



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**Álgebras de Leavitt y K-teoría bivalente hermitiana graduada**

**Guido Arnone**

**Director: Dr. Guillermo Cortiñas**

Fecha de Presentación: 17 de junio de 2021



# Agradecimientos

A mi mamá Fabiana y a Luis, por apoyarme en todos mis proyectos y confiar en mí cuando decidí que quería estudiar matemática. Nada de esto hubiera sido posible sin todo su afecto y contención.

A mi papá Marcelo y a Ana, por acompañarme a pesar de la distancia y animarme a salir de mi zona de confort. Por todos esos inviernos madrileños que recuerdo con mucho cariño.

A toda mi familia por acompañarme en este camino, cada uno a su manera; a Clara, Juan, Maju y Pachi, a mi tío Germán, mi tía Ianina y mi abuela Lidia.

A Willie, por su enorme paciencia, dedicación y generosidad. Gracias por haber aceptado dirigirme y enseñarme mucho más que matemática.

A Marco Farinati y Leandro Vendramin, por haber aceptado ser jurados de esta tesis.

A todos mis docentes, en especial a Jonathan Barmak, Eugenio Borghini, Fernando Martín, Gabriel Minian, Ezequiel Rela, Iván Sadofski, Matías Saucedo, Nicolás Sirolli y Mariano Suárez-Álvarez.

A mis amigos y amigas de la facultad, muy especialmente a Agus, Marchi, Marcos, Kat, Leo, Lu y Lucas que cursaron gran parte de la carrera conmigo. Por todas esas tardes de estudio en las *mesitas del dm* y todos esos cafés en el *bar del I*, que sin duda fueron de los mejores momentos que pasé en la facultad.

A mis amigos del secundario, por la infinidad de risas y anécdotas que hemos compartido a lo largo de los años.

A Diego García, mi profesor de batería, cuya perspectiva sobre el estudio cambió mi forma de pensar más allá de la música.



# Introducción

Definida por Cortiñas y Thom en [CT07], la *K-teoría algebraica bivariante* es una categoría triangulada  $\mathbb{k}\mathbb{k}$  junto con un funtor  $j: \text{Alg}_\ell \rightarrow \mathbb{k}\mathbb{k}$  de la categoría de álgebras asociativas sobre un anillo conmutativo  $\ell$  que es universal con respecto a las siguientes propiedades:

- **invarianza homotópica:** el funtor  $j$  envía cada inclusión  $A \rightarrow A[t]$  a un isomorfismo.
- **estabilidad matricial:** el funtor  $j$  envía cada inclusión  $A \rightarrow M_\infty A$  en la esquina superior izquierda a un isomorfismo.
- **escisión:** el funtor  $j$  envía cada sucesión exacta  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$  que se parte como sucesión de  $\ell$ -módulos a un triángulo distinguido.

Recientemente Cortiñas y Vega definen en [CV21] la *K-teoría bivariante hermitana*, una versión de la *K-teoría bivariante algebraica* para  $*$ -álgebras. Previamente, Ellis construye en [Ell14] variantes de la categoría  $\mathbb{k}\mathbb{k}$  para álgebras con acción o graduación de un grupo dado.

El primer objetivo de este trabajo es dar una generalización común de estas categorías, esto es, definir una versión de la *K-teoría algebraica bivariante* para  $*$ -álgebras equipadas con una acción o graduación de un grupo  $G$  dado.

**Teorema** (Teorema 2.2.4). *Existe un funtor  $j_G^h: G\text{-Alg}_\ell^* \rightarrow \mathbb{k}\mathbb{k}_G^h$  inicial en la categoría de teorías de homología escisivas que son  $G$ -estables, homotópicamente invariantes, matricialmente estables y establemente hermitianas.*

**Teorema** (Teorema 2.2.5). *Existe un funtor  $j_{\widehat{G}}^h: G_{\text{gr}}\text{-Alg}_\ell^* \rightarrow \mathbb{k}\mathbb{k}_{\widehat{G}}^h$  inicial en la categoría de teorías de homología escisivas que son  $\widehat{G}$ -estables, homotópicamente invariantes, matricialmente estables y establemente hermitianas.*

En el Capítulo 1 definimos y adaptamos a nuestro contexto las nociones de teoría de homología escisiva, invarianza homotópica, estabilidad matricial y estabilidad hermitiana. Comenzamos el Capítulo 2 introduciendo las definiciones de  $G$ -estabilidad y  $\widehat{G}$ -estabilidad. A continuación, construimos las categorías  $\mathbb{k}\mathbb{k}_G^h$  y  $\mathbb{k}\mathbb{k}_{\widehat{G}}^h$ . El resto del capítulo consiste en verificar que los resultados de [Ell14] y [CV21] se extienden a estas nuevas categorías: probamos versiones del teorema de Green-Julg (Teorema 2.3.14),

inducción-restricción (Teorema 2.3.22), la dualidad de Baaj-Skandalis (Teorema 2.3.25) y la sucesión exacta de 12 términos de Karoubi (Teorema 2.4.18).

En el Capítulo 3 nos centramos en la aplicación de la K-teoría bivariante hermitiana graduada a la pregunta de clasificación graduada para álgebras de Leavitt.

El *álgebra de Leavitt* de un grafo  $E$  sobre un anillo conmutativo  $\ell$  es una  $\ell$ -álgebra asociativa  $L(E)$  que se obtiene dividiendo al álgebra de caminos del grafo doble de  $E$  por las denominadas relaciones de Cuntz-Krieger. Estas relaciones provienen de los



Figura 1: un grafo y su doble.

subshifts de tipo finito, una clase de sistemas dinámicos discretos, y fueron introducidas originalmente por Cuntz y Krieger en [CK80] al definir la  $C^*$ -álgebra  $\mathcal{O}(E)$  asociada a un grafo finito. Las álgebras de Leavitt fueron consideradas originalmente por Ara, Moreno y Pardo en [AMP07] y por Abrams y Aranda Pino en [AAP05] como la contraparte algebraica de  $\mathcal{O}(E)$ .

A partir del grafo, es posible dotar al álgebra de Leavitt asociada de una involución y  $\mathbb{Z}$ -graduación compatibles, y tanto la K-teoría de  $L(E)$  como su  $\mathbb{Z}$ -graduación canónica juegan un papel central en la teoría de álgebras de Leavitt. En [Haz13a] Hazrat caracteriza el *grupo de Grothendieck graduado* (ver Definición 3.5.1) de  $L(E)$  a partir de la matriz de adyacencia  $A_E$  del grafo. Este grupo viene equipado con una acción  $\mathbb{Z}$ -lineal que lo hace un módulo sobre  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}] \simeq \mathbb{Z}[\sigma]$ , el anillo de grupo de un grupo cíclico infinito de generador  $\sigma$ , y se prueba en [Haz13a] que coincide con el  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulo de Bowen-Franks de  $E$

$$\widetilde{\mathfrak{BF}}(E) = \text{coker}(I - \sigma \cdot A_E^\dagger).$$

En el mismo artículo, Hazrat conjetura que el grupo de Grothendieck graduado caracteriza a las álgebras de Leavitt como álgebras  $\mathbb{Z}$ -graduadas y demuestra la conjetura para una familia particular de grafos denominados policefálicos. La pregunta permanece abierta para casos más generales, incluyendo el de los grafos finitos sin pozos ni fuentes. En esta dirección, adaptamos algunas técnicas de clasificación desarrolladas por Cortiñas y Montero en [CM21] y Cortiñas en [Cor21]. Obtenemos el siguiente resultado.

**Teorema** (Teorema 3.9.9). *Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos y supongamos que  $KH_{-1}(\ell) = 0$  y el morfismo canónico  $\mathbb{Z} \rightarrow KH_0(\ell)$  es un isomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk_{\mathbb{Z}}^h$ -isomorfas.*
- (ii) *Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk_{\mathbb{Z}}$ -isomorfas.*
- (iii) *Se tiene un isomorfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos  $\widetilde{\mathfrak{BF}}(E) \simeq \widetilde{\mathfrak{BF}}(F)$ .*

Para demostrar este teorema, en la Sección 3.7 probamos que existe un enriquecimiento de  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^h$  sobre la categoría de  $\mathbb{Z}[G]$ -módulos y utilizamos una caracterización de productos cruzados de álgebras de Leavitt debida a Ara, Hazrat, Li y Sims [AHL18] para dar un triángulo distinguido en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$  que relaciona a  $L(E)$  con la matriz  $I - \sigma \cdot A_E^t$ .

**Teorema** (Corolario 3.4.28, Corolario 3.8.4). *Si  $E$  es un grafo finito, se tiene un triángulo distinguido en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$  de la forma*

$$\ell^{\text{reg}(E)} \xrightarrow{I - \sigma \cdot A_E^t} \ell^{E^0} \longrightarrow L(E).$$

Esta es una versión graduada del triángulo construido por Cortiñas y Montero en [CM21]. En general, una función de los aristas de un grafo  $E$  a un grupo  $G$  determina una  $G$ -graduación sobre  $L(E)$ . El teorema anterior es un caso particular del triángulo existente en esta situación general, que tratamos en la Proposición 3.8.2.

A lo largo de la tesis, asumiremos familiaridad con las nociones básicas de teoría de categorías y precisaremos utilizar algunos resultados elementales sobre conjuntos simpliciales. Nuestras referencias para estos temas son [Rie16] y [GJ99] respectivamente. Haremos uso también de resultados básicos sobre el grupo de Grothendieck de un anillo, los cuales se pueden consultar por ejemplo en [Cor11, 2] o [Ros94, Chapter 1].



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Álgebras	1
1.1.1. Involuciones	1
1.1.2. Acciones y graduaciones	2
1.1.3. Productos tensoriales	3
1.2. Homotopía polinomial	4
1.2.1. Ind-completaciones	5
1.2.2. Álgebras de funciones polinomiales	6
1.2.3. Invarianza homotópica	8
1.3. Grupos de Grothendieck-Witt	9
1.4. Estabilidad	11
1.4.1. Estabilidad matricial	12
1.4.2. Estabilidad hermitiana	15
1.5. Extensiones	17
1.5.1. Categorías subyacentes	18
1.5.2. Mapas clasificantes	19
1.6. Unitalización	22
1.7. Teorías de homología escisivas	23
<b>2. <math>K^h</math>-teoría bivalente equivariante y graduada</b>	<b>31</b>
2.1. Estabilidad	31
2.2. Las categorías $kk_G^h$ y $kk_{\widehat{G}}^h$	36
2.3. Teoremas de adjunción	40
2.3.1. Productos cruzados	40
2.3.2. El teorema de Green-Julg	41
2.3.3. Inducción y restricción	47
2.3.4. Dualidad de Baaj-Skandalis	52
2.3.5. Funtores de olvido e involuciones libres	53
2.4. El teorema fundamental de Karoubi	58
2.4.1. Las relaciones entre los funtores $U$ , $V$ y $\Lambda$	59
2.4.2. La sucesión exacta de doce términos	61

<b>3. Álgebras de Leavitt y K-teoría graduada</b>	<b>69</b>
3.1. Generalidades sobre grafos . . . . .	69
3.2. Álgebras de Cohn y Leavitt . . . . .	72
3.3. Conjuntos graduados y álgebras matriciales . . . . .	75
3.4. El triángulo distinguido en el contexto graduado, parte I . . . . .	78
3.5. Álgebras de Leavitt y K-teoría graduada . . . . .	85
3.6. Revestimientos . . . . .	88
3.7. El enriquecimiento de $kk_{\mathbb{C}}^h$ sobre $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} K^h H_0(\ell)$ . . . . .	93
3.8. El triángulo distinguido en el contexto graduado, parte II . . . . .	94
3.9. Clasificación de álgebras de Leavitt en $kk_{\mathbb{Z}}^h$ . . . . .	98
<b>Bibliografía</b>	<b>103</b>

# Capítulo 1

## Preliminares

A lo largo del texto, la letra  $\ell$  denotará un anillo conmutativo unital equipado con un automorfismo involutivo  $*$ :  $\ell \rightarrow \ell$ . Asumiremos en todo momento la existencia de un elemento  $\lambda \in \ell$  tal que

$$\lambda + \lambda^* = 1. \quad (1.0.1)$$

En este capítulo recordamos los conceptos utilizados en los artículos [CT07] y [CV21] para definir la K-teoría algebraica bivalente y su versión hermitiana, y los adaptamos a los contextos equivariante y graduado.

### 1.1. Álgebras

Un  $\ell$ -bimódulo unitario  $A$  se dice *simétrico* si  $\lambda \cdot x = x \cdot \lambda$  para cada  $x \in A$  y  $\lambda \in \ell$ . Un *álgebra* sobre  $\ell$  es un bimódulo simétrico equipado con una multiplicación  $\ell$ -lineal y asociativa  $A \otimes_{\ell} A \rightarrow A$ . La categoría de  $\ell$ -álgebras y homomorfismos de  $\ell$ -álgebras se denotará  $\text{Alg}_{\ell}$ .

#### 1.1.1 INVOLUCIONES

Una *involución* en un álgebra  $A$  es una función aditiva  $*$ :  $A \rightarrow A$  tal que

$$(a^*)^* = a, \quad (ab)^* = b^* a^*, \quad (\lambda a)^* = \lambda^* a^*$$

para cada  $a, b \in A$  y  $\lambda \in \ell$ . Una *\*-álgebra* es un álgebra  $A$  equipada con una involución. Diremos que un ideal bilátero  $I \subset A$  es un *\*-ideal* si es un  $\ell$ -submódulo e  $I^* \subset I$ . Dadas \*-álgebras  $A$  y  $B$ , un *\*-homomorfismo*  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo de  $\ell$ -álgebras tal que  $f(a^*) = f(a)^*$  para cada  $a \in A$ . Escribiremos  $\text{Alg}_{\ell}^*$  para referirnos a la categoría de \*-álgebras y \*-homomorfismos.

*Observación 1.1.1.* La hipótesis (1.0.1) se satisface en particular cuando 2 es inversible en  $\ell$ , tomando  $\lambda = 1/2$ . Esto comprende tanto a  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  como a todo cuerpo con involución de característica distinta de 2. Un ejemplo de especial interés es  $\ell = \mathbb{C}$  con la involución dada por la conjugación compleja. Otro ejemplo a considerar es  $\ell = \mathbb{Z}[t]$  con la involución

determinada por enviar  $t$  a  $1 - t$ . En este anillo  $2$  no es inversible, pero sin embargo el elemento  $\lambda = t$  satisface (1.0.1).

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $\ell_0$  un anillo conmutativo unital. El anillo  $\text{inv}(\ell_0) = \ell_0 \oplus \ell_0$  es un  $*$ -anillo con la involución  $(x, y)^* = (y, x)$ , y satisface la hipótesis (1.0.1) tomando  $\lambda = (1, 0)$ .

**Ejemplos 1.1.3.** El anillo  $\ell$  es una  $*$ -álgebra sobre sí mismo. En general, para cada  $n \in \mathbb{N}$  el anillo de matrices  $M_n(\ell)$  es una  $*$ -álgebra con la involución que envía una matriz  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  a su traspuesta conjugada  $A^* = (a_{ji}^*)_{1 \leq i, j \leq n}$ .

Si la identidad define una involución en un anillo, este es necesariamente conmutativo. Cuando la involución de  $\ell$  es trivial, toda  $\ell$ -álgebra conmutativa  $A$  es una  $*$ -álgebra tomando  $*$  =  $\text{id}_A$ .

**Definición 1.1.4.** Dada una  $*$ -álgebra unital  $R \in \text{Alg}_\ell^*$ , un elemento  $u \in R$  se dice *unitario* si  $uu^* = u^*u = 1$ . Si  $\epsilon \in R$  es un elemento central y unitario, decimos que  $\phi \in R$  es  *$\epsilon$ -hermitiano* si  $\phi = \epsilon\phi^*$ . Una unidad  $\epsilon$ -hermitiana  $\phi \in R^\times$  da lugar a una involución

$$(-)^\phi: R \rightarrow R, \quad x \mapsto \phi^{-1}x^*\phi.$$

Escribimos  $R^\phi$  para referirnos a  $R$  junto con esta estructura de  $*$ -álgebra. Similarmente, notamos  $A^\phi$  para la estructura de  $*$ -álgebra inducida en un  $*$ -ideal  $A \triangleleft R$ .

## 1.1.2 ACCIONES Y GRADUACIONES

**Convención 1.1.5.** En lo que sigue de la tesis, fijamos un grupo  $G$ .

**Definición 1.1.6.** Una  $G$ - $*$ -álgebra es un  $G$ -objeto en  $\text{Alg}_\ell^*$ , es decir, una  $*$ -álgebra  $A$  junto con una acción de  $G$  por  $*$ -homomorfismos. Un *morfismo equivariante*  $f: A \rightarrow B$  entre  $G$ - $*$ -álgebras es un  $*$ -homomorfismo tal que  $f(g \cdot a) = g \cdot f(a)$  para cada  $a \in A$  y  $g \in G$ . Notamos  $G - \text{Alg}_\ell^*$  a la categoría de  $G$ - $*$ -álgebras y morfismos equivariantes.

**Ejemplos 1.1.7.** Una  $\mathbb{Z}$ - $*$ -álgebra  $A$  es una  $*$ -álgebra sobre  $\ell$  junto con un  $*$ -automorfismo de álgebras  $\alpha \in \text{Aut}_{\text{Alg}_\ell^*}(A)$ . Si  $\alpha^n = 1_A$ , este dota a  $A$  de una estructura de  $\mathbb{Z}_n$ - $*$ -álgebra. En general, si  $A$  es una  $G$ - $*$ -álgebra e  $I \subset A$  un  $*$ -ideal tal que  $g \cdot I \subset I$  para cada  $g \in G$ , el cociente  $A/I$  es una  $G$ - $*$ -álgebra con la acción dada por  $g \cdot [x] := [gx]$  para cada  $g \in G$  y  $x \in A$ .

**Ejemplo 1.1.8.** El álgebra de grupo  $\ell G$  es una  $G$ - $*$ -álgebra con la involución  $(\lambda \cdot g)^* := \lambda^* g^{-1}$  y la acción por conjugación.

**Definición 1.1.9.** Una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada es una  $*$ -álgebra  $A$  junto con una familia de  $\ell$ -submódulos  $\{A_g\}_{g \in G}$  indexados por  $G$  tales que

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g, \quad (A_g)^* \subset A_{g^{-1}}$$

y  $A_g \cdot A_h \subset A_{gh}$  para cada  $g, h \in G$ . Si  $a \in A_g$ , decimos que  $a$  es *homogéneo de grado  $g$*  y escribimos  $|a| = g$ . Un *morfismo homogéneo*  $f: A \rightarrow B$  entre  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas

es un  $*$ -homomorfismo que cumple  $|f(a)| = g$  para cada elemento homogéneo  $a \in A_g$  y  $g \in G$ . Notaremos  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$  a la categoría de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas y morfismos homogéneos.

**Ejemplo 1.1.10.** El álgebra de polinomios de Laurent  $\ell[t, t^{-1}]$  es una  $*$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada con la involución dada por  $t \mapsto t^{-1}$  y la descomposición

$$\ell[t, t^{-1}]_n := \ell \cdot t^n$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$ . En general, el álgebra de grupo  $\ell G$  es una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada con involución  $(\lambda \cdot g)^* = \lambda^* \cdot g^{-1}$  y graduación  $(\ell G)_g := \ell \cdot g$ .

**Ejemplo 1.1.11.** El *álgebra de Leavitt*

$$L_n := \frac{\ell\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}}{\langle \sum_{i=1}^n x_i y_i - 1, y_j x_i - \delta_{ij} \rangle}$$

es una  $*$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada con la involución dada por  $x_i \mapsto y_i, y_i \mapsto x_i$  y la graduación inducida por asignarle grado 1 a  $x_1, \dots, x_n$  y grado  $-1$  a  $y_1, \dots, y_n$ .

**Convención 1.1.12.** De ahora en más, escribiremos  $\mathfrak{A}$  para referirnos indistintamente a las categorías  $\text{Alg}_\ell^*, G - \text{Alg}_\ell^*$  ó  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ .

*Observación 1.1.13.* Usaremos más adelante que las categorías  $G - \text{Alg}_\ell^*$  y  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$  tienen pullbacks. Fijemos  $A_1, A_2, B \in \mathfrak{A}$  y morfismos  $f_i: A_i \rightarrow B$ . En el caso de  $G$ - $*$ -álgebras, basta notar que la acción diagonal en  $A_1 \times A_2$  se restringe a  $P = A_1 \times_B A_2$ . En el caso de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas, la componente homogénea de grado  $g \in G$  de  $A_1 \times A_2$  es  $(A_1)_g \times (A_2)_g$  y un cálculo directo muestra que la asignación  $P_g := P \cap (A_1 \times A_2)_g$  define una  $G$ -graduación en  $P$ .

### 1.1.3 PRODUCTOS TENSORIALES

A continuación definiremos la noción de homotopía algebraica en el contexto de  $*$ -álgebras que tienen una  $G$ -graduación o una acción de  $G$ . Para esto, precisamos primero darle una estructura al producto tensorial de  $*$ -álgebras como objeto de cada una de las categorías correspondientes.

Fijemos  $A$  y  $B$  dos  $*$ -álgebras sobre  $\ell$  y  $C$  una  $*$ -álgebra sobre  $\mathbb{Z}$ . Usaremos la notación  $AB := A \otimes_\ell B$  y  $CB := C \otimes_{\mathbb{Z}} B$  para los respectivos productos tensoriales, y omitiremos la referencia al anillo cuando se deduzca del contexto. En ambos casos, se tienen definidas involuciones

$$(a \otimes b)^* := a^* \otimes b^*, \quad (c \otimes b)^* := c^* \otimes b^*$$

que hacen de  $AB$  y  $CA$  dos  $*$ -álgebras.

Si además  $A$  y  $B$  son  $G$ - $*$ -álgebras y  $C$  un  $G$ -anillo, los productos tensoriales  $AB$  y  $CA$  resultan  $G$ - $*$ -álgebras con la acción diagonal. Precisamos también darle una graduación a  $AB$  y  $CB$ , en el caso en el que  $A$  y  $C$  tengan la graduación trivial. Definimos sus componentes homogéneas de grado  $g \in G$  como

$$(AB)_g := A \otimes_\ell B_g, \quad (CB)_g := C \otimes_{\mathbb{Z}} B_g.$$

*Observación 1.1.14.* Si  $G$  es abeliano, entonces hay una graduación canónica en ambos productos tensoriales dada por

$$(AB)_g = \bigoplus_{s+t=g} A_s \otimes B_t, \quad (CB)_g = \bigoplus_{s+t=g} C_s \otimes B_t.$$

Cuando la graduación en  $A$  o  $C$  es la trivial, esta definición coincide con la dada para  $G$  arbitrario.

## 1.2. Homotopía polinomial

Procedemos ahora a definir la noción de homotopía polinomial para  $\mathfrak{A}$  como en 1.1.12. Dado  $A \in \mathfrak{A}$ , veremos a  $A[t_1, \dots, t_n] := \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \otimes_{\mathbb{Z}} A$  como un objeto de  $\mathfrak{A}$  equipando a  $\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  con la involución y acción ó graduación trivial y procediendo como en la Sección 1.1.3.

Dados  $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$  y  $ev_{\mathbf{m}} : \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \rightarrow \mathbb{Z}$  el mapa de evaluación asociado, escribiremos  $ev_{\mathbf{m}} : A[t_1, \dots, t_n] \rightarrow A$  para referirnos a  $1_A \otimes ev_{\mathbf{m}}$  y  $\iota_A : A \rightarrow A[t_1, \dots, t_n]$  para la identidad de  $A$  tensorizada con la inclusión  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$ . Notemos que estos efectivamente resultan morfismos en  $\mathfrak{A}$ .

**Definición 1.2.1.** Dos morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  en  $\mathfrak{A}$  son *elementalmente homotópicos* si existe un morfismo  $h : A \rightarrow B[t]$  tal que  $ev_0 h = f$  y  $ev_1 h = g$ . En tal caso, notamos  $f \sim_e g$ .

**Ejemplo 1.2.2.** Si  $k$  es un cuerpo y  $A, B$  son  $k$ -álgebras conmutativas de tipo finito, entonces

$$\text{Spec } B[t] \simeq \text{Spec}(B \otimes_k k[t]) \simeq \text{Spec } B \times \text{Spec } k[t] = \text{Spec } B \times \mathbb{A}^1,$$

donde  $\times$  denota el producto en la categoría de variedades algebraicas afines sobre  $k$ . Bajo esta identificación, una homotopía elemental  $h : f \simeq g$  se corresponde con un morfismo de variedades

$$H : \text{Spec } B \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \text{Spec } A$$

tal que  $H(-, 0) = \text{Spec}(f)$  y  $H(-, 1) = \text{Spec}(g)$ . En este sentido es que la noción de homotopía algebraica se asemeja a la noción de homotopía entre espacios topológicos, donde la línea afín viene a reemplazar al intervalo unitario.

Sin embargo, la analogía con el contexto topológico no es completa. Una principal diferencia en el caso de variedades algebraicas afines es que

$$\mathbb{A}^1 \vee \mathbb{A}^1 = \text{Spec}(k[t] \times_k k[t]) \not\cong \mathbb{A}^1$$

para cualquier elección de puntos

$$p, q : * \rightarrow \mathbb{A}^1 \quad \longleftrightarrow \quad ev_p, ev_q : k[t] \rightarrow k,$$

lo cual se ve reflejado en que  $\sim_e$  no es transitiva.

Aunque la relación dada por homotopías elementales no es de equivalencia, sí resulta reflexiva y simétrica. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.2.3.** Dos morfismos  $f, g: A \rightarrow B$  en  $\mathfrak{A}$  son *homotópicos* si existe una sucesión  $f_0, \dots, f_n \in \mathfrak{A}$  de morfismos en  $\mathfrak{A}$  tales que  $f_0 = f, f_n = g$  y  $f_i \sim_e f_{i+1}$  para cada  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Esto induce una relación de equivalencia en los morfismos de  $\mathfrak{A}$  que denotaremos  $\sim$ .

Un morfismo  $f: A \rightarrow B$  es una *equivalencia homotópica* si existe un morfismo  $g: A \rightarrow B$  tal que  $gf \sim 1_A$  y  $fg \sim 1_B$ . Dos álgebras  $A$  y  $B$  en  $\mathfrak{A}$  son *homotópicamente equivalentes* si existe una equivalencia homotópica  $f: A \rightarrow B$ . Un álgebra  $A \in \mathfrak{A}$  se dice *contráctil* si el morfismo identidad  $1_A$  es homotópico al morfismo nulo.

**Proposición 1.2.4.** La relación  $\sim$  es compatible con la composición. Concretamente, si  $f, g: A \rightarrow B \in \mathfrak{A}$  son homotópicos entonces  $fs \sim gs$  y  $s'f \sim s'g$  para cada par de morfismos  $s: C \rightarrow A$  y  $s': B \rightarrow D$ .

*Demostración.* Sean  $f, g: A \rightarrow B$  dos morfismos homotópicos y  $H: A \rightarrow B[t]$  una homotopía entre  $f$  y  $g$ . Dado un morfismo  $s: C \rightarrow A$ , una verificación directa muestra que  $Hs: C \rightarrow B[t]$  es una homotopía entre  $fs$  y  $gs$ . Similarmente, para cada morfismo  $s': B \rightarrow D$  la composición

$$A \xrightarrow{H} B[t] \xrightarrow{1_{B[t]} \otimes s'} D[t]$$

define una homotopía entre  $s'f$  y  $s'g$ . ◆

**Definición 1.2.5.** La proposición anterior nos permite definir una categoría  $[\mathfrak{A}]$  que consiste de los objetos de  $\mathfrak{A}$  junto con las clases de equivalencia de morfismos para la relación de homotopía polinomial. Notamos  $[A, B] = \text{hom}_{[\mathfrak{A}]}(A, B)$ .

### 1.2.1 IND-COMPLETACIONES

La noción de ind-completaciones nos permitirá dar una mejor descripción de las homotopías polinomiales.

Sea  $C$  una categoría. Su *ind-completación* es la categoría  $C^{\text{ind}}$  que tiene por objetos a los diagramas  $(I, F) = F: I \rightarrow C$  cuyo dominio es una categoría pequeña y filtrante, con los morfismos dados por

$$\text{hom}_{C^{\text{ind}}}(F, G) := \lim_{i \in I} \text{colim}_{j \in J} \text{hom}_C(F(i), G(j)).$$

*Observación 1.2.6.* Podemos pensar a la ind-completación de una categoría como el agregado formal de colímites filtrantes. Cabe destacar que la inclusión  $C \rightarrow C^{\text{ind}}$  es plenamente fiel; su imagen consiste de los llamados ind-objetos constantes.

Por definición de los *hom-sets* en  $C^{\text{ind}}$ , si  $c$  es constante un morfismo  $c \rightarrow (J, G)$  está determinado por un mapa  $c \rightarrow G_j$  en  $C$  para algún  $j \in J$ . Esto será de utilidad a la hora de codificar la noción de homotopía polinomial en términos de morfismos de ind-álgebras.

**Definición 1.2.7.** Para cada categoría  $\mathfrak{A}$  definimos  $[\mathfrak{A}^{\text{ind}}]$  como la categoría cuyos objetos son las ind-álgebras, y los morfismos  $(I, A) \rightarrow (J, B)$  están dados por

$$[A, B] := \lim_{i \in I} \text{colim}_{j \in J} [A(i), B(j)].$$

Se tiene así una asignación canónica  $\text{hom}_{\mathfrak{A}^{\text{ind}}}(A, B) \rightarrow [A, B]$ . Dos morfismos de ind-álgebras  $f, g : A \rightarrow B$  son *homotópicos* si su imágenes a través del mapa anterior coinciden.

### 1.2.2 ÁLGEBRAS DE FUNCIONES POLINOMIALES

Pasamos ahora a caracterizar las homotopías en términos de morfismos en  $\mathfrak{A}$ . Para hacerlo, necesitaremos primero definir el álgebra de funciones polinomiales sobre un álgebra  $A$  con dominio un conjunto simplicial  $K$ . Dado  $n \in \mathbb{N}_0$ , escribimos  $[[n]]$  para referirnos al conjunto  $\{0, \dots, n\}$ .

**Definición 1.2.8.** Para cada  $n, m \geq 0$  y morfismo de posets  $\theta : [[n]] \rightarrow [[m]]$ , las asignaciones

$$\mathbb{Z}^{\Delta^n} := \frac{\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]}{\langle \sum_{i=0}^n t_i - 1 \rangle}$$

y

$$\begin{aligned} \theta^* : \mathbb{Z}^{\Delta^m} &\rightarrow \mathbb{Z}^{\Delta^n} \\ t_i &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{if } \theta^{-1}(i) = \emptyset \\ \sum_{j \in \theta^{-1}(i)} t_j & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned}$$

definen un anillo simplicial. Lo notamos  $\mathbb{Z}^{\Delta^\bullet}$ .

Sea  $A \in \mathfrak{A}$ . Equipando a cada anillo  $\mathbb{Z}^{\Delta^n}$  con la involución y acción o graduación trivial, por la Sección 1.1.3 tenemos en  $\mathfrak{A}$  un objeto simplicial

$$A^{\Delta^\bullet} : [[n]] \mapsto A^{\Delta^n}, \quad A^{\Delta^n} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{\Delta^n}$$

definido en morfismos como  $\theta \mapsto 1_A \otimes \theta^*$ . Si ahora  $K$  es un conjunto simplicial arbitrario, se define

$$A^K := \text{hom}_{\text{sSet}}(K, A^{\Delta^\bullet}).$$

Más generalmente, si  $(K, \star)$  es un conjunto simplicial punteado definimos

$$A^{(K, \star)} := \ker(A^K \rightarrow A) = \ker(\text{hom}_{\text{sSet}}(K, A^{\Delta^\bullet}) \xrightarrow{(\star \rightarrow K)^*} \text{hom}_{\text{sSet}}(\star, A^{\Delta^\bullet})).$$

Si  $K$  es finito, por [CT07, Lemma 3.1.3] los morfismos naturales de anillos  $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^K \rightarrow A^K$  y  $A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(K, \star)} \rightarrow A^{(K, \star)}$  son isomorfismos. La involución trivial hace de  $\mathbb{Z}^K$  y  $\mathbb{Z}^{(K, \star)}$  dos  $\ast$ -anillos. Equipando a estos con la acción o graduación trivial según corresponda vemos que las asignaciones  $A \mapsto A^K$  y  $A \mapsto A^{(K, \star)}$  definen endofuntores de  $\mathfrak{A}$ .

Escribiremos  $\text{sd} : \text{sSet} \rightarrow \text{sSet}$  para el functor de subdivisión de [GJ99, III, 3.4]. Este se define extendiendo la asignación que envía un simplex estándar  $\Delta^n$  a su subdivisión baricéntrica. El functor  $\text{sd}$  viene equipado de una transformación natural  $\text{sd} \Rightarrow 1_{\text{sSet}}$  llamada *last vertex map*, que da lugar a un pro-conjunto simplicial

$$\text{sd}^\bullet K: K \leftarrow \text{sd} K \leftarrow \text{sd}^2 K \leftarrow \text{sd}^3 K \leftarrow \dots$$

para cada  $K \in \text{sSet}$ . En particular, para cada objeto  $A \in \mathfrak{A}$  y conjunto simplicial finito  $K \in \text{sSet}$  tenemos un objeto

$$A^{\text{sd}^\bullet K}: A \rightarrow A^{\text{sd} K} \rightarrow A^{\text{sd}^2 K} \rightarrow A^{\text{sd}^3 K} \rightarrow \dots$$

en  $\mathfrak{A}^{\text{ind}}$ .

**Definición 1.2.9.** Definimos los anillos de *lazos* y *caminos* como

$$\Omega := \mathbb{Z}^{(S^1, \star)} \simeq t(t-1)\mathbb{Z}[t], \quad \mathcal{P} := \mathbb{Z}^{(\Delta^1, \star)} \simeq t\mathbb{Z}[t]$$

y sus versiones subdivididas como los ind-anillos

$$\mathbb{Z}^{S^1} := \mathbb{Z}^{(\text{sd}^\bullet S^1, \star)}, \quad \mathcal{P} := \mathbb{Z}^{(\text{sd}^\bullet \Delta^1, \star)}.$$

Para cada  $n \geq 1$ , definimos inductivamente  $\mathbb{Z}^{S^{n+1}} = (\mathbb{Z}^{S^n})^{S^1} = \mathbb{Z}^{S^n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{S^1}$ . Los anillos aquí definidos son todos conmutativos, así que podemos verlos como  $\ast$ -anillos a través de la involución trivial. Equipándolos a su vez con la acción o graduación trivial, para cada  $A \in \mathfrak{A}$  definimos  $\Omega A, \mathcal{P} A \in \mathfrak{A}$  y  $A^{S^1}, \mathcal{P} A \in \mathfrak{A}^{\text{ind}}$  como se indica en la Sección 1.1.3.

*Observación 1.2.10.* Las álgebras  $\Omega A$  y  $\mathcal{P} A$  vienen a representar los análogos algebraicos de los espacios de lazos y de caminos de un espacio. Un cálculo directo muestra que

$$H: \mathcal{P} A \rightarrow \mathcal{P} A[s], \quad t \mapsto ts$$

es una homotopía elemental entre el morfismo nulo y  $1_{\mathcal{P} A}$ , así que  $\mathcal{P} A$  resulta siempre contráctil.

*Observación 1.2.11.* Un morfismo simplicial  $\text{sd}^n \Delta^1 \rightarrow K$  está determinado por una elección de 1-simplices  $x_1, \dots, x_{2^n} \in K_1$  que satisfacen una condición de compatibilidad sobre sus caras. Esto permite representar a un elemento de  $A^{\text{sd}^n \Delta^1}$  como una sucesión de polinomios  $(p_1, \dots, p_{2^n})$  tales que

$$p_{2^{i-1}}(1) = p_{2^i}(1), \quad p_{2^i}(0) = p_{2^{i+1}}(0)$$

para cada  $i$ . Aplicando el automorfismo de  $A^{\Delta^1} \simeq A[t]$  que envía  $t$  a  $1-t$  a los polinomios  $p_{2^k}$  de subíndice par, en definitiva se tiene un isomorfismo

$$A^{\text{sd}^n \Delta^1} \simeq \{(p_1, \dots, p_{2^n}) \in A[t] : \text{ev}_1(p_i) = \text{ev}_0(p_{i+1}), 1 \leq i \leq 2^n - 1\}. \quad (1.2.12)$$

Este envía los morfismos  $ev_0, ev_1 : A^{sd^n \Delta^1} \rightarrow A$  inducidos por las inclusiones  $* \rightarrow sd^n \Delta$  a los extremos a  $ev_0 \pi_1$  y  $ev_1 \pi_2^n$  respectivamente.

De esta manera, intercalando homotopías constantes de ser necesario, podemos pensar a una homotopía entre morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  como un morfismo  $h : A \rightarrow B^{sd^n \Delta^1}$  para algún  $n \geq 0$  que cumple  $ev_0 h = f$  y  $ev_1 h = g$ . Por la Observación 1.2.6, toda esta información se puede codificar en un enunciado sobre ind-álgebras.

**Proposición 1.2.13.** *Dos morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  en  $\mathfrak{A}$  son homotópicos si y sólo si existe un morfismo  $h : A \rightarrow B^{sd^n \Delta^1}$  en  $\mathfrak{A}^{ind}$  tal que  $ev_0 h = f$  y  $ev_1 h = g$ .  $\blacklozenge$*

### 1.2.3 INVARIANZA HOMOTÓPICA

Un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  se dice *homotópicamente invariante* si  $f \sim g$  implica  $F(f) = F(g)$  para cada par de morfismos  $f, g \in \mathfrak{A}$ .

**Proposición 1.2.14.** *Si  $A$  es un objeto de  $\mathfrak{A}$ , la inclusión  $\iota_A : A \rightarrow A[t]$  es una equivalencia homotópica.*

*Demostración.* Por construcción sabemos que  $ev_0 \iota_A = 1_A$ . Basta verificar que  $\iota_A ev_0 \sim 1_{A[t]}$ , para lo cual podemos tomar la homotopía  $H : p(t) \in A[t] \mapsto p(ts) \in A[t, s]$ .  $\blacklozenge$

**Proposición 1.2.15.** *Un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  es homotópicamente invariante si y sólo si envía  $\iota_A : A \rightarrow A[t]$  a un isomorfismo para cada  $A \in \mathfrak{A}$ .*

*Demostración.* Como la inclusión  $\iota_A$  es una equivalencia homotópica, tiene por imagen a un isomorfismo a través de cualquier functor homotópicamente invariante. Recíprocamente, supongamos que  $F$  envía cada inclusión  $\iota_A : A \rightarrow A[t]$  a un isomorfismo. Como  $ev_1 \iota_A = ev_0 \iota_A$  debe ser  $F(ev_1) = F(ev_0)$ , y entonces para cada homotopía elemental  $h : f \simeq g$  es

$$F(f) = F(ev_0 h) = F(ev_0)F(h) = F(ev_1)F(h) = F(ev_1 h) = F(g),$$

como buscábamos.  $\blacklozenge$

**Proposición 1.2.16.** *Sea  $i : \mathfrak{A} \rightarrow [\mathfrak{A}]$  el functor canónico. Un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  es homotópicamente invariante si y sólo si existe un functor  $\tilde{F} : [\mathfrak{A}] \rightarrow \mathfrak{C}$  tal que  $F = \tilde{F}i$ . Más aún; cuando un tal functor existe, es único.*

*Demostración.* Si  $F$  se factoriza a través de  $i$ , es homotópicamente invariante pues este último envía cada inclusión  $\iota_A : A \rightarrow A[t]$  a un isomorfismo.

La necesidad de la factorización se deduce de que la asignación  $\tilde{F}([f]) = F(f)$  está bien definida si  $F$  es homotópicamente invariante, de forma que  $F$  se factoriza por  $i$  a través de

$$\tilde{F}(A) := F(A), \quad \tilde{F}([A \xrightarrow{f} B]) := F(f),$$

y esta es la única definición posible que satisface lo buscado.  $\blacklozenge$

*Observación 1.2.17.* En [Wei13, Chapter IV, Definition 11.1] Weibel define la *homotopización estricta* de un funtor  $F: \text{Alg}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Ab}$  como

$$[F](A) = \text{coeq} \left( F(A[t]) \xrightarrow{F(\text{ev}_0), F(\text{ev}_1)} F(A) \right)$$

La homotopización de  $F$  es un funtor  $[F]$  homotópicamente invariante junto con una transformación natural  $\eta: F \Rightarrow [F]$ , de manera que toda otra transformación natural  $F \Rightarrow H$  hacia un funtor  $H$  homotópicamente invariante se factoriza por  $\eta$ . Si  $F$  es homotópicamente invariante, entonces  $\eta$  es un isomorfismo.

Se tiene también una definición de homotopización FH para funtores  $F$  que toman valores a CW-complejos, considerando la realización geométrica del espacio simplicial  $F(A^{\Delta^{\bullet}})$ . En [Wei13, Chapter IV, Lemma 11.5.1] se prueba que  $\pi_0[F^h(\mathbb{R})] = [F](\mathbb{R})$ , junto con propiedades análogas a las de la homotopización estricta. Una construcción similar para espectros define la homotopización de la K-teoría algebraica, conocida como la *K-teoría homotópica de Weibel* KH. Referimos a [Wei89] para su definición y principales propiedades. En [CT07, Proposition 8.1.1] se da una descripción de los grupos  $\text{KH}_n(A)$  en términos de colímites de grupos de K-teoría algebraica.

### 1.3. Grupos de Grothendieck-Witt

La K-teoría bivariante hermitiana es una generalización bivariante de la homotopización de la K-teoría hermitiana. Los grupos de K-teoría hermitiana  $\text{K}_{\bullet}^h(\mathbb{R})$  de un  $*$ -anillo  $\mathbb{R}$  se construyen de forma análoga a la K-teoría algebraica reemplazando el grupo general lineal  $\text{GL}(\mathbb{R})$  por el grupo ortogonal  $\text{O}(\mathbb{R})$ . Nos concentraremos en esta sección en el 0-ésimo de estos grupos, también conocido como grupo de Grothendieck-Witt. Referimos a [CV21, Section 3] para una descripción en detalle de la K-teoría hermitiana y su homotopización  $\text{K}^h\text{H}$ .

**Definición 1.3.1.** Sean  $\mathbb{R}$  un  $*$ -anillo y  $\epsilon \in \mathbb{R}$  un elemento unitario y central. Fijemos también un  $\mathbb{R}$ -módulo a derecha  $M$  proyectivo y finitamente generado. El *módulo  $*$ -dual*  $M^*$  a  $M$  es el  $\mathbb{R}$ -módulo de funciones  $\mathbb{Z}$ -lineales  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfacen  $f(m \cdot r) = r^*f(m)$  para cada  $r \in \mathbb{R}$  y  $m \in M$ . Definiendo  $(f \cdot r)(m) = f(m) \cdot r$ , este es también un módulo a derecha proyectivo finitamente generado.

Una forma  $\epsilon$ -hermitiana sobre  $M$  es un morfismo  $\mathbb{R}$ -lineal  $M \rightarrow M^*$ . Esto se corresponde con una función  $\mathbb{Z}$ -bilineal  $\varphi: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(x \cdot r, y \cdot s) = r^*\varphi(x, y)s$  y  $\varphi(y, x) = \epsilon\varphi(x, y)^*$  para cada  $x, y \in M$  y  $r, s \in \mathbb{R}$ . Decimos que una forma  $\epsilon$ -hermitiana es *no degenerada* si  $m \in M \mapsto \varphi(-, m) \in M^*$  es un isomorfismo.

Un *módulo  $\epsilon$ -hermitiano* es un par  $(M, \varphi)$  con  $M$  un  $\mathbb{R}$ -módulo a derecha proyectivo finitamente generado y  $\varphi$  una forma  $\epsilon$ -hermitiana sobre  $M$ . Un morfismo  $f: (M, \varphi) \rightarrow (N, \psi)$  de módulos  $\epsilon$ -hermitianos es un morfismo  $\mathbb{R}$ -lineal  $f: M \rightarrow N$  tal que  $\psi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$  para cada  $x, y \in M$ .

*Observación 1.3.2.* Si  $(M, \varphi)$  y  $(N, \psi)$  son módulos  $\epsilon$ -hermitianos, su suma directa  $M \oplus N$

es un módulo  $\epsilon$ -hermitiano tomando la forma  $\varphi \oplus \psi$  definida por

$$(\varphi \oplus \psi)(m + n, m' + n') := \varphi(m, m') + \psi(n, n')$$

para cada  $m, m' \in M$  y  $n, n' \in N$ .

**Definición 1.3.3.** Sea  $R$  un  $*$ -anillo y  $\epsilon \in R$  un elemento unitario y central. Las clases de isomorfismo de módulos  $\epsilon$ -hermitianos forman un monoide abeliano con la operación

$$[(M, \varphi)] \oplus [(N, \psi)] := [(M \oplus N, \varphi \oplus \psi)].$$

El *grupo de Grothendieck-Witt*  ${}_{\epsilon}K_0^h(R)$  de  $R$  es la completación a grupo de este monoide. Cuando  $\epsilon = 1$ , lo omitimos de la notación.

**Ejemplos 1.3.4.** Si consideramos a  $\mathbb{R}$  como  $*$ -anillo con la involución trivial, un módulo hermitiano se corresponde con una forma bilineal no degenerada  $\phi$  sobre  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ . Una tal forma está determinada por su signatura. Esta no contiene ceros, ya que  $\phi$  es no degenerada, y por lo tanto está en correspondencia con un par  $(\phi_-, \phi_+) \in \mathbb{N}_0^2$  tal que  $\phi_- + \phi_+ = n$ . Así, el rango  $n \in \mathbb{N}$  junto con  $\phi_+$  determinan la clase de isomorfismo de  $(\mathbb{R}^n, \phi)$ . En consecuencia la asignación  $[(\mathbb{R}^n, \phi)] \mapsto (n, \phi_+)$  define un isomorfismo  $K_0^h(\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}^2$ . Un argumento similar nos dice que  $K_0^h(\mathbb{C})$  para  $\mathbb{C}$  equipado con la involución trivial es  $\mathbb{Z}$  y para la involución compleja  $K_0^h(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}^2$ .

