UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

El cálculo estocástico en la valuación de activos financieros

Javier Ignacio Almarza

Director: Nicolas Saintier

Codirector: Pablo Amster

Fecha de Presentación: 29/12/2011

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En los mercados financieros se compran y venden títulos o activos, que pueden ser acciones de empresas, bonos emitidos por el gobierno de un país y otros. En algunos casos, el tenedor del título tiene asegurado un pago fijo (proporcional a las unidades del activo adquirido) en un período de tiempo determinado. Tal es el caso de los bonos de un Estado considerado «seguro», como los bonos de la Reserva Federal de los EEUU. En tal caso, el precio del bono simplemente reflejará el «valor presente» de ese pago fijo futuro, donde el concepto de «valor presente» descuenta al pago futuro una tasa de descuento temporal que refleja el «valor-tiempo» del dinero, es decir, el hecho de que valoramos más una suma fija hoy que dentro de un año. Por ejemplo, si mi pago fijo dentro de un año es X y la tasa de descuento es $r > 0$, el valor presente de ese pago futuro será

$$\text{Valor presente} = \frac{X}{1+r}$$

Para este tipo de activos, las variaciones en su precio se deben sólo a las variaciones en la tasa de descuento r, pues el pago futuro es fijo. Por eso se dice que son activos «sin riesgo».

Existe además otro tipo de activos cuyo valor está asociado a variables del mundo real que fluctúan de manera imprevisible. Por ejemplo, el valor de las acciones de una empresa dependerá en parte de los dividendos futuros que ésta reportará al dueño de las acciones, y estos dependerán de todas las variables que puedan afectar la estructura de costos de sus productos o la demanda de los mismos. De manera análoga, el precio de bonos de países emergentes que pueden hacer *default* es sensible a aumentos en déficit fiscal que hagan dudar de la capacidad de pago futura del gobierno. Por eso mismo, estos activos se dicen «riesgosos».

Un primer problema para el modelado matemático de los mercados financieros consiste en representar adecuadamente las oscilaciones en el valor de este tipo de activo, que son desconocidas de antemano por los inversores y que por eso harán necesario recurrir a la teoría de probabilidades y de procesos estocásticos.

Pero además existe otro objetivo para la matemática financiera. Desde fines del siglo XIX han ido creciendo la compra y venta de una familia particular de activos riesgosos: las opciones. Las opciones son instrumentos que garantizan al comprador la posibilidad de un contrato futuro. Por ejemplo, una opción de venta (europea) de una acción a un precio fijo P garantiza al comprador de la opción el derecho a celebrar un contrato de venta al precio P, es decir, le da el derecho de venderle esa acción al vendedor de la opción al precio P en un tiempo futuro también fijado en el contrato, lo cual le reportará una ganancia al comprador de la opción si el precio futuro es menor al del contrato. Análogamente, una opción de compra europea sobre una acción da el derecho a quien la posee a comprar la acción en un tiempo futuro fijado al precio que estipula el contrato de la opción. Los análogos de «americanos» de estas opciones permiten a su tenedor ejercer el contrato no sólo en el momento futuro establecido por el contrato, sino también en cualquier momento anterior al mismo (y posterior a la compraventa de la opción, claro).

Este tipo de activos que son «derivados» de otros (en el ejemplo dado, son derivados de una acción, que se considera el «activo subyacente») presentan un problema para su valuación. Es decir, no queda claro para los compradores y vendedores *prima facie* qué precio estarían dispuestos a pagar o aceptar por ellos.

Fue este problema el que dio impulso a las matemáticas financieras. Si bien existieron estudios previos en el modelado matemático de los activos financieros por parte de Bachelier y Samuelson, el área cobró importancia a partir de los trabajos de Fisher Black, Myron Scholes y Robert Merton entre 1970 y 1973 [6, 1], que culminaron con una fórmula para la valuación de la opción de compra o *call* europea. Esta fórmula se ajustaba notablemente bien a los precios que efectivamente se usaban hasta entonces para ese tipo de transacciones, lo que representó un triunfo para el modelado matemático de las finanzas. A partir de allí y del descubrimiento de la importancia de la llamada «medida martingala equivalente» varios matemáticos se dedicaron al área, la cual ha crecido exponencialmente en las tres últimas décadas.

El objetivo de la tesis es presentar de manera rigurosa los resultados de valuación de opciones luego de haber desarrollado el modelado estocástico de un mercado financiero. Los capítulos 6 y 5, respectivamente, se encargarán de eso.

Antes se deberán establecer las herramientas del cálculo estocástico que permite integrar sobre procesos y de las ecuaciones diferenciales estocásticas, lo que se hará en los capítulos 3 y 4.

En primer lugar, serán necesarias ciertas nociones preliminares de la teoría de procesos estocásticos, sin apelar a más conocimientos previos que los de un primer curso de Medida y Probabilidad. Esto se hará en el siguiente capítulo.

Capítulo 2

Nociones de Procesos Estocásticos

El concepto de un «proceso estocástico» generaliza la idea de aleatoriedad o estocacicidad de una variable fija en el tiempo a una que cambia a lo largo del tiempo (de ahí la palabra «proceso»). La siguiente definición precisa esta idea.

Definición 2.1. Dado (Ω, Σ, P) espacio de probabilidad y un conjunto índice I, un *proceso estocástico* es una familia de variables aleatorias $\{X_t\}_{t \in I}$.

En general $I = \mathbb{N}_0$ o $I = \mathbb{R}_{>0}$ representa un conjunto de «tiempos». Nosotros trabajaremos con $I = \mathbb{R}_{>0}$, que es el caso de procesos de «tiempo continuo» y en general notaremos al proceso con el subíndice: X_t.

Nos interesa poder modelar el valor de un activo «riesgoso», es decir, un valor X_t que tenga oscilaciones no determinísticas que no dependan de la tasa de descuento r. Si el valor de un activo sin riesgo (digamos, el valor de un plazo fijo) crece siguiendo una ley

$$\Delta Y_t = r Y_t \Delta t$$

donde r es la tasa a la que fue colocado, entonces creemos, en principio, que el valor de X_t seguiría una regla informal del tipo

$$\Delta X_t = \alpha_t \Delta t + \beta_t \cdot \text{ «ruido»}$$

es decir, que seguiría una regla dinámica que no sólo lo haga variar en función del valor-tiempo del tiempo transcurrido sino que además incorpore un término aleatorio que representa un «ruido» (noción importada por la Economía del «ruido blanco» de la teoría de señales), es decir, oscilaciones (debidas, por ejemplo, a movidas puramente especulativas o a anuncios de un gobierno que alteren la confianza en su capacidad de pago) que en un «largo plazo» se compensan, es decir, que tienen media cero y que, además, para intervalos fijos de tiempo no dependen del tiempo en que se hacen ni de las oscilaciones previas. Esto debería modelarse con un término $Y_t \Delta t$, donde Y_t es un proceso que satisface las siguientes propiedades:

(i) Si $t_1 \neq t_2$ entonces Y_{t_1} y Y_{t_2} son independientes

(ii) $\{Y_t\}$ es estacionario, o sea, la distribución conjunta de $(Y_{t_1+h}, ..., Y_{t_k+h})$ no depende de h para cualquier $h \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $E[Y_t] = 0$ para todo t

El problema es que se puede demostrar que un tal proceso no sería «razonable»: con probabilidad 1 no sería continuo y, si requerimos que tenga varianza finita, ni siquiera sería medible. Para cambiar el enfoque, entonces buscaremos un proceso V_t tal que $Y_{t_k}\Delta t_k = \Delta V_{t_k}$. De algún modo, el anterior proceso Y_t representaría las diferencias finitas del nuevo proceso V_t, por lo que le pediremos a los incrementos de éste propiedades análogas a las que le pedíamos al anterior:

(i) Si $0 \leq t_1 < ... < t_n$ entonces $V_{t_2} - V_{t_1}, V_{t_3} - V_{t_2}, ..., V_{t_n} - V_{t_{n-1}}$ son independientes

(ii) Si $0 \leq t_1 < ... < t_n$ entonces $(V_{t_2+h} - V_{t_1+h}, V_{t_3+h} - V_{t_2+h}, ..., V_{t_n+h} - V_{t_{n-1}+h})$ tiene la misma distribución conjunta que $(V_{t_2} - V_{t_1}, V_{t_3} - V_{t_2}, ..., V_{t_n} - V_{t_{n-1}})$ para cualquier $h > 0$

(iii) $V_0 = 0$ casi seguramente

(iv) V tiene trayectorias continuas, o sea, para casi todo $w \in \Omega$, $V_t(w)$ es continuo

(v) $V_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

Estas condiciones definen un *proceso de Wiener* (también llamado «movimiento Browniano»). La última condición puede parecer relativamente *ad hoc* pero no lo es. Los procesos que satisfacen (i)-(iii) se llaman procesos de Levy y se puede demostrar que los únicos procesos de Levy con trayectorias continuas son los llamados procesos de Wiener con deriva constante, que se definen como procesos donde además de (i)-(iv) vale: (v') $V_t \sim \mathcal{N}(\mu t, t)$. Con lo cual lo único que agrega (v) es pedir que V_t tenga valor esperado 0.

La demostración de la existencia de un proceso que satisfaga (i)-(v) será omitida. En adelante, notaremos con B_t a los procesos de Wiener.

Demostraremos a continuación una de sus propiedades más importantes, que primero requiere su definición.

Definición 2.2. (a) Dado (Ω, Σ, P), una *filtración* es una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0} \subseteq \Sigma$ tal que si $s < t$ entonces $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}_t$

(b) Una *submartingala (supermartingala)* para la filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico M_t tal que:

(i) es *adaptado* a la filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$, o sea, para t fijo, M_t es $\mathcal{H}_t$-medible

(ii) $E[|M_t|] < \infty$ para todo t

(iii) para todo $s < t$, $E[M_t|\mathcal{H}_s] \geq (\leq) M_s$

(c) Una *martingala* para la filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso M_t que es a la vez submartingala y supermartingala (o sea, $E[M_t|\mathcal{H}_s] = M_s$ para todo $s < t$).

Teorema 2.1. Sea $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$ la filtración dada por $\mathcal{H}_t = \sigma(\{B_s\}; s \leq t)$, las σ-álgebras generadas por las variables aleatorias B_s para todo s fijo menor a t (se dice que esta filtración es *generada* por el proceso). Entonces B_t es una martingala para la filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$

Demostración. Veamos que satisface (i)-(iii) de (2.2). El punto (i) es trivial pues es la filtración generada por el proceso. Para (ii) basta recordar que, dado t fijo, B_t es una variable aleatoria normal, y éstas son integrables. Para (iii) recordemos que $B_t - B_s$ es independiente de $B_u - B_0 = B_u$ para todo $u \leq s$, luego lo es de $\mathcal{H}_s$, y recordemos que vale $E[Y|\mathcal{F}] = E[Y]$ si Y es independiente de $\mathcal{F}$. Entonces tenemos

$$E[B_t|\mathcal{H}_s] = E[B_t - B_s|\mathcal{H}_s] + E[B_s|\mathcal{H}_s] = E[B_t - B_s] + B_s = B_s$$

pues $E[B_t] = 0$ para todo t. $\square$

Los siguientes dos resultados fundamentales serán enunciados sin demostración (ver Teorema 3.11 de [8] y Teorema 1.2.3 de [10], respectivamente)

Teorema 2.2 (Teorema de descomposición de Doob-Meyer)**.** Sea S_t supermartingala para la filtración $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$. Entonces se admite la representación

$$S_t = M_t - A_t$$

donde M_t es una martingala para la misma filtración y A_t es un proceso no decreciente con $A(0) = 0$.

Teorema 2.3 (Desigualdad de Martingalas de Doob)**.** Sea M_t una martingala (respecto de alguna filtración) con trayectorias continuas. Entonces vale

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot E\left[M_t^2\right]$$

Comentario 2.1. Hasta ahora hablamos varias veces de «tener trayectorias continuas» para un proceso, sin embargo, debemos observar algo. Dado un proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ a tiempo continuo y su filtración generada $\mathcal{H}_t$, el conjunto

$$\{w: \ f(t) := X_t(w) \text{ es una función continua de } t\} \subseteq \Omega$$

no pertenece a $\mathcal{H}^\infty = \bigcup_{t\geq 0} \mathcal{H}_t$, básicamente, porque involucra una cantidad no numerable de conjuntos de la forma S_{t_k} con $S_{t_k} \in \sigma(X_{t_k})$. De hecho, se pueden construir dos procesos X_t, Y_t tales que $P(\{w: \ X_t(w) = Y_t(w)\}) = 1$ para todo t pero, para cada w fijo, $X_t(w)$ es continuo y $Y_t(w)$ no lo es. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 2.3. Sean dos procesos $(X_t)_{t\geq 0}$ y $(Y_t)_{t\geq 0}$, se dice que X_t es una *versión* de Y_t si $P(\{w: \ X_t(w) = Y_t(w)\}) = 1$ para todo t.

Para muchos procesos obtenidos como límites casi seguros o $L^2(P)$ de sucesiones de procesos continuos interesará saber que se puede elegir una versión continua de ese límite.

Agregamos ahora algunas definiciones que nos podrán ser de utilidad.

Definición 2.4. Dado $(\Omega, \Sigma, P, \{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0})$, un espacio de probabilidad con filtración o *filtrado*, definimos:

(a) Un *tiempo de parada* es una variable aleatoria $\tau : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\{w : \ \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{H}_t$

(b) Para un tiempo de parada τ tenemos la σ-álgebra asociada

$$\mathcal{H}_\tau = \{A \in \Sigma : \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{H}_t \text{ para todo } t\}$$

(c) Una *martingala local* para la filtración es un proceso estocástico M_t tal que:

(i) es adaptado a $\{\mathcal{H}_t\}_{t\geq 0}$

(ii) existe una sucesión de tiempos de parada τ_n tal que $\tau_n \to \infty$ casi seguramente y tal que $N_t^n = M_{min(t,\tau_n)}$ es una $\mathcal{H}_t$-martingala para todo n.

El siguiente resultado será utilizado ocasionalmente en el trabajo, por lo que lo presentamos sin demostración (ver Ejercicio 7.12 de [7])

Teorema 2.4. Toda martingala local acotada inferiormente casi seguramente es una supermartingala.

Volviendo al problema planteado anteriormente, querríamos poder escribir y dar sentido a una regla dinámica como

$$\Delta X_t = \alpha_t \Delta t + \beta_t \cdot \Delta B_t$$

en un tipo de ecuación diferencial

$$dX_t = \alpha_t dt + \beta_t dB_t$$

El problema es que el proceso de Wiener no tiene variación acotada sobre ningún intervalo finito[1], en particular, no es diferenciable. Sin embargo, a esa ecuación se le podría dar un sentido «integral». Si tomamos $0 = t_1 < ... < t_n = t$ y escribimos

$$\Delta X_k = \alpha_{t_k} \Delta t_k + \beta_{t_k} \cdot \Delta B_k$$

con $\Delta X_k = X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ y $\Delta B_k = B_{t_{k+1}} - B_{t_k}$, podríamos pensar en el límite de

$$X_{t_n} - X_{t_0} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{t_k} \Delta t_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{t_k} \cdot \Delta B_k$$

[1] Si definimos el proceso $V_t^p = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n |M_{t_k} - M_{t_{k-1}}|^p$ con P particiones de $[0,t]$, vemos que para $p = 1$ y para todo t, es infinito c.s.

cuando $\sup_k |\Delta t_k| \to 0$, que debería ser una expresión de la forma

$$X_t - X_0 = \int_0^t \alpha(s)ds + \text{“}\int_0^t \beta(s)dB_s\text{”}$$

donde las comillas se deben a que todavía debemos darle un sentido matemático riguroso al segundo sumando del lado derecho.

El cálculo de Itô que se desarrollará en el siguiente capítulo tratará este problema.

Capítulo 3

Integral de Itô y Fórmula de Itô

Presentamos en primer término la clase de funciones para las que se definirá la integral de Itô.

Definición 3.1. Sean (Ω, Σ, P) un espacio de probabilidad, $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0} \subseteq \Sigma$ la filtración generada por un proceso de Wiener $(B_t)_{t\geq 0}$, y $T \geq 0$. Llamamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(T, \mathcal{H})$ al subconjunto de las funciones medibles en $([0,\infty) \times \Omega, \mathcal{B} \times \Sigma)$ (donde $\mathcal{B}$ es la σ -álgebra de Borel) tales que:

(i) $f(t,w)$ es $\{\mathcal{H}_t\}$-adaptado, es decir, para cada t fijo $f(t,w)$ es $\mathcal{H}_t$-medible

(ii)$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = E(\int_0^T f(t,w)^2 dt) < \infty$ (o sea, $f \in L^2([0,\infty) \times \Omega)$ con la medida producto de Lebesgue y P)

Definiremos ahora la integral de Itô para un subconjunto (que resultará denso) de la clase anterior.

Definición 3.2. (i) Diremos que una función φ en $\mathcal{V}$ es *simple* si es de la forma $\varphi(t,w) = \sum_j e_j(w) \mathcal{X}_{[t_j, t_{j+1})}$ para una partición $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq T$.

(ii) Para una φ elemental defiminos su integral de Itô como $\int_0^T \varphi dB_t = \sum_j e_j(w) \Delta B_j$ con $\Delta B_j = B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w)$ (notemos que la integral es una variable aleatoria)

Comentario 3.1. Por la definición de $\mathcal{V}$ e_j es una v.a. $\mathcal{H}_{t_j}$-medible. Este punto no es menor. Ya dijimos que a un proceso de Wiener (en realidad, a cualquier martingala continua) para casi toda w no se le puede tomar una integral de Riemann-Stjeltes. Más aun, se da que si las e_j son una aproximación a una f en $\mathcal{V}$ de modo tal que $e_j = f(t_j*)$ con $t_j* \in [t_j, t_{j+1})$ la elección de t_j* altera el valor de la integral límite. La integral de Itô representará el caso $t_j* = t_j$ y este hecho está implícito en que e_j sea $\mathcal{H}_{t_j}$-medible. Existen otras integrales estocásticas, como la de Stratonovich, que representa el caso $t_j* = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$, y que dan como resultado un cálculo estocástico con propiedades distintas.

Teorema 3.1 (Isometría de Ito)**.** Sea $\varphi \in \mathcal{V}$ simple entonces

$$E\left[\left(\int_0^T \varphi\, dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T \varphi^2 dt\right]$$

Demostración. Sea $\varphi(t,w) = \sum_j e_j(w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}$. Notemos en primer lugar que

$$E[e_j e_i \Delta B_j \Delta B_i] = \delta_j^i E[e_j^2](t_{j+1} - t_j) \tag{3.1}$$

pues si $i \neq j$ podemos suponer sin perder generalidad que $i > j$ y entonces, como el proceso tiene incrementos independientes, ΔB_i es independiente de $\mathcal{H}_{t_i}$ (y por esto también independiente de ΔB_j, e_j, e_i, que son todos $\mathcal{H}_{t_i}$ medibles), por lo que

$$E[e_j e_i \Delta B_j \Delta B_i] = E[e_j e_i \Delta B_j]E[\Delta B_i] = 0$$

pues $E[\Delta B_i] = 0$. Además, para el caso i=j, tenemos que $E[(\Delta B_j)^2] = t_{j+1} - t_j$ y que ΔB_j es independiente de e_j por ser independiente de $\mathcal{H}_{t_j}$, de donde se sigue (3.1).

