UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Las Ecuaciones de Euler-Arnold en el Grupo de Virasoro.

Darío Martín Aza

Director: Gabriel Larotonda

Fecha

Agradecimientos

Esta tesis de licenciatura es el punto cúlmine de años de trabajo y esfuerzo. Durante esos años, fue mucha la gente que me ayudó de forma directa o indirecta a continuar mis estudios y formarme como matemático. Mencionarlos a todos es probablemente muy complicado, aunque intentaré no olvidarme de nadie.

Primero que nada, quiero agradecer a mis padres que me criaron y me dieron el privilegio de estudiar, el cual me llevó a escribir este trabajo. Mi papá hizo, en particular, muchos sacrificios por su familia (y eso me incluye) y es algo que debo y quiero agradecer mucho. Mi mamá, por otro lado, es la persona que más apoyo me ha brindado en materia académica y que más de cerca ha seguido mis pequeños logros, motivo por el cual se merece un agradecimiento especial. En realidad quiero agradecer a mi familia en general: todos a su propia manera me han acompañado mucho y me han ayudado a llegar hasta este punto. Mis tíos, mis primos, mis hermanos y mis padres, a todos les agradezco montones.

Párrafo aparte se merece mi hermano Favio que ha sido más que un compañero usual en mi vida. Gracias por todo.

A Cami, que me acompañó durante mis años de facultad con muchísimo cariño. La conocí casualmente el primer año que estuve en la facultad y estuvimos juntos durante todo el transcurso de mi carrera. No se me ocurre otra persona a la cual le haya podido hablar tanto y tan honestamente a lo largo de mi vida.

A mis amigos de toda la vida: los chicos de San Clemente y los chicos del pelle. Les agradezco que siempre hayan estado para mi. Gracias a ustedes, en todos estos años nunca me sentí solo. Marty, Arvy, Cristian, Axel, Juli, Russo, Queme, Fede, Ian, Juan, Lean, Pote, Eze, Rama, Juancho, Augusto, Gabi, Lucas: gracias. En especial a Juan, a Ezequiel y a Fede: ellos saben por qué.

A mis amigos de la facultad sin quienes ir a cursar no hubiese sido igual. No solo hicieron más entretenidos estos años sino que me enseñaron un montón con sus propias visiones de la matemática. Uli, Mai, Juan, Santi, Pablito, Martín, Gonza, Bruno, Juampi, Mati, Chehebar, el Pela, Juani, Jackie y Sergio: gracias.

A *Es Tabú*, y todos los miembros que ha tenido a lo largo de los años.

A Gabriel por hacer esto posible. Con Gabriel cursé la primer materia que transité de la facultad, en el año 2014, pero también cursé las últimas materias. Definitivamente moldeó una parte importante de mi visión de la matemática y aprendí muchísimo de él.

Al jurado por leer esta tesis y así darle un sentido. Todos los miembros del jurado han sido docentes míos que admiro enormemente.

A Matías y Fede, que aceptaron armar un proyecto para continuar mis estudios de doctorado. A Arturo por colaborar también y al CONICET por la beca. Matías y Fede me han enseñado muchísima matemática en el último año y una buena parte de mi formación en geometría se las debo a ellos.

Más en general me gustaría agradecer a todos los profesores que me formaron como matemático, transmitiéndome su pasión y sus distintas visiones de la matemática en cada materia.

A la educación pública de Argentina. Estudié todos los niveles de mi formación en instituciones públicas del mejor nivel académico que se podría pedir. De haber tenido que pagar para estudiar, posiblemente este trabajo nunca habría visto la luz. Es importante que todos aquellos que tuvimos el privilegio de estudiar gracias al sistema público de educación, luchemos por hacer de este mismo un espacio cada vez más robusto. La educación pública, para los que hemos vivido toda una vida en ella, es una perspectiva en sí misma: ofrece una forma especial de ver el mundo. Yo defiendo esa perspectiva.

Escribir esta sección fue una de las partes más complicadas de la tesis. Para una persona que ha recibido tanto apoyo como yo, agradecerlo en el momento adecuado es algo muy complicado. Estoy seguro que por más que revise estos párrafos miles de veces seguiré olvidándome de gente que ha sido indispensable en mi vida para que yo llegue hasta acá. A todos los que me estoy olvidando de agradecer, sabrán disculparme.

Introducción

En la presente tesis nos proponemos el estudio del grupo de Virasoro como grupo de Lie localmente convexo, y de los sistemas dinámicos que surgen del estudio de sus geodésicas asociadas a ciertas métricas Riemannianas invariantes a izquierda. Puesto en estos términos, el objeto de estudio es meramente un grupo de Lie y el presente trabajo se enmarca de un modo natural en la geometría diferencial de variedades modeladas por espacios localmente convexos. Sin embargo, el interés en nuestro objeto de estudio viene motivado por el área de la física-matemática (además de la geometría diferencial en su caracter más puro).

Para entender esta perspectiva es fundamental comprender la idea que vive detrás del método de Euler-Arnold que desarrollaremos. El método radica en entender las ecuaciones de Euler (que describen la evolución de un sistema dinámico que describe las geodésicas dentro de una variedad de Riemann) vía una descripción alternativa que utiliza únicamente la acción coadjunta del álgebra de Lie en su dual. Obtener una descripción manejable de esta acción es más sencillo, en líneas generales, que obtener una descripción de las geodésicas en una variedad Riemanniana para el caso de dimensión infinita y por eso es que este método sirve para estudiar objetos como el grupo de Virasoro que se encuentra modelado en un espacio vectorial topológico localmente convexo. ¿Por qué resultan de interés grupos de Lie tan generales, cuyos espacios modelo no poseen estructura de espacio de Banach? Porque en general el estudio de la evolución de un fluido es el estudio del flujo de los campos hamiltonianos en su espacio de fases, el cual es una variedad de dimensión infinita con una función hamiltoniana inducida por la energía del sistema. Lo sorprendente es que este enfoque simpléctico nos hable de la geometría riemanniana de una variedad y para esto debemos comprender el contenido del teorema de Arnold: este teorema nos dice que las ecuaciones de Euler (que son esencialmente riemannianas) son hamiltonianas con respecto a la energía que induce la métrica del sistema (y luego pueden ser reformuladas en términos de la geometría simpléctica de la variedad). El ejemplo más clarificador a la hora de relacionar esta teoría de Arnold con la física es el de un fluido incompresible confinado a los límites de una variedad compacta. En este caso el espacio de configuraciones se identifica con el grupo de difeomorfismos de la variedad que preservan el volumen y este grupo no es un grupo de Lie en el sentido clásico sino que está modelado por un espacio localmente convexo[1]. En esta tesis elegimos trabajar con el grupo de Virasoro y no con el grupo de difeomorfismos que preservan el volumen en una variedad (a riesgo de sacrificar mucha de la intuición física y las aplicaciones más evidentes a dinámica de fluidos) porque el grupo de Virasoro y el álgebra de Virasoro dan lugar a mayor estructura matemática en las ecuaciones de Euler que estudiaremos: en efecto, estas ecuaciones resultan bihamiltonianas y son ejemplos muy interesantes de sistemas dinámicos integrables.

Para aquellos geómetras que se han dedicado a la geometría simpléctica resulta evidente que las motivaciones provenientes de la mecánica y la física son muy importantes a la hora de desarrollar una teoría matemática. En este caso, se evidencia que la geometría simpléctica de las variedades dadas por grupos de difeomorfismos nos está hablando

[1] En [O1] el autor duda en llamar a este grupo un grupo de Lie por poseer una exponencial que no es difeomorfismo local.

sobre mecánica de fluidos y como bien sabemos ese tema es un objeto de estudio rico e interesante. Según V. Arnold[2], hay más que motivación para preguntas matemáticas en la física: en ella se esconde *el entendimiento de relaciones entre diferentes dominios de la matemática.* En esta tesis se conjugan de esta manera la geometría diferencial, el análisis funcional (que está presente en todos los estudios de variedades infinito dimensionales), la geometría de Poisson y simpléctica y la teoría sobre sistemas integrables; en algún sentido, la física subyacente a las preguntas que respondemos es el pegamento que une todas estas diferentes ramas.