Un ejemplo central de módulo  $\epsilon$ -hermitiano es el *módulo  $\epsilon$ -hiperbólico*  ${}_{\epsilon}H(M) := M \oplus M^*$  asociado a un módulo proyectivo finitamente generado  $M$ , cuya forma es

$$h((x, f), (x', f')) := f(x')^* + \epsilon f'(x).$$

**Proposición 1.3.5.** Sea  $R$  un  $*$ -anillo unital y  $\epsilon \in R$  un elemento unitario y central. Si existe un elemento central  $\lambda \in R$  tal que  $\lambda + \lambda^* = 1$ , entonces para todo módulo  $\epsilon$ -hermitiano  $(M, \psi)$  se tiene un isomorfismo

$$(M \oplus M, \psi \oplus -\psi) \simeq {}_{\epsilon}H(M). \quad (1.3.6)$$

*Demostración.* Sea  $\vartheta: m \in M \mapsto \psi(-, m) \in M^*$  el isomorfismo inducido por  $\psi$ . Un cálculo directo muestra que

$$\Theta: (x, y) \in M \oplus M \mapsto (x + y, \vartheta(x)\lambda\epsilon^* - \vartheta(y)\lambda^*\epsilon^*) \in M \oplus M^*$$

es un morfismo de módulos  $\epsilon$ -hermitianos con inversa

$$\Theta^{-1}(x, f) = (x\lambda^* + \epsilon\vartheta^{-1}(f), x\lambda - \epsilon\vartheta^{-1}(f)).$$

◆

*Observación 1.3.7.* Sea  $(M, \phi)$  un módulo  $\epsilon$ -hermitiano. Como  $M$  es proyectivo y finitamente generado, es un sumando directo de  $\mathbb{R}^n$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , y en particular  ${}_{\epsilon}H(M)$  es un sumando directo de  ${}_{\epsilon}H(\mathbb{R}^n)$ . Esto junto el isomorfismo (1.3.6) nos dicen que todo módulo  $\epsilon$ -hermitiano es un sumando directo de  ${}_{\epsilon}H(\mathbb{R}^n)$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ .

En función de la anterior observación tenemos una descripción más concreta de  $K_0^h(\mathbb{R})$ , la cual se encuentra en [Cor21, Section 7]. A continuación la recordamos, para lo cual precisamos algunas definiciones previas.

**Definición 1.3.8.** Una *proyección* de  $R$  es un idempotente autoadjunto, es decir, un elemento  $x \in R$  tal que  $x^2 = x$  y  $x^* = x$ . Dos proyecciones  $p$  y  $q$  son *von Neumann equivalentes* si existe  $x \in R$  tal que  $xx^* = p$  y  $x^*x = q$ . Como en el caso no hermitiano, se tiene un monoide  $\mathcal{V}_\infty^*(R)$  de clases de equivalencia von Neumann de proyecciones en  $M_\infty R$  cuya completación a grupo se denomina  $K_0(R)^*$ .

**Definición 1.3.9.** Sea  $h_\pm := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Definimos  $M_\pm := M_2^{h_\pm}$ .

La Observación 1.3.7 nos dice que un módulo hermitiano es isomorfo a un sumando directo de  $H(\mathbb{R}^n) \simeq (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n, \text{id} \oplus -\text{id})$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ , y este último a su vez está determinado por una proyección de  $M_\pm M_n R \simeq M_n M_\pm R$ . Como se prueba en [CMR07, Proposition 1.8] para  $K_0(\mathbb{R})$ , las clases de isomorfismo de módulos hermitianos se corresponden con las clases de equivalencia von Neumann de estas proyecciones.

Es así que  $K_0^h(\mathbb{R})$  se puede describir como la completación a grupo de las clases de equivalencia von Neumann de proyecciones en  $M_\infty M_\pm R$ ,

$$K_0^h(\mathbb{R}) = K_0(M_\pm R)^*. \quad (1.3.10)$$

Terminamos la sección definiendo los mapas hiperbólico y de olvido, los cuales relacionan los grupos  $K_0(\mathbb{R})$  y  $K_0^h(\mathbb{R})$  entre sí.

**Definición 1.3.11.** Sea  $R$  un  $*$ -anillo. El *morfismo de olvido*

$$K_0^h(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{forg}} K_0(\mathbb{R}) \quad (1.3.12)$$

envía la clase  $[(M, \varphi)]$  de un módulo hermitiano a la clase de isomorfismo  $[M]$  de  $M$ . El *morfismo hiperbólico*

$$K_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{hyp}} K_0^h(\mathbb{R}) \quad (1.3.13)$$

envía la clase de un módulo  $M$  a la clase del módulo hiperbólico  $H(M)$ .

## 1.4. Estabilidad

Si  $\eta : G_1 \Rightarrow G_2$  es una transformación natural entre endofuntores de  $\mathfrak{A}$ , un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  se dice  *$\eta$ -estable en  $A \in \mathfrak{A}$*  si  $F(\eta_A)$  es un isomorfismo, y  *$\eta$ -estable* si es  $\eta$ -estable en cada  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Ejemplo 1.4.1.** En vista de la Proposición 1.2.15, un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es homotópicamente invariante si y sólo si es  $\iota : 1_{\mathfrak{A}} \Rightarrow - \otimes \mathbb{Z}[t]$  estable, donde  $\iota_A : A \rightarrow A[t]$  es la inclusión canónica para cada  $A \in \mathfrak{A}$ .

*Observación 1.4.2.* La estabilidad se preserva por isomorfismos naturales. En efecto, si  $\eta: G_1 \rightarrow G_2$  es una transformación natural entre endofuntores de  $\mathfrak{A}$  y  $\xi: F \Rightarrow F'$  un isomorfismo natural con  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor  $\eta$ -estable en  $A \in \mathfrak{A}$ , a partir del siguiente cuadrado conmutativo

$$\begin{array}{ccc} FG_1A & \xrightarrow{F\eta_A} & FG_2A \\ \xi_{G_1A} \downarrow & & \downarrow \xi_{G_2A} \\ F'G_1A & \xrightarrow{F'\eta_A} & F'G_2A \end{array}$$

vemos que  $F'$  es también  $\eta$ -estable en  $A$ .

### 1.4.1 ESTABILIDAD MATRICIAL

Una consecuencia inmediata de la definición de  $K_0(R)$  de un anillo unital  $R$  en términos de  $R$ -módulos proyectivos es que resulta un invariante Morita. Interpretando esto en términos de idempotentes, esquinas plenas y anillos de matrices, se puede ver que el functor  $K_0: \text{Alg}_{\mathbb{Z}} \rightarrow \text{Ab}$  envía cada inclusión  $R \hookrightarrow M_n R$  en la esquina superior izquierda a un isomorfismo. Como además  $K_0$  conmuta con colímites filtrantes, es

$$K_0(M_\infty A) \simeq K_0(\text{colim}_{n \geq 1} M_n A) \simeq \text{colim}_{n \geq 1} K_0(M_n A) \simeq K_0(A)$$

para todo  $A \in \text{Alg}_{\mathbb{Z}}$ . Una forma de describir los isomorfismos anteriores es decir que para cada  $\lambda \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  el functor  $K_0$  es  $\iota_\lambda$ -estable, donde  $\iota_\lambda: 1 \Rightarrow M_\lambda \otimes_{\mathbb{Z}} -$  es la transformación natural inducida por la inclusión en la esquina superior izquierda. En general, decimos que un functor es  $M_\lambda$ -estable si es  $\iota_\lambda$ -estable.

A continuación damos la definición de anillo de matrices finitas indexado por un conjunto arbitrario  $X$ , la correspondiente noción de  $M_X$ -estabilidad, y algunas propiedades sobre funtores  $M_X$ -estables.

**Definición 1.4.3.** Dado un conjunto fijo  $X$ , consideremos el conjunto

$$\Gamma_X := \{f: X \times X \rightarrow \mathbb{Z} : |\text{im } f| < \infty \text{ y } (\exists N \geq 1) \text{ s.t. } |\text{sop}(x, -)|, |\text{sop}(-, x)| < N (\forall x \in X)\}$$

de matrices indexadas por  $X$  con imagen finita y soporte uniformemente acotado en cada fila y columna. La suma puntual y el producto de convolución

$$(f \cdot g)(x, y) := \sum_{z \in X} f(x, z)g(z, y)$$

hacen de  $\Gamma_X$  un anillo. Más aún, se tiene una involución  $(-)^t$  en  $\Gamma_X$  definida por  $f^t(x, y) := f(y, x)$ , el ideal de funciones finitamente soportadas  $M_X \triangleleft \Gamma_X$  resulta un  $*$ -ideal, y el cociente  $\Sigma_X := \Gamma_X / M_X$  una  $*$ -álgebra sobre  $\mathbb{Z}$ . Escribimos  $\varepsilon_{x,y} \in M_X$  para referirnos a la función característica del par  $(x, y) \in X \times X$ .

Si  $X$  es finito,  $M_X$  y  $\Gamma_X$  coinciden y son ambos  $*$ -isomorfos a  $M_n$  con  $n = |X|$  junto con la involución dada por transponer. Cuando  $X$  es numerable,  $M_X$  es isomorfo a  $M_\infty := \text{colim}_{n \geq 1} M_n$  y  $\Gamma_X$  es isomorfo al cono de Karoubi definido en [KV73]. Una vez más siguiendo la Sección 1.1.3, escribiremos  $\Gamma_X A$ ,  $M_X A$  y  $\Sigma_X A$  para el producto tensorial de estos anillos con un objeto  $A \in \mathfrak{A}$ .

**Definición 1.4.4.** Sea  $X$  un conjunto. Dado  $x \in X$ , escribimos  $\iota_x$  para la transformación natural

$$\iota_{x,A} : a \in A \mapsto a \otimes \varepsilon_{x,x} \in M_X A, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

Un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es  $M_X$ -estable si es  $\iota_x$ -estable para algún  $x \in X$ .

A primera vista, la definición de  $M_X$ -estabilidad pareciera depender de la elección de un elemento  $x \in X$ . Esta falta de distinción es clarificada por el siguiente lema.

**Lema 1.4.5.** Sea  $X$  un conjunto y  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Sean  $x, y \in X$ . Si  $F$  es  $\iota_x$ -estable en  $A \in \mathfrak{A}$  y  $M_X A$ , entonces  $F(\iota_{x,A}) = F(\iota_{y,A})$ .

*Demostración.* Ver [CV21, Lemma 2.4.1]. ◆

**Corolario 1.4.6.** Sea  $X$  un conjunto y  $x, y \in X$ . Un functor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es  $\iota_x$ -estable si y sólo si es  $\iota_y$ -estable. ◆

**Convención 1.4.7.** Cuando el conjunto  $X$  se deduzca del contexto, diremos que un functor es *matricialmente estable* si es  $M_X$ -estable. Usaremos también este término para decir que un functor es  $M_X$ -estable para *algún* conjunto  $X$  que contenga al menos dos elementos distintos.

Necesitaremos también una comparación entre  $M_X$ -estabilidad y  $M_Y$ -estabilidad en términos de las cardinalidades de  $X$  e  $Y$ .

**Lema 1.4.8.** Sea  $X$  un conjunto con al menos dos elementos e  $Y$  un conjunto tal que  $|Y| > |X|$ . Si  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es  $M_Y$ -estable, es también  $M_X$ -estable.

*Demostración.* Ver [CV21, Lema 2.4.3]. ◆

**Corolario 1.4.9.** Sean  $Y \subset X$  dos conjuntos e  $\text{inc} : M_Y \rightarrow M_X$  la inyección inducida por la inclusión  $Y \hookrightarrow X$ . Si  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  es un functor  $M_X$ -estable, entonces  $F(\text{inc} \otimes 1_A)$  es un isomorfismo para cada  $A \in \mathfrak{A}$ .

*Demostración.* Como  $F$  es  $M_X$ -estable, es también  $M_Y$ -estable. Tomando  $y \in Y$ , tenemos un triángulo conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\iota_{y,A}^Y} & M_Y A \\ & \searrow \iota_{y,A}^X & \downarrow \text{inc} \otimes 1_A \\ & & M_X A \end{array}$$

y como tanto  $F(\iota_{y,A}^Y)$  como  $F(\iota_{y,A}^X)$  son isomorfismos, también debe serlo  $F(\text{inc} \otimes 1_A)$ . ◆

Antes de seguir, recordamos un resultado técnico de [CV21, Section 2]. La demostración, dada en el contexto de  $*$ -álgebras, se adapta a cada categoría  $\mathfrak{A}$ .

*Observación 1.4.10.* Sean  $A \subset B$  objetos en  $\mathfrak{A}$ . Dado  $v \in B$  que satisface  $vA, Av^* \subset A$  y  $av^*va' = aa'$  para cada  $a, a' \in A$ , la función  $\text{ad}(v) : a \in A \mapsto vav^* \in A$  es un  $*$ -morfismo. Si  $\mathfrak{A} = G - \text{Alg}_\ell^*$  y  $v$  es un punto fijo para la acción de  $G$ , entonces  $\text{ad}(v)$  es un morfismo en  $G - \text{Alg}_\ell^*$ . Similarmente, si  $\mathfrak{A} = G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*$  y  $v$  es homogéneo de grado central  $|v| \in Z(G)$ , entonces  $\text{ad}(v)$  es un morfismo en  $G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*$ .

**Proposición 1.4.11** (cf. [CV21, Lemma 2.4.2]). *Sea  $E: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor  $M_2$ -estable. Si  $A \subset B$  y  $v \in B$  son como en la Observación 1.4.10, entonces  $E(\text{ad}(v)) = 1_{EA}$ .*  $\blacklozenge$

*Observación 1.4.12.* Diremos que una  $*$ -álgebra unital  $R$  es una *sum  $*$ -álgebra* si existen  $\alpha_i$  con  $i \in \llbracket 2 \rrbracket$  tales que  $\alpha_i \alpha_i^* = 1$  y  $\sum_{i=1}^2 \alpha_i^* \alpha_i = 1$ . En tal caso, la aplicación

$$- \boxplus -: (x, y) \in R \boxplus R \mapsto \alpha_1^* x \alpha_1 + \alpha_2^* y \alpha_2 \in R$$

es un  $*$ -morfismo de álgebras. Dados  $f, g: A \rightarrow R$  dos  $*$ -morfismos, definimos  $f \boxplus g: x \in A \mapsto f(x) \boxplus g(x) \in R$ . Una *infinite sum  $*$ -álgebra* es una sum  $*$ -álgebra  $R$  junto con  $*$ -endomorfismo  $(-)^{\infty}$  tal que  $1_R \boxplus (-)^{\infty} = (-)^{\infty}$ .

Esta noción fue definida originalmente para anillos en [Wag72]. Allí, Wagoner prueba que si  $R$  es un *infinite sum ring* entonces  $\text{BGL}(R)^+$  es contráctil, Más aún, se observa que si  $R$  es un *infinite sum ring* también lo es  $R[t, t^{-1}]$ , lo cual implica que la  $K$ -teoría algebraica de  $R$  es nula.

En esta dirección, por [Cor11, Propostion 2.3.1] todo funtor  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{A}$  con valores en una categoría aditiva que es matricialmente estable y envía productos en sumas directas satisface  $F(f \boxplus g) = F(f) + F(g)$ . En particular, si  $R$  es una infinite sum  $*$ -álgebra entonces  $F((-)^{\infty}) = 1_{FR} + F((-)^{\infty})$  y por lo tanto  $F(R) = 0$ . En [CT07, Section 4] se prueba que  $\Gamma_{\mathbb{N}} R$  es un infinite sum ring para toda álgebra unital  $R$ . El mismo argumento aplicado a  $\alpha_i = \sum_{x \in X} \varepsilon_{x, \sigma_i(x)}$  para cierta biyección  $\sigma_1 \sqcup \sigma_2: X \sqcup X \rightarrow X$  muestra que  $\Gamma_X R$  es una infinite sum  $*$ -álgebra. Como un funtor matricialmente estable identifica a toda  $*$ -álgebra  $A$  con  $M_X A$ , que a su vez está contenida en  $\Gamma_X A$ , trataremos informalmente a  $\Gamma_X A$  y  $\Sigma_X A = \Gamma_X A / M_X A$  como los análogos algebraicos del cono y la suspensión de un espacio.

Para cada conjunto  $X$  existe una categoría  $\{\text{Alg}_\ell\}_X$  tal que todo funtor  $F: \text{Alg}_\ell \rightarrow \mathcal{C}$  homotópicamente invariante y  $M_X$ -estable se extiende de forma única a un funtor  $F: \{\text{Alg}_\ell\} \rightarrow \mathcal{C}$ . En [CV21, Lemma 5.11] se prueba la existencia de la categoría análoga para  $*$ -álgebras, que definiremos más adelante. Olvidando las involuciones obtenemos la construcción de  $\{\text{Alg}_\ell\}_X$ , la cual pasamos a recordar. El ind-anillo

$$\mathcal{M}_X = M_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}} M_X$$

viene equipado con operaciones  $\boxplus: \mathcal{M}_X \times \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$  y  $\mu: \mathcal{M}_X \otimes \mathcal{M}_X \rightarrow \mathcal{M}_X$  inducidas por biyecciones  $X \times X \rightarrow X$  y  $X \sqcup X \rightarrow X$  que hacen de este un semianillo homotópico.

La categoría  $\{\text{Alg}_\ell\}_X$  tiene por objetos a las  $\ell$ -álgebras, y por morfismos a los conjuntos  $\{A, B\}_X := [A, \mathcal{M}_X B]$  para cada par de  $\ell$ -álgebras  $A$  y  $B$ . La composición se define como

$$\star : ([f], [g]) \in \{B, C\}_X \times \{A, B\}_X \mapsto [\mu \circ \mathcal{M}_X(f) \circ g] \in \{A, C\}_X.$$

Por último, la inclusión  $i: \text{Alg}_\ell \rightarrow \{\text{Alg}_\ell\}$  que es constante en objetos y envía  $f: A \rightarrow B$  a

$$i(f) := [A \xrightarrow{f} B \hookrightarrow \mathcal{M}_X B]$$

es universal con respecto a la invarianza homotópica y la  $\mathcal{M}_X$ -estabilidad. Esto significa que todo funtor  $F: \text{Alg}_\ell \rightarrow C$  homotópicamente invariante y  $\mathcal{M}_X$ -estable se factoriza de forma única a través de  $i$ .

### 1.4.2 ESTABILIDAD HERMITIANA

La definición de  $\iota_+$ -estabilidad surge de las propiedades de estabilidad que satisface la K-teoría hermitiana. Veremos a continuación en un contexto más general que a partir de (1.0.1) tenemos un isomorfismo  $M_\pm M_\pm \simeq M_2 M_\pm$ .

Este isomorfismo junto con la  $M_2$ -estabilidad de  $K_0(-)^*$  y el isomorfismo (1.3.10) nos dice que  $K_0^h(-)$  envía la inclusión  $\iota_+ : A \rightarrow M_\pm A$  en la esquina superior izquierda a un isomorfismo para toda  $*$ -álgebra  $A$ .

**Definición 1.4.13.** Decimos que un funtor  $F: \mathfrak{A} \rightarrow C$  es  $\iota_+$ -estable si es estable con respecto a la transformación natural  $\iota_+ \otimes - : 1 \Rightarrow M_\pm \otimes -$  que corresponde a tensorizar con la inclusión  $\iota_+ : \ell \rightarrow M_\pm$  en la esquina superior izquierda.

El sistema dirigido de  $*$ -álgebras

$$M_\pm \xrightarrow{\iota_+ \otimes 1} M_\pm^2 \xrightarrow{\iota_+ \otimes 1} M_\pm^3 \xrightarrow{\iota_+ \otimes 1} \dots$$

da lugar a una ind- $*$ -álgebra

$$\mathcal{M}_{\pm X} := M_\pm \bullet M_X$$

para cada conjunto infinito  $X$ . La misma cumple el papel análogo a  $\mathcal{M}$  en  $\text{Alg}_\ell$  para cada categoría  $\mathfrak{A}$ . Como en [CV21, Section 5], para cada conjunto infinito  $X$  tenemos biyecciones  $X \sqcup X \rightarrow X$  y  $X \times X \rightarrow X$  que inducen operaciones

$$\mathcal{M}_{\pm X} \oplus \mathcal{M}_{\pm X} \rightarrow \mathcal{M}_\pm, \quad \mathcal{M}_{\pm X} \otimes \mathcal{M}_{\pm X} \rightarrow \mathcal{M}_{\pm X}$$

independientes de las biyecciones elegidas a menos de homotopía. Notando  $\boxplus$  y  $\mu$  a las clases de homotopía de estas operaciones y  $\iota_+ : \ell \rightarrow \mathcal{M}_{\pm X}$  a la inclusión, tenemos una estructura de semianillo  $(\mathcal{M}_\pm, \boxplus, \mu, 0, [\iota_+])$  en  $[\mathfrak{A}]$  y si  $A, B \in \mathfrak{A}$ , la operación de monoide  $\boxplus$  induce una en

$$\{A, B\}_X := [A, \mathcal{M}_{\pm X} B].$$

Por otro lado, el producto  $\mu$  induce una operación bilineal y asociativa

$$\star : \{B, C\}_X \times \{A, B\}_X \rightarrow \{A, C\}_X$$

dada por  $[f] \star [g] := [\mu\mathcal{M}_{\pm\chi}(f) \circ g]$ . Tenemos así una categoría  $\{\mathfrak{A}\}_\chi$  cuyos objetos son los de  $\mathfrak{A}$  y tanto los morfismos como la composición están dados por las anteriores observaciones. Una vez más por [CV21, Section 5], esta categoría está enriquecida sobre monoides abelianos y usando [CT07, Theorem 3.3.2] y el argumento de Eckmann-Hilton tenemos que  $\{A, B^{S^n}\}_\chi$  es un grupo abeliano si  $n \geq 1$ . Por último, esta construcción es universal con respecto a la estabilidad matricial, invarianza homotópica y  $\iota_+$ -estabilidad.

**Proposición 1.4.14.** *La composición de funtores  $\text{can}: \mathfrak{A} \rightarrow [\mathfrak{A}] \rightarrow \{\mathfrak{A}\}_\chi$  es homotópicamente invariante,  $M_\chi$ -estable y  $\iota_+$ -estable. Más aún, todo functor  $H: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  con estas propiedades se factoriza de forma única a través de  $\text{can}$ .*

*Demostración.* Ver [CV21, Lemma 5.11]. ◆

La  $\iota_+$ -estabilidad nos permite obtener cierta estabilidad matricial con respecto a involuciones inducidas por elementos hermitianos. Para darle un sentido concreto a esta afirmación, recordamos algunos resultados de [CV21, Section 2]. Si  $\epsilon \in \ell$  es unitario y

$$h_\epsilon := \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

notamos  ${}_\epsilon M_2$  para referirnos a  $M_2^{h_\epsilon} \ell$ . Por [CV21, Lemma 3.9] tenemos un isomorfismo natural

$${}_\epsilon K_0^h(A) \simeq K_0^h({}_\epsilon M_2 A),$$

y en consecuencia estas involuciones sobre  $M_2$  nos permiten entender a  ${}_\epsilon K_0^h$  a partir de  $K_0^h$ . La hipótesis (1.0.1) garantiza la existencia de un elemento  $\lambda \in \ell$  tal que  $\lambda + \lambda^* = 1$ , así que para toda  $*$ -álgebra unital  $R \in \mathfrak{A}$  y elemento  $\epsilon$ -hermitiano  $\phi \in R^\times$  definiendo

$$u_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda\phi^* & -\lambda^*\phi^* \end{pmatrix} \tag{1.4.15}$$

tenemos un isomorfismo  $\text{ad}(u_\lambda): M_\pm R^\phi \xrightarrow{\simeq} {}_\epsilon M_2 R$ . El mismo se restringe a un isomorfismo

$$M_\pm A^\phi \simeq {}_\epsilon M_2 A \tag{1.4.16}$$

para todo  $*$ -ideal  $A \triangleleft R$ . En particular tomando  $A = \ell$  y  $\phi = 1$  vemos que  $M_\pm \simeq {}_1 M_2$ , y ahora aplicando (1.4.16) a  $M_\pm = M_2^{h_\pm}$  es  $M_\pm M_\pm \simeq {}_1 M_2 M_2 \simeq M_\pm M_2$ . Informalmente, el isomorfismo (1.4.16) es el análogo al isomorfismo (1.3.6) cuando consideramos la descripción de  ${}_\epsilon K_0^h$  en términos de idempotentes.

**Definición 1.4.17.** Un functor  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathcal{C}$  se dice *establemente hermitiano* si para cada  $\epsilon \in \ell$  unitario y  $*$ -álgebra unital  $R \in \mathfrak{A}_1$  junto con un  $*$ -ideal  $A$  y elementos  $\epsilon$ -hermitianos  $\phi, \psi \in R$ , el functor  $F$  envía la inclusión

$$\iota^\phi: A^\phi \rightarrow M_2 A^{\phi \oplus \psi}$$

en la esquina superior derecha a un isomorfismo.

Como en la demostración de [CV21, Proposition 2.4.4] el isomorfismo (1.4.16) junto con el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A^\phi & \xrightarrow{\iota^\phi} & M_2 A^{\phi \oplus \psi} \\
 \downarrow \iota_+ & & \downarrow \iota_+ \\
 M_\pm A^\phi & \xrightarrow{M_\pm \iota^\phi} & M_\pm M_2 A^{\phi \oplus \psi} \\
 \downarrow \wr_l & & \downarrow \wr_l \\
 {}_e M_2 A & \xrightarrow{{}_e M_2 \iota} & {}_e M_2 M_2 A \\
 & \searrow \iota & \downarrow \wr_l \\
 & & M_2({}_e M_2 A)
 \end{array}$$

nos dicen que la  $\iota_+$ -estabilidad junto con la  $M_2$ -estabilidad implican la estabilidad hermitiana.

**Proposición 1.4.18** (cf. [CV21, Proposition 2.4.4]). *Si  $F: \mathfrak{A} \rightarrow C$  es un functor matricialmente estable, entonces  $FM_\pm$  es establemente hermitiano.*  $\blacklozenge$

**Corolario 1.4.19.** *Si  $F: \mathfrak{A} \rightarrow C$  es un functor matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable, es establemente hermitiano.*

*Demostración.* La Proposición 1.4.18 nos dice que  $FM_\pm$  es establemente hermitiano, y como  $F$  es  $\iota_+$ -estable, tenemos un isomorfismo natural  $FM_\pm \simeq F$ . Esto muestra que  $F$  también es establemente hermitiano.  $\blacklozenge$

## 1.5. Extensiones

Una *extensión* en  $\mathfrak{A}$  es una sucesión

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

con  $p$  suryectiva e  $i$  un núcleo de  $p$ . Decimos que una tal extensión es *escindida* si  $p$  es una sección. De forma similar, una sucesión  $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$  en  $\mathfrak{A}^{\text{ind}}$  se dice una extensión si  $i$  es un núcleo de  $p$  y  $p$  un conúcleo de  $i$ . En [CT07, Definition 4.2.1] se observa que una extensión en  $\mathfrak{A}^{\text{ind}}$  siempre se puede representar en cada nivel por extensiones en  $\mathfrak{A}$ .

**Ejemplos 1.5.1.** Si  $A \in \mathfrak{A}$ , las siguientes

$$\begin{aligned}
 \Omega A &\rightarrow PA \xrightarrow{ev_1} A, \\
 A^{S^1} &\rightarrow \mathcal{P}A \xrightarrow{ev_1} A, \\
 M_X A &\rightarrow \Gamma_X A \rightarrow \Sigma_X A,
 \end{aligned}$$

son extensiones. La primera de ellas se denomina la *extensión de lazos* de  $A$ . Esta extensión es escindida pues más aún el morfismo  $ev_1: PA \rightarrow A$  admite una sección  $s: a \in A \mapsto ta \in PA$  natural en  $A$ .

### 1.5.1 CATEGORÍAS SUBYACENTES

Sea  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{C}$  un funtor. Una extensión

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

se dice *F-escindida* si  $F(p)$  es una retracción. Una extensión en  $\mathfrak{A}$  es escindida precisamente si es  $1_{\mathfrak{A}}$ -escindida. Por otro lado, toda extensión escindida es  $F$ -escindida, ya que si  $s$  es una sección de  $p$  entonces  $F(s)$  es una sección de  $F(p)$ .

Informalmente, cuando  $F$  es algún tipo de funtor de olvido la noción de extensión  $F$ -escindida es una forma de debilitar la condición de que una extensión sea escindida. A continuación definimos una serie de funtores de olvido asociados a cada categoría  $\mathfrak{A}$ , para lo cual debemos construir primero sus respectivos codominios.

**Definición 1.5.2.** Un  $\ell$ -módulo con involución es un  $\ell$ -módulo  $M$  junto con un morfismo  $\mathbb{Z}$ -lineal  $*$ :  $M \rightarrow M$  tal que  $(m^*)^* = m$  y  $(\lambda \cdot m)^* = \lambda^* \cdot m^*$  para cada  $m \in M, \lambda \in \ell$ . Un morfismo de  $\ell$ -módulos con involución es un morfismo  $\ell$ -lineal  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f(m^*) = f(m)^*$  para cada  $m \in M$ . Notamos  $\ell\text{-mod}^*$  a la categoría de  $\ell$ -módulos con involución.

**Definición 1.5.3.** Un  $\ell[G]$ -módulo con involución es un  $G$ -objeto en  $\ell\text{-mod}^*$  y un morfismo de módulos con involución es un morfismo  $f: M \rightarrow N$  en  $\ell\text{-mod}^*$  tal que  $f(g \cdot m) = g \cdot f(m)$  para cada  $g \in G, m \in M$ . Notamos  $\ell[G]\text{-mod}^*$  a la categoría de  $\ell[G]$ -módulos con involución.

Diremos que las anteriores categorías son las *categorías subyacentes* a  $G\text{-Alg}_{\ell}^*$ . Se tienen funtores de olvido

$$G\text{-Alg}_{\ell}^* \xrightarrow{U} \ell[G]\text{-mod}^* \xrightarrow{U'} \ell\text{-mod}^*.$$

Ambos admiten adjuntos a izquierda; pasamos a describirlos. El adjunto a izquierda  $F'$  de  $U'$  envía un  $\ell$ -módulo con involución  $M$  al  $\ell$ -módulo  $M^{(G)}$  con involución  $(m_g)^*_{g \in G} = (m_g^*)_{g \in G}$  y acción  $s \cdot (m_g)_{g \in G} = (m_{sg})_{g \in G}$ .

Por otro lado, el adjunto a izquierda  $F$  de  $U$  envía un  $\ell[G]$ -módulo con involución  $M$  a la  $\ell$ -álgebra tensorial  $T(M)$  de  $M$ . La involución se define extendiendo la asignación  $(m_1 \otimes \cdots \otimes m_n)^* = m_1^* \otimes \cdots \otimes m_n^*$ . La acción está determinada en tensores elementales por la acción diagonal  $g \cdot (m_1 \otimes \cdots \otimes m_n) := g \cdot m_1 \otimes \cdots \otimes g \cdot m_n$ .

Las composiciones  $U$  y  $U' \circ U$  definen funtores con dominio  $G\text{-Alg}_{\ell}^*$  y codominio cada categoría subyacente, que admiten adjuntos a izquierda  $F$  y  $F' \circ F$  respectivamente. Damos ahora las definiciones análogas en el contexto graduado.

**Definición 1.5.4.** Un  $\ell$ -módulo  $G$ -graduado con involución es un  $\ell$ -módulo con involución  $M$  junto con una descomposición en  $\ell$ -submódulos  $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$  tales que  $M_g^* \subset M_{g^{-1}}$  para cada  $g \in G$ . Un morfismo entre  $\ell$ -módulos  $G$ -graduados con involución es un morfismo de  $\ell$ -módulos con involución  $f: M \rightarrow N$  tal que  $f(M_g) \subset N_g$  para cada  $g \in G$ . Notamos  $G_{\text{gr}}\text{-}\ell\text{-mod}^*$  a la categoría de  $\ell$ -módulos  $G$ -graduados con involución.

Como en el caso equivariante, esta será la *categoría subyacente* a  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ . Tenemos un functor de olvido

$$G_{gr} - \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{U} G_{gr} - \ell - \text{mod}^*.$$

Este functor admite un adjunto a izquierda  $F$  que envía un  $\ell$ -módulo con involución al álgebra tensorial  $T(M)$  de  $M$ , con la misma involución que para el caso equivariante. La graduación está dada por la asignación  $|m_1 \otimes \cdots \otimes m_n| := |m_1| \cdots |m_n|$  en tensores elementales.

*Observación 1.5.5.* Sea  $s: C \rightarrow B$  una sección  $\ell$ -lineal de un morfismo de  $*$ -álgebras  $r: B \rightarrow C$ . Tomando  $\lambda \in \ell$  que satisfaga la hipótesis (1.0.1), el promedio  $\tilde{s}(y) := \lambda s(y)^* + \lambda^* s(y^*)$  define una sección  $\ell$ -lineal de  $r$  que conmuta con la involución y es graduada u homogénea si  $s$  lo es.

**Definición 1.5.6.** Fijada una categoría subyacente  $\mathfrak{A}$  de  $\mathfrak{A}$  con functor de olvido  $\mathcal{F}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ , decimos que una extensión en  $\mathfrak{A}$  es *semi-escindida* si es  $\mathcal{F}$ -escindida.

### 1.5.2 MAPAS CLASIFICANTES

Fijemos una categoría  $\mathfrak{A}$  y una elección de categoría subyacente  $\mathfrak{A}$ . Sean  $\mathcal{F}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  el functor asociado definido en la Sección 1.5.1 y  $\tilde{T}$  su adjunto a izquierda. Notando  $T := \tilde{T}\mathcal{F}$  para cada  $A \in \mathfrak{A}$  tenemos que la counidad

$$\eta_A: T(A) \rightarrow A$$

de la adjunción es sobreyectiva. Más aún, un cálculo directo muestra que la counidad de la adjunción es una sección de  $\mathcal{F}(\eta_A)$  en  $\mathfrak{A}$  que es natural en  $A$ . En particular, la asignación functorial  $J(A) := \ker \eta_A$  da lugar a una extensión semi-escindida

$$J(A) \rightarrow T(A) \rightarrow A$$

que se denomina la *extensión universal* de  $A$ . El nombre proviene del siguiente resultado.

**Proposición 1.5.7.** *Sea*

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \tag{\mathcal{E}}$$

una extensión semi-escindida en  $\mathfrak{A}$ . Si  $s \in \mathfrak{A}$  es una sección de  $\mathcal{F}(p)$ , entonces se tiene un morfismo de extensiones

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{i} & C \\ c_\mathcal{E} \uparrow & & \tilde{s} \uparrow & & \parallel \\ J(C) & \longrightarrow & T(C) & \xrightarrow{\eta_C} & C \end{array}$$

y la clase de homotopía de  $c_\mathcal{E}$  no depende de la sección elegida.

*Demostración.* Como  $s$  es una sección de  $i$ , en los elementos de  $C \subseteq T(C)$  los morfismos  $i\tilde{s}$  y  $\eta_C$  coinciden. Por la propiedad universal de  $T(C)$ , deben ser iguales. Restringiendo  $\tilde{s}$  se tiene inducido un morfismo  $c_{\mathcal{E}}: J(C) \rightarrow A$  entre los núcleos de  $i$  y  $\eta_C$  que da lugar a un diagrama conmutativo como el del enunciado.

Para terminar, veamos que dos secciones  $s$  y  $s'$  de  $\mathcal{F}(p)$  definen morfismos  $c_{\mathcal{E}}$  y  $c'_{\mathcal{E}}$  que resultan homotópicos. La función

$$\begin{aligned} H: C &\longrightarrow A[t] \\ c &\mapsto (1-t)s(c) + ts'(c) \end{aligned}$$

define un morfismo en cada una de las categorías  $\mathfrak{A}$  que consideramos, y se extiende a un morfismo

$$\tilde{H}: TC \rightarrow A[t].$$

Restringiendo este último a  $J(C)$  conseguimos una homotopía entre  $c_{\mathcal{E}}$  y  $c'_{\mathcal{E}}$ .  $\blacklozenge$

**Definición 1.5.8.** Diremos que  $c_{\mathcal{E}}$  es un *mapa clasificante* de la extensión  $\mathcal{E}$ . La proposición anterior muestra que el mapa clasificante de una extensión es único salvo homotopía.

Los mapas clasificantes cumplen una condición de compatibilidad con respecto a los morfismos de extensiones, como veremos en la siguiente proposición.

**Proposición 1.5.9.** *Dado un morfismo*

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\alpha} & C \\ f \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow g \\ A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha'} & C' \end{array}$$

entre extensiones  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$ , el siguiente cuadrado conmuta a menos de homotopía

$$\begin{array}{ccc} J(C) & \xrightarrow{c_{\mathcal{E}}} & A \\ Jg \downarrow & & \downarrow f \\ J(C') & \xrightarrow{c_{\mathcal{E}'}} & A' \end{array}$$

*Demostración.* Verificaremos que la homotopía construida en [Gar14, Section 3] está bien definida en este contexto. Consideramos  $\beta$  y  $\beta'$  secciones en  $\mathfrak{A}$  de  $\alpha$  y  $\alpha'$  respectivamente, y  $c_{\mathcal{E}}, c_{\mathcal{E}'}$  los mapas clasificantes asociados. La función

$$\nu: c \in C \mapsto h\beta(c)(1-t) + \beta'g(c)t \in B'[t]$$

es un morfismo en  $\mathfrak{A}$ , así que se extiende a un morfismo

$$\tilde{\nu}: T(C) \rightarrow B'[t]$$

en  $\mathfrak{A}$ . Notando  $\tilde{\alpha}' = \alpha' \otimes 1_{\mathbb{Z}[t]}: B'[t] \rightarrow C'[t]$  tenemos que

$$\tilde{\alpha}'\tilde{\nu} = \iota_C g \eta_C,$$

verificando la igualdad en elementos de  $C \subset T(C)$ . Por lo tanto existe una flecha  $H: J(C) \rightarrow A'[t]$  que hace de

$$\begin{array}{ccccc} J(C) & \longrightarrow & T(C) & \xrightarrow{\eta_C} & C \\ \exists H \downarrow & & \downarrow \tilde{\nu} & & \downarrow \iota_C g \\ A'[t] & \longrightarrow & B'[t] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} & C'[t] \end{array}$$

un diagrama conmutativo. Persiguiendo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} J(C) & \longrightarrow & T(C) & \xrightarrow{\eta_C} & C \\ H \downarrow & & \downarrow \tilde{\nu} & & \downarrow \iota_C g \\ A'[t] & \longrightarrow & B'[t] & \xrightarrow{\tilde{\alpha}'} & C'[t] \\ \downarrow \text{ev}_i & & \downarrow \text{ev}_i & & \downarrow \text{ev}_i \\ A' & \longrightarrow & B' & \xrightarrow{\alpha'} & C' \end{array}$$

para ambas evaluaciones vemos que  $H$  es una homotopía entre  $fc_{\mathcal{E}}$  y  $c_{\mathcal{E}'}Jg$ . ◆

*Observación 1.5.10.* Dada una extensión semi-escindida

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$$

en  $\mathfrak{A}$  y  $L$  un  $*$ -anillo con acción o graduación trivial, la extensión

$$LA \xrightarrow{1_L \otimes i} LB \xrightarrow{1_L \otimes p} LC$$

es semi-escindida. En efecto, considerando una sección  $s \in \mathfrak{U}$  de  $\mathcal{F}(p)$ , el morfismo  $1_L \otimes s$  es una sección de  $\mathcal{F}(1_L \otimes p)$  para cada elección de  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{U}$ .

*Observación 1.5.11.* Sea  $A \in \mathfrak{A}$  y  $L$  un  $*$ -anillo. Aplicando la Observación 1.5.10 a la extensión universal

$$J(A) \rightarrow T(A) \rightarrow A,$$

y usando que esta admite una sección natural en  $A$ , obtenemos un mapa clasificante  $\phi_{A,L}: J(LA) \rightarrow LJ(A)$  natural en ambas variables. Notamos  $\gamma_A: J(A^{s^1}) \rightarrow (JA)^{s^1}$  al mapa clasificante de la extensión

$$J(A)^{s^1} \rightarrow T(A)^{s^1} \rightarrow A^{s^1},$$

que por lo observado se puede elegir de forma natural en  $A$ .

Similarmente, la sección  $s$  del Ejemplo 1.5.1 induce una sección natural  $A \xrightarrow{s} PA \hookrightarrow \mathcal{P}A$  de  $A^{s^1} \rightarrow \mathcal{P}A \xrightarrow{\text{ev}_1} A$  y en consecuencia podemos elegir un mapa clasificante para esta extensión de forma natural en  $A$ . Lo notamos  $\rho_A: JA \rightarrow A^{s^1}$ .

**Definición 1.5.12.** Si  $f: A \rightarrow B$  es un morfismo en  $\mathfrak{A}$ , su *fibra homotópica* es el pullback de  $f$  a lo largo de  $\text{ev}_1: \text{PB} \rightarrow B$ , que es un objeto en  $\mathfrak{A}$  por la Observación 1.1.13. Este pullback induce una extensión, la *extensión de caminos* de  $f$ , que corresponde a la fila superior del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \Omega B & \longrightarrow & P_f & \longrightarrow & A \\ \parallel & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ \Omega B & \longrightarrow & \text{PB} & \xrightarrow{\text{ev}_1} & B \end{array}$$

## 1.6. Unitalización

Dada una  $\ell$ -álgebra  $A$ , su *unitalización* es la  $\ell$ -álgebra dada por el  $\ell$ -módulo

$$\tilde{A} := A \oplus \ell$$

con la multiplicación  $(x, \lambda) \cdot (y, \mu) = (xy + \mu \cdot x + \lambda \cdot y, \lambda\mu)$ . Como el nombre lo indica, la unitalización de un álgebra es siempre unital con unidad  $\mathbf{1} := (0, 1)$  y escribimos  $a + \lambda \cdot \mathbf{1} := (a, \lambda) \in \tilde{A}$ . Cuando  $A$  tiene unidad, el morfismo

$$a + \lambda \cdot \mathbf{1} \in \tilde{A} \mapsto (a + \lambda \cdot 1_A, \lambda) \in A \times \ell \quad (1.6.1)$$

es un isomorfismo unital.

*Observación 1.6.2.* Si  $A$  viene equipada con una involución, esta induce una en  $\tilde{A}$  vía  $(a, \lambda)^* := (a^*, \lambda^*)$ . Similarmente, si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra entonces  $\tilde{A}$  es una  $G$ -\* álgebra vía  $g \cdot (a + \lambda \cdot \mathbf{1}) := g \cdot a + \lambda \cdot \mathbf{1}$ . Si  $A$  es una \*-álgebra  $G$ -graduada, se tiene una  $G$ -graduación en  $\tilde{A}$  definiendo  $\tilde{A}_g = A_g \oplus \delta_{g,1}\ell$ . El isomorfismo (1.6.1) es equivariante y homogéneo respectivamente.

Para cada morfismo  $f: A \rightarrow B$  la asignación

$$\tilde{f}(a + \lambda \cdot \mathbf{1}) = f(a) + \lambda \cdot \mathbf{1}$$

define un functor  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_1$ , y tenemos siempre una extensión

$$A \rightarrow \tilde{A} \xrightarrow{\pi} \ell$$

en  $\mathfrak{A}$  con  $\pi_A(a + \mu \cdot \mathbf{1}) = \mu$ . Esta extensión se parte en  $\mathfrak{A}$ , por ejemplo tomando la sección definida por  $s(\lambda) := \lambda \cdot \mathbf{1}$ .

**Definición 1.6.3.** Si  $\mathfrak{A}$  es una categoría aditiva, un functor  $F: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  se dice *aditivo* si para cada  $A, B \in \mathfrak{A}$  el morfismo inducido por las proyecciones

$$F(A \times B) \xrightarrow{F(\pi_1) \oplus F(\pi_2)} FA \oplus FB$$

es un isomorfismo.

**Proposición 1.6.4.** Sean  $A$  una categoría abeliana y  $F: \mathfrak{A}_1 \rightarrow A$  un funtor aditivo definido en la subcategoría plena  $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$  generada por los objetos de  $\mathfrak{A}$  que son álgebras unitales. La asignación

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{F}(A) := \ker F(\pi_A) & \longrightarrow & F(\tilde{A}) & \xrightarrow{F(\pi_A)} & F(\ell) \\ \exists! \tilde{F}(f) \downarrow & & \downarrow F(\tilde{f}) & & \parallel \\ \tilde{F}(B) := \ker F(\pi_B) & \longrightarrow & F(\tilde{B}) & \xrightarrow{F(\pi_B)} & F(\ell) \end{array}$$

para cada flecha  $f: A \rightarrow B$  define un funtor  $\tilde{F}: \mathfrak{A} \rightarrow A$  que restringido a  $\mathfrak{A}_1$  es naturalmente isomorfo a  $F$ .

*Demostración.* La asignación es funtorial pues así lo son la unitalización y tomar núcleo. Si  $A \in \mathfrak{A}_1$ , a través del isomorfismo natural (1.6.1) el morfismo  $\pi_A: \tilde{A} \rightarrow \ell$  se identifica con la proyección  $p_A: A \times \ell \rightarrow \ell$  en la segunda coordenada. Aplicando  $F$ , es

$$\begin{array}{ccc} F(\tilde{A}) & \xrightarrow{F(\pi_A)} & F(\ell) \\ \downarrow \simeq & & \parallel \\ F(A \times \ell) & \xrightarrow{F(p_A)} & F(\ell) \end{array}$$

y por lo tanto hay un isomorfismo natural entre  $\tilde{F}(A) = \ker F(\pi_A)$  y  $\ker F(p_A)$ . Resta notar que, como  $F$  es aditivo, tenemos un isomorfismo natural entre  $\ker F(p_A)$  y  $F(A)$ .  $\blacklozenge$

## 1.7. Teorías de homología escisivas

Una *categoría triangulada*  $(T, \Omega, S)$  es una categoría aditiva  $T$  junto con una equivalencia de categorías  $\Omega: T \rightarrow T$  y una clase  $S$  de tuplas de morfismos de la forma

$$\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$$

llamados *triángulos distinguidos* que satisfacen una serie de condiciones de compatibilidad. Referimos a [Kel96, Secciones 7 y 8] para un tratamiento detallado de la definición de categoría triangulada que adoptamos. Los axiomas allí descritos están dados en términos de una inversa de  $\Omega$ ; su equivalencia con la presentación que damos se describe en [CT07, Section 6.5]. Abusando notación, escribiremos  $\Omega^{-1}$  para una inversa de  $\Omega$  a pesar de que esta no es necesariamente única.