Por último, expandiendo en la definición y usando lo anterior tenemos

$$E\left[\left(\int_0^T \varphi\, dB_t\right)^2\right] = E\left[\sum_{j,i} e_j e_i \Delta B_j \Delta B_i\right] = \sum_{j,i} \delta_i^j E[e_j^2](t_{j+1} - t_j) =$$

$$E\left[\sum_j e_j^2(t_{j+1} - t_j)\right] = E\left[\int_0^T \varphi^2 dt\right]$$

$\square$

Probaremos ahora la densidad de las simples acotadas en $\mathcal{V}$, lo cual nos permitirá extender la definición de la integral de Itô.

Teorema 3.2. Sea $f \in \mathcal{V}$, entonces existe una sucesión de funciones simples y acotadas $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|f - \varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. **Paso 1.** Para $f \in \mathcal{V}$ acotada y con $f(\cdot, w)$ continua para w fijo definimos $\varphi_n(t,w) = \sum_j f(t_j, w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}(t)$ (con particiones de $[0,T]$ tales que $\sup_j \Delta t_j \to 0$ cuando $n \to \infty$). Vemos que φ_n está en $\mathcal{V}$ pues f lo está y además es acotada (pues f lo es) y simple. Como $f(\cdot, w)$ es continua, para cada w tenemos que

$$\int_0^T (f - \varphi_n)^2 dt \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Luego, por convergencia mayorada (por una constante) en $L^2(P)$, $E\left[\int_0^T (f-\varphi_n)^2 dt\right] = \|f-\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Paso 2. Para $g \in \mathcal{V}$ acotada definimos $f_n(t,w) = \int_0^t \psi_n(s-t)g(s,w)ds$ (con ψ_n función no negativa y continua en $\mathbb{R}$ con soporte en $[-\frac{1}{n},0]$ que integra 1). Como las ψ_n son aproximaciones de la identidad, para cada w tenemos que

$$\int_0^T (g-f_n)^2 dt \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Luego, como $f_n \leq M$ para M tal que $g \leq M$ tenemos por convergencia mayorada que $E\left[\int_0^T (g-f_n)^2 dt\right] = \|g-f_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Por otro lado, las f_n son continuas y acotadas por ser convoluciones de continua y acotada. También son medibles y se puede ver que son $\mathcal{H}_t$-adaptadas, por lo que están en $\mathcal{V}$. Entonces, usando el paso anterior para las f_n acotadas y continuas en t, tenemos una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$ de funciones simples y acotadas tales que $\|g-\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Paso 3. Para $h \in \mathcal{V}$ cualquiera tomamos

$$g_n(t,w) = \begin{cases} -n & \text{si} \quad h(t,w) < -n \\ h(t,w) & \text{si} \quad -n \leq h(t,w) \leq n \\ n & \text{si} \quad h(t,w) > n \end{cases}$$

Las g_n convergen puntualmente en t a h para cada w fijo. Luego, por convergencia mayorada (por h) en $L^2(P)$ tenemos que $E\left[\int_0^T (h-g_n)^2 dt\right] = \|h-g_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$ Es claro por otro lado que las g_n están en $\mathcal{V}$ por construcción pues h lo está. Además, son acotadas, por lo que pueden aproximarse por acotadas y simples por el paso anterior, de modo de hallar una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$ de funciones simples y acotadas tales que $\|h-\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$, lo que completa la demostración. □

Observación 3.1. Si tenemos dos sucesiones $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$ acotadas y simples tales que $\|f-\varphi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ y $\|f-\psi_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ para una $f \in \mathcal{V}$ entonces existe una función $h \in L^2(P)$ tal que $\int_0^T \varphi_n(t,w)dB_t \to h$ y $\int_0^T \psi_n(t,w)dB_t \to h$ en $L^2(P)$ cuando $n \to \infty$.

Demostración. Llamemos $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la sucesión que resulta de empalmar ambas sucesiones. Tenemos que $\|f-\sigma_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ y de esto se sigue que $E\left[\int_0^T (\sigma_n-\sigma_m)^2 dt\right] < \epsilon$ para $n, m \geq n_0$. Luego, por la Isometría de Ito,

$$E\left[\left(\int_0^T \sigma_n - \sigma_m dB_t\right)^2\right] < \epsilon$$

para $n, m \geq n_0$. Pero esto es decir que $\int_0^T \sigma_n dB_t$ es de Cauchy en $L^2(P)$. Por completitud existe h, el límite en $L^2(P)$ y por construcción h también es límite de $\int_0^T \varphi_n(t,w)dB_t$ y $\int_0^T \psi_n(t,w)dB_t$. $\square$

Esto habilita finalmente la siguiente definición.

Definición 3.3 (Integral de Itô)**.** Sea un proceso de Wiener $(B_t)_{t\geq 0}$ y $f \in \mathcal{V}$, definimos su integral de Itô respecto del proceso como

$$\int_0^t f(t,w)dB_t := \lim_{n\to\infty} \int_0^t \varphi_n(t,w)dB_t$$

para una sucesión $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|\varphi_n - f\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$ cuando $n \to \infty$ (la independencia del límite respecto de la elección de la sucesión está dada por la observación anterior).

Corolario 3.1 (Isometría de Itô)**.** Para todo $f \in \mathcal{V}$ vale

$$E\left[\left(\int_0^T f(t,w)dB_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f^2(t,w)dt\right] \tag{3.2}$$

Corolario 3.2. Si $f \in \mathcal{V}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{V}$ y $E\left[\int_0^T (f_n(t,w) - f(t,w))^2 dt\right] \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces

$$\int_0^T f_n dB_t \to \int_0^T f dB_t \quad \text{en } L^2(P) \text{ cuando } n \to \infty$$

A continuación enunciamos algunas propiedades de la integral de Itô.

Teorema 3.3. Sea $(B_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Wiener, $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ su filtración generada, $f, g \in \mathcal{V}(T, \mathcal{H})$ y sean $0 < U \leq T$. Entonces:

(i) $\int_0^T f dB_t = \int_0^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$ para casi todo w

(ii) $\int_0^T (cf + g) dB_t = c \int_0^T f dB_t + \int_0^T g dB_t$ con c constante para casi todo w

(iii) $E\left[\int_0^T f dB_t\right] = 0$

(iv) $\int_0^T f dB_t$ es $\mathcal{H}_T$-medible

(v) $E\left[\int_0^T f dB_t \mid \mathcal{H}_U\right] = \int_0^U f dB_t$

(vi) $E\left[\left|\int_0^T f dB_t\right|\right] < \infty$

Demostración. Todas las propiedades valen para simples, luego tomando límite se prueban para el caso general. En el caso de la propiedad (v), basta recordar que la esperanza condicional es una contracción lineal en $L^2(P)$, en particular, es continua. $\square$

Comentario 3.2. Las últimas tres propiedades son equivalentes a decir que el proceso de la integral de Itô $I_t = \int_0^t f dB_s$ es una martingala respecto a la filtración generada por B_t.

La siguiente propiedad se enunciará sin demostración (ver Teorema 3.2.5 de [7]), pero será de gran uso más adelante.

Teorema 3.4. Sea $f(t,w) \in \mathcal{V}(T,\mathcal{H})$ para todo T entonces existe una versión continua del proceso

$$I_t = \int_0^t f(s,w)dB_s$$

Como Corolario, vale (ver Teorema 2.3)

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |I_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2}\cdot E\left[\int_0^t f^2 dt\right]$$

Ya definida la integral de Itô, para poder darle un uso efectivo necesitamos algún modo de computarla. Esto será provisto por el siguiente resultado.

Teorema 3.5 (La fórmula de Itô unidimensional)**.** Sea X_t un proceso de la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,w)ds + \int_0^t v(s,w)dB_s$$

lo que habitualmente se escribirá con la llamada «notación diferencial»

$$dX_t = udt + vdB_t \tag{3.3}$$

para X_0 v.a. de varianza finita, $u,v : [0,\infty)\times\Omega \to \mathbb{R}$ tales que u es $\mathcal{H}_t$-adaptada y $E[\int_0^t |u(s,w)|ds] < \infty$ para todo $t \geq 0$ y $v \in \mathcal{V}_{\mathcal{H}}^{\infty} = \bigcap_t \mathcal{V}(t,\mathcal{H})$ con $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ la filtración generada por el proceso B_t.

Sea además $g(t,x) \in C^2([0,\infty)\times\mathbb{R})$ y $Y_t = g(t,X_t)$ entonces

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)u(s,w)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v(s,w)dB_s +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s)v^2(s,w)ds \tag{3.4}$$

Comentario 3.3 (Comentario notacional)**.** La anterior fórmula en notación diferencial sería

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)(u(t,w)dt + v(t,w)dB_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t,w)dt$$

reemplazando con (3.3) tenemos

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)v^2(t,w)dt$$

y si adoptamos la convención formal de expandir $(dX_t)^2$ como un binomio de Newton para (3.3) y siguiendo la regla $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$ y $dB_t \cdot dB_t = dt$ tenemos

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2 \tag{3.5}$$

que por razones de sencillez es la manera usual de presentar la fórmula.

Demostración del Teorema. **Paso 1.** Probémoslo primero para el caso en que g y sus derivadas parciales que aparecen en la fórmula están acotadas. Supongamos también que u y v son simples y acotadas.

Tomamos una partición de $[0,t]$ de modo que $g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_j \Delta g(t_j, X_{t_j})$ con $\Delta g(t_j, X_{t_j}) = g(t_{j+1}, X_{t_{j+1}}) - g(t_j, X_{t_j})$. Entonces, usando Taylor en $\Delta g(t_j, X_{t_j})$ tenemos

$$\begin{aligned} g(t, X_t) =& g(0, X_0) + \sum_j \frac{\partial g}{\partial t}\Delta t_j + \sum_j \frac{\partial g}{\partial x}\Delta X_j + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \\ &+ \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 + \sum_j R_j \end{aligned} \tag{3.6}$$

con g y sus derivadas evaluadas en (t_j, X_{t_j}), $\Delta X_j = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$ y $R_j = o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$ para todo j. Ahora bien, por continuidad de g y sus derivadas y de X_t (podemos tomar una versión continua pues es suma de integrar una función L^1 en t para todo w y una integral de Itô que, por el Teorema 3.4, tiene una versión continua) tenemos que

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial t}(t_j, X_{t_j})\Delta t_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s)ds \quad \text{cuando } |\Delta t_j| \to 0 \tag{3.7}$$

y como $\frac{\partial g}{\partial t}$ está acotada por hipótesis el sumando está acotado para toda partición y de este límite puntual se sigue el mismo límite en $L^2(P)$.

Además $\Delta X_j = \int_{t_j}^{t_{j+1}} u(s,w)ds + \int_{t_j}^{t_{j+1}} v(s,w)dB_s$ con lo cual tomando una partición que sea refinamiento de las particiones asociadas a las funciones simples u y v

tenemos $\Delta X_j = u_j(w)(t_{j+1} - t_j) + v_j(w)(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) = u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j$ para $u(t, w) = \sum_j u_j(w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}$ y $v(t, w) = \sum_j v_j(w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}$ (podemos escribirlas así usando un refinamiento común a sus particiones).

Entonces, también por continuidad de las derivadas de g y de X_t, tenemos

$$\sum_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})\Delta X_j \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u(s, w)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s, w)dB_s \qquad (3.8)$$

cuando $|\Delta t_j| \to 0$ (para el segundo sumando debemos observar que la continuidad de $\frac{\partial g}{\partial x}$ y de X_t y el hecho de que el proceso X_t sea $\mathcal{H}_t$-adaptado garantizan que $\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s, w)$ y $\sum\limits_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})v_j(w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})}$ estén en $\mathcal{V}$(t,$\mathcal{H}$) y que
$||\sum\limits_j \frac{\partial g}{\partial x}(t_j, X_{t_j})v_j(w)\mathcal{X}_{[t_j,t_{j+1})} - \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s, w)||_{\mathcal{V}} \to 0$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$,
lo que, por el Corolario 3.2, implica la convergencia del segundo sumando)

De este límite puntual se sigue, como antes, la convergencia en $L^2(P)$ pues $\frac{\partial g}{\partial x}$, u y v están acotadas por hipótesis.

Ahora, como u y v son simples tenemos (como antes, refinando adecuadamente las particiones)

$$\begin{aligned}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 = &\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j^2(\Delta t_j)^2 + 2\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t_j)(\Delta B_j) + \\ &\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}v_j^2(\Delta B_j)^2 \end{aligned} \qquad (3.9)$$

con g y sus derivadas evaluadas en (t_j, X_{t_j}) y $u_j(w) = u(t_j, w)$.

Veamos que los dos primeros sumandos tienden a cero en $L^2(P)$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$. Sabemos que $0 \le \sum\limits_j (\Delta t_j)^2 < \delta T$ si $|\Delta t_j| < \delta$ luego $\sum\limits_j (\Delta t_j)^2 \to 0$ cuando $|\Delta t_j|$ tiende a 0 y, como $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ y u están acotadas, lo mismo vale para el primer sumando. De esta convergencia puntual se sigue la convergencia en $L^2(P)$ como antes pues el sumando está acotado para toda partición. Además,

$$E\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}u_j v_j(\Delta t)(\Delta B_j)\right)^2\right] =$$

$$= \sum_{j,k} E\left[u_j v_j u_k v_k \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_k (\Delta t_j)(\Delta t_k)(\Delta B_j)(\delta B_k)\right] = \sum_j E\left[(u_j v_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2})^2(\Delta t_j)^3\right]$$

pues $E\left[u_j v_j u_k v_k \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\Big|_k (\Delta B_j)(\Delta B_k)\right] = \delta_j^k E\left[(u_j v_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|_j)^2\right]\Delta t_j$
(ver (3.1) en la demostración de la isometría de Itô para simples).

Luego $E\left[\left(\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_j v_j (\Delta t)(\Delta B_j)\right)^2\right] = \sum_j E\left[(u_j v_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2})^2\right](\Delta t_j)^3 \to 0$ pues $E\left[(u_j v_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2})^2\right]$ está acotado y $\sum_j (\Delta t_j)^3 \to 0$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$. Concluimos que el segundo sumando de (3.9) también converge a 0 en $L^2(P)$.

El desarrollo del último párrafo se repite análogamente para mostrar que $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta t_j)^2$ y $\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}(\Delta t_j)(\Delta X_j)$ convergen igualmente a 0 en $L^2(P)$

Veamos a continuación que el tercer sumando converge a $\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2 ds$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$ en $L^2(P)$

Escribamos $a(s) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2(s, w)$ y $a_j = a(t_j)$ y consideremos

$$E\left[\left(\sum_j a_j (\Delta B_j)^2 - \sum_j a_j \Delta t_j\right)^2\right] = \sum_{i,j} E\left[a_j a_i ((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)\right]$$

Si $i < j$ entonces $a_i a_j ((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i)$ y $((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)$ son independientes por lo que el sumando se anula en este caso dado que $E[(\Delta B_j)^2] = \Delta t_j$. Lo mismo sucede si $j < i$. Y usando que a_i y $(\Delta B_i)^2 - \Delta t_i$ son independientes nos queda

$$\sum_j E[a_j^2((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j)^2] = \sum_j E[a_j^2] \cdot (E[(\Delta B_j)^4] - 2(\Delta t_j)^2 + (\Delta t_j)^2) =$$

$$2\sum_j E[a_j^2] \cdot (\Delta t_j)^2 \to 0 \text{ cuando } |\Delta t_j| \to 0 \text{ (pues } E[a_j^2] \text{ está acotado)}$$

donde hemos usado que $E[(\Delta B_j)^4] = 3(\Delta t_j)^2$ (surge de recordar que $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$ para la distribución normal, con μ_4 el cuarto momento centrado y σ el desvío estándar, y que ΔB_j sigue una distribución normal con media 0 y σ igual a $\sqrt{t_{j+1} - t_j}$).

En definitiva, hemos mostrado que $\sum_j a_j (\Delta B_j)^2$ converge a $\sum_j a_j \Delta t_j = \int_0^t a(s) ds$ (a es simple) en $L^2(P)$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$ y, resumiendo los resultados previos, que

$$\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(\Delta t_j)^2 + \sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial t}(\Delta t_j)(\Delta X_j) + \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(\Delta X_j)^2 \to \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} v^2 ds \quad (3.10)$$

en $L^2(P)$.

Con (3.7), (3.8) y (3.10) ya casi tenemos la igualdad deseada (3.4) en $L^2(P)$. Sólo queda considerar el término correspondiente al resto de Taylor. Dijimos que R_j está en $o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta X_j|^2)$, que es igual a $o(|\Delta t_j|^2 + |\Delta B_j|^2)$ pues $\Delta X_j = u_j \Delta t_j + v_j \Delta B_j$. Ya vimos que $\sum_j h_j (\Delta t_j)^2 \to 0$ cuando $|\Delta t_j| \to 0$ si las h_j están acotadas. Ahora si tengo S_j en $o(|\Delta B_j|^2)$ entonces dado cualquier $\epsilon > 0$ tomamos cualquier partición con un $|\Delta t_j|$ suficientemente chico tal que $\sum_j S_j < \epsilon \sum_j (\Delta B_j)^2$ y acabamos de ver que, en $L^2(P)$, $\epsilon \sum_j (\Delta B_j)^2 \to \epsilon \int_0^t 1 \cdot ds < \epsilon t$. Como vale para cualquier ϵ esto demuestra que $\sum_j S_j \to 0$ en $L^2(P)$ para S_j en $o(|\Delta B_j|^2)$ y luego $\sum_j R_j \to 0$ en $L^2(P)$. Así se completa la demostración de la fórmula para u, v simples y acotadas y g y sus derivadas acotadas.

Antes de avanzar al siguiente paso enunciaremos un lema auxiliar

Lema 3.1. Sean $(X_{n,t})_{n\in\mathbb{N}}$, X_t procesos como los del teorema (3.4) tales que, para cada $t \leq T$, $X_{n,t} \to X_t$ en $L^q(P)$ y tales que $E[|X_{n,t}|^2], E[|X_t|^2] \leq M$ para algún $M > 0$. Entonces

(i) existe una subsucesión X_{n_k} que converge a X para casi todo (s,w) en $[0,T]\times\Omega$,

(ii) para cualquier $h(s,x) : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada y $b(s,w)$ tal que $E[\int_0^T b^p ds] < \infty$ para $p \geq 1$ vale que $h(s, X_{n_k,s})b$ converge a $h(s,X_s)b$ en $L^p(\mathcal{L}\otimes P, [0,T]\times\Omega)$ y en $L^p(P)$ para todo s si b está acotada.

Demostración del Lema. Escribamos $\varphi_n(s,w) = (h(s,X_{n,s}) - h(s,X_s))b$. Probemos primero (ii). Queremos ver que

$$E\left[\int_0^t |\varphi_{n_k}|^p(s,w)ds\right] \to 0$$

Supongamos probado que X_{n_k} converge a X para casi todo (s,w) y sea K tal que $|h| < K$. Entonces, por continuidad de h, φ_{n_k} converge a 0 para casi todo (s,w) y utilizamos el teorema de convergencia mayorada en $[0,T]\times\Omega$ notando que $|\varphi_{n_k}(s,w)|^p \leq (2K)^p|b(s,w)|^p =: f(s,w)$ que es claramente integrable en la medida producto de $[0,T]\times\Omega$ pues $E[\int_0^T b^p ds] < \infty$. Luego $E[\int_0^t \varphi_{n_k}^p ds] \leq E[\int_0^T \varphi_{n_k}^p ds] \to 0$. El mismo argumento se usa para ver que $E[\varphi_{n_k}^p(t,w)] \to 0$ para todo $t \leq T$ fijo, notando que $E[b^p] < \infty$ para todo t si b está acotada.