Por último, brindamos los detalles de la distribución de la matemática a través de los distintos capítulos del trabajo: en el primer capítulo desarrollamos los preliminares necesarios para poder abordar el resto de los capítulos. Por una cuestión de espacio no están incluidos algunos temas que son de importancia para esta lectura y que probablemente el lector deba repasar (como las definiciones elementales de espacios localmente convexos y de Fréchet o los teoremas más clásicos de teoría de Lie en dimensión finita). En el segundo capítulo se tratan los temas más técnicos que refieren a grupos de difeomorfismos y su estructura de variedad de Fréchet. El objetivo del capítulo es demostrar que el grupo de difeomorfismos de S^1 es una variedad de Fréchet y que sus espacios tangentes cinético y operacional coinciden. El tercer capítulo introduce los conceptos básicos de la geometría de Poisson y su relación con las álgebras de Lie: en este capítulo se demuestra el célebre teorema de Arnold que da origen al estudio de la hidrodinámica vía el estudio de métricas invariantes en grupos de Lie. El cuarto y el quinto capítulo se dedican a construir el grupo de Virasoro y su correspondiente álgebra, y a estudiar las ecuaciones de Euler que se le asocian a este grupo para ciertas métricas invariantes. El último capítulo es una adaptación de los métodos que utilizó Khesin en su reciente paper [Kh-I] para abordar las ecuaciones de Euler en grupoides y algebroides. Proponemos una construcción de un algebroide de tipo Virasoro aunque las preguntas sobre su integrabilidad y la forma de las ecuaciones de Euler en él quedan abiertas.

[2]Para Arnold, "el divorcio entre la matemática y la física de mediados del siglo XX fue desastroso" (ver [Ar3]).

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

Variedades infinito dimensionales

Como ya sabemos, las variedades diferenciables clásicas son espacios topológicos localmente euclídeos. Esta última propiedad es la que nos permite, en general, probar propiedades locales de las variedades con mayor facilidad que las globales: basta considerar un entorno coordenado adecuado y la propiedad que buscamos se encuentra como consecuencia de alguna otra propiedad de $\mathbb{R}^n$. Decimos entonces, que las variedades diferenciables de dimensión finita se encuentran **modeladas** por $\mathbb{R}^n$. Para comenzar una teoría que generalice las variedades diferenciables al caso infinito dimensional hay que decidir qué clase de espacios modelarán nuestras variedades. Con el objetivo de ser lo más generales que se nos permita no nos restringiremos a espacios de Banach (que son la generalización más inmediata que uno podría encontrar infinito dimensional de los espacios euclídeos) y nos permitiremos trabajar con cualquier espacio vectorial localmente convexo. Esta decisión no se da únicamente de forma ambiciosa: los espacios de difeomorfismos, que son grupos de Lie muy interesantes y sobre los que trabajaremos mucho, no pueden ser modelados por espacios de Banach. Todo esto nos conduce al primer concepto importante a definir, que es el de variedad diferenciable.

A lo largo del texto, cuando hablemos de espacio vectorial siempre será un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $\mathbb{K}$ el cuerpo de los números reales o complejos.

Definición 1.1. Sea E un espacio vectorial topológico localmente convexo. Decimos que M es una variedad diferenciable modelada en E si M es un espacio topológico Hausdorff y para cada punto p de M existe una carta (ϕ, U) compuesta por un abierto U de M que contiene a p y un homeomorfismo entre un abierto de E y U $\phi : U \longrightarrow \phi(U) \subseteq E$ tal que dadas dos cartas (ϕ, U) y (φ, V) entonces la composición:

$$\phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$$

es de clase C^∞. Decimos que la variedad es una variedad de Fréchet o de Banach si E es un espacio de Fréchet o de Banach respectivamente.

Aquel lector que necesite revisar las definiciones y propiedades elementales del cálculo en espacios vectoriales localmente convexos y de Fréchet puede encontrarlas en [R] y [N].

En general intentaremos construir la teoría de variedades diferenciables en dimensión infinita de un modo similar a lo que ya hemos desarrollado en dimensión finita, aunque nos encontraremos con dificultades que surgen debido a que los espacios localmente convexos no satisfacen todas las propiedades que usamos de $\mathbb{R}^n$. La principal diferencia cuando trabajamos con espacios de Fréchet es que en ellos no vale el teorema de la función inversa que es un pilar fundamental de la geometría diferencial.

Definición 1.2. Decimos que una función $f : M \longrightarrow N$ entre variedades diferenciables es diferenciable si para todo par de cartas (ϕ, U) y (φ, V) de M y N respectivamente, vale que la composición $\varphi \circ f \circ \phi^{-1}$ es diferenciable como función entre abiertos de espacios localmente convexos.

Definición 1.3. Sea M una variedad diferenciable modelada en un espacio localmente convexo E. Decimos que $N \subseteq M$ es una subvariedad de M si existe un subespacio cerrado $F \subseteq E$ tal que para cada $n \in N$ hay una carta (φ, U) de M alrededor de n de modo tal que $\varphi(U \cap N) = \varphi(U) \cap F$. En ese caso N resulta una variedad diferenciable modelada en F. Decimos que N es una subvariedad split de M si, además, F es complementado en E, es decir, existe un subespacio $G \subseteq E$ tal que $E \simeq F \times G$.

En dimensión finita toda subvariedad es split pues todo subespacio cerrado de $\mathbb{R}^n$ es complementado. Esta es una de las primeras diferencias importantes que encontramos con el caso finito dimensional. La siguiente definición es de vital importancia en la geometría moderna.

Definición 1.4. Sea M una variedad modelada en un espacio E y sea F un espacio localmente convexo. Un fibrado vectorial de tipo F sobre M es un par $(\pi, \mathbb{F})$ con $\mathbb{F}$ una variedad diferenciable y $\pi : \mathbb{F} \longrightarrow M$ una función diferenciable tal que:

- Para cada punto $p \in M$ la fibra $\pi^{-1}(p)$ tiene estructura de espacio localmente convexo y es isomorfa a F.
- Cada punto $p \in M$ tiene un entorno U y un difeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "pr_1"] \\ M & \end{tikzcd}$$

No demostraremos en este trabajo que los objetos que llamamos fibrados cumplan efectivamente con esta definición. Completar los detalles de esas demostraciones no toma mayor trabajo que el que requiere hacerlo para variedades en el sentido clásico.

A continuación definiremos el fibrado tangente a una variedad modelada en un espacio localmente convexo. Nuevamente, nos encontramos con una diferencia fundamental con el caso finito dimensional: en el caso clásico, podíamos definir un vector tangente como una derivación o como una clase de equivalencia de curvas y ambas definiciones daban lugar a espacios vectoriales isomorfos. En dimensión infinita, sin embargo, arrojan dos definiciones diferentes para el espacio tangente.

Definición 1.5. Sea $p \in M$. Un vector tangente cinético a M en p es una clase de equivalencia de curvas suaves $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ bajo la relación de equivalencia dada por $\gamma_1 \sim \gamma_2$ si $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$ y $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ para alguna carta (ϕ, U) alrededor de p. Notamos al conjunto de vectores tangentes cinéticos a M en p, T_pM y definimos de la manera usual al fibrado tangente cinético $TM = \bigcup_{p \in M} T_pM$ que tiene estructuras de variedad y de fibrado definidas de la forma usual. A la proyección en M la llamamos π_{TM}. A estos objetos los llamaremos en general, vectores tangentes, espacio tangente y fibrado tangente (omitiendo la aclaración de que se trata del cinético).