Un *functor triangulado*  $(F, \xi): (T, \Omega, S) \rightarrow (T', \Omega', S')$  entre categorías trianguladas es un funtor aditivo  $F: T \rightarrow T'$  junto con un isomorfismo natural  $\xi: \Omega'F \Rightarrow F\Omega$  de forma que

$$\Omega'FC \xrightarrow{F(f)\xi_C} FA \xrightarrow{Fg} FB \xrightarrow{Fh} FC$$

sea un triángulo distinguido en  $T'$  para cada triángulo distinguido  $\Omega C \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C$  en  $T$ .

Como en [CT07, Section 6.6] una *teoría de homología escisiva* en  $\mathfrak{A}$  consiste de una categoría triangulada  $(\mathbb{T}, \Omega, S)$  junto con un functor  $X : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{T}$  y una familia de morfismos

$$\partial_{\mathcal{E}} = \partial_{\mathcal{E}}^X : \Omega X(C) \rightarrow X(A)$$

para cada extensión semi-escindida

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (\mathcal{E})$$

en  $\mathfrak{A}$  de forma que:

i) Para cada extensión  $\mathcal{E}$  en  $\mathfrak{A}$  el triángulo

$$\Omega X(C) \xrightarrow{\partial_{\mathcal{E}}} X(A) \xrightarrow{X(f)} X(B) \xrightarrow{X(g)} X(C)$$

en  $\mathbb{T}$  es distinguido.

ii) Si tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

entre extensiones  $\mathcal{E}$  y  $\mathcal{E}'$  el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega X(C) & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{E}}} & X(A) \\ \Omega X(\gamma) \downarrow & & \downarrow X(\alpha) \\ \Omega X(C') & \xrightarrow{\partial_{\mathcal{E}'}} & X(A') \end{array}$$

conmuta.

Un morfismo entre teorías de homología escisivas  $X : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{T}$  y  $Y : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{T}'$  es un functor triangulado  $G : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}'$  que hace conmutar a los diagramas

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_{\ell} & \xrightarrow{X} & \mathbb{T} \\ & \searrow Y & \downarrow G \\ & & \mathbb{T}' \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccc} G(\Omega X(C)) & \xrightarrow{G(\partial_{\mathcal{E}}^X)} & Y(A) \\ \downarrow \cong & \nearrow \partial_{\mathcal{E}}^Y & \\ \Omega' Y(C) & & \end{array}$$

para toda extensión

$$A \rightarrow B \rightarrow C. \quad (\mathcal{E})$$

*Observación 1.7.1.* Un ejemplo de teoría de homología escisiva es la K-teoría homotópica de Weibel. Otro ejemplo es el functor  $X^\infty: \text{Alg}_\mathbb{Q} \rightarrow \text{Ho}(\text{pro} - \text{Sup}(\text{Alg}_\mathbb{Q}))$  que envía una  $\mathbb{Q}$ -álgebra  $A$  al pro-supercomplejo de Cuntz-Quillen  $X^\infty(A)$  como objeto de la categoría de homotopía de pro-supercomplejos. En [CT07, Example 6.6.3, Example 6.6.4] y las referencias allí presentes se describe precisamente el codominio de estos funtores y su estructura de categoría triangulada.

**Definición 1.7.2.** Si  $(\mathcal{T}, \Omega)$  es una categoría triangulada y  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana, un functor  $F: \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$  se dice *homológico* si envía cada triángulo distinguido  $\Omega C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  a una sucesión exacta  $FA \rightarrow FB \rightarrow FC$ .

Trasladando un tal triángulo y notando  $\Sigma = \Omega^{-1}$ , se tiene más aún una sucesión exacta larga

$$\cdots \rightarrow F\Omega A \rightarrow F\Omega B \rightarrow F\Omega C \rightarrow FA \rightarrow FB \rightarrow FC \rightarrow F\Sigma A \rightarrow F\Sigma B \rightarrow F\Sigma C \rightarrow \cdots$$

Enunciamos a continuación dos lemas técnicos que precisaremos más adelante. Las demostraciones son una consecuencia formal de los axiomas de categoría triangulada junto con el lema de Yoneda y el lema de los cinco. Se pueden consultar por ejemplo en [Wei94, Section 10.2].

**Lema 1.7.3.** Si  $\mathcal{T}$  es una categoría triangulada, entonces para cada  $D \in \mathcal{T}$  los funtores  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(D, -)$  y  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(-, D)$  son homológicos.  $\blacklozenge$

**Lema 1.7.4.** Sea  $(\mathcal{T}, \Omega)$  una categoría triangulada y

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega C & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \Omega \gamma \downarrow & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ \Omega C' & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' \end{array}$$

un morfismo de triángulos distinguidos. Si dos de los morfismos  $\alpha, \beta$ , y  $\gamma$  son isomorfismos, el tercero también lo es.  $\blacklozenge$

Nuestro interés por los funtores homológicos está justificado por la siguiente observación.

*Observación 1.7.5.* Si  $(X, \Omega, S)$  es una teoría de homología escisiva, se tiene una sucesión de grupos abelianos

$$X_n(A, B) := \text{hom}_{\mathcal{T}}(X(A), \Omega^n X(B))$$

para cada  $n \in \mathbb{Z}$  y  $A, B \in \mathfrak{A}$ . Como los funtores  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(D, -)$  y  $\text{hom}_{\mathcal{T}}(-, D)$  son homológicos y  $X$  envía extensiones semi-escindidas a triángulos distinguidos, para cada extensión semi-escindida

$$A \rightarrow B \rightarrow C \quad (\mathcal{E})$$

se tienen sucesiones exactas largas

$$\cdots X_{n+1}(D, C) \xrightarrow{(\partial_\varepsilon)^*} X_n(D, A) \rightarrow X_n(D, B) \rightarrow X_n(D, C) \rightarrow \cdots$$

y

$$\cdots X_{n+1}(A, D) \xrightarrow{(\partial_\varepsilon)^*} X_n(C, D) \rightarrow X_n(B, D) \rightarrow X_n(A, D) \rightarrow \cdots$$

para todo  $D \in \mathfrak{A}$ .

En [CT07] se construye una teoría de homología escisiva  $j : \text{Alg}_\ell \rightarrow \text{kk}$  para la categoría de  $\ell$ -álgebras que es universal con respecto a las propiedades de invarianza homotópica y  $M_\infty$ -estabilidad. Esta se conoce como *K-teoría algebraica bivariante*. Describimos a continuación sus principales propiedades.

**Teorema 1.7.6** ([CT07, Theorem 6.6.2]). *Existe un funtor  $j : \text{Alg}_\ell \rightarrow \text{kk}$  que es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas, homotópicamente invariantes y  $M_\infty$ -estables.* ♦

**Teorema 1.7.7.** *Sea  $\mathfrak{A}$  una categoría abeliana. Un funtor  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  se dice *semi-exacto* si para cada extensión semi-escindida  $A \rightarrow B \rightarrow C$  la sucesión  $F(A) \rightarrow F(B) \rightarrow F(C)$  es exacta.*

**Teorema 1.7.8** ([CT07, Theorem 6.6.6]). *Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría abeliana y  $G : \text{Alg}_\ell \rightarrow \mathfrak{C}$  un funtor aditivo, semi-exacto, homotópicamente invariante y  $M_\infty$ -estable. Existe entonces un único funtor homológico  $\bar{G} : \text{kk} \rightarrow \mathfrak{C}$  que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_\ell & \xrightarrow{j} & \text{kk} \\ & \searrow G & \downarrow \exists! \bar{G} \\ & & \mathfrak{C} \end{array}$$

♦

Aplicando el teorema anterior a  $\text{KH} : \text{Alg}_\ell \rightarrow \text{KH}_0(\ell) - \text{mod}$ , la K-teoría algebraica bivariante recupera como caso particular la K-teoría homotópica de Weibel.

**Teorema 1.7.9** ([CT07, Theorem 8.2.1]). *Si  $\ell$  es un anillo conmutativo unital, el morfismo*

$$\text{kk}(\ell, A) \rightarrow \text{hom}_{\text{KH}_0(\ell) - \text{mod}}(\text{KH}_0(\ell), \text{KH}_0(A)) \rightarrow \text{KH}_0(A)$$

*es un isomorfismo.*

♦

En [RC17, Section 5.2] se generaliza esta construcción, definiendo para cada conjunto  $X$  una teoría de homología escisiva  $j_X : \text{Alg}_\ell \rightarrow \mathfrak{K}_X$  universal con respecto a la invarianza homotópica y la  $M_X$ -estabilidad.

**Teorema 1.7.10** ([RC17, Theorem 5.2.16]). *Existe un funtor  $j_X : \text{Alg}_\ell \rightarrow \mathfrak{K}_X$  que es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas, homotópicamente invariantes y  $M_X$ -estables.* ♦

Por [RC17, Theorem 5.2.20], para cada conjunto infinito  $X$  hay un isomorfismo natural

$$\mathfrak{K}_X(\ell, A) \simeq \mathrm{KH}_0(A). \quad (1.7.11)$$

y el isomorfismo del Teorema 1.7.9 se factoriza a través de este. Fijado un tal conjunto  $X$ , notamos  $\mathrm{kk} = \mathfrak{K}_X$  y  $j = j_X$ . Dado  $n \geq 0$ , escribimos

$$\mathrm{kk}_n(A, B) := \mathrm{kk}(A, \Omega^n B), \quad \mathrm{kk}_{-n}(A, B) := \mathrm{kk}(A, \Sigma^n B)$$

para cada par de  $\ell$ -álgebras  $A$  y  $B$ . Aplicando el isomorfismo (1.7.11) a  $\Sigma^n A$  y  $\Omega^n A$  para cada  $n \geq 0$  obtenemos isomorfismos

$$\mathrm{kk}_\bullet(\ell, A) \simeq \mathrm{KH}_\bullet(A).$$

En el caso de  $*$ -álgebras, se define en [CV21] la *K-teoría algebraica bivariante hermitiana*, una teoría de homología escisiva  $j^h: \mathrm{Alg}_\ell^* \rightarrow \mathrm{kk}^h$  que es universal con respecto a las propiedades de invarianza homotópica,  $M_X$ -estabilidad y  $\iota_+$ -estabilidad.

**Teorema 1.7.12** ([CV21, Proposition 6.2.8]). *El functor  $j^h: \mathrm{Alg}_\ell^* \rightarrow \mathrm{kk}^h$  es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas, homotópicamente invariantes,  $M_X$ -estables y  $\iota_+$ -estables.*  $\blacklozenge$

**Teorema 1.7.13** ([CV21, Proposition 6.2.14]). *Sea  $\mathfrak{C}$  una categoría abeliana y  $G: \mathrm{Alg}_\ell^* \rightarrow \mathfrak{C}$  un functor aditivo, semi-exacto, homotópicamente invariante,  $M_X$ -estable y  $\iota_+$ -estable. Existe entonces un único functor homológico  $\overline{G}: \mathrm{kk}^h \rightarrow \mathfrak{C}$  que hace conmutar al siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{j^h} & \mathrm{kk}^h \\ & \searrow G & \downarrow \exists \overline{G} \\ & & \mathfrak{C} \end{array}$$

La K-teoría algebraica bivariante hermitiana recupera la homotopización de la K-teoría hermitiana.

**Teorema 1.7.14** ([CV21, Proposition 8.1]). *El morfismo*

$$\mathrm{kk}^h(\ell, A) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathrm{K}^h\mathrm{H}_0(\ell)\text{-mod}}(\mathrm{K}^h\mathrm{H}_0(\ell), \mathrm{K}^h\mathrm{H}_0(A)) \rightarrow \mathrm{K}^h\mathrm{H}_0(A)$$

*es un isomorfismo.*  $\blacklozenge$

Describimos ahora brevemente la construcción de  $\mathrm{kk}^h$  observando que el mismo procedimiento - con las definiciones análogas dadas en las secciones anteriores - produce una teoría de homología escisiva

$$j_{\mathfrak{A}}^h: \mathfrak{A} \rightarrow \mathrm{kk}_{|\mathfrak{A}|}^h$$

para cada categoría  $\mathfrak{A}$ , universal con respecto a la invarianza homotópica, la  $M_X$ -estabilidad y la  $\iota_+$ -estabilidad. Los detalles se pueden consultar en [CT07, Section 6] y [CV21, Section 6]. En ambos casos la buena definición se sigue adaptando [CMR07, Section 6.3].

Los objetos de  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  son los mismos que los de la categoría  $\mathfrak{A}$ . Para definir las flechas notamos que un morfismo  $f : J^n(A) \rightarrow \mathcal{M}_{\pm X} B^{S^n}$  induce otro

$$J^{n+1}(A) \xrightarrow{J(f)} J(\mathcal{M}_{\pm X} B^{S^n}) \xrightarrow{\Phi_{\mathcal{M}_{\pm X} B^{S^n}}} \mathcal{M}_{\pm X} J(B^{S^n}) \xrightarrow{\mathcal{M}_{\pm \rho_B^{S^n}}} \mathcal{M}_{\pm X} B^{S^{n+1}},$$

con  $\Phi_{\mathcal{M}_{\pm X} B^{S^n}}$  y  $\rho_B^{S^n}$  como en la Observación 1.5.11. Esta asignación está bien definida a menos de homotopía. Se definen los morfismos en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  como

$$kk_{|\mathfrak{A}|}^h(A, B) = \operatorname{colim}_{n \geq 0} \{J^n A, B^{S^n}\}_X \quad (1.7.15)$$

donde los mapas del sistema dirigido son los inducidos por la anterior asignación. Como observamos en la Sección 1.4.2, en  $\{\mathfrak{A}\}$  los conjuntos  $\{J^n A, B^{S^n}\}_X$  forman grupos abelianos y se puede verificar que las flechas que definen el colímite (1.7.15) son morfismos de grupos.

Sea  $\gamma_B^{1,1} = \gamma_B$  el mapa clasificante descrito en la Observación 1.5.11 y

$$\gamma_B^{m,n} := \circ_{i=0}^m J^i \gamma_{J^{m-i} B} : J^m(B^{S^n}) \rightarrow (J^m(B))^{S^n}.$$

Dados morfismos en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h(A, B)$  y  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h(B, C)$  representados por  $\beta : J^m(A) \rightarrow B^{S^m}$  y  $\alpha : J^n(B) \rightarrow C^{S^n}$  en  $\{\mathfrak{A}\}$ , la asignación

$$[\beta] \circ [\alpha] := [\alpha^{S^n} \circ (-1)^{nm} \cdot \gamma_B^{m,n}] \star [J^m(f)]$$

está bien definida y es asociativa.

Tenemos de esta forma una categoría aditiva  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$ , y un funtor  $j_{|\mathfrak{A}|}^h : \mathfrak{A} \rightarrow kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  que es constante en objetos y envía cada morfismo de álgebras a su clase de homotopía. Por construcción de los *hom-sets*, el funtor  $j_{|\mathfrak{A}|}^h$  es matricialmente estable, homotópicamente invariante y  $\iota_+$ -estable.

Pasamos ahora a describir la estructura triangulada de  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$ . La suspensión está dada por la suspensión de Karoubi  $\Sigma_X = \Sigma_X \otimes -$ , y su inversa es la inducida por el funtor de lazos  $\Omega = \Omega \otimes -$ . Esta definición es esperable si pretendemos obtener una teoría de homología escisiva homotópicamente invariante y matricialmente estable, ya que para toda  $A \in \mathfrak{A}$  tenemos extensiones semi-escindidas

$$\Omega A \rightarrow PA \rightarrow A, \quad M_X A \rightarrow \Gamma_X A \rightarrow \Sigma_X A$$

y por las Observaciones 1.2.10 y 1.4.12 tanto  $PA$  como  $\Gamma_X A$  son isomorfos a 0 en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$ . Un triángulo en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  es distinguido si es isomorfo a uno dado por una sucesión de fibra homotópica

$$\Omega B \rightarrow P_f \rightarrow A \xrightarrow{f} B,$$

como en la Definición 1.5.12.

Finalmente, por el mismo argumento que en [CT07, Lemma 6.3.10] la transformación natural  $\rho_\lambda: JA \rightarrow \Omega A$  induce un isomorfismo natural en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$ . Considerando para cada extensión semi-escindida

$$A \rightarrow B \rightarrow C \quad (\mathcal{E})$$

con mapa clasificante  $c_{\mathcal{E}}$  el morfismo

$$\Omega C \xrightarrow{\rho_C^{-1}} JC \xrightarrow{c_{\mathcal{E}}} A,$$

tenemos en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  una estructura de teoría de homología escisiva. Al igual que para  $kk^h$ , se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 1.7.16.** *El functor  $j_{\mathfrak{A}}^h: \mathfrak{A} \rightarrow kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas, homotópicamente invariantes,  $M_X$ -estables y  $\iota_+$ -estables.* ♦

Concluimos esta sección con una observación sobre transformaciones naturales inducidas en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  por transformaciones naturales a nivel de álgebras.

*Observación 1.7.17.* Si  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}'$  son alguna de las categorías de álgebras consideradas y  $F, G: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}'$  funtores que preservan extensiones semi-escindidas y tales que  $j^h F$  y  $j^h G$  son  $\iota_+$ -estables, matricialmente estables y homotópicamente invariantes, entonces estas composiciones definen teorías de homología escisivas. El Teorema 1.7.16 nos asegura entonces la existencia de únicos funtores triangulados tales que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{A} & \xrightarrow{F} & \mathfrak{A}' & & \mathfrak{A} & \xrightarrow{G} & \mathfrak{A}' \\ j_{|\mathfrak{A}|}^h \downarrow & & \downarrow j_{|\mathfrak{A}'|}^h & & j_{|\mathfrak{A}|}^h \downarrow & & \downarrow j_{|\mathfrak{A}'|}^h \\ kk_{|\mathfrak{A}|}^h & \dashrightarrow^F & kk_{|\mathfrak{A}'|}^h & & kk_{|\mathfrak{A}|}^h & \dashrightarrow^G & kk_{|\mathfrak{A}'|}^h \end{array}$$

conmutan. Si  $\eta_A: F \Rightarrow G$  es una transformación natural, la familia de flechas  $j_{|\mathfrak{A}'|}^h(\eta_A)$  para cada  $A \in \mathfrak{A}$  define una transformación natural entre los funtores definidos a nivel de las  $K$ -teorías bivariantes. Para verlo, debemos probar que si  $\alpha: A \rightarrow B$  es una flecha en  $kk_{|\mathfrak{A}|}^h$  entonces

$$j_{|\mathfrak{A}'|}^h(\eta_B)F\alpha = G\alpha j_{|\mathfrak{A}'|}^h(\eta_A). \quad (1.7.18)$$

Supongamos que  $\alpha$  se representa por un morfismo de ind-álgebras  $f: J^n A \rightarrow B^{S^n}$ . Como el functor de lazos  $\Omega: kk_{|\mathfrak{A}'|}^h \rightarrow kk_{|\mathfrak{A}'|}^h$  es una equivalencia de categorías, es plenamente fiel y podemos ver equivalentemente que

$$j_{|\mathfrak{A}'|}^h(\Omega^n \eta_B) \Omega^n F \alpha = \Omega^n G \alpha j_{|\mathfrak{A}'|}^h(\Omega^n \eta_A).$$

Esto es conveniente porque por [CT07, Lemma 6.3.11] y [CT07, Theorem 6.6.2], si un morfismo  $\beta$  en  $kk_{|\mathfrak{A}'|}^h$  es representado por  $g: J^m A \rightarrow B^{S^m}$ , entonces  $\Omega^m F \beta$  es representado por la composición

$$\Omega^m F \alpha \xrightarrow{\partial_\ell^n} F \Omega^m A \xrightarrow{j_{|\mathfrak{A}'|}^h(F\rho_A^m)^{-1}} J^m A \xrightarrow{Fg} B^{S^m} \xrightarrow{j_{|\mathfrak{A}'|}^h(F\iota)^{-1}} F \Omega^m B \xrightarrow{\partial_\ell^{-n}} \Omega^m F \beta$$

donde  $\partial_\ell^n$  es la aplicación iterada del mapa asociado a la extensión de lazos. Utilizando esto, probar (1.7.18) se reduce a ver que el siguiente diagrama conmuta en  $kk_{|\mathfrak{A}'|}^h$ , donde omitimos en la notación la composición con  $j_{|\mathfrak{A}'|}^h$  para los morfismos inducidos por morfismos en  $\mathfrak{A}'$ .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Omega^n FA & \xrightarrow{\partial_\ell^n} & F\Omega^n A & \xleftarrow{F\rho^n} & FJ^n A & \xrightarrow{Ff} & FB^{\mathcal{S}^n} & \xleftarrow{F\iota} & F\Omega^n B & \xleftarrow{\partial_\ell^n} & \Omega^n FB \\
 \Omega^n \eta_A \downarrow & & \downarrow \eta_{\Omega^n A} & & \downarrow \eta_{J^n A} & & \downarrow \eta_{B^{\mathcal{S}^n}} & & \downarrow \eta_{\Omega^n B} & & \downarrow \Omega^n \eta_B \\
 \Omega^n GA & \xrightarrow{\partial_\ell^n} & G\Omega^n A & \xleftarrow{G\rho^n} & GJ^n A & \xrightarrow{Gf} & GB^{\mathcal{S}^n} & \xleftarrow{G\iota} & G\Omega^n B & \xleftarrow{\partial_\ell^n} & \Omega^n GB
 \end{array}$$

Aplicando inductivamente los axiomas de la definición de teoría de homología escisiva para el morfismo de extensiones

$$\begin{array}{ccccc}
 F\Omega C & \longrightarrow & FPC & \xrightarrow{Fev_1} & FC \\
 \downarrow \eta_{\Omega C} & & \downarrow \eta_{PC} & & \downarrow \eta_C \\
 G\Omega C & \longrightarrow & GPC & \xrightarrow{Gev_1} & GC
 \end{array}$$

vemos que los cuadrados exteriores conmutan. La conmutatividad de los demás es una consecuencia de la naturalidad de  $\eta$  en  $\mathfrak{A}'$ .

## Capítulo 2

# $K^h$ -teoría bivariante equivariante y graduada

En [Ell14] Ellis define teorías de homología escisivas para  $G$ -álgebras y álgebras  $G$ -graduadas universales con respecto a la invarianza homotópica, la estabilidad matricial y ciertas condiciones adicionales de estabilidad. Se describe también en [Ell14] la relación entre estas teorías y la  $K$ -teoría algebraica bivariante. Siguiendo de cerca esta construcción, definimos un análogo a las anteriores teorías de homología en el caso hermitiano y establecemos su relación con la  $K$ -teoría algebraica bivariante hermitiana.

### 2.1. Estabilidad

La estabilidad  $G$ -equivariante en el caso no hermitiano busca identificar a cada  $G$ -álgebra  $A$  con el álgebra  $M_G A$ , cuya acción de  $G$  es  $g \cdot \varepsilon_{s,t} \otimes a := \varepsilon_{gs,gt} \otimes a$  para cada  $g, s, t \in G$  y  $a \in A$ . En general, las inclusiones  $\iota_s: a \in A \mapsto \varepsilon_{s,s} \otimes a \in M_G A$  no son equivariantes, y esto es una obstrucción a la hora de dar una definición similar a la de estabilidad matricial.

Dado  $X$  un  $G$ -conjunto, el álgebra  $M_X$  viene equipada con una acción de  $G$  definida por  $g \cdot \varepsilon_{x,y} := \varepsilon_{gx,gy}$  para cada  $g \in G$  y  $x, y \in X$ . Si  $f: X \rightarrow Y$  es una inyección  $G$ -equivariante, el morfismo  $M_X \rightarrow M_Y$  inducido es de  $G$ -álgebras. A partir de esta observación es que para cada  $G$ -álgebra  $A$  se obtiene un zig-zag

$$A \hookrightarrow M_{G \sqcup * } A \hookrightarrow M_G A \tag{2.1.1}$$

inducido por las inclusiones  $* \hookrightarrow G \sqcup * \hookrightarrow G$ .

En el caso de la estabilidad graduada, buscamos identificar una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada  $A$  con el álgebra  $M_G A$  equipada con la involución usual y la graduación definida por

$$(M_G A)_g = \text{span}_{\ell} \{ \varepsilon_{s,t} \otimes a : s|a|t^{-1} = g \} \tag{2.1.2}$$

para cada  $g \in G$ .

Si  $X$  es un conjunto  $G$ -graduado, es decir, si viene equipado con una función de grado  $|\cdot|: X \rightarrow G$ , entonces

$$(M_X A)_g = \text{span}_\ell\{\varepsilon_{x,y} \otimes a : |x| \cdot |a| \cdot |y|^{-1} = g\} \quad (2.1.3)$$

define una graduación en  $M_X(A)$ .

Si  $X$  es un  $G$ -conjunto o un conjunto  $G$ -graduado, escribiremos  $M_{|X|}$  para enfatizar que nos referimos a  $M_X$  con acción o graduación trivial.

**Definición 2.1.4.** Dado un conjunto  $X$  y una  $*$ -álgebra  $A$ , el *cono de Wagoner* es la  $\ell$ -álgebra

$$C_X A := \{f: X \times X \rightarrow A : |\text{sop } f(x, -)|, |\text{sop } f(-, x)| < \infty \text{ para todo } x \in X\}$$

cuyas operaciones son la suma puntual y el producto de convolución. La asignación que envía  $f \in C_X A$  a  $f^*(x, y) := f(y, x)^*$  hace de  $C_X A$  una  $*$ -álgebra. Si  $A$  es unital, también lo es  $C_X A$  con  $1 = \sum_{x \in X} \varepsilon_{x,x}$ . Observemos además que  $C_X A$  contiene al álgebra  $M_X A$  de las funciones de soporte finito como  $*$ -ideal.

Si  $X$  es un  $G$ -conjunto y  $A$  es una  $G$ - $*$ -álgebra, la acción definida por  $(g \cdot f)(x, y) := g \cdot f(g^{-1}x, g^{-1}y)$  hace de  $C_X A$  una  $G$ - $*$ -álgebra y al restringirnos a  $M_X A$  obtenemos la acción definida anteriormente.

Si en cambio  $X$  es un conjunto  $G$ -graduado y  $A$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada, consideramos la sub- $*$ -álgebra de  $C_X A$  definida como

$$C_X^\circ A = \text{span}_\ell \{f \in C_X A : f(x, y) \text{ homogéneo } (\forall x, y \in X), |x||f(x, y)||y|^{-1} \text{ constante en } \text{sop } f\}.$$

Esta  $*$ -álgebra es  $G$ -graduada; definimos su componente homogénea de grado  $g \in G$  como

$$(C_X^\circ A)_g = \text{span}_\ell\{f \in C_X^\circ A : |x| \cdot |f(x, y)| = g \cdot |y|\}.$$

Los elementos de  $C_X^\circ A$  que pertenecen al cono de Karoubi  $\Gamma_X A$  de  $A$  forman una sub- $*$ -álgebra que notaremos  $\Gamma_X^\circ A := \Gamma_X A \cap C_X^\circ A$ . Una verificación directa muestra que definiendo  $(\Gamma_X^\circ A)_g := \Gamma_X A \cap (C_X^\circ A)_g$  para cada  $g \in G$  el álgebra  $\Gamma_X^\circ A$  es más aún una sub- $*$ -álgebra  $G$ -graduada de  $C_X^\circ A$ .

Tanto  $C_X^\circ A$  como  $\Gamma_X^\circ A$  son unitales si  $A$  lo es. El álgebra  $M_X A$  con la graduación (2.1.3) es una sub- $*$ -álgebra  $G$ -graduada de  $\Gamma_X^\circ A$  y en consecuencia también es una sub- $*$ -álgebra  $G$ -graduada de  $C_X^\circ A$ .

*Observación 2.1.5.* Sea  $A$  una  $*$ -álgebra. Una forma  $\varepsilon$ -hermitiana  $\phi: M \rightarrow M^*$  en un módulo  $A$ -libre  $M$  con base  $B$  puede identificarse con un elemento  $\varepsilon$ -hermitiano  $\psi \in C_B A$  definiendo  $\psi(x, y) = \phi(y)(x)$  para cada  $x, y \in B$ . Recíprocamente, si  $\psi \in C_B A$  satisface  $\psi(x, y)^* = \varepsilon\psi(y, x)$  y  $\psi(xr, ys) = r^*\psi(x, y)s$  para cada  $x, y \in B$ , entonces  $\phi(y)(x) := \psi(x, y)$  determina una forma  $\varepsilon$ -hermitiana.

**Definición 2.1.6.** Una *inmersión ideal* en  $G - \text{Alg}_\ell^*$  es un monomorfismo con codominio una  $G$ - $*$ -álgebra unital y cuya imagen es un  $*$ -ideal  $G$ -invariante. Del mismo modo, una *inmersión ideal* en  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$  es un monomorfismo con codominio una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada unital y cuya imagen es un  $*$ -ideal homogéneo.

**Definición 2.1.7.** Sea  $R$  una  $G$ -\*-álgebra unital. Una unidad  $\phi \in R$  se dice *equivariantemente  $\epsilon$ -hermitiana* si es  $\epsilon$ -hermitiana y queda fija por la acción de  $G$ .

*Observación 2.1.8.* Si  $R$  es una  $G$ -\*-álgebra unital y  $\phi \in R$  un elemento equivariantemente  $\epsilon$ -hermitiano, la involución inducida por  $\phi$  hace de  $R^\phi$  una  $G$ -\*-álgebra. Más aún, la matriz (1.4.15) queda fija por la acción de  $G$  en  $M_{\pm}R^\phi$  y por lo tanto el isomorfismo (1.4.16) es equivariante para toda sub- $G$ -\*-álgebra de  $R$ .

**Definición 2.1.9.** Un funtor  $F: G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  se dice  *$G$ -estable* si para cada inmersión ideal  $i: A \rightarrow R$ , cada par de  $G$ -conjuntos  $X$  e  $Y$  de cardinal a lo sumo  $\max\{|G|, \aleph_0\}$  y cada elección de elementos equivariantemente  $\epsilon$ -hermitianos  $\phi \in C_X R, \psi \in C_Y R$  el funtor  $F$  envía el morfismo

$$M_X A^\phi \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1_A} M_{X \sqcup Y} A^{\psi \oplus \phi}$$

a un isomorfismo.

**Definición 2.1.10.** Sea  $R$  una \*-álgebra unital  $G$ -graduada. Una unidad  $\phi \in R$  se dice *homogéneamente  $\epsilon$ -hermitiana* si es  $\epsilon$ -hermitiana, homogénea y  $|\phi| \in Z(G)$ .

*Observación 2.1.11.* Si  $R$  es una \*-álgebra unital  $G$ -graduada y  $\phi \in R$  un elemento homogéneamente  $\epsilon$ -hermitiano, la involución inducida por  $\phi$  hace de  $R^\phi$  una  $G$ -\*-álgebra. Más aún, la matriz (1.4.15) es homogénea de grado central y por lo tanto el isomorfismo (1.4.16) es homogéneo para toda sub- $G$ -\*-álgebra de  $R$ .

**Definición 2.1.12.** Un funtor  $F: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  se dice  *$\widehat{G}$ -estable* si para cada inmersión ideal  $i: A \rightarrow R$ , cada par de conjuntos  $G$ -graduados  $X$  e  $Y$  de cardinal a lo sumo  $\max\{|G|, \aleph_0\}$  y cada elección de elementos homogéneamente  $\epsilon$ -hermitianos  $\phi \in C_X^\circ R, \psi \in C_Y^\circ R$  el funtor  $F$  envía el morfismo

$$M_X A^\phi \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1_A} M_{X \sqcup Y} A^{\psi \oplus \phi}$$

a un isomorfismo.

**Proposición 2.1.13.** Sea  $F: \mathfrak{A} \rightarrow C$  un funtor  $\iota_+$ -estable.

- (i) Si  $\mathfrak{A} = G - \text{Alg}_\ell^*$ , entonces  $F$  es  $G$ -estable si y sólo si para cada  $G$ -\*-álgebra  $A$  y cada par de  $G$ -conjuntos  $X$  e  $Y$  de cardinal a lo sumo  $\max\{|G|, \aleph_0\}$  este funtor envía el morfismo

$$M_X A \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1_A} M_{X \sqcup Y} A$$

a un isomorfismo.

- (ii) Si  $\mathfrak{A} = G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*$ , entonces  $F$  es  $\widehat{G}$ -estable si y sólo si para cada \*-álgebra  $G$ -graduada  $A$  y cada par de conjuntos  $G$ -graduados  $X$  e  $Y$  de cardinal a lo sumo  $\max\{|G|, \aleph_0\}$  este funtor envía el morfismo

$$M_X A \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1_A} M_{X \sqcup Y} A$$

a un isomorfismo.

*Demostración.* Probamos ambos incisos en simultáneo. Si el funtor es  $G$  o  $\widehat{G}$ -estable, envía cada inclusión  $M_X A \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1} M_{X \sqcup Y} A$  a un isomorfismo ya que estamos considerando el caso particular de los elementos 1-hermitianos  $1 \in C_X \widetilde{A}$ ,  $1 \in C_X \widetilde{A}$  o  $1 \in C_X^\circ \widetilde{A}$ ,  $1 \in C_X^\circ \widetilde{A}$ .

Por el isomorfismo (1.4.16), tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M_X^\phi A & \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1} & M_{X \sqcup Y}^{\phi \oplus \psi} A \\
 \downarrow \iota_+ \otimes 1 & & \downarrow \iota_+ \otimes 1 \\
 M_\pm M_X^\phi A & \xrightarrow{M_\pm \text{inc} \otimes 1} & M_\pm M_{X \sqcup Y}^{\phi \oplus \psi} A \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 {}_\epsilon M_2 M_X A & \xrightarrow{{}_\epsilon M_2 \text{inc} \otimes 1} & {}_\epsilon M_2 M_{X \sqcup Y} A \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 M_X {}_\epsilon M_2 A & \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1 {}_\epsilon M_2 A} & M_{X \sqcup Y} {}_\epsilon M_2 A
 \end{array} \tag{2.1.14}$$

Como  $F$  es  $\iota_+$ -estable, envía todas las flechas verticales a isomorfismos. En consecuencia la fila superior del diagrama tiene por imagen a un isomorfismo si y sólo si lo mismo es cierto para la fila inferior. Esto termina de probar que las definiciones de  $G$  y  $\widehat{G}$ -estabilidad equivalen a las condiciones de la proposición.  $\blacklozenge$

La demostración del siguiente lema es una verificación directa.

**Lema 2.1.15.** Sean  $A$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada y  $B$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.

(i) Si  $X$  es un  $G$ -conjunto, el morfismo

$$\varepsilon_{s,t} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes a \in M_G M_X A \mapsto \varepsilon_{s^{-1}x,t^{-1}y} \otimes \varepsilon_{s,t} \otimes a \in M_{|X|} M_G A \tag{2.1.16}$$

es un isomorfismo de  $G$ - $*$ -álgebras natural en  $X$  y en  $A$ .

(ii) Si  $X$  es un conjunto  $G$ -graduado, el morfismo

$$\varepsilon_{s,t} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes b \in M_G M_X B \mapsto \varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{s|x|,t|y|} \otimes b \in M_{|X|} M_G B \tag{2.1.17}$$

es un isomorfismo de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas natural en  $X$  y en  $B$ .  $\blacklozenge$

**Proposición 2.1.18** (cf. [Ell14, Proposition 3.1.9]). Si  $F : G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  es un funtor  $M_Z$ -estable con  $|Z| \geq |G|$  y  $\iota_+$ -estable, entonces  $F(M_G \ell \otimes -)$  cumple estas propiedades y es además  $G$ -estable.

*Demostración.* Por la Proposición 2.1.13, basta ver que para cada álgebra  $A$ , cada par de  $G$ -conjuntos  $X$  e  $Y$  el funtor  $F(M_G \ell \otimes -)$  envía la inclusión  $M_X A \rightarrow M_{X \sqcup Y} A$  a un isomorfismo. Considerando el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
M_G M_X(A) & \xrightarrow{M_G(1_A \otimes \text{inc})} & M_G M_{X \sqcup Y} A \\
(2.1.16) \downarrow \cong & & \cong \downarrow (2.1.16) \\
M_{|X|} M_G A & \xrightarrow{\text{inc} \otimes 1_{M_G A}} & M_{|X \sqcup Y|} M_G A
\end{array}$$

basta ver que  $F$  envía la fila superior a un isomorfismo. Esto se desprende de que las flechas verticales son isomorfismos y  $F$  envía a la fila inferior a un isomorfismo, por estabilidad matricial.  $\blacklozenge$

**Corolario 2.1.19.** *Sea  $F : G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  es un funtor  $\iota_+$ -estable y  $M_Z$ -estable con  $|Z| \geq |G|$  infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El funtor  $F$  es  $G$ -estable.*
- (ii) *Para cada  $G$ -\*-álgebra  $A$  el funtor  $F$  envía el zig-zag (2.1.1) a un isomorfismo.*
- (iii) *Los funtores  $F$  y  $FM_G$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Si  $F$  es  $G$ -estable, entonces envía (2.1.1) a un isomorfismo pues estas son las inclusiones asociadas a las inclusiones de  $G$ -conjuntos  $\{1\} \hookrightarrow G \sqcup * \hookrightarrow G$ . Dado que el zig-zag (2.1.1) es natural en  $A$ , aplicando  $F$  se obtiene una transformación natural  $F \rightarrow FM_G$ ; asumiendo (ii) resulta un isomorfismo. Como  $FM_G$  es  $G$ -estable por la Proposición 2.1.18, si  $F \simeq FM_G$  entonces  $F$  es también  $G$ -estable.  $\blacklozenge$

**Proposición 2.1.20** (cf. [Ell14, Proposition 3.2.2]). *Si  $F : G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  es un funtor  $\iota_+$ -estable y  $M_Z$ -estable con  $|Z| \geq |G|$  infinito, entonces el funtor*

$$\widehat{F} : G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C, \quad \widehat{F}(A) = F(M_G A), \quad \widehat{F}(f) = F(M_G f)$$

*es  $\widehat{G}$ -estable.*

*Demostración.* Como en la Proposición 2.1.18, aplicando la Proposición 2.1.13 y el isomorfismo natural (2.1.17) basta ver que para cada par de conjuntos  $X$  e  $Y$  el funtor  $F$  envía la inclusión  $\text{inc} \otimes 1_{M_G A} : M_{|X|} M_G A \rightarrow M_{|X \sqcup Y|} M_G A$  a un isomorfismo. Esto último se deduce de que  $F$  es matricialmente estable.  $\blacklozenge$

**Corolario 2.1.21.** *Sea  $F : G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  es un funtor  $\iota_+$ -estable y  $M_Z$ -estable con  $|Z| \geq |G|$  infinito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El funtor  $F$  es  $\widehat{G}$ -estable.*
- (ii) *Para cada \*-álgebra  $G$ -graduada  $A$  el funtor  $F$  envía la inclusión*

$$\iota_A : \mathfrak{a} \in A \mapsto \varepsilon_{1,1} \otimes \mathfrak{a} \in M_G(A)$$

*a un isomorfismo.*

- (iii) *Los funtores  $F$  y  $FM_G$  son naturalmente isomorfos.*

*Demostración.* Si  $F$  es  $\widehat{G}$ -estable, entonces envía  $\iota_A$  a un isomorfismo pues es la inclusión asociada al morfismo de conjuntos  $G$ -graduados  $\{1\} \hookrightarrow G$ . Como  $\iota_A$  es natural en  $A$ , en particular  $F(\iota)$  define una transformación natural  $F(\iota): F \rightarrow FM_G$ . Esto prueba que (i) implica (ii) y (ii) implica (iii). Por último, veamos que (iii) implica (i). Como  $FM_G$  es  $\widehat{G}$ -estable por la Proposición 2.1.20, si  $F \simeq FM_G$  entonces  $F$  también es  $\widehat{G}$ -estable.  $\blacklozenge$

## 2.2. Las categorías $kk_G^h$ y $kk_{\widehat{G}}^h$

Habiendo definido las nociones de estabilidad graduada y equivariente, pasamos a construir las teorías de homología escisivas universales con estas propiedades.

**Convención 2.2.1.** De aquí en adelante fijamos un conjunto infinito  $X$  de cardinal mayor o igual a  $|G|$  y una elección de categoría subyacente  $\mathcal{U}$  para construir las categorías  $kk_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$  y  $kk_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ .

**Definición 2.2.2.** Definimos la *K-teoría algebraica bivariante hermitiana G-equivariante* como la categoría cuyos objetos son las  $G$ - $*$ -álgebras y los morfismos están dados por

$$kk_G^h(A, B) := kk_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h(M_G A, M_G B),$$

con la regla de composición de  $kk_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ . Se tiene un functor canónico

$$j_G^h: G - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow kk_G^k$$

que es la identidad en objetos y envía un morfismo equivariente  $f: A \rightarrow B$  a la clase de  $M_G f: M_G A \rightarrow M_G B$  en  $kk_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ .

Similarmente, se define la *K-teoría algebraica bivariante hermitiana G-graduada* como la categoría cuyos objetos son las  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas y los morfismos están dados por

$$kk_{\widehat{G}}^h(A, B) := kk_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h(M_G A, M_G B),$$

con la regla de composición de  $kk_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ . Tenemos también un functor canónico

$$j_{\widehat{G}}^h: G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow kk_{\widehat{G}}^h$$

que es la identidad en objetos y envía un morfismo homogéneo  $f: A \rightarrow B$  a la clase de  $M_G f: M_G A \rightarrow M_G B$  en  $kk_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ .

*Observación 2.2.3.* Por construcción, tanto  $kk_G^h$  como  $kk_{\widehat{G}}^h$  pueden identificarse a través de un *full embedding* con subcategorías plenas de  $kk_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$  y  $kk_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$  respectivamente. Al igual que sus contrapartes no hermitianas, ambas categorías son trianguladas y estos *embeddings* son funtores triangulados. Un triángulo distinguido es uno isomorfo a la imagen de una sucesión de fibra homotópica a través de  $j_G^h$  o  $j_{\widehat{G}}^h$  respectivamente.

Se tienen además diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc}
 G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{M_G \otimes -} & G - \text{Alg}_\ell^* & G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{M_G \otimes -} & G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \\
 j_G^h \downarrow & & \downarrow j_{G - \text{Alg}_\ell^*}^h & j_G^h \downarrow & & \downarrow j_{G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*}^h \\
 kk_G^h & \xrightarrow{i} & kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h & kk_G^h & \xrightarrow{i} & kk_{|G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*|}^h
 \end{array}$$

que nos permiten decir que tanto  $j_G$  como  $j_{\widehat{G}}$  son  $\iota_+$ -estables, matricialmente estables y homotópicamente invariantes. Más aún, en vista de la Proposición 2.1.18 tenemos que  $j_G^h$  es  $G$ -estable y similarmente la Proposición 2.1.20 nos dice que  $j_{\widehat{G}}^h$  es  $\widehat{G}$ -estable.

Veremos ahora que los funtores  $j_G^h$  y  $j_{\widehat{G}}^h$  son teorías de homología escisivas universales para las propiedades de estabilidad anteriormente mencionadas.

**Teorema 2.2.4** (cf. [Eil14, Theorem 4.1.1]). *El functor  $j_G^h: G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow kk_G^h$  es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas que son  $G$ -estables, homotópicamente invariantes, matricialmente estables y  $\iota_+$ -estables.*

*Demostración.* Como vimos en la Observación 2.2.3, el functor  $j_G^h$  es  $G$ -estable, homotópicamente invariante, matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable. Si para cada extensión

$$A \rightarrow B \rightarrow C \quad (\mathcal{E})$$

consideramos el morfismo

$$\partial_{\mathcal{E}}^G \in kk_G^h(\Omega C, A) = kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h(M_G \Omega C, M_G A) \simeq kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h(\Omega M_G C, M_G A)$$

asociado a la extensión

$$M_G A \rightarrow M_G B \rightarrow M_G C$$

en  $kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h$ , esta familia hace de  $j_G^h$  una teoría de homología escisiva. Veamos ahora que cualquier otra teoría de homología escisiva  $X: G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  con las mismas propiedades de estabilidad se factoriza de forma única a través de  $j_G^h$ .

Por el Teorema 1.7.16, sabemos que  $X$  se factoriza a través de  $j_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h$  de forma única

$$\begin{array}{ccc}
 G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{j_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h} & kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h \\
 & \searrow X & \downarrow \exists! X' \\
 & & C
 \end{array}$$

vía cierto functor triangulado  $X': kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h \rightarrow C$ . Como  $X$  es  $G$ -estable, tanto este functor como  $j_G^h$  envían el zig-zag natural

$$A \xrightarrow{\mu_A} M_{G \sqcup^*} A \xleftarrow{\mu'_A} M_G A$$

a un isomorfismo. Notando  $i: kk_G^h \hookrightarrow kk_{|G - \text{Alg}_\ell^*|}^h$  al *embedding* de la Observación 2.2.3 y definiendo

$$\widetilde{X}(\alpha) := X(\mu_B)^{-1} X(\mu'_B) X' i(\alpha) X(\mu'_A)^{-1} X(\mu_A)$$

para cada morfismo  $\alpha \in \text{kk}_G^h(A, B)$ , es

$$\begin{aligned} \tilde{X}j_G^h(f) &= X(\mu_B)^{-1}X(\mu'_B)X'ij_G^h(f)X(\mu'_A)^{-1}X(\mu_A) \\ &= X(\mu_B)^{-1}X(\mu'_B)X'j_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h(M_G f)X(\mu'_A)^{-1}X(\mu_A) \\ &= X(\mu_B)^{-1}X(\mu'_B)X(M_G f)X(\mu'_A)^{-1}X(\mu_A) \\ &= X(f) \end{aligned}$$

para todo morfismo  $f: A \rightarrow B$  en  $G - \text{Alg}_\ell^*$ . Esto muestra que  $X$  se factoriza a través de  $j_G^h$ . Para terminar, debemos ver lo hace de forma única. Si  $\tilde{X}: G - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  extiende a  $X$ , tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc} G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{j_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h} & \text{kk}_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h \\ & \searrow j_G^h & \downarrow \exists! v \\ & & \text{kk}_G^h \\ & \searrow X & \downarrow \tilde{X} \\ & & C \end{array}$$

y por la propiedad universal de  $j_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h$ , debe ser  $\tilde{X}v = X'$ . Por otro lado, la composición  $vi$  coincide con el endofunctor en  $\text{kk}_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h$  inducido por  $M_G \otimes -$  restringido a  $\text{kk}_G^h$  vía  $i$

$$\begin{array}{ccc} \text{kk}_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h & \xrightarrow{M_G \otimes -} & \text{kk}_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h \\ \uparrow i & & \uparrow i \\ \text{kk}_G^h & \xrightarrow{vi} & \text{kk}_G^h \end{array}$$

El zigzag (2.1.1) implementa un isomorfismo natural entre  $vi$  y  $1_{\text{kk}_G^h}$ . En consecuencia, debe ser

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\alpha) &= \tilde{X}(j_G^h(\mu_B)^{-1}j_G^h(\mu'_B)vi(\alpha)j_G^h(\mu'_A)^{-1}j_G^h(\mu_A)) \\ &= X(\mu_B)^{-1}X(\mu'_B)\tilde{X}vi(\alpha)X(\mu'_A)^{-1}X(\mu_A) \\ &= X(\mu_B)^{-1}X(\mu'_B)X'i(\alpha)X(\mu'_A)^{-1}X(\mu_A), \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ◆

**Teorema 2.2.5** (cf. [Ell14, Theorem 4.2.1]). *El functor  $j_G^h: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow \text{kk}_G^h$  es inicial en la categoría de teorías de homología escisivas que son  $\hat{G}$ -estables, homotópicamente invariantes, matricialmente estables y  $\iota_+$ -estables.*

*Demostración.* La demostración es similar al Teorema 2.2.4. Ya notamos, en la Observación 2.2.3, que el functor  $j_{\widehat{G}}^h$  es  $\widehat{G}$ -estable, homotópicamente invariante, matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable. Considerando para cada extensión

$$A \rightarrow B \rightarrow C \quad (\mathcal{E})$$

el morfismo

$$\partial_{\mathcal{E}}^{\widehat{G}} \in \text{kk}_{\widehat{G}}^h(\Omega C, A) = \text{kk}_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h(M_G \Omega C, M_G A) \simeq \text{kk}_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h(\Omega M_G C, M_G A)$$

asociado a la extensión

$$M_G A \rightarrow M_G B \rightarrow M_G C$$

en  $\text{kk}_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ , obtenemos que  $j_{\widehat{G}}^h$  una teoría de homología escisiva. Veamos ahora que cualquier otra teoría de homología escisiva  $X: G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow C$  con las mismas propiedades de estabilidad se factoriza de forma única a través de  $j_{\widehat{G}}^h$ .