Ahora (i). Para ver que existe una tal subsucesión X_{n_k} basta ver que X_n converge a X en el espacio de medida finita $L^2(\mathcal{L}\otimes P, [0,T]\times\Omega)$, o sea, basta ver

$$E\left[\int_0^T (X_{n,s}(w) - X_s(w))^2 ds\right] = \int_0^T E[(X_{n,s}(w) - X_s(w))^2]ds \to 0$$

Pero por hipótesis $\psi(s) = E[(X_{n,s} - X_s)^2] \to 0$ para todo s y, además, $|\psi(s)| \leq 4M$, por lo que el resultado sigue por el Teorema de convergencia mayorada. □

Paso 2. Consideremos g como antes y v en $\mathcal{V}$ acotada. Fijemos un T y consideremos los $t \leq T$. Tomamos $K \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|g|, |\frac{\partial g}{\partial x}|, |\frac{\partial g}{\partial s}|, |\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|, |u|, |v| \leq K$ y tomamos una sucesión de simples y acotadas por K (se puede, ver demostración del teorema (3.2)) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $E[\int_0^t (v - v_n)^2 dt] = \|v - v_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$.

Escribimos $X_{n,t} = X_0 + \int_0^t u ds + \int_0^t v_n dB_s$ y veamos que, para t fijo, X_n converge a X en $L^2(P)$. En efecto, por la isometría de Itô, $E[(\int_0^t (v_n - v)dBs)^2] = ||v - v_n||_{\mathcal{V}} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Además

$$E[|X_{n,t}|^2] \leq 3E[|X_0|^2] + 3(KT)^2 + 3E\left[\int_0^T v_n^2\right] ds \leq 3(E[|X_0|^2] + (KT)^2 + K^2T) = M$$

$$E[|X_t|^2] \leq 3E[|X_0|^2] + 3(KT)^2 + 3E\left[\int_0^T v^2 ds\right] \leq 3(E[|X_0|^2] + (KT)^2 + K^2T) = M$$

por lo que estamos en las hipótesis del Lema 3.1 y podemos tomar la subsucesión X_{n_k} convergente para casi todo (s, w) a la que, sin perder generalidad, llamaremos X_n.

Queremos ver ahora que $Y_{n,t} = g(t, X_{n,t})$ converge en $L^2(P)$ para t fijo a $Y_t = g(t, X_t)$. Basta aplicar el punto (iii) del Lema 3.1 a $h = g$ y $b \equiv 1$ con $p = 2$ para tener lo deseado.

Ahora bien, por el Paso 1 sabemos que para todo n vale:

$$Y_{n,t} - Y_{n,0} = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_{n,s})ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})u(s,w)ds +$$
$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})v_n(s,w)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})v_n^2(s,w)ds \tag{3.11}$$

Habiendo visto ya que el lado izquierdo de la ecuación converge en $L^2(P)$, falta ver que el lado derecho también lo hace. Es decir, queremos ver que

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_{n,s})ds \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds \tag{3.12}$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})u(s,w)ds \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u(s,w)ds \tag{3.13}$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})v_n(s,w)dB_s \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s,w)dB_s \tag{3.14}$$

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})v^2(s,w)ds \to \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)v_n^2(s,w)ds \tag{3.15}$$

donde todos los límites son en $L^2(P)$.

Para ver (3.13) notemos que:

$$\left\|\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))u ds\right\|^2_{L^2(P)} < K^2t^2E\left[\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))^2 ds\right] \to 0$$

donde la convergencia se da por (ii) del Lema 3.1 con $h = \frac{\partial g}{\partial x}$, $p = 2$, $b \equiv 1$. Del mismo modo se ve (3.12).

Para ver (3.14) escribimos

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s})v_n(s,w)dB_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v(s,w)dB_s =$$

$$= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s})(v_n(s,w) - v(s,w))dB_s + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))v(s,w)dB_s$$

Para el primer sumando,

$$E\left[\left(\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s})(v_n(s,w) - v(s,w))dB_s\right)^2\right] \leq KE\left[\int_0^t (v_n - v)^2 dB_s\right]$$

que converge a cero.

Para el segundo sumando tenemos

$$E\left[\left(\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))v dB_s\right)^2\right] < K^2E\left[\left(\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))dB_s\right)^2\right]$$

$$= KE\left[\left(\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s))^2 ds\right)\right] \to 0$$

donde al final se usó el Lema 3.1 como antes. Con esto terminamos de probar (3.14).

Finalmente, para ver (3.15) escribimos:

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_{n,s})v_n^2(s,w)ds - \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s)v^2(s,w)ds =$$

$$= \int_0^t (\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_{n,s}) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s))v^2(s,w)ds + \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_{n,s})(v_n^2(s,w) - v^2(s,w))ds$$

La convergencia a cero del primer sumando se prueba exactamente igual que la convergencia del primer sumando del caso anterior.

Para el segundo sumando, observemos que:

$$E\left[\left|\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})(v_n^2(s,w) - v^2(s,w))ds\right|^2\right] \leq$$
$$KE\left[(\int_0^t |v_n - v| \cdot |v_n + v| ds)^2\right] \leq 2K^2 E\left[(\int_0^t |v_n - v| ds)^2\right] \leq$$
$$2K^2 E\left[(\int_0^t 1^2 ds)(\int_0^t |v_n - v|^2 ds)\right] \leq 2tK^2 E\left[\int_0^t |v_n - v|^2 ds\right] =$$
$$2tK^2 \|v - v_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Con lo cual concluimos que la fórmula vale para g acotada y con derivadas acotadas, u simple y acotada y $v \in \mathcal{V}$ acotada.

Paso 3. Ahora consideramos g y u como antes y v cualquiera en $\mathcal{V}$. Tomamos $K \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|g|, |\frac{\partial g}{\partial x}|, |\frac{\partial g}{\partial s}|, |\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}|, |u| \leq K$ y tomamos una sucesión de acotadas $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|v_n| \leq |v|$ y $v_n \to v$ puntualmente en $[0,T] \times \Omega$ (se puede, ver demostración del teorema (3.2)) y tal que $E[\int_0^t (v - v_n)^2 dt] = \|v - v_n\|_{\mathcal{V}}^2 \to 0$. Como antes, escribimos $X_{n,t} = X_0 + \int_0^t u ds + \int_0^t v_n dB_s$ y vemos que, para t fijo, $X_{n,t}$ converge a X_t en $L^2(P)$ pues $E[(\int_0^t (v_n - v) dBs)^2] = ||v - v_n||_{\mathcal{V}} \to 0$. Además,

$$E[|X_t|^2] \leq 3E[|X_0|^2] + 3(KT)^2 + 3E\left[\int_0^T v^2 ds\right] = M$$

$$E[|X_{n,t}|^2] \leq 3E[|X_0|^2] + 3(KT)^2 + 3E\left[\int_0^T v_n^2 ds\right] \leq M$$

por lo que estamos en las condiciones del Lema 3.1 y podemos, sin perder generalidad, llamar X_n a la subsucesión que converge para casi todo (s, w).

También tenemos, por lo mismo que en el Paso 2, $Y_{n,s} = g(s, X_{n,s}) \to g(s, X_s) = Y_s$ en $L^2(P)$.

Por los pasos previos ya sabemos que la fórmula de Itô vale para cada v_n.

Además, sabemos que en espacios de medida finita existe $C > 0$ tal que $\|\cdot\|_{L^1} \leq C\|\cdot\|_{L^2}$, con lo cual todas las convergencias mencionadas en L^2 se dan también en L^1. Como antes, debemos ver que el lado derecho de la ecuación (3.11) también converge para que la fórmula valga para v cualquiera, pero esta vez el limite se hará en L^1. Es decir, queremos ver que

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_{n,s})ds \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s)ds \tag{3.16}$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})u(s,w)ds \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u(s,w)ds \tag{3.17}$$

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})v_n(s,w)dB_s \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s,w)dB_s \tag{3.18}$$

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})v^2(s,w)ds \to \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)v_n^2(s,w)ds \tag{3.19}$$

cuando $n \to \infty$, donde todos los límites son en $L^1(P)$.

Los casos de (3.16) y (3.17) ya están cubiertos por el Paso 2, por lo que convergen en $L^2(P)$ (y luego en $L^1(P)$).

Para ver (3.18) escribimos

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})v_n(s,w)dB_s - \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)v(s,w)dB_s =$$
$$= \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})(v_n(s,w) - v(s,w))dB_s + \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s))v(s,w)dB_s$$

Para el primer sumando hacemos lo mismo que para el primer sumando en la demostración de (3.14) del Paso 2, lo que garantiza convergencia a 0 en $L^2(P)$ (luego en $L^1(P)$).

Para el segundo sumando,

$$E\left[\left(\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s))v dB_s\right)^2\right] \leq E\left[\int_0^t (\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s}) - \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s))^2 v^2 ds\right]$$

y aplicamos el Lema 3.1 con $p = 2$, $b = v$ y $h = \frac{\partial g}{\partial x}$, lo que garantiza convergencia en L^2 (luego en L^1).

Por último, para ver (3.19) escribimos

$$\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s}) v_n^2(s,w) ds - \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v^2(s,w) ds =$$

$$\int_0^t (\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s}) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s)) v^2(s,w) ds + \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})(v_n^2(s,w) - v^2(s,w)) ds$$

Para el primer sumando, usamos directamente el Lema 3.1 con $p = 1$, $b = v^2$ y $h = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, lo que garantiza la convergencia L^1.

Para el segundo sumando, escribimos $\psi_n(s,w) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})(v^2 - v_n^2)$, que converge casi seguramente a 0 (por cómo tomamos v_n y por (i) del Lema 3.1 y continuidad), y la mayoramos con $h(s,w) := K2|v(s,w)|^2$ (pues $|v_n| \leq |v|$), que es claramente integrable en la medida producto dado que $v \in \mathcal{V}$.

Luego $E[\int_0^t |\psi_n| ds] \to 0$ cuando $n \to \infty$, o sea, el segundo sumando converge a cero en $L^1(P)$.

Esto termina de probar la fórmula de Itô para una $v \in \mathcal{V}$ cualquiera.

Paso 4. Consideramos g como antes, $v \in \mathcal{V}$ cualquiera y u tal que $E[\int_0^t |u| ds] < \infty$ para todo t. Tomamos $K \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|g|, |\frac{\partial g}{\partial x}|, |\frac{\partial g}{\partial s}|, |\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}| \leq K$ y tomamos $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de simples y acotadas tal que $|u_n| \leq |u|$, $u_n(s,w) \to u(s,w)$ para casi todo (t,w) y $E[\int_0^t |u_n(s,w) - u(s,w)| ds] \to 0$. Por esto tenemos que para cualquier $t \leq T$ $X_{n,t} = X_0 + \int_0^t u_n ds + \int_0^t v dB_s$ converge a $X_t = X_0 + \int_0^t u ds + \int_0^t v dB_s$ en $L^1(P)$ y además

$$\psi(t) = E[|X_t - X_{n,t}|] \leq E\left[\int_0^T 2|u| ds\right] = M$$

por lo que el teorema de convergencia mayorada nos asegura que

$$\int_0^t \psi(s) ds = \int_0^t E[|X_s - X_{n,s}|] ds \to 0$$

para todo $t \leq T$ y luego existe una subsucesión X_{n_k} que converge para casi todo (s,w) en $[0,T] \times \Omega$ a X. La tomamos llamándola X_n sin perder generalidad. Tenemos entonces que $Y_{n,t} = g(t, X_{n,t})$ converge casi seguramente a $Y_t = g(t, X_t)$ pues g es continua y, además, está mayorada por K, por lo que $Y_{n,t}$ converge a Y_t en $L^1(P)$. Lo mismo ocurre, por el mismo motivo, con las derivadas primeras y segundas de g. Por los pasos previos ya sabemos que la fórmula de Itô vale para cada u_n:

$$Y_{n,t} - Y_{n,0} = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_{n,s})ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})u_n ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})v dB_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_{n,s})v^2 ds$$

Veamos que vale para el límite en $L^1(P)$. Para el segundo sumando, notemos que $\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_{n,s})u_n$ converge puntualmente a $\frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s)u$ y está mayorada por Ku (y $E[\int_0^t K|u|] < \infty$) por lo que obtenemos la convergencia deseada. El mismo argumento usamos con el primer sumando. Para el tercer sumando la demostración es idéntica a la realizada para (3.18) en el Paso 3 y para el cuarto es idéntica a la realizada para (3.19) también en el Paso 3.

Paso 5. Resta considerar el caso de una $g \in C^2([0,T] \times \mathbb{R})$ cualquiera. Para ello tomamos funciones $\rho_n(t,x) \in C^2$ de soporte compacto tales que $\rho_n \equiv 1$ en $[0,T] \times B_n(0)$ y $0 \leq \rho_n \leq 1$ en $[0,T] \times (\mathbb{R} - B_n(0))$ y escribimos $g_n = g \cdot \rho_n$, que son acotadas y con derivadas acotadas en $[0,T] \times \mathbb{R}$. También definimos $\tau_n(w) = \inf_s \{s : \ |X_s(w)| > n\}$. Por lo ya demostrado en pasos previos:

$$g_n(t, X_t) - g_n(0, X_0) = \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial s}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s, X_s)u ds + \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s, X_s)v dB_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g_n}{\partial x^2}(s, X_s)v^2 ds \tag{3.20}$$

El lado izquierdo converge casi seguramente a $g(t, X_t) - g(0, X_0)$ pues para (t,w) dados tengo $X_t(w)$ dado y existe un n_0 tal que $X_t(w) < n_0$, de modo que $g_n(t, X_t) = g(t, X_t)$ para todo $n > n_0$. Luego el lado izquierdo converge en probabilidad a $g(t, X_t) - g(0, X_0)$. Queremos ver que lo mismo ocurre del lado derecho. Para ello usaremos que $P(\tau_n < t) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

En efecto, notemos que

$$\int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s, X_s)v dB_s = \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s, X_s)v \mathcal{X}_{\{s \leq \tau_n(w)\}}(s,w) dB_s + h_n(t,w)$$

(donde la integral está bien definida pues τ_n es un tiempo de parada) con $h_n(t,w) = \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s, X_s)v \mathcal{X}_{\{s > \tau_n(w)\}}(s,w) dB_s \to 0$ en probabilidad pues

$$P(h_n(t,w) > \epsilon) \leq P(h_n(t,w) > 0) \leq P(\tau_n < t) \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

Además

$$\int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s\le\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s\le\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s$$

y

$$\int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s\le\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)vdB_s - h_n'(t,w)$$

con $h_n'(t,w) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s>\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s \to 0$ en probabilidad como antes. Luego:

$$\lim_n \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s,X_s)vdB_s = \lim_n \int_0^t \frac{\partial g_n}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s\le\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s =$$

$$\lim_n \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)v\mathcal{X}_{\{s\le\tau_n(w)\}}(s,w)dB_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)vdB_s \quad (3.21)$$

donde los límites son todos en probabilidad. La misma cuenta puede hacerse para los otros tres sumandos del lado derecho de la fórmula de Itô para finalmente obtener:

$$g(t,X_t) - g(0,X_0) = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)uds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)vdB_s$$

$$+ \quad \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s,X_s)v^2ds$$

□

Antes de seguir hacia el problema de hallar soluciones para ecuaciones diferenciales con términos estocásticos, debemos hacer varias observaciones sobre la generalización de la integral, isometría y fórmula de Itô. En su forma más general la integral

$$\int_0^T u(t,w)dM_t$$

puede definirse para cualquier semimartingala[2] M_t respecto de una filtración $(\mathcal{H}_t)_{t\le T}$ y para todo u medible en la σ-álgebra producto con $u(t,\cdot)$ medible en $\mathcal{H}_{t^-} = \bigcup_{s<t}\mathcal{H}_s$

[2]Una *semimartingala* para la filtración es un proceso S_t que puede escribirse $S_t = M_t + A_t$ donde M_t es una martingala local y A_t es un proceso $\mathcal{H}_t$-adaptado que verifica que existe una sucesión de tiempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$ ($\tau_n \to \infty$ c.s) tal que $N_t^n = M_{min(t,\tau_n)}$ es de variación acotada para todo n y sobre todo intervalo finito $[0,T]$.

y u localmente acotado (existen tiempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$ tales que, para cada n, el proceso $S_t(w) = u(t,w)\mathcal{X}_{t\leq\tau_n}$ es uniformemente acotado). En ese contexto la isometría de Itô afirma, para martingalas locales con $E[|M_t|^2] < \infty$,

$$E\left[\left(\int_0^T u(t,w)dM_t\right)^2\right] = E\left[\int_0^T u^2(t,w)d\left\langle M_t\right\rangle\right]$$

donde $\langle M_t\rangle = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^n (M_{t_k} - M_{t_{k-1}})^2$ con P particiones de $[0,t]$ es la variación cuadrática del proceso (que existe y es de variación finita para martingalas locales, por lo que puede tomársele una integral de Riemann-Stieltjes).

Si bien no trabajaremos en este nivel de generalidad, ocasionalmente usaremos el hecho siguiente (ver 3.2.22 y 3.2.23 de [4]):

Teorema 3.6. La integral de Itô para u y M_t como arriba es una martingala local si M_t lo es.

Por otro lado, desde el capítulo siguiente y en el marco general de la Matemática Financiera, nos interesará calcular integrales de Itô respecto de un proceso de Wiener multidimensional, por lo que hacemos la siguiente definición.

Definición 3.4. Sea una filtración $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0} \subseteq \Sigma$, sea un proceso de Wiener n-dimensional $(B_t)_{t\geq 0}$ que es $\mathcal{H}_t$-martingala y sea $T \geq 0$. Llamamos $\mathcal{V}^{(n)} = \mathcal{V}^{(n)}(T,\mathcal{H})$ al subconjunto de las funciones medibles en $([0,\infty)\times\Omega, \mathcal{B}\times\Sigma)$ (donde $\mathcal{B}$ es la σ -álgebra de Borel) tales que:

(i) $f(t,w)$ es $\mathcal{H}_t$-adaptado, es decir, para cada t fijo $f(t,w)$ es $\mathcal{H}_t$-medible

(ii)$\|f\|_{\mathcal{V}}^2 = E(\int_0^T f(t,w)^2 dt) < \infty$ (o sea, $f \in L^2([0,\infty)\times\Omega)$ con la medida producto de Lebesgue y P)

Y llamamos $\mathcal{W}^{(n)} = \mathcal{W}^{(n)}(T,\mathcal{H})$ al supraconjunto de $\mathcal{V}$ que cumple (i) y

(ii')$P(\int_0^T f(t,w)^2 dt < \infty) = 1$

En el segundo caso, se puede ver que para toda $v \in \mathcal{W}$ existen funciones simples y acotadas v_n tales que $\int_0^T |v - v_n| ds \to 0$ en probabilidad y $\int_0^T v_n dBs$ converge en probabilidad a algún límite que sólo depende de v, por lo que podemos tomarlo como definición de $\int_0^T v dB_s$. Esta integral pierde algunas propiedades: no verifica (iii) del Teorema (3.3) y tampoco es, en general, una martingala (sí es una martingala local por el Teorema (3.6)). Por otro lado, con esta nueva definición vemos que si tomamos $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$, la menor σ-álgebra que contiene a $\mathcal{F}_t^{(1)}, ..., \mathcal{F}_t^{(n)}$ (donde $\mathcal{F}_t^{(i)}$ es la generada por $B_t^{(i)}$), podemos considerar integrales como $\int_0^t B_s^{(1)} dB_s^{(2)}$ que antes no podíamos (pues $B^{(1)}$ no es $\mathcal{F}_t^{(2)}$-adaptado). En general, si $\sigma : [0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^{m\times n}$ es tal que $\sigma_{ij} \in \mathcal{W}^{(n)}$

podemos definir $Y_t = \int_0^T \sigma(s,w)dB_s$ así:

$$Y_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n} \int_0^T \sigma_{ij} dB_s^{(j)}$$

En este contexto, la isometría de Itô (que usaremos en la demostración del teorema de existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial estocástica en el capítulo siguiente) es:

$$E\left[\left\langle \int_0^T \sigma dB_s, \int_0^T \sigma dB_s \right\rangle\right] = E\left[\int_0^T \sum_{i,j}^{n,m} \sigma_{ij}^2 ds\right]$$

Análogamente, la fórmula de Itô para el caso n-dimensional en forma diferencial, que se demuestra de manera similar a la 1-dimensional, es

$$dY_t^{(k)} = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X_t)dX_t^{(i)} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)dX_t^{(i)}dX_t^{(j)} \tag{3.22}$$

para $dX_t^{(i)} = u_i dt + \sum_j v_{ij} dB_t^{(j)}$con las reglas $dB_i dB_j = \delta_i^j ds$, $dt dB_i = dB_i dt = 0$, lo que da:

$$dY_t^{(k)} = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X_t)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X_t)(u_i(t,w)dt + \sum_j v_{ij}(t,w)dB_t^{(j)}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X_t)(vv^T)_{ij}(t,w)dt \tag{3.23}$$

Asimismo, mencionamos que la fórmula de Itô puede demostrarse para una clase de procesos $X_t = X_0 + \int_0^t u ds + \int_0^T v dB_s$ más amplia al relajarse las condiciones de u y v y pedir solamente que $P(\int_0^t |u_i| ds < \infty) = 1$ y $v_{ij} \in \mathcal{W}$. A esta clase de procesos se los llama procesos de Itô y a los términos udt y vdB_t se los llama, respectivamente, términos de deriva y difusión.

