]$, usando la desigualdad de Hölder $(1/p + 1/q = 1)$

$$|u(t)| = \left| u(\xi) + \int_0^T u'(s) ds \right| \leq |u(\xi)| + \int_0^T |u'(s)| ds$$

$$\leq \frac{1}{T}\left|\int_0 Tu(s)ds\right| + T^{1/q}\left(\int_0^T |u'(s)|^p ds\right)^{1/p}$$
$$= \frac{1}{T}\left|\int_0^T u(s)ds\right| + T^{1/q}||u'||_{L^p}$$
$$\leq \frac{1}{T}\int_0^T |u(s)|ds + T^{1/q}||u'||_{L^p}$$
$$\leq T^{-1/p}||u||_{l^p} + T^{1/q}||u'||_{L^p} \leq (T^{-1/p} + T^{1/q})||u||_{w_T^{1,p}}.$$

□

Proposición 1.4.13 *Si la sucesión* (u_k) *converge débilmente a* u *en* $W_T^{1,p}$*, entonces* (u_k) *converge uniformemente a* u *en* $[0,T]$.

Demostración: Por la propiedad 1.4.12 la inyección de $W_T^{1,p}$ en $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ con la norma $||\cdot||_\infty$ es continua. Como

$$u_k \rightharpoonup u \text{ en } W_T^{1,p},$$

entonces

$$u_k \rightharpoonup u \text{ en } C([0,T];\mathbb{R}^n).$$

Debido al teorema de Banach-Steinhaus, (u_k) es acotada en $W_T^{1,p}$ y por lo tanto en $C([0,T];\mathbb{R}^n)$. Por otro lado, (u_k) es uniformemente equicontinua para $0 \leq s \leq t \leq T$, pues por la desigualdad de Hölder

$$|u_k(t) - u_k(s)| \leq \int_s^t |u_k'(r)|dr \leq (t-s)^{1/q}\left(\int_t^s |u_k'(r)|^p\right)^{1/p}$$
$$\leq (t-s)^{1/q}||u_k||_{W_T^{1,p}} \leq C(t-s)^{1/q}.$$

Arzelá-Ascoli nos dice que (u_k) es relativamente compacto en $C([0,T];\mathbb{R}^n)$ y entonces tiene una subsucesión convergente. Por la unicidad del límite débil en $C([0,T];\mathbb{R}^n)$, toda subsucesión uniformemente convergente de (u_k) converge a u, veamos que

$$(u_k) \text{ converge uniformemente a } u \text{ en } [0,T],$$

supongamos que no, de esta manera existe $\epsilon > 0$ y una subsucesión a la que llamaremos u_k tal que

$$||u_k - u||_\infty \geq \epsilon > 0$$

por el razonamiento anterior, existe una subsucesión uniformemente convergente que converge a u esto es un absurdo. Luego,

$$(u_k) \text{ converge uniformemente a } u \text{ en } [0, T],$$

□

1.5. Método de Ritz-Galerkin

En esta sección vamos a estudiar la aproximación de problemas variacionales como los tratados en la sección anterior. Para ello usaremos el método de aproximación conocido como Método de Ritz-Galerkin.

1.5.1. Problema Simétrico

Supongamos que se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $(H, (\cdot, \cdot))$ es un espacio de Hilbert.

2. V es un subespacio (cerrado) de H (entonces V es un Hilbert).

3. $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal simétrica, continua y coerciva en V.

Sin perdida de generalidad, llamamos H a V. De esta forma, el problema variacional simétrico es:
Dada $L \in H^{'}$, hallar $u \in H$ tal que $a(u, v) = L(v)\ \forall v \in H$. Si se cumplen las tres condiciones, este problema tiene solución única,(esta afirmación es cierta ya que estamos en las hipótesis de Lax-Milgram).

1.5.2. Aproximaciones de Ritz-Galerkin al problema simétrico

Tomamos $V_N \subset H$ subespacio de dimensión finita N y H un Hilbert tal que $V_N \subset H$. La idea es hallar

$$u_N \in V_N \text{ tal que } a(u_N, v_N) = L(v_N),\ \ \forall v_N \in V_N \tag{1.9}$$

(este problema tiene solución única u_N ya que estamos en las condiciones de Lax-Milgram) y luego, construir una sucesión de espacios vectoriales de dimensión finita, $V_N \subset V$, de manera que $V_1 \subset V_2 \subset .... \subset V$ y $\bigcup_{N\in\mathbb{N}} V_N = V$.

Observación Si la a original es bilineal, continua y coerciva en H, y L es lineal y continua en H entonces también lo son en V_N.

Observación En el caso simétrico, sabemos que tenemos solución única u_N, es más, dicha u_N es el minimizante del funcional

$$f(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - L(u) \;\; \forall u \in V_h.$$

¿Cómo es el error $||u - u_N||_H$?
Para responder esta pregunta enunciemos el siguiente lema que nos dará una cota para el error cometido al aproximar u por u_N.

Lema 1.5.1 ***(Lema de Cea)***
Si α y M son las constantes de coercividad y continuidad respectivamente

$$||u - u_N||_H \leq \frac{M}{\alpha}||u - v||_H \;\; \forall v \in V_N$$

donde u y u_N son las soluciones "continua" y "discreta" del problema (1.9).
O sea

$$||u - u_N||_H \leq \frac{M}{\alpha}d(u, V_N)$$

donde $d(u, V_N) = \text{ínf}_{v\in V_N} ||u - v||_H$.

Este lema nos dice que cuanto mejor sea la aproximación V_n de V menor será el error cometido.

Capítulo 2

Condiciones de Landesman-Lazer

Muchos problemas del análisis no lineal pueden escribirse en la forma

$$Lu = Nu$$

donde L es un operador diferencial lineal definido en algún espacio funcional adecuado, y N es un operador no lineal, que en general involucra derivadas de orden menor. Este es el caso de la ecuación de segundo orden

$$u^{''}(t) = f(t, u(t), u^{'}(t)), \tag{2.1}$$

con diferentes condiciones de contorno.

Si el operador L es inversible, el problema se dice no resonante y su resolución se reduce a un problema de punto fijo. Consideremos la siguiente ecuación

$$\begin{cases} Lu = f(x,u) & \text{si } x \in \Omega \\ \quad u = 0 & \text{si } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.2}$$

Donde $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to\to \mathbb{R}$ es continua y acotada. Fijemos $v \in L^2(\Omega)$, y sea el problema lineal

$$\begin{cases} Lu = f(x,v) & \text{si } x \in \Omega \\ u = 0 & \text{si } x \in \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

2.3 tiene una única solución $u \in H^1(\Omega)$ $(u = L^{-1}f(x,v))$.

Definimos el operador

$$T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \;\; T(v) := u$$

donde u es la única solución de 2.3. Además tenemos la siguiente acotación:

$$||Tv||_{L^2} = ||u||_{L^2} \leq C||Lu||_{L^2} = C||f(x,v)||_{L^2} \leq R$$

entonces

$$T(\overline{B_R}) \subset \overline{B_R}.$$

De esta manera, como $\overline{B_R}$ es un conjunto cerrado, acotado y convexo y T es continua con $\overline{T(B_R)}$ compacto (pues $H^1(\Omega)$ está compactamente incluído en $L^2(\Omega)$), Por el teorema de Schauder T tiene al menos un punto fijo, en consecuencia 2.2 tiene al menos una solución.

Cuando el operador L no es inversible, el problema se denomina resonante. Esto ocurre, por ejemplo, si a la ecuación (2.1) se le ponen condiciones de Neumann o periódicas, para las cuales es fácil ver que el núcleo del operador lineal $Lu = u^{''}$ es el conjunto de las funciones constantes. Este es un caso de *resonancia en el primer autovalor*, denominación que proviene de considerar el problema de autovalores

$$-u^{''} = \lambda u$$

con condiciones periodicas

$$u(0) = u(T), u'(0) = u'(T),$$

para las cuales los autovalores son

$$\lambda_k = \left(\frac{2k\pi}{T}\right)^2 \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

De esta forma, el primer autovalor es $\lambda_0 = 0$, que tiene como espacio de autofunciones asociadas a las constantes. Cabe observar que el problema es mas sencillo para $k = 0$ que en el caso de resonancia en algún autovalor de orden superior, es decir:

$$u^{''} + \lambda_k u = f(t, u, u^{'}) \;\; k > 0.$$

Esto se debe esencialmente a dos aspectos: por un lado, para $k > 0$ las autofunciones asociadas ya no tienen signo constante, y eso requiere un poco más de cuidado en los cálculos. Pero la mayor dificultad reside en el hecho de que los autovalores de orden $k > 0$ ya no son necesariamente simples: por ejemplo, para el problema periódico, el espacio de las autofunciones asociadas a λ_k es el generado por las funciones $\cos(\sqrt{\lambda_k}t)$ y $\sin(\sqrt{\lambda_k}t)$, que tiene dimensión 2.

En un trabajo en 1969, un paper de Lazer y Leach para problemas resonantes periódicos no lineales abrió el camino hacia las hoy llamadas *condiciones de Landesman-Lazer*, para un problema elíptico semilineal con condiciones de Dirichlet. Este tipo de condiciones inspiraron a diversos autores a encontrar formulaciones más abstractas y dar diferentes generalizaciones. En este capítulo introduciremos las condiciones de Landesman-Lazer dadas en [9] y daremos demostraciones usando diferentes herramientas que aseguran la suficiencia y la necesidad de dichas condiciones. Antes de enunciar dichas condiciones planteemos el problea, fijemos notación y determinemos los espacios, funciones y operadores involucrados.

2.1. Condiciones de Landesman-Lazer

Sea Ω un dominio abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ con frontera suave, $n \geq 1$ y

$$Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)$$

es uniformemente elíptico, un operador formalmente autoadjunto de segundo orden en Ω, con coeficientes reales $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in L^\infty(\Omega)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua y acotada.Estamos interesados la solubilidad del siguiente problema de Dirichlet

$$\begin{cases} (Lu)(x) = g(u(x)) - h(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

donde $h \in L^2(\Omega)$ es una función a valores reales. Sea

$$B(u, v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} < a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v >_0 \tag{2.5}$$

la forma bilineal simétrica asociada a L, definida en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y acotada.

En el capítulo Preliminares definimos el concepto de solución débil, de esta forma diremos que u es una solución débil del problema (2.4) si

- $u \in H_0^1$
- $B(u,v) = \int_\Omega (g(u) - h)\phi dx$ para toda $\phi \in H_0^1$.

Asumiremos que 0 es un autovalor del problema homogeneo, y que el autoespacio asociado tiene dimensión 1 y está generado por cierto vector $w \neq 0$.
De esta forma, cualquier función $v \in H_0^1$ satisfaciendo

$$B(v,\phi) = 0 \ \ \forall \phi \in H_0^1 \tag{2.6}$$

es de la forma $v = \lambda w$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.
Para el siguiente teorema fijaremos la notación:

Notación:

$$\{w > 0\} = \{x \in \Omega : w(x) > 0\}$$

y

$$\{w < 0\} = \{x \in \Omega : w(x) < 0\}$$

Teorema 2.1.1 ***(Condiciones de Landesman-Lazer)***
Sea $w \in H_0^1$ tal que $KerL =< w >$ de esta forma, toda solución de (2.6) es de la forma cw. Sea g una función a valores reales, continua en $\mathbb{R}$ y supongamos que los limites

$$\lim_{s \to +\infty} g(s) = g(+\infty), \ \ \lim_{s \to} g(s) = g(-\infty),$$

existen y son finitos y que

$$g(-\infty) \leq g(s) \leq g(+\infty) \tag{2.7}$$

para todo s, (pero g no necesariamente es creciente). Sea $h \in L^2(\Omega)$. Las desigualdades

$$g(-\infty) \int_{\{w>0\}} |w| dx - g(+\infty) \int_{\{w<0\}} |w| dx \leq \langle h, w \rangle_0$$

$$\leq g(+\infty) \int_{\{w>0\}} |w| dx - g(-\infty) \int_{\{w<0\}} |w| dx \tag{2.8}$$

son necesarias, y las desigualdades estrictas son suficientes para la existencia de una solución débil del problema (2.4). Si (2.7) es remplazada por la condición

$$g(-\infty) < g(s) < g(+\infty), \tag{2.9}$$

para todo s, entonces las desigualdades estrictas en (2.8) son ambas necesarias y suficientes para la existencia de al menos una solución del problema (2.4).