Por el Teorema 1.7.16, sabemos que  $X$  se factoriza a través de  $j_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$  de forma única

$$\begin{array}{ccc} G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* & \xrightarrow{j_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h} & \text{kk}_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h \\ & \searrow X & \downarrow \exists! X' \\ & & C \end{array}$$

vía cierto functor triangulado  $X': \text{kk}_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h \rightarrow C$ .

Como  $X$  es  $\widehat{G}$ -estable, para cada  $A$  en  $G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*$  tenemos que  $X(\iota_A: A \rightarrow M_G(A))$  es un isomorfismo. Notando  $i: \text{kk}_{\widehat{G}}^h \hookrightarrow \text{kk}_{|G-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h$  al *embedding* canónico, el functor

$$\widetilde{X}(\alpha) := X(\iota_A)^{-1} X' i(\alpha) X(\iota_A)$$

cumple que

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(j_{\widehat{G}}^h(f)) &= X(\iota_A)^{-1} X' i(j_{\widehat{G}}^h(f)) X(\iota_A) \\ &= X(\iota_A)^{-1} X' j_{|G_{gr}-\text{Alg}_{\ell}^*|}^h(M_G f) X(\iota_A) \\ &= X(\iota_A)^{-1} X(M_G f) X(\iota_A) \\ &= X(f). \end{aligned}$$

para todo  $f \in G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*$ . Esto muestra que  $X$  se factoriza a través de  $j_{\widehat{G}}^h$ . Como en el Teorema 2.2.4, esta es la única extensión posible. En efecto, si  $\widetilde{X}: G - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow C$  es un functor que extiende a  $X$ , tenemos un diagrama

$$\begin{array}{ccc}
G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* & \xrightarrow{j_{|G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*|}^h} & \text{kk}_{|G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*|}^h \\
& \searrow j_G^h & \downarrow \exists! \eta \\
& & \text{kk}_G^h \\
& \searrow X & \downarrow \tilde{X} \\
& & C
\end{array}$$

y por la propiedad universal de  $j_{|G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*|}^h$ , es  $\tilde{X}\eta = X'$ . Finalmente, como  $j_G^h(\iota_A)$  es un isomorfismo natural entre  $\eta$  e  $1_{\text{kk}_G^h}$ , se tiene que

$$\tilde{X}(\alpha) = \tilde{X}(j_G^h(\iota_A)^{-1}\eta(\alpha)) = X(\iota_A)^{-1}\tilde{X}\eta(\alpha) = X(\iota_A)^{-1}X'(\alpha).$$

◆

## 2.3. Teoremas de adjunción

Relacionaremos ahora la  $K$ -teoría bivariante hermitiana con sus versiones equivariante y graduada a través de distintas adjunciones entre las categorías  $\text{kk}_G^h$ ,  $\text{kk}_G^h$  y  $\text{kk}^h$ . Veremos también que podemos recuperar las  $K$ -teorías bivariantes de  $G$ -álgebras y álgebras  $G$ -graduadas como un caso particular de sus versiones hermitianas.

### 2.3.1 PRODUCTOS CRUZADOS

La noción de álgebra de productos cruzados de una  $G$ -álgebra y su versión dual para álgebras  $G$ -graduadas, definidas a continuación, nos permitirán establecer la relación entre las categorías  $\text{kk}_G^h$  y  $\text{kk}_G^h$ .

**Definición 2.3.1.** Dada una  $G$ - $*$ -álgebra  $A$ , el **producto cruzado**  $A \rtimes G$  es el  $\ell$ -módulo  $A \otimes_{\ell} \ell G$  junto con la multiplicación

$$(a \rtimes g) \cdot (b \rtimes h) := a(g \cdot b) \rtimes gh.$$

La graduación dada por

$$(A \rtimes G)_g := A \rtimes g = \text{span}_{\ell}\{a \rtimes g : a \in A\}$$

para cada  $g \in G$  y la involución

$$(a \rtimes g)^* := g^{-1} \cdot a^* \rtimes g^{-1}$$

hacen de  $A \rtimes G$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.

*Observación 2.3.2.* El álgebra  $A$  es una sub- $*$ -álgebra de  $A \rtimes G$  a través de la asignación  $a \in A \mapsto a \rtimes 1 \in A \rtimes G$ . Si  $A$  es unital, la conjugación por  $1 \rtimes g$  coincide allí con la acción de  $G$  en  $A$  pues  $(1 \rtimes g)(a \rtimes 1)(1 \rtimes g^{-1}) = (g \cdot a \rtimes g)(1 \rtimes g^{-1}) = g \cdot a \rtimes 1$ .

**Definición 2.3.3.** Si  $A$  es una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada, el **producto cruzado**  $G \widehat{\times} A$  es el  $\ell$ -módulo  $\ell^{(G)} \otimes_{\ell} A$  equipado con la multiplicación

$$(\chi_g \widehat{\times} a) \cdot (\chi_h \widehat{\times} b) := \chi_g \widehat{\times} a_{g^{-1}h} b$$

donde  $a_{g^{-1}h}$  es la componente homogénea de grado  $g^{-1}h$  de  $a \in A$ . A través de la acción

$$s \cdot (\chi_g \widehat{\times} a) := \chi_{sg} \widehat{\times} a$$

e involución

$$(\chi_g \widehat{\times} a)^* = \chi_{g|a|} \widehat{\times} a^*,$$

definidas en cada elemento homogéneo  $a \in A$ , tenemos en  $G \widehat{\times} A$  una estructura de  $G$ - $*$ -álgebra.

*Observación 2.3.4.* La asignación

$$\chi_g \widehat{\times} a \mapsto \varepsilon_{g,|a|} \otimes a$$

para cada  $g \in G$  y  $a \in A$  homogéneo identifica a  $G \widehat{\times} A$  con una subálgebra de  $M_G(A)$ .

*Observación 2.3.5.* Se tienen funtores

$$- \rtimes G: G\text{-Alg}_{\ell}^* \rightarrow G_{gr}\text{-Alg}_{\ell}^*, \quad G \widehat{\times} -: G_{gr}\text{-Alg}_{\ell}^* \rightarrow G\text{-Alg}_{\ell}^*$$

y análogamente tenemos funtores con codominio  $\text{Alg}_{\ell}^*$ , que notaremos del mismo modo.

### 2.3.2 EL TEOREMA DE GREEN-JULG

En su versión original, el teorema de Green-Julg establece un isomorfismo entre la  $K$ -teoría equivariante de una  $G$ - $C^*$ -álgebra - donde  $G$  es un grupo compacto - con la  $K$ -teoría de su producto cruzado. Este resultado puede ser interpretado en términos de una adjunción entre la  $K$ -teoría bivariante de Kasparov y su versión  $G$ -equivariante.

Se prueba en [Eli14] una versión algebraica de este teorema, cuando  $G$  es un grupo finito de orden inversible en  $\ell$ . Veremos a continuación que el mismo resultado es cierto en el caso hermitiano.

*Observación 2.3.6.* Supongamos que  $G$  es finito de orden inversible en  $\ell$  y notemos  $\zeta = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$ . Se tiene un morfismo natural de  $G$ - $*$ -álgebras

$$\zeta_A: a \in A \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{s,t \in G} \varepsilon_{s,t} \otimes a \in M_G A.$$

Este se corresponde con tensorizar a  $1_A$  con el morfismo

$$\text{End}_{\ell}^F(\ell) \simeq \text{End}_{\ell}^F(\ell \cdot \zeta) \rightarrow \text{End}_{\ell}^F\left(\ell \cdot \zeta \oplus \bigoplus_{g \neq 1} \ell \cdot (g-1)\right) \simeq \text{End}_{\ell}^F(\ell G)$$

inducido por la inclusión  $\ell \cdot \zeta \hookrightarrow \ell G$ .

**Lema 2.3.7.** *Supongamos que  $G$  es finito de orden inversible en  $\ell$  y sea  $A$  una  $G$ -\*-álgebra. El morfismo  $\zeta_A$  es un isomorfismo en  $kk_G^h$ .*

*Demostración.* Aplicando  $M_G$  y usando el isomorfismo natural (2.1.16), basta ver que  $x \in M_G A \mapsto \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{s,t} \varepsilon_{s,t} \otimes x \in M_{|G|} M_G A$  es un isomorfismo en  $kk_G^h$ . En particular es suficiente probar que para cualquier  $G$ -\*-álgebra  $A$  el morfismo

$$\widetilde{\zeta}_A: a \in A \mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{s,t \in G} \varepsilon_{s,t} \otimes a \in M_{|G|} A.$$

es un isomorfismo.

Sean  $B = \{g : g \in G\}$  y  $B' = \{\zeta\} \sqcup \{1 - g : g \in G\}$  bases de  $\ell G$ . A nivel matricial, tenemos un isomorfismo de cambio de base dado por funciones  $u: B' \times B \rightarrow \ell$  y  $u^{-1}: B \times B' \rightarrow \ell$ ,

$$x \in M_B \ell \mapsto u x u^{-1} \in M_{B'} \ell. \quad (2.3.8)$$

Este morfismo no preserva las involuciones usuales de los anillos de matrices; definiendo  $u^*(x, y) := u(y, x)^*$  debemos equipar a  $M_{B'}$  con la involución dada por el elemento 1-hermitiano  $u u^*$ . Un cálculo directo muestra que  $u u^*(\zeta, \zeta) = 1/|G|$  y que para todo  $g \in G$  es

$$u u^*(\zeta, 1 - g) = u u^*(1 - g, \zeta) = 0.$$

En consecuencia existe una matriz 1-hermitiana  $\psi \in M_{B \setminus \{\zeta\}} \ell$  tal que  $u u^* = (1/|G|) \oplus \psi$  y el morfismo  $\widetilde{\zeta}_A$  se corresponde a través de (2.3.8) con la inclusión

$$A \simeq M_{\{\zeta\}} A = M_{\{\zeta\}} A^{1/|G|} \rightarrow M_{B'} A^{1/|G| \oplus \psi}.$$

Por estabilidad hermitiana este último es un isomorfismo en  $kk_G^h$ , concluyendo la demostración.  $\blacklozenge$

**Proposición 2.3.9** (cf. [Ell14, Proposition 5.1.1]). *Sea  $A$  una  $G$ -\*-álgebra y  $X$  un  $G$ -conjunto. Se tiene un isomorfismo natural*

$$\Gamma: M_X(A \rtimes G) \rightarrow (M_X A) \rtimes G, \quad \varepsilon_{x,y} \otimes (a \rtimes g) \mapsto (\varepsilon_{x,gy} \otimes a) \rtimes g.$$

*Demostración.* En [Ell14, Proposition 5.1.1] se prueba en particular que el morfismo del enunciado es un isomorfismo de  $G$ -álgebras. Veamos que además preserva las involuciones. En efecto, para cada  $a \in A, g \in G$  y  $x, y \in X$  es

$$\Gamma((\varepsilon_{x,y} \otimes (a \rtimes g))^*) = \Gamma(\varepsilon_{y,x} \otimes (g^{-1} a^* \rtimes g^{-1})) = (\varepsilon_{y,g^{-1}x} \otimes g^{-1} a^*) \rtimes g^{-1}$$

lo cual coincide con

$$\Gamma(\varepsilon_{x,y} \otimes (a \rtimes g))^* = ((\varepsilon_{x,gy} \otimes a) \rtimes g)^* = g^{-1} \cdot (\varepsilon_{gy,x} \otimes a^*) \rtimes g^{-1} = (\varepsilon_{y,g^{-1}x} \otimes g^{-1} a^*) \rtimes g^{-1}.$$

$\blacklozenge$

**Lema 2.3.10.** Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra y

$$\psi_A: (\varepsilon_{s,t} \otimes \mathbf{a}) \rtimes \mathbf{g} \in (M_G A) \rtimes G \mapsto \varepsilon_{s,g^{-1}t} \otimes (\mathbf{a} \rtimes \mathbf{g}) \in M_G(A \rtimes G)$$

es la inversa del isomorfismo de la Proposición 2.3.9, entonces

$$\psi(\zeta_A \rtimes G) = \zeta_{A \rtimes G}.$$

*Demostración.* Por un cálculo directo, es

$$\psi(\zeta_A \rtimes G)(\mathbf{a} \rtimes \mathbf{g}) = \frac{1}{|G|} \sum_{s,t \in G} \varepsilon_{s,g^{-1}t} \otimes (\mathbf{a} \rtimes \mathbf{g}) = \frac{1}{|G|} \sum_{s,t \in G} \varepsilon_{s,t} \otimes (\mathbf{a} \rtimes \mathbf{g}) = \zeta_{A \rtimes G}(\mathbf{a} \rtimes \mathbf{g}).$$

◆

**Lema 2.3.11.** Sea  $B$  una  $G$ -\*-álgebra y  $A$  una \*-álgebra vista en  $G - \text{Alg}_\ell^*$  con la acción trivial. Se tiene un isomorfismo natural

$$\eta_B: (A \otimes B) \rtimes G \rightarrow A \otimes (B \rtimes G)$$

de \*-álgebras.

*Demostración.* Ponemos  $\eta_B((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \rtimes \mathbf{g}) := \mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \rtimes \mathbf{g})$ . Como la acción en  $A$  es trivial,  $\eta_B$  es un morfismo de álgebras ya que

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \rtimes \mathbf{g} \cdot (\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}') \rtimes \mathbf{h} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}') \rtimes \mathbf{gh} = (\mathbf{a}\mathbf{a}' \otimes \mathbf{b}\mathbf{g}\mathbf{b}') \rtimes \mathbf{gh}$$

y

$$\mathbf{a}\mathbf{a}' \otimes (\mathbf{b}\mathbf{g}\mathbf{b}' \rtimes \mathbf{gh}) = \mathbf{a}\mathbf{a}' \otimes (\mathbf{b} \rtimes \mathbf{g})(\mathbf{b}' \rtimes \mathbf{h}) = (\mathbf{a} \otimes (\mathbf{b} \rtimes \mathbf{g}))(\mathbf{a}' \otimes (\mathbf{b}' \rtimes \mathbf{h})).$$

El morfismo preserva la involución pues

$$\begin{aligned} \eta_B(((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \rtimes \mathbf{g})^*) &= \eta_B((\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}) \rtimes \mathbf{g}^{-1}) = (\mathbf{a}^* \otimes (\mathbf{g}^{-1}\mathbf{b}^* \rtimes \mathbf{g}^{-1})) \\ &= (\mathbf{a}^* \otimes (\mathbf{b} \rtimes \mathbf{g})^*) = \eta_B((\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \rtimes \mathbf{g})^*. \end{aligned}$$

◆

**Proposición 2.3.12.** La composición

$$j^h(- \rtimes G): G - \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{- \rtimes G} \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{j^h} \text{kk}^h$$

define un funtor  $G$ -estable, homotópicamente invariante y  $\iota_+$ -estable. En particular, existe un único funtor triangulado que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{- \rtimes G} & \text{Alg}_\ell^* \\ j_G^h \downarrow & & \downarrow j^h \\ \text{kk}_G^h & \xrightarrow{- \rtimes G} & \text{kk}^h \end{array}$$

*Demostración.* Como  $- \rtimes G$  preserva extensiones semi-escindidas, al componerlo con  $j^h$  obtenemos una teoría de homología escisiva. Para probar que se factoriza de forma única a través de  $j_G^h$ , debemos observar que es  $G$ -estable, matricialmente estable, homotópicamente invariante y  $\iota_+$ -estable.

El Lema 2.3.11 nos dice que el functor  $- \rtimes G$  envía las inclusiones  $A \hookrightarrow A[t]$  y  $A \hookrightarrow M_{\pm}A$  a morfismos que en la categoría de flechas de  $G - \text{Alg}_{\ell}^*$  son isomorfos a las inclusiones  $A \rtimes G \hookrightarrow (A \rtimes G)[t]$  y  $A \rtimes G \hookrightarrow M_{\pm}(A \rtimes G)$ . Por otro lado, la Proposición 2.3.9 nos dice que si  $X$  e  $Y$  son  $G$ -conjuntos entonces  $- \rtimes G$  envía una inclusión  $M_X A \rightarrow M_{X \sqcup Y} A$  a una flecha isomorfa a la inclusión  $M_X(A \rtimes G) \rightarrow M_{X \sqcup Y}(A \rtimes G)$ . Resta notar que el functor  $j^h$  envía todas estas flechas a isomorfismos.  $\blacklozenge$

*Observación 2.3.13.* En la otra dirección tenemos un functor

$$(-)^{\tau} : \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow G - \text{Alg}_{\ell}^*$$

que equipa a una  $*$ -álgebra con la acción trivial. La composición  $j_G^h((-)^{\tau}) : \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow \text{kk}_G^h$  es una teoría de homología escisiva matricialmente estable, invariante por homotopía y  $\iota_+$ -estable, ya que  $j_G^h$  lo es y  $(-)^{\tau}$  preserva extensiones semi-escindidas. Se tiene por lo tanto un único functor triangulado que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_{\ell}^* & \xrightarrow{(-)^{\tau}} & G - \text{Alg}_{\ell}^* \\ j^h \downarrow & & \downarrow j_G^h \\ \text{kk}^h & \xrightarrow{(-)^{\tau}} & \text{kk}_G^h \end{array}$$

**Teorema 2.3.14** (cf. [Ell14, Theorem 5.2.1]). *Si  $G$  es un grupo finito cuyo orden es inversible en  $\ell$ , se tiene una adjunción*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(-)^{\tau}} & \\ \text{kk}^h & \overset{\perp}{\curvearrowright} & \text{kk}_G^h \\ & \xleftarrow{- \rtimes G} & \end{array}$$

con  $(-)^{\tau}$  adjunto a izquierda y  $- \rtimes G$  adjunto a derecha.

*Demostración.* Por [Rie16, Proposition 4.2.6], basta definir endomorfismos naturales

$$\alpha : 1_{\text{kk}^h} \Rightarrow (-)^{\tau} \rtimes G, \quad \beta : (- \rtimes G)^{\tau} \Rightarrow 1_{\text{kk}_G^h}$$

que satisfagan las identidades triangulares de unidad y counidad, es decir, que para cada  $A \in \text{Alg}_{\ell}^*$  y  $B \in G - \text{Alg}_{\ell}^*$  los diagramas

$$\begin{array}{ccc} A^{\tau} & \xrightarrow{(\alpha_A)^{\tau}} & (A^{\tau} \rtimes G)^{\tau} \\ & \searrow 1_{A^{\tau}} & \downarrow \beta_{A^{\tau}} \\ & & A^{\tau} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} B \rtimes G & \xrightarrow{\alpha_{B \rtimes G}} & (B \rtimes G)^{\tau} \rtimes G \\ & \searrow 1_{B \rtimes G} & \downarrow (\beta_B) \rtimes G \\ & & B \rtimes G \end{array}$$

conmuten.

Veamos primero que los morfismos

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_A: A &\rightarrow A^\tau \rtimes G \\ a &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a \rtimes g\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_B: (B \rtimes G)^\tau &\rightarrow M_G B \\ b \rtimes g &\mapsto \sum_{s \in G} s \cdot b \otimes \varepsilon_{s,sg}\end{aligned}$$

definidos en [Ell14] respetan las involuciones. En efecto, es

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_A(a)^* &= \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a \rtimes g \right)^* = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (a \rtimes g)^* \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a^* \rtimes g^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} a^* \rtimes g = \tilde{\alpha}_A(a^*)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}_B(b \rtimes g)^* &= \sum_{s \in G} s \cdot b^* \otimes \varepsilon_{sg,s} = \sum_{t \in G} t \cdot (g^{-1}b^*) \otimes \varepsilon_{t,tg^{-1}} \\ &= \tilde{\beta}_B(g^{-1}b^* \rtimes g^{-1}) = \tilde{\beta}_B((b \rtimes g)^*).\end{aligned}$$

Notando  $\zeta_C: C \rightarrow M_G C$  al morfismo natural de la Observación 2.3.6, definimos  $\alpha_A := j^h(\tilde{\alpha}_A)$  para cada  $A \in \text{Alg}_\ell^*$  y  $\beta_B := j_G^h(\zeta_B)^{-1} j_G^h(\tilde{\beta}_B)$  para cada  $B \in G - \text{Alg}_\ell^*$ . Veamos que estas definiciones cumplen las identidades de unidad y counidad. Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}\beta_{A^\tau}(\alpha_A)^t &= j_G^h(\zeta_{A^\tau})^{-1} j_G^h(\tilde{\beta}_{A^\tau})(j^h(\tilde{\alpha}_A))^\tau = j_G^h(\zeta_{A^\tau})^{-1} j_G^h(\tilde{\beta}_{A^\tau}) j_G^h(\tilde{\alpha}_A^\tau) \\ &= j_G^h(\zeta_{A^\tau})^{-1} j_G^h(\tilde{\beta}_{A^\tau} \tilde{\alpha}_A^\tau) = 1_{A^\tau},\end{aligned}$$

ya que  $\tilde{\beta}_{A^\tau} \tilde{\alpha}_A^\tau = \zeta_{A^\tau}$ . La otra composición es

$$\begin{aligned}(\beta_B \rtimes G) \alpha_{B \rtimes G} &= ((j_G^h(\zeta_B)^{-1} j_G^h(\tilde{\beta}_B)) \rtimes G) j^h(\alpha_{B \rtimes G}) \\ &= j^h(\zeta_B \rtimes G)^{-1} j^h((\tilde{\beta}_B \rtimes G) \alpha_{B \rtimes G}),\end{aligned}$$

así que basta probar que  $j^h((\tilde{\beta}_B \rtimes G) \alpha_{B \rtimes G}) = j^h(\zeta_B \rtimes G)$ .

En vista del Lema 2.3.10, podemos ver que  $\psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G) \alpha_{B \rtimes G}$  y  $\psi_B(\zeta_B \rtimes G) = \zeta_{B \rtimes G}$  tienen la misma imagen a través de  $j^h$ . Para ello podemos usar a su vez la Proposición

1.4.11, viendo que el primero de los morfismos coincide con la composición del segundo con cierta conjugación. Un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G)\alpha_{B \rtimes G}(b \rtimes g) &= \psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G) \left( \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} (b \rtimes g) \rtimes h \right) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \psi_B \tilde{\beta}_B(b \rtimes g) \rtimes h \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{s, h \in G} \psi_B((s \cdot b \otimes \varepsilon_{s,sg}) \rtimes h) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{s, h \in G} (s \cdot b \rtimes h) \otimes \varepsilon_{s, h^{-1}sg}. \end{aligned}$$

Al hacer el cambio de variables  $t = h^{-1}sg$ , se obtiene

$$\psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G)\alpha_{B \rtimes G}(b \rtimes g) = \frac{1}{|G|} \sum_{s, t \in G} (s \cdot b \rtimes sgt^{-1}) \otimes \varepsilon_{s,t}.$$

Considerando la unitalización  $\tilde{B}$  de  $B$  tenemos que

$$s \cdot b \rtimes sgt^{-1} = (\mathbf{1} \rtimes s)(b \rtimes g)(\mathbf{1} \rtimes t^{-1}),$$

y por lo tanto en  $M_G(\tilde{B} \rtimes G) \supseteq M_G(B \rtimes G)$  podemos escribir

$$(s \cdot b \rtimes sgt^{-1}) \otimes \varepsilon_{s,t} = (\mathbf{1} \rtimes s \otimes \varepsilon_{s,s})(b \rtimes g \otimes \varepsilon_{s,t})(\mathbf{1} \rtimes t^{-1} \otimes \varepsilon_{t,t}).$$

Notando  $u := \sum_{t \in G} (\mathbf{1} \rtimes t) \otimes \varepsilon_{t,t} \in M_G(\tilde{B} \rtimes G)$ , este elemento es unitario y

$$\psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G) = \text{ad}(u)\zeta_{B \rtimes G}$$

así que

$$j^h(\psi_B(\tilde{\beta}_B \rtimes G)\alpha_{B \rtimes G}) = j^h(\text{ad}(u)\zeta_{B \rtimes G}) = j^h(\zeta_{B \rtimes G}),$$

como buscábamos. ◆

Aplicando el teorema anterior a  $\ell$  con la acción trivial, obtenemos el siguiente corolario.

**Corolario 2.3.15.** *Sea  $G$  un grupo finito cuyo orden es inversible en  $\ell$ . Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra, entonces*

$$kk_G^h(\ell, A) \simeq kk^h(\ell, A \rtimes G) \simeq K^h H_0(A \rtimes G).$$
◆

### 2.3.3 INDUCCIÓN Y RESTRICCIÓN

Establecemos ahora la relación entre  $kk_H^h$  y  $kk_G^h$  cuando  $H$  es un subgrupo de  $G$ . Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra, restringiendo la acción de  $G$  a  $H$  obtenemos una estructura de  $H$ -\*-álgebra en  $A$ . Esto define un functor olvido  $\text{Res}_H^G$  que preserva extensiones semi-escindidas. Al componerlo con  $j_H^h$  obtenemos un functor  $G$ -estable, homotópicamente invariante, matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable. Por lo tanto, hay un único functor triangulado que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{Res}_H^G} & H - \text{Alg}_\ell^* \\ j_G^h \downarrow & & \downarrow j_H^h \\ kk_G^h & \xrightarrow{\text{Res}_H^G} & kk_H^h \end{array}$$

el cual denominaremos functor de *restricción*.

Siguiendo a [Eil14], definiremos un functor de *inducción*

$$\text{Ind}_H^G : H - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow G - \text{Alg}_\ell^*$$

y veremos que se extiende a un functor entre las  $K$ -teorías bivariantes hermitianas  $H$  y  $G$ -equivariantes.

**Definición 2.3.16.** Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Notemos  $\pi : G \rightarrow G/H$  a la proyección canónica. Dada una  $H$ -\*-álgebra  $A$ , se definen

$$A^{(G,H)} := \{f : G \rightarrow A : |\pi(\text{sop}(f))| < \infty\}$$

e

$$\text{Ind}_H^G(A) := \{f \in A^{(G,H)} : f(s) = h \cdot f(sh) \ (\forall s \in G, h \in H)\}.$$

Un cálculo directo muestra que esta última es una  $G$ -\*-álgebra con la multiplicación puntual, la acción

$$(g \cdot f)(s) := f(g^{-1}s)$$

y la involución  $(f^*)(s) := f(s)^*$  para cada  $g, s \in G$ . Se tiene un functor

$$\text{Ind}_H^G : H - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow G - \text{Alg}_\ell^*$$

definido en morfismos enviando  $\varphi : A \rightarrow B$  a  $\text{Ind}_H^G(\varphi)(f) := \varphi f$ , que preserva extensiones semi-escindidas.

**Ejemplo 2.3.17.** Si  $A = \ell$  con la acción trivial, entonces  $\ell = \text{Res}_G^H(\ell)$  e

$$\text{Ind}_H^G(\text{Res}_G^H(\ell)) = \text{Ind}_H^G(\ell) = \{f \in \ell^{(G,H)} : f(s) = f(sh) \ (\forall s \in G, h \in H)\} \simeq \ell^{(G/H)}.$$

*Observación 2.3.18.* Si  $f: G \rightarrow A$  es un elemento en  $\text{Ind}_H^G(A)$ , entonces para cada  $h \in H$  y  $g \in G$  es

$$f(gh) = h^{-1}f(g).$$

Por lo tanto, una tal función está determinada por sus valores en un sistema de representantes  $\mathcal{R}$  de  $G/H$ . Si para cada  $a \in A$  y  $g \in \mathcal{R}$  notamos

$$\xi(g, a) = \sum_{h \in H} (h^{-1} \cdot a) \chi_{gh}$$

a la función que vale 0 fuera de  $gH$  y  $h^{-1} \cdot a$  en cada elemento  $gh \in gH$ , entonces

$$f = \sum_{g \in \mathcal{R}} \xi(g, f(g))$$

y por lo tanto toda función de  $\text{Ind}_H^G(A)$  se escribe como

$$\sum_{g \in \mathcal{R}} \xi(g, a_g)$$

para ciertos  $\{a_g\}_{g \in G}$ . Observemos también que  $\xi(g, a)^* = \xi(g, a^*)$  y  $g' \cdot \xi(g, a) = \xi(g'g, a)$ .

A partir de esta observación, verificamos que los resultados técnicos de [Eil14] que relacionan  $\text{Ind}_H^G$  con  $\text{Res}_G^H$  respetan las involuciones.

**Proposición 2.3.19.** *Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra y  $B$  una  $H$ -\*-álgebra, es*

$$\text{Ind}_H^G(B \otimes \text{Res}_G^H A) \simeq \text{Ind}_H^G(B) \otimes A.$$

*Demostración.* Verificaremos que el isomorfismo de  $G$ -álgebras

$$S: \xi(g, b) \otimes a \in \text{Ind}_H^G(B) \otimes A \mapsto \xi(g, b \otimes g^{-1} \cdot a) \in \text{Ind}_H^G(B \otimes \text{Res}_G^H A)$$

definido en [Eil14, Proposition 6.7] respeta la involución. En efecto,

$$\begin{aligned} S(\xi(g, b) \otimes a)^* &= \xi(g, b \otimes g^{-1} \cdot a)^* = \xi(g, (b \otimes g^{-1} \cdot a)^*) \\ &= \xi(g, b^* \otimes g^{-1} \cdot a^*) = S(\xi(g, b^*) \otimes a^*) \\ &= S((\xi(g, b) \otimes a)^*). \end{aligned}$$

◆

Aplicando la proposición anterior y usando el Ejemplo 2.3.17 tenemos los siguientes corolarios.

**Corolario 2.3.20.** *Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra entonces*

$$\text{Ind}_H^G(\text{Res}_G^H(A)) \simeq \text{Ind}_H^G(\ell \otimes \text{Res}_G^H(A)) \simeq \ell^{(G/H)} \otimes A.$$

◆

**Corolario 2.3.21.** Si  $A$  es una  $*$ -álgebra y  $B$  una  $H$ - $*$ -álgebra, entonces tenemos un isomorfismo natural

$$\text{Ind}_H^G(B \otimes A^\tau) = \text{Ind}_H^G(B \otimes \text{Res}_G^H A^\tau) \simeq \text{Ind}_H^G(B) \otimes A^\tau.$$



Esto nos permite concluir que la composición

$$H - \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{\text{Ind}_H^G} G - \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{j_G^h} \text{kk}_G^h$$

es homotópicamente invariante, matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable, y por lo tanto se factoriza por  $j_{|H-\text{Alg}_\ell^*|}^h$ ,

$$\begin{array}{ccc} H - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{Ind}_H^G} & G - \text{Alg}_\ell^* \\ j_{|H-\text{Alg}_\ell^*|}^h \downarrow & & \downarrow j_G^h \\ \text{kk}_{|H-\text{Alg}_\ell^*|}^h & \dashrightarrow & \text{kk}_G^h \end{array}$$

El isomorfismo de  $H$ -conjuntos  $G/H \times H \simeq G$  induce un isomorfismo de  $H$ - $*$ -álgebras  $M_G \simeq M_{G/H} \otimes M_H$ , lo que junto con la Proposición 2.3.19 nos da isomorfismos naturales

$$M_G \text{Ind}_H^G(A) \simeq \text{Ind}_H^G(A \otimes \text{Res}_G^H(M_G)) \simeq \text{Ind}_H^G(A \otimes M_H \otimes M_{|G/H|}) \simeq M_{|G/H|} \text{Ind}_H^G(M_H A)$$

para cada  $H$ - $*$ -álgebra  $A$ . Notando  $i : \text{kk}_G^h \rightarrow \text{kk}_{G-\text{Alg}_\ell^*}^h$  al *embedding* canónico tenemos un isomorfismo natural

$$\begin{array}{ccc} H - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{Ind}_H^G} & G - \text{Alg}_\ell^* \\ M_H \otimes - \downarrow & \nearrow \simeq & \downarrow j_G^h \\ H - \text{Alg}_\ell^* & & \text{kk}_G^h \\ \text{Ind}_H^G \downarrow & & \downarrow i \\ G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{M_{G/H} \otimes -} G - \text{Alg}_\ell^* \xrightarrow{j_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h} & \text{kk}_{|G-\text{Alg}_\ell^*|}^h \end{array}$$

entre ambas composiciones. Esto nos dice que  $ij_G^h \text{Ind}_H^G$  coincide con un functor homotópicamente invariante, matricialmente estable y  $\iota_+$ -estable precompuesto por  $M_H \otimes -$ . En vista de la Proposición 2.1.18, se tiene que  $ij_G^h \text{Ind}_H^G$  es  $H$ -estable, y como  $i$  refleja isomorfismos, en definitiva  $j_H^h \text{Ind}_H^G$  es  $H$ -estable. Existe entonces un único functor triangulado que hace conmutar al siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} H - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{Ind}_H^G} & G - \text{Alg}_\ell^* \\ j_H^h \downarrow & & \downarrow j_G^h \\ \text{kk}_H^h & \dashrightarrow^{\text{Ind}_H^G} & \text{kk}_G^h \end{array}$$

**Teorema 2.3.22** (cf. [EII14, Theorem 6.1.4]). *Sea  $G$  un grupo y  $H$  un subgrupo de  $G$ . Se tiene una adjunción*

$$\begin{array}{ccc} & \text{Ind}_H^G & \\ \text{kk}_H^h & \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \perp \\ \curvearrowleft \end{array} & \text{kk}_G^h \\ & \text{Res}_H^G & \end{array}$$

con  $\text{Ind}_H^G$  adjunto a izquierda y  $\text{Res}_H^G$  adjunto a derecha.

*Demostración.* En pos de alivianar la notación, escribiremos  $\text{Res}$  e  $\text{Ind}$  para referirnos a los funtores de inducción y restricción. Construiremos transformaciones naturales

$$\beta : 1_{\text{kk}_H^h} \Rightarrow \text{Res Ind}, \quad \alpha : \text{Ind Res} \Rightarrow 1_{\text{kk}_G^h}$$

que satisfagan las identidades triangulares de unidad y counidad, esto es, que hagan conmutar a los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} \text{Ind}(B) & \xrightarrow{\text{Ind}(\beta_B)} & \text{Ind Res Ind}(B) \\ & \searrow 1_{\text{Ind } B} & \downarrow \alpha_{\text{Ind}(B)} \\ & & \text{Ind}(B) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \text{Res}(A) & \xrightarrow{\beta_{\text{Res}(A)}} & \text{Res Ind Res}(A) \\ & \searrow 1_{\text{Res}(A)} & \downarrow \text{Res}(\alpha_A) \\ & & \text{Res}(A) \end{array}$$

Para ello definiremos como en [EII14] endomorfismos naturales de  $G$  y  $H$ -\*-álgebras

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_A : \text{Ind}(\text{Res}(A)) &\rightarrow M_{G/H}A \\ \xi(g, a) &\mapsto \varepsilon_{gH, gH} \otimes g \cdot a \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_B : B &\rightarrow \text{Res}(\text{Ind}(B)) \\ b &\mapsto \xi(1, b) \end{aligned}$$

Veamos que preservan las involuciones. En efecto, es

$$\tilde{\alpha}_A(\xi(g, a)^*) = \tilde{\alpha}_A(\xi(g, a^*)) = \varepsilon_{gH, gH} \otimes g \cdot a^* = \tilde{\alpha}_A(\xi(g, a))^*$$

y

$$\tilde{\beta}_B(b^*) = \xi(1, b^*) = (\xi(1, b))^* = \tilde{\beta}_B(b)^*.$$

Además, se tiene que

$$\text{Res}(\tilde{\alpha}_A)\beta_{\text{Res}(A)}(a) = \text{Res}(\tilde{\alpha}_A)(\xi(1, a)) = \varepsilon_{H, H} \otimes a = \iota_{H, \text{Res}(A)}(a)$$

y

$$\tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)}\text{Ind}(\tilde{\beta}_B)(\xi(g, b)) = \tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)}(\xi(g, \xi(1, b))) = \varepsilon_{gH, gH} \otimes \xi(g, b).$$

Si consideramos el zigzag natural

$$A \xrightarrow{\iota_A} M_{G/H\sqcup*}(A) \xleftarrow{\iota'_A} M_{G/H}(A)$$

entre álgebras inducidas por G-conjuntos, como en (2.1.1), entonces

$$\text{Res}(\iota'_A)_{\iota_{H,\text{Res}(A)}}(\mathfrak{a}) = \varepsilon_{H,H} \otimes \mathfrak{a} \in M_{G/H\sqcup*}A.$$

Como H-álgebras, tanto  $M_{G/H}$  como  $M_{G/H\sqcup*}$  tienen acción trivial, así que por el Lema 1.4.5 la anterior composición y  $\text{Res}(\iota_A)$  tienen la misma imagen a través de  $j_H^h$ . Definiendo

$$\alpha_A := j_G^h(\iota_A)^{-1} j_G^h(\iota'_A \tilde{\alpha}_A), \quad \beta_B = j_H^h(\tilde{\beta}_B)$$

es

$$\begin{aligned} \text{Res}(\alpha_A) \beta_{\text{Res}(A)} &= j_H^h(\text{Res}(\iota_A))^{-1} j_H^h(\text{Res}(\iota'_A) \text{Res}(\tilde{\alpha}_A) \tilde{\beta}_{\text{Res}(A)}) \\ &= j_H^h(\text{Res}(\iota_A))^{-1} j_H^h(\text{Res}(\iota'_A)_{\iota_{H,\text{Res}(A)}}) \\ &= 1_{\text{Res}(A)}. \end{aligned}$$

Para terminar, veamos que

$$\alpha_{\text{Ind}(B)} \text{Ind}(\beta_B) = j_G^h(\iota_{\text{Ind}(B)})^{-1} j_G^h(\iota'_{\text{Ind}(B)} \tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)} \text{Ind}(\tilde{\beta}_B))$$

es la identidad de  $\text{Ind}(B)$  en  $\text{kk}_G^h$ , es decir, que tanto  $\iota_{\text{Ind}(B)}$  como  $\iota'_{\text{Ind}(B)} \tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)} \text{Ind}(\tilde{\beta}_B)$  representan el mismo morfismo en  $\text{kk}_G^h$ . Como antes, aplicando  $\text{Ind}$  a la igualdad  $j_H^h(\iota_{H,B}) = j_H^h(\text{Res}(\iota_B))$  es  $j_G^h(\text{Ind}(\iota_{H,B})) = j_G^h(\text{Ind}(\text{Res}(\iota_B)))$ . Si notamos

$$\Gamma: \xi(g, \varepsilon_{x,y} \otimes \mathfrak{a}) \in \text{Ind}(M_{G/H\sqcup*}A) \mapsto \varepsilon_{g^x, g^y} \otimes \xi(g, \mathfrak{a}) \in M_{G/H\sqcup*} \text{Ind}(A)$$

a la inversa del isomorfismo de la Proposición 2.3.19, tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma \text{Ind}(\iota_{H,B})(\xi(g, \mathfrak{b})) &= \Gamma(\xi(g, \varepsilon_{H,H} \otimes \mathfrak{b})) = \varepsilon_{g^H, g^H} \otimes \xi(g, \mathfrak{b}) \\ &= \iota'_{\text{Ind}(B)} \tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)} \text{Ind}(\tilde{\beta}_B)(\xi(g, \mathfrak{b})) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Gamma \text{Ind}(\text{Res}(\iota_B))(\xi(g, \mathfrak{b})) &= \Gamma(\xi(g, \varepsilon_{*,*} \otimes \mathfrak{b})) = \varepsilon_{g^{*,*}, g^{*,*}} \otimes \xi(g, \mathfrak{b}) \\ &= \varepsilon_{*,*} \otimes \xi(g, \mathfrak{b}) \\ &= \iota_{\text{Ind}(B)}(\xi(g, \mathfrak{b})). \end{aligned}$$

Aplicando  $j_G^h$  finalmente es

$$j_G^h(\iota'_{\text{Ind}(B)} \tilde{\alpha}_{\text{Ind}(B)} \text{Ind}(\tilde{\beta}_B)) = j_G^h(\Gamma \text{Ind}(\iota_{H,B})) = j_G^h(\Gamma \text{Ind}(\text{Res}(\iota_B))) = j_G^h(\iota_{\text{Ind}(B)}),$$

lo que concluye la demostración.  $\blacklozenge$

**Corolario 2.3.23.** Si  $A$  es una  $G$ -\*-álgebra y  $H$  un subgrupo finito de  $G$  cuyo orden es inversible en  $\ell$ , entonces

$$\text{kk}_G^h(\ell^{(G/H)}, A) \simeq \text{kk}_H^h(\ell, A) \simeq \text{kk}^h(\ell, A \rtimes H) \simeq K^h H_0(A \rtimes H).$$

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 2.3.22 al Ejemplo 2.3.17.  $\blacklozenge$

### 2.3.4 DUALIDAD DE BAAJ-SKANDALIS

En [BS89] Baaj y Skandalis definen los grupos de K-teoría bivariante de Kasparov para  $C^*$ -álgebras equipadas con una coacción de una  $C^*$ -álgebra de Hopf. Cuando el álgebra de Hopf en cuestión es  $C^*(G)$ , la  $C^*$ -álgebra de un grupo localmente compacto  $G$ , muestran que estos grupos son naturalmente isomorfos a los de la K-teoría de Kasparov  $G$ -equivariante.

En el caso de la K-teoría algebraica, Ellis prueba en [Ell14] que los funtores de producto cruzado inducen equivalencias inversas de categorías entre las K-teorías bivariantes equivariante y graduada. Como veremos a continuación, verificando que las construcciones utilizadas respetan las involuciones obtenemos una equivalencia de categorías entre  $kk_G^h$  y  $kk_G^h$ .

**Proposición 2.3.24** (cf. [Ell14, Proposition 7.4]). *Sea  $A$  una  $G$ - $*$ -álgebra y  $B$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.*

- (i) *Existe un isomorfismo natural de  $G$ - $*$ -álgebras  $G \widehat{\rtimes} (A \rtimes G) \simeq M_G A$ .*
- (ii) *Existe un isomorfismo natural de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas  $(G \widehat{\rtimes} B) \rtimes G \simeq M_G B$ .*

*Demostración.* Resta ver que los isomorfismos naturales

$$\Gamma(\chi_g \widehat{\rtimes} (a \rtimes s)) = g \cdot a \otimes \varepsilon_{g,gs}$$

y

$$\Phi((\chi_h \widehat{\rtimes} b) \rtimes s) = \sum_{r \in G} \varepsilon_{h,s^{-1}hr} \otimes b_r$$

definidos en [Ell14] respetan las involuciones. En efecto, es

$$\begin{aligned} \Gamma((\chi_g \widehat{\rtimes} (a \rtimes s))^*) &= \Gamma(\chi_{gs} \widehat{\rtimes} (a \rtimes s)^*) = \Gamma(\chi_{gs} \widehat{\rtimes} (s^{-1} \cdot a \rtimes s^{-1})) \\ &= (gs \cdot s^{-1} \cdot a^* \otimes \varepsilon_{gs,g}) = (g \cdot a^* \otimes \varepsilon_{gs,g}) \\ &= \Gamma(\chi_g \widehat{\rtimes} (a \rtimes s))^* \end{aligned}$$

y para cada  $b \in B$  homogéneo tenemos que

$$\begin{aligned} \Phi(((\chi_h \widehat{\rtimes} b) \rtimes s)^*) &= \Phi(s^{-1} \cdot (\chi_h \widehat{\rtimes} b)^* \rtimes s^{-1}) = \Phi(s^{-1} \cdot (\chi_{h|b|} \widehat{\rtimes} b^*) \rtimes s^{-1}) \\ &= \Phi((\chi_{s^{-1}h|b|} \rtimes b^*) \rtimes s^{-1}) = \varepsilon_{s^{-1}h|b|,h} \otimes b^* \\ &= \Phi((\chi_h \widehat{\rtimes} b) \rtimes s)^*. \end{aligned}$$

◆

**Teorema 2.3.25** (cf. [Ell14, Theorem 7.6]). *Los funtores  $- \rtimes G$  y  $G \widehat{\rtimes} -$  se extienden a funtores*

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{- \rtimes G} & \\ kk_G^h & & kk_G^h \\ & \xleftarrow{G \widehat{\rtimes} -} & \end{array}$$

que son equivalencias inversas entre las categorías  $kk_G^h$  y  $kk_{\widehat{G}}^h$ .