Observación 1.6. El espacio tangente cinético es canónicamente isomorfo al espacio localmente convexo E en el que se modela a M. Ese isomorfismo viene a través de la identificación entre la clase de una curva γ y el valor de $(\phi \circ \gamma)'(0)$ que es un elemento de E.

A continuación dotamos al espacio $C^\infty(M, E)$ de una estructura localmente convexa. La intención de esta definición es poder definir derivaciones continuas en $C^\infty(M)$ y así poder contruir el fibrado tangente operacional. En la siguiente sección, sin embargo, trabajaremos con mayor profundida sobre las topologías adecuadas para los espacios de funciones.

Definición 1.7. Para el espacio $C^\infty(M, E)$ con E un espacio localmente convexo y M compacta, definimos la topología Whitney como la inducida por las seminormas

$$p_{l,K,n}(f) = \sup_{x \in \varphi(K)} P_n(D^l(f\varphi^{-1})(x))$$

donde P_n es una de las seminormas de E, (φ, U) es una carta de M y $K \subseteq U$ es un compacto de M. De esta manera, la topología Whitney de $C^\infty(M, E)$ lo dota con estructura de espacio localmente convexo: para verificar esto nada más hay que probar que la topología que definen estas seminormas hace continuas a las operaciones de producto por un escalar y de suma de funciones. Más aún, se trata de un espacio de Fréchet pues con esta topología resulta completo y la familia de seminormas es numerable si M tiene base numerable (por ejemplo, si M es una variedad en el sentido clásico).

Definición 1.8. Sea $p \in M$ con M una variedad modelada en E un $\mathbb{K}$-espacio vectorial localmente convexo. Un vector tangente operacional a M en p es una derivación sobre ev_p de $C^\infty(M)$. Es decir, una función $\partial : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal, continua y tal que $\partial(fg) = f(p)\partial(g) + g(p)\partial(f)$. Definimos el espacio tangente operacional y el fibrado tangente operacional de forma análoga al caso de dimensión finita. También definimos campos de vectores y el corchete de Lie entre campos de vectores en forma análoga al caso finito dimensional.

Observación 1.9. Todo vector tangente cinético es claramente un vector tangente operacional: para ver esto consideramos una curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ y la representamos como una derivación vía $\gamma(f) = (f \circ \gamma)'(0)$. Sin embargo, no es verdad que estos dos espacios sean isomorfos en general.

Definición 1.10. Sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades, entonces dado un punto $p \in M$ tenemos una transformación lineal inducida $d_p(f) : T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N$ dada por $d_p(f)([\alpha]) = [f \circ \alpha]$. Además tenemos una función diferenciable $df : TM \longrightarrow TN$ dada por $df(p, [\alpha]) = d_p(f)([\alpha])$.

Espacios de funciones

En esta sección examinaremos la topología Whitney de los espacios de funciones entre variedades. Estamos interesados en dotar de una topología al conjunto $C^\infty(M, N)$ formado por las funciones diferenciables entre dos variedades M y N. El objetivo es alcanzar el estudio de los grupos de difeomorfismos de variedades compactas: estos grupos de difeomorfismos son subconjuntos de $C^\infty(M, N)$ y es de esperarse, debido a su tamaño, que resulten variedades de dimensión infinita como las que definimos en la sección anteior.

Definición 1.11. Sean M y N variedades en el sentido clásico, es decir, finito dimensionales. La topología débil de Whitney en $C^r(M, N)$ es la generada por los subconjuntos:

$$\mathfrak{N}^r(f, K, (\varphi, U), (\phi, V), \epsilon)$$

que definimos como subbase de entornos abiertos de una función $f : M \longrightarrow N$ para (φ, U) y (ϕ, V) cartas de M y N respectivamente y $K \subseteq U$ un compacto de M tal que $f(K) \subseteq V$. Estos subconjuntos están conformados por las funciones $g : M \longrightarrow N$ tales que $g(K) \subseteq V$ y además para todo $x \in \varphi(K)$ y para todo $k \in \{1, 2, ..., r\}$ se tiene que

$$\|D^k(\phi f \varphi^{-1})(x) - D^k(\phi g \varphi^{-1})(x)\| < \epsilon$$

Con la topología así definida, un entorno de una función f queda dado por una intersección de finitos entornos subbásicos como los arriba definidos. Esta topología es también llamada la topología compacto-abierta C^r.

Definición 1.12. La topología fuerte de Whitney en $C^r(M, N)$ es la generada por los subconjuntos:

$$\mathfrak{N}^r(f, \Phi, \psi, K, \epsilon)$$

que definimos como subbase de entornos abiertos de una función $f : M \longrightarrow N$ para $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia localmente finita de cartas de M, $K = \{K_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia de compactos de M con $K_i \subseteq U_i$ y $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i \in \Lambda}$ una familia de cartas de N tales que $f(K_i) \subseteq V_i$ y $\epsilon = \{\epsilon_i\}$ una familia de números reales. Estos subconjuntos están conformados por las funciones $g : M \longrightarrow N$ tales que $g(K_i) \subseteq V_i$ y además para todo $x \in \varphi_i(K_i)$ y para todo $k \in \{1, 2, ..., r\}$ se tiene que

$$\|D^k(\phi_i f \varphi_i^{-1})(x) - D^k(\phi_i g \varphi_i^{-1})(x)\| < \epsilon_i$$

Las topologías débil y fuerte de Whitney se diferencian únicamente en variedades no compactas. Esto es debido a que su diferencia radica en que la topología fuerte de Whitney logra controlar el comportamiento de una función en el infinito mientras que la débil no lo hace.

Proposición 1.13. *Las topologías débil y fuerte de Whitney coinciden en $C^r(M,N)$ si M es compacta.*

Demostración. Es claro que los entornos subbásicos débiles son entornos subbásicos fuertes por lo que alcanza con probar que todo entorno subbásico fuerte es un abierto en la topología débil de Whitney. Para esto, notemos que toda familia localmente finita de cartas en M es finita. En efecto, dada una familia localmente finita $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i\in\Lambda}$ de cartas de M, consideramos, para cada punto $x \in M$ un entorno U_x de x que interseque a únicamente finitos de los U_i. Como M es compacta y los $(U_x)_{x\in M}$ forman un cubrimiento por abiertos de M, podemos extraer un subcubrimiento finito $U_{x_1}, U_{x_2}, ..., U_{x_n}$. Como cada uno de los U_{x_k} interseca a finitos de los U_i y estos cubren a M, deben haber finitos U_i, como queríamos probar. Por último, es claro que los entornos subbásicos fuertes formados por familias Φ finitas son intersección de finitos entornos subbásicos débiles y, entonces, abiertos en la topología débil de Whitney. □

Estas topologías nos permiten definir una topología en $C^\infty(M,N)$ como la inducida por las topologías recién definidas. Tenemos entonces:

Definición 1.14. La topología C^∞ de Whitney débil es la topología inicial en $C^\infty(M,N)$ con respecto a la familia de inclusiones $i_r : C^\infty(M,N) \longrightarrow C^r(M,N)$ con $r \in \mathbb{N}$ donde $C^r(M,N)$ es un espacio topológico con la topología débil de Whitney. Análogamente definimos la topología fuerte C^∞ de Whitney. Es claro que ambas coinciden en el caso en que M es compacta.

Observación 1.15. Sea M una variedad modelada en un espacio localmente convexo E. Es claro que $\mathfrak{X}(M)$, el conjunto de campos de vectores diferenciables sobre M, es un subconjunto de $C^\infty(M,TM)$ y en un abierto trivializante $U \subseteq M$ se puede identificar con el espacio $C^\infty(U,E)$. Como $C^\infty(U,E)$ es un espacio localmente convexo, resulta que el espacio $\mathfrak{X}(M)$ recibe una estructura localmente convexa. Si además la variedad es compacta, podemos tomar un cubrimiento finito por abiertos trivializantes y obtener que $\mathfrak{X}(M)$ es un espacio de Fréchet: en efecto, la cantidad de seminormas será numerable por tratarse de una cantidad numerable de seminormas en cada abierto del cubrimiento elegido (y ser una colección finita de abiertos). En variedades arbitrarias, con un poco más de esfuerzo se puede dotar de estructura de espacio de Fréchet al conjunto de campos de vectores en M con soporte compacto $\mathfrak{X}_C(M)$.