Ejemplo 2.1.2 *Las condiciones de L-L para el caso de una ecuación ordinaria con condiciones periódicas y resonancia en el primer autovalor pueden adaptarse de la siguiente manera:*
Supongamos que $p \in C([0,T])$ *y que* $g \in C(\mathbb{R})$ *es acotada y tiene límites en* $\pm\infty$. *Entonces la ecuación resonante*

$$u^{''} + g(u) = p(t)$$

admite una solución $T-$*periódica si*

$$g(-\infty) < \overline{p} := \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty). \tag{2.10}$$

Además, si g satisface

$$g(+\infty) < g(t) < g(-\infty) \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces (2.10) también es necesaria.

Esta última afirmación es clara ya que si u es una solución $T-$*periódica del problema, integramos a ambos lados de la ecuación*

$$\int_0^T u^{''} + g(u(t))dt = \int_0^T p(t)dt$$

y obtenemos

$$\int_0^T g(u(t))dt = \int_0^T p(t)dt.$$

Se deduce que

$$g(-\infty) < \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt < g(+\infty).$$

2.2. Necesidad de la Condición

En esta sección probaremos que la condición (2.8) es necesaria para la existencia de soluciones de (2.4).
Demostración: Supongamos que

$$g(-\infty) \leq g(s) \leq g(+\infty) \tag{2.11}$$

y que u es una solución débil de (2.4), entonces

$$B(u,w) = \int_\Omega (g(u) - h(x))w$$

por lo tanto

$$\int_\Omega g(u)wdx = \int_\Omega hwdx =< h,w >_0$$

separando la integral en $\{w > 0\}$ y $\{w < 0\}$

$$< h,w >_0= \int_{\{w>0\}} g(u)wdx + \int_{\{w<0\}} g(u)wdx$$

y por 2.11

$$\leq \int_{\{w>0\}} g(+\infty)wdx + \int_{\{w<0\}} g(-\infty)wdx$$

$$= \int_{\{w>0\}} g(+\infty)|w|dx - \int_{\{w<0\}} g(-\infty)|w|dx$$

de forma similar se ve que

$$\langle h,w\rangle_0 \geq \int_{\{w>0\}} g(-\infty)|w|dx - \int_{\{w<0\}} g(+\infty)|w|dx$$

□

2.3. Suficiencia de la Condición

En esta sección daremos una demostracion mucho más sencilla a la dada en [9] de que la condición

$$g(-\infty)\int_{\{w>0\}}|w|dx - g(+\infty)\int_{\{w<0\}}|w|dx < \int_{\Omega} hwdx <$$
$$< g(+\infty)\int_{\{w>0\}}|w|dx - g(-\infty)\int_{\{w<0\}}|w|dx \qquad (2.12)$$

es suficiente para la existencia de solucciones débiles del problema (2.4). Para ello nos basaremos en [9].

Demostración: (demostración de suficiencia)
Por hipótesis $\mu = 0$ es autovalor del problema, en efecto, para n suficientemente grande el operador

$$Tu = Lu - \frac{1}{n}u$$

es inversible, pues si esto no fuera cierto existiría $v \neq 0$ tal que $Lv = \frac{1}{n}v$, esto implica que $\frac{1}{n}$ es autovalor de L y contradice que 0 es aislado.
De esta forma, para n suficientemente grande el problema resulta resonante con linealidad $g(u) - h$ no acotada y como vimos al inicio del capítulo, por Schauder existen elementos $u_n \in H_0^1$ que satisfacen

$$B(u_n, \phi) - \frac{1}{n}\int_{\Omega} u_n \phi dx = \int_{\Omega}(g(u_n) - h)\phi dx, \;\; \phi \in H_0^1. \qquad (2.13)$$

Queremos ver que bajo la condición (2.12), la sucesión u_n está acotada en H_0^1 cuando $n \to \infty$.
Supongamos que no, o sea $||u_n||_1 \to \infty$ cuando $n \to \infty$, y sea $v_n = \frac{u_n}{||u_n||_1}$. Entonces

$$B(v_n, \phi) - \frac{1}{n}\int_{\Omega} v_n \phi dx = ||u_n||_1^{-1}\int_{\Omega}(g(u_n) - h)\phi dx, \;\; \phi \in H_0^1. \qquad (2.14)$$

Por la reflexividad del espacio H_0^1 y como H_1^0 está compactamente incluído en L^2, existe una subsucesión de $v_n \rightharpoonup v$ que converge débilmente en H_0^1 y fuertemente en L^2 a cierta $v \in H_0^1$. Se sigue de (2.14) y del hecho que g es acotada que

$$B(v,\phi) = \lim_{n\to\infty} B(v_n,\phi) = 0 \ \ \forall \phi \in H_0^1. \tag{2.15}$$

De este modo $v = \lambda w$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Como consecuencia de (2.14)

$$B(v_n - v, v_n - v) = B(v_n, v_n - v) \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

por la desigualdad de Gårding tenemos que

$$B(v_n - v, v_n - v) \geq c_0||v_n - v||_1^2 - c_1||v_n - v||_0^2 \ \ (c_0 > 0)$$

y el hecho que $v_n \to v$ en L^2 implica $v_n \to v$ en H_0^1. Así, $v \neq 0$, es decir $\lambda \neq 0$. Tomemos ahora $\phi = v$ en (2.14) y observemos que por (2.15)

$$B(v_n, v) = B(v, v_n) = 0 \ \ \forall n.$$

Además

$$\int_\Omega v_n v dx \to \int_\Omega v^2 dx > 0$$

entonces

$$\int_\Omega (g(u_n) - h)v dx < 0 \ \ (\text{para } n \text{ suficientemente grande})$$

y tomando límite superior

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega g(u_n) v dx \leq \int_\Omega h v dx.$$

Dado que $u_n = ||u_n||_1 v_n$, con $||u_n||_1 \to \infty$, y tomando, si es necesario, subsucesiones tenemos que $v_n \to v$ a.e en Ω, se sigue del teorema de convergencia de Lebesgue que si $\lambda > 0$

$$\int_\Omega g(u_n) w dx$$

$$= \int_{\{w>0\}} g(u_n) w dx + \int_{\{w<0\}} g(u_n) w dx$$

$$= \int_{\{w>0\}} g(||u_n||_1 v_n) w dx + \int_{\{w<0\}} g(||u_n||_1 v_n) w dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\{w>0\}} g(||u_n||_1 \lambda w) w dx + \int_{\{w<0\}} g(||u_n||_1 \lambda w) w dx \\
&= \int_{\{w>0\}} g(||u_n||_1 v_n) w dx + \int_{\{w<0\}} g(||u_n||_1 v_n) w dx \\
&= \int_{\{w>0\}} g(||u_n||_1 v_n) |w| dx - \int_{\{w<0\}} g(||u_n||_1 v_n) |w| dx \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

tomado límite

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega g(u_n) w dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to+\infty} \int_{\{w>0\}} g(||u_n||_1 v_n) |w| dx - \int_{\{w<0\}} g(||u_n||_1 v_n) |w| dx \\
&= g(+\infty) \int_{\{w>0\}} |w| dx - g(-\infty) \int_{\{w<0\}} |w| dx
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$
g(+\infty) \int_{\{w>0\}} |w| dx - g(-\infty) \int_{\{w<0\}} |w| dx \leq \int_\Omega h w dx
$$

de la misma manera, si $\lambda < 0$,

$$
\begin{aligned}
g(-\infty) \int_{\{w>0\}} |w| dx - g(+\infty) \int_{\{w<0\}} |w| dx &= \lim \int_\Omega g(u_n) w dx \\
= \lim \lambda^{-1} \int_\Omega g(u_n) v dx \geq \lambda^{-1} \int_\Omega h v dx &= \int_\Omega h w dx. \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Llegamos a un absurdo ya que (2.16) y (2.17) contradicen (2.12).
Luego, $||u_n||_1 \leq K$, $K \in \mathbb{R}$ para todo n, y para alguna subsucesión tenemos que $u_n \rightharpoonup u$ en H_0^1. Tomando límite con $n \to \infty$ en (2.13), tenemos

$$
B(u, \phi) = \int_\Omega (g(u) - h) \phi dx, \ \ \phi \in H_0^1.
$$

De esta forma probamos que (2.12) es una condición suficiente para la existencia de soluciones débiles de (2.4).

$\square$

2.4. Demostración de L-L usando Métodos Variacionales

En esta sección probaremos las condiciones de L-L por métodos variacionales, en un caso más general. Aquí tomaremos como operador al $p-$Laplaciano, que diferencia del operador que tomamos en las secciones anteriores este resulta ser un operador no lineal.

$$\begin{cases} -\Delta_p(u) = \lambda_1 |u|^{p-2}u + f(x,t) - h(x) & \text{si } x \in \Omega \\ u \in W_0^{1,p}\Omega \end{cases} \tag{2.18}$$

tiene al menos una solución débil. Donde Δ_p denota el operador $p-$Laplaciano, es decir $\Delta_p u = div(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$. Vamos a trabajar bajo las siguientes condiciones:

Sea Ω, al igual que en las secciones anteriores, es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $p > 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función acotada Caratheodory, es decir, $f(x,t)$ es medible con respecto a x en Ω para todo $t \in \mathbb{R}$, y continua con respecto a $t \in \mathbb{R}$ para casi todo $x \in \Omega$. Además $h \in L^{p'}(\Omega)$ con $p' = p/(p-1).\lambda_1 = \text{ínf}\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p dx \text{ tal que } u \in W_0^{1,p}(\Omega)\right\}$ es el primer autovalor para $-\Delta_p$ en Ω con condiciones de Dirichlet homogeneas. Observemos que λ_1 es simple y positivo, más aun, existe una única autofunción positiva w cuya norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ es igual a uno. También suponemos que para casi todo $x \in \Omega$, existen

$$\lim_{t\to-\infty} f(x,t) = f_{-\infty}(x) \text{ y } \lim_{t\to+\infty} f(x,t) = f^{+\infty}(x) \tag{2.19}$$

Bajo estas condiciones, tenemos el teorema

Teorema 2.4.1 *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada Caratheodory satisfaciendo (2.19). Supongamos que $h \in L^{p'}(\Omega)$ es tal que*

$$\int_\Omega f^{+\infty}(x) w dx < \int_\Omega h w dx < \int_\Omega f_{-\infty}(x) w dx, \tag{2.20}$$

o

$$\int_\Omega f_{-\infty}(x) w dx < \int_\Omega h w dx < \int_\Omega f_{+\infty}(x) w dx. \tag{2.21}$$

Entonces existe al menos una solución $u \in W^{1,p}(\Omega)$ para el problema (2.18).

En la demostración del teorema usaremos métodos variacionales y para ello necesitamos definir un cierto operador y enunciar un lema previo.

Definimos el operador J en $W_0^{1,p}(\Omega)$

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega |u|^p dx - \int_\Omega F(x,u)dx + \int_\Omega hudx \tag{2.22}$$

donde

$$F(x,t) = \int_0^s f(x,s)ds \quad \text{para casi todo } x \in \omega, \forall t \in \mathbb{R}.$$

El operador J es diferenciable en $W_0^{1,p}(\Omega)$, y su derivada Fréchet es

$$\left\langle J^{'}(u), v\right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx - \lambda_1 \int_\Omega |u|^{p-2}uvdx - \int_\Omega f(x,u)vdx + \int_\Omega hvdx$$

para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, y para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lema 2.4.2 *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada Caratheodory satisfaciendo (2.19). Sea $h \in L^{p^{'}}(\Omega)$ tal que ocurre (2.20) o (2.21). Entonces J satisface la condición de Palais- Smale, esto es que si (u_n) es una sucesión de funciones en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que existe una constante positiva c tal que*

$$|J(u_n)| \leq C \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

y existe una sucesión decreciente (ϵ_n) que tiende a cero, tal que

$$|\left\langle J^{'}(u), v\right\rangle| \leq \epsilon_n ||v_n|| \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.24}$$

(aquí $||v||$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotan la norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$ de la dualidad entre $W^{-1,p^{'}}(\Omega)$ y $W_0^{1,p}(\Omega)$), entonces (u_n) tiene una subsucesión, que por comodidad llamamos (u_n), que converge fuertemente en $W_0^{1,p}$

<u>*Demostración*</u>:(Demostración del Lema)
Comencemos probando que (u_n) es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supongamos que no, o sea $||u_n|| \to \infty$, y definimos

$$v_n = \frac{u_n}{||u_n||}.$$

Se observa que (v_n) es acotada en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y asi, salvo subsucesiones, por el teorema de Rellich-Kondrachov converge debilmente a un cierto $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ y fuertemente en $L^p(\Omega)$. Si dividimos (2.23) por $||u_n||^p$, sólo usando que $J(u_n)$ es acotada inferiormente tenemos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega |v_n|^p dx - \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{||u_n||^p}dx + \int_\Omega \frac{hu_n}{||u_n||^p}dx$$
$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{C}{||u_n||^p}$$

de esta forma

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega |v_n|^p dx - \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{||u_n||^p}dx + \int_\Omega \frac{hu_n}{||u_n||^p}dx \leq 0 \qquad (2.25)$$

donde

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{||u_n||^p}dx + \int_\Omega \frac{hu_n}{||u_n||^p}dx = 0.$$