*Demostración.* Como  $- \rtimes G$  y  $G \widehat{\rtimes} -$  preservan extensiones semi-escindidas, componiendo con  $j_G^h$  y  $j_{\widehat{G}}^h$  son homotópicamente invariantes, matricialmente estables y  $\iota_+$ -estables. Por la Proposición 2.3.24 tenemos un zig-zag natural

$$G \widehat{\rtimes} (M_G(A)) \xrightarrow{\cong} G \widehat{\rtimes} ((G \widehat{\rtimes} A) \rtimes G) \xrightarrow{\cong} M_G(G \widehat{\rtimes} A) \xrightarrow{t'_{G \rtimes A}} M_{G \sqcup *}(G \widehat{\rtimes} A) \xleftarrow{t'_{G \widehat{\rtimes} A}} G \widehat{\rtimes} A$$

y todas las flechas son  $kk_G^h$ -isomorfismos, así que  $j_G^h(G \widehat{\rtimes} -)$  es  $\widehat{G}$ -estable. La  $G$ -estabilidad de  $j_{\widehat{G}}^h(- \rtimes G)$  se sigue del argumento dado en la demostración de la Proposición 2.3.12.

Existen por lo tanto únicos funtores triangulados entre  $kk_G^h$  y  $kk_{\widehat{G}}^h$  que hacen conmutar los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} G - \text{Alg}_{\ell}^* & \xrightarrow{- \rtimes G} & G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* & G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* & \xrightarrow{G \widehat{\rtimes} -} & G - \text{Alg}_{\ell}^* \\ j_G^h \downarrow & & \downarrow j_{\widehat{G}}^h & j_{\widehat{G}}^h \downarrow & & \downarrow j_{\widehat{G}}^h \\ kk_G^h & \xrightarrow{- \rtimes G} & kk_G^h & kk_{\widehat{G}}^h & \xrightarrow{G \widehat{\rtimes} -} & kk_{\widehat{G}}^h \end{array}$$

Ambas composiciones entre  $- \rtimes G$  y  $G \widehat{\rtimes} -$  son a su vez extensiones de las composiciones a nivel de  $*$ -álgebras, que por la Proposición 2.3.24 son naturalmente isomorfas a los endofuntores  $M_G: G - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow G - \text{Alg}_{\ell}^*$  y  $M_G: G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*$ . Resta notar que los funtores inducidos en  $kk_G^h$  y  $kk_{\widehat{G}}^h$  son naturalmente isomorfos a la identidad, por  $G$ -estabilidad y  $\widehat{G}$ -estabilidad respectivamente.  $\blacklozenge$

**Corolario 2.3.26.** Si  $A$  y  $B$  son  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas, entonces

$$kk_{\widehat{G}}^h(A, B) \simeq kk_{\widehat{G}}^h(G \widehat{\rtimes} A, G \widehat{\rtimes} A)$$

y en particular

$$kk_{\widehat{G}}^h(\ell, A) \simeq kk_{\widehat{G}}^h(\ell^{(G)}, G \widehat{\rtimes} A) \simeq K^h H_0(G \widehat{\rtimes} A).$$

$\blacklozenge$

### 2.3.5 FUNTORES DE OLVIDO E INVOLUCIONES LIBRES

Sea  $\ell_0$  un anillo conmutativo unital e  $\text{inv}(\ell_0)$  el anillo del Ejemplo 1.1.2. Si  $A$  es un  $\ell_0$ -álgebra, entonces  $\text{inv}(A) := A \times A^{\text{op}}$  es una  $\text{inv}(\ell_0)$ -álgebra y la asignación  $\text{inv}(f) := f \times f^{\text{op}}$  para cada morfismo  $f: A \rightarrow B$  define un functor

$$\text{inv}: \text{Alg}_{\ell_0} \rightarrow \text{Alg}_{\text{inv}(\ell_0)}^*$$

que es una equivalencia de categorías. La inversa envía una  $\text{inv}(\ell_0)$ - $*$ -álgebra  $B$  a  $(1, 0)B$  con la estructura de  $\ell_0$ -álgebra dada por  $\lambda \cdot (1, 0)b := (\lambda, 0)b$ .

Si tenemos una acción de  $G$  en  $A$ , la acción diagonal en  $A \times A^{\text{op}}$  hace de induce una en  $\text{inv}(A)$ , que hace de  $\text{inv}(f)$  un morfismo equivariante cuando  $f$  lo es. De igual forma, teniendo una  $G$ -graduación en  $A$  podemos definir una en  $\text{inv}(A)$  poniendo

$$\text{inv}(A)_g := A_g \times A_{g^{-1}},$$

y de esta manera  $\text{inv}(f)$  resulta homogéneo si  $f$  lo es. Se tienen por tanto equivalencias de categorías  $G - \text{Alg}_{\ell_0} \rightarrow G - \text{Alg}_{\text{inv}(\ell_0)}^*$  y  $G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell_0} \rightarrow G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\text{inv}(\ell_0)}^*$ , que también notaremos  $\text{inv}$ .

Aplicando lo anterior al  $*$ -anillo  $\ell$ , y componiendo con las restricciones de escalares inducidas por el  $*$ -morfismo de anillos  $\lambda \in \ell \mapsto (\lambda, \lambda^*) \in \text{inv}(\ell)$ , en definitiva se obtienen funtores

$$\text{st}_G: G - \text{Alg}_{\ell} \rightarrow G - \text{Alg}_{\ell}^*, \quad \text{st}_{G_{\text{gr}}}: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell} \rightarrow G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}^*$$

que son adjuntos a derecha de los funtores de olvido

$$\text{res}_G: G - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow G - \text{Alg}_{\ell}, \quad \text{res}_{G_{\text{gr}}}: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}.$$

Omitiremos el subíndice cuando la categoría ambiente se deduzca del contexto.

**Convención 2.3.27.** En pos de alivianar la notación, si  $\mathfrak{A}$  es la categoría de  $*$ -álgebras,  $G$ -álgebras, o álgebras  $G$ -graduadas notaremos  $\mathfrak{A}_{\text{res}}$  para la categoría asociada de álgebras sin involución.

Como en [CV21, Sección 9], los morfismos naturales de unidad y counidad de la adjunción  $\text{res} \dashv \text{st}$  son

$$\begin{array}{ll} \eta_A: A \rightarrow \text{st}(\text{res}(A)) & \pi: \text{res}(\text{st}(B)) \rightarrow B \\ a \mapsto (a, a^*) & (b, b') \mapsto b \end{array}$$

En [CV21, Proposition 9.2] se muestra que  $\text{res}$  y  $\text{st}$  inducen funtores entre  $\text{kk}$  y  $\text{kk}^h$  que son adjuntos a ambos lados. A continuación verificamos que el mismo resultado es cierto en el contexto de  $G$ -álgebras y álgebras  $G$ -graduadas.

**Lema 2.3.28.** *Sea  $A$  una  $*$ -álgebra y  $B$  una  $\ell$ -álgebra.*

(i) *Se tiene un isomorfismo natural*

$$\eta_{A,B}: x \otimes (b, c) \in A \otimes \text{st}(B) \mapsto (x \otimes b, x^* \otimes c) \in \text{st}(\text{res}(A) \otimes B)$$

*entre  $\text{st}(\text{res}(A) \otimes -)$  y  $A \otimes \text{st}(-)$ .*

(ii) *Si  $A$  y  $B$  son además  $G$ -álgebras, el morfismo  $\eta_{A,B}$  es equivariante.*

(iii) *Si  $B$  es  $G$ -graduada, el morfismo  $\eta_{M_G(A), B}: M_G(\text{st}(B)) \rightarrow \text{st}(M_G(B))$  es homogéneo con respecto a las graduaciones definidas en la Sección 2.1.*

*Demostración.* Por un cálculo directo, la aplicación  $(x, (b, c)) \mapsto (x \otimes b, x^* \otimes c)$  es bilineal  $\ell$ -balanceada, por lo que  $\eta_{A,B}$  está bien definido a nivel de  $\ell$ -módulos. Resulta además un  $*$ -morfismo, pues para cada par de tensores elementales  $x \otimes (b, c)$  y  $y \otimes (b', c')$  en  $A \otimes \text{st}(B)$  es

$$\begin{aligned} \eta_{A,B}(x \otimes (b, c))\eta_{A,B}(y \otimes (b', c')) &= (x \otimes b, x^* \otimes c)(y \otimes b', y^* \otimes c') \\ &= ((x \otimes b)(y \otimes b'), (y^* \otimes c')(x^* \otimes c)) \\ &= (xy \otimes bb', y^*x^* \otimes c'c) \\ &= \eta_{A,B}(xy \otimes (bb', c'c)) \\ &= \eta_{A,B}((x \otimes (b, c))(y \otimes (b', c'))) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_{A,B}((x \otimes (b, c))^*) &= \eta_{A,B}(x^* \otimes (c, b)) = (x^* \otimes c, x \otimes b) \\ &= (x \otimes b, x^* \otimes c)^* = \eta_{A,B}(x \otimes (b, c))^*. \end{aligned}$$

Su inversa es

$$(x \otimes b, y \otimes c) \mapsto x \otimes (b, 0) + y^* \otimes (0, c),$$

lo que termina de probar el primer inciso. Si además  $A$  y  $B$  son  $G$ -álgebras, para cada  $g \in G$  vemos que

$$\begin{aligned} \eta_{A,B}(g \cdot (x \otimes (b, c))) &= \eta_{A,B}(g \cdot x \otimes (g \cdot b, g \cdot c)) = (g \cdot x \otimes g \cdot b, g \cdot x^* \otimes g \cdot c) \\ &= (g \cdot (x \otimes b), g \cdot (x^* \otimes c)) = g \cdot (x \otimes b, x^* \otimes c) \\ &= g \cdot \eta_{A,B}(x \otimes (b, c)), \end{aligned}$$

lo que prueba (ii). Veamos ahora (iii). Si  $A = M_G$  y  $B$  es  $G$ -graduada, es

$$\begin{aligned} (M_G(\text{st}(B)))_g &= \text{span}_{\ell}\{\varepsilon_{s,t} \otimes (b, c) : (b, c) \text{ es homogéneo y } s|(b, c)|t^{-1} = g\} \\ &= \text{span}_{\ell}\{\varepsilon_{s,t} \otimes (b, c) : b \text{ es homogéneo y } |c| = |b|^{-1}, s|b|t^{-1} = g\} \end{aligned}$$

y

$$\text{st}(M_G(B))_g = M_G(B)_g \times M_G(B)_{g^{-1}}.$$

Tomando  $\varepsilon_{s,t} \otimes (b, c) \in M_G(\text{st}(B))$  un generador homogéneo de grado  $g \in G$  se tiene entonces que

$$\eta_{M_G, B}(\varepsilon_{s,t} \otimes (b, c)) = (\varepsilon_{s,t} \otimes b, \varepsilon_{t,s} \otimes c)$$

es homogéneo, pues  $|\varepsilon_{t,s} \otimes c|^{-1} = (t|c|s^{-1})^{-1} = s|c|^{-1}t^{-1} = s|b|t^{-1} = |\varepsilon_{s,t} \otimes b|$ , y de grado  $g$  ya que  $|\eta_{M_G, B}(\varepsilon_{s,t} \otimes (b, c))| = |\varepsilon_{s,t} \otimes b| = s|b|t^{-1} = g$ . Esto concluye la demostración.  $\blacklozenge$

**Proposición 2.3.29.** *Existen únicos funtores triangulados que hacen conmutar los siguientes diagramas*

$$\begin{array}{ccc}
G - \text{Alg}_\ell & \xrightarrow{\text{st}} & G - \text{Alg}_\ell^* & G - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{res}} & G - \text{Alg}_\ell \\
j_G \downarrow & & \downarrow j_G^h & j_G^h \downarrow & & \downarrow j_G \\
kk_G & \xrightarrow{\text{st}} & kk_G^h & kk_G^h & \xrightarrow{\text{res}} & kk_G
\end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
G_{gr} - \text{Alg}_\ell & \xrightarrow{\text{st}} & G_{gr} - \text{Alg}_\ell^* & G_{gr} - \text{Alg}_\ell^* & \xrightarrow{\text{res}} & G_{gr} - \text{Alg}_\ell \\
j_{\widehat{G}} \downarrow & & \downarrow j_{\widehat{G}}^h & j_{\widehat{G}}^h \downarrow & & \downarrow j_{\widehat{G}} \\
kk_{\widehat{G}} & \xrightarrow{\text{st}} & kk_{\widehat{G}}^h & kk_{\widehat{G}}^h & \xrightarrow{\text{res}} & kk_{\widehat{G}}
\end{array}$$

*Demostración.* Observemos en primer lugar que tanto  $\text{res}$  como  $\text{st}$  preservan sucesiones semi-escindidas. El Lema 2.3.28 nos dice que para cada  $A \in \mathfrak{A}_{\text{res}}$  y cada par de  $G$ -conjuntos o conjuntos  $G$ -graduados  $X, Y$  tenemos diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccccc}
\text{st}(A) & \xrightarrow{\text{st}(\iota_A)} & \text{st}(A[t]) & \text{st}(A) & \xrightarrow{\text{st}(\iota_{X,A})} & \text{st}(M_X A) & \text{st}(M_X A) & \xrightarrow{\text{st}(1_A \otimes \text{inc})} & \text{st}(A \otimes M_{X \sqcup Y} A) \\
\searrow \iota_{\text{st}(A)} & & \downarrow \simeq & \searrow \iota_{X, \text{st}(A)} & & \downarrow \simeq & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
& & \text{st}(A)[t] & & & M_X \text{st}(A) & \text{st}(A) \otimes M_X A & \xrightarrow{1_{\text{st}(A)} \otimes \text{inc}} & \text{st}(A) \otimes M_{X \sqcup Y} A
\end{array}$$

Al postcomponer con  $j_G^h$  y  $j_{\widehat{G}}^h$ , la estabilidad de estos funtores junto con lo anterior nos dice que  $j_G^h \text{st}$  y  $j_{\widehat{G}}^h \text{st}$  son teorías de homología escisivas homotópicamente invariantes, matricialmente estables, y  $G$  y  $\widehat{G}$ -estables en cada caso. Por lo tanto, se factorizan de forma única a través de  $j_G$  y  $j_{\widehat{G}}$ , como afirmamos. De forma similar, el isomorfismo natural  $\text{res}(- \otimes -) \simeq \text{res}(-) \otimes \text{res}(-)$  nos dice que los funtores de restricción inducen funtores entre las  $K$ -teorías bivariantes.  $\blacklozenge$

**Teorema 2.3.30** (cf. [CV21, Proposition 9.2]). *Se tienen adjunciones*

$$\begin{array}{ccc}
& \xrightarrow{\text{res}} & \\
kk_G^h & & kk_G \\
& \xleftarrow{\text{st}} & \\
& \xrightarrow{\text{res}} & \\
kk_{\widehat{G}}^h & & kk_{\widehat{G}} \\
& \xleftarrow{\text{st}} &
\end{array}$$

donde en ambos casos  $\text{st}$  es adjunto tanto a izquierda como a derecha de  $\text{res}$ .

*Demostración.* En ambos casos  $\text{res}$  es adjunto a izquierda de  $\text{st}$  ya que lo mismo es cierto para los funtores a nivel de álgebras. En [CV21, Proposition 9.2] se prueba la otra adjunción verificando que hay morfismos naturales

$$B \xrightarrow{j(\phi_B)} \text{res}(\text{st}(B)), \quad \text{st}(\text{res}(A)) \xrightarrow{j^h(\psi_A)} {}_1M_2A \xleftarrow{j^h(\text{can}_1 M_2)^{-1}} A$$

inducidos por morfismos de  $*$ -álgebras

$$\psi_B: b \in B \mapsto (b, 0) \in \text{res}(\text{st}(B)), \quad \phi_A: (x, y) \in \text{st}(\text{res}(A)) \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^* \end{pmatrix} \in {}_1M_2A$$

satisfacen las identidades de unidad y counidad.

Esto último se reduce a verificar que ciertas composiciones de morfismos coinciden a nivel de álgebras. Por tanto, el mismo argumento funciona en este caso, una vez que hayamos visto que  $\psi_B$  y  $\phi_A$  son morfismos equivariantes u homogéneos según corresponda.

Si  $A$  y  $B$  son  $G$ -álgebras, entonces  $\psi_B$  y  $\phi_A$  son equivariantes ya que

$$\psi_B(g \cdot b) = (g \cdot b, 0) = (g \cdot b, g \cdot 0) = g \cdot (b, 0) = g \cdot \psi_B(b)$$

y

$$\phi_A(g \cdot (x, y)) = \phi_A(g \cdot x, g \cdot y) = \begin{pmatrix} gx & 0 \\ 0 & (gy)^* \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y^* \end{pmatrix} = g \cdot \phi_A(x, y)$$

para todo  $(x, y) \in \text{st}(\text{res}(A))$  y  $b \in B$ . Por último si  $A$  y  $B$  son álgebras  $G$ -graduadas y  $(x, y) \in \text{st}(\text{res}(A))$ ,  $b \in B$  son homogéneos de grado  $g \in G$ , entonces

$$\psi_B(b) = (b, 0) \in B_g \times B_{g^{-1}} = \text{res}(\text{st}(B))_g$$

y

$$\phi_A(x, y) = \varepsilon_{11} \otimes x + \varepsilon_{22} \otimes y^* \in ({}_1M_2A)_g,$$

ya que

$$|\varepsilon_{11} \otimes x| = |x| = g = |y|^{-1} = |y^*| = |\varepsilon_{22} \otimes y^*|.$$

◆

Concluimos esta sección observando la representabilidad de  $\text{kk}_G$  y  $\text{kk}_{\widehat{G}}$ , como se hace en [CV21] para  $\text{kk}$ .

**Definición 2.3.31.** Se define la  $*$ -álgebra  $\Lambda$  como el  $\ell$ -módulo  $\ell \oplus \ell$  con el producto coordenada a coordenada y la involución  $(x, y)^* = (y^*, x^*)$ . Esta álgebra viene equipada de un  $*$ -automorfismo

$$t: (x, y) \in \Lambda \mapsto (y, x) \in \Lambda. \quad (2.3.32)$$

Para cada  $G$ - $*$ -álgebra  $B$  la acción diagonal hace de  $\Lambda B$  una  $G$ - $*$ -álgebra. Similarmente, una  $G$ -graduación en  $B$  induce una en  $\Lambda B$  poniendo  $(\Lambda B)_g = \Lambda(B_g)$ . Además, con estas definiciones el morfismo  $t_B := t \otimes 1_B: \Lambda B \rightarrow \Lambda B$  es equivariante y homogéneo en cada caso. Notemos también que como  $\Lambda$  es un  $\ell$ -módulo playo, preserva sucesiones exactas semi-escindidas y por lo tanto define un endofunctor entre las respectivas  $K$ -teorías bivariantes hermitianas.

*Observación 2.3.33.* En [CV21, Remark 9.7] se observa que hay un isomorfismo natural

$$\text{kk}^h(-, \Lambda \otimes -) \simeq \text{kk}(\text{res}(-), \text{res}(-)) \simeq \text{kk}^h(\Lambda \otimes -, -).$$

La demostración consiste en notar que hay un isomorfismo natural

$$(x, y) \in \Lambda B \mapsto (x, y^*) \in \text{st}(\text{res}(B))$$

para cada  $*$ -álgebra  $B$ , y luego usar la adjunción entre  $st$  y  $res$ . Por como definimos la acción y graduación en  $\Lambda B$ , este mismo morfismo induce un isomorfismo natural  $\Lambda \otimes - \Rightarrow st \text{ res}$  en  $G - Alg_\ell^*$  y  $G_{gr} - Alg_\ell^*$  respectivamente. En consecuencia, se obtienen isomorfismos naturales

$$kk_G^h(-, \Lambda \otimes -) \simeq kk_G(\text{res}(-), \text{res}(-)) \simeq kk_G^h(\Lambda \otimes -, -)$$

y

$$kk_G^h(-, \Lambda \otimes -) \simeq kk_{\widehat{G}}(\text{res}(-), \text{res}(-)) \simeq kk_{\widehat{G}}^h(\Lambda \otimes -, -).$$

En particular, de aquí se deduce que para toda  $*$ -álgebra unital  $R \in \mathfrak{A}_1$  y unidad  $\epsilon$ -hermitiana  $\phi \in R^\times$  - de grado central o  $G$ -invariante - se tiene que  $\Lambda R^\phi \simeq \Lambda R$ . Más aún, se puede verificar por un cálculo directo que

$$\text{ad}(1, \phi^{-1}): \Lambda R \rightarrow \Lambda R^\phi \quad (2.3.34)$$

es un tal isomorfismo. En particular, para cada  $\epsilon \in \ell$  hermitiano tenemos un isomorfismo

$$\text{ad}(1, h_\epsilon^{-1}): \Lambda M_2 \rightarrow \Lambda_\epsilon M_2. \quad (2.3.35)$$

## 2.4. El teorema fundamental de Karoubi

El isomorfismo natural entre  $\Lambda \otimes -$  y  $st \text{ res}$  de la Observación 2.3.33 identifica la unidad de la adjunción  $res \vdash st$  y el morfismo  $\phi = \phi_\ell$  del Teorema 2.3.30 que induce la counidad de la adjunción  $st \vdash res$  con morfismos

$$\begin{aligned} \phi: \Lambda &\longrightarrow {}_1M_2\ell & \eta: \ell &\longrightarrow \Lambda \\ (x, y) &\mapsto \epsilon_{1,1} \otimes x + \epsilon_{2,2} \otimes y & x &\mapsto (x, x) \end{aligned}$$

En particular, se tienen inducidos mapas

$$kk_G^h(A, \Lambda B) \xrightarrow{\phi_*} kk_G^h(A, {}_1M_2B), \quad kk_G^h(A, B) \xrightarrow{\eta_*} kk_G^h(A, \Lambda B)$$

y

$$kk_{\widehat{G}}^h(A, \Lambda B) \xrightarrow{\phi_*} kk_{\widehat{G}}^h(A, {}_1M_2B), \quad kk_{\widehat{G}}^h(A, B) \xrightarrow{\eta_*} kk_{\widehat{G}}^h(A, \Lambda B).$$

postcomponiendo por  $\phi \otimes 1_B$  y  $\eta \otimes 1_B$  respectivamente.

En base a las identificaciones de la Observación 2.3.33 y los Teoremas 1.7.9 y 1.7.14, los anteriores morfismos son una generalización bivariante del morfismo de olvido

$$K_0^h(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{forg}} K_0(\mathbb{R}) \quad (2.4.1)$$

y el morfismo hiperbólico

$$K_0(\mathbb{R}) \xrightarrow{\text{hyp}} K_0^h(\mathbb{R}). \quad (2.4.2)$$

A partir de las fibras homotópicas  $U = P_\phi$  y  $V = P_\eta$ , tanto  $\phi$  como  $\eta$  conforman triángulos distinguidos que son parte de los siguientes morfismos de extensiones

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega({}_1M_2) & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \Lambda \\
 \parallel & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \phi \\
 \Omega({}_1M_2) & \longrightarrow & P({}_1M_2) & \xrightarrow{\text{ev}_1} & {}_1M_2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccccc}
 \Omega\Lambda & \longrightarrow & V & \longrightarrow & \ell \\
 \parallel & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \eta \\
 \Omega\Lambda & \longrightarrow & P\Lambda & \xrightarrow{\text{ev}_1} & \Lambda
 \end{array}$$

Más aún, dado que  $U$  y  $V$  son  $\ell$ -módulos playos y tensorizar preserva pullbacks, los funtores  $U = U \otimes -$  y  $V = V \otimes -$  definen endofuntores a nivel de las K-teorías bivariantes hermitianas y se tienen morfismos de extensiones

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega({}_1M_2A) & \longrightarrow & UA & \longrightarrow & \Lambda A \\
 \parallel & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \phi \otimes 1 \\
 \Omega({}_1M_2A) & \longrightarrow & P({}_1M_2A) & \xrightarrow{\text{ev}_1} & {}_1M_2A
 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega\Lambda A & \longrightarrow & VA & \longrightarrow & A \\
 \parallel & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \eta \otimes 1 \\
 \Omega\Lambda A & \longrightarrow & P\Lambda A & \xrightarrow{\text{ev}_1} & \Lambda A
 \end{array}$$

para cada  $A \in \mathfrak{A}$ .

### 2.4.1 LAS RELACIONES ENTRE LOS FUNTORES $U$ , $V$ Y $\Lambda$

En  $kk^h$  tenemos un producto natural, bilineal y asociativo

$$\otimes: kk^h(A_1, A_2) \times kk^h(B_1, B_2) \rightarrow kk^h(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$$

compatible con la composición, siempre que  $A_1 \otimes -$  y  $A_2 \otimes -$  preserven extensiones semi-escindidas. Para morfismos representados por morfismos de álgebras, coincide con el producto tensorial usual.

Veremos a continuación que la misma construcción se adapta a  $kk_G^h$ . Por la Observación 1.1.14, cuando  $G$  es abeliano el producto tensorial de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas es a su vez  $G$ -graduado. En tal caso, o cuando  $A_1$  y  $A_2$  vengan equipadas con la graduación trivial, el mismo argumento nos dará un producto en  $kk_G^h$ .

**Lema 2.4.3.** *Para cada  $A_1, A_2, B_1, B_2 \in G - \text{Alg}_\ell^*$  existe un producto natural, bilineal y asociativo*

$$\otimes: kk_G^h(A_1, A_2) \times kk_G^h(B_1, B_2) \rightarrow kk_G^h(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$$

*compatible con la composición. Para morfismos que son imagen de un morfismo de álgebras, coincide con el producto tensorial compuesto por  $j_G^h$ .*

*Demostración.* Consideramos los endofuntores  $A_i \otimes -$  y  $- \otimes A_i$  de  $G - \text{Alg}_\ell^*$  dados por tensorizar contra  $A_1$  y  $A_2$ . Observemos que estos preservan secciones  $\ell$ -lineales, así que por la Observación 1.5.5 preservan cualquier elección de extensiones semi-escindidas.

En particular, se tienen inducidos endofuntores de  $kk_G^h$  que notaremos de igual forma. Para cada par de morfismos  $f: A_1 \rightarrow A_2, g: B_1 \rightarrow B_2$   $G$ -\*-álgebras, es

$$(A_2 \otimes g) \circ (f \otimes B_1) = (f \otimes B_2) \circ (A_1 \otimes g).$$

Con el mismo argumento que en la Observación 1.7.17, aplicando sucesivas veces el functor  $\Omega$  de ser necesario la anterior igualdad nos dice más generalmente que un morfismo  $\alpha: A_1 \rightarrow A_2$  en  $kk_G^h$  induce una transformación natural  $\alpha \otimes 1: A_1 \otimes - \Rightarrow A_2 \otimes -$ . Para cada  $\beta \in kk_G^h(B_1, B_2)$  definimos entonces el producto de  $\alpha$  y  $\beta$  como  $\alpha \otimes \beta := (\alpha \otimes B_2) \circ (A_1 \otimes \beta)$ . Por lo dicho, la anterior composición también coincide con  $(A_1 \otimes \beta) \circ (\alpha \otimes B_1)$ . Por construcción se tiene que  $j_G^h(f) \otimes j_G^h(g) = j_G^h(f \otimes g)$ . Una verificación directa muestra que esta definición es bilineal, asociativa y compatible con la composición.  $\blacklozenge$

**Lema 2.4.4.** *Sean  $A_1, A_2 \in G_{gr} - Alg_\ell^*$ . Si la graduación en  $A_1$  y  $A_2$  es trivial o  $G$  es abeliano, para cada  $B_1, B_2 \in G_{gr} - Alg_\ell^*$  existe un producto natural, bilineal y asociativo*

$$\otimes: kk_G^h(A_1, A_2) \times kk_G^h(B_1, B_2) \rightarrow kk_G^h(A_1 \otimes B_1, A_2 \otimes B_2)$$

*compatible con la composición. Para morfismos que son imagen de un morfismo de álgebras, coincide con el producto tensorial compuesto por  $j_G^h$ .*  $\blacklozenge$

*Demostración.* Al ser  $G$  abeliano o  $A_1$  y  $A_2$  trivialmente graduadas, tensorizar contra estas álgebras define endofuntores de  $kk_G^h$ . Por lo tanto, el mismo argumento que en el Lema 2.4.3 funciona en el presente caso.  $\blacklozenge$

En [CV21] se describen distintos  $kk^h$ -isomorfismos naturales que relacionan los funtores  $U, V, \wedge, \Omega$  y  $\Sigma$  entre sí. En particular equipando a estas álgebras con la acción o graduación trivial, tenemos inducidos isomorfismos entre ellas en  $kk_G^h$  y  $kk_G^h$ . En particular, estos isomorfismos definen distintos isomorfismos naturales entre los endofuntores dados por tensorizar por cada una de las álgebras consideradas; pasamos a enunciarlos. Por lo observado, sus demostraciones se reducen a isomorfismos entre álgebras como objetos de  $kk^h$ , los cuales se pueden consultar en [CV21, Section 10, Section 11].

**Proposición 2.4.5** (cf. [CV21, Lemma 10.2, Lemma 10.8]). *Sea  $A$  una  $G$ -\*-álgebra y  $B$  una \*-álgebra  $G$ -graduada. Hay isomorfismos naturales*

$$j_G^h(U\wedge A) \simeq j_G^h(\wedge A), \quad j_G^h(V\wedge A) \simeq j_G^h(\Omega\wedge A), \quad j_G^h(\Sigma VU A) \simeq j_G^h(A), \quad j_G^h(VU A) \simeq j_G^h(\Omega A)$$

y

$$j_G^h(U\wedge B) \simeq j_G^h(\wedge B), \quad j_G^h(V\wedge B) \simeq j_G^h(\Omega\wedge B), \quad j_G^h(\Sigma VU B) \simeq j_G^h(B), \quad j_G^h(VU B) \simeq j_G^h(\Omega B).$$

$\blacklozenge$

El siguiente teorema y su corolario dan una versión bivariante del teorema fundamental de Karoubi para la  $K$ -teoría hermitiana, que relaciona las fibras homotópicas de los mapas hiperbólico y de olvido.

**Teorema 2.4.6** (cf. [CV21, Theorem 11.3]). *Existen isomorfismos*

$$\theta_A = \theta \otimes 1_A: j_G^h(A) \xrightarrow{\cong} j_G^h(-_1M_2U^{\otimes 2}A)$$

y

$$\theta_B = \theta \otimes 1_B: j_G^h(B) \xrightarrow{\cong} j_G^h(-_1M_2U^{\otimes 2}B)$$

para toda  $A \in G - \text{Alg}_\ell^*$  y  $B \in G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ .  $\blacklozenge$

**Corolario 2.4.7** (cf. [CV21, Corollary 11.4]). *Sea  $\epsilon \in \ell$  un elemento unitario. Para cada  $A \in G - \text{Alg}_\ell^*$  y  $B \in G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$  tenemos isomorfismos*

$$j_G^h(\Sigma_\epsilon M_2VA) \simeq j_G^h(-_\epsilon M_2UA), \quad j_G^h(\Sigma_\epsilon M_2VB) \simeq j_G^h(-_\epsilon M_2UB).$$

$\blacklozenge$

### 2.4.2 LA SUCESIÓN EXACTA DE DOCE TÉRMINOS

Si  $R$  es un  $*$ -anillo unital, su *grupo de Witt* es el conúcleo

$$W(R) := \text{coker} \left( K_0(R) \xrightarrow{\text{hyp}} K_0^h(R) \right) \quad (2.4.8)$$

y su *cogruppo de Witt*

$$W'(R) := \text{ker} \left( K_0^h(R) \xrightarrow{\text{forg}} K_0(R) \right). \quad (2.4.9)$$

En [Kar80, Théorème 4.3] Karoubi exhibe, en un contexto más general, una sucesión exacta de doce términos que relaciona los (co)grupos de Witt con la cohomología de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  con coeficientes en  $K_0(R)$ , donde la acción en este último es la inducida por la estructura de  $*$ -anillo. Se construye en [CV21, Theorem 12.2] una generalización bivalente de esta sucesión en  $kk^h$ . Veremos que el mismo argumento define sucesiones exactas en  $kk_G^h$  y  $kk_{\widehat{G}}^h$ , para lo cual precisamos dar primero algunas definiciones y resultados auxiliares.

**Definición 2.4.10.** Si  $\epsilon \in \ell$  es un elemento unitario, definimos

$${}_\epsilon kk_G^h(-, -) := kk_G^h(-, {}_\epsilon M_2 \otimes -), \quad {}_\epsilon kk_{\widehat{G}}^h(-, -) := kk_{\widehat{G}}^h(-, {}_\epsilon M_2 \otimes -).$$

Observemos que a partir del isomorfismo (2.3.35) tenemos un isomorfismo

$$u_\epsilon: {}_\epsilon M_2 \wedge B \xrightarrow{\cong} \wedge_\epsilon M_2 B \xrightarrow{(2.3.35)} \wedge M_2 B \xrightarrow{\iota_1^{-1}} \wedge B$$

en  $kk_G^h$  y  $kk_{\widehat{G}}^h$ . En particular, esto induce isomorfismos

$$(u_\epsilon)_*: {}_\epsilon kk_G^h(A, \wedge B) \xrightarrow{\cong} kk_G^h(A, \wedge B), \quad (u_\epsilon)_*: {}_\epsilon kk_{\widehat{G}}^h(A, \wedge B) \xrightarrow{\cong} kk_{\widehat{G}}^h(A, \wedge B)$$

para cada  $A, B \in \mathfrak{A}$ .

Observación 2.4.11. Sea  $A \in \mathfrak{A}$ . Observemos que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda & \xrightarrow{\iota_1} & \Lambda M_2 & \xrightarrow{\text{ad}(1, h_\epsilon^{-1})} & \Lambda_{-1} M_2 \\ \downarrow t & & & & \downarrow t \\ \Lambda & \xrightarrow{\iota_2} & \Lambda M_2 & \xrightarrow{\text{ad}(1, h_\epsilon^{-1})} & \Lambda_{-1} M_2 \end{array}$$

En efecto, tenemos que

$$\text{ad}(1, h_\epsilon^{-1}) \iota_2 t(x, y) = \text{ad}(1, h_\epsilon^{-1})(\epsilon_{22} \otimes (y, x)) = \epsilon_{22} \otimes (y, 0) + \epsilon_{11} \otimes (0, x)$$

lo cual coincide con

$$\begin{aligned} t \text{ad}(1, h_\epsilon^{-1}) \iota_1(x, y) &= t \text{ad}(1, h_\epsilon^{-1})(\epsilon_{11} \otimes (x, y)) = t(\epsilon_{11} \otimes (x, 0) + \epsilon_{22} \otimes (0, y)) \\ &= \epsilon_{11} \otimes (0, x) + \epsilon_{22} \otimes (y, 0). \end{aligned}$$

Como a nivel de las  $\mathcal{K}$ -teorías bivariantes  $\iota_1$  y  $\iota_2$  son iguales, esto nos permite decir que en estas categorías es  $t_{\Lambda} u_\epsilon = u_\epsilon t_{-1M_2A}$ .

**Definición 2.4.12.** Para cada  $A, B \in \mathfrak{A}$  definimos los *grupos de Witt bivariantes*

$$\begin{aligned} {}_\epsilon W_G(A, B) &:= \text{coker}({}_\epsilon \text{kk}_G^h(A, \Lambda B) \xrightarrow{\bar{\phi}_{B^*}} {}_\epsilon \text{kk}_G^h(A, B)), \\ {}_\epsilon W_{\hat{G}}(A, B) &:= \text{coker}({}_\epsilon \text{kk}_{\hat{G}}^h(A, \Lambda B) \xrightarrow{\bar{\phi}_{B^*}} {}_\epsilon \text{kk}_{\hat{G}}^h(A, B)) \end{aligned}$$

donde  $\bar{\phi}_B$  es el morfismo  $j_G^h(i_1)^{-1} j_G^h(\phi_B)$  y  $j_{\hat{G}}^h(i_1)^{-1} j_{\hat{G}}^h(\phi_B)$  en cada caso, notando  $i_1: B \rightarrow {}_1M_2B$  al mapa que se corresponde con  $\iota_+$  bajo el isomorfismo (1.4.16). Se definen también los *cogrupos de Witt bivariantes*,

$$\begin{aligned} {}_\epsilon W'_G(A, B) &:= \ker({}_\epsilon \text{kk}_G^h(A, B) \xrightarrow{\eta_{B^*}} {}_\epsilon \text{kk}_G^h(A, \Lambda B)), \\ {}_\epsilon W'_{\hat{G}}(A, B) &:= \ker({}_\epsilon \text{kk}_{\hat{G}}^h(A, B) \xrightarrow{\eta_{B^*}} {}_\epsilon \text{kk}_{\hat{G}}^h(A, \Lambda B)). \end{aligned}$$

Probaremos ahora una serie de resultados que relacionan los morfismos que interactúan en las definiciones de (co)grupos de Witt.

**Lema 2.4.13.** Si para cada  $B \in \mathfrak{A}$  definimos

$$\mathbf{diag}: b \in B \mapsto \epsilon_{11} \otimes b + \epsilon_{22} \otimes b \in M_2B,$$

notando  $\Delta: B \rightarrow B \oplus B$  al mapa diagonal el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \Lambda B & \xrightarrow{\phi_B} & {}_1M_2B & \xrightarrow{{}_1M_2\eta_B} & {}_1M_2\Lambda B \\ \Delta \downarrow & & & & \downarrow (2.3.35) \\ \Lambda B \oplus \Lambda B & \xrightarrow{\text{id} \oplus t} & \Lambda B \oplus \Lambda B & \xrightarrow{\mathbf{diag}} & M_2B \end{array}$$

*Demostración.* Procedemos por un cálculo directo. Por un lado, es

$$\begin{aligned} \mathbf{diag}(\mathrm{id} \oplus t)\Delta(x, y) &= \mathbf{diag}(\mathrm{id} \oplus t)((x, y), (x, y)) \\ &= \mathbf{diag}((x, y), (y, x)) \\ &= \varepsilon_{11} \otimes (x, y) + \varepsilon_{22} \otimes (y, x) \end{aligned}$$

para cada  $(x, y) \in \Lambda B$ , y por otro

$$({}_1M_2\eta_B)\phi_B(x, y) = ({}_1M_2\eta_B)(\varepsilon_{11} \otimes x + \varepsilon_{22} \otimes y) = \varepsilon_{11} \otimes (x, x) + \varepsilon_{2,2} \otimes (y, y).$$

Ahora, observemos que el isomorfismo (2.3.35) dado por  $\mathrm{ad}(1, h_1)$  envía  $\varepsilon_{jj} \otimes (x, y)$  a  $\varepsilon_{jj} \otimes (x, 0) + \varepsilon_{3-j, 3-j} \otimes (0, y)$ , así que efectivamente

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}(1, h_1)({}_1M_2\eta_B)\phi_B(x, y) &= \mathrm{ad}(1, h_1)(\varepsilon_{11} \otimes (x, x) + \varepsilon_{2,2} \otimes (y, y)) \\ &= \varepsilon_{11} \otimes (x, 0) + \varepsilon_{2,2} \otimes (0, x) + \varepsilon_{2,2} \otimes (y, 0) + \varepsilon_{1,1} \otimes (0, y) \\ &= \varepsilon_{11} \otimes (x, y) + \varepsilon_{2,2} \otimes (y, x) \\ &= \mathbf{diag}(\mathrm{id} \oplus t)\Delta(x, y) \end{aligned}$$

.

◆

**Corolario 2.4.14.** *Para cada  $A \in G - \mathrm{Alg}_\ell^*$  y  $B \in G_{\mathrm{gr}} - \mathrm{Alg}_\ell^*$  se tiene que*

$$u_1 j_G^h ({}_1M_2\eta_A \phi_A) = \mathrm{id}_{\Lambda A} + j_G^h(t_A)$$

y

$$u_1 j_G^h ({}_1M_2\eta_B \phi_B) = \mathrm{id}_{\Lambda B} + j_G^h(t_B).$$

*Demostración.* Lo probamos para  $\mathrm{kk}_G^h$ , ya que el otro caso es idéntico, y omitimos escribir  $j_G^h$  para alivianar la notación. Por el Lema 2.4.13, sabemos que

$$u_1 ({}_1M_2\eta_A)\phi_A = \iota_1^{-1} \mathrm{ad}(1, h_1)({}_1M_2\eta_A)\phi_A = \iota_1^{-1} \mathbf{diag}(\mathrm{id} \oplus t)\Delta$$

Notemos que  $j_G^h$  se factoriza a través de  $M_G \otimes -$ , que preserva productos, y  $j_{|G-\mathrm{Alg}_\ell^*|}^h$  que es aditivo por el mismo argumento que en [CV21, Section 7]. Con estas hipótesis y usando que ambas inclusiones  $\iota_1, \iota_2: \Lambda A \rightarrow M_2\Lambda A$  inducen la misma flecha en  $\mathrm{kk}_G^h$ , vemos que la composición  $\iota_1^{-1} \mathbf{diag}$  coincide con el mapa codiagonal

$$\nabla: \Lambda A \oplus \Lambda A \rightarrow \Lambda A$$

y así  $u_1 ({}_1M_2\eta_A)\phi_A = \nabla(\mathrm{id} \oplus t)\Delta$ .

Resta notar que en una categoría aditiva - como lo es  $\mathrm{kk}_G^h$  - la suma de dos morfismos  $f, g: C \rightarrow D$  siempre se factoriza como

$$C \xrightarrow{\Delta} C \oplus C \xrightarrow{f \oplus g} D \oplus D \xrightarrow{\nabla} D$$

con  $\Delta$  y  $\nabla$  los mapas (co)diagonales y  $f \oplus g$  el morfismo inducido por la propiedad universal del coproducto. La demostración de este hecho es un cálculo directo y se puede consultar, por ejemplo, en [ML98, VIII, 2, Proposition 3].

◆

**Corolario 2.4.15.** Sean  $A \in G - \text{Alg}_\ell^*$  y  $B \in G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ . Omitiendo a  $j_G^h$  y  $j_G^h$  de la notación, tenemos las siguientes igualdades

$$\eta_A \bar{\phi}_A = \text{id}_{\Lambda\Lambda} + t_A, \quad \eta_B \bar{\phi}_B = \text{id}_{\Lambda B} + t_B$$

en  $kk_G^h$  y  $kk_G^h$ .

*Demostración.* El presente corolario se reduce a probar que  $\eta \bar{\phi} = \eta i_1^{-1} \phi$  coincide con  $u_1(1M_2\eta)\phi = 1 + t$  en  $kk^h$ . En vista del siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \Lambda & \xrightarrow{\phi} & {}_1M_2 & \xrightarrow{{}_1M_2\eta} & {}_1M_2\Lambda & \xrightarrow{\text{ad}(1, h_1)} & M_2\Lambda & \xrightarrow{\iota_1^{-1}} & \Lambda \\ & & \uparrow i_1 & & \uparrow i_1 & & & & \\ & & \ell & \xrightarrow{\eta} & \Lambda & & & & \end{array}$$

basta ver que  $\iota_1 = \text{ad}(1, h_1)i_1$ . Por definición de  $i_1$  tenemos este diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} {}_1M_2\Lambda & \xrightarrow{(1.4.16)} & M_\pm\Lambda & \xrightarrow{\text{ad}(1, h_\pm)} & M_2\Lambda \\ i_1 \uparrow & & \iota_\pm \uparrow & & \iota_1 \uparrow \\ \Lambda & \xlongequal{\quad} & \Lambda & \xlongequal{\quad} & \Lambda \end{array}$$

así que basta ver que componiendo el isomorfismo  $\text{ad}(u_\lambda, u_\lambda)$  inducido por (1.4.16) con  $\text{ad}(1, h_\pm)$  obtenemos  $\text{ad}(1, h_\pm^{-1}) = \text{ad}(1, h_1)$ . Dado que todos estos son isomorfismos, alcanza ver que

$$\text{id} = \text{ad}(1, h_1) \text{ad}(u_\lambda, u_\lambda) \text{ad}(1, h_\pm) = \text{ad}(u_\lambda, h_1 u_\lambda h_\pm)$$

en  $kk^h$ , para lo cual podemos aplicar la Proposición 1.4.11.  $\blacklozenge$

**Definición 2.4.16.** Si  $B \in \mathfrak{A}$ , la postcomposición por el  $*$ -morfismo involutivo  $t = t \otimes 1_B$  inducido por (2.3.32) define una acción de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  en  $kk_G^h(A, \Lambda B)$  y  $kk_G^h(A, \Lambda B)$ . Por lo tanto, en el caso equivariante se tienen definidos grupos

$$k_G(A, B) := \frac{\{x \in kk_G^h(A, \Lambda B) : x = t_*x\}}{\{x = y + t_*y\}} = \frac{\ker(\text{id}_* - t_*)}{\text{im}(\text{id}_* + t_*)},$$

$$k'_G(A, B) := \frac{\{x \in kk_G^h(A, \Lambda B) : x = -t_*x\}}{\{x = y - t_*y\}} = \frac{\ker(\text{id}_* + t_*)}{\text{im}(\text{id}_* - t_*)}$$

que corresponden a la cohomología  $H^\bullet(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, kk_G^h(A, \Lambda B))$  en grado par e impar respectivamente. De igual modo definimos

$$k_{\hat{G}}(A, B) := \frac{\{x \in kk_G^h(A, \Lambda B) : x = t_*x\}}{\{x = y + t_*y\}}, \quad k'_{\hat{G}}(A, B) := \frac{\{x \in kk_G^h(A, \Lambda B) : x = -t_*x\}}{\{x = y - t_*y\}}$$

en el caso graduado.

Habiendo dado las definiciones necesarias, estamos en condiciones de construir la sucesión exacta de doce términos que relaciona los (co)grupos de Witt bivariantes con la cohomología de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  con coeficientes en  $kk_G^h(A, \wedge B)$  y  $kk_G^h(A, \wedge B)$ .

**Convención 2.4.17.** En virtud de alivianar la notación y dado que en ambos casos el argumento se sigue del argumento para  $kk^h$ , omitimos los subíndices que distinguen a la K-teoría bivariante hermitiana equivariante de su contraparte graduada.

**Teorema 2.4.18** (cf. [CV21, Theorem 12.2]). *Dadas  $*$ -álgebras  $A$  y  $B$  en  $\mathfrak{A}$  tenemos una sucesión exacta*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 k(A, \Omega B) & \xrightarrow{j} & {}_{-1}W(A, \Omega^2 B) & \xrightarrow{\beta} & W'(A, B) & \xrightarrow{d} & k'(A, \Omega B) & \xrightarrow{j'} & {}_{-1}W'(A, \Omega B) & \xrightarrow{c} & {}_{-1}W(A, \Omega B) \\
 \uparrow r & & & & & & & & & & \downarrow r \\
 W(A, \Omega B) & \xleftarrow{c} & W'(A, \Omega B) & \xleftarrow{j'} & k'(A, \Omega B) & \xleftarrow{d} & {}_{-1}W'(A, B) & \xleftarrow{\beta} & W(A, \Omega^2 B) & \xleftarrow{j} & k(A, \Omega B)
 \end{array}$$

en la K-teoría bivariante correspondiente.