Las siguientes proposiciones afirman que ciertos subconjuntos del espacio de funciones diferenciables entre dos variedad son abiertos en la topología de Whitney. Más adelante será de utilidad saber que los difeomorfismos entre dos variedades forman un abierto, pues lo usaremos para darle estructura de variedad al grupo de difeomorfismos de una variedad compacta. Esa proposición es la última de las que figuran a continuación.

Proposición 1.16. *Dadas M, N variedades de dimensión finita, el conjunto $Inm^r(M,N)$ de inmersiones de M en N, de clase C^r, es un abierto de $C^r(M,N)$ en la topología fuerte de Whitney, si $r \geq 1$.*

Demostración. Primero notemos que $Inm^r(M,N)$=$Inm^1(M,N) \cap C^r(M,N)$ por lo que basta ver el resultado para el caso en que $r = 1$. Sea entonces $f \in Inm^1(M,N)$, construiremos un entorno de f formado por inmersiones C^1 de M en N. Consideramos algún atlas de N que podemos notar $\Psi = \{\psi_\beta, V_\beta\}_{\beta\in B}$ y un atlas $\Phi = \{\phi_\alpha, U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M tal que todos los U_α tengan clausura compacta y que además, para cada $\alpha \in A$, $f(U_\alpha) \subseteq U_{\beta(\alpha)}$ para algún $\beta(\alpha) \in B$. Sea entonces $\Psi = \{\psi_\alpha, V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ la familia de cartas de N dada por los $V_\alpha = V_{\beta(\alpha}$ y consideremos un cubrimiento por compactos de M dado por una familia K_α que satisfaga que $K_\alpha \subseteq U_\alpha$. Sea ahora

$$A_\alpha = D(\phi_\alpha f \psi_\alpha^{-1})(\psi_\alpha(K_\alpha)) = \{D(\phi_\alpha f \psi_\alpha^{-1})(x) : x \in \psi_\alpha(K_\alpha)\} \subseteq L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

Es claro que A_α es un conjunto compacto de $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que está contenido dentro del abierto en $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ formado por los operadores inyectivos, pues f es una inmersión. Entonces, por el lema del tubo, existe una familia de números reales $\{\epsilon_\alpha\}$ que satisface que $\|T - S\| < \epsilon_\alpha$ y $T \in A_\alpha$ implica S inyectivo. Luego el entorno subbásico de f dado por

$$\mathfrak{N}(f, \Phi, \Psi, K, \epsilon)$$

con $K = \{K_\alpha\}$ y $\epsilon = \{\epsilon_\alpha\}$ satisface que está formado únicamente por inmersiones C^1 de M en N. □

Con una demostración similar se puede obtener un resultado sobre el conjunto de submersiones de M en N.

Proposición 1.17. *Dadas M, N variedades de dimensión finita, el conjunto $Sub^r(M,N)$ de submersiones de M en N, de clase C^r, es un abierto de $C^r(M,N)$ en la topología fuerte de Whitney para $r \geq 1$.*

Con una demostración un tanto más técnica se puede probar la siguiente proposición. Para una demostración detallada ver [H].

Proposición 1.18. *Dadas M, N variedades de dimensión finita, el conjunto $Emb^r(M,N)$ de embeddings de M en N, de clase C^r, es un abierto de $C^r(M,N)$ en la topología fuerte de Whitney para $r \geq 1$.*

Otro abierto en la topología Whitney está formado por las funciones propias entre dos variedades.

Proposición 1.19. *Dadas M y N variedades de dimensión finita, el conjunto $Prop^r(M,N)$ de funciones C^r propias de M en N es un abierto de $C^r(M,N)$ en la topología fuerte de Whitney si $r \geq 0$.*

Demostración. Sea $f : M \longrightarrow N$ propia. Sea $\Phi = \{\phi_i, U_i\}_{i\in\Lambda}$ una familia localmente finita de cartas de M tal que los U_i tienen clausura compacta y sea $\{K_i\}_{i\in\Lambda}$ un cubrimiento por compactos de M tal que $K_i \subseteq U_i$. Construiremos un atlas de $f(M)$, $\Psi = \{\psi_i, V_i\}_{i\in\Lambda}$

localmente finito y tal que $f(U_i) \subseteq V_i$. Comenzamos entonces con un atlas cualquiera de $f(M)$ subordinado al cubrimiento por compactos $f(K_i)$ y tratamos de construir uno que sea localmente finito. Primero debemos probar que la familia $f(K_i)$ es localmente finita. Esto se debe a que f es propia: en efecto, dado un punto cualquiera x en $f(K_{i_0})$ tomamos un entorno de y que llamamos U_y con clausura compacta en N. La preimagen de $\overline{U_y}$ por f es un compacto de M. Para cualquier punto $x \in f^{-1}(U_y)$ tenemos un entorno que lo llamamos U_x que interseca únicamente finitos compactos K_i y como $f^{-1}(U_y)$ es un compacto podemos extraer un subcubrimiento finito de estos entornos. Luego, $f^{-1}(U_y)$ interseca solo finitos compactos K_i y en particular U_y interseca tan solo finitos de los $f(K_i)$. Esto prueba que la familia $f(K_i)$ es localmente finita. Ahora buscaremos entornos abiertos de los $f(K_i)$ que sigan siendo localmente finitos y que estén contenidos en los abiertos del atlas Ψ subordinado a $f(K_i)$ que tomamos en un principio. Una manera de hacer esto es considerar cualquier métrica riemanniana en N y utilizarla para engordar los compactos en abiertos suficientemente chicos para que preserven la finitud local y además sigan estando incluidos en los respectivos abiertos del atlas. Esto nos da un atlas $\widetilde{\Psi} = \{V_i\}_{i\in\Lambda}$ que es localmente finito y tal que $f(K_i) \subseteq V_i$ para todo $i \in \Lambda$. Con este atlas construido, consideramos un entorno de f que esté conformado por funciones g que satisfacen que $g(K_i) \subseteq V_i$ para cada $i \in \Lambda$. Afirmos que este entorno está conformado por funciones propias. En efecto, basta tomar un compacto $L \subseteq N$ y probar que $g^{-1}(L)$ es compacto. Observemos que L interseca únicamente a finitos de los V_i, dado que estos forman un cubrimiento localmente finito, por lo que la preimagen de L por g estará cubierta por finitos de los compactos K_i en M y al ser un cerrado contenido en una unión finita de compactos, resulta compacto. Esto completa la demostración. □

Finalmente, obtenemos como corolario de las últimas proposiciones que los difeomorfismos entre variedades conforman un abierto.

Proposición 1.20. *Dadas M, N variedades de dimensión finita, el conjunto $\mathrm{Diff}^r(M,N)$ de difeomorfismos de M en N, de clase C^r, es un abierto de $C^r(M,N)$ en la topología fuerte de Whitney.*

Demostración. Esta demostración se basa en la observación siguiente: los difeomorfismos de M en N son exactamente las funciones diferenciables que son submersiones, embeddings y propias entre M y N. Podemos asumir que tanto M como N son conexas pues un difeomorfismo f establece una biyección entre componentes conexas y posee un entorno que establece la misma biyección. Es claro que si f es un difeomorfismo entonces es una submersión y un embedding. Para ver que los difeomorfismos son propios, basta notar que son cerrados y que tienen fibras finitas (es más, de cardinal 1). Para ver que vale la igualdad notemos que si una función es submersión entonces tiene imagen abierta, mientras que las funciones propias tienen imagen cerrada. Por la conexión de N esto demuestra que f es sobreyectiva y al ser un embedding, resulta un difeomorfismo. Con la afirmación probada, sólo resta notar que las submersiones, los embeddings y las funciones propias son abiertos por lo demostrado anteriormente y luego, $\mathrm{Diff}^r(M,N)$, es intersección de tres abiertos en la topología fuerte de Whitney. □

Grupos de Lie en dimensión infinita

Definición 1.21. Un grupo G que tiene estructura de variedad diferencial modelada en un espacio localmente convexo tal que el producto y la inversión resultan diferenciables se dice un grupo de Lie localmente convexo. Definimos morfismos de grupos de Lie como morfismos de grupos diferenciables.
Del mismo modo que usualmente lo hacemos, podemos definir campos de vectores invariantes a izquierda y obtener el álgebra de Lie de un grupo de Lie localmente convexo.