Esto es cierto ya que ambos sumandos tienden a 0. El primer sumando tiende a 0 pues:

$$F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds \leq |\int_0^t f(x,s)ds| \leq \int_0^t |f(x,s)|ds \leq K|t|$$

esta última desigualdad vale pues f es Caratheodory. Así

$$\int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{||u_n||^p}dx \leq \int_\Omega \frac{K|u_n(x)|}{||u_n||^p}dx = \frac{K}{||u_n||^p}\int_\Omega |u_n(x)|dx$$
$$\leq \frac{K}{||u_n||^p}||u_n||_{W_0^{1,p}} = \frac{K}{||u_n||^{p-1}}$$

que tiende a 0 cuando $n \to \infty$ ya que $p > 1$,
El segundo sumando también tiende a 0 pues:

$$\int_\Omega \frac{hu_n}{||u_n||^p}dx = \frac{1}{||u_n||^p}\int_\Omega hu_n dx$$

usando la desigualdad de Hölder

$$\leq \frac{1}{||u_n||^p}||h||_{L^{p'}}\frac{u_n}{||u_n||^p}$$

y dado que $h \in L^{p'}$

$$= \frac{M}{||u_n||^{p-1}}$$

tiende a 0 cuando $n \to \infty$.
De esta forma (2.25) resulta

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_n|^p dx - \frac{\lambda_1}{p}\int_\Omega |v_n|^p dx - \int_\Omega \leq 0,$$

Además, como $v_n \to v_0$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} |v_n|^p dx = \int_\Omega |v_0|^p dx,$$

y entonces

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx \leq \lambda_1 \int_\Omega |v_0|^p dx.$$

Usando la semicontinuidad de la norma y la desigualdad de Poincaré, tenemos que

$$\lambda_1 \int_\Omega |v_0|^p dx \leq \int_\Omega |\nabla v_0| dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^p dx \leq \lambda_1 \int_\Omega |v_0|^p dx.$$

Así, las desigualdades son en realidad igualdades, entonces por la convexidad uniforme de $W_0^{1,p}(\Omega)$, (u_n) converge fuertemente a v_0 en $W_0^{1,p}(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |\nabla v_0|^p dx = \lambda_1 \int_\Omega |v_0|^p dx.$$

Esto implica, por la definición de w que $v_0 = \pm w$, observar que $||v_0|| = 1$ por la convergencia fuerte de (v_n) a v_0.

Escribamos (2.23) y (2.24) con $v = u_n$, tenemos que

$$-Cp \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^p dx - \lambda_1 \int_\Omega |u_n|^p dx - p\int_\Omega F(x,u_n)dx + p\int_\Omega hu_n dx \leq Cp,$$

$$-\epsilon_n||u_n|| \leq -\int_\Omega |\nabla u_n|^p dx + \lambda_1 \int_\Omega |u_n|^p dx + \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx - \int_\Omega hu_n dx \leq \epsilon_n||u_n||.$$

Sumando ambas desigualdades y dividiendo por $||u_n||$

$$\left|\int_\Omega \left[f(x,u_n)v_n - pg(x,u_n)v_n + (p-1)hu_n\right] dx\right| \leq \frac{M}{||u_n||} + \epsilon_n,$$

donde

$$g(x,t) = \begin{cases} \frac{F(x,t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ f(x,0) & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{2.26}$$

Haciendo tender a n a $+\infty$ y suponiendo, por ejemplo, que v_n converge a $+w$ tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left[f(x,u_n)v_n - pg(x,u_n)v_n\right] dx = (1-p)\int_\Omega h(x)w(x)dx.$$

Como $v_n \to w$, $u_n(x) \to +\infty$ para casi todo $x \in \Omega$, y entonces

$$f(x,u_n(x)) \to f^{+\infty}(x)$$

y por L'Hopital

$$g(x,u_n(x)) \to f^{+\infty}(x)$$

Así, las propiedades de f, F y el teorema de Lebesgue implican que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega \left[f(x,u_n)v_n - pg(x,u_n)v_n\right] dx = (1-p)\int_\Omega f^{+\infty}(x)w(x)dx$$

y como $p \neq 1$,

$$\int_\Omega f^{+\infty}(x)w(x)dx = \int_\Omega h(x)w(x)dx,$$

lo que contradice (2.20) y (2.21).

Luego, (u_n) es acotada. Esto implica que existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que, a lo sumo tomando subsucesiones, u_n converge débilmente a u en $W_0^{1,p}$ y fuertemente en $L^p(\Omega)$.

Eligiendo $v = u_n - u$ en (2.24), tenemos que

$$|\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n.\nabla(u_n - u)dx - \lambda_1 \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)dx$$

$$- \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)dx + \int_\Omega h(u_n - u)dx| \leq \epsilon_n ||u_n - u||.$$

Como $||u_n - u||$ es acotada, y por las hipótesis sobre f y g tenemos que

- $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |u_n|^{p-2}u_n(u_n - u)dx = 0$

pues $p' = \frac{p}{p-1}$ y usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$\int_\Omega |u_n|^{p-1}(u_n - u)dx \leq \left[\int_\Omega \left(|u_n|^{p-1}\right)^{p'}\right]^{1/p'} ||u_n - u||_{L^p}$$

$$= \left[\int_\Omega |u_n|^p\right]^{1/p'} ||u_n - u||_{L^p}$$

que tiende a 0 dado que $||u_n||$ es acotada y $u_n \to u$ en L^p.

- $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f(x,u_n)(u_n - u)dx = 0.$

de forma similar al item anterior, se demuestra usando la desigualdad de Hölder, que Ω y f son acotados y que $u_n \to u$ en L^p.

- $\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega h(u_n - u)dx = 0.$

se demuestra de forma análoga.
Así, tenemos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n.\nabla(u_n - u)dx = 0.$$

Si restamos el término

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla(u_n - u)dx$$

que tiende a 0 cuando $n \to +\infty$ ya que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega [|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u]\nabla(u_n - u)dx = 0,$$

lo cual implica, por la monotonía fuerte del operador $p-$Laplaciano, que u_n converge fuertemente a u en $W_0^{1,p}(\Omega)$.
Esto es lo que queríamos probar.

$\square$

Observación 2.4.3 *La convergencia fuerte de la sucesión de Palais-Smale* (u_n) *se obtuvo usando (2.24) y que la sucesión es acotada.*

Ahora sí estamos en condiciones de probar el teorema 2.4.1. Sólo veremos que si sucede la condición (2.20) entonces el problema (2.18) tiene al menos una solución $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. El otro caso requiere demostrar que J datisface las hipótesis geométricas del teorema del punto silla. Las cuentas pueden hallarse en [3].
Demostración:(Demostración del Teorema)
Empecemos viendo que J es un operador coercivo.
En la demostración de la condición de Palais-Smale, hemos probado que si $(J(u_n))$ es una sucesión acotada inferiormente con $||u_n|| \to +\infty$, entonces (a lo sumo tomando subsucesiones)

$$v_n = \frac{u_n}{||u_n||} \to \pm w \quad \text{en } W_0^{1,p}.$$

Usando este hecho , es fácil probar que J es coerciva si sucede (2.20). Pues si no lo fuera, sería posible tomar una sucesión (u_n) tal que $||u_n|| \to +\infty$, tal que $|J(u_n)| \leq C$ y $v_n = \frac{u_n}{||u_n||} \to \pm w$ en $W_0^{1,p}(\Omega)$. Asumimos, por ejemplo, que $v_n \to w$, argumentando como en la demostración previa tenemos que

$$\int_\Omega h(x)wdx - \int_\Omega f^{+\infty}wdx = \lim_{n\to+\infty}\left[\int_\Omega hv_ndx - \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{||u_n||dx}\right]$$

$$\leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{J(u_n)}{||u_n||}dx \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{||u_n||}dx = 0$$

y esto es un absurdo ya que contradice (2.20). Afirmamos que si J es coerciva y satisface la condición de Palais-Smale entonces J tiene un mínimo, es decir (2.18) tiene al menos una solución. Para probar dicha afirmación vamos a usar el Principio de Ekeland, para ello debemos ver que J está acotada inferiormente. Supongamos que no, entonces existe (u_n) tal que $J(u_n) \to -\infty$, tenemos dos opciones:
Si $||u_{n_k}|| \to +\infty$ como J es coerciva $J(u_{n_k}) \to +\infty$ y esto es un absurdo.

Si $||u_n||$ es acotada entonces existe (u_{n_k}) tal que $u_{n_k} \rightharpoonup u_0$ ya que $W_0^{1,p}(\Omega)$ es un espacio de Banach reflexivo, y como J es semi continua inferiormente

$$J(u_0) \leq \liminf J(u_{n_k}) \to -\infty$$

esto implica que

$$J(u_0) = -\infty$$

y esto es un absurdo. Luego, J es acotada inferiormente.
De esta manera, probamos que acotada inferiormente y cumple la condición de Palais-Smale entonces, por el Principio de Ekeland existe l tal que

$$l = \inf_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)} J(u)$$

de esta forma l es un valor crítico de J y esto nos dice que (2.18) tiene al menos una solución.

$\square$

Capítulo 3

Condiciones de Amahd-Lazer-Paul

En este capítulo daremos una condición que asegura la existencia de soluciones del tipo de problemas que estamos abordando en este trabajo. En el siguiente capítulo mostraremos que estas condiciones generalizan a las de L-L.

3.1. Planteo del Problema

Estudiaremos la existencia de soluciones débiles del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = f(u(x), x) & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

donde Ω es un dominio abierto y acotado en $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 1$ y

$$(Lu)(x) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \leq 1} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_{\alpha\beta} D^\beta u)$$

es un operador uniformemente elíptico,formalmente, un operador autoadjunto de segundo orden en Ω con coeficientes reales $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \in L^\infty(\Omega)$y $f : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ es continua y acotada. Para ello vamos a estudiar el problema lineal homogeneo:

$$\begin{cases} (Lu)(x) = 0 & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

El caso que nos va a analizar es cuando el problema (3.2) tiene soluciones no triviales ($dim(KerL) \neq 0$), es decir, el caso resonante; ya que la solubilidad de (3.1) para el caso no resonante fue analizada en la primera sección del *Capítulo 1.*

Consideramos el espacio $H_0^1(\Omega)$, con $<,>_0$ y $<,>_1$ el producto interno usual de $L^2(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$ respectivamente. Sea

$$B(u,v) = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq 1} < a_{\alpha\beta} D^\alpha u, D^\beta v >_0 \tag{3.3}$$

la forma bilinear simétrica definida en $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ estamos interesados en la existencia de $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$B(u,w) = \int_\Omega f(u(\xi),\xi)w(\xi)d\xi \forall w \in \Omega$$

es decir, u es solución débil de (3.1).

El siguiente teorema nos dará una condición para la solubilidad de (3.1) bajo la suposición de que (3.2) tiene soluciones no triviales.

3.2. Teorema de A-L-P

Teorema 3.2.1 *Sea* $\{w_1, w_2, ..., w_r\}$*, una base del espacio solución del problema (3.2)(ie. una base de Ker(L)). Definimos* $G : \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *por:*

$$G(x,t) = \int_0^t f(s,t)ds.$$

si

$$\int_\Omega G\left(\sum_{i=1}^r s_k w_k(\xi), \xi\right) d\xi \to +\infty \tag{3.4}$$

o

$$\int_\Omega G\left(\sum_{i=1}^r s_k w_k(\xi), \xi\right) d\xi \to -\infty \tag{3.5}$$

cuando $s_1^2 + s_2^2 + ... + s_r^2 \to +\infty$*, entonces existe una solución débil de (3.1)*

Observación Como la base del $Ker(L)$ es finita, entonces podemos suponer que $w_1, w_2, ..., w_r$ es una base ortonormal, de esta forma si $u \in Ker(L)$ entonces $u = \sum_{k=1}^{r} s_k w_k(\xi)$ y así, la condición $s_1^2 + s_2^2 + ... + s_r^2 \to +\infty$ es equivalente a $\|u\|_0 \to +\infty$

Observación Más adelante veremos que las condiciones (3.4) y (3.5) pueden ser debilitadas si se tiene más información sobre los autovalores de L.

3.3. Un ejemplo para el caso $n = 1$.

En esta sección vamos a mostrar un ejemplo de aplicación del Teorema 3.2.1 para el caso $n = 1$. Dado un sistema veremos mediante el cálculo directo que bajo las hipótesis del Teorema existe una solución débil.