*Demostración.* Probamos el caso equivariante, la versión graduada es análoga. En la demostración de [CV21, Theorem 12.2] se considera el diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega \Lambda & \xrightarrow{\partial} & V & \xrightarrow{g} & \ell & \xrightarrow{\eta} & \Lambda \\
 & & \downarrow \wr | \theta & & & & \\
 \Omega^2 {}_{-1}M_2 & \xrightarrow{\delta} & \Omega {}_{-1}M_2 U & \xrightarrow{\rho} & \Omega {}_{-1}M_2 \Lambda & \xrightarrow{\bar{\phi}} & \Omega {}_{-1}M_2
 \end{array} \tag{2.4.19}$$

cuya fila superior es el triángulo distinguido que define a  $V$  y la fila inferior proviene del triángulo que define a  $U \Omega {}_{-1}M_2$  componiendo al morfismo  $\phi: \Lambda \Omega {}_{-1}M_2 \rightarrow {}_{-1}M_2 \Omega {}_{-1}M_2$  con la inversa del morfismo  $i_1: \Omega {}_{-1}M_2 \rightarrow {}_{-1}M_2 \Omega {}_{-1}M_2$  que se corresponde con  $\iota_+$  bajo el isomorfismo (1.4.16). A continuación se prueba que

$$(u_{-1})\rho\theta\partial = \text{id} - t.$$

Viendo esta igualdad en  $kk_G^h$  a través de  $(-)^r$ , tensorizando contra  $B$  y aplicando  $kk_G^h(A, -)$  se obtiene la identificación

$$\begin{array}{ccc}
 kk_G^h(A, \Omega \wedge B) & \xrightarrow{(\rho\theta\partial)_*} & {}_{-1}kk_G^h(A, \Omega \wedge B) \\
 \searrow \text{id} - t_* & & \downarrow \wr | (u_{-1})_* \\
 & & kk_G^h(A, \Omega \wedge B)
 \end{array}$$

Como se indica en [CV21, Theorem 12.2], una vez que tenemos la anterior descripción de  $(\rho\theta\partial)_*$  el teorema se reduce al argumento de [Kar80, Théorème 4.3]. Veámoslo.

Al ser  $kk_G^h$  una categoría triangulada, el diagrama (2.4.19) implica la existencia de un diagrama de filas exactas

$$\begin{array}{ccccccccc} kk_G^h(A, \Omega B) & \xrightarrow{(\Omega\eta)_*} & kk_G^h(A, \Omega\Lambda B) & \xrightarrow{\partial_*} & kk_G^h(A, VB) & \xrightarrow{g_*} & kk_G^h(A, B) & \xrightarrow{\eta_*} & kk_G^h(A, \Lambda B) \\ & & & & \downarrow \wr \theta_* & & & & \\ kk_G^h(A, \Omega^2 B) & \xrightarrow{(\Omega\varphi)_*} & {}_{-1}kk_G^h(A, \Omega^2 B) & \xrightarrow{\delta_*} & {}_{-1}kk_G^h(A, \Omega\cup B) & \xrightarrow{p_*} & kk_G^h(A, \Omega\Lambda B) & \xrightarrow{\varphi_*} & {}_{-1}kk_G^h(A, \Omega B) \end{array}$$

donde  $p = u_{-1}\rho$  y  $\varphi = \bar{\phi}u_{-1}^{-1}$ . De esta forma es  $(p\theta\partial)_* = 1 - t_*$ . Usaremos también que  $\eta_*\bar{\phi}_* = 1 + t_*$ , por el Corolario 2.4.14. Damos a continuación la definición de los morfismos de la sucesión,

- **Definición de  $j$ :** consideremos  $x \in kk_G^h(A, \Omega\Lambda B)$  tal que  $x = t_*x$ . Como

$$(p\theta\partial)_* = (u_{-1}\rho\theta\partial)_*(x) = (1 - t_*)(x) = 0,$$

por exactitud de la fila inferior existe  $y \in {}_{-1}kk_G^h(A, \Omega^2 B)$  tal que  $\delta_*(y) = (\theta\partial)_*(x)$ . Definimos  $j: k_G(A, \Omega B) \rightarrow {}_{-1}W_G(A, \Omega^2 B)$  enviando la clase de  $x$  a la clase de  $y$ . Para que esto esté bien definido resta verificar que la elección de  $[y]$  no depende de la clase de  $x$ , o lo que es lo mismo, que si  $x = x' + t_*x'$  entonces podemos tomar  $y \in \text{im}(\Omega\varphi)_* = \ker \delta_*$ . Esto equivale a ver que  $(\theta\partial)_*(x' + t_*x') = 0$ , es decir, que  $\partial_*(x' + t_*x') = 0$ . En definitiva, lo que debemos probar se reduce a ver que  $\text{im}(\text{id} + t_*) \subset \ker \partial_* = \text{im} \eta_*$ , y esto se deduce de que  $\text{id} + t_* = \eta\bar{\phi}$ .

- **Definición de  $\beta$ :** como  $\delta_*\bar{\phi}_* = 0$ , la composición  $(g\theta^{-1}\delta)_*$  define un morfismo  $\beta$  con dominio  $\text{coker } \bar{\phi}_* = {}_{-1}W_G(A, \Omega^2 B)$  que se restringe a  $\text{im } g_* = \ker \eta_* = W'_G(A, B)$ .
- **Definición de  $d$ :** si  $x \in W'_G(A, B) = \ker \eta_* = \text{im } g_*$ , existe  $z \in kk_G^h(A, VB)$  tal que  $g_*(z) = x$ . Definimos  $d(x)$  como la clase de  $(p\theta)_*(z)$ . Para que esto tenga sentido, debemos ver que  $(1 - t_*)(p\theta)_*(z) = 0$ . Esto se deduce de que  $(1 - t_*)p_* = 0$ , ya que usando la Observación 2.4.11 es

$$(\text{id} + t)p = (\text{id} + t)u_{-1}\rho = u_{-1}(\text{id} + t_{-1}M_2\Omega\Lambda B)\rho = \eta\bar{\phi}\rho$$

y  $\bar{\phi}_*\rho_* = 0$ . La definición es independiente de la elección de  $z$  pues dado otro  $z'$  con  $g_*(z) = x$  es  $z - z' \in \ker g_* = \text{im } \partial_*$  y por lo tanto

$$(\theta p)_*(z - z') \in \text{im}(p\theta\partial)_* = \text{im}(\text{id} - t_*),$$

de forma que  $[z] = [z']$  en  $k'_G(A, \Omega B)$ .

- **Definición de  $j'$ :** si  $[x] \in k'_G(A, \Omega B)$ , entonces  $x \in \ker(\text{id} + t_*) = \ker(\eta\bar{\phi})_*$  y por tanto definimos  $j'([x]) := \bar{\phi}_*(x) \in {}_{-1}W(A, \Omega B)$ . La buena definición se sigue de que si  $x = (1 - t_*)(y)$  entonces  $\bar{\phi}_*(1 - t_*)(y) = (\bar{\phi}\rho\theta\partial)_*(y) = 0$ , por exactitud.

- **Definición de c:** es la composición de la inclusión  ${}_{-1}W'_G(A, \Omega B) \hookrightarrow {}_{-1}kk_G^h(A, B)$  con la proyección al cociente  ${}_{-1}kk_G^h(A, B) \rightarrow {}_{-1}W_G(A, \Omega B)$ .
- **Definición de r:** como  $(\text{id} - t_*)(\eta\bar{\phi})_* = (\text{id} - t_*)(\text{id} + t_*) = 0$ , el mapa  $\eta_*$  induce un morfismo  $r$  entre  $\text{coker } \bar{\phi}_* = {}_{-1}W_G(A, \Omega B)$  y  $k_G(A, \Omega B) = \ker(\text{id} - t_*) / \text{im}(\text{id} + t_*)$ .

Para terminar, indicamos como adaptar la exactitud del caso clásico:

- **Exactitud en  $k_G(A, B)$ :** como la imagen de  $j$  está contenida en la proyección de  $\partial_*$ , y  $r$  viene inducido por  $(\Omega\eta)_*$ , de que  $\partial_*(\Omega\eta)_* = 0$  se obtiene  $jr = 0$ . Recíprocamente si  $0 = r(x) = [y]$ , donde  $(\theta\partial)_*(x) = \delta_*(y)$ , debe ser  $y \in \text{im}(\Omega\varphi)_* = \ker \delta_*$  y entonces  $(\theta\partial)_*(x) = \delta_*(y) = 0$ . Como  $\theta$  es un isomorfismo, en definitiva  $x \in \ker \partial_* = \text{im } \eta_*$ , así que  $[x]$  está en la imagen de  $r$ .
- **Exactitud en  ${}_{-1}W_G(A, \Omega^2 B)$ :** si  $[x] \in k_G(A, B)$ , es  $j([x]) = [y]$  con  $\delta_*(y) = (\partial\theta)_*(x)$  y entonces  $\beta([y]) = (g\theta^{-1}\delta)_*(y) = (g\partial)_*(y) = 0$ .

Recíprocamente, si  $(g\theta^{-1}\delta)_*(y) = 0$  entonces  $(\theta^{-1}\delta)_*(y) \in \ker g_* = \text{im } \partial_*$ , de forma que  $(\theta^{-1}\delta)_*(y) = \partial_*(z)$  para cierto  $z \in kk_G^h(A, \Omega\Lambda B)$ . Como  $(1 - t)_*(z) = (p\theta\partial)_*(z) = (p\delta)_*(y) = 0$ , está bien definida la clase de  $z$  en  $k_G(A, B)$  y  $j([z]) = [y]$  ya que por definición  $z$  satisface  $\delta_*(y) = \theta\partial_*(z)$ .

- **Exactitud en  $W'_G(A, B)$ :** por definición de  $\beta$  y  $d$  es  $d\beta([x]) = p_*\delta_*(x) = 0$  para todo  $x$ . Por otro lado, si  $d(y) = 0$ , entonces existe  $z \in kk_G^h(A, VB)$  tal que  $g_*(z) = x$  y  $(p\theta)_*(z) = (1 - t_*)(z')$ . De aquí se sigue que  $g_*(z - \partial_*(z')) = x$  y

$$p_*(\theta_*(z - \partial_*(z'))) = (p\theta)_*(z) - (p\theta\partial)_*(z') = (1 - t_*)(z') - (1 - t_*)(z') = 0.$$

Por exactitud, existe entonces  $z''$  tal que  $\delta_*(z'') = \theta_*(z - \partial_*(z'))$  y por lo tanto

$$\beta([z'']) = (g\theta^{-1}\delta)_*(z'') = g_*(z - \partial_*(z')) = g_*(z) = x,$$

como queríamos ver.

- **Exactitud en  $k'_G(A, \Omega B)$ :** Como  $\bar{\phi}_*p_* = 0$ , si  $x \in kk_G^h(A, VB)$  y  $d(x) = [(p\theta)_*(y)]$  con  $g_*(y) = x$  entonces  $j'd([x]) = \bar{\phi}_*(p\theta)_*(y) = 0$ . Para ver la recíproca, observemos que si  $j'([x]) = \bar{\phi}(x) = 0$  entonces por exactitud es  $x = p_*(y)$  para cierto  $y$ . Usando la definición de  $d$  se verifica que  $d((g\theta^{-1})_*(y)) = x$ .
- **Exactitud en  ${}_{-1}W'_G(A, \Omega B)$ :** la imagen de  $j'$  está contenida en la imagen de  $\bar{\phi}$ , así que al  $c$  estar definida por la inclusión a  ${}_{-1}kk_G^h(A, B)$  compuesta con la proyección a  $\text{coker } \bar{\phi}$  debe ser  $cj' = 0$ . Recíprocamente, si  $c([x]) = 0$  entonces  $x$  pertenece a  $\ker \eta_*$  y  $\eta_*(x) \in \text{im } \bar{\phi}_*$ . Tomando  $y$  tal que  $\bar{\phi}_*(y) = x$  es,

$$(1 + t_*)(y) = \eta_*\bar{\phi}_*(y) = \eta_*(x) = 0$$

así que  $[y] \in k'(A, \Omega B)$  y  $j'([y]) = \bar{\phi}_*(y) = x$ .

- **Exactitud en  ${}_{-1}W_G(A, \Omega B)$ :** que  $r_*c_* = 0$  se sigue de que  $c$  tiene como dominio al núcleo de  $\eta_*$ , y  $r$  viene inducido por este morfismo. Ahora, si  $r_*([x]) = 0$  es  $\eta_*(x) = (1 + t_*)(y) = \eta_*\bar{\phi}_*(y)$  para cierto  $y$ , de manera que  $x - \bar{\phi}_*(y) \in {}_{-1}W'_G(A, \Omega B)$  y su imagen vía  $c$  es precisamente  $[x - \bar{\phi}_*(y)] = [x]$ .



*Observación 2.4.20.* Como los grupos  $k_G(A, B)$ ,  $k'_G(A, B)$  y  $k_{\widehat{G}}(A, B)$ ,  $k'_{\widehat{G}}(A, B)$  son de 2-torsión, tensorizando las sucesiones exactas del Teorema 2.4.18 por  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  obtenemos isomorfismos

$$\begin{aligned} {}_{-1}W_G(A, \Omega^2 B) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] &\simeq W'_G(A, B) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}], \\ {}_{-1}W_{\widehat{G}}(A, \Omega^2 B) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] &\simeq W'_{\widehat{G}}(A, B) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]. \end{aligned}$$

## Capítulo 3

# Álgebras de Leavitt y K-teoría graduada

En este capítulo definiremos el álgebra de Leavitt asociada a un grafo  $E$  y comenzaremos a estudiar su estructura como objeto de  $kk_{\mathbb{G}}^h$ . En esta dirección, adaptamos algunos resultados iniciales de la clasificación de álgebras de Leavitt salvo homotopía de [CM21] al caso graduado.

### 3.1. Generalidades sobre grafos

Por un *grafo* entenderemos un multigrafo dirigido. Concretamente, un grafo  $E = (E^0, E^1, s, r)$  para nosotros consistirá de dos funciones

$$s, r: E^1 \rightarrow E^0$$

donde  $E^0$  son los *vértices* del grafo y el conjunto  $E^1$  sus *aristas*. Gráficamente, representamos cada arista  $e \in E^1$  como una flecha; decimos que  $e$  *comienza* en  $s(e)$  y *termina* en  $r(e)$ . Es por esto que llamamos a  $s$  y  $r$  las funciones de *salida* y *llegada* respectivamente.

Diremos que  $E$  es *finito* cuando tanto  $E^0$  como  $E^1$  sean conjuntos finitos. En ese caso, el grafo está unívocamente determinado por su *matriz de incidencia*

$$A_E \in M_{E^0}(\mathbb{N}_0), \quad (A_E)_{v,w} = |s^{-1}(v) \cap r^{-1}(w)|$$

que en el lugar  $(v, w)$  indica la cantidad de aristas que comienzan en  $v$  y terminan en  $w$ .

**Ejemplo 3.1.1.** La *rosa de  $n$ -pétalos* es el grafo  $R_n$  que tiene un único vértice y  $n$  lazos. Por ejemplo, si  $n = 2$  el dibujo correspondiente a  $R_2$  es



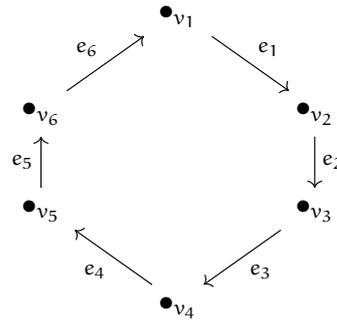
La matriz de incidencia de  $R_n$  es  $A_{R_n} = (n)$ .

**Ejemplo 3.1.2.** Para cada  $n \geq 1$ , el **grafo  $\mathcal{A}_n$  de  $n$  líneas orientadas** es

$$\bullet_{v_1} \xrightarrow{e_1} \bullet_{v_2} \xrightarrow{e_2} \bullet_{v_2} \rightarrow \dots \rightarrow \bullet_{v_{n-1}} \xrightarrow{e_{n-1}} \bullet_{v_n}$$

con matriz de incidencia  $(A_{\mathcal{A}_n})_{ij} := \delta_{j,i+1}$ .

**Ejemplo 3.1.3.** Para cada  $n \geq 2$ , el  **$n$ -ciclo orientado  $C_n$**  es el grafo que contiene  $n$ -vértices  $v_1, \dots, v_n$  y  $n$  aristas  $e_1, \dots, e_n$  tales que  $s(e_i) = i$  y  $r(e_i) \equiv i + 1 \pmod{n}$ . Por ejemplo, si  $n = 6$  la representación gráfica de  $C_6$  es la siguiente



Su matriz de incidencia satisface  $(A_{C_n})_{ij} = \delta_{j,i+1}$  si  $i < n$ , y  $(A_{C_n})_{nj} = \delta_{j1}$ .

**Definición 3.1.4.** El **grafo doble  $\mathcal{D}(E)$**  de un grafo  $E$  es el grafo definido por los conjuntos

$$\mathcal{D}(E)^0 = E^0, \quad \mathcal{D}(E)^1 = E^1 \times \{0, 1\}$$

y las funciones  $s(-, 0) = s$ ,  $s(-, 1) = r$ ,  $r(-, 0) = r$ ,  $r(-, 1) = s$ . Escribimos  $e = (e, 0)$  y  $e^* = (e, 1)$ . Con esta notación es

$$s(e^*) = r(e), \quad r(e^*) = s(e).$$

Informalmente, el grafo doble agrega una arista en la dirección opuesta por cada arista del grafo original. Los aristas de  $E^1 \times \{1\}$  se dicen **fantasmas**, y los de  $E^1 \times \{0\}$  **reales**.

**Definición 3.1.5.** Sea  $E$  un grafo y  $v \in E^0$ . Decimos que  $v$  es:

- una **fuentes** si  $r^{-1}(v) = \emptyset$ ,
- un **pozo** si  $s^{-1}(v) = \emptyset$ ,
- un **emisor infinito** si  $|s^{-1}(v)| = \infty$ .

Notamos  $\text{sour}(E)$ ,  $\text{sink}(E)$  e  $\text{inf}(E)$  a los conjuntos de fuentes, pozos y emisores infinitos. Un vértice se dice **singular** si es un pozo o un emisor infinito y **regular** en caso contrario; escribimos  $\text{sing}(E)$  y  $\text{reg}(E)$  para referirnos a los conjuntos de vértices singulares y regulares respectivamente.

**Definición 3.1.6.** Un *camino* en un grafo  $E$  es una sucesión finita de aristas  $\alpha = e_1 \cdots e_n$  tales que  $r(e_i) = s(e_{i+1})$  para todo  $i$ . La *longitud* de  $\alpha$  es  $|\alpha| := n$  y, por convención, un vértice es un camino de longitud 0. Un camino  $\alpha = e_1 \cdots e_n$  se dice *cerrado* si  $r(e_n) = s(e_1)$ , y un *ciclo* si es cerrado y además  $s(e_j) \neq s(e_i)$  para todo  $i \neq j$ .

Notamos  $E^n$  al conjunto de todos los caminos de longitud  $n \in \mathbb{N}_0$  y  $\mathcal{P}(E) = \bigcup_{n \geq 0} E^n$ . Escribimos también

$$\mathcal{P}_v = \{\alpha \in \mathcal{P}(E) : r(\alpha) = v\}, \quad \mathcal{P}^v = \{\alpha \in \mathcal{P}(E) : s(\alpha) = v\}$$

para cada vértice  $v \in E^0$ . Las funciones de salida y llegada se extienden a  $E^n$  definiendo  $s(e_1 \cdots e_n) = e_1$  y  $r(e_1 \cdots e_n) = e_n$  para cada camino  $\alpha = e_1 \cdots e_n$ , y hacen de  $E^n$  un grafo. Un cálculo directo muestra que su matriz de incidencia es  $A_{E^n} = A_E^n$ .

**Definición 3.1.7.** Sea  $E$  un grafo. Si  $\alpha = e_1 \cdots e_n$  y  $\beta = f_1 \cdots f_m$  son dos caminos con  $r(\alpha) = s(\beta)$ , su *concatenación* es  $\alpha\beta := e_1 \cdots e_n f_1 \cdots f_m$ . El *álgebra de caminos*  $\ell E$  de  $E$  es el  $\ell$ -módulo libre con base  $\mathcal{P}(E)$  con la multiplicación definida por la extensión lineal del producto

$$\alpha \cdot \beta := \begin{cases} \alpha\beta & \text{si } r(\alpha) = s(\beta) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

*Observación 3.1.8.* Cuando  $E$  es finito  $\ell E$  es unital y  $1 = \sum_{v \in E^0} v$ . En este caso podemos describir a  $\ell E$  como el álgebra libre en las variables  $\{e, v : v \in E^0, e \in E^1\}$  sujeta a las relaciones

$$vw = \delta_{v,w}v, \quad \sum_{v \in E^0} v = 1, \quad e = s(e)e = er(e) \quad (\text{P})$$

para cada  $v, w \in E^0$  y  $e \in E^1$ .

**Ejemplo 3.1.9.** Si  $n \geq 1$ , el álgebra de caminos  $\ell R_n$  de la rosa de  $n$  pétalos es isomorfa al álgebra libre  $\ell\{x_1, \dots, x_n\}$  en  $n$  generadores. Por otro lado, el álgebra de caminos  $\ell \mathcal{A}_n$  es isomorfa a la subálgebra de matrices triangulares inferiores de  $M_n \ell$ .

**Definición 3.1.10.** Una *función de peso* de un grafo  $E$  es una función  $\omega : E^1 \rightarrow G$ .

*Observación 3.1.11.* Si  $E$  es un grafo, entonces el álgebra de caminos  $\ell \mathfrak{D}(E)$  de su grafo doble es una  $*$ -álgebra. La involución está definida enviando cada vértice  $v \in E^0$  a sí mismo y  $e$  a  $e^*$  para cada arista real  $e \in E^1$ . Si  $\omega : E^1 \rightarrow G$  es una función de peso, podemos extenderla a  $\mathcal{P}(E)$  definiendo  $\omega(v) = 1$  para cada  $v \in E^0$  y  $\omega(e_1 \cdots e_n) = \omega(e_1) \cdots \omega(e_n)$ . Esto permite definir una  $G$ -graduación en  $\ell E$  considerando los subespacios

$$(\ell E)_g := \text{span}_{\ell}\{\alpha \in \mathcal{P}(E) : \omega(\alpha) = g\}.$$

En particular, si  $G = \mathbb{Z}$  y  $\omega(e) = 1$  para todo  $e \in E^1$ , la graduación sobre  $\ell E$  es la inducida por la longitud de caminos. Concretamente, es  $(\ell E)_k = \ell E^k$  si  $k \geq 0$  y  $(\ell E)_k = 0$  si  $k < 0$ .

También podemos extender  $\omega$  a  $\mathcal{P}\mathcal{D}(E)$ , aplicando lo anterior al peso  $\tilde{\omega}: \mathcal{D}(E) \rightarrow G$  que envía  $e^*$  a  $\omega(e)^{-1}$ . Esto da una  $G$ -graduación en  $\ell\mathcal{D}(E)$  compatible con la involución definida anteriormente. Cuando  $G = \mathbb{Z}$  y el peso viene dado por la longitud de caminos, es la graduación definida extendiendo las asignaciones  $|v| = 0$ ,  $|e| = 1$  y  $|e^*| = -1$  para cada  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$ .

### 3.2. Álgebras de Cohn y Leavitt

En esta sección damos las definiciones de las álgebras de Cohn y Leavitt asociadas a un grafo  $E$ . Recordamos también la relación entre el grupo de Bowen-Franks de un grafo y la  $K$ -teoría del álgebra de Leavitt asociada. Una exposición detallada de la teoría de álgebras de Leavitt se puede encontrar en [AASM17].

**Definición 3.2.1.** El *álgebra de Cohn*  $C(E)$  de un grafo  $E$  es el cociente del álgebra de caminos de  $\mathcal{D}(E)$  por las relaciones

$$e^* \cdot f = \delta_{e,f} \cdot r(e) \quad (\text{CK1})$$

para cada  $e, f \in E^1$ .

*Observación 3.2.2.* La relación (CK1) es homogénea con respecto a la graduación inducida en  $\mathcal{D}(E)$  por una función de peso  $\omega: E^1 \rightarrow G$ . En consecuencia cada función de peso  $\omega: E^1 \rightarrow G$  determina una estructura de  $G$ -\*-álgebra en  $C(E)$ .

**Definición 3.2.3.** Para cada  $v \in E^0 \setminus \text{inf}(E)$ , se definen los elementos

$$m_v := \begin{cases} \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* & \text{if } v \in \text{reg}(E) \\ 0 & \text{if } v \in \text{sour}(E) \end{cases}$$

que satisfacen

$$m_v = m_v^*, \quad m_v^2 = m_v, \quad m_v w = \delta_{w,v} m_v, \quad m_v e = \delta_{v,s(e)} e \quad (3.2.4)$$

para cada  $w \in E^0$ ,  $e \in E^1$ . Definimos a  $C^m(E)$  como la \*-álgebra que se obtiene adjuntando a  $C(E)$  elementos  $m_v$  para cada  $v \in \text{inf}(E)$ , sujetos a las relaciones (3.2.4). Se tiene un morfismo de \*-álgebras canónico  $\text{can}: C(E) \rightarrow C^m(E)$ , que por [CM21, Lemma 4.8] es un monomorfismo. Escribiremos

$$q_v = v - m_v.$$

para cada vértice  $v \in E^0$ .

*Observación 3.2.5.* Sea  $E$  un grafo y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso. Consideremos a  $C(E)$  con la  $G$ -graduación inducida. Para cada  $v \in E^0 \setminus \text{inf}(E)$ , el elemento  $m_v$  es homogéneo de grado 1 y las relaciones (3.2.4) son homogéneas. Definiendo  $|m_v| = 1$  para todo  $v \in \text{inf}(E)$  obtenemos una graduación en  $C^m(E)$  que hace de  $\text{can}$  un \*-morfismo homogéneo.

**Definición 3.2.6.** Dado un grafo  $E$ , se definen los  $*$ -ideales

$$\widehat{\mathcal{K}}(E) = \langle q_v : v \in E^0 \rangle \subset C^m(E)$$

y

$$\mathcal{K}(E) = \langle q_v : v \in \text{reg}(E) \rangle \subset C(E) \cap \widehat{\mathcal{K}}(E).$$

**Definición 3.2.7.** El *álgebra de Leavitt* de  $E$  es el álgebra  $L(E)$  que resulta de dividir a  $C(E)$  por  $\mathcal{K}(E)$ , es decir, es el cociente de  $C(E)$  por las relaciones

$$v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \quad (\text{CK2})$$

para cada  $v \in \text{reg}(E)$ .

*Observación 3.2.8.* Concretamente, el álgebra de Leavitt de un grafo  $E$  es el cociente de la  $\ell$ -álgebra libre en los símbolos  $\{v : v \in E^0\} \cup \{e, e^* : e \in E^1\}$  sujeta a las relaciones

$$(V) \quad vw = \delta_{v,w}v \text{ para cada } v, w \in E^0,$$

$$(E1) \quad e = s(e)e = er(e) \text{ para cada } e \in E^1,$$

$$(E2) \quad e^* = r(e)e^* = e^*s(e) \text{ para cada } e \in E^1, \text{ y}$$

$$(\text{CK1}) \quad e^* \cdot f = \delta_{e,f} \cdot r(e) \text{ para cada } e, f \in E^1,$$

$$(\text{CK2}) \quad v = \sum_{e \in s^{-1}(v)} ee^* \text{ para cada } v \in \text{reg}(E).$$

El álgebra  $L(E)$  es unital sí y sólo si  $E^0$  es finito, en cuyo caso  $1 = \sum_{v \in E^0} v$ . Es por este motivo que llamaremos *unital* a un grafo con finitos vértices.

**Ejemplos 3.2.9.** Si  $R_n$  es la rosa de  $n$ -pétalos del Ejemplo 3.1.1, su álgebra de caminos Leavitt es el álgebra de Leavitt  $L_n$  del Ejemplo 1.1.11. Por otro lado, el álgebra de Leavitt del grafo de  $n$ -líneas orientadas del Ejemplo 3.1.2 es  $L(\mathcal{A}_n) \simeq M_n(\ell)$ . En el caso de un  $n$ -ciclo como en el Ejemplo 3.1.3 tenemos que  $L(C_n) \simeq M_n(\ell[t, t^{-1}])$ .

*Observación 3.2.10.* Sea  $E$  un grafo y  $\omega : E^1 \rightarrow G$  una función de peso. Para cada vértice  $v$ , el elemento  $q_v \in C(E)$  es homogéneo de grado  $1_G$  para la graduación inducida por  $\omega$ . En consecuencia, toda función de peso determina una  $G$ -graduación en  $L(E)$  que hace de esta una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.

**Ejemplo 3.2.11.** Si  $E$  es un grafo y  $\omega \equiv 1 \in \mathbb{Z}$ , la graduación inducida en  $L(E)$  está determinada por las asignaciones  $|v| = 0$  y  $|e| = 1, |e^*| = -1$  para cada  $v \in E^0, e \in E^1$ .

Terminamos la sección describiendo la relación entre un grafo  $E$  y la  $K$ -teoría de su álgebra de Leavitt asociada.

**Definición 3.2.12.** El *grupo de Bowen-Franks* de un grafo  $E$  sin emisores infinitos es

$$\mathfrak{BF}(E) := \text{coker}(I - A_E^t).$$

El grupo de Bowen-Franks es un invariante relacionado con la dinámica simbólica. La conexión entre este área y las álgebras de Leavitt viene dada a partir de la representación gráfica de ciertos sistemas dinámicos que se denominan *subshifts de tipo finito*. La relación entre grafos y subshifts de tipo finito se puede consultar en [LM95, 2.2].

En esta dirección, el grupo de Bowen-Franks de un grafo  $E$  se corresponde con  $K_0(L(E))$ , al menos cuando  $E$  no tiene vértices singulares.

**Definición 3.2.13.** La *matriz de incidencia reducida* de un grafo  $E$  es la matriz  $\overline{A}_E \in \mathbb{N}_0^{\text{reg}(E) \times E^0}$  que resulta de eliminar las filas de  $A_E$  correspondientes a vértices singulares.

**Teorema 3.2.14.** Si  $E$  es un grafo sin emisores infinitos y  $\ell$  un cuerpo, entonces

$$K_0(L(E)) \simeq \text{coker}(I - \overline{A}_E^t: \mathbb{Z}^{\text{reg}(E)} \rightarrow \mathbb{Z}^{E^0}).$$

*Demostración.* Ver [AASM17, Theorem 6.1.9]. ◆

**Corolario 3.2.15.** Si  $E$  es un grafo finito sin pozos y  $\ell$  un cuerpo, entonces  $K_0(L(E)) \simeq \mathfrak{BF}(E)$ . ◆

Podemos generalizar este resultado a una familia más amplia de anillos, que incluye por ejemplo a los dominios de ideales principales.

**Proposición 3.2.16.** Sea  $E$  un grafo finito sin pozos. Si  $\ell$  es noetheriano y todo  $\ell$ -módulo proyectivo tiene dimensión proyectiva finita, entonces  $K_0(L(E)) \simeq K_0(\ell) \otimes \mathfrak{BF}(E)$ . En particular, si  $\ell$  es un dominio de ideales principales entonces  $K_0(L(E)) \simeq \mathfrak{BF}(E)$ .

*Demostración.* Ver [CM21, Example 5.5]. ◆

**Ejemplo 3.2.17.** Si  $n \geq 2$  y  $L_n := L(\mathbb{R}_n)$ , entonces  $\mathfrak{BF}(L_n) = \mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$ .

*Observación 3.2.18.* En el caso de la K-teoría hermitiana, en [Cor21, Corollary 4.5] se observa que si  $E$  tiene numerables vértices y aristas, y  $\ell$  es un cuerpo de característica distinta de 2, entonces  $K_0^h(L(E)) \simeq K_0^h(\ell) \otimes \mathfrak{BF}(E)$ .

Utilizando resultados profundos de la teoría de dinámica simbólica se tiene el siguiente resultado parcial de clasificación, que se conoce como el *teorema algebraico restringido de Kirchberg-Phillips*.

**Teorema 3.2.19.** Sean  $E$  y  $F$  grafos tales que  $L(E)$  y  $L(F)$  son álgebras simples puramente infinitas. Supongamos además que hay un isomorfismo  $K_0(L(E)) \rightarrow K_0(L(F))$  que envía  $[1_{L(E)}]$  a  $[1_{L(F)}]$ . Si  $\det(I - A_E^t) = \det(I - A_F^t)$ , las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son isomorfas.

*Demostración.* Ver [AASM17, Theorem 6.3.40] ◆

Es un problema abierto decidir si la hipótesis sobre el determinante en el Teorema 3.2.19 puede eliminarse.

### 3.3. Conjuntos graduados y álgebras matriciales

Sea  $M_{S_1} \oplus \cdots \oplus M_{S_n}$  una  $*$ -álgebra matricial. Siempre y cuando estemos considerando la  $K$ -teoría hermitiana bivalente  $M_X$ -estable con  $|X| \geq |S_i|$  para cada  $i$ , en  $kk^h$  es  $M_{S_i} \simeq \ell$  y como  $j^h$  es aditivo más aún se tiene que

$$M_{S_1} \oplus \cdots \oplus M_{S_n} \simeq \ell^n.$$

Observemos además que un  $kk^h$ -isomorfismo  $\ell^n \simeq \ell^m$  induce a su vez un isomorfismo en  $kk$  y por lo tanto es

$$KH_0(\ell)^n \simeq KH_0(\ell^n) \simeq kk(\ell, \ell^n) \simeq kk(\ell, \ell^m) \simeq KH_0(\ell^m) \simeq KH_0(\ell)^m.$$

Suponiendo que  $KH_0(\ell)$  tiene rango finito y positivo, esto nos dice que el tipo de isomorfismo de un álgebra matricial en  $kk^h$  está determinado por la cantidad de factores involucrados.

Definimos en la sección anterior al álgebra de Leavitt de un grafo  $E$  como el cociente del álgebra de Cohn  $C(E)$  por cierto  $*$ -ideal  $\mathcal{K}(E)$ . Veremos más adelante que este último es isomorfo a un álgebra matricial, y es por ese motivo que la caracterización de álgebras matriciales en  $kk$  es de utilidad para estudiar a las álgebras de Leavitt en esta categoría.

El objetivo de esta sección es caracterizar el tipo de isomorfismo en  $kk_G^h$  de álgebras matriciales  $M_{S_1} \oplus \cdots \oplus M_{S_n}$  equipadas con una graduación inducida por graduaciones en cada conjunto  $S_1, \dots, S_n$ . Esto nos permitirá estudiar a  $\mathcal{K}(E)$  como  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.

**Definición 3.3.1.** Un *conjunto  $G$ -graduado*  $(X, d)$  es un conjunto  $X$  junto con una función  $d: X \rightarrow G$ . Un morfismo  $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  entre conjuntos  $G$ -graduados es una función  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $d'f = d$ . En otras palabras, la categoría de conjuntos  $G$ -graduados es la categoría *slice Set*/ $G$  sobre  $G$  visto como conjunto.

**Ejemplo 3.3.2.** Si  $E$  es un grafo y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso, la extensión de  $\omega$  a  $\mathcal{P}(E)$  hace de este último un conjunto  $G$ -graduado; lo mismo ocurre con los conjuntos  $\mathcal{P}^v$  y  $\mathcal{P}_v$  para cada  $v \in E^0$ .

Recordemos que si  $(X, d)$  es un conjunto  $G$ -graduado y  $A$  una  $G$ - $*$ -álgebra, se tiene una graduación en  $M_X(A)$  dada por

$$M_X(A)_g = \text{span}_{\ell}\{\varepsilon_{x,y} \otimes a : d(x)|a|d(y)^{-1} = g\}, \quad (3.3.3)$$

que es compatible con la involución canónica. Cuando  $G$  es abeliano, coincide con la graduación canónica en  $M_X \otimes A$  inducida por  $(M_X)_g = \text{span}_{\ell}\{\varepsilon_{x,y} : d(x)d(y)^{-1} = g\}$ .

Si  $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  es un morfismo entre conjuntos  $G$ -graduados que es inyectivo como función, induce un morfismo de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas

$$M_f \otimes 1_A: M_X(A) \rightarrow M_Y(A), \quad \varepsilon_{x,y} \otimes a \mapsto \varepsilon_{f(x),f(y)} \otimes a.$$

*Observación 3.3.4.* Si  $(X, d)$  y  $(Y, d')$  son conjuntos  $G$ -graduados y  $\mu: G \times G \rightarrow G$  es la multiplicación de  $G$ , la función

$$d \boxtimes d': X \times Y \xrightarrow{d \times d'} G \times G \xrightarrow{\mu} G,$$

define una graduación en  $X \times Y$ .

**Lema 3.3.5.** Sean  $(X, d)$  e  $(Y, d')$  conjuntos  $G$ -graduados y  $A \in G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}^*$ . El isomorfismo de  $*$ -álgebras

$$\varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{z,w} \otimes \mathbf{a} \in M_X(M_Y(A)) \mapsto \varepsilon_{(x,z),(y,w)} \otimes \mathbf{a} \in M_{X \times Y}(A)$$

es homogéneo con respecto a las graduaciones inducidas por  $d, d'$  y  $d \boxtimes d'$ .

*Demostración.* En efecto, resta notar que para un elemento homogéneo de la forma  $\varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{z,w} \otimes \mathbf{a}_g$  su imagen es homogénea de grado

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{(x,z),(y,w)} \otimes \mathbf{a}_g| &= d(x)d'(z)g(d(y)d'(w))^{-1} = d(x)d'(z)gd'(w)^{-1}d(y)^{-1} \\ &= d(x)|\varepsilon_{z,w} \otimes \mathbf{a}_g|d(y)^{-1} = |\varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{z,w} \otimes \mathbf{a}_g|. \end{aligned}$$

◆

**Corolario 3.3.6.** Sea  $(X, d)$  es un conjunto  $G$ -graduado y  $A$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada. Si notamos  $|X|$  a  $X$  equipado con la graduación trivial  $\mathbf{1}$ , el morfismo

$$\varepsilon_{s,t} \otimes \varepsilon_{x,y} \otimes \mathbf{a} \in M_G M_X(A) \mapsto \varepsilon_{x,y} \otimes \varepsilon_{sd(x)s,td(y)} \otimes \mathbf{a} \in M_{|X|} M_G(A) \quad (3.3.7)$$

es un isomorfismo.

*Demostración.* Bajo las identificaciones

$$M_G(M_X(A)) \simeq M_{G \times X}(A), \quad M_{|X|} M_G(A) \simeq M_{|X| \times G}(A)$$

del Lema 3.3.5, la función (3.3.7) es un  $*$ -isomorfismo inducido por la biyección

$$(g, x) \in G \times X \mapsto (x, gd(x)) \in |X| \times G.$$

Como  $(\text{id}_G \boxtimes d)(g, x) = gd(x) = (\mathbf{1} \boxtimes \text{id}_G)(x, gd(x))$ , resulta además un morfismo de conjuntos  $G$ -graduados, y en consecuencia (3.3.7) es homogéneo. ◆

**Proposición 3.3.8.** Sea  $(X, d)$  un conjunto  $G$ -graduado,  $A$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada y  $F: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow \mathbb{C}$  es un funtor  $\widehat{G}$ -estable y  $M_X$ -estable. Si  $x \in X$  es un elemento de grado central  $d(x) \in Z(G)$ , el morfismo homogéneo

$$j_x: \mathbf{a} \in A \mapsto \varepsilon_{x,x} \otimes \mathbf{a} \in M_X(A)$$

tiene por imagen vía  $F$  a un isomorfismo. Más aún, si  $d(x) = d(y)$  entonces  $F(j_x) = F(j_y)$ .

*Demostración.* Tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M_G(M_X(A)) & \xrightarrow[\text{(3.3.7)}]{\cong} & M_{|X|}M_G(A) \\
 \uparrow \iota_{M_X(A)} & & \uparrow \iota_x \\
 M_X(A) & & M_G A \\
 \swarrow j_x & & \searrow j_{d(x)} \\
 & A &
 \end{array}$$

y como  $F$  es tanto  $\widehat{G}$ -estable como matricialmente estable, envía a  $\iota_{M_X(A)}$  y  $\iota_x$  a isomorfismos. Además, sabemos por el Lema 1.4.5 que  $F(\iota_x) = F(\iota_y)$  para todo  $x, y \in X$ , así que efectivamente  $F(j_x)$  depende sólo del valor de  $d(x) \in G$ . En consecuencia, la proposición se reduce a probar que para cada  $*$ -álgebra  $G$ -graduada  $A$  y  $g \in Z(G)$  el functor  $F$  envía la inclusión homogénea

$$j_g: a \in A \mapsto \varepsilon_{g,g} \otimes a \in M_G(A)$$

a un isomorfismo. Al  $g$  ser central, el  $*$ -isomorfismo

$$L_g: \varepsilon_{s,t} \otimes a \in M_G(A) \mapsto \varepsilon_{gs,gt} \otimes a \in M_G(A)$$

es homogéneo. Finalmente, como  $j_g = L_g \iota_A$  y  $F(\iota_A)$  un isomorfismo por  $\widehat{G}$ -estabilidad, tenemos que  $F(j_g)$  es un isomorfismo.  $\blacklozenge$

**Corolario 3.3.9.** *Sea  $f: (X, d) \rightarrow (Y, d')$  un morfismo entre conjuntos  $G$ -graduados que es inyectivo como función y  $A \in G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*$ . Entonces todo functor  $\widehat{G}$ -estable y  $M_Y$ -estable  $F: G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^* \rightarrow C$  envía el morfismo*

$$M_f \otimes 1_A: M_X(A) \mapsto M_Y(A)$$

a un isomorfismo.

*Demostración.* Basta considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 M_X(A) & \xrightarrow{M_f} & M_Y(A) \\
 \downarrow \iota_{M_X} & & \downarrow \iota_{M_Y} \\
 M_G(M_X(A)) & \xrightarrow{M_G(M_f)} & M_G(M_Y(A)) \\
 \text{(3.3.7)} \downarrow & & \downarrow \text{(3.3.7)} \\
 M_{|X|}M_G(A) & \xrightarrow{\text{inc} \otimes M_G(A)} & M_{|Y|}M_G(A)
 \end{array}$$

y aplicar  $F$ .  $\blacklozenge$

**Lema 3.3.10.** *Sean  $S_1, \dots, S_n$  conjuntos  $G$ -graduados. Si  $v_i \in S_i$  son elementos de grado central, el morfismo*

$$f = \bigoplus_{i=1}^n j_{v_i}: \ell^n \mapsto \bigoplus_{i=1}^n M_{S_i}$$

es un  $\text{kk}_G^h$ -isomorfismo.

*Demostración.* Basta aplicar la Proposición 3.3.8 y usar la estructura de categoría aditiva de  $\text{kk}_G^h$ .  $\blacklozenge$

*Observación 3.3.11.* Observemos que, como antes, un isomorfismo  $\ell^n \simeq \ell^m$  en  $\text{kk}_G^h$  induce uno en  $\text{kk}$ . Por lo tanto, bajo la hipótesis anterior - esto es, que  $\text{KH}_0(\ell)$  tenga rango finito y positivo - un álgebra matricial en  $\text{kk}_G^h$  está determinada salvo isomorfismo por su cantidad de factores.

Terminamos la sección incluyendo un lema técnico sobre homotopías graduadas que precisaremos más adelante.

**Lema 3.3.12.** *Sea  $A \in G_{\text{gr}} - \text{Alg}_\ell^*$ . Si  $u, v \in A$  son elementos homogéneos de grado  $1 \in G$ , la matriz*

$$c(u, v) = \begin{pmatrix} \lambda^* u + \lambda v^* & \lambda^*(u - v^*) \\ \lambda(u - v^*) & \lambda u + \lambda^* v^* \end{pmatrix}$$

*es un elemento homogéneo de grado 1 en  $M_\pm A$ .*

*Demostración.* Como

$$c(u, v) = \varepsilon_{1,1} \otimes (\lambda^* u + \lambda v^*) + \varepsilon_{1,2} \otimes \lambda^*(u - v^*) + \varepsilon_{2,1} \otimes \lambda(u - v^*) + \varepsilon_{2,2} \otimes (\lambda u + \lambda^* v^*)$$

es una combinación  $\ell$ -lineal de elementos de la forma  $\varepsilon_{i,j} \otimes w$  con  $|w| = 1$ , cada uno de estos pertenece a  $(M_\pm A)_1 = M_\pm A_1$ , y por lo tanto  $|c(u, v)| = 1$ .  $\blacklozenge$

### 3.4. El triángulo distinguido en el contexto graduado, parte I

Por construcción, para cada grafo  $E$  tenemos una extensión

$$\mathcal{K}(E) \rightarrow C(E) \rightarrow L(E), \quad (3.4.1)$$

que es semi-escindida para cualquier elección de categoría subyacente. Esto último es una consecuencia de que la misma se parte como sucesión de  $\ell$ -módulos  $G$ -graduados, por [AASM17, Proposition 1.5.11]. Consecuentemente (3.4.1) define un triángulo distinguido en  $\text{kk}_G^h$  para cualquier elección de categoría subyacente.