Antes de finalizar, enunciamos sin demostración un teorema fundamental que relaciona martingalas con integrales de Itô (ver Teorema 4.3.4 de [7])

Teorema 3.7 (Teorema de representación de martingalas)**.** Sea M_t una martingala respecto a la filtración $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ generada por el proceso de Wiener $(B_t)_{t\geq 0}$, tal que $E[|M_t|^2] < \infty$ para todo $t \leq T$. Entonces existe $\varphi(s,w) \in \mathcal{V}(T,\mathcal{H})$ tal que, para todo $t \leq T$,

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi(s,w) dB_t$$

Capítulo 4

Ecuaciones Diferenciales Estocásticas

Ya desarrollado el cálculo integral, estamos en condiciones de dar sentido a expresiones de la forma

$$\frac{dN_t}{dt} = (cN_t + \alpha W_t)$$

donde a la ecuación de crecimiento constante usual se le agrega un término W_t de «ruido blanco», con interpretación $W_t = \frac{dB_t}{dt}$, de modo que lo anterior se reescribe

$$dN_t = cN_t dt + \alpha dB_t$$

Más en general, nos interesa hallar soluciones para ecuaciones de la forma

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t \tag{4.1}$$

que es la expresión usual en forma diferencial de lo que en el cálculo integral desarrollado (ver Comentario 3.3) escribimos como:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s \tag{4.2}$$

El siguiente teorema nos garantizará la existencia y unicidad de solución para estas ecuaciones diferenciales estocásticas (o EDEs).

Teorema 4.1. Sean $T > 0$, B_s un proceso de Wiener m-dimensional y $b(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma(\cdot, \cdot) : [0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times m}$, funciones medibles que satisfacen

$$|b(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq C(1 + |x|), \qquad x \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \tag{4.3}$$

para alguna constante C (donde $|\sigma|^2 = \sum |\sigma_{ij}|$) y tal que

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq D|x - y|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^n, t \in [0, T] \tag{4.4}$$

para alguna constante D. Sea Z una variable aleatoria independiente de la σ-álgebra $\mathcal{F}_\infty$ generada por $(B_s)_{s\geq 0}$ y tal que $E[|Z|^2] < \infty$.

Entonces existe un único proceso $X_t(w)$ t-continuo adaptado a la filtración $\mathcal{F}_t^Z$ generada por $(B_s)_{s\leq t}$ y Z que verifica la ecuación diferencial estocástica (4.2) con condición inicial $X_0 = Z$ para todo $t \leq T$. Además, se tiene

$$E\left[\int_0^T |X_s|^2 ds\right] < \infty$$

Demostración. Veamos primero la unicidad. Supongamos que hay dos procesos, $X_t(w)$ y $\hat{X}_t(w)$ que verifican la ecuación (4.2) con valores iniciales Z y $\hat{Z}$. Escribimos $a(s,w) = b(s,X_s) - b(s,\hat{X}_s)$ y $\beta(s,w) = \sigma(s,X_s) - \sigma(s,\hat{X}_s)$ y tenemos

$$\begin{aligned}
E[|X_t - \hat{X}_t|^2] &= E\left[\left\| Z - \hat{Z} + \int_0^t a ds + \int_0^t \beta dB_s \right\|^2\right] \\
&\leq 3E[|Z-\hat{Z}|^2] + 3E\left[\left\|\int_0^t a ds\right\|^2\right] + 3E\left[\left\|\int_0^t \beta dB_s\right\|^2\right] \\
&\leq 3E[|Z-\hat{Z}|^2] + 3Et\left[\int_0^t \|a\|^2 ds\right] + 3E\left[\int_0^t \|\beta\|^2 ds\right] \\
&\leq 3E[|Z-\hat{Z}|^2] + 3(1+t)D^2 \int_0^t E\left[|X_s - \hat{X}_s|^2\right] ds \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

donde $\|\beta\|^2 = \sum_{i,j}^{n,m} \beta_{ij}^2$ y el uso de la isometría de Itô para β se justifica por la condición (4.3) y por la desigualdad $E[\int_0^T |X_s|^2 ds] < \infty$ para X y $\hat{X}$.

Tenemos pues que la función $v(t) = E[|X_t - \hat{X}_t|^2]$ satisface

$$v(t) \leq F + A\int_0^t v(s)ds$$

con $F = 3E[|Z-\hat{Z}|^2]$ y $A = (1+t)D^2$. Por el lema de Gronwall esto implica que $v(t) \leq Fe^{At}$ para $t \leq T$. Luego si $Z = \hat{Z}$ vale $F = 0$ y $v(t) = E[|X_t - \hat{X}_t|^2] = 0$ para todo $t \leq T$. Por esto tenemos

$$P\left(\bigcap_{t\in\mathbb{Q}\cap[0,T]} |X_t - \hat{X}_t| = 0\right) = 1$$

y del hecho de que X y $\hat{X}$ tienen trayectorias continuas se sigue la unicidad.

Para ver la existencia definimos inductivamente una sucesión de procesos del siguiente modo.

$$Y_t^{(0)} = Z \qquad \text{para todo } t$$

$$Y_t^{(k+1)} = Z + \int_0^t b(s, Y_s^{(k)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(k)})dB_s$$

Y haciendo un cálculo idéntico al hecho para la unicidad obtenemos

$$E\left[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2\right] \leq 3(1+t)D^2 \int_0^t E\left[|Y_s^{(k)} - Y_s^{(k-1)}|^2\right] ds \tag{4.6}$$

para $k \geq 1$ y

$$\begin{aligned}
E\left[|Y_t^{(1)} - Y_t^{(0)}|^2\right] &= E\left[\left\|\int_0^t b(s, Y_s^{(0)})ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(0)})dB_s\right\|^2\right] \\
&\leq 2E\left[\left\|\int_0^t b(s, Z)ds\right\|^2\right] + 2E\left[\left\|\int_0^t \sigma(s, Z)dB_s\right\|^2\right] \\
&\leq 2tE\left[\int_0^t \|b\|^2 (s, Z)ds\right] + 2E\left[\int_0^t \|\sigma\|^2 (s, Z)ds\right] \\
&\leq 2tE\left[\int_0^t C^2(1+|Z|)^2 ds\right] + 2E\left[\int_0^t C^2(1+|Z|)^2 ds\right] \\
&\leq 4t^2C^2(1+E[|Z|^2]) + 4tC^2(1+E[|Z|^2]) = A_1 t
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde la constante A_1 depende solamente de C, T y $E[|Z|^2]$. Luego, escribiendo $A_2 = \text{máx}(A_1, 3(1+T)D^2)$ se ve inmediatamente por inducción que

$$E\left[|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}|^2\right] \leq \frac{A_2^{k+1}t^{k+1}}{(k+1)!} \quad \text{para todo } k \geq 0, t \in [0, T] \tag{4.8}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}| &\leq \int_0^T |b(s, Y_s^{(k)}) - b(s, Y_s^{(k-1)})|ds \\
&+ \sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t (\sigma(s, Y_s^{(k)}) - \sigma(s, Y_s^{(k-1)}))dB_s\right|
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Por la desigualdad de martingalas de Doob obtenemos

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>2^{-k}\right)\\
&\qquad\le P\left(\left|\int_0^T|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|ds\right|^2>2^{-2k-2}\right)\\
&\qquad+P\left(\sup_{0\le t\le T}\left|\int_0^t(\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)}))dB_s\right|>2^{k-1}\right)\\
&\le 2^{2k+2}T\int_0^T E[|b(s,Y_s^{(k)})-b(s,Y_s^{(k-1)})|^2]ds+2^{2k+2}\int_0^T E[|\sigma(s,Y_s^{(k)})-\sigma(s,Y_s^{(k-1)})|^2]ds\\
&\qquad\le 2^{2k+2}(1+T)D^2\int_0^T E[|Y_t^{(k)}-Y_t^{(k-1)}|^2]ds\le 2^{2k+2}(1+T)D^2\int_0^T\frac{A_2^k s^k}{k!}ds\\
&\qquad\le\frac{(4A_2T)^{k+1}}{(k+1)!}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Entonces, por el lema de Borel-Cantelli,

$$
P\left(\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|>2^{-k}\text{ para infinitos }k\right)=0 \tag{4.11}
$$

Luego para casi todo w existe k_0 tal que

$$
\sup_{0\le t\le T}|Y_t^{(k+1)}-Y_t^{(k)}|\le 2^{-k}\qquad\text{para todo }k\ge k_0
$$

Lo que implica que, para casi todo w, la secuencia

$$
Y_t^{(n)}(w)=Y_t^{(0)}(w)+\sum_{k=0}^{n-1}(Y_t^{(k+1)}(w)-Y_t^{(k)}(w))
$$

es uniformemente convergente en $[0,T]$.

Llamemos $X_t=X_t(w)$ al límite de la misma, entonces X_t es continuo en t para casi todo w puesto que $Y_t^{(n)}$ es continuo en t para todo n. Más aun, $X_t(\cdot)$ es $\mathcal{F}_t^Z$-medible para todo t, puesto que $Y_t^{(n)}$ lo es para todo n.

Ahora, para $m > n > 0$ tenemos

$$E\left[|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}|^2\right]^{\frac{1}{2}} = \left\|Y_t^{(m)} - Y_t^{(n)}\right\|_{L^2(P)} = \left\|\sum_{k=n}^{m-1} Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\right\|_{L^2(P)}$$

$$\leq \sum_{k=n}^{m-1} \left\|Y_t^{(k+1)} - Y_t^{(k)}\right\|_{L^2(P)} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{A_2^{k+1} t^{k+1}}{(k+1)!}\right]^{\frac{1}{2}} \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty \tag{4.12}$$

Tenemos entonces que $Y_t^{(n)}$ es convergente en $L^2(P)$, llamemos Y_t al límite y sabemos que una subsucesión $Y_t^{(n_k)}$ converge puntualmente para casi todo w a Y_t. Luego tenemos $X_t = Y_t$ y por ser un límite en $L^2(P)$ podemos asegurar

$$E\left[\int_0^T |X_t|^2 ds\right] < \infty$$

Sólo basta ver que X_t satisface (4.2). Ya sabemos que

$$Y_t^{(n+1)} = Z + \int_0^t b(s, Y_s^{(n)}) ds + \int_0^t \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s \tag{4.13}$$

Vimos que el lado izquierdo converge en $L^2(P)$, veamos que el derecho también. Sabemos que $Y_t^{(n+1)} \to X_t$ uniformemente en $t \in [0, T]$ para casi todo w. Luego, por (4.12) y el lema de Fatou

$$E\left[\int_0^T |X_t - Y_t^{(n)}|^2 dt\right] \leq \limsup_{m\to\infty} E\left[\int_0^T |Y_t^{(n)} - Y_t^{(m)}|^2 dt\right] \to 0 \quad \text{cuando } n \to \infty$$

Entonces

$$E\left[\left\|\int_0^t \sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s^{(n)}) dB_s\right\|^2\right] = E\left[\int_0^t |\sigma(s, X_s) - \sigma(s, Y_s^{(n)})|^2 ds\right]$$

$$\leq E\left[\int_0^t D^2 |X_s - Y_s^{(n)}|^2 ds\right] \to 0 \tag{4.14}$$

y también

$$E\left[\left\|\int_0^t b(s,X_s)-b(s,Y_s^{(n)})ds\right\|^2\right]\leq tE\left[\int_0^t |b(s,X_s)-b(s,Y_s^{(n)})|^2 ds\right]$$
$$\leq tE\left[\int_0^t D^2|X_s-Y_s^{(n)}|^2 ds\right]\to 0 \tag{4.15}$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Observación 4.1. La condición (4.3) sumada al hecho de que $E\left[\int_0^T |X_t|^2 ds\right] < \infty$ nos permite asegurar que $u(s,w) = b(s,X_s(w))$ y $v(s,w) = \sigma(s,X_s(w))$ están en las hipótesis del teorema de la Fórmula de Itô, por lo que podremos aplicarla con tranquilidad a la solución de una EDE.

Ejemplo 4.1. Consideremos la EDE de la forma

$$dX_t = bXdt + \sigma dB_t$$

con b, σ constantes y $\sigma \neq 0$. Estamos en las hipótesis del teorema y podemos usar la fórmula de Itô con $g(s,x) = e^{-bs}x$ y $Y_t = g(t,X_t)$ entonces tenemos

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t (-be^{-bs})X_s ds + \int_0^t be^{-bs}X_s ds + \int_0^t e^{-bs}\sigma dB_s = \int_0^t e^{-bs}\sigma dB_s$$

lo que implica

$$X_t = e^{bt}X_0 + \int_0^t e^{b(t-s)}\sigma dB_s$$

Este proceso se conoce como el proceso de Ornstein-Ühlenbeck.

A una solución como la exhibida por el teorema precedente se la llama *fuerte*. Una solución *débil* para (4.2) es una tupla $((\tilde{X}_t,\tilde{B}_t),\tilde{\mathcal{H}}_t)$ en un espacio de probabilidad $(\Omega,\tilde{\mathcal{H}},Q)$ tal que $(\tilde{\mathcal{H}}_t)_{t\geq 0}\subseteq\tilde{\mathcal{H}}$ es una filtración, $\tilde{X}_t$ es $\tilde{\mathcal{H}}_t$-adaptado, $\tilde{B}_t$ es un proceso de Wiener que es martingala respecto a la filtración $(\tilde{\mathcal{H}}_t)_{t\geq 0}$ y tal que los procesos satisfacen la siguiente modificación de (4.2)

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t b(s,\tilde{X}_s)ds + \int_0^t \sigma(s,\tilde{X}_s)d\tilde{B}_s$$

Toda solución fuerte es claramente débil, pero la conversa no vale, dado que $\tilde{B}_t$ puede ser distinto del B_t dado y la medida de probabilidad Q puede ser distinta de P.

Existe un teorema de unicidad débil que garantiza que dos soluciones débiles de una EDE son idénticas en ley, es decir, tienen las mismas distribuciones finitas (ver [10]).

El teorema anterior de existencia y unicidad (fuerte) se puede demostrar de manera análoga reemplazando 0 con cualquier $t' < T$ y pidiendo $X(t') = Z$. El único proceso solución $X(t)$ estará entonces definido para $t \in [t', T]$. A estos procesos que satisfacen una ecuación de la forma

$$dZ_t = b(Z_t)dt + \sigma(Z_t)dB_t \tag{4.16}$$

(es decir, donde los coeficientes b y σ no dependen del tiempo) se les llamará *difusiones de Itô*. Para estos procesos y para alguna $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ escribiremos ocasionalmente

$$E^{t',z}[h(Z_t)] := E[h(Z_t)] \tag{4.17}$$

donde $Z(t)$ es el único proceso de la forma que además satisface $Z(t') = z$, donde el superíndice t', z en (4.17) indica precisamente cuál es ese z (y cuál el t' inicial), para z valor constante en $\mathbb{R}^n$[3]. Si $t' = 0$ se omite el supraíndice de tiempo y escribimos $E^z[h(Z_t)]$.

Vale entonces el siguiente teorema, que no será demostrado pero que será de gran utilidad.

Teorema 4.2 (Propiedad de Markov)**.** Si $\tilde{Z}_t$ es la difusión que satisface (4.16) con $\tilde{Z}(t') = \xi$ y $(\mathcal{H}_t)_{t\geq 0}$ es la σ-álgebra asociada al proceso de Wiener B_t para el que está definido $\tilde{Z}_t$ entonces dada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ boreliana vale

$$E[f(\tilde{Z}_{t_1+h})|\mathcal{H}_{t_1}] = E^{t_0,Z_{t_1}(w)}[f(Z_{t_0+h})] \qquad \text{para todo } t_1, t_0, h \geq 0, t_1 + h \geq t' \tag{4.18}$$

Además, presentamos con demostración los siguientes resultados que serán útiles en el siguiente capítulo

Lema 4.1. Sea $(Z(t))_{t'\leq t\leq T}$ proceso que satisface (4.18) y f boreliana con $E[|f(Z(t))|] < \infty$. Definamos

$$u(t, z) = E^z[f(Z(t))] \quad \text{y} \quad g(t, z) = v(T - t, z)$$

Entonces $(g(t, Z(t)))_{t'\leq t\leq T}$ es una martingala para la σ-álgebra $(\mathcal{H}_t)_{0\leq t\leq T}$

[3]De modo que $f(z) = E^z[h(Z(t))]$ es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ y si escribimos $E^{X(w)}[h(Z(t))]$ para $X(w)$ variable aleatoria estamos considerando a $f(X(w))$, es decir, a una variable aleatoria y no al valor real $E[h(Z(t))]$ que surge de considerar el único Z de la forma diferencial dada que satisface $Z(t') = X$

Demostración. Sea $t' < s < t < T$. Tenemos

$$E\left[g(t, Z(t))|\mathcal{H}_s\right] = E\left[E^{Z(t)}[f(X(T-t))]|\mathcal{H}_s\right] = E\left[E[f(Z(T)|\mathcal{H}_t]|\mathcal{H}_s\right]$$

usando (4.18) para $t_1 = t$, $t_0 = 0$ y $h = T - t$ y

$$E\left[E[f(Z(T)|\mathcal{H}_t]|\mathcal{H}_s\right] = E[f(Z(T))|\mathcal{H}_s]$$

pues $\mathcal{H}_s \subseteq \mathcal{H}_t$. Por último, usando de nuevo (4.18) para $t_1 = s$, $t_0 = 0$ y $h = T - s$

$$E[f(Z(T))|\mathcal{H}_s] = E^{Z(s)}[f(Z(T-s))] = g(s, Z(s))$$

□

Lema 4.2. En las condiciones del lema anterior si $Z(t)$ es una difusión de la forma

$$dZ(t) = b(Z(t))dt + \sigma(Z(t))dB(t) \tag{4.19}$$

y $g(t,z) = E^z[g(Z(T-t))]$ es $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$, entonces vale

$$\mathcal{L}g = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\frac{\partial g}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,z)\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} \equiv 0 \tag{4.20}$$

Esto se conoce como la ecuación retrasada de Kolmogorov.