Hablaremos ahora de algunas de las principales diferencias que surgen de considerar grupos de Lie en dimensión infinita y, en particular, en espacios de Frechét o localmente convexos: el mapa exponencial.
El mapa exponencial es una herramienta fundamental de la teoría de Lie finito dimensional y es natural preguntarse si forma parte de la teoría de grupos de Lie localmente convexos. La existencia de dicha aplicación, así como su unicidad, son consecuencia del teorema de Piccard que establece la existencia y unicidad de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias en espacios euclídeos de dimensión finita. No es difícil ver que este teorema puede extenderse a espacios de Banach, debido a que sigue valiendo el teorema del punto fijo de Banach, que es la principal herramienta para demostrarlo. Esto nos muestra que definir un mapa exponencial en grupos de Lie-Banach puede hacerse de un modo completamente análogo al caso de dimensión finita. Para grupos modelados en espacios de Fréchet no contamos con esta suerte: el teorema de Piccard para ecuaciones diferenciales ordinarias no es válido y existen ecuaciones ordinarias sin soluciones, así como existen con múltiples soluciones. Esto conduce a la definición siguiente

Definición 1.22. Sea G un grupo de Lie con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Llamamos a una función suave $exp_G : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ un mapa exponencial para G si para cada $x \in \mathfrak{g}$ la curva $\gamma_x(t) = exp_G(tx)$ es un grupo a un parámetro que satisface $\gamma'_x(0) = x$.

Con la ayuda de una herramienta llamada derivada logarítmica se puede probar un lema de unicidad que permite establecer que todo grupo de Lie tiene a lo sumo un mapa exponencial. Los detalles sobre esta demostración pueden ser encontrados en el Lema II.3.5 de [N]. Esto nos conduce a la definición de grupos de Lie regulares.

Definición 1.23. Decimos que un grupo de Lie G es regular si admite una aplicación exponencial.

No ahondaremos en criterios de regularidad ni en cuestiones delicadas sobre la existencia de grupos de Lie no regulares y por ese mismo motivo no demostraremos el lema de unicidad recién mencionado: nos alcanza con saber que todos los grupos de Lie con los que trabajaremos en esta tesis son regulares[1].

[1] La definición de grupo de Lie regular es en realidad más relajada que la que hemos dado acá aunque para ambas definiciones vale la siguiente afirmación: no se conocen grupos de Lie no regulares. Para más información ver [Mi Kr2].

El siguiente teorema es fundamental para obtener estructuras de grupos de Lie a partir de una estructura local.

Teorema 1.24. *Sea G un grupo y $U \subseteq G$ un subconjunto tal que $U = U^{-1}$. Asumamos además que U es una variedad modelada en un espacio E localmente convexo tal que:*

- *Existe un entorno de la unidad $V \subseteq U$ tal que $V = V^{-1}$ y $V \cdot V \subseteq U$ tal que la multiplicación $m_V : V \times V \longrightarrow U$ es suave.*
- *La inversión $\eta_U : U \longrightarrow U$, $u \mapsto u^{-1}$ es suave.*
- *Para todo $g \in G$, la conjugación $c_g : G \longrightarrow G$, $h \mapsto ghg^{-1}$ satisface que existe un entorno de la unidad $V_g \subseteq U$ tal que $V_g^{-1} = V_g$, $c_g(V_g) \subseteq U$ y que $c_g : V_g \longrightarrow U$ es diferenciable.*

Entonces existe una única estructura de grupo de Lie en G para la cual existe un entorno de la unidad $U_0 \subseteq U$ tal que la inclusión $U_0 \longrightarrow G$ induzca un difeomorfismo con un abierto de G. Además, si G está generado por V la tercera condición puede omitirse.

Demostración. Sea $A \subseteq V$ un abierto y v_0 un elemento tal que $v_0 A \subseteq V$. Notemos que $v_0 A$ es el conjunto de los $v \in V$ tales que $v_0^{-1} v \in A$, que resulta un abierto por la primer hipótesis. Más aún, la primer hipótesis establece que las aplicaciones $f : A \longrightarrow v_0 A$ dada por multiplicar a izquierda por v_0 y $g : v_0 A \longrightarrow A$ dada por multiplicar a izquierda por el inverso de v_0 son biyecciones inversas y diferenciables por lo que $v_0 A$ es difeomorfo a A.

Elijamos un entorno $W \subseteq V$ que sea el dominio de alguna carta de U y tal que $W = W^{-1}$ y $W^3 \subseteq V$. Llamemos (W, φ) a la carta que dijimos que existía, con dominio W. Para cada $g \in G$, sea $\varphi_g : gW \longrightarrow E$ dada por $h \mapsto \varphi(g^{-1}h)$. Afirmamos que estas funciones son cartas compatibles para G. Sean $g_1, g_2 \in G$ dos elementos diferentes con $g_1 W \cap g_2 W \neq \varnothing$. Esto implica que $g_2^{-1} g_1$ y $g_1^{-1} g_2$ son elementos de W y por lo probado anteriormente (dado que $W^3 \subseteq V$) resulta que $g_1^{-1} g_2 W$ es un abierto y luego $W \cap g_1^{-1} g_2 W$ es un abierto, por ser intersección de abiertos. Dado que $\varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) = \varphi(W \cap g_1^{-1} g_2)$, resulta que $\varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W)$ es un abierto de E y además, basta notar que $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1} : \varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) \longrightarrow \varphi_{g_2}(g_1 W \cap g_2 W)$ es la función $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1}(x) = \varphi(g_2 g_1^{-1} \varphi^{-1}(d))$ que es diferenciable por las hipótesis 1 y 2.

Sea $g_0 \in G$. Notemos que la aplicación $\mu_{g_0} : G \longrightarrow G$ dada por la multiplicación a izquierda por g_0 es diferenciable. En efecto, sea $g \in G$ entonces tenemos que $\varphi_{g_0 g} \circ \mu_{g_0} \circ \varphi_g^{-1}(x) = \varphi_{g_0 g}(g_0 g \varphi^{-1}(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$ y la identidad es claramente diferenciable. Resta verificar que la multiplicación y la inversión son diferenciables. Para esto, basta encontrar para cada $g \in G$ un entorno abierto de la unidad tal que la aplicación $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ sea diferenciable en ese entorno de la unidad y un entorno abierto de la unidad en el que la conjugación por g resulte diferenciable. Ambas condiciones se cumplen por las hipótesis 1 y 3 y lo ya demostrado. Para ver que U es un abierto de G con esta estructura de variedad, alcanza con notar que para todo $u \in U$ existe un entorno abierto $A \subseteq W$ de la unidad tal que $uA \subseteq U$ por la primer hipótesis.

Para la unicidad notemos que el atlas así construido para G es un atlas de cualquier estructura de variedad que pueda llevar G en la que U sea un abierto. $\square$

Una aplicación natural de este teorema es la de brindarle estructura de variedad a los espacios $C^r(M,N)$ cuando M es de dimensión finita y N es un grupo de Lie. Esta estructura de variedad es compatible con la topología débil de Whitney y hace de $C^r(M,N)$ un grupo de Lie con la estructura dada punto a punto. No demostraremos esta aplicación pues nuestro objetivo es brindarle una estructura de grupo de Lie al grupo de difeomorfismos de una variedad pero no con su estructura punto a punto, sino con la composición. Dejamos la construcción de la estructura de variedad correspondiente para el segundo capítulo.