Este triángulo es el punto de partida de la clasificación de álgebras de Leavitt en  $\text{kk}$  de [CM21] y la clasificación de las mismas salvo homotopía polinomial dada en [CM20]. Es también un componente importante en la clasificación de álgebras de Leavitt a menos de homotopías que preservan involución de [Cor21]. En ambos casos, el siguiente paso es caracterizar a  $\mathcal{K}(E)$  y  $C(E)$  en las categorías  $\text{kk}$  y  $\text{kk}^h$ . Por [CM21, 4.12] sabemos que para cada grafo  $E$  tenemos un  $*$ -isomorfismo

$$\bigoplus_{v \in E^0} M_{\mathcal{P}_v} \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathcal{K}}(E), \quad \varepsilon_{\alpha, \beta} \mapsto \alpha q_v \beta^*, \quad (v \in E^0, \alpha, \beta \in \mathcal{P}_v) \quad (3.4.2)$$

que se restringe a su vez a un  $*$ -isomorfismo

$$\bigoplus_{v \in \text{reg}(E)} M_{\mathcal{P}_v} \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}(E), \quad \varepsilon_{\alpha, \beta} \mapsto \alpha q_v \beta^*, \quad (v \in E^0, \alpha, \beta \in \mathcal{P}_v), \quad (3.4.3)$$

y entonces [CM21, Proposition 3.12] asegura que los morfismos

$$\hat{\tau} = \bigoplus_{e \in E^0} \iota_v: \ell^{(E^0)} \rightarrow \bigoplus_{v \in E^0} M_{\mathcal{P}_v} \simeq \widehat{\mathcal{K}}(E) \quad (3.4.4)$$

y

$$\mathfrak{q} = \bigoplus_{e \in \text{reg}(E)} \iota_v: \ell^{(\text{reg}(E))} \rightarrow \bigoplus_{v \in \text{reg}(E)} M_{\mathcal{P}_v} \simeq \mathcal{K}(E) \quad (3.4.5)$$

son  $kk$ -isomorfismos.

Supongamos ahora que  $L(E)$  viene equipada con una  $G$ -graduación inducida por una función de peso  $\omega: E^1 \rightarrow G$ . No es inmediato que (3.4.2) y (3.4.3) sigan siendo isomorfismos en  $kk_G^h$ . En primer lugar, para que estos sean morfismos homogéneos debemos equipar a cada álgebra de matrices  $M_{\mathcal{P}_v}$  de una graduación, y entonces la prueba de que (3.4.4) y (3.4.5) son isomorfismos deja de ser únicamente un argumento de estabilidad matricial.

**Convención 3.4.6.** En lo que sigue de esta sección fijamos un grafo finito  $E$  y una función de peso  $\omega: E^1 \rightarrow G$ .

Dado un vértice  $v$  y  $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_v$ , el elemento  $\alpha q_v \beta^* \in \widehat{\mathcal{K}}(E)$  es homogéneo de grado  $\omega(\alpha)\omega(\beta)^{-1}$ . Por lo tanto, la graduación en  $M_{\mathcal{P}_v}$  que hace de (3.4.2) y (3.4.3) morfismos homogéneos es la inducida por la graduación de  $\mathcal{P}_v$  visto como  $G$ -conjunto a través de  $\omega$ . Como además cada vértice  $v$  tiene grado  $1_G$  en  $\mathcal{P}_v$ , el Lema 3.3.10 nos permite concluir que con esta graduación (3.4.2) y (3.4.3) son  $kk_G^h$ -isomorfismos.

**Proposición 3.4.7.** *Los morfismos (3.4.4) y (3.4.5) son isomorfismos en  $kk_G^h$ .* ◆

El siguiente paso en [CM21] es probar que el morfismo

$$\varphi: \ell^{(E^0)} \rightarrow \mathcal{C}(E), \quad \chi_v \mapsto v \quad (v \in E^0) \quad (3.4.8)$$

es un  $kk$ -isomorfismo. La demostración requiere desarrollar varios resultados técnicos y ocupa gran parte de la Sección 4 del artículo mencionado. Un ingrediente de la misma es el uso de cuasimorfismos.

**Definición 3.4.9.** Si  $A$  y  $D$  son dos  $*$ -álgebras graduadas y  $B \triangleleft D$  un  $*$ -ideal homogéneo, un *cuasimorfismo*  $(f, g): A \rightarrow D \triangleright B$  es un par de morfismos  $f, g: A \rightarrow D$  tales que  $f(x) - g(x) \in B$  para cada  $x \in A$ .

**Definición 3.4.10.** Dos morfismos de  $*$ -álgebras graduadas  $f, g: A \rightarrow B$  se dicen *ortogonales* si  $f(x)g(y) = g(y)f(x) = 0$  para todo  $x, y \in A$ . Escribimos en tal caso  $f \perp g$ . Cuando  $f$  y  $g$  son ortogonales, la función  $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$  es un  $*$ -morfismo homogéneo.

Recordamos los principales resultados sobre cuasimorfismos de [CM21, Proposition 3.4]. Los mismos son una adaptación de [CMR07, Proposition 3.3], dada en el contexto de álgebras bornológicas, y se extienden a  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ .

**Proposición 3.4.11.** Sea  $X: \mathbf{G}_{\text{gr}} - \text{Alg}_{\ell}^* \rightarrow \mathbf{T}$  una teoría de homología escisiva y  $(f, g): A \rightarrow D \triangleright B$  un cuasimorfismo. Se tiene inducido un morfismo  $X(f, g): X(A) \rightarrow X(B)$  que satisface las siguientes propiedades:

- (i)  $X(f, 0) = X(f)$ .
- (ii)  $X(f, g) = -X(g, f)$ .
- (iii)  $X(f, f) = 0$ .
- (iv) Si  $(f', g'): A \rightarrow D \triangleright B$  es otro cuasimorfismo y  $f \perp f', g \perp g'$ , entonces  $(f + f', g + g')$  es un cuasimorfismo y  $X(f + f', g + g') = X(f, g) + X(f', g')$ .
- (v) Si  $h: C \rightarrow A$  es un morfismo, entonces  $X(fh, gh) = X(f, g)X(h)$ .
- (vi) Si  $\eta: D \rightarrow D'$  es un morfismo que envía el  $*$ -ideal homogéneo  $B$  a un  $*$ -ideal homogéneo  $B' \triangleleft D'$ , es  $X(\eta f, \eta g) = X(\eta|_B)X(f, g)$ .
- (vii) Si  $X$  es homotópicamente invariante y  $H = (H^+, H^-): A \rightarrow D[t] \triangleright B[t]$  un cuasimorfismo tal que  $\text{ev}_0 H = (f^+, f^-)$  y  $\text{ev}_1 H = (g^+, g^-)$ , entonces  $X(f^+, f^-) = X(g^+, g^-)$ .
- (viii) Si  $(g, h): A \rightarrow D \triangleright B$  es un cuasimorfismo, entonces  $(f, h)$  también lo es y  $X(f, h) = X(f, g) + X(g, h)$ .

◆

A continuación observamos que podemos obtener en  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^h$  una inversa a un lado de  $\varphi$  con el mismo argumento que para el caso no graduado. Si  $E$  es un grafo, se tiene un  $*$ -morfismo

$$\xi: C(E) \rightarrow C^m(E), \quad \xi(v) = m_v, \quad \xi(e) = em_{r(e)} \quad (v \in E^0, e \in E^1) \quad (3.4.12)$$

que es homogéneo pues  $|\xi(v)| = |m_v| = 1_{\mathbb{G}} = |v|$  y  $|\xi(e)| = |em_{r(e)}| = \omega(e) = |e|$  para cada vértice  $v \in E^0$  y arista  $e \in E^1$ . Además, como

$$q_v m_v = m_v - m_v^2 = 0 = m_v^2 - m_v = m_v q_v \quad (v \in E^0),$$

los morfismos  $\xi\varphi$  e  $\hat{\tau}$  son ortogonales. Su suma  $\xi\varphi + \hat{\tau}$  es un  $*$ -morfismo homogéneo bien definido y coincide con  $\text{can } \varphi$ . Más aún, en [CM21] se observa que el par  $(\text{can}, \xi)$  define un cuasimorfismo  $C(E) \rightarrow C^m(E) \triangleright \hat{\mathcal{K}}(E)$  y por la Proposición 3.4.11 tenemos entonces que

$$j_{\mathbb{G}}^h(\text{can}, \xi)j_{\mathbb{G}}^h(\varphi) = j_{\mathbb{G}}^h(\text{can } \varphi, \xi\varphi) = j_{\mathbb{G}}^h(\xi\varphi + \hat{\tau}, \xi\varphi) = j_{\mathbb{G}}^h(\xi\varphi, \xi\varphi) + j_{\mathbb{G}}^h(\hat{\tau}, 0) = j_{\mathbb{G}}^h(\hat{\tau}).$$

Habiendo visto en la Proposición 3.4.7 que  $\hat{\tau}$  es un isomorfismo en  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^h$ , conseguimos una inversa a un lado para  $\varphi$  en esta categoría.

**Proposición 3.4.13.** Si  $\text{can}: C(E) \rightarrow C^m(E)$  es el morfismo canónico y  $\widehat{\iota}, \varphi$  y  $\xi$  son los morfismos definidos en (3.4.4), (3.4.8) y (3.4.12) respectivamente, entonces

$$j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota})^{-1} j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi) j_{\widehat{G}}^h(\varphi) = 1_{\ell(E^0)}.$$

◆

Para adaptar la demostración de que  $j(\varphi)j(\widehat{\iota})^{-1}j(\text{can}, \xi) = 1_{C(E)}$  a  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ , precisamos algunas definiciones más. Dado un grafo  $E$ , consideramos como en [CM21, 4.15] los morfismos de  $*$ -álgebras

$$\widehat{\varphi}: \widehat{\mathcal{K}}(E) \rightarrow M_{\mathcal{P}}C(E), \quad \alpha q_{\nu} \beta^* \mapsto \varepsilon_{\alpha, \beta} \otimes \nu \quad (3.4.14)$$

y

$$\widehat{\iota}_{\tau}: C(E) \rightarrow M_{\mathcal{P}}C(E), \quad \widehat{\iota}_{\tau}(\nu) = \varepsilon_{\nu, \nu} \otimes \nu, \quad \widehat{\iota}_{\tau}(e) = \varepsilon_{s(e), r(e)} \otimes e \quad (\nu \in E^0, e \in E^1). \quad (3.4.15)$$

Si dotamos a  $\mathcal{P}$  de la graduación inducida por  $\omega$ , esto hace de  $M_{\mathcal{P}}$  una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada y de (3.4.14) y (3.4.15) morfismos homogéneos. Al igual que en [CM21, 4.16], tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \ell(E^0) & \xrightarrow{\widehat{\iota}} & \widehat{\mathcal{K}}(E) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \widehat{\varphi} \\ C(E) & \xrightarrow{\widehat{\iota}_{\tau}} & M_{\mathcal{P}}C(E) \end{array} \quad (3.4.16)$$

Nuestro siguiente objetivo es probar que  $\widehat{\iota}_{\tau}$  es un isomorfismo en  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ . Para la  $K$ -teoría bivalente  $\text{kk}$  esto es el contenido de [CM21, Lemma 4.17], que exhibe una homotopía polinomial entre  $\widehat{\iota}_{\tau}$  y una inclusión  $\iota_w: C(E) \rightarrow M_{\mathcal{P}}C(E)$  con  $w \in E^0$ . Como se observa en [Cor21, Theorem 3.2], se requiere una modificación para conseguir una homotopía que preserve las involuciones.

**Lema 3.4.17** (cf. [CM21, Lemma 4.17]). *El morfismo (3.4.15) es un  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ -isomorfismo.*

*Demostración.* Fijemos  $w \in E^0$ . La demostración consistirá en explicitar la homotopía entre  $\iota_{+} \downarrow_w$  y  $\iota_{+} \widehat{\iota}_{\tau}$  dada en [Cor21, Theorem 3.2] y verificar que preserva las graduaciones. Para cada  $\nu \in E^0 \setminus \{w\}$ , se definen

$$\begin{aligned} A_{\nu} &= [(1-t)^2 \varepsilon_{w, \nu} + (t^3 - 2t) \varepsilon_{w, \nu} + t \varepsilon_{\nu, w} + (1-t^2) \varepsilon_{\nu, \nu}] \otimes \nu, \\ B_{\nu} &= [(1-t^2) \varepsilon_{w, \nu} + (2t - t^3) \varepsilon_{w, \nu} - t \varepsilon_{\nu, w} + (1-t)^2 \varepsilon_{\nu, \nu}] \otimes \nu \\ A_w &= B_w = \varepsilon_{w, w} \otimes w, \end{aligned}$$

que son combinaciones  $\ell$ -lineales de elementos de la forma  $p(t) \varepsilon_{u, u'} \otimes u''$  con  $p \in \ell[t]$  y  $u, u', u'' \in E^0$ . Como estos últimos son homogéneos de grado  $1_G$ , pues  $|u| = |u'| =$

$|u''| = 1_G$ , se tiene que  $A_u, B_u \in (M_{\mathcal{P}}C(E)[t])_{1_G}$  para todo  $u \in E^0$ . A continuación ponemos

$$C_u := c(A_u, B_u) = \begin{pmatrix} \lambda^* A_u + \lambda B_u^* & \lambda^*(A_u - B_u^*) \\ \lambda(A_u - B_u^*) & \lambda A_u + \lambda^* B_u^* \end{pmatrix}, \quad (u \in E^0)$$

con  $\lambda \in \ell$  que satisfaga (1.0.1). Por el Lema 3.3.12, cada matriz  $C_u$  es un elemento homogéneo de grado  $1_G$  en  $M_{\pm}M_{\mathcal{P}}C(E)[t]$ . La \*-homotopía en cuestión es

$$\begin{aligned} H: C(E) &\rightarrow M_{\pm}M_{\mathcal{P}}C(E)[t] \\ v &\mapsto C_v \iota_+(\varepsilon_{v,v} \otimes v) C_v^* \\ e &\mapsto C_{s(e)} \iota_+(\varepsilon_{s(e),r(e)} \otimes e) C_{r(e)}^* \\ e^* &\mapsto H(e)^* \end{aligned}$$

Como  $\iota_+$  es un morfismo homogéneo, obtenemos

$$|H(v)| = |C_v \iota_+(\varepsilon_{v,v} \otimes v) C_v^*| = |C_v| \cdot |\iota_+(\varepsilon_{v,v} \otimes v)| \cdot |C_v|^{-1} = |\varepsilon_{v,v} \otimes v| = 1_G$$

y

$$\begin{aligned} |H(e)| &= |C_{s(e)} \iota_+(\varepsilon_{s(e),r(e)} \otimes e) C_{r(e)}^*| \\ &= |C_{s(e)}| \cdot |\varepsilon_{s(e),r(e)} \otimes e| \cdot |C_{r(e)}|^{-1} \\ &= |s(e)| \cdot |e| \cdot |r(e)|^{-1} = \omega(e), \end{aligned}$$

lo que prueba que  $H$  es homogéneo. En consecuencia los morfismos  $\iota_+ \widehat{\iota}_\tau$  y  $\iota_+ \widehat{\iota}_w$  son elementalmente homotópicos en  $G_{gr} - \text{Alg}_{\ell}^*$ .

Finalmente, como  $j_G^h(\iota_+)$  es un isomorfismo, se obtiene que  $j_G^h(\widehat{\iota}_\tau) = j_G^h(\widehat{\iota}_w)$ , y este último es un isomorfismo por la Proposición 3.3.8.  $\blacklozenge$

Consideraremos ahora el submódulo de  $M_{\mathcal{P}}C(E)$  definido como

$$\mathfrak{A} = \text{gen}_{\ell}\{\varepsilon_{\gamma,\delta} \otimes \alpha\beta^* : s(\alpha) = r(\gamma), s(\beta) = r(\delta), r(\alpha) = r(\beta)\} \subset M_{\mathcal{P}}C(E),$$

que resulta ser más aún una subálgebra. Se observa también en [CM21, Proof of Theorem 4.2, part II] que la misma contiene las imágenes de  $\widehat{\phi}$  y  $\widehat{\iota}_\tau$ , así que a partir del diagrama (3.4.16) correstrictiendo se obtiene un diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell^{(E^0)} & \xrightarrow{\widehat{\iota}} & \widehat{\mathcal{K}}(E) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \widehat{\phi} \\ C(E) & \xrightarrow{\widehat{\iota}_\tau} & \mathfrak{A} \end{array} \quad (3.4.18)$$

donde omitimos la notación para ambas restricciones.

Al  $\mathfrak{A}$  estar generada como  $\ell$ -módulo por elementos homogéneos, definiendo  $\mathfrak{A}_g := \mathfrak{A} \cap (M_{\mathcal{P}}C(E))_g$  para cada  $g \in G$  esta es una subálgebra graduada de  $M_{\mathcal{P}}C(E)$  y por

tanto el anterior diagrama es efectivamente un diagrama en  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ . Además, como  $\widehat{\iota}_\tau$  es un isomorfismo en  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ , la imagen de su restricción es un monomorfismo en esta categoría.

Recordemos que, en vista de la Proposición 3.4.13, queremos ver que

$$1_{C(E)} = j_{\widehat{G}}^h(\varphi)j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota})^{-1}j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi).$$

Lo observado nos dice que postcomponiendo por  $j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota}_\tau)$  podemos probar equivalentemente que  $j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota}_\tau)$  es igual a

$$j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota}_\tau)j_{\widehat{G}}^h(\varphi)j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\iota})^{-1}j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi) = j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\varphi})j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi).$$

Usando el ítem (vi) de la Proposición 3.4.11, para ver esto último construiremos un álgebra  $D$  y un morfismo  $\Upsilon: C^m(E) \rightarrow D$  que se restrinja a  $\widehat{\varphi}$ , de forma que tengamos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \ell(E^0) & \xrightarrow{\widehat{\iota}} & \widehat{\mathcal{K}}(E) & \xleftarrow{\text{inc}} & C^m(E) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \widehat{\varphi} & & \downarrow \Upsilon \\ C(E) & \xrightarrow{\widehat{\iota}_\tau} & \mathfrak{A} & \xleftarrow{\text{-----}} & D \end{array} \quad (3.4.19)$$

y en consecuencia  $j_{\widehat{G}}^h(\widehat{\varphi})j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi) = j_{\widehat{G}}^h(\Upsilon|_{\widehat{\mathcal{K}}(E)})j_{\widehat{G}}^h(\text{can}, \xi) = j_{\widehat{G}}^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon \xi)$ .

Sea  $\rho: C^m(E) \rightarrow \Gamma_{\mathcal{P}}$  el  $*$ -morfismo definido por

$$\rho(v) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^v} \varepsilon_{\alpha, \alpha}, \quad \rho(e) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^{r(e)}} \varepsilon_{e\alpha, \alpha}, \quad \rho(m_w) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}^w, |\alpha| \geq 1} \varepsilon_{\alpha, \alpha} \quad (3.4.20)$$

para cada  $v \in E^0$ ,  $e \in E^1$  y  $w \in \text{inf}(E)$ , y sea  $\widetilde{\rho}: x \in C^m(E) \mapsto \rho(x) \otimes 1 \in \Gamma_{\mathcal{P}} \widetilde{C^m(E)}$ .

Se define como en [CM21] la  $*$ -álgebra  $C^m(E) \times_{\widetilde{\rho}} \mathfrak{A}$ , esto es, el  $\ell$ -módulo  $C^m(E) \oplus \mathfrak{A}$  equipado con la multiplicación

$$(r, x) \cdot (s, y) := (rs, \widetilde{\rho}(r)y + x\widetilde{\rho}(s) + xy). \quad (3.4.21)$$

*Observación 3.4.22.* Notemos que la imagen del morfismo  $\rho'$  cae en el álgebra  $\Gamma_{\mathcal{P}} \widetilde{C^m(E)}$  de la Definición 2.1.4 y su correstricción es un morfismo homogéneo. En consecuencia, una verificación directa a partir de la regla de multiplicación (3.4.21) muestra que la asignación

$$(C^m(E) \times_{\widetilde{\rho}} \mathfrak{A})_g := C^m(E)_g \oplus \mathfrak{A}_g \quad (3.4.23)$$

para cada  $g \in G$  define una estructura de  $*$ -álgebra  $G$ -graduada en  $C^m(E) \times_{\widetilde{\rho}} \mathfrak{A}$ . En particular, el ideal

$$\begin{aligned} J &= \langle (\alpha q_\nu \beta^*, -\varepsilon_{\alpha, \beta} \otimes \nu) : \nu = r(\alpha) = r(\beta) \rangle \\ &= \text{gen}_\ell \{ (\alpha q_\nu \beta^*, -\varepsilon_{\alpha, \beta} \otimes \nu) : \nu = r(\alpha) = r(\beta) \} \end{aligned}$$

es por definición homogéneo y entonces

$$D := (C^m(E) \rtimes_{\hat{\rho}} \mathfrak{A})/J$$

es una  $*$ -álgebra  $G$ -graduada.

En [CM21, Lemma 4.19] se muestra que la composición

$$\mathfrak{A} \hookrightarrow 0 \rtimes_{\hat{\rho}} \mathfrak{A} \hookrightarrow C^m(E) \rtimes_{\hat{\rho}} \mathfrak{A} \twoheadrightarrow D$$

es inyectiva y junto con la proyección

$$\Upsilon: C^m(E) \rightarrow D, \quad \Upsilon(x) = [(x, 0)] \quad (3.4.24)$$

hacen de (3.4.19) un diagrama conmutativo en  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$ . Como notamos, en particular

$$j_G^h(\hat{\varphi})j_G^h(\text{can}, \xi) = j_G^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon\xi),$$

y lo que debemos probar es que esto coincide con  $j_G^h(\hat{\iota}_\tau)$ .

Por definición de  $D$  los morfismos  $\Upsilon\xi \perp \hat{\iota}_\tau$  son ortogonales y en particular usando la Proposición 3.4.11 es

$$j_G^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon\xi + \hat{\iota}_\tau) = j_G^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon\xi) + j_G^h(0, \hat{\iota}_\tau) = j_G^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon\xi) - j_G^h(\hat{\iota}_\tau).$$

Esto significa que para conseguir nuestro objetivo, debemos ver que  $j_G^h(\Upsilon \text{can}, \Upsilon\xi + \hat{\iota}_\tau) = 0$ . Nuevamente por la Proposición 3.4.11, una forma de mostrar esto es probando que  $\iota_+ \Upsilon \text{can}$  y  $\iota_+(\Upsilon\xi + \hat{\iota}_\tau)$  son homotópicos. Un argumento similar sin tener en consideración a  $\iota_+$  se da en [CM21, Lemma 4.21]. La homotopía allí definida no preserva las involuciones, y es por eso que se deben realizar algunas modificaciones como se indica en [Cor21, Theorem 3.2].

**Lema 3.4.25.** *Los morfismos  $\iota_+ \Upsilon \text{can}$  y  $\iota_+(\Upsilon\xi + \hat{\iota}_\tau)$  en  $G_{gr} - \text{Alg}_\ell^*$  son homotópicos.*

*Demostración.* La demostración consiste en exhibir la homotopía  $H$  entre  $\iota_+ \Upsilon \text{can}$  y  $\iota_+(\Upsilon\xi + \hat{\iota}_\tau)$  de [Cor21, Theorem 3.2], que es un morfismo de  $*$ -álgebras, y verificar que es homogénea. Para cada  $e \in E^1$  ponemos

$$U_e := \varepsilon_{s(e),s(e)}(1 - t^2)ee^* + \varepsilon_{e,s(e)}te^*, \quad V_e := \varepsilon_{s(e),s(e)}(1 - t^2)ee^* + \varepsilon_{s(e),e}(2t - t^3)e,$$

ambos elementos homogéneos de grado  $1_G$  en  $\mathfrak{A}[t]$ , y

$$W_e := c(U_e, V_e) = \begin{pmatrix} \lambda^*U_e + \lambda V_e^* & \lambda^*(U_e - V_e^*) \\ \lambda(U_e - V_e^*) & \lambda U_e + \lambda^*V_e^* \end{pmatrix}$$

que por el Lema 3.3.12 es también homogéneo de grado  $1_G$ . La homotopía se define como

$$\begin{aligned} H: C(E) &\rightarrow M_\pm D[t] \\ v &\mapsto \iota_+(v, 0) \\ e &\mapsto \iota_+(em_{r(e)}, 0) + (0, W_e)(0, \iota_+(\varepsilon_{s(e),r(e)}e)) \\ e^* &\mapsto H(e)^* \end{aligned}$$

para cada  $v \in E^0, e \in E^1$ . Como  $|m_v| = 1_G, |e_{m_{r(e)}}| = |e| = \omega(e), |W_e| = 1_G$  y  $|\varepsilon_{s(e),r(e)}e| = \omega(e)$ ; usando que  $\iota_+$  es homogénea se obtiene  $|H(v)| = 0$  y  $|H(e)| = 1$  para cada vértice  $v \in E^0$  y arista  $e \in E^1$ . Esto muestra que  $H$  es homogénea, lo que concluye la prueba.  $\blacklozenge$

Esto concluye demostración de la caracterización de álgebras de Cohn en  $kk_G^h$ .

**Teorema 3.4.26.** *El morfismo (3.4.8) definido como*

$$\varphi: \ell^{(E^0)} \rightarrow C(E), \quad \chi_v \mapsto v \quad (v \in E^0)$$

es un  $kk_G^h$ -isomorfismo.  $\blacklozenge$

A partir del triángulo distinguido (3.4.1), esto nos permite obtener un triángulo distinguido en  $kk_G^h$ .

**Corolario 3.4.27.** *Se tiene un triángulo distinguido*

$$\ell^{(\text{reg}(E))} \xrightarrow{f} \ell^{(E^0)} \xrightarrow{g} L(E) \quad (3.4.28)$$

en  $kk_G^h$  con  $f = j_G^h(\varphi)^{-1}j_G^h(\text{inc } q)$  y  $g = j_G^h(p\varphi)$ .

*Demostración.* Basta observar que por la Proposición 3.4.7 y el Teorema 3.4.26 se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}(E) & \xleftarrow{\text{inc}} & C(E) & \xrightarrow{p} & L(E) \\ \uparrow q & & \uparrow \varphi & & \\ \ell^{(\text{reg}(E))} & \dashrightarrow & \ell^{(E^0)} & & \end{array}$$

en  $kk_G^h$ , y la fila superior es un triángulo distinguido.  $\blacklozenge$

*Observación 3.4.29.* Sea  $E$  un grafo finito equipado con una acción de  $G$  que fija vértices, es decir, una acción  $G \curvearrowright E^1$  tal que  $r(g \cdot e) = r(e)$  y  $s(g \cdot e) = s(e)$  para cada  $e \in E^1$ . Definiendo  $g \cdot e^* = (g \cdot e)^*$  se tiene una estructura de  $G$ -\*-álgebra bien definida en  $C(E)$  y  $L(E)$  extendiendo la acción definida sobre los generadores. Bajo estas condiciones sobre la acción, un argumento similar al de esta sección permite adaptar las demostraciones de [CM21] al caso equivariante, pues tanto los morfismos como las homotopías involucradas resultan morfismos de  $G$ -\*-álgebras. Se tiene por lo tanto un triángulo como (3.4.28) en  $kk_G^h$ , y el morfismo  $g$  viene inducido por el mismo morfismo a nivel de álgebras.

### 3.5. Álgebras de Leavitt y K-teoría graduada

Sea  $R$  un anillo unital  $G$ -graduado. Un  $R$ -módulo  $G$ -graduado es un  $R$ -módulo  $M$  junto con una descomposición en  $R$ -submódulos  $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$  tales que  $R_s M_t \subset M_{st}$  para cada  $s, t \in G$ . Un morfismo  $f: M \rightarrow N$  entre  $R$ -módulos  $G$ -graduados es un

morfismo  $R$ -lineal que satisface  $f(M_g) \subset N_g$  para cada  $g \in G$ . Notamos  $G_{\text{gr}} - R - \text{mod}$  a la categoría de  $R$ -módulos  $G$ -graduados.

Un  $R$ -módulo  $G$ -graduado es *proyectivo* si es proyectivo como  $R$ -módulo. Por [Haz16, Proposition 1.2.1] esta noción coincide con la de objeto proyectivo en la categoría  $G_{\text{gr}} - R - \text{mod}$ . La suma directa de dos  $R$ -módulos  $G$ -graduados  $M$  y  $N$  es a su vez  $G$ -graduado definiendo  $(M \oplus N)_g = M_g \oplus N_g$ . Con esta operación, las clases de isomorfismo de  $R$ -módulos  $G$ -graduados proyectivos forman un monoide que denotaremos  $\mathcal{V}^{G_{\text{gr}}}(R)$ .

**Definición 3.5.1.** El *grupo de Grothendieck graduado* de  $R$  es la completación a grupo de este monoide,

$$K_0^{G_{\text{gr}}}(R) := \mathcal{V}^{G_{\text{gr}}}(R)^+.$$

**Convención 3.5.2.** Si  $R$  es  $\mathbb{Z}$ -graduado, escribimos  $\mathcal{V}^{\text{gr}}(R) := \mathcal{V}^{\mathbb{Z}_{\text{gr}}}(R)$  y  $K_0^{\text{gr}}(R) := K_0^{\mathbb{Z}_{\text{gr}}}(R)$ .

Si  $M$  es un  $R$ -módulo  $G$ -graduado y  $h \in G$ , el  *$h$ -shift* de  $M$  es el  $R$ -módulo  $G$ -graduado

$$M[h] = \bigoplus_{g \in G} M[h]_g, \quad M[h]_g = M_{hg}.$$

Esta asignación define una acción  $\mathbb{Z}$ -lineal de  $G$  en  $K_0^{G_{\text{gr}}}(R)$  y por lo tanto dota a este último de una estructura de  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo.

Nuestra referencia para la teoría de anillos graduados y sus grupos de Grothendieck graduados es [Haz16]. Enunciamos ahora algunos resultados que nos permitirán calcular el grupo de Grothendieck graduado en casos particulares.

*Observación 3.5.3.* En general, si  $R$  es un anillo  $G$ -graduado, notamos  $R_1$  a la componente homogénea de grado la identidad de  $G$ . Como  $R_1 R_1 \subset R_{1 \cdot 1} = R_1$ , este resulta un subanillo de  $R$ . Cuando  $G$  sea abeliano y estemos empleando notación aditiva escribiremos  $R_0$  para referirnos a este subanillo.

*Observación 3.5.4.* Sea  $R$  un anillo  $G$ -graduado. Si  $M$  es un  $R$ -módulo  $G$ -graduado, entonces tiene una estructura canónica de  $R_1$ -módulo pues  $R_1 \cdot M_s \subset M_{1 \cdot s} = M_s$  para cada  $s \in G$ . En particular, tenemos un funtor de restricción de escalares

$$\mathcal{U}_1 : G_{\text{gr}} - R - \text{mod} \rightarrow R_1 - \text{mod}.$$

En la otra dirección podemos extender escalares. Concretamente, si  $N$  es un  $R_1$ -módulo, entonces  $R \otimes_{R_1} N$  es un  $R$ -módulo y resulta  $G$ -graduado definiendo  $R \otimes_{R_1} N := R_g \otimes_{R_1} N$  para cada  $g \in G$ . Esto define un funtor  $R \otimes_{R_1} - : R_1 - \text{mod} \rightarrow G_{\text{gr}} - R - \text{mod}$ .

**Teorema 3.5.5** (Teorema de Dade). *Sea  $R$  un anillo unital  $G$ -graduado. Son equivalentes:*

- (i) *Los funtores  $\mathcal{U}_1 : G_{\text{gr}} - R - \text{mod} \rightarrow R_1 - \text{mod}$  y  $R \otimes_{R_1} - : R_1 - \text{mod} \rightarrow G_{\text{gr}} - R - \text{mod}$  son equivalencias inversas de categorías.*
- (ii) *El anillo  $R$  es fuertemente graduado, esto es, para cada par de elementos  $g, h \in G$  se tiene que  $R_g R_h = R_{gh}$ .*

*Demostración.* Ver [Haz16, Theorem 1.5.1].  $\blacklozenge$

**Corolario 3.5.6.** Si  $R$  es un anillo unital fuertemente  $G$ -graduado, entonces  $K_0^{\text{Gr}}(R) \simeq K_0(R_1)$ .  $\blacklozenge$

En [Haz13b] Hazrat caracteriza a las álgebras de Leavitt fuertemente  $\mathbb{Z}$ -graduadas para su graduación canónica.

**Teorema 3.5.7.** Sea  $E$  un grafo finito. El álgebra de Leavitt  $L(E)$  con coeficientes en un anillo conmutativo unital es fuertemente  $\mathbb{Z}$ -graduada si y sólo si  $E$  no tiene pozos.

*Demostración.* Ver [Haz13b, Theorem 3.15] y las observaciones precedentes.  $\blacklozenge$

En este caso, podemos determinar  $K_0^{\text{Gr}}(L(E))$  a partir de  $L(E)_0$ . Si  $E$  no tiene pozos esta última es un álgebra ultramatricial con matriz de transición  $A_E^t$ , como se recuerda en [Haz16, Section 3.9.3]. Por lo tanto

$$K_0^{\text{Gr}}(L(E)) \simeq K_0(L(E)_0) \simeq K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{colim} \left( \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A_E^t} \mathbb{Z}^n \xrightarrow{A_E^t} \mathbb{Z}^n \rightarrow \dots \right). \quad (3.5.8)$$

**Ejemplo 3.5.9.** Sea  $n \geq 2$  y  $L_n = L(R_n)$  el álgebra de Leavitt de la rosa de  $n$ -pétalos. Como  $R_n$  no tiene pozos, es  $K_0^{\text{Gr}}(L_n) \simeq K_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\frac{1}{n}] \simeq K_0(\ell)[\frac{1}{n}]$ .

Como caso particular del ejemplo anterior, vemos que el grupo de Grothendieck graduado de  $L_2$  es  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  mientras que  $K_0(L_2) = 0$ . En general, esto pareciera indicar que la  $K$ -teoría graduada es un invariante más fino.

**Definición 3.5.10.** Sea  $R$  un anillo  $G$ -graduado. El *cono positivo*  $K_0^{\text{Gr}}(R)_+$  de  $K_0^{\text{Gr}}(R)$  es la imagen del morfismo canónico  $\mathcal{V}^{\text{Gr}}(R) \rightarrow K_0^{\text{Gr}}(R)$ . Dicho de otra forma, el cono positivo es el submonoide de  $K_0^{\text{Gr}}(R)$  generado por las clases de isomorfismo de  $R$ -módulos  $G$ -graduados proyectivos.

En [Haz13a] Hazrat conjetura que un isomorfismo entre grupos de Grothendieck graduados de álgebras de Leavitt implica la existencia de un isomorfismo homogéneo entre las álgebras.

**Conjetura** (Hazrat, [Haz13a, Conjecture 1]). Si  $E$  y  $F$  son grafos sin emisores infinitos, entonces  $L(E) \simeq_{\text{Gr}} L(F)$  si y sólo si hay un isomorfismo de  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulos  $\xi: K_0^{\text{Gr}}(L(E)) \rightarrow K_0^{\text{Gr}}(L(F))$  tal que  $\xi(K_0^{\text{Gr}}(L(E))_+) \subset K_0^{\text{Gr}}(L(F))_+$  y  $\xi([L(E)]) = [L(F)]$ .

En este mismo artículo Hazrat demuestra la conjetura para grafos acíclicos y una familia de grafos llamados grafos policefálicos, ver [Haz13a, Definition 8, Theorem 9].

### 3.6. Revestimientos

Sea  $E$  un grafo y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso. Como ya observamos, esta función determina una estructura de  $*$ -álgebra  $G$ -graduada en  $L(E)$ . Cuando  $\omega \equiv 1 \in \mathbb{Z}$  obtenemos la graduación canónica inducida por la longitud de caminos.

El *revestimiento*  $\text{Cov}(E, \omega)$  de  $E$  asociado a  $\omega$  es el grafo cuyos vértices y aristas son

$$\text{Cov}(E, \omega)^0 = E^0 \times G, \quad \text{Cov}(E, \omega)^1 = E^1 \times G,$$

y sus funciones de salida y llegada se definen como

$$s(e, g) = (s(e), g), \quad r(e, g) = (r(e), g\omega(e)).$$

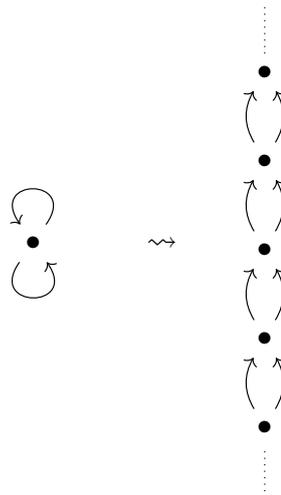
Por definición, un vértice  $(v, g) \in \text{Cov}(E, \omega)$  es un pozo, una fuente o un emisor infinito si y sólo si  $v$  lo es en  $E$ . En particular, se tiene que  $\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega)) = \text{reg}(E) \times G$ .

El ejemplo que nos resultará de mayor interés es el caso en el que el grupo es  $\mathbb{Z}$  y la función de peso es  $\omega \equiv 1$ . Cuando omitamos hacer referencia a una función de peso asumiremos estar trabajando en esta situación, en cuyo caso notamos  $\tilde{E}$  al revestimiento de  $E$  y escribimos  $v_n = (v, n)$  y  $e_n = (e, n)$  para cada  $v \in E^0, e \in E^1, n \in \mathbb{Z}$ . En estos términos, las funciones de llegada y salida son

$$s(e_n) = v_n, \quad r(e_n) = e_{n+1}.$$

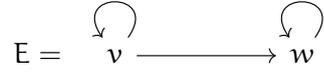
También consideraremos el *revestimiento de  $n$ -hojas*  ${}_n\tilde{E}$  de  $E$ , que es el inducido por la función de peso con valor constantemente  $[1] \in \mathbb{Z}_n$ . Una vez más, escribimos  $v_n = (v, [n])$  y  $e_n = (e, [n])$  para cada  $v \in E^0, e \in E^1, n \in \mathbb{Z}$ . Veamos ahora algunos ejemplos.

**Ejemplo 3.6.1.** Sea  $E = R_n$ . Su revestimiento consiste de una colección de vértices indexada por  $\mathbb{Z}$ , y  $n$  aristas entre cada uno y el siguiente. Por ejemplo, si  $n = 2$  tenemos las siguientes representaciones gráficas:

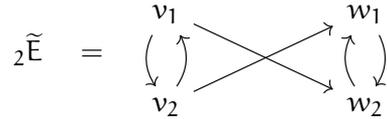


*Observación 3.6.2.* Si  $E$  es un grafo cualquiera, su revestimiento  $\tilde{E}$  es acíclico.

**Ejemplo 3.6.3.** Si consideramos el grafo



su revestimiento de 2 hojas es



En [AHL18] se prueba que  $L(\text{Cov}(E, \omega))$  coincide con el producto cruzado  $G \widehat{\bowtie} L(E)$ . Veremos ahora que este isomorfismo proviene de un isomorfismo a nivel de las álgebras de Cohn.

**Proposición 3.6.4** (cf. [AHL18, Corollary 5.3]). *Sea  $E$  un grafo finito y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso. La asignación*

$$\begin{aligned} \phi: C(\text{Cov}(E, \omega)) &\rightarrow G \widehat{\bowtie} C(E) \\ v_g &\mapsto \chi_g \widehat{\bowtie} v \\ e_g &\mapsto \chi_g \widehat{\bowtie} e \\ e_g^* &\mapsto \chi_{g\omega(e)} \widehat{\bowtie} e^* \end{aligned}$$

define un isomorfismo de  $G$ -\*-álgebras que envía  $\mathcal{K}(\text{Cov}(\omega, E))$  a  $G \widehat{\bowtie} \mathcal{K}(E)$ . En particular  $\phi$  induce un isomorfismo entre ambos cocientes,

$$L(\text{Cov}(E, \omega)) \simeq G \widehat{\bowtie} L(E).$$

*Demostración.* Una vez que veamos que  $\phi$  es un morfismo de álgebras bien definido, será un \*-morfismo equivariante pues por construcción preserva esta estructura sobre generadores.

Veamos entonces que las imágenes de vértices y aristas de  $\text{Cov}(E, \omega)$  a través de  $\phi$  satisfacen las relaciones que definen a  $C(\text{Cov}(E, \omega))$ . Para cada par de vértices  $v_g, w_h$  en  $\text{Cov}(E, \omega)$  es

$$\phi(v_g)\phi(v_h) = (\chi_g \widehat{\bowtie} v)(\chi_h \widehat{\bowtie} w) = \delta_{g,h} \cdot \chi_g \widehat{\bowtie} vw = \delta_{g,h} \delta_{v,w} \chi_g \widehat{\bowtie} v = \phi(\delta_{g,h} \delta_{v,w} v_g).$$

y como  $v_g = w_h$  si y sólo si  $g = h$  y  $v = w$ , esto nos dice que efectivamente

$$\phi(v_g)\phi(v_h) = \phi(\delta_{v_g, w_h} v_g).$$

Por otro lado, para cada arista  $e_g$  se tiene que

$$\phi(s(e_g))\phi(e_g) = (\chi_g \widehat{\bowtie} v)(\chi_g \widehat{\bowtie} e) = \chi_g \widehat{\bowtie} ve = \chi_g \widehat{\bowtie} e = \phi(e_g)$$

y de igual modo  $\phi(e_g)\phi(r(e_g)) = \phi(e_g)$ . Similarmente, un cálculo directo muestra que  $\phi(e_g^*)\phi(s(e_g)) = \phi(r(e_g))\phi(e_g^*) = \phi(e_g^*)$ . Si ahora  $e_g, f_h \in \text{Cov}(E, \omega)^1$  son dos aristas, es

$$\begin{aligned}\phi(e_g)^* \cdot \phi(f_h) &= (\chi_{g\omega(e)} \widehat{\times} e^*)(\chi_h \widehat{\times} f) = \delta_{g,h} \cdot \chi_{g\omega(e)} \widehat{\times} e^* f \\ &= \delta_{g,h} \delta_{e,f} \cdot \chi_{g\omega(e)} \widehat{\times} r(e) = \delta_{g,h} \delta_{e,f} \phi(r(e_g)) \\ &= \phi(\delta_{e_g, f_h} r(e_g)),\end{aligned}$$

lo que te termina de mostrar que  $\phi$  es un  $*$ -morfismo bien definido. Como

$$\begin{aligned}\phi(q_{v_g}) &= \phi(v_g) - \sum_{e \in s^{-1}(v_g)} \phi(ee^*) \\ &= \phi(v_g) - \sum_{e \in s^{-1}(v)} \phi(e_g e_g^*) \\ &= \chi_g \widehat{\times} v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} (\chi_g \widehat{\times} e)(\chi_{g\omega(e)} \widehat{\times} e^*) \\ &= \chi_g \widehat{\times} v - \sum_{e \in s^{-1}(v)} \chi_g \widehat{\times} ee^* \\ &= \chi_g \widehat{\times} q_v,\end{aligned}$$

se obtiene que  $\phi(\mathcal{K}(\text{Cov}(E, \omega))) = G \widehat{\times} \mathcal{K}(E)$ .

Para terminar debemos ver que  $\phi$  es un isomorfismo. Usaremos que por [AASM17, Proposition 1.5.6] el conjunto  $\mathcal{B} = \{\alpha\beta^* : \alpha, \beta \in \mathcal{P}(\text{Cov}(E, \omega)), r(\alpha) = r(\beta)\}$  es una  $\ell$ -base de  $C(\text{Cov}(E, \omega))$ . El mismo tiene por imagen vía  $\phi$  a todos los elementos de la forma  $\chi_g \widehat{\times} \eta v^*$  con  $\eta, v \in \mathcal{P}(E)$  y  $r(\eta) = r(v)$ . Usando [AASM17, Proposition 1.5.6] una vez más, vemos entonces que  $\phi(\mathcal{B})$  es una  $\ell$ -base de  $G \widehat{\times} C(E)$ , lo que termina la demostración.  $\blacklozenge$

**Corolario 3.6.5.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos y  $\omega: E^1 \rightarrow G, \theta: F^1 \rightarrow G$  funciones de peso. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Las  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ -isomorfas.
- (ii) Las  $G$ - $*$ -álgebras  $L(\text{Cov}(E, \omega))$  y  $L(\text{Cov}(F, \theta))$  son  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h$ -isomorfas.

*Demostración.* Basta aplicar el Teorema 2.3.25 y luego la Proposición 3.6.4.  $\blacklozenge$

*Observación 3.6.6.* En [AHL18, Proposition 2.5] se muestra que si  $A$  es un anillo con unidades locales, las categorías de  $A$ -módulos graduados y  $G \widehat{\times} A$ -módulos uniales son isomorfas. Dado  $g \in G$ , el functor que envía un módulo graduado a su  $g$ -shift se corresponde bajo este isomorfismo con el functor que envía un  $G \widehat{\times} A$ -módulo  $M$  al módulo  $\mathcal{S}^g(M)$  que como grupo abeliano coincide con  $M$  y satisface  $(h \widehat{\times} a) \cdot m = hg \widehat{\times} a \cdot m$  para cada  $m \in M, h \in G, a \in A$ . Más aún, cuando  $A$  es el álgebra de Leavitt de un grafo en la demostración de [AHL18, Proposition 5.7] se muestra que

este isomorfismo preserva los objetos proyectivos finitamente generados. Este resultado junto con la Proposición 3.6.4 nos da un isomorfismo

$$K_0^{\text{Gr}}(L(E)) \simeq K_0(L(\text{Cov}(E, \omega))).$$

Bajo este isomorfismo, la estructura de  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo de  $K_0^{\text{Gr}}(L(E))$  se corresponde con la acción de  $G$  en  $K_0(L(\text{Cov}(E, \omega)))$  inducida por la acción de  $G$  en  $L(\text{Cov}(E, \omega))$ .

**Ejemplo 3.6.7.** Si  $n, m \geq 2$  entonces  $\mathfrak{B}\mathfrak{F}(\widetilde{mR_n}) = \mathbb{Z}/(n^m - 1)\mathbb{Z}$ . Por lo tanto, si vemos a  $L_n$  como  $*$ -álgebra  $\mathbb{Z}_m$ -graduada con la graduación inducida por la graduación canónica, es  $K_0^{\text{Gr}}(R_n) = \mathbb{Z}/(n^m - 1)\mathbb{Z}$ . La acción de  $\mathbb{Z}_m$  se corresponde en este caso con la multiplicación por  $n$ .

Usando el Corolario 2.3.26, la Proposición 3.6.4 también nos dice que

$$kk_G^h(\ell, L(E)) \simeq K^h H_0(L(\text{Cov}(E, \omega))) \quad (3.6.8)$$

para todo grafo  $E$  y función de peso  $\omega: E^1 \rightarrow G$ .

Si  $E$  es finito y el grupo  $G$  es numerable, entonces  $\text{Cov}(E, \omega)$  tiene numerables vértices y aristas. Si además  $\ell$  es un cuerpo de característica distinta de 2, sabemos que  $K^h H_0(L(\text{Cov}(E, \omega)))$  es isomorfo a  $K_0^h(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{B}\mathfrak{F}(\text{Cov}(E, \omega))$ .