Demostración. Tomamos un $t' < T$ y el proceso $(\tilde{Z}(t))_{t' \le t \le T}$ que satisface (4.19) con $\tilde{Z}(t') = \xi \in L^2(P)$. Luego $\tilde{Z}(t)$ es una difusión, satisface la propiedad de Markov por el Teorema 4.2 y por el lema previo tenemos que $Y(t) = g(t, \tilde{Z}(t)) = E^{\tilde{Z}(t)}[f(Z(T-t))]$ es una martingala. Además, como g es $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$ podemos usar la fórmula de Itô para $Y(t)$ y obtener

$$\begin{aligned} dY(t) = &\left[\frac{\partial g}{\partial t}(t,\tilde{Z}(t)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\tilde{Z}(t))\frac{\partial g}{\partial z_i}(t,\tilde{Z}(t)) + \right. \\ &\left. \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,\tilde{Z}(t))\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}(t,\tilde{Z}(t))\right]dt + \sum_{i,j=1}^{n,m}\frac{\partial g}{\partial z_i}(t,\tilde{Z}(t))\sigma_{ij}(t,\tilde{Z}(t))dB^{(j)}(t) \end{aligned} \tag{4.21}$$

Y como $Y(t)$ es martingala se sigue que el término de deriva es cero, o sea

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,\tilde{Z}(t)) + \sum_{i=1}^{n} b_i(\tilde{Z}(t))\frac{\partial g}{\partial z_i}(t,\tilde{Z}(t)) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,\tilde{Z}(t))\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}(t,\tilde{Z}(t)) = 0$$

En particular vale para $t = t'$ y $\tilde{Z}(t') = \xi$. Pero como t' y ξ eran arbitrarios, se sigue que para todo $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ vale

$$\mathcal{L}g = \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} b_i(z)\frac{\partial g}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(\sigma\sigma^T)_{ij}(t,z)\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j} \equiv 0 \tag{4.22}$$

□

Capítulo 5

Introducción a la Matemática Financiera

Comenzamos el capítulo definiendo los elementos que constituirán nuestro modelo matemático de un mercado financiero.

Definición 5.1. (a) Un *mercado* es un proceso de Itô $\mathcal{H}_t$-adaptado ($\mathcal{H}_t$ la filtración generada por $B_1(t), ..., B_m(t)$) $n+1$-dimensional que tiene la forma:

$$dX_0(t) = \rho(t, w)dt; \qquad X_0(0) = 1 \tag{5.1}$$

y

$$dX_i(t) = b_i(t, w)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(t, w)dB_j(t); \qquad X_i(0) = x_i \tag{5.2}$$

(b) El mercado se dice *normalizado* si $X_0(t) \equiv 1$.

(c) Una *cartera* en el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ es un proceso $n+1$-dimensional, (t, w)-medible y $\mathcal{H}_t$-adaptado

$$\theta(t, w) = (\theta_0(t, w), ..., \theta_n(t, w))$$

(d) El valor a tiempo t de la cartera $\theta(t)$ está dado por

$$V(t, w) = V^{\theta}(t, w) = \sum_{t=0}^{n} \theta_i(t)X_i(t) \tag{5.3}$$

(e) La cartera $\theta(t)$ se dice *autofinanciada* si

$$V(t) = V(0) + \int_0^t \theta(s) \cdot dX(s) = V(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^{n} \theta_i(s)dX_i(s) \tag{5.4}$$

por lo que para que esa integral tenga sentido debemos exigir además

$$\int_0^T \{|\theta_0(s)\rho(s)X(s) + \theta(s)\cdot b(s)| + \left\|\sigma^T(s)\theta(s)\right\|^2\}ds < \infty \quad \textbf{c.t.p.} \tag{5.5}$$

donde $\sigma^T(s)$ indica la trasposición de la matriz.

Comentario 5.1. En este modelo, $X_i(t) = X_i(t,w)$ representa el valor del activo i y θ_i la cantidad de unidades de ese activo en cartera. De los activos disponibles en el mercado, uno de ellos ($i = 0$) representa la inversión sin riesgo (es decir, no tiene término de difusión o «ruido»). Vamos a suponer que ρ, la tasa de ese activo sin riesgo, está acotada. Para el mercado $X(t)$, el mercado $\bar{X}(t) = X_0^{-1}(t)X(t)$ es su normalización (notar que puede hacerse pues $X_0 > 0$). Si escribimos $\xi(t) = X_0^{-1}(t)$ y lo tomamos como un proceso de Itô distinto a $X(t)$, usando la fórmula de Itô bidimensional para $g(y,x) = yx$ $(y, x \in \mathbb{R})$ y recordando que $dB(t)\cdot dt = dt \cdot dt = 0$ tenemos

$$d(\bar{X}_i(t)) = g(\xi(t), X_i(t)) = \xi(t)dX_i(t) + X_i(t)d(\xi(t)) = \xi(t)[dX_i(t) - \rho(t)X_i(t)dt] \tag{5.6}$$

y haciendo la misma cuenta para $\bar{V}^\theta = \xi(t)V^\theta$:

$$d\bar{V}^\theta(t) = \xi(t)[dV^\theta(t) - \rho(t)V^\theta(t)dt] \tag{5.7}$$

El requisito (e) dice que el valor de la cartera varía solamente por las variaciones de los activos que la componen, es decir, no hay ingresos o egresos extraordinarios: la cartera es autofinanciada. Además, reemplazando en (5.7) $V^\theta(s)$ con $\theta(t)\cdot X(t)$ (por (5.3)) y $dV^\theta(s)$ con $\theta(t)\cdot dX(t)$ (que es la forma diferencial de (5.4)), vemos que una cartera es autofinanciada para un mercado si y sólo si lo es para su normalización:

$$\begin{aligned} d\bar{V}^\theta(t) &= \xi(t)[\theta(t)\cdot dX(t) - \rho(t)\theta(t)\cdot X(t)dt] = \theta(t)\xi(t)[dX(t) - \rho(t)X(t)] = \\ &= \theta(t)\cdot d\bar{X}(t) \end{aligned} \tag{5.8}$$

Observación 5.1. Si ya tenemos dados $(\theta_1(t), ..., \theta_n(t))$ y una «riqueza inicial» z podemos elegir θ_0 de modo que $V^\theta(t)$ sea autofinanciada y satisfaga $V^\theta(0) = z$

Demostración. Definimos

$$\theta_0(t) = z + \xi(t)A(t) + \int_0^t \rho(s)A(s)\xi(s)ds \tag{5.9}$$

con $A(t) = \sum_{i=1}^n \left[\int_0^t \theta_i(s)dX_s - \theta_i(t)X_i(t)\right]$ y veamos que satisface lo pedido. En efecto

$$\theta_0(0)X_0(0) = \theta_0(0) = z + A(0) = z - \sum_{i=1}^n \theta_i(0)X_i(0) = z - (V^\theta(0) - \theta_0(0)X_0(0))$$

por lo que $z = V^\theta(0)$.

Ahora, haciendo la misma cuenta que en (5.6) para $\bar{A}(s) = \xi(s)A(s)$ tenemos

$$d\bar{A}(t) = \xi(t)[dA(t) - \rho(t)A(t)dt]$$

o, en forma integral y reordenando, $\xi(t)A(t) - A(0) + \int_0^t \rho(s)A(s)\xi(s)ds = \int_0^t \xi(s)dA(s)$, lo que reemplazando en (5.9) y notando que $z = V^\theta(0) = \theta_0(0) - A(0)$ nos permite escribir

$$\theta_0(t) = \theta_0(0) + \int_0^t \xi(s)dA(s)$$

y si escribimos $Y_0(t) = X_0(t)\theta_0(t) = g(X_0(t), \theta_0(t))$ para $g(x,y) = xy$ y usamos la fórmula de Itô bidimensional tenemos

$$Y_0(t) - Y_0(0) = \int_0^t X_0(s)d\theta_0(s) + \int_0^t \theta_0(s)dX_0(s)$$

y como $\int_0^t X_0(s)d\theta_0(s) = \int_0^t X_0(s)\xi(s)dA(s) = A(t) - A(0)$ nos queda

$$X_0(t)\theta_0(t) - X_0(0)\theta_0(0) = Y_0(t) - Y_0(0) = A(t) - A(0) + \int_0^t \theta_0(s)dX_0(s)$$

lo que tras un reordenamiento da

$$V^\theta(0) + \int_0^t \theta_0(s)dX_0(s) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \theta_i(s)dX_s = \sum_{i=1}^n \theta_i(t)X_i(t) + X_0(t)\theta_0(t)$$

donde el lado derecho es $V^\theta(t)$, por lo que la ecuación dice que la cartera es autofinanciada. $\square$

Definición 5.2. Dado un mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$, definimos:

(a) una cartera autofinanciada $\theta(s)$ se dirá *admisible* si existe $K < \infty$ tal que

$$V^\theta(t,w) \geq -K \qquad \text{para casi todo } (t,w) \in [0,T] \times \Omega$$

(b) una cartera admisible $\theta(s)$ se dirá un un *arbitraje* si $V^\theta(0) = 0$ y

$$V^\theta(T) \geq 0 \quad \text{c.t.p y} \quad P(V^\theta(T) > 0) > 0 \tag{5.10}$$

La definición (a) intuitivamente dice que no vamos a considerar admisibles carteras que permitan endeudarse indefinidamente. De hecho, se puede ver que hay carteras que son autofinanciadas pero violan (a) y permiten alcanzar cualquier valor final $V(T)$ casi seguramente.

La definición (b) formaliza lo que en finanzas se conoce como arbitraje: una situación en la que se puede asegurar una ganancia esperada estrictamente positiva con ningún riesgo.

Nuestro siguiente objetivo será caracterizar cuándo un mercado admite un arbitraje. Para ello, presentamos primero sin demostración un importante teorema de la teoría de procesos estocásticos (ver Teoremas 8.6.3-5 de [7]).

Teorema 5.1 (Teorema de Girsanov)**.** Sea $Y(t)$ un proceso de Itô a valores en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$dY(t) = b(t,w)dt + \sigma(t,w)dB(t); \qquad t \leq T$$

con $B(t)$ proceso de Wiener m-dimensional y σ con valores en $\mathbb{R}^{n\times m}$. Supongamos que existen procesos $u(t,w) \in \mathcal{W}^{(m)}$ y $\alpha(t,w) \in \mathcal{W}^{(n)}$ tales que:

$$\sigma(t,w)u(t,w) = b(t,w) - \alpha(t,w)$$

y supongamos que $u(t,w)$ satisface la condición de Novikov

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(t,w)dt\right)\right] < \infty \tag{5.11}$$

Entonces, $M(t) := \exp\left(-\int_0^t u(s,w)dB(s) - \int_0^t u^2(s,w)ds\right)$ es una martingala para $t \leq T$ y vale que $\tilde{B}(t) = \int_0^t u(s,w)ds + B(t)$ para $t \leq T$ es un proceso de Wiener con respecto a la medida Q dada por

$$Q(F) := \int_F M(T,w)dP(w) = \int_F M(t,w)dP(w) \qquad \text{para } F \in \mathcal{H}_T^{(m)} \tag{5.12}$$

Además, en términos de $\tilde{B}(t)$ el proceso $Y(t)$ tiene la representación:

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t \alpha(s,w)ds + \int_0^t \sigma(s,w)d\tilde{B}(s)$$

Los siguientes resultados nos serán de utilidad.

Lema 5.1. (a) La cartera $\theta(t)$ es admisible para $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ si y sólo si lo es para $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$

(b) El mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ admite un arbitraje si y sólo si $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ lo admite.

(c) Si $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ está normalizado, entonces tiene un arbitraje si y sólo si existe una cartera $\theta(s)$ tal que

$$V^{\theta}(t) \geq V^{\theta}(0) \quad \text{c.t.p y} \quad P(V^{\theta}(t) > V^{\theta}(0)) > 0$$

Demostración. (a) Ya vimos que $\theta(t)$ es autofinanciada para $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ si y sólo si lo es para su normalización en (5.8), falta ver que V^{θ} está acotada inferiormente si y sólo si $\bar{V}^{\theta}$ lo está. Pero como $\rho(t,w)$ está acotado $\xi(t)$ toma valores positivos en un rango acotado, por lo que $V^{\theta}(t)$ está acotado inferiormente si y sólo si $\xi(t)V^{\theta}(t)$ lo está.

(b) Se sigue trivialmente del hecho de que $\xi(t) > 0$ y entonces $\xi(t)V^{\theta}(t) > 0$ si y sólo si $V^{\theta}(t) > 0$ y $\xi(t)V^{\theta}(t) \geq 0$ si y sólo si $V^{\theta}(t) \geq 0$.

(c) Sea una cartera $\theta(s)$ tal que

$$V^{\theta}(t) \geq V^{\theta}(0) \quad \text{c.t.p y} \quad P(V^{\theta}(t) > V^{\theta}(0)) > 0 \tag{5.13}$$

Tomamos $\tilde{\theta}(t)$ definida de modo que $\tilde{\theta}_i(t) = \theta_i(t)$ para $i = 1, ..., n$ y eligiendo luego $\tilde{\theta}_0(t)$ tal que $V^{\tilde{\theta}}(0) = 0$ y $\tilde{\theta}(t)$ sea autofinanciada (ver Observación 5.1). Entonces, como $dX_0 = 0$ (el mercado es normalizado) tenemos:

$$V^{\tilde{\theta}}(t) = \int_0^t \tilde{\theta}(s)dX(s) = \int_0^t \theta(s)dX(s) = V^{\theta}(t) - V^{\theta}(0)$$

Y de esta igualdad y (5.13) se sigue que la cartera es un arbitraje. $\square$

Este último punto nos permite liberar el requisito de que la cartera tenga un valor inicial de 0 y nos acerca al concepto financiero informal de un arbitraje, donde ocurre una ganancia positiva sin riesgo, más allá del valor inicial.

Definición 5.3. Una medida Q tal que $Q \sim P$ (o sea, $Q << P$ y $P << Q$) y tal que el mercado normalizado $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ es una martingala (local) con respecto a Q se dirá una *medida martingala (local) equivalente* para $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$.

Lema 5.2. Si existe una medida martingala local equivalente para $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ en $\mathcal{H}_T$ entonces $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no admite arbitraje.

Demostración. Sea $\theta(t)$ un arbitraje para $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$. Entonces $\bar{V}^{\theta}(t)$ está acotada inferiormente (por 0). Además, es una martingala local con respecto a Q ($X(t)$ lo es por hipótesis y $\bar{V}^{\theta}(t) = \int_0^t \theta(s)dX(s)$, donde la integral de Itô preserva la propiedad de martingala local por el Teorema 3.6). Toda martingala local inferiormente acotada es una supermartingala (Teorema 2.4). Luego

$$E_Q[V^{\theta}(T)] \leq V^{\theta}(0) = 0$$

Además, como (5.10), que es la definición de arbitraje, vale para la medida P, también ha de valer para Q, pues los conjuntos de medida nula y de medida estrictamente positiva son los mismos ($P \sim Q$). Luego $V^\theta(T) \geq 0$ c.t.p en Q y $Q(V^\theta(T) > 0) > 0$ por lo que $E_Q[V^\theta(T)] > 0$, lo que es un absurdo.

Luego $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ no admite arbitraje y, por (b) del lema anterior, $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ tampoco.

□

Teorema 5.2. (a) Supongamos que existe un proceso $u(t,w) \in \mathcal{V}^{(m)}(0,T)$ que satisface la condición (5.11), tal que para $\hat{X}(t,w) = (X_1(t,w),...,X_n(t,w))$ vale

$$\sigma(t,w)u(t,w) = b(t,w) - \rho(t,w)\hat{X}(t,w) \quad \text{para casi todo } (t,w) \tag{5.14}$$

entonces el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no admite arbitraje.

(b) Recíprocamente, si $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no admite arbitraje, entonces existe un proceso $u(t,w)$ $\mathcal{H}_t$-adaptado, (t,w)-medible tal que

$$\sigma(t,w)u(t,w) = b(t,w) - \rho(t,w)\hat{X}(t,w) \quad \text{para casi todo } (t,w)$$

Demostración. (a) Basta ver que existe una medida martingala local equivalente para $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ (con $d\bar{X}(t) = \bar{b}dt + \bar{\sigma}dB(t)$). Tomamos

$$Q(F) = \int_F M(T,w)dP(w) \qquad \text{para } F \in \mathcal{H}_T^{(m)}$$

con $M(t) = \exp\left(-\int_0^t u(s,w)dB(s) - \int_0^t u^2(s,w)ds\right)$. Entonces $P \sim Q$ y, por el Teorema de Girsanov, el proceso $\tilde{B}(t) = \int_0^t u(s,w)ds + B(t)$ es un proceso de Wiener con respecto a la medida Q y se tiene:

$$d\bar{X}_i(t) = \bar{b}_i dt + \bar{\sigma}_i dB(t) = \bar{\sigma}_i d\tilde{B}(t)$$

$$\bar{X}_0 \equiv 1$$

para $i = 1,...,n$. Como la integral de Itô preserva la propiedad de martingala local, tenemos que $\bar{X}(t)$ es una Q-martingala local.

(b) Supongamos $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ normalizado (luego $\rho = 0$). Notemos que si la ecuación (5.14) no tiene solución, entonces b no pertenece al subespacio de $\mathbb{R}^n$ generado por las columnas de σ. En particular, si definimos

$$G^{(k)}(x_1,...,x_k,y) = \left(y - \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j\rangle h(x_j)x_j\right) h\left(y - \sum_{j=1}^{k} \langle y, x_j\rangle h(x_j)x_j\right)$$

$$\tilde{\sigma}_i = \begin{cases} G^{(i-1)}(\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_{i-1}, \sigma_i) & \text{para } i \geq 2 \\ \sigma_1 & \text{para } i = 1 \end{cases}$$

con σ_i columnas de σ y $h(x) = \mathcal{X}_{\mathbb{R}-\{0\}}(x)\frac{1}{x}$ (está bien definida) tenemos $\sigma^T v = 0$ y $v \cdot b \neq 0$ para $v = G^{(m+1)}(\tilde{\sigma}_1, ..., \tilde{\sigma}_m, b)$ (v es el último vector que resulta de aplicar la ortogonalización de Gram-Schmidt a $(\sigma_1, ..., \sigma_m, b)$ si b es l.i. con σ y es el vector nulo en caso contrario). Notemos que G es boreliana pues h lo es, luego, como σ y b son (t, w)-medibles y $\mathcal{H}_t$-adaptadas, tenemos que $v(t, w)$ también lo es. En consecuencia, el conjunto $F_t = \{w : \text{ la ecuación (5.14) no tiene solución}\} = \{w : \sigma(t, w)^T v(t, w) = 0 \text{ y } v(t, w) \cdot b(t, w) \neq 0\} = \{w : v(t, w) \neq 0\}$ es $\mathcal{H}_t$-medible para t fijo.

Definimos $\theta_i(t, w) = v(t, w)\text{signo}(b(t, w) \cdot v(t, w))$ para $i = 1, ..., n$ y θ_0 de manera que sea autofinanciada y $V^\theta(0) = 0$. Vemos además que $\theta(t, w)$ es (t, w)-medible y $\mathcal{H}_t$-adaptada pues $v(t, w)$ y $b(t, w)$ lo son. Entonces

$$V^\theta(t) = \int_0^t \sum_{i=1}^n \theta_i(s, w) dX_i(s) = \int_0^t \mathcal{X}_{F_s} |v(s, w) \cdot b(s, w)| ds + \int_0^t \theta(s, w)\sigma(s, w) dB(s) =$$

$$= \int_0^t \mathcal{X}_{F_s} |v(s, w) \cdot b(s, w)| ds + \int_0^t \mathcal{X}_{F_s} \text{signo}(b(s, w) \cdot v(s, w)) v(s, w)\sigma(s, w) dB(s)$$

$$= \int_0^t \mathcal{X}_{F_s} |v(s, w) \cdot b(s, w)| ds \geq 0$$

Pero como el mercado no tiene arbitrajes, entonces debe darse que $\mathcal{X}_{F_s} = 0$ c.t.p.