Ejemplo 3.3.1 *Sea* $\Omega = [0, T]$, *Consideramos el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{cases} u^{''} + \nabla M(u) = \tilde{p} + \overline{p} & si\ x \in [0,T] \\ u(0) = u(T)u^{'}(0) = u^{'}(T) \end{cases} \tag{3.6}$$

Donde $u : [0, T] \to \mathbb{R}^N, M : B \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\tilde{p} : [0, T] \to \mathbb{R}^N$ *y* $\tilde{p} \in L^2((0, T), \mathbb{R}^N)$ *de promedio cero.*

Sea el operador $Lu = -u^{''}$, *observemos que el* $Ker(L) = \mathbb{R}^N$.
Escribamos la ecuación con la notación del teorema

$$-u^{''} = f(x, t, x)$$

donde $f(u, x) = \nabla M(u) - \tilde{p}(x) - \overline{p}$ *y consideramos*

$$G(u, x) = M(u) - (\tilde{p}(x) + \overline{p}).u$$

Queremos ver que si

$$\frac{1}{T}\int_0^T G(u, x)dx \to +\infty \tag{3.7}$$

o

$$\frac{1}{T}\int_0^T G(u, x)dx \to -\infty \tag{3.8}$$

entonces existe solución débil del sistema.

Si supusieramos que sucede (3.7), mostrar la existencia de una solución del problema es complicado, por ello vamos a considerar que

$$\frac{1}{T}\int_0^T G(u,x)dx = M(u) - \overline{p}.u \to -\infty.$$

Para resolver el problema vamos a usar métodos variacionales, basta hallar un punto crítico del funcional

$$J(u) = \int_0^T \frac{|u^{'}|^2}{2} - M(u) + (\tilde{p}(x) + \overline{p}).u$$

El espacio en el que vamos a trabajar es $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n + H_0^1((0,T),\mathbb{R}^n)$*, que es un Hilbert y por ende reflexivo. Si además probamos que* $J(u)$ *es acotado inferiormente, d.s.c.i. y coercivo, entonces podemos asegurar que el sistema (3.6) tiene solución débil.*

Empecemos viendo que es acotado inferiormente

$$J(u) = \int_0^T \frac{|u^{'}|^2}{2} - M(u) + (\tilde{p}(x) + \overline{p}).u =$$

$$\int_0^T \frac{|u^{'}|^2}{2}dx + \int_0^T -M(u) + \overline{p}.udx + \int_0^T \tilde{p}(x).udx =$$

$$\frac{||u^{'}||_{L^2}^2}{2} + \int_0^T -M(u) + \overline{p}.udx + \int_0^T \tilde{p}(x).udx.$$

El segundo sumando está acotado inferiormente pues, como por hipótesis $M(u) - \overline{p}.u \to -\infty$*,*
entonces

$$-M(u) + \overline{p}.u \to +\infty$$

y esto implica que

$$\int_0^T -M(u) + \overline{p}.u \geq K \quad \textit{con } K \in \mathbb{R}.$$

Por último, dado que ũ tiene promedio 0

$$\int_0^T \tilde{p}.udx = \int_0^T \tilde{p}.udx - \int_0^T \tilde{p}.\overline{u}dx = \int_0^T \tilde{p}.(u - \overline{u})dx$$

por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left|\int_0^T \tilde{p}(x).udx\right| \leq ||\tilde{p}||_{L^2}||u-\overline{u}||_{L^2}$$

y usando la desigualdad de Wirtinger

$$\leq ||\tilde{p}||_{L^2}P||u^{'}||_{L^2}.$$

Como $p \in L^2((0,T),\mathbb{R}^n)$ *entonces* $\tilde{p} \in L^2((0,T),\mathbb{R}^n)$ *y así,* $||\tilde{p}||_{L^2} \leq D$.
Por lo tanto, si llamamo $C = PD$

$$J(u) \geq \frac{||u^{'}||^2_{L^2}}{2} + K - C||u^{'}||_{L^2}.$$

de esta forma, J *es acotado inferiormente.*

Ahora probemos que J *es coerciva. Supongamos que* $||u_n||_{H^1} \to \infty$.
Si $||u_n^{'}||_{L^2} \to \infty$, *es claro que* $J(u) \to \infty$ *dado que*

$$J(u) \geq \frac{||u^{'}||^2_{L^2}}{2} + K - C||u^{'}||_{L^2}$$

completando cuadrados

$$\frac{1}{2}\left[(||u^{'}||_{L^2} - C)^2 - C^2 + 2K\right] = \frac{1}{2}\left[(||u^{'}||_{L^2} - C)^2 + R\right].$$

Si $||u_n^{'}||_{L^2}$ *no tiende a* ∞ *podemos tomar una subsucesión acotada que por comodidad llamaremos* $(u_n^{'})$, *así* $||u_n^{'}||_{L^2}$ *es acotada y* $||u_n - \overline{u}_n||_\infty$ *también, así,* $||u_n'||^2_{L^2}/2$ *está acotada y* $\int_0^T \tilde{p}.udx$ *también pues*

$$|\int_0^T \tilde{p}.udx| = |\int_0^T \tilde{p}.(u-\overline{u}+\overline{u})dx| \leq \int_0^T |\tilde{p}.(u-\overline{u})| + \int_0^T |\tilde{p}\overline{u}|$$

como $\int_0^T \tilde{p} = 0$

$$= \int_0^T |\tilde{p}||(u-\overline{u})|$$

que es acotado.

Entonces basta ver que

$$\int_0^T \overline{p}.u_n - M(u_n) \to +\infty.$$

Llamemos $\varphi(u) = \overline{p}.u - M(u)$*, o sea, debemos probar que*

$$\int_0^T \varphi(u_n) \to +\infty.$$

Escribamos a u_n *de la siguiente manera,* $u_n = u_n - \overline{u}_n + \overline{u}_n$ *dado que* $||u_n||_{H^1} \to \infty$ *y que* $||u_n - \overline{u}_n||_\infty$ *está acotado, como* $u_n - \overline{u_n}$ *está acotada,* $||u_n|| \to \infty$ *y*

$$||u_n||_{L^2} \leq ||u_n - \overline{u_n}|| + ||u_n|| = ||u_n - \overline{u_n}|| + |\overline{u_n}|$$

entonces

$$|\overline{u}_n| \to \infty$$

y como

$$|u_n(x)| \geq |\overline{u}_n| - |\overline{u}_n - u_n(x)|$$

esto implica que

$$|u_n(x)| \to \infty \textit{ uniformemente en } x.$$

De esta manera, dado $S > 0$ *existe* $L > 0$ *tal que si* $|u| \geq L$ *entonces,* $\varphi(u) > S$.
Esto implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n \geq n_0$ $|u_n(x)| \geq R$ $\forall x \in (0,T)$.
Por lo tanto

$$\int_0^T \varphi(u_n(x)) \geq ST \ \ \forall n \geq n_0.$$

Y como S *lo consideramos arbitrario, esto concluye la demostración de la coercividad.*

Nos falta argumentar que J *es d.s.c.i.. Tenemos que*

$$J(u) = \int_0^T \frac{|u'|^2}{2} dx + \int_0^T -M(u) + (\tilde{p}(x) + \overline{p}).udx$$

el primer y el último sumando son convexos entonces por el Teorema 1.4.8 son d.s.c.i.,sólo nos resta probar que $\int_0^T -M(u)dx$ *es d.s.c.i, es decir,*

$$u_k \rightharpoonup u \quad \textit{en } \mathcal{H} \Rightarrow \int_0^T -M(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_0^T -M(u_k).$$

Sea $u_k \rightharpoonup u$ *en* $\mathcal{H}$, *por el Teorema 1.4.13* $u_k \to u$ *uniformemente en* $[0,T]$ *como* $M \in C^1$ *vale que*

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T -M(u_k)dx = \int_0^T -M(u)dx.$$

que es lo que queríamos probar.

Luego, J *tiene un mínimo y por lo tanto el sistema (3.6) tiene solución.*

3.4. Resultados Previos.

La demostración del teorema (3.2.1) requiere del siguiente lema previo que demostraremos en el anexo, y de ciertos resultados ya conocidos que enunciaremos en esta sección.

Lema 3.4.1 *Sea* (x,y,z) *un punto de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{n+m+q}$, *y* $F : \mathbb{R}^{n+m+q} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1. *Denotaremos el producto interno y la norma en* $\mathbb{R}^k$ *por* $<,>$ *y* $|\ |$ *respectivamente, donde* $k = n, m, q$ *o* $n+m+q$. *Además consideraremos*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),\ \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial F}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial y_m}\right),\ \frac{\partial F}{\partial z} = \left(\frac{\partial F}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial F}{\partial z_q}\right)$$

y notamos

$$\nabla F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = \left(\frac{F}{x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \frac{F}{y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \frac{F}{z}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right).$$

Sea $n > 0, m \geq 0$ *y* $q \geq 0$. *Supongamos que existen números* $c > 0, r > 0$ *y* $c_1 > 0$ *tal que:*

1. $F(x,y,z) \leq F(0,y^*,0)$ *para* $|z| \leq c_1$, $|y| \leq c$, $|y^*| \leq c$ *y* $|x| = r$,
2. $\left\langle \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), y \right\rangle \geq 0$ *para* $|y| = c$, $|x| \leq r$, $|z| \leq c_1$ *y* $m > 0$,
3. $\left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z), z \right\rangle \leq 0$ *para* $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ *y* $|z| = c_1$ *si* $q > 0$.

Entonces existe (x_0,y_0,z_0) *con* $|x_0| \leq r$, $|y_0| \leq c$, $|z_0| \leq c_1$ *y*

$$\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0.$$

Ahora enunciemos ciertos hechos concernientes a los autovalores del problema

$$\begin{cases} (Lu)(x) = \lambda u & \text{si } x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.9}$$

Si B es la forma bilineal dada por (3.3), entonces por la desigualdad de Gårding, existen constantes $c_0 > 0$ y $c_1 > 0$ tal que para todo $u \in H_0^1$

$$c_1|u|_1^2 \leq B(u,u) + c_0|u|_0^2. \tag{3.10}$$

Sea B_0

$$B_0(u,v) = B(u,v) + c_0 \langle u, v\rangle_0 \tag{3.11}$$

una forma bilineal simétrica, continua y coerciva en $H_0^1 \times H_0^1$,(la coercividad resulta de (3.10)). Dada $f \in L^2(\Omega)$ definimos

$$\varphi_f : H_0^1 \to \mathbb{R}, \;\; \varphi_f(v) =< f, v >_0$$

un operador que es lineal y continuo en H_0^1. Entonces, por *Lax-Milgram* existe un único $w \in H_0^1$ tal que

$$B_0(w,v) = \varphi_f(v) \;\; \forall v \in H_0^1$$

y además

$$||w||_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha}||\varphi_f||_{(H^1)'} \text{ (con } \alpha \text{ la constante de coercividad).} \tag{3.12}$$

de esta forma es natural definir $w := T(f)$ donde $T : L^2 \to H_0^1$ es lineal, ya que si $T(f) = w_1$ y $T(g) = w_2$ entonces

$$\varphi_{af+g}(v) =< af + g, v >_0= a < f, v >_0 + < g, v >_0= a\varphi_f(v) + \varphi_g(v)$$

$$= aB_0(w_1, v) + B_0(w_2, v) = B_0(aw_1, v) + B_0(w_2, v) = B_0(aw_1 + w_2, v)$$

de este modo, $T(af + g) = aw_1 + w_2$ y entonces $T(af + g) = aT(f) + T(g)$. También tenemos que T es continuo, esto sale de la cota (3.12) dada por *Lax-Milgram*, de hecho

$$||T(f)||_{H^1} = ||w||_{H^1} \leq \frac{1}{\alpha}||\varphi_f||_{H'} = \frac{1}{\alpha}\sup_{v\in H^1}\frac{|\varphi_f(v)|}{||v||_{H^1}}$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\frac{||f||_0||v||_0}{||v||_{H^1}} \leq \frac{1}{\alpha}\frac{||f||_0||v||_{H^1}}{||v||_{H^1}} = \frac{1}{\alpha}||f||_0.$$

Es más, si consideramos que $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, por la composición con la inmersión compacta $H_1^0 \to L^2(\Omega)$, T resulta ser un operador autoadjunto, positivo y compacto. Entonces, por el *Teorema espectral* sabemos que existe una sucesión real $\{\alpha_k\}_1^\infty$ con $\alpha_k > 0$ para todo k, $\alpha_{k+1} \leq \alpha_k$ y $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$, y una correspondiente sucesión $\{\psi_k\}_1^\infty \subset H_0^1$ tal que $T\psi_k = \alpha_k\psi_k$ y $\{\psi_k\}_0^\infty$ forman una base ortonormal de $L^2(\Omega)$.