La acción coadjunta

Todo grupo de Lie tiene dos acciones distinguidas: la adjunta y la coadjunta. Será de vital importancia para el resto del texto comprender la segunda de estas dos. Para esto comenzamos con algunas definiciones elementales que resultarán familiares para cualquier persona interiorizada en teoría de representaciones.

Definición 1.25. Una representación de un grupo de Lie G en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una acción $\phi : G \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ lineal y diferenciable. (Asumimos, en este caso, que $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial topológico.)

Definición 1.26. Sea $g \in G$ y sea $c_g : G \longrightarrow G$ la conjugación por g, es decir, $c_g(h) = ghg^{-1}$. Sea Ad_g la diferencial de c_g en la identidad que es un automorfismo del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Decimos que el mapa $Ad : G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$ dado por $Ad(g) = Ad_g$ es la representación adjunta de G en $\mathfrak{g}$.

Definición 1.27. Una representación de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es un morfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathbb{V})$ donde $End(\mathbb{V})$ está equipado con el corchete dado por el conmutador.

Definición 1.28. La diferencial en la identidad de la representación adjunta de un grupo de Lie G nos da una representación de su álgebra de Lie en ella misma que llamamos representación adjunta y notamos $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$ dada por $ad(x)(y) = ad_x(y) = d_eAd(x)(y)$.

Vale el siguiente resultado que se encuentra en cualquier libro clásico sobre representaciones de álgebras de Lie.

Proposición 1.29. *La representación adjunta de un álgebra de Lie en sí misma coincide con el corchete de Lie de la siguiente manera* $ad_x(y) = [x,y]$.

La Definición 1.28 merece algunas palabras especiales para el caso en que el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no es un espacio de Banach. En efecto, en este caso $Aut(\mathfrak{g})$ no tiene estructura de grupo de Lie por lo que no podemos considerar la diferencial de la representación adjunta del grupo para obtener una representación del álgebra. Sin embargo, vale la siguiente observación: $Aut(\mathfrak{g})$ es un subgrupo de $\mathrm{Diff}(\mathfrak{g})$ por lo que podemos considerar la diferencial de Ad vista como una función con codominio en $\mathrm{Diff}(\mathfrak{g})$, que sí posee estructura diferenciable. En este contexto también vale la Proposición 1.29.

Como dijimos al inicio de la sección, hay dos representaciones fundamentales para el estudio de un grupo de Lie o de un álgebra de Lie. A continuación definimos la representación coadjunta en un grupo de Lie que se obtiene como dual de la representación adjunta ya definida. Naturalmente, esta representación induce vía diferenciación una representación en el álgebra de Lie de G que también llamaremos representación coadjunta. A partir de ahora, denotamos por $\mathfrak{g}^*$ al dual de $\mathfrak{g}$, es decir, al conjunto de funcionales $f : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ lineales y continuas.

Definición 1.30. Sea G un grupo de Lie. La representación coadjunta de G en $\mathfrak{g}^*$ viene dada por $Ad^* : G \longrightarrow End(\mathfrak{g}^*)$ de modo tal que $Ad^*(g)(\xi) = Ad^*_g(\xi) : x \mapsto \xi(Ad_{g^{-1}}(x))$. Es decir, si notamos por $\langle , \rangle$ al pairing entre $\mathfrak{g}^*$ y $\mathfrak{g}$, entonces Ad^* queda definida por la relación:

$$\langle Ad^*_g(\xi), x\rangle = \langle \xi, Ad_{g^{-1}}(x)\rangle.$$

Notación: A partir de ahora, notamos con $\langle\ ,\ \rangle$ al pairing entre el dual de un álgebra de Lie y esta álgebra.

Definición 1.31. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie de un grupo de Lie G. El diferencial de la representación coadjunta de G en la identidad induce una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*$ que llamamos representación coadjunta y notamos ad^*. Explícitamente, en un determinado vector $X \in \mathfrak{g}$ vale la relación:

$$\langle ad^*_X(\xi), Z\rangle = -\langle \xi, ad_X(Z)\rangle$$

Si bien la definición anterior nos da una noción de representación coadjunta sobre el dual de un álgebra de Lie, en general, cuando nos referimos a esta representación hablamos de una subrepresentación adecuada. El motivo de mirar en realidad una restricción de esta acción sobre un subconjunto de $\mathfrak{g}^*$, es que en general $\mathfrak{g}^*$ no resulta un espacio de Fréchet (aún cuando $\mathfrak{g}$ sí lo sea).

Definición 1.32. Llamamos dual suave de $\mathfrak{g}$ a un subespacio Fréchet $\mathfrak{g}^*_s$ de $\mathfrak{g}^*$ invariante por la acción de G, y tal que el pairing entre $\mathfrak{g}^*_s$ y $\mathfrak{g}$ satisface que tanto para todo $X \in \mathfrak{g}$ hay un elemento $\xi \in \mathfrak{g}^*_s$ tal que $\xi(X) \neq 0$ como que para todo $\xi \in \mathfrak{g}^*_s$ existe un $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\xi(X) \neq 0$. Estas dos condiciones nos permiten establecer la acción coadjunta de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}^*_s$ de forma única vía la misma definición que en $\mathfrak{g}^*$. Durante el resto de la tesis omitiremos el subíndice s y cada vez que nos refiramos a $\mathfrak{g}^*$ estaremos hablando del dual suave de $\mathfrak{g}$.

Como nosotros nos encaminamos a trabajar con un álgebra en particular no desarrollaremos ejemplos de la construcción del subespacio $\mathfrak{g}^*_s$ adecuado para diferentes álgebras de Lie: en general, para cada álgebra el subespacio construido obedece a particularidades del caso específico. Para el álgebra de Virasoro, que es con la que trabajaremos, una construcción específica de su dual suave se dará en el Capítulo 4.

Definición 1.33. Llamamos órbitas adjuntas y coadjuntas a las órbitas por la acción adjunta y coadjunta de un grupo de Lie G respectivamente.

Extensiones de grupos y álgebras de Lie

En esta sección definiremos extensiones centrales de grupos y álgebras de Lie, y estudiaremos sus relaciones con la cohomología del álgebra en cuestión. Consideraremos todas las álgebras de Lie en esta sección como álgebras sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ de característica cero que será en los ejemplos siempre $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$.

Definición 1.34. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie. Decimos que $\widehat{\mathfrak{g}}$ es una extensión de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ si existe una sucesión exacta corta de álgebras de Lie de la forma

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

Una extensión de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ se dice central si $i(\mathfrak{h}) \subseteq Z(\widehat{\mathfrak{g}})$, es decir, si $[i(h), g] = 0$ para todos los $g \in \mathfrak{g}$ y $h \in \mathfrak{h}$.

Observación 1.35. Como se trata de una sucesión exacta de espacios vectoriales, es split y luego tenemos una sección de π a la cual llamaremos σ. De este modo podemos identificar $\widehat{\mathfrak{g}}$ con $\mathfrak{h} \times \mathfrak{g}$. Consideremos, dados $x, y \in \mathfrak{g}$ el elemento de $\widehat{\mathfrak{g}}$ dado por $\sigma([x,y]) - [\sigma(x), \sigma(y)]$. Es claro que este elemento forma parte del núcleo de π por lo que existe un elemento $\omega(x,y) \in \mathfrak{h}$ que satisface $i(\omega(x,y)) = -\sigma([x,y]) + [\sigma(x), \sigma(y)]$. De este modo, obtenemos que el corchete en $\widehat{\mathfrak{g}}$ toma la forma de

$$[\sigma(x) + i(a), \sigma(y) + i(b)] = [\sigma(x), \sigma(y)] = i(\omega(x,y)) + \sigma([x,y])$$

que podemos escribir más cómodamente como

$$[(x,a), (y,b)] = ([x,y], \omega(x,y)).$$

Observación 1.36. Por la identidad de Jacobi obtenemos que para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$ tenemos que $i(\omega([x,y],z)) + i(\omega([y,z],x)) + i(\omega([z,x],y)) = 0$ y luego por la inyectividad de i y su linealidad, debe cumplirse que $\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0$. Esto conduce a la siguiente definición.