Ahora, si $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ no está normalizado y no tiene arbitraje, $\{\bar{X}(t)\}_{t\in[0,T]}$ tampoco lo tiene, luego existe $u(t, w)$ como en el enunciado del teorema tal que $\bar{\sigma}(t, w)u(t, w) = \bar{b}(t, w)$, con $\bar{b} = \xi(t)(b - \rho\hat{X})$ y $\hat{\sigma} = \xi(t)\sigma$, lo que implica $\sigma u = b - \rho\hat{X}$, como queríamos probar. □

A continuación, queremos considerar mercados financieros donde se pueda vender y comprar títulos «derivados» de los ya existentes X_i, dado que uno de los objetivos de este trabajo es mostrar las fórmulas para darle un precio a esos activos. Más aun, queremos considerar los mercados que son «completos» en el sentido de que todo posible activo que dependa del «estado futuro del mundo» (donde el «estado del mundo» a tiempo T está dado por la información que proveen los valores X_i) se puede vender y comprar en el mercado. Para formalizar estas nociones y poder caracterizar los mercados «completos», introducimos las siguientes definiciones, partiendo del supuesto de aquí en más de que el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ tiene una medida martingala equivalente Q como en el teorema 5.2.

Definición 5.4. (a) Un *reclamo contingente* (europeo) a tiempo T es una variable aleatoria $F(w)$ $\mathcal{H}_T$-medible acotada inferiormente.

(b) Decimos que el reclamo contingente F es *replicable* en el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ si existe una cartera admisible $\theta(t)$ y un número real z tales que $V^\theta(0) = z$, $F(w) = V^\theta(T)$ casi seguramente y tales que $\bar{V}^\theta(t)$ es una martingala con respecto a la medida equivalente Q del teorema (5.2). Si tal $\theta(t)$ existe decimos que es una cartera que *replica* a F.

(c) El mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ se dice *completo* si todo reclamo acotado F a tiempo T es replicable.

Comentario 5.2. Se puede demostrar que si existe un $\theta(t)$ admisible que replique a F en el sentido definido arriba, entonces es único, aunque esta unicidad depende fuertemente del hecho de que pedimos que el valor normalizado de la cartera sea una martingala. Si pedimos solamente que sea una martingala local, la unicidad se pierde.

A continuación, caracterizamos cuándo un mercado es completo.

Teorema 5.3. [Teorema de Completitud] El mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ de la forma de (5.2) es completo si y sólo si $\sigma(t,w)$ tiene inversa a izquierda para casi todo $(t,w)\in[0,T]\times\Omega$, o sea, si existe un proceso $\Pi(t,w)$ $\mathcal{H}_t$-adaptado con valores en $\mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

$$\Pi(t,w)\sigma(t,w) = I_m \qquad \text{para casi todo } (t,w)\in[0,T]\times\Omega \tag{5.15}$$

Antes de demostrar este teorema, enunciamos sin prueba el siguiente lema que será de ayuda en su demostración.

Lema 5.3. Sea un proceso $u(t,w)\in\mathcal{V}^{(m)}(T)$ que satisface la condición (5.11) y sea la medida Q definida como en el Teorema de Girsanov y en (a) del Teorema 5.2. Entonces $\tilde{B}(t) = \int_0^t u(s,w)ds + B(t)$ es una martingala con respecto a $\mathcal{H}_t$, la filtración generada por $\{B(s); s\le T\}$ y para cualquier $F\in L^2(\mathcal{H}_T,Q)$ existe una única representación

$$F(w) = E_Q[F] + \int_0^T \varphi(t,w)d\tilde{B}(t)$$

donde φ es un proceso (t,w)-medible, $\mathcal{H}_t$-adaptado tal que $E_Q\left[\int_0^T \varphi^2 ds\right] < \infty$.

Demostración del Teorema. (i) Supongamos que vale (5.15). Sea F un reclamo acotado y sean Q y $\tilde{B}$ como en el Teorema de Girsanov y en el Lema anterior, por lo que vale

$$d\bar{X}_i(t) = \bar{b}_i dt + \bar{\sigma}_i dB(t) = \bar{\sigma}_i d\tilde{B}(t) \tag{5.16}$$

con $\bar{b} = \xi(b-\rho\hat{X})$ y $\bar{\sigma} = \xi\sigma$. Por el mismo lema vale

$$\xi(T)F(w) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^T \varphi(t,w)d\tilde{B}(t) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^T \sum_j \varphi_j(t,w)d\tilde{B}_j(t)$$

para un $\varphi(t,w) = (\varphi_1(t,w), ..., \varphi_m(t,w))$. Luego, podemos tomar

$$\hat{\theta}(t,w) = X_0(t,w)\varphi(t,w)\Pi(t,w) \tag{5.17}$$

para $\hat{\theta}(t,w) = (\theta_1(t,w), ..., \theta_n(t,w))$ y elegir θ_0 de modo que la cartera sea autofinanciada y $\bar{V}^\theta(0) = V^\theta(0) = E_Q[\xi(T)F]$. Con esta elección y usando (5.16) vemos que:

$$\bar{V}^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s)d\bar{X}(s) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^t \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) =$$

$$= E_Q[\xi(T)F] + \int_0^t \varphi(s)d\tilde{B}(s) = E_Q[\xi(T)F|\mathcal{H}_t]$$

de lo que se sigue que $F(w) = V^\theta(T,w)$ casi seguramente, que $\bar{V}^\theta(t)$ está acotado inferiormente pues $\xi(t)F$ lo está y además se sigue que es una Q-martingala pues admite la representación $\bar{V}^\theta(t) = z + \int_0^t \varphi(s)d\tilde{B}(s)$ con z constante y φ tal que $E_Q\left[\int_0^T \varphi^2 ds\right] < \infty$ (o sea, $\varphi \in \mathcal{V}_Q$). Luego F es replicable y como F era cualquier reclamo contingente acotado, el mercado es completo.

(ii) Recíprocamente, asumamos que $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ es completo, luego su normalización lo es, así que podemos suponer que $\rho = 0$. Tomemos un $\varphi(t,w)$ cualquiera a valores en $\mathbb{R}^m$ tal que $E_Q\left[\int_0^T \varphi^2 ds\right]$ y veamos que está en el espacio generado por las columnas de σ, lo cual implica que el rango de σ es m y por lo tanto tiene una inversa a izquierda como en (5.15). Definimos $F(w) := \int_0^T \varphi(s,w)d\tilde{B}(s)$ y tenemos $E_Q[F^2] < \infty$ y $E_Q[F] = 0$, por lo que podemos tomar una sucesión de reclamos acotados $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $F_k \to F$ en $L^2(Q)$ y $E[F_k] = 0$.

Por completitud existe para cada reclamo acotado F_k una cartera $\theta^{(k)} = (\theta_0^{(k)}, \hat{\theta}^{(k)})$ tal que $V^{\theta^{(k)}}(t) = \int_0^t \hat{\theta}^{(k)}\sigma d\tilde{B}(s)$ es una Q-martingala y $F_k(w) = V^{\theta^{(k)}}(T,w)$. Además, por la isometría de Itô

$$E_Q[(F_k - F_j)^2] = E_Q[(V^{\theta^{(k)}} - V^{\theta^{(j)}})^2] = E_Q\left[\left(\int_0^T (\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta}^{(j)})\sigma d\tilde{B}(s)\right)^2\right] =$$

$$= E_Q\left[\int_0^T (\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta}^{(j)})^2\sigma^2 ds\right]$$

de modo que $\{\hat{\theta}^{(k)}\sigma\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathcal{L}\times Q)$, con $\mathcal{L}$ medida de Lebesgue en $[0,T]$. Llamamos $\psi(t,w) = (\psi_1(t,w), ..., \psi_m(t,w))$ el límite de la sucesión. Luego, como $E_Q[F_k|\tilde{\mathcal{H}}_t] = V^{\theta^{(k)}}(t)$ para $t < T$ ($V^{\theta^{(k)}}(t)$ es una Q-martingala respecto a la filtración $\tilde{\mathcal{H}}_t$ generada por $\tilde{B}(s)$) y usando que la esperanza condicional es continua en L^2 tenemos:

$$\int_0^t \psi(s)d\tilde{B}(s) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t \hat{\theta}^{(k)}(s)\sigma d\tilde{B}(s) = \lim_{k\to\infty} E_Q[F_k|\tilde{\mathcal{H}}_t] = E_Q[F|\tilde{\mathcal{H}}_t] = \int_0^t \varphi(s)d\tilde{B}(s)$$

casi seguramente para todo $t \in [0,T]$. Por unicidad, $\varphi = \psi$ para casi todo (t,w). Entonces, tomando una subsucesión de $\{\hat{\theta}^{(k)}\sigma\}_{k=1}^{\infty}$, tenemos una sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $u_k(t,w)\sigma(t,w) \to \varphi(t,w)$ para casi todo (t,w), lo que implica que φ está en el subespacio generado por las columnas de σ para casi todo (t,w), como queríamos probar. □

Corolario 5.1. Si el mercado es completo existe un único u que satisface (5.14) y está dado por $u(t,w) = \Pi(t,w)(b(t,w) - \rho(t,w)\hat{X}(t,w))$. También vale que $n \geq m$ pues si $n < m$ entonces σ no podría tener rango m.

Por otro lado, si sabemos que $n = m$, entonces el mercado es completo si y sólo si σ es invertible.

Ahora estamos en condiciones de plantear el problema de hallar un precio para opciones de compra y venta de activos. Una opción europea sobre el reclamo contingente F a tiempo T es una garantía de que se me pagará la cantidad $F(w)$ en T. El objetivo es determinar cuánto debería pagarse por esa garantía. Para que un comprador pague y por esta garantía y acepte una riqueza inicial de $-y$, debería poder hallar una cartera θ tal que $V^\theta(T) + F(w) = -y + \int_0^T \theta dX(s) \geq 0$ c.t.p. Luego el precio $p = p(F)$ máximo que estaría dispuesto a pagar es

$$p(F) = \sup\{y : \ \exists\theta \text{ admisible}; -y + \int_0^T \theta dX(s) + F(w) \geq 0 \text{ c.t.p}\}$$

Análogamente, el precio mínimo que estaría dispuesto a aceptar el vendedor de la opción es

$$q(F) = \inf\{y : \ \exists\theta \text{ admisible}; y + \int_0^T \theta dX(s) - F(w) \geq 0 \text{ c.t.p}\}$$

Teorema 5.4. (a) Supongamos que existe un u que satisface (5.14) y (5.11), sea F un reclamo contingente a tiempo T tal que $E_Q[\xi(T)F] < \infty$, donde Q es la medida martingala equivalente del Teorema 5.2 dada por u. Entonces

$$\operatorname{essinf} F(w) \leq p(F) \leq E_Q[\xi(T)F] \leq q(F) \leq \infty$$

(b) Supongamos que además se cumple que el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ es completo, entonces

$$p(F) = E_Q[\xi(T)F] = q(F)$$

(y se llama el *valor* o *precio* de la opción)

Demostración. (a) Como F está acotado inferiormente puedo tomar $y < F(w)$ y tomando $\hat{\theta}(t) = 0$ y θ_0 tal que $V^\theta(0) = -y$ tengo $V^\theta(t) = -y > -F(w)$, luego essinf $F(w) \leq p(F)$. Para la segunda desigualdad, sea cualquier y tal que existe una cartera admisible para la que vale $V^\theta(T) = -y + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq -F(w)$. Esto implica que $\xi(T)V^\theta(T) = -y + \int_0^T \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) \geq -\xi(T)F(w)$.

Observamos además que $\xi(t)V^\theta(t) = -y+\int_0^t \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s)$ es una Q-martingala local (pues es una constante más una integral de Itô sobre un proceso de Wiener). También es acotada inferiormente (pues la cartera debe ser admisible). Las martingalas locales acotadas inferiormente son supermartingalas, luego $E_Q[\xi(t)V^\theta(t)] \leq \xi(0)V^\theta(0) = -y$ y

$$-E_Q[\xi(T)F] \leq E_Q[\xi(T)V^\theta(T)] \leq -y$$

y como esto era para cualquier precio y aceptable, vale $p(F) \leq E_Q[\xi(T)F]$. Un argumento similar muestra que $q(F) \geq E_Q[\xi(T)F]$. En efecto, sea cualquier z y una cartera admisible θ tal que $V^\theta(T) = z + \int_0^T \theta(s)dX(s) \geq F(w)$. Luego, como antes, vale $\xi(T)V^\theta(T) = z + \int_0^T \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) \geq \xi(T)F(w)$, lo que resulta en $z \geq E_Q[\xi(T)F]$, si tal z existe. Si no, $q(F) = \infty$ y en cualquier caso la desigualdad vale.

(b) Supongamos ahora que, además, el mercado es completo. Definimos

$$F_k(w) = \begin{cases} k & \text{si } F(w) \geq k \\ F(w) & \text{si } F(w) < k \end{cases}$$

Por completitud, como los F_k son acotados existen (únicos) $y_k \in \mathbb{R}$ y $\theta^{(k)}$ tales que $\bar{V}^{\theta^{(k)}}(t)$ es una Q-martingala y $-y_k + \int_0^T \xi(s)\theta^{(k)T}(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) = -\xi(T)F_k(w)$. Como $\bar{V}^\theta(t)$ es una Q-martingala, $E_Q[\bar{V}^\theta(t)] = E_Q[0] = -y_k$ para todo $t \leq T$. En particular,

$$-y_k = -E_Q[\xi(T)F_k]$$

Como $F_k \leq F_{k+1} \leq ... \leq F$ tenemos

$$p(F) \geq p(F_k) \geq y_k = E_Q[\xi F_k] \to E_Q[\xi(T)F]$$

por convergencia monótona. Luego $p(F) = E_Q[\xi(T)F]$.

Un argumento similar prueba $q(F) = E_Q[\xi(T)F]$. □

Teorema 5.5. Sea $Y(t)$ el único proceso de la forma $dY(t) = b(Y(t))dt+\sigma(Y(t))dB(t)$ con $Y(0) = y$ para $y \in \mathbb{R}^n$ (con b y σ como en las hipótesis del teorema de existencia del capítulo 4). Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ función continua tal que

$$E^z[|f(Z(t))|] < \infty$$

donde $Z(t)$ es el único proceso de la forma

$$\rho(Z(t))Z(t)dt + \sigma(Y(t))dB(t) \tag{5.18}$$

(con $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz y acotada) tal que $Z(0) = z$ (ver (4.17) y la nota al pie). Supongamos además que

$$\xi^T \sigma(x) \sigma^T(x) \xi \geq c|\xi|^2 \tag{5.19}$$

para algún $c > 0$ y para todo $x, \xi \in \mathbb{R}^n$ y que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ existe $u = u(y) \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$\sigma(y)u(y) = b(y) - \rho(y)y \quad \text{ y } \quad E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T u^2(Y(s))ds\right)\right] < \infty \tag{5.20}$$

Entonces

$$f(Y(T)) = E_Q^y[f(Y(T))] + \int_0^T \varphi(t,w) d\tilde{B}(t) \tag{5.21}$$

con

$$\varphi_j(t,w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(E^y[f(Z(T-t))]\right)_{y=Y(t)} \sigma_{ij}(Y(t)); \qquad \text{para } j = 1, ..., m \tag{5.22}$$

y

$$Q(A) = \int_A \exp\left(-\int_0^T u(Y(t))dB(t) - \frac{1}{2}\int_0^T u^2(Y(t))dt\right) dP$$

$$\tilde{B}(t) = \int_0^t u(Y(s))ds + B(t) \tag{5.23}$$

para $A \in \mathcal{H}_T$

Demostración. Definimos $v(t,z) = E^z[f(Z(t))]$ y $g(t,z) = v(T-t,z)$. Se puede demostrar que (5.19) y f continua implican que v es $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$[4], entonces g también lo es y podemos aplicar el Lema 4.2. Luego, como $-\frac{\partial v}{\partial t}(t,z) = \frac{\partial g}{\partial t}(t,z)$, las derivadas respecto a z de g y v son las mismas y el término de deriva es $\rho Z_i(t)$ tenemos que para todo $(t,z) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ vale

$$-\frac{\partial v}{\partial t}(t,z) + \rho(z)\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial v}{\partial z_i}(t,z) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n (\sigma\sigma^T)_{ij}(t,z) \frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_j}(t,z) = 0$$

$$v(0,z) = f(z)$$

[4]ver Teorema 13.18 de [2]

Con esto, si ahora escribimos $\eta(t) = g(t, Y(t))$ usando la fórmula de Itô tenemos

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial g}{\partial t}(t, Y(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(t, Y(t)) b_i(Y(t)) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_j}(t, Y(t)) (\sigma\sigma^T)_{ij}(Y(t))\right] dt +$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(t, Y(t)) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(Y(t)) dB_j(t) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(t, Y(t)) \left[(b_i(Y(t)) - \rho(Y(t)))Y_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(Y(t)) dB_j(t)\right] \tag{5.24}$$

Y usando (5.20), (5.23) y el Teorema de Girsanov esto da:

$$dY(t) = \rho(Y(t))Y(t)dt + \sigma(Y(t))d\tilde{B}(t) \tag{5.25}$$

$$d\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(t, Y(t)) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(Y(t)) d\tilde{B}_j(t)$$

Ahora $\eta(T) = v(0, Y(T)) = E^z[f(Z(0))]_{z=Y(T)} = f(Y(T))$ y $\eta(0) = v(T, Y(0)) = E^y[f(Z(T))]$. Luego

$$\eta(T) = f(Y(T)) = E^y[f(Z(T))] + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial z_i}(t, Y(t)) \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij}(Y(t)) d\tilde{B}_j(t)$$

Por último, (5.25) indica que $Y(t)$ y $Z(t)$ son solución débil de la misma ecuación, luego tienen la misma distribución por unicidad débil, y $E_Q^y[f(Y(T))] = E^y[f(Z(T))]$. Así nos queda finalmente la igualdad deseada. $\square$

Corolario 5.2. Si $\xi(T)F(w) = f(Y(T))$ está en $L^2(Q)$ y $E[\int_0^T \varphi^2(s, w)ds] < \infty$ la φ es la única $\varphi \in \mathcal{V}$ del Lema (5.3) tal que

$$\xi(T)F(w) = E_Q[\xi(T)F] + \int_0^T \varphi(t, w) d\tilde{B}(t)$$

Corolario 5.3. Si el mercado $X(t) = (X_0(t), Y(t))$ es completo, la cartera que replica a $F(w) = h(Y(T)))$ (con h tal que $\xi(T)h(y) = f(y)$) dada por el teorema de completitud será

$$\hat{\theta}(t, w) = X_0(t)\varphi(t, w)\Pi(Y(t))$$

con $\Pi(Y(t))$ inversa a izquierda de $\sigma(Y(t))$ y $\varphi(t,w)$ como en (5.22). El precio de la opción a tiempo 0 será entonces

$$E_Q^y[\xi(T)h(Y(T))] = E^y[f(Z(T))]$$

Comentario 5.3. Este resultado para el precio a tiempo 0 de una opción sobre un reclamo a tiempo T se extiende de manera natural al precio a tiempo t de la misma opción. En ese caso, dado que el precio del activo subyacente a tiempo t es $Y(t) = y$ el precio de la opción es

$$p(t) = E_Q^y[\xi(T-t)h(Y(T))] = E^y[\xi(T-t)h(Z(T))]$$

Notemos que para el caso de reclamos acotados inferiormente $E_Q^{Y(t)}[\xi(T-t)h(Y(T))]$ debe coincidir con el valor a tiempo t de la cartera $V^\theta(t)$ que replica al reclamo hallada en la parte (a) de la demostración del Teorema de Completitud.