De esta forma, si tomamos $\lambda_k = \frac{1}{\alpha_k} - c_0$ se sigue de la definición de B_0 y de la relación $\alpha_k B_0(\psi_k, v) = \langle\psi_k, v\rangle_0$ que

$$B(\psi_k, v) = \lambda_k \langle\psi_k, v\rangle_0 , \quad v \in H_0^1 \tag{3.13}$$

$$\lambda_1 \leq \lambda_2... \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq .... \tag{3.14}$$

Las dos relaciones siguientes también serán muy usadas en la demostración del Teorema (3.2.1)

$$B\left(\sum_{j=1}^m c_j\psi_j, \sum_{j=1}^m c_j\psi_j\right) = \sum_{j=1}^m \lambda_i c_j^2, \tag{3.15}$$

$$\left|\sum_{j=1}^m c_j\psi_j\right|_0^2 = \sum_{j=1}^m c_j^2 \tag{3.16}$$

para constantes arbitrarias $c_1, ..., c_m$. Es claro que (3.13) es equivalente a $L\psi_k = \lambda_k\psi_k$ y $\psi_k = 0$ en $\partial\Omega$ en el sentido débil. Por otra parte, si $u \in H_0^1$ y $Lu = \lambda u$ en el sentido débil entonces, debido a que L es autoadjunto, $(\lambda - \lambda_k)\langle u, \psi_k\rangle_0 = 0$ para todo k de este modo, si $\lambda \neq \lambda_k$, $u = 0$. Así, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ son lo autovalores de L restringida a H_0^1.

Finalmente, necesitaremos el hecho de que el subespacio generado por los elementos de la sucesión $\{\psi_k\}_1^\infty$ es denso en H_0^1. De hecho, por la condición (3.10), B_0 es coerciva y por (3.11) es un producto interno en H_0^1 el cual genera la misma topología que el producto interno $<, >_1$.

3.5. Demostración del Teorema

Ahora sí estamos en condiciones de empezar con la demostración del Teorema 3.2.1:
Demostración: Dada $u \in H_0^1$ consideramos el operador

$$J(u) = \frac{B(u,u)}{2} - \int_\Omega G(u(\epsilon), \epsilon)d\epsilon. \tag{3.17}$$

Por lo que observamos anteriormente sabemos que

$$\lambda_1 \leq ... \leq \lambda_q < 0 = \lambda_{q+1} = ... = 0 < \lambda_{q+r+1} \leq ... \leq \lambda_{q+r+m} \cdots \tag{3.18}$$

con $q \geq 0$. (Si $q = 0$, L no tiene autovalores negativos). Para cada entero $m = 1, 2, 3, ...$, definimos $F_m : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ como

$$F_m(x_1, ..., x_r, y_1, ..., y_m, z_1 ..., z_q) = F_m(x, y, z) = J[u_m(x, y, z)] \tag{3.19}$$

donde,

$$u_m(x, y, z)(\epsilon) = \sum_{j=1}^{r} x_j \psi_{q+j}(\epsilon) + \sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\psi_{q+r+k}}{(\lambda_{q+r+k})^{\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon). \tag{3.20}$$

y por (3.15) y (3.18) tenemos que:

$$F_m(x, y, z) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} y_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_i^2 - \int_\Omega G(u_m(x, y, z)(\epsilon), \epsilon)d\epsilon, \tag{3.21}$$

y por cómo está definida G y por (3.20),

$$\frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x, y, z) = y_k - \int_\Omega \frac{\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{\frac{1}{2}}} f(u_m(x, y, z)(\epsilon), \epsilon)d\epsilon \;\; para\ k = 1, ..., m \tag{3.22}$$

y, si $q > 0$,

$$\frac{\partial F_m}{\partial z_i}(x, y, z) = \lambda_i z_i - \int_\Omega \psi_i(\epsilon) f(u_m(x, y, z)(\epsilon), \epsilon)d\epsilon \;\; para\ i = 1, ..., q. \tag{3.23}$$

Como supusimos que f es acotada, existe $M \in \mathbb{R}$ tal que

$$|f(x,t)| \leq M \ \ para \ (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\Omega} \tag{3.24}$$

entonces por la Desigualdad de Schwarz, (3.18) y (3.16),

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m} y_k \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x,y,z) &= \left\langle \frac{\partial F_m}{\partial y}(x,y,z), y \right\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k \psi_{q+r+k}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}} f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - M|\Omega|^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k \psi_{q+r+k}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}} \right)^2 d\epsilon \right)^{1/2} \\
&= \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - M|\Omega|^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{\lambda_{q+r+k}} \right)^{1/2} \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \frac{M|\Omega|^{1/2}}{(\lambda_{q+r+1})^{1/2}} \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2 \right)^{1/2} \\
&= |y|^2 - K|y|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, si consideramos

$$K = \frac{M|\Omega|^{1/2}}{(\lambda_{q+r+1})^{1/2}} \tag{3.25}$$

por la desigualdad anterior tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial F_m}{\partial y}(x,y,z), y \right\rangle \leq 0 \ \ si \ |y| \geq K \tag{3.26}$$

para todo $m \geq 1$. Similarmente, si $q > 0$, se ve de (3.23), (3.24) y (3.18) que

$$\left\langle \frac{\partial F_m}{\partial z}(x,y,z), z \right\rangle = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_i^2 - \int_{\omega} \sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon) f(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon)d\epsilon$$

$$\leq \lambda_q \sum_{i=1}^{q} z_i^2 + M|\Omega|^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{q} z_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\lambda_q |z|^2 + M|z|.$$

Así, si $q > 0$ y consideramos

$$K^* = \frac{-M|\Omega|^{1/2}}{\lambda_q} > 0 \tag{3.27}$$

tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial F_m}{\partial z}(x,y,z), z \right\rangle \leq 0 \ \ si \ |z| \geq K^* \tag{3.28}$$

para todo $m \geq 1$.

Para mostrar que $F_m(x,y,z)$ está en las hipótesis del Lema previo, observemos que por como está definida G, $G(0,\epsilon) = 0$, y además se deduce de (3.20), (3.21), (3.24), el teorema del valor medio y la Desigualdad de Schwarz que

$$F_m(0,y,0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \int_\Omega G\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k \psi_{q+r+k}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}}, \epsilon \right) d\epsilon$$

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - M \int_\Omega \left| \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k \psi_{q+k+r}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}} \right| d\epsilon$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \frac{M|\Omega|^{1/2}}{(\lambda_{q+r+1})^{1/2}} \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{2}|y|^2 - K|y|.$$

De hecho, $\frac{1}{2}|y|^2 - K|y|$ es una parábola cuyo valor mínimo es $\frac{-K^2}{2}$, luego,

$$F_m(0,y,0) \geq \frac{-K^2}{2}, \quad y \in \mathbb{R}, \ m \geq 1. \tag{3.29}$$

Análogamente, si $q > 0$ usando (3.18) se ve que

$$F_m(0,0,z) = \frac{1}{2}\sum_{i=1} q\lambda_i z_i^2 - \int_\Omega G\left(\sum_{i=1}^{q} z_i \psi_i(\epsilon), \epsilon \right) d\epsilon$$

$$\leq \frac{\lambda_q}{2}\sum_{i=1}^{q} z_i^2 + M|\Omega|^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{q} z_i^2\right)^{1/2} = \lambda_q(\frac{1}{2}|z|^2 - K^*|z|).$$

por lo talto, como $\lambda_q < 0$

$$F_m(0,0,z) \leq \frac{-\lambda_q(K^*)^2}{2}, \quad z \in \mathbb{R}^q. \tag{3.30}$$

nuevamente, por el Teorema del valor medio, vemos de (3.20) que

$$\left|\int_\Omega (G(u_m(x,y,z)(\epsilon),\epsilon) - G\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right) d\epsilon\right|$$

$$\leq M\int_\Omega \left|\sum_{k=1}^{m} \frac{y_k\psi_{q+r+k}(\epsilon)}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}} + \sum_{i=1}^{q} z_i\psi_i(\epsilon)\right| d\epsilon \leq M|\Omega|^{1/2}\left[\frac{|y^2|}{\lambda_{q+r+1}} + |z|^2\right]^{1/2}.$$

De esta acotación y de (3.21):

$$F_m(x,y,z) \leq \frac{1}{2}|y|^2 + M|\Omega|^{1/2}\left[\frac{|y|^2}{\lambda_{q+r+1}} + |z|^2\right]^{1/2} - \int_\Omega G\left(\sum_{j=1}^{r} x_i\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right) d\epsilon, \tag{3.31}$$

y

$$F_m(x,y,z) \geq \lambda_1|z|^2 - M|\Omega|^{1/2}\left[\frac{|y|^2}{\lambda_{q+r+1}} + |z|^2\right]^{1/2} - \int_\Omega G\left(\sum_{j=1}^{r} x_i\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right) d\epsilon \tag{3.32}$$

si $q > 0$. En referencia a (3.29) y (3.31), si

(I) $\int_\Omega G\left(\sum_{j=1}^{r} x_i\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right) d\epsilon \to \infty$ *cuando* $|x| \to \infty$ se infiere la existencia de $r_1 > 0$, independiente de m, tal que

$$F_m(x,y,z) \leq \frac{-K^2}{2} \leq F_m(0,y^*,0) \;\; si\; |y|,|y^*| \leq K, |z| \leq K^*,\; y\; |x| = r_1. \tag{3.33}$$

Similarmente, en referencia a (3.30) y (3.32) si

(II) $\int_\Omega G\left(\sum_{j=1}^{r} x_j\psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right) d\epsilon \to -\infty$ *cuando* $|x| \to \infty$ podemos hallar $r_2 > 0$, independiente de m, tal que

$$F_m(x,y,z) \geq \frac{-\lambda_q(K^*)^2}{2} \geq F_m(0,0,z^*) \;\; si \;|y| \leq K, |z|, |z^*| \leq K^*, \;\; y \;|x| = r_2 \qquad (3.34)$$

cuando $q > 0$, o

$$F_m(x,y) \geq \text{máx}\{F(0,y^*) \;\; tal \;\; que \;\; |y^*| \leq K\} \;\; si \;|y| \leq K \;\; y \;|x| = r_2 \;\; cuando \; q = 0. \qquad (3.35)$$

donde $F_m(x,y) = F_m(x,y,0)$ y $F(0,y^*) = F(0,y^*,0)$. (En este caso sucede (3.32) si reemplazamos $\lambda_1|z|^2$ por 0.)

Si sucede (I), se sigue de (3.26), (3.28) y (3.33) que $F_m(x,y,z)$ satisface las hipótesis del Lema (3.4.1) con $c = K$, $c_1 = K^*$ y $r = r_1$. Si $q > 0$ y sucede (II), consideramos el operador

$$E_m(x,y,z) = -F_m(x,y,z).$$

De (3.34) vemos que

$$E_m(x,y,z) \leq E_m(0,0,z^*) \;\; si \;|x| = r_2, |y| \leq K \;\; y \;|z|, |z^*| \leq K^*.$$

Por otra parte, por (3.26) y (3.28)

$$\left\langle \frac{\partial E_m}{\partial z}(x,y,z), z \right\rangle \geq 0 \;\; si \;|y| = K, |z| = K^* \;\; y \;|y| \leq K$$

y

$$\left\langle \frac{\partial E_m(x,y,z)}{\partial y}, y \right\rangle \leq 0 \quad \text{si} \quad |y| = K, |z| \leq K^*, \;\text{y}\; |x| \leq r_2.$$

Así, $-F_m(x,y,z)$ satisface las hipótesis del Lema 3.4.1 con $c = K^*$, $c_1 = K$,$r = r_2$ y los roles de y y z intercambiados. Si $q = 0$ y sucede (II), se sigue de (3.35) y (3.26) que $-F_m(x,y)$ satisface las hipótesis del Lema 3.4.1 con $r = r_2$, $c_1 = K$ y los roles de y y z intercambiados.

En cada caso, se sigue del Lema 3.4.1 que existe

$$(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = (x_{1m}, ..., x_{rm}, y_{1m}, ..., y_{mm}, z_{1m}, ...z_{qm})$$

con $|x_0^m| \leq \overline{r}$, $|y_0^m| \leq K$, $|z_0^m| \leq K^*$,
donde $\overline{r} = r_1(r_2)$ si I (II) sucede, tal que $\nabla F_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = 0$.