Suponiendo que  $E$  no tiene emisores infinitos, tampoco los tiene  $\text{Cov}(E, \omega)$  y entonces  $\mathfrak{B}\mathfrak{F}(\text{Cov}(E, \omega))$  coincide con  $K_0(L(\text{Cov}(E, \omega)))$ . En definitiva, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 3.6.9.** *Supongamos que  $G$  es contable y  $\ell$  es un cuerpo de característica distinta de 2. Dado un grafo finito  $E$  y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso, se tiene un isomorfismo*

$$kk_G^h(\ell, L(E)) \simeq K_0^h(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} K_0^{\text{Gr}}(L(E)). \quad (3.6.10)$$

◆

A partir de la dualidad de Baaj-Skandalis, sabemos que el funtor  $G \widehat{\otimes} -: kk_G^h \rightarrow kk_G^h$  es una equivalencia de categorías. Aplicando esto al triángulo (3.4.28), y usando las identificaciones

$$\ell(\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))) \xrightarrow{\cong} \ell(\text{reg}(E) \times G) \xrightarrow{\cong} G \widehat{\otimes} \ell(\text{reg}(E)), \quad \ell(\text{Cov}(E, \omega)^0) \xrightarrow{\cong} \ell(E^0 \times G) \xrightarrow{\cong} G \widehat{\otimes} \ell(E^0)$$

inducidas por las biyecciones  $\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega)) \rightarrow \text{reg}(E) \times G$  y  $\text{Cov}(E, \omega)^0 \rightarrow E^0 \times G$ , obtenemos el siguiente diagrama en  $kk_G^h$ .

$$\begin{array}{ccccc} K(\text{Cov}(E, \omega)) & \xleftarrow{\widetilde{\text{inc}}} & C(\text{Cov}(E, \omega)) & \xrightarrow{\widetilde{\text{p}}} & L(\text{Cov}(E, \omega)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ G \widehat{\otimes} \mathcal{K}(E) & \xleftarrow{G \widehat{\otimes} \text{inc}} & G \widehat{\otimes} C(E) & \xrightarrow{G \widehat{\otimes} \text{p}} & G \widehat{\otimes} L(E) \\ \uparrow \wr G \widehat{\otimes} \text{q} & & \uparrow \wr G \widehat{\otimes} \varphi & & \\ G \widehat{\otimes} \ell(\text{reg}(E)) & & G \widehat{\otimes} \ell(E^0) & & \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr & & \\ \ell(\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))) & & \ell(\text{Cov}(E, \omega)^0) & & \end{array}$$

Las composiciones verticales coinciden a nivel de  $G$ - $*$ -álgebras con los morfismos

$$\tilde{q}: \ell^{\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))} \rightarrow \mathcal{K}(\text{Cov}(E, \omega)), \quad \tilde{q}(\chi_{v_g}) = q_{v_g}, \quad (v_g \in \text{reg}(\text{Cov}(E, \omega)))$$

y

$$\tilde{\varphi}: \ell^{\text{Cov}(E, \omega)^0} \rightarrow \mathcal{C}(\text{Cov}(E, \omega)), \quad \tilde{\varphi}(\chi_{v_g}) = v_g, \quad (v_g \in \text{Cov}(E, \omega)^0).$$

Esto muestra que bajo esta equivalencia el triángulo (3.4.28) asociado a  $E$  se corresponde con el mismo triángulo aplicado ahora a su revestimiento  $\text{Cov}(E, \omega)$  en el contexto de  $G$ - $*$ -álgebras.

**Teorema 3.6.11.** *Si  $E$  es un grafo finito, se tiene un triángulo distinguido*

$$\ell^{\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))} \longrightarrow \ell^{\text{Cov}(E, \omega)^0} \longrightarrow L(\text{Cov}(E, \omega)). \quad (3.6.12)$$

en  $\text{kk}_G^h$  con  $f = j_G^h(\tilde{\varphi})^{-1}j_G^h(\text{inc}\tilde{q})$  y  $g = j_G^h(\tilde{p}\tilde{\varphi})$ .  $\blacklozenge$

En particular, si olvidamos la acción, a partir de este teorema obtenemos el triángulo para  $\tilde{E}$  en  $\text{kk}^h$  análogo al construido en [CM21, Proposition 5.2].

*Observación 3.6.13.* Si  $E$  es un grafo y  $v \in E^0$ , en [CM21, Proposition 5.2] se muestra para el triángulo análogo a (3.4.28) que la composición

$$\ell \xrightarrow{i_v} \ell^{\text{reg}(E)} \xrightarrow{f} \ell^{(E^0)}$$

se corresponde bajo los isomorfismos

$$\text{kk}(\ell, \ell) \simeq \text{KH}_0(\ell), \quad \text{kk}(\ell, \ell^{(E^0)}) \simeq \text{KH}_0(\ell^{(E^0)}) \simeq \text{KH}_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(E^0)}$$

con la inclusión

$$1 \otimes c_v: \text{KH}_0(\ell) \rightarrow \text{KH}_0(\ell) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}^{(E^0)},$$

donde  $c_v$  es la  $v$ -ésima columna de  $I - A_E^t$ . Esto se corresponde con el hecho de que, bajo hipótesis razonables,  $K_0(L(E)) = \mathfrak{B}\mathfrak{F}(L(E)) = \text{coker}(I - A_E^t)$ .

En el caso graduado, por (3.5.8) sabemos que como  $\mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ -módulo el grupo de Grothendieck graduado de  $L(E)$  es

$$\text{K}_0^{\text{gr}}(L(E)) \simeq K_0(\ell) \otimes \text{coker} \left( \mathbb{Z}[x, x^{-1}]^{(E^0)} \xrightarrow{I - x \cdot A_E^t} \mathbb{Z}[x, x^{-1}]^{(E^0)} \right).$$

**Definición 3.6.14.** Sea  $\mathbb{Z}[\sigma] := \mathbb{Z}[\langle \sigma \rangle]$  el anillo de grupo de un grupo cíclico  $G = \langle \sigma \rangle$ . El  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulo de Bowen-Franks de un grafo  $E$  con respecto a  $G$  es

$$\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) := \text{coker} \left( \mathbb{Z}[\sigma]^{(E^0)} \xrightarrow{I - \sigma \cdot A_E^t} \mathbb{Z}[\sigma]^{(E^0)} \right).$$

Cuando  $\sigma$  tiene orden finito  $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , este módulo es isomorfo al grupo dado por el conúcleo de la matriz  $I - (A_E^m)^t: \mathbb{Z}^{(E^0)} \rightarrow \mathbb{Z}^{(E^0)}$ , junto con la acción inducida por la multiplicación por  $(A_E^{m-1})^t$ .

### 3.7. El enriquecimiento de $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}$ sobre $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell)$

Para dar una mejor descripción del triángulo (3.4.28) en el contexto graduado, precisamos darle sentido a la multiplicación de un morfismo de  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}$  por un elemento de  $\mathbb{Z}[G]$ . Observemos en primer lugar que tenemos isomorfismos

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell) \simeq \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell)^{(G)} \simeq \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell^{(G)}) \simeq \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(G \widehat{\times} \ell) \stackrel{(2.3.26)}{\simeq} \text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(\ell, \ell). \quad (3.7.1)$$

Por lo tanto, a través del producto  $\otimes$  del Lema 2.4.4 podemos hacer de los *hom-sets* de  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}$  módulos sobre  $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell)$ .

*Observación 3.7.2.* Más aún, tenemos un enriquecimiento de  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}$  sobre la categoría de  $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell)$ -módulos, con la estructura monoidal dada por  $\otimes_{\mathbb{Z}}$ . Las definiciones de categoría monoidal y enriquecimiento pueden consultarse en [Rie14, 3.2, Definition 3.3.1].

En particular, restringiendo escalares, para cada par de  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas  $A$  y  $B$  tenemos una estructura de  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo en  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(A, B)$ . Por construcción, la multiplicación por elementos de  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[G]$  está determinada por la estructura aditiva de  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}$ . Resta entender entonces la multiplicación de un morfismo por un elemento de  $G$ .

**Lema 3.7.3.** *Para cada  $g \in G$  el isomorfismo*

$$\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell) \simeq \text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(G \widehat{\times} \ell, G \widehat{\times} \ell) \simeq \text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(\ell^{(G)}, \ell^{(G)})$$

*envía  $g \otimes [1]$  al morfismo  $R_g: \ell^{(G)} \rightarrow \ell^{(G)}$  dado por la multiplicación a derecha por  $g$ .*

*Demostración.* El isomorfismo  $\mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell) \simeq \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell^{(G)})$  envía  $g \otimes [1]$  a la clase de  $\chi_g$ , la función característica de  $\{g\}$ . Esta se corresponde a su vez con el morfismo  $\text{inc}_g: x \in \ell \rightarrow x \cdot \chi_g \in \ell^{(G)}$  en  $\text{kk}^{\text{h}}$ . El isomorfismo  $\text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(\ell^{(G)}, \ell^{(G)}) \simeq \text{kk}^{\text{h}}(\ell, \ell^{(G)})$  del Teorema 2.3.22 está dado por olvidar la acción y precomponer por la componente  $\eta_{\ell}: x \in \ell \rightarrow x \cdot \chi_1 \in \ell^{(G)}$  de la unidad de la adjunción. Resta notar que  $R_g \eta_{\ell}(x) = R_g(x \cdot \chi_1) = x \cdot \chi_g = \text{inc}_g(x)$ , así que  $R_g$  se corresponde con  $\text{inc}_g$ .  $\blacklozenge$

Un cálculo directo muestra que bajo el isomorfismo  $M_G \ell \simeq (G \widehat{\times} \ell) \rtimes G \simeq \ell^{(G)} \rtimes G$  la multiplicación a derecha por  $g \in G$  se corresponde con el morfismo

$$\varepsilon_{s,t} \otimes x \in M_G \ell \mapsto \varepsilon_{sg,tg} \otimes x \in M_G \ell.$$

En particular, precomponiendo por  $\iota: x \mapsto \varepsilon_{1,1} \otimes x \in M_G \ell$  obtenemos el morfismo

$$\jmath_g: x \in \ell \mapsto \varepsilon_{g,g} \otimes x \in M_G \ell.$$

En definitiva, esto nos dice que para cada  $g \in G$  el elemento  $g \otimes [1] \in \mathbb{Z}[G] \otimes \text{K}^{\text{h}}\text{H}_0(\ell)$  se corresponde con el morfismo  $\iota_{\ell}^{-1} \jmath_g \in \text{kk}_{\mathbb{G}}^{\text{h}}(\ell, \ell)$ . Por último, como la acción en los *hom-sets* viene inducida por  $\otimes$ , obtenemos la siguiente caracterización.

**Proposición 3.7.4.** *Supongamos que  $G$  es abeliano y sean  $A$  y  $B$  dos  $*$ -álgebras  $G$ -graduadas. Dados  $g \in G$  y  $f \in \text{kk}_{\widehat{G}}^h(A, B)$ , el morfismo  $g \cdot f$  coincide con la composición*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{j_{g,B}} M_G B \xrightarrow{\iota_B^{-1}} B.$$

*Demostración.* La hipótesis de  $G$  abeliano hace que el producto  $\otimes$  esté bien definido tanto para  $\ell$  como para  $M_G \ell$ . En este caso, como la acción de  $g$  se corresponde por tensorizar contra  $\iota_\ell^{-1} j_g$  obtenemos

$$g \cdot f = \iota_\ell^{-1} j_g \otimes f = (\iota_\ell^{-1} j_g \otimes 1_B)(1_\ell \otimes f)(\iota_\ell \otimes 1_B)^{-1}(j_g \otimes 1_B)(1_\ell \otimes f) = \iota_B^{-1} j_{g,B}(1_\ell \otimes f).$$

Bajo la identificación  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h(A, B) \simeq \text{kk}_{\widehat{G}}^h(\ell \otimes A, \ell \otimes B)$ , este morfismo se corresponde con el del enunciado de la proposición.  $\blacklozenge$

### 3.8. El triángulo distinguido en el contexto graduado, parte II

En esta sección buscamos dar una mejor descripción del morfismo  $f$  que forma parte del triángulo (3.4.28). Recordemos que este último era de la forma

$$\ell^{\text{reg}(E)} \xrightarrow{f} \ell^{(E^0)} \rightarrow L(E),$$

donde  $E$  es un grafo finito y  $f = j_{\widehat{G}}^h(\varphi)^{-1} j_{\widehat{G}}^h(\text{inc } q)$ .

**Definición 3.8.1.** Sea  $E$  un grafo finito y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso. Definimos la *matriz*  $A_\omega \in \mathbb{Z}[G]^{\text{reg}(E) \times E^0}$  *asociada a*  $\omega$  como

$$(A_\omega)_{v,w} = \sum_{e \in s^{-1}(v) \cap r^{-1}(w)} \omega(e), \quad (v, w \in E^0).$$

**Proposición 3.8.2.** *Sea  $E$  un grafo finito y  $\omega: E^1 \rightarrow G$  una función de peso. El morfismo  $f$  del triángulo (3.4.28) coincide con*

$$\ell^{\text{reg}(E)} \xrightarrow{I - A_\omega^t} \ell^{E^0},$$

es decir, para cada  $v \in E^0$  es

$$f j_{\widehat{G}}^h(\iota_v) = j_{\widehat{G}}^h(\iota_v) - \sum_{e \in s^{-1}(v)} \omega(e) \cdot j_{\widehat{G}}^h(\iota_{r(e)}).$$

*Demostración.* Como  $G \widehat{\otimes} -$  es plenamente fiel, basta ver que igualdad vale luego de aplicar este funtor. Más aún, por la adjunción entre inducción y restricción tenemos una biyección natural  $\text{kk}_{\widehat{G}}^h(\ell^{(G)}, -) \simeq \text{kk}^h(\ell, -)$  olvidando la acción y precomponiendo por la componente  $\eta_\ell$  de la unidad,

$$\eta_\ell: x \in \ell \mapsto x \cdot \chi_1 \in \ell^{(G)}.$$

La inclusión  $\iota_z$  asociada a un vértice  $z \in E^0$  se corresponde a través de la identificación  $G \widehat{\times} \ell^{\text{reg}(E)} \simeq \ell^{\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))}$  con el morfismo

$$\chi_h \in \ell^{(G)} \mapsto \chi_{z_h} \in \ell^{\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))},$$

y de esta manera el morfismo  $g \cdot \iota_z$  se corresponde a su vez con

$$\chi_h \in \ell^{(G)} \mapsto \chi_{z_{hg}} \in \ell^{\text{reg}(\text{Cov}(E, \omega))}.$$

Precomponiendo por  $\eta_\ell$  obtenemos luego las inclusiones  $\iota_{z_1_G}$  y  $\iota_{z_g}$  asociadas a los vértices  $z_1, z_g \in \text{Cov}(E, \omega)^0$  respectivamente.

En definitiva, lo que debemos probar es que para cada  $v \in E^0$  en  $kk^h$  se satisface la igualdad

$$\tilde{f}^h(\iota_{v_1}) = j^h(\iota_{v_1}) - \sum_{e \in s^{-1}(v)} j^h(\iota_{r(e)_{\omega(e)}}).$$

Componiendo con  $j^h(\varphi)$  esto se reduce a ver que

$$j^h(\text{inc } q_{\iota_{v_1}}) = j^h(\varphi \iota_{v_1}) - \sum_{e \in s^{-1}(v)} j^h(\varphi \iota_{r(e)_{\omega(e)}}),$$

de manera que todos los morfismos involucrados vienen inducidos por  $*$ -morfismos  $\ell \rightarrow C(\text{Cov}(E, \omega))$ . Estos se corresponden con proyecciones de  $C(\text{Cov}(E, \omega))$ ; escribiremos  $x: \ell \rightarrow C(E)$  para referirnos al morfismo  $\lambda \in \ell \mapsto \lambda x \in C(E)$  asociado a  $x$ . De esta manera, tenemos que

$$\varphi \iota_v = v, \quad \text{inc } q_{\iota_v} = q_v$$

para cada  $v \in \text{Cov}(E, \omega)^0$  y debemos probar que

$$j^h(q_{v_1}) = j^h(v_1) - \sum_{e \in s^{-1}(v)} j^h(r(e)_{\omega(e)}). \quad (3.8.3)$$

Esto se reduce al mismo argumento que en [CM21, Proposition 5.2], el cual pasamos a recordar. Fijemos  $z \in \text{Cov}(E, \omega)^0$ . Como  $q_z \perp m_z$ , sabemos que  $v = q_v + m_v$  es un  $*$ -morfismo y aplicando  $j^h$  es  $j^h(q_z) = j^h(z) - j^h(m_z)$ . Por otro lado, la relación (CK1) nos dice que  $j^h(m_z) = \sum_{e \in s^{-1}(z)} j^h(r(e))$ , así que  $j^h(q_z) = j^h(z) - \sum_{e \in s^{-1}(z)} j^h(r(e))$ . La ecuación (3.8.3) se sigue de esta última tomando  $z = v_1$ , lo que completa la demostración.  $\blacklozenge$

**Corolario 3.8.4.** *Sea  $E$  un grafo finito. Si  $\omega \equiv \sigma \in G$  es una función de peso constante, el morfismo  $f$  del triángulo (3.4.28) coincide con*

$$\ell^{\text{reg}(E)} \xrightarrow{1 - \sigma \cdot \Lambda_E^t} \ell^{E^0}, \quad (3.8.5)$$

es decir, para cada  $v \in E^0$  es

$$f j_{\widehat{G}}^h(\iota_v) = j_{\widehat{G}}^h(\iota_v) - \sigma \cdot \left( \sum_{e \in s^{-1}(v)} j_{\widehat{G}}^h(\iota_{r(e)}) \right).$$

$\blacklozenge$

En particular, aplicando el corolario anterior cuando  $G$  es cíclico y  $\sigma$  un generador de  $G$ , obtenemos un triángulo distinguido para  $L(E)$  con su graduación canónica y la asociada a cada revestimiento de  $n$  hojas.

La Proposición 3.8.2 nos da condiciones suficientes para concluir que dos álgebras de Leavitt son  $kk_{\mathbb{G}}^h$ -isomorfas.

**Corolario 3.8.6.** Sean  $E$  y  $F$  dos grafos finitos y  $\omega: E^1 \rightarrow G, \theta: F^1 \rightarrow G$  funciones de peso. Notemos  $n = |E^0|, k = |\text{reg}(E)|$  y  $m = |F^0|, l = |\text{reg}(F)|$ . Si existen matrices  $P \in GL_{k,l}(\mathbb{Z}[G]), Q \in GL_{n,m}(\mathbb{Z}[G])$  tales que

$$I - A_{\omega}^t = Q^{-1}(I - A_{\theta}^t)P,$$

las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk_{\mathbb{G}}^h$ -isomorfas.

*Demostración.* Por hipótesis, tenemos un diagrama conmutativo de flechas sólidas

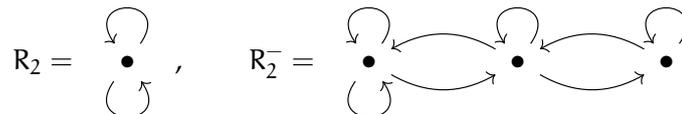
$$\begin{array}{ccccc} \varrho^{\text{reg}(E)} & \xrightarrow{I - A_{\omega}^t} & \varrho^{E^0} & \longrightarrow & L(E) \\ P \downarrow \wr & & \wr \downarrow Q & & \wr \downarrow \\ \varrho^{\text{reg}(F)} & \xrightarrow{I - A_{\theta}^t} & \varrho^{F^0} & \longrightarrow & L(F) \end{array}$$

La existencia de la flecha punteada se sigue de los axiomas de una categoría triangulada, ya que las filas del diagrama son triángulos distinguidos. Por último, como  $P$  y  $Q$  inducen isomorfismos por el Lema 1.7.4 esta flecha también es un isomorfismo.  $\blacklozenge$

*Observación 3.8.7.* Usando el argumento del Corolario 3.8.6 cuando  $G$  es el grupo trivial y la forma normal de Smith, en [CM21, Theorem 6.10] se prueba un teorema de estructura para álgebras de Leavitt en  $kk$ . Para esto se asume que  $KH_{-1}(\ell) = 0$  y que el morfismo canónico  $K_0(\mathbb{Z}) \rightarrow KH_0(\ell)$  es un isomorfismo; ver [CM21, Standing assumptions 6.1]. El resultado análogo en el caso hermitiano es [Cor21, Theorem 6.10].

A partir de esto [CM21, Corollary 6.11] nos dice que si  $E$  y  $F$  son grafos finitos, las álgebras de Leavitt  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk$ -isomorfas si y sólo si  $KH_0(L(F)) \simeq KH_0(L(E))$  y  $|\text{sing}(E)| = |\text{sing}(F)|$ . En [Cor21, Theorem 6.11] se prueba que bajo las hipótesis anteriormente mencionadas  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk^h$ -isomorfas si y sólo si son  $kk$ -isomorfas; veremos más adelante una versión graduada de este resultado.

En general, un isomorfismo entre álgebras de Leavitt en  $kk_{\mathbb{G}}^h$  implica que estas son isomorfas en  $kk^h$ , pero la recíproca no es cierta. Por ejemplo, consideremos como anillo base a  $\mathbb{C}$  con la involución dada por la conjugación compleja y los grafos regulares



Un cálculo directo muestra que tanto  $L_2 = L(R_2)$  como  $L_{2^-} := L(R_2^-)$  tienen grupos de Bowen-Franks nulos y por lo tanto  $L_2 \simeq L_{2^-}$  en  $kk^h$ . Sin embargo, de forma similar a [Cor21, Proposition 5.6] considerando a  $L_2$  y  $L_{2^-}$  con su  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduación canónica sus  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$ -módulos de Bowen-Franks son

$$\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(L_2) = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(L_{2^-}) = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}.$$

Esto muestra que  $L_2 \not\simeq L_{2^-}$  en  $kk_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^h$ .

A falta de un resultado como la forma normal de Smith para  $\mathbb{Z}[G]$ , un análogo al teorema de estructura [CM21, Corollary 6.11] en  $kk_{\mathbb{G}}^h$  no es evidente. A continuación damos un resultado de clasificación que sí se adapta sin modificaciones.

**Proposición 3.8.8** (cf. [CM21, Proposition 5.10]). *Sean  $E$  y  $F$  dos grafos finitos y  $\omega: E^1 \rightarrow G, \theta: F^1 \rightarrow G$  funciones de peso. Sea  $\Upsilon: L(E) \rightarrow L(F)$  un morfismo en  $kk_{\mathbb{G}}^h$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *El morfismo  $\Upsilon$  es un isomorfismo.*
- (ii) *Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ , el morfismo  $kk_{\mathbb{G}}^h(\Omega^n \ell, -)(\Upsilon)$  es un isomorfismo.*
- (iii) *Los morfismos  $kk_{\mathbb{G}}^h(\ell, -)(\Upsilon)$  y  $kk_{\mathbb{G}}^h(\Sigma \ell, -)(\Upsilon)$  son isomorfismos.*

*Demostración.* La functorialidad de  $kk_{\mathbb{G}}^h(\Omega^n \ell, -)$  nos dice que (i) implica (ii), y (ii) implica (iii) tomando  $n = 0, -1$ . Veamos que (iii) implica (i) por el mismo motivo que en [CM21, Proposition 5.10].

Escribiremos  $\Upsilon_A: kk_{\mathbb{G}}^h(A, L(E)) \rightarrow kk_{\mathbb{G}}^h(A, L(F))$  para la transformación natural inducida por la postcomposición por  $\Upsilon$ . Asumiendo (iii) y usando la aditividad de  $kk_{\mathbb{G}}^h$  tenemos que  $\Upsilon_{\Omega^i \ell^{F^0}}$  y  $\Upsilon_{\Omega^i \ell^{\text{reg}(F)}}$  son isomorfismos para  $i = 0, 1$ . Aplicando esta transformación natural al triángulo

$$\ell^{\text{reg}(F)} \xrightarrow{I-A_{\mathbb{G}}^1} \ell^{F^0} \rightarrow L(F),$$

la Observación 1.7.5 y el lema de los cinco nos dicen que

$$\Upsilon_{L(E)}: kk_{\mathbb{G}}^h(L(F), L(E)) \rightarrow kk_{\mathbb{G}}^h(L(F), L(F))$$

es un isomorfismo.

Existe entonces un morfismo  $\mu: L(F) \rightarrow L(E)$  tal que  $\Upsilon\mu = 1_{L(F)}$ . Como  $\Upsilon_{\Omega^i \ell^{F^0}}$  y  $\Upsilon_{\Omega^i \ell^{\text{reg}(F)}}$  son isomorfismos para  $i = 0, 1$ , también lo son  $\mu_{\Omega^i \ell^{F^0}}$  y  $\mu_{\Omega^i \ell^{\text{reg}(F)}}$ . El argumento anterior ahora aplicado a  $\mu$  nos dice que tiene una inversa a derecha, así que es un isomorfismo. En consecuencia  $\Upsilon$  también es un isomorfismo, lo que prueba (i).  $\blacklozenge$

### 3.9. Clasificación de álgebras de Leavitt en $kk_{\mathbb{Z}}^h$

El objetivo de esta sección es adaptar el siguiente teorema al contexto graduado.

**Teorema 3.9.1** ([Cor21, Theorem 6.7, Theorem 6.11]). *Sean  $E$  y  $F$  dos grafos finitos y supongamos que  $KH_{-1}(\ell) = 0$  y el morfismo canónico  $\mathbb{Z} \rightarrow KH_0(\ell)$  es un isomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (i) *Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk^h$ -isomorfas.*
- (ii) *Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $kk$ -isomorfas.*
- (iii) *Se tiene un isomorfismo de grupos  $\mathfrak{B}\mathfrak{F}(E) \simeq \mathfrak{B}\mathfrak{F}(F)$  y  $|\text{sing}(E)| = |\text{sing}(F)|$ .*

◆

Precisamos primero dar versiones graduadas de algunos resultados de [Cor21, Section 6].

**Convención 3.9.2.** En esta sección notamos  $\sigma$  a un generador de  $\mathbb{Z}$  y escribiremos  $\mathbb{Z}[\sigma] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  para el anillo de polinomios de Laurent.

**Lema 3.9.3.** *Sea  $E$  un grafo finito con matriz de adyacencia  $A_E \in \mathbb{N}_0^{E^0 \times E^0}$ . El morfismo*

$$I - \sigma \cdot \overline{A}_E^t : \mathbb{Z}[\sigma]^{\text{reg}(E)} \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0}$$

*es un monomorfismo. Si  $E$  es no trivial - es decir, si tiene al menos un vértice - entonces no es un epimorfismo.*

*Demostración.* En primer lugar, veamos que  $I - \sigma \overline{A}_E$  nunca es un epimorfismo. Supongamos que lo es. Tomando rango se obtiene que  $\text{reg}(E) = E^0$ , así que  $E$  no tiene vértices singulares y en particular la matriz  $I - \sigma \overline{A}_E$  es cuadrada. Tomando determinante, debe existir  $k \in \mathbb{Z}$  de forma que

$$\sigma^k = \det(I - \sigma A_E^t) = \sigma^{|E^0|} \det(\sigma^{-1} I - A_E^t) = \sigma^{|E^0|} \chi_{A_E}(\sigma^{-1}).$$

Reescribiendo, es  $\chi_{A_E}(\sigma) = \sigma^{|E^0| - k}$ , y más aún por consideraciones de grado debe ser  $k = 0$ . En particular la matriz  $A_E$  es nilpotente y  $E$  resulta acíclico, lo cual contradice el hecho de que  $E$  no tiene vértices singulares.

Veamos ahora que  $I - \sigma \overline{A}_E^t$  es siempre un monomorfismo. Aún si  $E$  no es regular, el cálculo anterior muestra que  $I - \sigma A_E^t$  tiene determinante  $\sigma^{|E^0|} \chi_{A_E}(\sigma^{-1}) \neq 0$  y por lo tanto es siempre un monomorfismo. Resta notar que  $I - \sigma \overline{A}_E^t$  es la restricción de  $I - \sigma A_E^t$  al submódulo generado por las coordenadas de vértices regulares. ◆

**Observación 3.9.4.** El resultado anterior nos dice que la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma]^{\text{reg } E} \xrightarrow{I - \sigma \cdot \overline{A}_E} \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0} \xrightarrow{\varepsilon} \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow 0$$

determina una resolución libre de  $\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E)$  como  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulo; la notaremos  $\mathcal{R}(E)$ .

De esta forma, un morfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos  $\xi: \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(F)$  se extiende a un morfismo de complejos  $\mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{R}(F)$  tal que  $H_0(\mathcal{R}(\xi)) = \xi$ . Si bien un morfismo así no es único, sí lo es su clase de homotopía.

También sabemos a partir del lema anterior que a diferencia de  $K_0(L(E))$ , el grupo de Grothendieck graduado de un álgebra de Leavitt siempre es no nulo.

**Definición 3.9.5.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos y  $\xi: \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(F)$  un morfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos. Definimos  $\mathcal{R}(\xi)$  como la clase de homotopía de algún (y por lo tanto todo) morfismo  $f: \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{R}(F)$  tal que  $H_0(f) = \xi$ .

*Observación 3.9.6.* Podemos entender a  $\mathcal{R}$  como un funtor entre la subcategoría de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -mod generada por los  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos de Bowen-Franks de un grafo finito y la categoría de homotopía de complejos de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos.

**Definición 3.9.7** (cf. [Cor21, 6.3]). Sea  $E$  un grafo finito. Aplicando  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(\ell, -)$  al triángulo (3.8.5) tenemos un monomorfismo  $\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{KH}_0^h(\ell) \rightarrow \text{KH}_0^h(L(\tilde{E}))$ ; al precomponerlo por  $- \otimes [1]: \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{KH}_0^h(\ell)$  obtenemos un morfismo

$$\text{can}: \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow \text{KH}_0^h(L(\tilde{E})).$$

En particular, para cada  $*$ -álgebra  $\mathbb{Z}$ -graduada  $R$  se tiene un morfismo

$$\text{ev}: \text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(L(E), R) \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{Z}[\sigma]\text{-mod}}(\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E), \text{KH}_0^h(\mathbb{Z} \widehat{\otimes} R)), \quad f \mapsto \text{KH}_0^h(\mathbb{Z} \widehat{\otimes} f) \circ \text{can}.$$

**Lema 3.9.8** (cf. [Cor21, Lemma 6.4]). Sean  $E$  y  $F$  dos grafos finitos y  $\xi: \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \rightarrow \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(F)$  un morfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos.

- (i) Un morfismo  $f: \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{R}(F)$  tal que  $H_0(f) = \xi$  determina un morfismo  $\bar{\xi}: L(E) \rightarrow L(F)$  en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$  tal que  $\text{ev}(\bar{\xi}) = \text{can} \circ \xi$ .
- (ii) Si  $\xi$  es un isomorfismo, todo morfismo  $\bar{\xi}$  definido como en (i) es un isomorfismo. En particular, si  $\widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(E) \simeq \widetilde{\mathfrak{B}\mathfrak{F}}(F)$  como  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos entonces  $L(E) \simeq L(F)$  en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$ .

*Demostración.* Fijemos  $f: \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{R}(F)$  tal que  $H_0(f) = \xi$ . Tenemos entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\sigma]^{\text{reg}} E & \xrightarrow{1 - \sigma \cdot \bar{\mathcal{A}}_E^t} & \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0} \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 \\ \mathbb{Z}[\sigma]^{\text{reg}} F & \xrightarrow{1 - \sigma \cdot \bar{\mathcal{A}}_F^t} & \mathbb{Z}[\sigma]^{F^0} \end{array}$$

y podemos pensar a  $f_0$  y  $f_1$  como matrices con coeficientes en  $\mathbb{Z}[\sigma]$ . En consecuencia obtenemos el siguiente diagrama conmutativo en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$

$$\begin{array}{ccccccc}
\ell^{\text{reg } E} & \xrightarrow{I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t} & \ell^{E^0} & \xrightarrow{p} & L(E) & \xrightarrow{\partial} & \Sigma \ell^{\text{reg } E} \xrightarrow{\Sigma(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t)} \Sigma \ell^{E^0} \\
f_1 \downarrow & & \downarrow f_0 & & \downarrow \exists \bar{\xi} & & \downarrow \Sigma f_1 & & \downarrow \Sigma f_0 \\
\ell^{\text{reg } F} & \xrightarrow{I - \sigma \cdot \bar{A}_F^t} & \ell^{F^0} & \xrightarrow{p'} & L(F) & \xrightarrow{\partial'} & \Sigma \ell^{\text{reg } F} \xrightarrow{\Sigma(I - \sigma \cdot \bar{A}_F^t)} \Sigma \ell^{F^0}
\end{array}$$

Los axiomas de una categoría triangulada garantizan la existencia de la flecha punteada. Al aplicar  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(\ell, -)$  obtenemos que  $\text{ev}(\bar{\xi}) = \text{can} \circ \xi$ , lo que prueba (i).

Veamos ahora (ii). Tomando otro morfismo de complejos  $g: \mathcal{R}(E) \rightarrow \mathcal{R}(F)$  tal que  $H_0(g) = \xi$ , conseguimos del mismo modo un morfismo  $\bar{\xi}'$  tal que  $\text{ev}(\bar{\xi}') = \text{can} \circ \xi$ , el cual forma parte del siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
\ell^{\text{reg } E} & \xrightarrow{I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t} & \ell^{E^0} & \xrightarrow{p} & L(E) & \xrightarrow{\partial} & \Sigma \ell^{\text{reg } E} \xrightarrow{\Sigma(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t)} \Sigma \ell^{E^0} \\
g_1 \downarrow & & \downarrow g_0 & & \downarrow \exists \bar{\xi}' & & \downarrow \Sigma g_1 & & \downarrow \Sigma g_0 \\
\ell^{\text{reg } F} & \xrightarrow{I - \sigma \cdot \bar{A}_F^t} & \ell^{F^0} & \xrightarrow{p'} & L(F) & \xrightarrow{\partial'} & \Sigma \ell^{\text{reg } F} \xrightarrow{\Sigma(I - \sigma \cdot \bar{A}_F^t)} \Sigma \ell^{F^0}
\end{array}$$

Como  $f$  y  $g$  son morfismos de complejos homotópicos, existe un morfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos  $h: \mathbb{Z}[\sigma]^{E^0} \rightarrow \mathbb{Z}[\sigma]^{F^0}$  tal que  $f_0 = h(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t) + g_0$  y  $f_1 = h(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t) + g_1$ ; notaremos también  $h$  al morfismo  $\ell^{E^0} \rightarrow \ell^{F^0}$  inducido en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$ .

A partir de esto y los diagramas que definen a  $\bar{\xi}$  y  $\bar{\xi}'$  vemos que

$$\bar{\xi}p = p'f_0 = p'(h(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t) + g_0) = p'g_0 = \bar{\xi}'p$$

y

$$\partial' \bar{\xi} = \Sigma(f_0)\partial = \Sigma(h(I - \sigma \cdot \bar{A}_E^t) + g_1)\partial = \Sigma g_1 \partial = \partial' \bar{\xi}'.$$

Aplicando  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(L(E), -)$  y  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(-, L(F))$  esto se traduce en que  $p^*(\bar{\xi} - \bar{\xi}') = \partial'_*(\bar{\xi} - \bar{\xi}') = 0$ . Por exactitud obtenemos morfismos  $\zeta_0 \in \text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(\Sigma \ell^{\text{reg } E}, L(F))$ ,  $\zeta_1 \in \text{kk}_{\mathbb{Z}}^h(L(E), \ell^{F^0})$  tales que  $p'_*(\zeta_1) = \partial^*(\zeta_0) = \bar{\xi} - \bar{\xi}'$ .

Aplicando las observaciones anteriores a los morfismos  $\bar{\xi}\bar{\eta}$  e  $\text{id}_{L(E)}$  obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
L(E) & & & & \\
\zeta_1 \downarrow & \searrow \text{id} - \bar{\xi}\bar{\eta} & & & \\
\ell^{E^0} & \xrightarrow{p} & L(E) & \xrightarrow{\partial} & \Sigma \ell^{E^0} \\
& & & \searrow \text{id} - \bar{\xi}\bar{\eta} & \downarrow \zeta_0 \\
& & & & L(E)
\end{array}$$

Como la fila del medio es exacta vemos que

$$(\text{id} - \bar{\xi}\bar{\eta})^2 = 0,$$

y por lo tanto  $\bar{\xi}\bar{\eta}$  es un isomorfismo. Un argumento simétrico muestra que  $\bar{\eta}\bar{\xi}$  también es un isomorfismo, así que  $\bar{\xi}$  y  $\bar{\eta}$  lo son.  $\blacklozenge$

El lema anterior nos permite dar una versión graduada de [Cor21, Theorem 6.11].

**Teorema 3.9.9.** Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos y supongamos que  $\text{KH}_{-1}(\ell) = 0$  y el morfismo canónico  $\mathbb{Z} \rightarrow \text{KH}_0(\ell)$  es un isomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h$ -isomorfas.
- (ii) Las álgebras  $L(E)$  y  $L(F)$  son  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}$ -isomorfas.
- (iii) Se tiene un isomorfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos  $\widetilde{\mathfrak{BF}}(E) \simeq \widetilde{\mathfrak{BF}}(F)$ .

*Demostración.* Considerando el funtor olvido  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}^h \rightarrow \text{kk}_{\mathbb{Z}}$  vemos que (i) implica (ii). Bajo las hipótesis sobre  $\ell$ , aplicando  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}(\ell, -)$  al triángulo (3.8.5) visto en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}$  obtenemos que

$$\text{kk}_{\mathbb{Z}}(\ell, L(E)) \simeq \widetilde{\mathfrak{BF}}(E).$$

En particular, un isomorfismo entre  $L(E)$  y  $L(F)$  induce un isomorfismo entre los  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos de Bowen-Franks correspondientes, probando que (ii) implica (iii). Por último, el Lema 3.9.8 nos dice que (iii) implica (i).  $\blacklozenge$

*Observación 3.9.10.* Un automorfismo  $g: R \rightarrow R$  de un anillo unital  $R$  se dice *localmente interior* si para cada  $x_1, \dots, x_n \in R$  existe una unidad  $z \in R$  tal que  $g(x_i) = zx_i z^{-1} = \text{ad}(z)(x_i)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

En [AP14], Ara y Pardo asocian a cada grafo finito  $E$  sin pozos ni fuentes y automorfismo localmente interior  $g$  de  $L(E)_0$  un álgebra graduada  $L(E)^g$ . Esta álgebra puede entenderse como un anillo de polinomios de Laurent sobre  $L(E)_0$  torcido por un isomorfismo de esquina (ver [Haz16, Section 1.6.2]).

**Teorema 3.9.11** ([AP14, Theorem 4.1]). Sean  $E$  y  $F$  grafos finitos sin pozos ni fuentes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) Hay un isomorfismo de  $\mathbb{Z}[\sigma]$ -módulos  $\xi: \text{K}_0^{\text{gr}}(L(E)) \rightarrow \text{K}_0^{\text{gr}}(L(F))$  tal que  $\xi([L(E)]) = L(F)$  y  $\xi(\text{K}_0^{\text{gr}}(L(E))_+) \subset \text{K}_0^{\text{gr}}(L(F))_+$ .
- (ii) Existe un automorfismo localmente interior  $g$  de  $L(E)_0$  tal que  $L(F)$  y  $L(E)^g$  son isomorfas como álgebras graduadas.

En vista de lo anterior, para esta familia de grafos la conjetura de Hazrat se reduce a decidir si  $L(E)^g$  y  $L(E)$  son (graduadamente) isomorfas. Hasta el momento, esta pregunta permanece abierta.

El resultado de Ara y Pardo junto con el Teorema 3.9.9 nos dicen que  $L(E)^g$  y  $L(E)$  son isomorfas en  $\text{kk}_{\mathbb{Z}}$ , ya que allí ambas álgebras son isomorfas a  $L(F)$ .



# Bibliografía

- [AAP05] Gene Abrams and Gonzalo Aranda Pino, *The Leavitt path algebra of a graph*, J. Algebra **293** (2005), no. 2, 319–334, DOI 10.1016/j.jalgebra.2005.07.028. MR2172342 ↑vi
- [AASM17] Gene Abrams, Pere Ara, and Mercedes Siles Molina, *Leavitt path algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2191, Springer, London, 2017. MR3729290 ↑72, 74, 78, 90
- [AP14] P. Ara and E. Pardo, *Towards a K-theoretic characterization of graded isomorphisms between Leavitt path algebras*, J. K-Theory **14** (2014), no. 2, 203–245, DOI 10.1017/is014006003jkt269. MR3319704 ↑101
- [AHL18] Pere Ara, Roozbeh Hazrat, Huanhuan Li, and Aidan Sims, *Graded Steinberg algebras and their representations*, Algebra Number Theory **12** (2018), no. 1, 131–172, DOI 10.2140/ant.2018.12.131. MR3781435 ↑vii, 89, 90
- [AMP07] P. Ara, M. A. Moreno, and E. Pardo, *Nonstable K-theory for graph algebras*, Algebr. Represent. Theory **10** (2007), no. 2, 157–178, DOI 10.1007/s10468-006-9044-z. MR2310414 ↑vi
- [BS89] Saad Baaj and Georges Skandalis, *C\*-algèbres de Hopf et théorie de Kasparov équivariante*, K-Theory **2** (1989), no. 6, 683–721, DOI 10.1007/BF00538428. MR1010978 ↑52
- [Cor11] Guillermo Cortiñas, *Algebraic v. topological K-theory: a friendly match*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 103–165. ↑vii, 14
- [Cor21] ———, *Classifying Leavitt path algebras up to involution preserving homotopy* (2021), preprint disponible en [arXiv:2101.05777v3](https://arxiv.org/abs/2101.05777v3) [math.KT]. ↑vi, 11, 74, 78, 81, 84, 96, 97, 98, 99, 101
- [CM21] Guillermo Cortiñas and Diego Montero, *Algebraic bivariant K-theory and Leavitt path algebras*, J. Noncommut. Geom. **15** (2021), no. 1, 113–146, DOI 10.4171/jncg/397. MR4248209 ↑vi, vii, 69, 72, 74, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 92, 95, 96, 97
- [CM20] ———, *Homotopy classification of Leavitt path algebras*, Adv. Math. **362** (2020), 106961, 26, DOI 10.1016/j.aim.2019.106961. MR4050584 ↑78
- [CT07] Guillermo Cortiñas and Andreas Thom, *Bivariant algebraic K-theory*, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 71–123. MR2359851 ↑v, 1, 6, 9, 14, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 28, 29
- [CV21] Guillermo Cortiñas and Santiago Vega, *Bivariant Hermitian K-theory and Karoubi’s fundamental theorem* (2021), preprint disponible en [arXiv:2012.09260v2](https://arxiv.org/abs/2012.09260v2) [math.KT]. ↑v, 1, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 27, 28, 54, 56, 57, 60, 61, 63, 65
- [CMR07] Joachim Cuntz, Ralf Meyer, and Jonathan M. Rosenberg, *Topological and bivariant K-theory*, Oberwolfach Seminars, vol. 36, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007. MR2340673 ↑11, 28, 79
- [CK80] Joachim Cuntz and Wolfgang Krieger, *A class of C\*-algebras and topological Markov chains*, Invent. Math. **56** (1980), no. 3, 251–268, DOI 10.1007/BF01390048. MR561974 ↑vi
- [Ell14] Eugenia Ellis, *Equivariant algebraic kk-theory and adjointness theorems*, J. Algebra **398** (2014), 200–226. MR3123759 ↑v, 31, 34, 35, 37, 38, 41, 42, 44, 45, 47, 48, 50, 52
- [Gar14] Grigory Garkusha, *Algebraic Kasparov K-theory. I*, Doc. Math. **19** (2014), 1207–1269. MR3291646 ↑20

- [GJ99] Paul G. Goerss and John F. Jardine, *Simplicial homotopy theory*, Progress in Mathematics, vol. 174, Birkhäuser Verlag, Basel, 1999. MR1711612 ↑vii, 7
- [Haz16] Roozbeh Hazrat, *Graded rings and graded Grothendieck groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 435, Cambridge University Press, Cambridge, 2016. MR3523984 ↑86, 87, 101
- [Haz13a] ———, *The graded Grothendieck group and the classification of Leavitt path algebras*, Math. Ann. **355** (2013), no. 1, 273–325, DOI 10.1007/s00208-012-0791-3. MR3004584 ↑vi, 87
- [Haz13b] ———, *The graded structure of Leavitt path algebras*, Israel J. Math. **195** (2013), no. 2, 833–895, DOI 10.1007/s11856-012-0138-5. MR3096577 ↑87
- [Kar80] Max Karoubi, *Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne*, Ann. of Math. (2) **112** (1980), no. 2, 259–282, DOI 10.2307/1971147. MR592292 ↑61, 65
- [KV73] Max Karoubi and Orlando Villamayor, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique. II*, Math. Scand. **32** (1973), 57–86. MR327872 ↑13
- [Kel96] Bernhard Keller, *Derived categories and their uses*, Handbook of algebra, Vol. 1, Handb. Algebr., vol. 1, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 1996, pp. 671–701, DOI 10.1016/S1570-7954(96)80023-4. MR1421815 ↑23
- [ML98] Saunders Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, New York, 1998. MR1712872 ↑63
- [LM95] Douglas Lind and Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995. MR1369092 ↑74
- [Rie14] Emily Riehl, *Categorical homotopy theory*, New Mathematical Monographs, vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 2014. MR3221774 ↑93
- [Rie16] ———, *Category Theory in Context*, Dover Publications Inc., December 30, 2016. ↑vii, 44
- [RC17] Emanuel Rodríguez Cirone, *Categorías de K-teoría algebraica bivalente y un espectro para la K-teoría algebraica bivalente G-equivariante (2017)*, disponible en <http://cms.dm.uba.ar/academico/carreras/doctorado/tesisRodriguez.pdf>. ↑26, 27
- [Ros94] Jonathan Rosenberg, *Algebraic K-theory and its applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 147, Springer-Verlag, New York, 1994. MR1282290 ↑vii
- [Wag72] J. B. Wagoner, *Delooping classifying spaces in algebraic K-theory*, Topology **11** (1972), 349–370, DOI 10.1016/0040-9383(72)90031-6. MR354816 ↑14
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324 ↑25
- [Wei89] ———, *Homotopy algebraic K-theory*, Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987), Contemp. Math., vol. 83, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, pp. 461–488, DOI 10.1090/conm/083/991991. MR991991 ↑9
- [Wei13] ———, *The K-book*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 145, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013. An introduction to algebraic K-theory. MR3076731 ↑9