Hemos desarrollado el marco matemático necesario para analizar el problema de darle un precio a opciones concretas operadas en el mundo real. Esta es la tarea del próximo capítulo. En particular, podremos enunciar y demostrar la fórmula generalizada de Black-Scholes.

Capítulo 6

Valuación de Opciones

Presentamos en primer término un resultado para el precio de opciones europeas con algunos supuestos relativamente fuertes sobre el comportamiento del mercado. La ganancia a cambio de estos supuestos estará en las expresiones cerradas que derivaremos.

Teorema 6.1. Sea $X(t)$ proceso dado por

$$\begin{aligned} dX_0(t) &= \rho(t)X_0(t)dt; \qquad X_0(0) = 1 \\ dX_1(t) &= \alpha(t,w)X_1(t,w)dt + \beta(t)X_1(t)dB(t); \qquad X_1(0) = x_1 > 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $\rho(t), \beta(t)$ son determinísticas, $\int_0^T \beta^2(s)ds < \infty$ y

$$E\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \frac{(\alpha(t,w)-\rho(t))^2}{\beta^2(t)}dt\right)\right] < \infty$$

(a) Entonces el mercado es completo y el precio a tiempo $t = 0$ del reclamo contingente $F(w) = f(X_1(T,w))$ donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es inferiormente acotada y $E_Q[f(X_1(T,w))] < \infty$ es

$$p = \frac{\xi(T)}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1 \exp\left(y + \int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds\right)\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta^2}\right) dy \tag{6.2}$$

donde $\xi(T) = \exp(-\int_0^T \rho(s)ds)$ y $\delta^2 = \int_0^T \beta^2(s)ds$

(b) Si $\rho, \alpha, \beta \neq 0$ son constantes y $f \in C^1(\mathbb{R})$ entonces la cartera admisible $\theta(t)$ necesaria para replicar el reclamo contingente $F(w) = f(X_1(T,w))$ está dada por

$$\theta_1(t,w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\beta x - \frac{x^2}{2(T-t)} - \frac{1}{2}\beta^2(T-t)\right)$$

$$f'(X_1(t,w)\exp\{\beta x + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)\})dx$$

y $\theta_0(t,w)$ está dado por la observación 5.1.

Demostración. (a) Como β es inversible, el mercado es completo por el Teorema 5.3 y la u que resuelve (5.14) es $u(t,w) = \beta^{-1}(t,w)[\alpha(t,w) - \rho(t,w)]$ que, por hipótesis, satisface la condición (5.11), por lo que estamos en las condiciones del Teorema de Girsanov y podemos tomar Q y $\tilde{B}$ como en (5.23). Dada la completitud, el teorema 5.4 nos dice que $p(F) = q(F) = E_Q[\xi(T)F]$. Veamos ahora la forma de X_1 dada la EDE (6.1). Podemos usar la fórmula de Itô con $g(s,x) = \ln x$ y $Y(t) = g(t, X_1(t))$ entonces tenemos

$$\begin{aligned} Y(t) =& Y(0) + \int_0^t (\frac{1}{X_1(s)})\alpha(s,w)X_1(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{X_1^2(s)}\beta^2(s,w)X_1^2(s)ds + \\ & \int_0^t \frac{1}{X_1(s)}\beta(s,w)X_1(s)dB(s) \end{aligned} \tag{6.3}$$

lo que implica

$$X(t) = x_1\exp\left(\int_0^t (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)ds + \int_0^t \beta dB(s)\right)$$

o bien (haciendo el cambio de medida del Teorema de Girsanov de modo que $dX_1(t) = \rho(t,w)X_1(t,w)dt + \beta(t)X_1(t)d\tilde{B}(t)$)

$$\begin{aligned} Y(t) =& Y(0) + \int_0^t (\frac{1}{X_1(s)})\rho(s,w)X_1(s)ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{-1}{X_1^2(s)}\beta^2(s,w)X_1^2(s)ds \\ & + \int_0^t \frac{1}{X_1(s)}\beta(s,w)X_1(s)d\tilde{B}(s) \end{aligned} \tag{6.4}$$

y

$$X(t) = x_1\exp\left(\int_0^t (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)ds + \int_0^t \beta d\tilde{B}(s)\right)$$

Como $p(F) = E_Q[\xi(T)F]$ concluimos:

$$p(F) = \xi(T)E_Q\left[f\left(x_1\exp\left(\int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta(s)^2)ds + \int_0^T \beta(s)d\tilde{B}(s)\right)\right)\right] \tag{6.5}$$

Ahora bien, la variable aleatoria $\int_0^T \beta(s)d\tilde{B}(s)$ es normal pues $\delta < \infty$ implica que $\beta \in \mathcal{V}$ y entonces la integral es límite en $L^2(P)$ de integrales simples de la forma $\sum_j b_j(t_j)\Delta\tilde{B}_j$ que son normales pues b_j, al igual que $b(s)$ no depende de w (y límite en L^2 de variables normales es normal). En particular, su media es 0 y con la isometría de Itô vemos que su desvio estándar es δ. Luego, como $\int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta(s)^2)ds$ es determinista, la expresión (6.5) toma la forma

$$p = \frac{\xi(T)}{\delta\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f\left(x_1\exp\left(y + \int_0^T (\rho(s) - \frac{1}{2}\beta^2(s))ds\right)\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2\delta^2}\right) dy$$

(b) Se sigue del Teorema 5.5 para $h(y) = e^{\rho T}f(y)$, con la salvedad de que β no satisface (5.19), aunque puede chequearse directamente que $v(t,z) = E$ es $C^{1,2}([0,\infty) \times \mathbb{R}^n)$. La cartera que buscamos está dada por (5.17) de la demostración del Teorema de Completitud:

$$\hat{\theta}_1(t,w) = X_0(t,w)\varphi(t,w)(\beta X_1(t,w))^{-1}$$

donde $\varphi(t,w)$ está dada por (5.22) del Teorema 5.5 (ver Corolario 5.3). Además, como ρ, β, α son constantes tenemos:

$$Y(t) = X_1(t) = x_1\exp(\beta B(t) + (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)t)$$

$$Z(t) = z_1\exp(\beta B(t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)t)$$

Luego

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_1(t,w) =& e^{\rho t}\left(\frac{\partial}{\partial y}E^y[e^{\rho T}f(Z(T-t))]_{y=Y(t)}(\beta X_1(t,w))\right)(\beta X_1(t,w))^{-1} \\
&= e^{\rho(t-T)}\frac{\partial}{\partial y}E[f(y\exp(\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t)))]_{y=Y(t)} \\
&= e^{\rho(t-T)}E\left[f'\left(y\exp(\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t))\right)\right. \\
&\left.\cdot\exp(\beta B(T-t) + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t))\right]_{y=T(y)} \\
&= \frac{e^{\rho(t-T)}}{\sqrt{2\pi(T-t)}}\int_{\mathbb{R}} f'(Y(t,w)\exp(\beta x + (\alpha - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t))) \\
&\exp(\beta x + (\rho - \frac{1}{2}\beta^2)(T-t))e^{-\frac{x^2}{2(T-t)}}dx
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$\square$

Corolario 6.1. Bajo las hipótesis de (b) del teorema anterior supongamos además $f(x) = (x - K)^+$ de modo que

$$F(w) = (X_1(T) - K)^+ \tag{6.7}$$

Entonces

$$p = x_1\Phi(u) - e^{-\rho T} K\Phi(u - \beta\sqrt{T}) \tag{6.8}$$

con Φ función de distribución de una variable aleatoria normal de media 0 y $\sigma = 1$ y

$$u = \frac{ln(\frac{x_1}{K}) + (\rho + \frac{\beta^2}{2})T}{\beta\sqrt{T}}$$

La ecuación (6.7) describe el pago asociado a un *call* Europeo u opción de compra a precio de ejercicio o *strike* K. Esta opción garantiza al comprador la posibilidad (no la obligación) de comprar a tiempo T una unidad del activo subyacente X_1 a precio K, de modo que habrá una ganancia $X_1(T) - K$ sólo si $X_1(T) \geq K$, pues en caso contrario el comprador del *call* no ejercerá la opción.

La fórmula (6.8) es la que se derivó en el paper original de Black y Scholes.

Demostración. Usamos directamente la fórmula (6.2) de (a) para α, β, ρ constantes:

$$p = \frac{e^{-\rho T}}{\beta\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(x_1 \exp\left(y + T(\rho - \frac{1}{2}\beta^2) \right) - K \right)^+ e^{-\frac{y^2}{2\beta^2 T}} dy$$

$$= \frac{1}{\beta\sqrt{2\pi T}} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(x_1 e^{y - \frac{T}{2}\beta^2} - e^{-\rho T} K \right)^+ e^{-\frac{y^2}{2\beta^2 T}} dy$$

y usando el cambio de variable $y = \beta\sqrt{T}z$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1 e^{\beta\sqrt{T}z} \geq K\exp\{T(\frac{\beta^2}{2} - \rho)\}} \left(x_1 e^{\beta\sqrt{T}z - \frac{T}{2}\beta^2} - e^{-\rho T} K \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{T(\frac{\beta^2}{2} - \rho) + \ln K - \ln x_1}{\beta\sqrt{T}}}^{\infty} \left(x_1 e^{\beta\sqrt{T}z - \frac{T}{2}\beta^2} - e^{-\rho T} K \right) e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int\limits_{\beta\sqrt{T} - u}^{\infty} x_1 e^{\beta\sqrt{T}z - \frac{T}{2}\beta^2} e^{-\frac{z^2}{2}} dz - \int\limits_{\beta\sqrt{T} - u}^{\infty} e^{-\rho T} K e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right]$$

$$= \int_{\beta\sqrt{T}-u}^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\beta\sqrt{T})^2}{2}} dz - e^{-\rho T} K\Phi(u - \beta\sqrt{T})$$

y usando el cambio de variables $x = z - \beta\sqrt{T}$ obtenemos

$$p = \int_{-u}^{\infty} \frac{x_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x)^2}{2}} dx - e^{-\rho T} K\Phi(u - \beta\sqrt{T}) = x_1\Phi(u) - e^{-\rho T} K\Phi(u - \beta\sqrt{T})$$

como queríamos. □

El caso del *call* europeo analizado previamente es excepcional en el sentido de que para la mayoría de los opciones de compra sobre activos futuros no se conoce una fórmula cerrada del valor que deberían tener. Analizaremos a continuación un caso de este tipo.

Definición 6.1. Sea $X(t)$ un mercado como en (b) del Teorema 6.1 con $X_1(0) = x$ e $Y(t)$ tal que $dY(t) = X_1(t)dt$, o sea

$$Y(t) = y + \int_0^t X_1(u)du$$

Decimos que el reclamo contingente a tiempo T dado por $F(w) = f(Y(T))$ es una *opción asiática* sobre X.

Comentario 6.1. A diferencia de la opción europea, la asiática es pues una opción cuyo pago no depende del valor del activo subyacente X_1 en T sino del promedio de ese valor desde que fue comprada hasta T. Así, f podría ser $f(x) = (x - K)^+$ y diremos que es un *call* asiático, es decir, la opción de recibir como pago el valor promedio del activo subyacente a cambio del precio de ejercicio o *strike* K.

En adelante, para facilitar cálculos, supondremos que nuestra medida P es una medida martingala equivalente para el mercado $X(t)$ (y entonces también $u = 0$ y $B(t) = \tilde{B}(t)$).

Como queremos considerar la variación del precio de la opción debemos considerar la misma a partir de tiempos t distintos de 0. Para $0 \leq t \leq s \leq T$ escribimos

$$Y(s) = y + \int_t^s X_1(u)du \tag{6.9}$$

con

$$X_1(s) = x \cdot \exp(\sigma(B(s) - B(t)) + (\rho - \frac{1}{2}\sigma^2)(s - t)) \tag{6.10}$$

y t, $X_1(t) = x$, $Y(t) = y$ valores fijos.

Teorema 6.2. Sea f continua, $E^{t,x,y}[|f(Y(T))|] < \infty$ y $u(t,x,y) = E^{t,x,y}[f(Y(T))]$ para $x \geq 0, y \in \mathbb{R}, t \in [0,T]$ donde el supraíndice se pone para precisar que el proceso $Y(s)$ dentro del valor esperado es el dado por (6.9) y (6.10) para los valores fijos t, x e y. La función $u(t,x,y)$ satisface la EDP

$$\mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \rho x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{6.11}$$

con condición terminal

$$u(T,x,y) = f(y) \qquad y \in \mathbb{R}, x \geq 0$$

y de borde

$$u(t,0,y) = f(y) \qquad t \in [0,T], y \in \mathbb{R}$$

Además, $u(t, X_1(t), Y(t))$ es una martingala.

Demostración. Queremos usar los Lemas 4.1 y 4.2 para la familia de procesos $\{Z(s) = (X_1(s), Y(s))\}_{t\in[0,T],x,y\in\mathbb{R}}$ por lo que debemos ver que un tal proceso $Z(s)$ es una difusión. En efecto, si ponemos $(\tilde{b}_1(z), \tilde{b}_2(z)) = (\rho z_1, z_1)$ y $(\tilde{\sigma}_1(z), \tilde{\sigma}_2(z)) = (\sigma, 0)$ tenemos que

$$dZ_i(s) = \tilde{b}_i(Z(s))ds + \tilde{\sigma}_i(Z(s))dB(s) \qquad \text{para } i = 1,2 \tag{6.12}$$

por lo que $Z(s)$ es una difusión con $Z(t) = z = (x,y)$ su valor inicial.

Notemos que $v(t,z) = E^{t,z}[f'(Z(T))] = E^z[f'(Z(T-t))]$ donde $f' = f \circ \pi_2$, pues la única solución a la EDE con condición inicial $Z(t) = z$ consiste en componer la traslación temporal $\mathcal{T}(s) = t + s$ a la derecha de la solución Z' de la misma EDE con condición inicial $Z'(0) = z$ (o sea, $Z = Z' \circ \mathcal{T}$). Luego $v(t,z) = u(t,x,y)$ está en las condiciones del Lema 4.1 y vale que $v(t, Z(t))$ es una martingala. Además por el Lema 4.2[5] vale que $\mathcal{L}v \equiv 0$ donde $\mathcal{L}$ es el operador diferencial de la EDP retrasada de Kolmogorov (4.20), que en este caso adopta la forma

$$\mathcal{L}v = \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2} \tilde{b}_i(z)\frac{\partial v}{\partial z_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} (\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^T)_{ij}(t,z)\frac{\partial^2 v}{\partial z_i \partial z_j} =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \rho z_1 \frac{\partial v}{\partial z_1} + \frac{1}{2}\sigma^2 z_1^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z_1^2} + z_1\frac{\partial v}{\partial z_2} = \frac{\partial u}{\partial t} + \rho x\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial y}$$

pues $u(t,x,y) = v(t,z)$ con $z_1 = x$ y $z_2 = y$, con lo cual obtenemos (6.11). Las condiciones terminal y de borde se chequean trivialmente. □

[5]Estrictamente, deberíamos ver que v es $C^{2,1}$, lo cual no se sigue de elipticidad como en el Teorema 5.5, pero esto puede hacerse manualmente y será omitido como hicimos en (b) del Teorema 6.1.

Como P es una medida martingala equivalente para $X(t)$, por el segundo corolario al Teorema 5.5 nuestra opción a tiempo 0 debe valer

$$p = E_Q^{x,y}[\xi(T)f(Y(T))] = \xi(T)E^{x,y}[f(Y(T))] = \xi(T)u(0,x,y) = \tilde{u}(0,x,y)$$

con $\tilde{u}(0,x,y) = \xi(T-t)u(t,x,y)$ y $\xi(s) = e^{-\rho s}$ como antes

Teorema 6.3. La cartera tal que $\theta_1(t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, X_1(t), Y(t))$ y $\theta_0(t)$ está dado por la observación 5.1 para $V^\theta(0) = E^{x,y}[\xi(T)f(Y(T))]$ replica al reclamo $F(w) = f(Y(T))$ si este es acotado inferiormente.

Demostración. De la definición de $\tilde{u}$ y dado que u satisface (6.11) se sigue fácilmente que $\tilde{u}$ satisface

$$-\rho\tilde{u} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \rho x \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} + x\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} = 0 \tag{6.13}$$

Si el $\theta_1(t)$ elegido es tal que $V^\theta(t) = \tilde{u}(t, X_1(t), Y(t))$ entonces valdrá que $V^\theta(T) = f(Y(T)) = F$ y además $\xi(t)V^\theta(t) = \xi(T)u(t, X_1(t), Y(t))$ será una martingala pues ya vimos que $u(t, X_1(t), Y(t))$ lo es, por lo que la cartera será acotada inferiormente (y luego replicará al reclamo $f(Y(T))$) si este es acotado inferiormente, lo que demuestra el teorema.

Veamos pues que $V^\theta(t) = \tilde{u}(t, X_1(t), Y(t)) = W(t)$. Por la fórmula de Itô, $W(t)$ satisface

$$\begin{aligned}
dW(t) = \Bigg[&\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(t, X_1(t), Y(t)) + \rho X_1(t)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, X_1(t), Y(t)) + X_1(t)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y}(t, X_1(t), Y(t)) + \\
&\frac{1}{2}\sigma^2 X_1^2(t)\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(t, X_1(t), Y(t))\Bigg] dt + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, X_1(t), Y(t))\sigma X_1(t) dB(t) = \\
= \rho\tilde{u}&(t, X_1(t), Y(t))dt + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, X_1(t), Y(t))\sigma X_1(t)dB(t) = \rho W(t)dt + \theta_1(t)\sigma X_1(t)dB(t)
\end{aligned} \tag{6.14}$$

por (6.13) y la elección de $\theta_1(t) = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, X_1(t), Y(t))$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
dV^\theta(t) = \rho(\theta_0(s)X_0(s))dt + \theta_1(t)dX_1(t) = \rho(V^\theta(t) - \theta_1(t)X_1(t))dt + \theta_1(t)dX_1(t) = \\
= \rho V^\theta(t)dt - \rho\theta_1(t)X_1(t))dt + \theta_1(t)\rho X_1(t)dt + \theta_1(t)\sigma X_1(t)dB(t) = \\
= \rho V^\theta(t)dt + \theta_1(t)\sigma X_1(t)dB(t)
\end{aligned}$$

Luego $W(t)$ y $V^\theta(t)$ satisfacen ambos la misma EDE

$$dW(t) = \rho W(t)dt + \theta_1(t)\sigma X_1(t)dB(t)$$

y por cómo elegimos θ_0 satisfacen también ambos la condición inicial $W(0) = V^\theta(0) = \xi(T)E^{x,y}[f(Y(T))]$. Por unicidad, se sigue que $W(t) = V^\theta(t)$, como queríamos demostrar. $\square$

Comentario 6.2. El resultado previo se obtuvo «manualmente», sin embargo, podría haberse usado directamente el Teorema 5.5 y su Corolario 5.3. En ese caso tomamos el mercado $(X_0(t), X_1(t), Y(t))$ con $Z(t) = (X_1(t), Y(t))$ difusión que satisface (6.12) y tenemos que la cartera que replica al reclamo está dada por

$$\hat{\theta}(t,w) = X_0(t)\varphi(t,w)\Pi(Z(t))$$

con φ dado por (5.22) y $\Pi(Z(t)) = ((\sigma X_1(t))^{-1}, 0)$ inversa a izquierda de $(\tilde{\sigma}_i(Z(t)))_{i=1,2}$, lo que usando las convenciones de notación $z = (z_1, z_2) = (x, y)$ y $f' = f \circ \pi_2$ da

$$\begin{aligned}\varphi(t,w) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial z_i} \left(E^z[\xi(T)f'(Z(T-t))]\right)_{z=Z(t)} \sigma_i(Z(t)) = \\ = \xi(T)\frac{\partial u(t,x,y)}{\partial x}(t, Z(t))\sigma X_1(t) \qquad (6.15)\end{aligned}$$

Luego

$$\hat{\theta}(t,w) = (\theta_1, \theta_2) = X_0(t)(\xi(T)\frac{\partial u}{\partial x}(t, Z(t)), 0) = (\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x}(t, Z(t)), 0)$$

que es el resultado buscado.