Si $v_m(\epsilon) = u_m(x_0^m, y_0^m, z_0^m)(\epsilon)$ vemos de (3.17), (3.19) y (3.20) que

$$0 = \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = B(v_m, \psi_{q+j}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+j}(\epsilon)d\epsilon \ \ para \ j = 1, ..., r,$$

$$0 = \frac{\partial F_m}{\partial y_k}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = \frac{1}{(\lambda_{q+r+k})^{1/2}}\left[B(v_m, \psi_{q+r+k}) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_{q+r+k}(\epsilon)d\epsilon\right]$$

para $k = 1, ..., m$, y si $q > 0$

$$0 = \frac{\partial F_m}{\partial z_i}(x_0^m, y_0^m, z_0^m) = B(v_m, \psi_i) - \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_i(\epsilon)d\epsilon \ \ para \ i = 1, ..., q.$$

Por lo tanto

$$B(v_m, \psi_l) = \int_\Omega f(v_m(\epsilon), \epsilon)\psi_l(\epsilon)d\epsilon, \ \ 1 \leq l \leq q + r + m. \tag{3.36}$$

Para estimar $|v_m|_1$, usamos (3.15), (3.18), y (3.20),

$$B(v_m, v_m) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_{im}^2 + \sum_{j=1}^{r} \lambda_{q+j} x_{jm}^2 + \lambda_{k=1}^m y_{km}^2$$

$$= \sum_{i=1}^{q} \lambda_i z_{im}^2 + \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq \sum_{k=1}^{m} y_{km}^2 \leq K^2$$

y de acuerdo a (3.16)

$$|v_m|_0^2 = \sum_{i=1}^{m} z_i^2 + \sum_{j=1}^{r} x_j^2 + \sum_{k=1}^{m} \frac{y_k^2}{\lambda_{q+r+k}} \leq (K^*)^2 + \overline{r}^2 + \frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}}.$$

De este modo, por la Desigualdad de Gårding (3.10),

$$|v_m|_1^2 \leq \frac{1}{c_1}\left[K^2 + c_0\left((K^*)^2 + \overline{r}^2 + \frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}}\right)\right]$$

para todo $m \geq 1$.

Para terminar la demostración vamos a usar un argumento estandar del tipo Ritz-Garlekin. Como mostramos anteriormente, la sucesión $\{v_{m_k}\}_1^\infty$ está acotada en H_0^1 entonces existe una subsucesión de $\{v_{m_k}\}_1^\infty$ que converge débilmente a $v \in H_0^1$. Por el Teorema de Rellich, como H_0^1 está compactamente incluido en L^2, tenemos que esta sucesión converge fuertemente a v en $L^2(\Omega)$. De hecho, existe una subsucesión de $\{v_{m_k}\}_1^\infty$ que converge en casi todo punto a v en Ω, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{v_{m_k}\}_0^\infty$ es quien tiene esta propiedad. Como f es continua y acotada, se sigue del Teorema de Lebesgue que $f(v_{m_k}(\epsilon),\epsilon) \to f(v(\epsilon),\epsilon)$ en $L^2(\Omega)$ cuando $m_k \to \infty$. Fijando $l < m_k + q + r$ en (3.36) y tomando $m_k \to \infty$, tenemos que

$$B(v,\psi_l) = \int_\Omega \psi_l(\epsilon) f(v(\epsilon),\epsilon)d\epsilon.$$

Como tomamos un l arbitrario y, por lo observado anteriormente, el subespacio generado por las funciones $\{\psi_l\}_1^\infty$ es denso en H_0^1, así, vemos que

$$B(v,w) = \int_\Omega w(\epsilon) f(v(\epsilon),\epsilon)d\epsilon \;\; si \;\; w \in H_0^1.$$

De esta forma, v es una solución débil de (3.1) y el Teorema queda probado.

□

Observación 3.5.1 *Analizando la demostración enterior vemos que (3.1) tiene solución debilitando las condiciones que dependen de los autovalores de L. Por ejemplo, si $q > 0$, se sigue de (3.29), (3.31) y del Lema 3.4.1 que (3.1) tiene solución si existe $\overline{r} > 0$ tal que*

$$\int_\Omega G\left(\sum_{j=1}^r x_j \psi_{q+j}(\epsilon),\epsilon\right)d\epsilon \geq K^2 + |\Omega|^{1/2}\left[\frac{K^2}{\lambda_{q+r+1}} + K^*\right]^{1/2}$$

donde

$$\sum_{i=1}^r x_i^2 = \overline{r}.$$

3.6. Anexo.

En esta sección haremos la demostración del Lema 3.4.1.

Demostración: Para probar la afirmación, basta hacerlo bajo condiciones un poco más fuertes

1. $F(x,y,z) < F(0,y^*,0)$ para $|x| = r$, $|y|,|y^*| \leq c,|z| \leq c_1$,

2. $\left\langle \frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z), y \right\rangle > 0$ para $|y| = c$, $|x| \leq r$, $|z| \leq c_1$ si $m > 0$,

3. $\left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z), z \right\rangle < 0$ para $|x| \leq r$, $|y| \leq c$ y $|z| = c_1$ si $q > 0$.

De hecho, si F satisface las condiciones (i), (ii), (iii) entonces, para cada número entero positivo k, la función $F_k(x,y,z) = F(x,y,z) + (|y|^2 - |z|^2 - (2c^2/r^2)|x|^2)/k$ satisface las condiciones (1), (2) y (3), y además

$$\lim_{k\to\infty} \nabla F_k(x,y,z) = \nabla F(x,y,z)$$

uniformemente para $|x| \leq r, |y| \leq c$, y $|z| \leq c_1$. Si para cada k, $\nabla F_k(x_k, y_k, zk) = 0$ con $|x_k| \leq r, |y_k| \leq c$ y $|z_k| \leq c_1$ y (x_0, y_0, z_0) es un punto límite de la sucesión $\{(x_k, y_k, z_k)\}_1^\infty$ entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Supongamos que se satisface (1), (2) y (3) y que $m = 0$. Las condiciones (1) y (3) implican que el máximo de $F(x,z) = F(x,0,z)$ debe ser alcanzado en un punto (x_0, z_0) perteneciente al interior del conjunto $\{(x,z)$ tal que $|x| \leq r, |z| \leq c_1\}$, así, $\nabla F(x_0, z_0) = 0$.

Ahora, supongamos que se satisface (1), (2) y (3) y que $m > 0$. Primero consideremos $F \in C^2$. Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{n+m+q}$ tal que $|x| \leq r, |y| \leq c, |z| \leq c_1\}$. Modificando F fuera de un conjunto abierto que contiene a B podemos asumir que ∇F es acotado en $\mathbb{R}^{n+m+q}$. Sea $\phi(t,x,y,z)$ la solución del problema de valores inciales

$$\frac{d\phi}{dt}(t,x,y,z) = \nabla F(\phi(t,x,y,z))$$
$$\phi(0,x,y,z) = (x,y,z).$$

By la teoría básica de existencia $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+m+q})$. Si la afirmación del Lema 1 es falsa, existe $a > 0$ tal que $|\nabla F(x,y,z)| \geq a$ para $(x,y,z) \in B$, entonces

$$\frac{dF}{dt}(\phi(t,x,y,z)) = |\nabla F(\phi(t,x,y,z))|^2 \geq a^2 \tag{3.37}$$

si $\phi(t,x,y,z) \in B$. Como consecuencia, $\phi(t,x,y,z)$ no puede pertenecer a B por un periodo de tiempo superior a

$$\frac{(\text{máx}_B F - \text{mín}_B F)}{a^2}.$$

Sea $D = \{y \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } |y| \leq c\}$ y sea $T(y)$ el número no negativo mas grande tal que $\phi(t,0,y,0) \in B$ para $0 \leq t \leq T(y)$ si $y \in D$. Claramente, $\phi(T(y),0,y,0) \in \partial B$. Si $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ con $|\bar{x}| = r$,$|\bar{y}| \leq c$, $|\bar{z}| \leq c_1$ entonces $T(y) > 0$, entonces, de acuerdo a (3.37), $F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = F(\phi(T(y),0,y,0)) > F(\phi(0,y,0,0)) = F(0,y,0,0)$, lo cual contradice (1). Sea $\phi(t,0,y,0) = (\phi_n(t,y), \phi_m(t,y), \phi_q(t,y))$ con $\phi_k \in \mathbb{R}^k$, $k = n,m,q$. Si $q > 0$ y $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ con $|\bar{x}| \leq r$, $|\bar{y}| \leq c$ y $|z| = c_1$, entonces

$$2\left\langle \frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \bar{z} \right\rangle = \frac{d}{dt}|\phi_q(t,y)|^2\bigg|_{t=T(y)} \geq 0,$$

lo cual contradice (3). Por lo tanto, $\phi(T(y),0,y,0) = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ con $|\bar{x}| < r, |\bar{y}| = c$, y $|\bar{z}| \leq c_1$. Como $|\phi_m(T(y),y)|^2 = c^2$ y de acuerdo a (2)

$$\frac{d}{dt}|\phi_m(T(y),y)|^2\bigg|_{t=T(y)} = 2\left\langle \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x},\bar{y},\bar{z}), \bar{y} \right\rangle > 0,$$

así, existe un número $\delta(y) > 0$ tal que $|\phi_m(T(y)+s,y)| > c$ y $|\phi_m(T(y)-s,y)| < c$ si $0 < s0\delta(y)$. Como $|y| < c$ implica $|\phi_m(t,y)| < c$ para $0 \leq t < T(y)$, y $T(y) = 0$ si $|y| = c$, se sigue de la continuidad de $\phi(t,0,y,0)$ que $T(y)$ es una función continua en la bola cerrada D.

Por lo tanto, tenemos una función continua $\theta : D \to \partial D$ dada por $\theta(y) = \phi_m(T(y),y)$. Si $|y| = c$, $\theta(y) = \phi_m(0,y) = y$ de hecho, θ es una retracción de D en su frontera, lo cual es imposible por el teorema 1.3.13 de preliminares. Esta contradicción establece la existencia de $(x_0,y_0,z_0) \in B$ tal que $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0$.

Para demostrar el resultado si sólo suponemos que $F \in C^1$, tomamos una sucesión de funciones en C^2, $\{F_k\}_1^\infty$ tal que $F_k \to F$ y $\nabla F_k \to \nabla F$ uniformemente en B cuando $k \to \infty$. Existe k_0 tal que las F_k satisface (1), (2), y (3) para $k \geq k_0$. Por lo anterior, existe $(x_k,y_k,z_k) \in B$ tal que $\nabla F_k(x_k,y_k,z_k) = 0$ si $k \geq k_0$. Si (x_0,y_0,z_0) es un punto límite de la sucesión $\{x_k,y_k,z_k\}_1^\infty$ entonces $\nabla F(x_0,y_0,z_0) = 0$ y la demostración está completa.

□

Capítulo 4

Landesman-Lazer vs Ahmad-Lazer-Paul

En este capítulo vamos a establecer relaciones entre condiciones clásicas de existencia para problemas resonantes no lineales. Definiremos las condiciones de Landesman-Lazer de una forma más general, por ejemplo no pediremos que existan los límites de g en infinito. Compararemos las condiciones de Landesman-Lazer con las ya vistas en el capítulo anterior dadas por Ahmad-Lazer-Paul para un problema semilineal elíptico del tipo

$$Lu = f(x, u)$$

donde L es un operador diferencial lineal con núcleo no trivial. Luego daremos una caracterización de las condiciones de Landesman-Lazer que permitirán probar, en un conjunto muy general, el resultado principal de este capitulo

$$L - L \text{ implica } A - L - P.$$

4.0.1. Condiciones de L-L y A-L-P

Para fijar ideas, sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ con frontera suave,
y $L : D(L) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ un operador lineal con resolvente compacta. Supongamos que $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está acotada en L^2, i.e, existe $h \in L^2(\Omega)$ tal que

$$|f(x, s)| \leq h(x),$$

para casi todo $x \in \Omega$ y todo $t \in \mathbb{R}$. Sea G una primitiva de f en la segunda variable, i.e,

$$G(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$$

Compararemos las condiciones de Landesman-Lazer:
(LL) para todo $v \in Ker(L) \backslash \{0\}$,

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f(x,t)v(x)dx + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x)dx > 0,$$

con las condiciones de Ahmad-Lazer-Paul:
(A-L-P) para $v \in Ker(L)$,

$$\lim_{||v||_2\to+\infty} \int_\Omega G(x,v(x))dx = +\infty.$$

Usamos la notación

$$\{v > 0\} = \{x \in \Omega / v(x) > 0\}, \ \ \{v < 0\} = \{x \in \Omega / v(x) < 0\}.$$

A partir de ahora trabajaremos en el siguiente contexto:

Sea (Ω, μ) un espacio de medida σ-finita (en las aplicaciones, usualmente Ω es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue). Para abreviar, diremos "medible" en lugar de μ-medible, y $L^q(\Omega)$ en lugar de $L^q(\Omega, d\mu)$.