Definición 1.37. Decimos que $\omega : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ es un 2-cociclo en $\mathfrak{g}$ a valores en $\mathfrak{h}$ si satisface que $\omega([x,y],z) + \omega([y,z],x) + \omega([z,x],y) = 0$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathfrak{g}$, y además, ω es continuo.

Del modo usual definimos los cobordes y el segundo grupo de cohomología.

Definición 1.38. Un 2-cociclo ω en $\mathfrak{g}$ a valores en $\mathfrak{h}$ se dice un 2-coborde si existe un mapa lineal $\alpha : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\omega(x,y) = \alpha([x,y])$ para todos los $x, y \in \mathfrak{g}$.

Definición 1.39. El segundo grupo de cohomología es el cociente entre el espacio de los 2-cociclos y el de los 2-cobordes. Lo notamos $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{h})$.

La próxima definición nos brinda una noción de equivalencia entre extensiones centrales de un álgebra de Lie. Inmediatamente después enunciamos un teorema clásico de clasificación para estas clases de equivalencia que establece que las clases de equivalencia de extensiones centrales están en biyección con el segundo grupo de cohomología de $\mathfrak{g}$.

Definición 1.40. Dos extensiones $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ son equivalentes o isomorfas si existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ tal que haga conmutar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{i_1} & \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{i_2} & \mathfrak{g}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Observación 1.41. Dos extensiones centrales equivalentes se corresponden a un mismo cociclo si elegimos la sección adecuada para cada proyección. Esto nos dice que dos extensiones centrales son isomorfas si son la misma a menos de un "cambio de coordenadas".

Teorema 1.42. *El espacio de clases de equivalencia de extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ está en biyección con $H^2(\mathfrak{g};\mathfrak{h})$, el segundo grupo de cohomología de $\mathfrak{g}$ a coeficientes en $\mathfrak{h}$.*

Demostración. Primero veremos que si dos extensiones centrales son equivalentes entonces los cociclos que inducen son iguales en cohomología. Sean $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}$ álgebras de Lie y consideremos dos extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ como en el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{i_1} & \mathfrak{g}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{h} & \xrightarrow{i_2} & \mathfrak{g}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Consideremos una sección σ_1 de π_1 y sea σ_2 la sección de π_2 dada por $\sigma_2 = \phi \circ \sigma_1$. Sean $[\ ,\ ]_1$ y $[\ ,\ ]_2$ los corchetes de las respectivas extensiones. Tenemos que

$$i_1(C_{\sigma_1}(x,y)) = \sigma_1([x,y]) - [\sigma_1(x), \sigma_1(y)]_1$$

y análogamente para i_2. Además, aplicando a la igualdad anterior la función ϕ y usando la conmutatividad del diagrama obtenemos que

$$i_2(C_{\sigma_1}(x,y)) = (\phi \circ \sigma_1)([x,y]) - \phi([\sigma_1(x), \sigma_1(y)]_1) = \sigma_2([x,y]) - [\sigma_2(x), \sigma_2(y)]_2.$$

Motivo por el cual $i_2(C_{\sigma_1}(x,y)) = i_2(C_{\sigma_2}(x,y))$ y luego por la inyectividad de i_2 obtenemos que los cociclos coinciden.
Veamos ahora que dos extensiones construidas con cociclos cohomólogos resultan equivalentes. Supongamos que $C_1(x,y) = C_2(x,y) + \tau([x,y])$ son dos cociclos cohomólogos a valores en $\mathfrak{h}$ con $\tau : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ lineal. Consideremos las dos extensiones centrales $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ que se obtienen de la forma $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ con el corchete $[(x,a),(y,b)]_i = ([x,y], C_i(x,y))$. Estos corchetes definen estructuras de álgebra de Lie en $\mathfrak{g}_1$ y $\mathfrak{g}_2$ que resultan extensiones centrales de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$. Probaremos que estas dos extensiones son equivalentes. Definimos $\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$ dada por $\phi(x,a) = (x, a - \tau(x))$. Esta definición de ϕ es lineal, hace conmutar el diagrama y además resulta morfismo de álgebras de Lie pues

$$\phi([(x,a),(y,b)]_1) = \phi(([x,y], C_1(x,y))) = ([x,y], C_1(x,y) - \tau([x,y])) = ([x,y], C_2(x,y))$$

que es exactamente $[(x,a),(y,b)]_2$. Además es isomorfismo pues su inversa es $\psi(x,a) = (x, a + \tau(x))$. Esto prueba que las dos extensiones así construidas son equivalentes. $\square$

Hay ciertas extensiones centrales de álgebras de Lie que nos interesarán especialmente.

Definición 1.43. Una extensión central de $\mathfrak{g}$

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

se dice universal si para toda extensión central

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h}' \xrightarrow{i'} \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi'} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

existen dos morfismos únicos de álgebras de Lie $\Phi : \widehat{\mathfrak{g}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{g}}$ y $\phi : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}'$ tales que $\pi' \circ \Phi = \pi$ y $i' \circ \phi = \Phi \circ i$.

Observación 1.44. Si un álgebra de Lie admite una extensión universal central entonces esta es única salvo isomorfismo. No es cierto, sin embargo, que toda álgebra de Lie admita una tal extensión universal, aunque el siguiente resultado nos brinda un criterio suficiente para que esto suceda.

Teorema 1.45. *Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ perfecta (es decir, una tal que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$) admite una extensión central universal.*

Demostración. Construyamos la extensión central universal correspondiente. Para eso sea $E = \Lambda^2(\mathfrak{g})$ el espacio de 2-tensores contravariantes antisimétricos en $\mathfrak{g}$. Sean $E' = \{\sum_{k=1}^{p} x_k \wedge y_k | \sum_{k=1}^{p} [x_k, y_k] = 0\}$ y E'' el subespacio generado por los elementos de la forma

$$[x, y] \wedge z + [z, x] \wedge y + [y, z] \wedge x$$

Tenemos que E'' es un subespacio de E' por la identidad de Jacobi y podemos definir entonces $\mathfrak{a} = E'/E''$ y $\widetilde{\mathfrak{a}} = E/E''$. Sea $p : E \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{a}}$ la proyección al cociente y sea $c : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{a}}$ el cociclo dado por $c(x, y) = p(x \wedge y)$. Este cociclo genera entonces una extensión central de la forma

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{a}} \xrightarrow{i} \widetilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

que satisface que si

$$0 \longrightarrow \mathfrak{h} \xrightarrow{i} \overline{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

es otra extensión central de cociclo c entonces el morfismo $\psi : \widetilde{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathfrak{h}$ dado por $p(x \wedge y) = c(x, y)$ induce un diagrama conmutativo de extensiones centrales de álgebras de Lie. La dificultad radica en probar la unicidad pues esta no es cierta en general y aquí es donde debemos apelar a la hipótesis sobre $\mathfrak{g}$. Consideremos $\widetilde{\mathfrak{g}} \cap [\widetilde{\mathfrak{g}}, \widetilde{\mathfrak{g}}] = \widehat{\mathfrak{g}}$. Obtenemos entonces por restricción una nueva extensión central

$$0 \longrightarrow \widehat{\mathfrak{a}} \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0$$

donde $\widehat{\mathfrak{a}} = \widehat{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{a}$. Lo primero que veremos es que $\widehat{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$. En efecto, dados $(x_k, y_k)_{k=1,\ldots p}$ tales que $\sum_{k=1}^{p} [x_k, y_k] = 0$ notemos que tenemos la igualdad en $\widehat{\mathfrak{g}}$:

$$[(x_k, 0), (y_k, 0)] = ([x_k, y_k], p(x_k \wedge y_k))$$

que nos dice, sumando sobre todos los k

$$\sum_{k=1}^{p}[(x_k,0),(y_k,0)] = (0,\sum_{k=1}^{p} p(x_k \wedge y_k))$$

y luego $E'/E'' = \mathfrak{a} \subseteq [\widetilde{\mathfrak{g}},\widetilde{\mathfrak{g}}]$, por lo que $\mathfrak{a} = \widehat{\mathfrak{a}}$. Esto nos dice que la extensión que hemos construido es de la forma

$$0 \longrightarrow E'/E'' \xrightarrow{i} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \longrightarrow 0.$$