Por la presencia de $Y(t)$ que no depende directamente de una variable aleatoria de distribución normal no podemos hallar fácilmente una expresión del precio de una opción asiática como lo es (6.2) para el caso de una opción europea. De hecho, de momento no se ha hallado una expresión cerrada.

A continuación veremos otro caso donde tampoco se ha hallado una expresión cerrada para un tipo de opción que es de gran uso en el mundo real.

Definición 6.2. Un *reclamo (contingente) americano* a tiempo T es un proceso $F(t) = F(t,w)$ (t,w)-medible, $\mathcal{H}_t$-adaptado y casi seguramente acotado inferiormente para $t \in [0,T]$. Una *opción americana* sobre el reclamo americano $F(t)$ garantiza a su comprador la posibilidad de elegir cualquier tiempo de parada $\tau(w) \leq T$ como tiempo de ejercicio del reclamo, que dará un pago de $F(\tau(w), w)$.

Ejemplo 6.1. El *call* americano, donde $F(t,w) = f(X_1(t,w))$ para un mercado $X(t) = (X_0(t), X_1(t))$ y $f(x) = (x-K)^+$ donde, como antes, K se llama el precio de ejercicio o *strike*. Esta alternativa al call europeo es uno de los derivados financieros más operados.

Para que un comprador pague y por esta garantía y acepte una riqueza inicial de $-y$, debería poder hallar una cartera θ y un tiempo de parada $\tau(w)$ tales que $V^\theta(\tau(w), w) + F(\tau(w), w) = -y + \int_0^{\tau(w)} \theta(s)dX(s) \geq 0$ c.t.p. Luego el precio $p = p_A(F)$ máximo que estaría dispuesto a pagar es

$$\begin{aligned}p_A(F) = \sup\{y :\ \exists\theta \text{ admisible y } \tau \leq T \text{ tiempo de parada;} \\ -y + \int_0^{\tau}(w)\theta(s)dX(s) + F(\tau(w), w) \geq 0 \text{ c.t.p}\} \qquad (6.16)\end{aligned}$$

Análogamente, el vendedor querrá garantizarse que exista una cartera $\theta(t)$ tal que para cualquier tiempo t (pues no sabe cuándo el comprador ejercerá la opción) genere un valor no menor al prometido al comprador, es decir,

$$V^\theta(t,w) - F(t,w) = y + \int_0^t \theta(s)dX(s) - F(t,w) \geq 0 \quad \text{para todo } t$$

Luego, el precio mínimo que el vendedor estaría dispuesto a aceptar es

$$q_A(F) = \inf\{y : \ \exists\theta \text{ admisible}; \forall t, \ y + \int_0^t \theta(s)dX(s) - F(t,w) \geq 0 \text{ c.t.p}\} \tag{6.17}$$

El siguiente teorema será la versión «americana» del Teorema 5.4

Teorema 6.4. (a) Supongamos que existe u que satisface (5.14) y (5.11) y sea $F(t,w)$ un reclamo americano a tiempo T tal que $\sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] < \infty$, donde Q es la medida martingala equivalente del Teorema 5.2 dada por u. Entonces

$$\leq p_A(F) \leq \sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq q_A(F) \leq \infty$$

(b) Supongamos que además se cumple que el mercado $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ es completo, entonces

$$p_A(F) = \sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau] = q_A(F)$$

(y se llama el *valor* o *precio* de la opción)

Demostración. (a) Procedemos como en el Teorema 5.4. Sea un $y \in \mathbb{R}$ tal que existe un tiempo de parada $\tau \leq T$ y una cartera admisible θ tal que

$$-y + \int_0^\tau \theta(s)dX(s) \geq -F(\tau) \qquad \text{c.t.p.}$$

Esto implica que $\xi(\tau)V^\theta(\tau) = -y + \int_0^\tau \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) \geq -\xi(\tau)F(\tau)$.

Tenemos además que $\xi(t)V^\theta(t) = -y + \int_0^t \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s)$ es una Q-martingala local (pues es una constante más una integral de Itô sobre un proceso de Wiener). También es acotada inferiormente (pues la cartera debe ser admisible). Las martingalas locales acotadas inferiormente son supermartingalas, luego $E_Q[\xi(t)V^\theta(t)] \leq \xi(0)V^\theta(0) = -y$ y como $V^\theta(\tau) \geq -F(\tau)$ tenemos

$$-E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq E_Q[\xi(\tau)V^\theta(\tau)] \leq -y$$

Esto vale para cualquier precio y aceptable y cualquier $\tau \leq T$, por lo tanto vale

$$p_A(F) \leq E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]$$

Análogamente, sea $z \in \mathbb{R}$ y una cartera admisible θ tales que

$$z + \int_0^t \theta(s)dX(s) - F(t,w) \geq 0 \qquad \text{c.t.p. y para todo } t \leq T$$

Como antes, esto implica $\xi(\tau)V^\theta(\tau) = z + \int_0^\tau \xi(s)\theta^T(s)\sigma(s)d\tilde{B}(s) \geq \xi(\tau)F(\tau)$ para cualquier tiempo de parada $\tau \leq T$. Y como $\xi(t)V^\theta(t)$ es de vuelta una Q-martingala local vale, como arriba,

$$E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq E_Q[\xi(\tau)V^\theta(\tau)] \leq z$$

Pero como τ era arbitrario, tenemos

$$z \geq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]$$

A su vez, como esto vale para todo z precio aceptable para el vendedor, esto implica

$$q_A(F) \geq \sup_{\tau \leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]$$

(b) Supongamos ahora que, además, el mercado es completo. Elegimos un tiempo de parada $\tau \leq T$ y definimos

$$F_k(t,w) = \begin{cases} k & \text{si } F(t,w) \geq k \\ F(t,w) & \text{si } F(w) < k \end{cases}$$

y

$$G_k(w) = X_0(T)\xi(\tau)F_k(\tau)$$

Luego G_k es un reclamo (europeo) a tiempo T acotado, y por completitud existen (únicos) $y_k \in \mathbb{R}$ y $\theta^{(k)}$ tales que $-y_k + \int_0^T \theta^{(k)}(s)dX(s) = -G_k(w)$ y $\bar{V}^{\theta^{(k)}}(t)$ es una Q-martingala.

Luego, usando el teorema de muestreo opcional de Doob para martingalas[7] tenemos

$$-y_k + \int_0^\tau \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s) = E_Q\left[-y_k + \int_0^T \theta^{(k)}(s)d\bar{X}(s)|\mathcal{H}_\tau\right] = E_Q[-\xi(T)G_k|\mathcal{H}_\tau] =$$

[7]El teorema dice que si M_t es martingala y $\tau_1 \leq \tau_2 \leq c$ son tiempos de parada acotados casi seguramente por la constante c entonces $E[M_{\tau_2}|\mathcal{H}_{\tau_1}] = M_{\tau_1}$

$$= E_Q[-\xi(\tau)F_k(\tau)|\mathcal{H}_\tau] = -\xi(\tau)F_k(\tau)$$

O sea, $\bar{V}^{\theta^{(k)}}(\tau) = -\xi(\tau)F_k(\tau)$ casi seguramente o, equivalentemente, $V^{\theta^{(k)}}(\tau) = -F_k(\tau)$ casi seguramente.

Además, como $\bar{V}^\theta(t)$ es una Q-martingala, $E_Q[\bar{V}^\theta(\tau)] = E_Q[0] = -y_k$ para todo $\tau \leq T$. Luego,

$$-y_k = -E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)]$$

Por esto y por $V^{\theta^{(k)}}(\tau) = -F_k(\tau)$ tenemos que $E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)]$ es un precio aceptable para el comprador de una opción americana, o sea

$$E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)] \leq p_A(F_k) \leq p_A(F)$$

pero τ era arbitrario, luego

$$\sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F_k(\tau)] \leq p_A(F_k) \leq p_A(F)$$

Entonces, por convergencia monótona

$$\sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \leq p_A(F)$$

Para ver que $E_Q[\xi(\tau)F(\tau)] \geq q_A(F)$ debemos ver que para $z = \sup_{\tau\leq T} E_Q[\xi(\tau)F(\tau)]$ existe una cartera admisible $\theta(s,w)$ tal que

$$z + \int_0^t \theta(s,w)dX(s) \geq F(t,w) \quad \text{para casi todo } (t,w) \in [0,T]\times\Omega \tag{6.18}$$

Para un $\tau \leq T$ escribimos $h_\tau(t,w) = E_Q[\xi(\tau)F(\tau)|\mathcal{H}_t]$ y definimos la *envolvente* de *Snell* $S(t,w) = \sup_{t\leq\tau\leq T} h_\tau(t,w)$ para $(t,w) \in [0,T]\times\Omega$.

Veamos que la envolvente es una Q-supermartingala. Para eso basta ver que

$$E_Q\left[\sup_{t\leq\tau\leq T} h_\tau(t)\middle|\beta\right] \leq \sup_{t\leq\tau\leq T} E_Q[h_\tau(t)|\beta] \tag{6.19}$$

pues entonces, para $s < t$ tendríamos

$$E_Q[S(t)|\mathcal{H}_s] = E_Q\left[\sup_{t\leq\tau\leq T} h_\tau(t)\middle|\mathcal{H}_s\right] \leq \sup_{t\leq\tau\leq T} E_Q[h_\tau(t)|\mathcal{H}_s] =$$

$$= \sup_{t\leq\tau\leq T} E_Q[h_\tau(s)] \leq \sup_{s\leq\tau\leq T} E_Q[h_\tau(s)] = S(s,w)$$

donde se usó que $h_\tau(s,w)$ es una Q-martingala (es trivial verificarlo).

Para probar (6.19), fijemos t y consideremos el proceso estocástico $(h_\tau(t,w))_{\tau\in I}$ con $I = I(t) = \{\tau \text{ tiempo de parada}: \ t \leq \tau \leq T\}$. Por el lema auxiliar que se demostrará a continuación del teorema, existe un conjunto numerable de tiempos de parada $(\tau_n')_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$ tales que $\sup_{\tau\in I} h_\tau(t,w) = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_{\tau_n'}(t,w)$. Entonces, si definimos

$$h_{\tau_1} \wedge h_{\tau_2} = h_{\tau^*} \text{ con } \tau^* = \tau_1 \mathcal{X}_{\{h_{\tau_1} \geq h_{\tau_2}\}} + \tau_2 \mathcal{X}_{\{h_{\tau_1} < h_{\tau_2}\}} \ \in I$$

(que satisface $h_{\tau_1} \wedge h_{\tau_2} \geq h_{\tau_i}$ casi seguramente para $i = 1, 2$ como supondríamos para el operador $\wedge$ de un conjunto dirigido) podemos tomar la sucesión de tiempos de parada $\tau_n = \text{máx}(\tau_1', ..., \tau_n', \tau_{n-1})$ (con máx dado por $\wedge$) que satisfará $h_{\tau_{n+1}} \geq h_{\tau_n}$ casi seguramente y $\sup_{\tau\in I} h_\tau = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_{\tau_n'} = \sup_{n\in\mathbb{N}} h_{\tau_n} = \text{lím}_{n\to\infty} h_{\tau_n}$.

Notemos ahora que, como $|\xi(t)|$ está acotada en $[0,T]$ pues ρ lo está y $F(t)$ está acotada inferiormente, existe $M > 0$ tal que $\xi(\tau)F(\tau) > -M$ para todo $\tau \leq T$ y luego $h_\tau(t,w) \geq -M$ casi seguramente. En espacios de medida finita, el teorema de convergencia monótona vale para funciones medibles casi seguramente mayores o iguales a una constante (es decir, sin necesidad de que sean no negativas). Luego, como $-M \leq h_{\tau_1} \leq ... \leq h_{\tau_n}$ tenemos

$$E_Q\left[\sup_{\tau\in I} h_\tau \middle| \beta\right] = E_Q\left[\lim_{n\in\mathbb{N}} h_{\tau_n} \middle| \beta\right] = \lim_{n\in\mathbb{N}} E_Q[h_{\tau_n}|\beta] \leq \sup_{\tau\in I} E_Q[h_\tau|\beta]$$

con lo que (6.19) queda probado.

Como $S(t,w)$ es una Q-supermartingala, por el Teorema de descomposición de Doob-Meyer tenemos

$$S(t) = L(t) - A(t); \qquad t \in [0,T]$$

con $L(t)$ una Q-martingala, con $L(0) = S(0) = z$ y $A(t)$ un proceso no decreciente con $A(0) = 0$. Tenemos entonces que $L(t) \geq S(t)$.

Veamos que existe $\varphi(s,w)$ proceso $\mathcal{H}_t$-adaptado tal que

$$M(t) = z + \int_0^t \varphi(s,w)d\tilde{B}(s) \tag{6.20}$$

En efecto, como $L(t)$ es una Q-martingala tomando $M(t)$ la P-martingala del Teorema de Girsanov dada por $M(t) := \exp\left(-\int_0^t u(s,w)dB(s) - \int_0^t u^2(s,w)ds\right)$ tenemos $Y(t) = L(t)M(t)$ es una P martingala pues, para todo $A \in \mathcal{H}_s$

$$\int_A L(t)M(t)dP = \int_A L(t)dQ = \int_A L(s)dQ = \int_A L(s)M(t)dP = \int_A L(s)M(s)dP$$

donde hemos usado la igualdad (5.12) del Teorema de Girsanov.

Luego, por el Teorema 3.7 existe $\varphi'(s,w) \in \mathcal{V}$ tal que

$$dY(t) = \varphi'(t)dB(t)$$

Además, haciendo uso de que $d(\frac{1}{M(t)}) = \frac{u(t)}{M(t)}d\tilde{B}(t)$[8] y de la fórmula de Itô tenemos

$$dL(t) = d\left(Y(t)\cdot\frac{1}{M(t)}\right) = Y(t)d\left(\frac{1}{M(t)}\right) + \frac{1}{M(t)}dY(t) + dY(t)d\left(\frac{1}{M(t)}\right) =$$

$$= Y(t)\frac{u(t)}{M(t)}d\tilde{B}(t) + \frac{\varphi'(t)}{M(t)}dB(t) + (\varphi'(t)dB(t))\left(\frac{u(t)}{M(t)}d\tilde{B}(t)\right)$$

Y recordando que $dB(t) = d\tilde{B}(t) - u(t)dt$ y que $dB(t)dB(t) = dt$ y $dB(t)dt = 0$ nos queda

$$dL(t) = u(t)L(t)d\tilde{B}(t) + \frac{\varphi'(t)}{M(t)}d\tilde{B}(t) - \frac{u(t)\varphi'(t)}{M(t)}dt + \frac{u(t)\varphi'(t)}{M(t)}dt = \varphi(t)d\tilde{B}(t)$$

para $\varphi(t) = u(t)L(t) + \frac{\varphi'(t)}{M(t)}$, lo que prueba (6.20).

Dada φ definimos

$$\hat{\theta}(t,w) = X_0(t)\varphi(t,w)\Pi(t,w)$$

donde $\Pi(t,w)$ es la inversa a izquierda de $\sigma(t,w)$ garantizada por el Teorema de Completitud. Entonces eligiendo θ_0 como en la observación 5.1 tenemos

$$\bar{V}^\theta = z + \int_0^t \hat{\theta}d\bar{X} = z + \int_0^t \xi\theta\sigma d\tilde{B} = z + \int_0^t \varphi d\tilde{B} \geq S(t)$$

Luego, por (5.8) y usando que $S(t) = \sup_{t\leq\tau\leq T} E[\xi(\tau)F(\tau)|\mathcal{H}_t] \geq \xi(t)F(t)$[9]

$$V^\theta(t) = z + \int_0^t \theta(s)dX(s) \geq X_0(t)S(t) \geq X_0(t)\xi(t)F(t) = F(t)$$

Lo que prueba (6.18) y concluye la demostración del teorema. □

Lema 6.1. Sea $(X_i)_{i\in I}$ familia de variables aleatorias a valores reales con índice I arbitrario. Entonces existe un subconjunto numerable $J^* \subseteq I$ tal que

$$\sup_{i\in J} X_i = \sup_{i\in I} X_i$$

[8] Se ve fácil escribiendo $Z(t) = \ln(\frac{1}{M(t)}) = \int_0^t u(s,w)dB(s) + \int_0^t u^2(s,w)ds$ y usando la fórmula de Itô para $g(t,Z(t)) = e^{Z(t)} = \frac{1}{M(t)}$

[9] Por el Teorema de muestreo opcional de Doob

Demostración. Dado un subconjunto numerable $J \subseteq I$ escribimos $\bar{X}_J = \sup_{i \in J} X_i$. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todos los subconjuntos numerables de I y $\alpha = \sup_{J \in \mathcal{C}} E[\bar{X}_J]$, que es un número real.

Sea $(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C}$ sucesión de subconjuntos numerables tales que $\alpha = \text{lím}_{n \in \mathbb{N}} E[\bar{X}_{J_n}]$. Entonces $J^* = \bigcup_n J_n$ es un subconjunto numerable de I y tenemos $\alpha = E[\bar{X}_{J^*}]$.

Veamos entonces que $\bar{X}_{J^*} \geq X_i$ casi seguramente para todo $i \in I$, lo que termina la demostración pues $\bar{X}_{J^*} \leq \sup_{i \in I} X_i$.

Sea i, el conjunto $J^* \cup \{i\}$ es numerable, luego $E[\bar{X}_{J^* \cup \{i\}}] = E[\text{máx}(\bar{X}_{J^*}, X_i)] \leq E[\bar{X}_{J^*}]$. Pero como $\text{máx}(\bar{X}_{J^*}, X_i) \geq \bar{X}_{J^*}$, esto implica $\text{máx}(\bar{X}_{J^*}, X_i) = \bar{X}_{J^*}$, que a su vez implica $\bar{X}_{J^*} \geq X_i$, como queríamos demostrar. $\square$

Bibliografía

[1] Black, F., and Scholes, M. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy 81* (1973), 637–654.

[2] Dynkin, E. *Markov Processes, vol. II.* Springer-Verlag, 1965.

[3] Karatzas, I. *Lectures on the Mathematics of Finance.* AMS, 1997.

[4] Karatzas, I., and Shreve, S. *Brownian Motion and Stochastic Calculus. Second Edition.* Springer-Verlag, 1991.

[5] Lamberton, D. *Optimal stopping and American options.* draft, 2009.

[6] Merton, R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of Economic Theory 3* (1971), 373–413.

[7] Ø ksendal, B. *Stochastic Differential Equations.* Springer-Verlag, 2000.

[8] Protter, P. *Stochastic Integration and Differential Equations.* Springer-Verlag, 2005.

[9] Shreve, S. *Stochastic Calculus and Finance.* draft, 1996.

[10] Stroock, D., and Varadhan, S. *Multidimensional Diffusion Processes.* Springer-Verlag, 1979.