Sea $f : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ una funcion Caratheodory, es decir:

- $x \mapsto f(x,t)$ es medible para todo $t \in \mathbb{R}$;
- $t \mapsto f(x,t)$ es continua para casi todo $x \in \Omega$;
- para todo $R > 0$, existe $\eta_R \in L^1(\Omega)$ tal que, para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \in R$ con $|t| < R$,
$$|f(x,t)| \leq \eta_R(x),$$

y sean $p, q \in [1, +\infty]$ exponentes conjugados, es decir,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Suponemos que existe $d > 0$ y una función no negativa $h \in L^q(\Omega)$ tal que, para casi todo $x \in \Omega$,

$$|t| \geq d \Rightarrow sgn(t)f(x,t) \geq -h(x) \tag{4.1}$$

Sea $\Sigma \subset L^p(\Omega)$ que satisface las siguientes propiedades:

- si $u \in \Sigma$, y $\lambda > 0$, entonces $\lambda u \in \Sigma$;
- $\Sigma \cap S_1$ es compacto en $L^p(\Omega)$, donde $S_1 = \{u \in L^p(\Omega)/||u||_p = 1\}$.

Así, tanto en las condiciones de L-L como en las de A-L-P tomaremos Σ en vez de $KerL$.

Observación La condición (4.1) garantiza que las integrales que aparecen en (LL) están bien definidas, con valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

4.0.2. Caracterización de las condiciones de L-L

En esta sección empezaremos con un lema que luego utilizaremos en la demostración de una proposición que caracteriza las condiciones de $(L - L)$.

Como Ω es σ-finito, existe una familia $\{K_m\}m \in \mathbb{N}$ de subjconjuntos de Ω medibles, tal que

- $\mu(K_m) < +\infty$, para todo $m \in \mathbb{N}$;
- $K_m \subset K_{m+1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$
- $\cup_{M\in\mathbb{N}} Km = \Omega$

Definimos, para todo $m \in \mathbb{N}$, la función de truncamiento $\zeta_m : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\zeta_m(x) = m\chi_{K_m}(x) \tag{4.2}$$

Observación Para todo $m \in \mathbb{N}$, ζ_m pertenece a $L^q(\Omega)$, para todo $q \geq 1$.

Antes de dar la Proposición que caracteriza las condiciones de Landesman-Lazer, daremos un Lema previo. El siguiente Lema dice que si f satisface las condiciones de Landesman-Lazer, entonces estas también son satisfechas por algún truncamiento adecuado de f.

Lema 4.0.1 *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}$ satisfaciendo la condicioón de (LL), definimos*

$$f_m(x,t) = \begin{cases} \text{mín} \, f(x,t), \zeta_m(x) \;\; si \; t > 0 \\ 0 \quad si \; t = 0 \\ \text{máx} \, f(x,t), -\zeta_m(x) \;\; si \; t < 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

entonces existe $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tal que, $m \geq \overline{m}$ y todo $v \in \Sigma - 0$,

$$\int_{\{v<0\}} \liminf_{t \to +\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t \to -\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu > 0 \tag{4.4}$$

<u>*Demostración*</u>: Demostraremos el resultado para todo $v \in \Sigma \cap S_1$,ya que el sumando izquierdo de (4.4) es positivo, homogeneo de grado 1 con respecto a v. De esta forma, supondremos que $||v||_p = 1$.

Como $f(x,t) = \text{lím}_{m \to +\infty} f_m(x,t)$ para casi todo $x \in \Omega$ y todo $t \in \mathbb{R} - \{0\}$,(este límite es monótono -creciente si $t > 0$ y decreciente si $t < 0$-), podemos reescribir las condiciones de (LL) de la siguiente manera

$$\int_{\{v>0\}} \left(\liminf_{t \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} f_m(x,t) \right) v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \left(\limsup_{t \to -\infty} \lim_{m \to +\infty} f_m(x,t) \right) v(x)d\mu > 0 \tag{4.5}$$

Veamos que se pueden intercambiar el limite inferior y el límite bajo la integral en el sumando izquierdo de la desigualdad. Primero de todo, como $f_m(x,t) \leq f(x,t)$ para casi todo $x \in \Omega$ y todo $t > 0$, se ve fácilmente que

$$\lim_{m \to +\infty} \liminf_{t \to +\infty} f_m(x,t) \geq \liminf_{t \to +\infty} \lim_{m \to +\infty} f_m(x,t).$$

Para ver la otra desigualdad, luego de haber observado que, por (4.1) $\liminf_{t \to +\infty} f(x,t) > -\infty$ para casi todo $x \in \Omega$, vamos a considerar los siguientes dos casos

<u>*Caso 1*</u>: Si $x \in \Omega$ es tal que $\liminf_{t\to+\infty} f(x,t) = +\infty$. Entonces, fijado $K > 0$ existe t_K tal que, si $t \geq t_K$, entonces $f(x,t) \geq K$. Por otra parte existe $m_K \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_m$ para todo $m \geq m_x$. Para todo $m \geq \max K, m_k$, $f_m(x,t) \geq K$, para todo $t \geq t_K$, por lo cual $\liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) \geq K$, así,

$$\lim_{m\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) = +\infty$$

<u>*Caso 2*</u>:Si $x \in \Omega$ es tal que $\liminf_{t\to+\infty} f(x,t) = l \in \mathbb{R}$. Entonces, fijado $\epsilon > 0$, existe t_ϵ tal que si $t \geq t_\epsilon$, entonces $f(x,t) \geq l - \epsilon$. Por otra parte existe $m_x \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_m$, para todo $m \geq m_x$. Para todo $m \geq \max\{l, m_x\}$, tenemos que $g_m(x,t) \geq l - \epsilon$, para todo $t \geq t_\epsilon$, entonces $\liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) \geq l - \epsilon$, de lo que se deduce que

$$\lim_{m\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) \geq l$$

Por lo tanto

$$\lim_{m\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) = \liminf_{t\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} f_m(x,t).$$

De forma análoga, es posible mostrar que el límite superior y el límite se pueden intercambiar bajo el signo de la integral

De acuerdo a (4.5),

$$\int_{\{v>0\}} \left(\lim_{m\to+\infty} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) \right) v(x) d\mu +$$
$$+ \int_{\{v<0\}} \left(\lim_{m\to-\infty} \limsup_{t\to+\infty} f_m(x,t) \right) v(x) d\mu > 0.$$

La dos sucesiones $(\liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t))_m$ y $\left(\limsup_{t\to+\infty} f_m(x,t)\right)_m$, consideradas en su dominio de integración, $\{v > 0\}$ y$\{v < 0\}$, respectivamente, son monótonas decrecientes. Por otro lado están acotadas inferiormente por funciones L^1, $-h(x)v(x)$ y $h(x)v(x)$, respectivamente.

Por el Teorema de Convergencia Monótona

$$\lim_{m\to+\infty} \left(\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f_m(x,t) v(x) d\mu \right) > 0.$$

Por lo tanto, para todo $v \in \Sigma \cap S_1$, existe $M_v \in \mathbb{N}$ tal que , para todo $m \geq M_v$,

$$I_m := \int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu > 0$$

Elegimos $M \geq M_v$ y consideramos

$$f_+(x) = \liminf_{t\to+\infty} f_M(x,t), \quad f_-(x) = \limsup_{t\to-\infty} f_M(x,t)$$

Observar que f_+ y f_- pertenecen a $L^q(\Omega)$: esto es similar a lo de antes, en realidad, es cierto para casi todo $x \in \Omega$,

$$-h(x) \leq f_+(x) \leq \zeta_M(x)), \quad -\zeta_M(x) \leq f_-(x) \leq \zeta_M(x).$$

Ahora queremos ver que $I_M : L^P(\Omega) \to \mathbb{R}$ es continua en v. Para ello, tomemos una sucesión $(v_n)_n$ tal que $v_n \to v$ en $L^p(\Omega)$ y probemos que $I_M(v_n) \to I_M(v)$, para ello fijemos la siguiente notación,

$$A_j^+ = \{v_j \geq 0\} \quad A_j^- = \{v_j < 0\}$$

$$A^+ = \{v \geq 0\} \quad A^- = \{v < 0\}.$$

Tenemos que

$$I_M(v_j) - I_M(v) = \Gamma_{1,j} + \Gamma_{2,j} + \Gamma_{3,j} + \Gamma_{4,j}$$

donde

$$\Gamma_{1,j} = \int_{A_j^+\cap A^+} f_+(x)(v_j(x) - v(x))d\mu$$

$$\Gamma_{2,j} = \int_{A_j^-\cap A^-} f_-(x)(v_j(x) - v(x))d\mu$$

$$\Gamma_{3,j} = \int_{A_j^-\cap A^+} (f_-(x)v_j(x) - f_+(x)v(x))d\mu$$

$$\Gamma_{4,j} = \int_{A_j^+\cap A^-} (f_+(x)v_j(x) - f_-(x)v(x))d\mu$$

Cuando $j \to +\infty$, por la Desigualdad de Hölder, como $v_j \to v$ en $L^p(\Omega)$ entonces, $\Gamma_{1,j}$ y $\Gamma_{2,j}$ tienden a cero. Analicemos a que tiende $\Gamma_{3,j}$; para toda subsucesión de $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ existe una subsuceción, que llamaremos $\{v_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, tal que $v_j(x) \to v(x)$ para casi todo $x \in \Omega$.De este modo, por el Teorema de Convergencia Mayorada tenemos que

$$\int_{A_j^- \cap A^+} f_+(x)v(x)d\mu \to 0,$$

dado que $\chi_{A_j^- \cap A^+} \to 0$ para casi todo $x \in \Omega$. Por tro lado,

$$\int_{A_j^- \cap A^+} f_-(x)v_j(x)d\mu = \int_{A_j^- \cap A^+} f_-(x)(v_j(x) - v(x))d\mu + \int_{A_j^- \cap A^+} f_-(x)v(x)d\mu,$$

por argumentos similares vemos que

$$\int_{A_j^- \cap A^+} f_-(x)v_j(x)d\mu \to 0.$$

Esto muestra que $\Gamma_{3,j} \to 0$ cuando $j \to +\infty$. De forma análoga se prueba que $\Gamma_{3,j} \to 0$.

Por lo tanto, la continuidad de I_M queda probada,de este hecho se sigue que existe $\delta > 0$ tal que $I_M(w) > 0$ para $||w - v||_p < \delta$,, es decir

$$\int_{\{w>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t)w(x)d\mu + \int_{\{w<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f_m(x,t)w(x)d\mu > 0.$$

Así, como por hipótesis, $\Sigma \cap S_1$ es compacto en $L^p(\Omega)$, será posible encontrar un $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $v \in \Sigma \cap S_1$,

$$I_{\overline{m}}(v) = \int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f_{\overline{m}}(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f_{\overline{m}}(x,t)v(x)d\mu > 0.$$

Faltaría probar que 4.4 es cierto para todo $m \geq \overline{m}$ pero esto es una consecuencia del Teorema de Monotonía de los integrandos con respecto a m.

$\square$

Ahora vamos a dar la proposición que caracteriza las condiciones de Landesman-Lazer.

Proposición 4.0.2 *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *f satisface (LL);*
2. *existe $\overline{\eta} > 0$, $R \geq d$ y $\psi_-, \psi_+ \in L^q(\Omega)$ tal que*

- *$f(x,t) \geq \psi_+(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \geq R$;*
- *$f(x,t) \geq \psi_-(x)$ para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \leq -R$;*
- *para todo $v \in \Sigma$*

$$\int_{\{v>0\}} \psi_-(x)v(x) + \int_{\{v<0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu \geq \overline{\eta}||v||_p. \tag{4.6}$$

Por otra parte, existe $M > 0$ tal que

$$-h(x) \geq \psi_+(x) \geq M, \quad -M \geq \psi_-(x) \geq h(x),$$

para casi todo $x \in \Omega$, y si $x \in \Omega \backslash K_M$, entonces $\psi_+(x) \leq 0$ y $\psi_- \geq 0$.

<u>*Demostración*</u>: Por la homogeneidad positiva de ambos lados de (4.6) con respecto a v, sin perdida de generalidad podemos suponer que $||v||_p = 1$.

1) $\Rightarrow$ 2): Supongamos que se cumple (LL). Por el Lema (4.4), usando la misma notación, existe $\overline{m} \in \mathbb{N}$ tal que , para todo $m \geq \overline{m}$ y todo $v \in \sigma - \{0\}$,

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f_m(x,t)v(x)d\mu$$

es decir,

$$\int_{\{v>0\}} \left(\lim_{n\to+\infty} \inf_{t\geq n} f_m(x,t)\right) v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \left(\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\leq -n} f_m(x,t)\right) v(x)d\mu > 0.$$

Fijemos $M \geq \overline{m}$ y consideremos

$$\gamma_n^+(x) = \inf_{t\geq n} f_M(x,t), \quad \gamma_n^-(x) = \sup_{t\leq -n} f_M(x,t).$$

Observar que, para todo $n \geq d$, γ_n^+ y γ_n^- pertenecen a $L^q(\Omega)$, ya que, para casi todo $x \in \Omega$,

$$-h(x) \leq \gamma_n^+ \leq M, \quad -M \leq \gamma_n^- \leq h(x).$$

En sus dominios de integración, $\{v > 0\}$ y $\{v < 0\}$, respectivamente, las sucesiones de funciones L^1 $(\gamma_n^+ v)_{n \geq d}$ y $(\gamma_n^- v)$ son monótonas decrecientes, y acotadas inferiormente por funciones L^1 $-hv$ y hv respectivamente. Por el teorema de convergencia monótona,

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{\{v>0\}} \gamma_n^+(x) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \gamma_n^-(x) v(x) d\mu \right) =$$

$$= \int_{\{v>0\}} \lim_{n \to +\infty} \gamma_n^+(x) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \lim_{n \to +\infty} \gamma_n^-(x) v(x) d\mu$$

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t \to +\infty} f_M(x,t) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t \to -\infty} f_M(x,t) v(x) d\mu > 0$$

Esta desigualdad vale para todo $v \in \Sigma \cap S_1$, entonces, existe $\eta_v > 0$ y $N_v \in \mathbb{N}$, con $N_v \geq d$, tal que, para todo $n \geq N_v$,

$$J_n := \int_{\{v>0\}} \gamma_n^+(x) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \gamma_n^-(x) v(x) d\mu \geq \eta_v.$$

Tomamos $N \geq N_v$, con el mismo razonamiento que en la demostración del Lema (4.4), podemos mostrar que $J_N : L^p(\Omega) \to \mathbb{R}$ es continua. Por lo tanto, existe $\delta > 0$ tal que, si $||w - v||_p \geq \delta$,

$$\int_{\{w>0\}} \gamma_N^+(x) w(x) d\mu + \int_{\{w<0\}} \gamma_N^-(x) w(x) d\mu \geq \frac{\eta_v}{2}.$$

Como $\Sigma \cap S^1$ es compacto, es posible encontrar $\overline{n} \in \mathbb{N}$, con $\overline{n} \geq d$, y $\overline{\eta} > 0$ tal que, para todo $v \in \Sigma \cap S_1$,

$$\int_{\{v>0\}} \gamma_{\bar{n}}^+(x) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \gamma_{\bar{n}}^-(x) v(x) d\mu \geq \overline{\eta}.$$

De este modo, si

$$\psi_+(x) = \gamma_{\bar{n}}^+, \quad \psi_-(x) = \gamma_{\bar{n}}^-,$$

la demostración se completa fácilmente, tomando $R = \overline{n}$.

2) $\Rightarrow$ 1): Dado que

$$f(x,t) \geq \psi_+(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \geq R$. Si tomamos $\liminf_{t\to+\infty}$ vale que

$$\liminf_{t\to+\infty} f(x,t) \geq \psi_+(x)$$

multipliquemos por $v(x)$ sobre el dominio $\{v > 0\}$, nos queda

$$\liminf_{t\to+\infty} f(x,t)v(x) \geq \psi_+(x)v(x)$$

integrando sobre $\{v > 0\}$

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f(x,t)v(x)d\mu \geq \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu.$$

Siguiendo el mismo razonamiento,veamos que

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x)d\mu \geq \int_{\{v<0\}} \psi_-(x)v(x)d\mu.$$

Por hipótesis sabemos que

$$f(x,t) \leq \psi_-(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \leq -R$ entonces

$$\limsup_{t\to-\infty} f(x,t) \leq \psi_-(x)$$

multiplicando por $v(x)$ sobre el dominio $\{v < 0\}$ nos queda

$$\limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x) \geq \psi_-(x)v(x)$$

integrando sobre $\{v < 0\}$

$$\int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x)d\mu \geq \int_{\{v<0\}} \psi_-(x)v(x)d\mu.$$

Luego,

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x)d\mu$$
$$\geq \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \psi_-(x)v(x)d\mu.$$

Por otro lado tenemos que existe $\overline{\eta} > 0$ tal que para todo $v \in \Sigma$

$$\int_{\{v>0\}} \psi_-(x)v(x) + \int_{\{v<0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu \geq \overline{\eta}||v||_p$$

de este modo , si consideramos $v \in \Sigma\backslash\{0\}$

$$\int_{\{v>0\}} \psi_-(x)v(x) + \int_{\{v<0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu > 0.$$

Por lo tanto,

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{t\to+\infty} f(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{t\to-\infty} f(x,t)v(x)d\mu > 0,$$

y esto concluye la demostración. □

4.0.3. El Teorema Principal. ¿L-L o A-L-P?

En esta sección veremos el teorema principal de este capítulo. Dicho teorema nos determinará cuál de las dos condiciones es más general.

Teorema 4.0.3 *(LL) implica (ALP)*

Demostración: Sea $v \in \Sigma\backslash\{0\}$ y consideramos

$$\Omega_v^+ = \{x \in \Omega / v(x) > R\},$$
$$\Omega_v^- = \{x \in \Omega / v(x) < -R\},$$
$$\Omega_v^0 = \{x \in \Omega / -R \leq v(x) \leq R\},$$

donde $R > 0$ es el dado por la Proposición 4.4. Escribiendo

$$\int_\Omega G(x,v(x))d\mu = \int_{\Omega_v^+} G(x,v(x))d\mu + \int_{\Omega_v^-} G(x,v(x))d\mu + \int_{\Omega_v^0} G(x,v(x))d\mu,$$

consideremos cada término por separado. Notar que, en el primer término, usando la notación de la Proposición 4.4, tenemos que $f(x,t) \leq \psi_+(x) \leq 0$ para $t > R$, y $|f(x,t)| \leq \eta_R(x)$ para $|t| \leq R$, pues supusimos que f es Carathéodory. Por otra parte, recordando que $\psi_+(x) \leq M$ para casi todo $x \in \Omega$ y $\psi_+(x) \leq 0$ para casi todo $x \in \Omega \backslash K_M$,

$$\begin{aligned} G(x,v(x)) &= \int_0^R f(s,x)ds + \int_R^{v(x)} f(s,x)ds \\ &\geq -R\eta_R(x) + (v(x)-R)\psi_+(x) \\ &\geq -R\eta_R(x) + v(x)\psi_+(x) - R\psi_+(x)\chi_{K_M}(x) \\ &\quad -R\eta_R(x) + v(x)\psi_+(x) - RM\chi_{K_M}(x), \end{aligned}$$

para casi todo $x \in \Omega_v^+$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_v^+} G(x,v(x))d\mu &\geq -R||\eta_R||_1 + \int_{\Omega_v^+} \psi_+(x)v(x)d\mu - RM\mu(K_M) \\ &= -R(||\eta_R||_1 + M\mu(K_M)) + \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu - \int_{\{0<v(x)\leq R\}} \psi_+(x)v(x)d\mu \\ &\geq -R(||\eta_R||_1 + M\mu(K_M)) + \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu - \int_{\{0<v(x)\leq R\}\cap K_M} \psi_+(x)v(x)d\mu \\ &\geq -R(||\eta_R||_1 + M\mu(K_M)) + \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu - \int_{\{0<v(x)\leq R\}\cap K_M} Mv(x)d\mu \\ &\geq -R(||\eta_R||_1 + 2M\mu(K_M)) + \int_{\{v>0\}} \psi_+(x)v(x)d\mu \end{aligned}$$

Por otro lado, haciendo una cuenta similar tenemos que

$$\int_{\Omega_v^-} G(x,v(x))d\mu \geq -R(||\eta_R||_1 + 2M\mu(K_M)) + \int_{\{v<0\}} \psi_-(x)v(x)d\mu,$$

mientras que,

$$\int_{\Omega_v^0} G(x, v(x))d\mu = \int_{\Omega_v^0} \int_0^{v(x)} f(s, x)dsd\mu \geq -R||\eta_R||_1.$$

En resumen, usando (4.4), tenemos que

$$\int_\Omega G(x, v(x))d\mu \geq \overline{\eta}||v||_p - R[3||\eta_R||_1 + 4M\mu(K_M)],$$

donde $\overline{\eta} > 0$ es el dado por la Proposición 4.4.

$\square$

4.0.4. Observaciones sobre el Teorema

En el Teorema anterior no pusimos ninguna hipótesis de monotonía sobre f. La siguiente proposición nos dice que si f es monóntona, tenemos una equivalencia entre (LL) y (ALP).

Proposición 4.0.4 *Si f(x,t) es no decreciente en t, para casi todo $x \in \Omega$. Entonces (LL) y (ALP) son equivalentes.*

Demostración: El Teorema 2,1 nos da una de las implicaciones, sólo resta ver que (ALP) implica (LL). Lo vamos a probar por el contrarrecíproco.

Supongamos que no se satisface (LL). De este modo, existe $v \in \Sigma\backslash\{0\}$ tal que

$$\int_{\{v>0\}} \liminf_{s\to+\infty} f(x,t)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \limsup_{s\to-\infty} f(x,t)v(x)d\mu \leq 0;$$

tomando, $f_+(x) = \lim_{s\to+\infty} f(x,t)$, y $f_-(x) = \lim_{s\to-\infty} f(x,t)$, la desigualdad anterior se convierte en

$$\int_{\{v>0\}} \lim_{s\to+\infty} f_+(x)v(x)d\mu + \int_{\{v<0\}} \lim_{s\to-\infty} f_-(x)v(x)d\mu \leq 0$$

Mostremos que la función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, definida por

$$F(\lambda) = \int_\Omega G(\lambda v(x), x)d\mu = \int_\Omega \int_0^{\lambda v(x)} f(s, x)ds,$$

es no positiva para $\lambda > 0$. De hecho, como para casi todo $x \in \Omega$, y todo $t \in \mathbb{R}$,

$$f_-(x) \leq f(x,t) \leq f_+(x),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\{v>0\}} \int_0^{\lambda v(x)} f(s,x) ds d\mu + \int_{\{v<0\}} \int_0^{\lambda v(x)} f(s,x) ds d\mu \\ &\leq \lambda \int_{\{v>0\}} f_+(x) v(x) d\mu + \lambda \int_{\{v<0\}} f_-(x) v(x) d\mu \leq 0. \end{aligned}$$

De este modo, $\limsup_{\lambda \to +\infty} F(\lambda) \leq 0$, por lo tanto, no sucede (ALP).

$\square$

Observación 4.0.5 *Para los resultados vistos en este capítulo, no fue necesario suponer que Ω sea un conjunto acotado, de hecho, Ω es un espacio arbitrario de medida σ-finita y más aún, en nuestro marco de estudio pueden ser admitidos operadores diferenciales y no linealidades más generales.*

Observación 4.0.6 *Usamos un subespacio lineal más general que el Núcleo de L, sólo necesitamos un cono Σ, con ciertas propiedades de compacidad.*

Observación 4.0.7 *Se puede afirmar un resultado simétrico con respecto al Teorema 4.0.3 si se tienen en cuenta las siguientes condiciones:*

(LL') *para todo $v \in \Sigma \backslash \{0\}$*

$$\int_{\{v>0\}} \limsup_{t \to +\infty} f(x,t) v(x) d\mu + \int_{\{v<0\}} \liminf_{t \to +\infty} f(x,t) v(x) d\mu < 0,$$

(ALP') *para $v \in \Sigma$,*

$$\lim_{||v||_p \to +\infty} \int_\Omega G(x, v(x)) d\mu = -\infty.$$

Bibliografía

[1] Ahmad S.,Lazer A.C., Paul J.L., *Elementary critical point and perturbations of elliptic boundary value problems at resonance*,Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 933-944.

[2] Amster P.,*Métodos Topológicos en el Análisis no Lineal* publicações matemáticas, IMPA (2009)

[3] Arcoya D., Orsina L. , *Landesman-Lazer conditions and quasilinear elliptic equations.*(1996)

[4] Brenner S. C.,Ridgway Scott L., *The mathematical theory of finite element methods*Springer-Verlang, (1994), New York.

[5] Brézis H. (1996), *Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid (1984)

[6] Evans L.C., *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics, 19 (1998), American Mathematical Society.

[7] Fonda A., Garrione M., *Nonlinear resonance a comparison between Landesman-Lazer and Ahmad-Lazer-Paul*,(1991),

[8] Hess P., *On a theorem by Landesman Lazer*, Indiana Univ. Math. J. 23(1974), 827-830

[9] Landesman E. M. y Lazer A., *Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance.* J. Math. Mech. 19 (1970), 609-623.

[10] Lazer A. C.,Leach D. E., *Bounded perturbations of forced harmonic oscillators at resonance*, Ann. Mat. Pura Appl. 82 (1969), 49-68.