Ahora bien, el morfismo $\psi : \widetilde{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathfrak{h}$ dado por $p(x \wedge y) = c(x,y)$ que definimos anteriormente, se restringe a un morfismo $\psi : \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{h}$ y este morfismo induce sobre cualquier otra extensión central un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & E'/E'' \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\psi"] & \widehat{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\Phi"] & \mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{h} \arrow[r, "i_2"] & \overline{\mathfrak{g}} \arrow[r, "\pi_2"] & \mathfrak{g} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

por lo que resta ver la unicidad de Φ. Supongamos entonces que tenemos dos funciones Φ_1, Φ_2 que hacen conmutar el diagrama de arriba. Para todos los $x, y \in \widehat{\mathfrak{g}}$ tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
(\Phi_1 - \Phi_2)([x,y]) =& \Phi_1([x,y]) - \Phi_2([x,y]) \\
=& [\Phi_1(x), \Phi_1(y)] - [\Phi_2(x), \Phi_2(y)] \\
=& [\Phi_1(x) - \Phi_2(x), \Phi_1(y)] - [\Phi_2(x), \Phi_1(y) - \Phi_2(y)] = 0
\end{aligned}$$

pues $\Phi_1(x) - \Phi_2(x)$ y $\Phi_1(y) - \Phi_2(y)$ son centrales. Esto prueba que Φ_1 y Φ_2 coinciden sobre conmutadores y luego, sobre toda $\widehat{\mathfrak{g}}$. □

De un modo similar al ya analizado con las álgebras de Lie, se pueden estudiar las extensiones centrales de los grupos de Lie y sus extensiones centrales universales.

Métricas en variedades infinito dimensionales

En esta sección trabajaremos con métricas de Riemann definidas en variedades de Fréchet. Los objetivos son señalar las principales diferencias que se presentan con el caso finito dimensional al considerar la topología inducida por la distancia intrínseca a la métrica.

Definición 1.46. Sea M una variedad diferenciable. Decimos que g es una métrica de Riemann en M si es una sección diferenciable del fibrado

$$T^*M \otimes T^*M \longrightarrow M$$

que satisface:
- g es simétrico, es decir, $g_p(X,Y) = g_p(Y,X)$ para todo punto $p \in M$ y todo par de

vectores tangentes cinéticos $X, Y \in T_pM$.
- g es definido positivo, es decir, $g_p(X,X) \geq 0$ para todo punto $p \in M$ y todo vector tangente cinético en T_pM.
- g es no degenerado, es decir, $g_p(X,X) = 0$ únicamente en el caso en que $X = 0$. Notaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p = g_p(\cdot, \cdot)$.

Definición 1.47. Decimos que una métrica de Riemann es fuerte si para cada punto $p \in M$ la contracción

$$\begin{aligned} g_p : T_pM &\longrightarrow T_p^*M \\ X &\longmapsto g_p(X, *) \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. En el caso contrario diremos que la métrica es débil.

Observación 1.48. Las métricas de Riemann débiles inducen un monomorfismo de espacios vectoriales, por lo que en el caso finito dimensional toda métrica de Riemann es fuerte. Notemos que tan solo podemos esperar tener métricas fuertes en variedades modeladas por espacios vectoriales reflexivos: más aún, por espacios de Hilbert.

Observación 1.49. Una métrica riemanniana débil no necesariamente induce una conexión de Levi-Civita en la variedad. Para más información sobre la geometría diferencial de estas métricas ver [Bru] o [Kl].

Definición 1.50. Dada (M, g) variedad riemanniana, definimos la longitud de una curva $\alpha : [a, b] \longrightarrow M$ como

$$\mathrm{Long}(\alpha) = \int_a^b \sqrt{g_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}dt$$

Además, la noción de longitud para las curvas en M nos brinda una métrica interna en la variedad. En efecto, dados x, y dos puntos que se encuentran en la misma componente arcoconexa de M podemos definir:

$$d(x,y) = \inf\{\mathrm{Long}(\alpha) |\ \alpha : [a,b] \longrightarrow M \quad \alpha(a) = x,\ \alpha(b) = y\}$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto de curvas que unen x con y.

Esta distancia dota a M de una topología que denotamos τ_g. Recordemos que todas las normas en un espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes, por lo que todas las topologías inducidas por métricas de Riemann en variedades de dimensión finita inducen la misma topología y esa topología además coincide con la de la variedad. Una diferencia fundamental con respecto a las variedades de Fréchet, es que esta topología no es necesariamente la misma que la topología original de M (más aún, no lo es en ningún caso pues si así lo fuera, el espacio vectorial modelo sería un espacio de Banach) y luego debemos diferenciarlas. Sin embargo, sí es cierto que esta topología es más fina que la original de la variedad y esto es consecuencia inmediata de la continuidad de g (que induce la continuidad de d). La otra diferencia que debemos destacar es que la métrica d en el caso finito dimensional es siempre no degenerada mientras que en el caso Fréchet puede darse $d(x,y) = 0$ mientras que $x \neq y$. Para un ejemplo de esta patología ver [Mi Mu].

Cálculo de variaciones

A continuación desarrollaremos algunos rudimentos del cálculo de variaciones. La intención es allanar el camino hacia la demostración del teorema de Euler Arnold que daremos en el Capítulo 2. A lo largo de este capítulo trataremos de desarrollar un análogo al cálculo diferencial para encontrar extremos de ciertas funcionales. Cuando decimos funcional, nos referimos a cualquier función cuyo dominio sea un espacio de funciones y llegue al cuerpo de los números reales. Primero necesitamos algunas definiciones.

Definición 1.51. Sea $R(X)$ un espacio de funciones definidas en un dominio X (por ejemplo el de las funciones continuas en X o el de las C^∞ en X) y sea $\|\cdot\|$ una norma en $R(X)$. Decimos que una funcional $J : R(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ que satisface $|J(x) - J(y)| < \epsilon$ siempre que $\|x - y\| < \delta$.

El siguiente lema se conoce como el lema fundamental del cálculo de variaciones.

Lema 1.52. *Sea $f \in C[a,b]$ y supongamos que $\int_a^b fg\, dx = 0$ para toda $g \in C[a,b]$ con $g(a) = g(b) = 0$. Entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq 0$ para cierto $x \in [a,b]$. Sin pérdida de generalidad, digamos que $f(x) > 0$. Por continuidad f es positiva en un subintervalo $[x_1, x_2]$. Luego, si consideramos la función $g(x) = (x - x_1)(x_2 - x)$ para todo $x \in [x_1, x_2]$ y $g(x) = 0$ fuera de $[x_1, x_2]$ tenemos que g satisface las hipótesis del lema y además

$$\int_a^b fgdx = \int_{x_1}^{x_2} fgdx > 0$$

pues el integrando es positivo. Esto contradice la hipótesis sobre f. $\square$

Definición 1.53. Sea $J[y]$ un funcional en un espacio vectorial normado de funciones. Sea $\Delta J[h] = J(y + h) - J(y)$ el incremento del funcional J en la función $y(x)$. ΔJ es un funcional. Decimos que J es diferenciable si existe un funcional ϕ lineal que satisface $\Delta J[h] = \phi[h] + \epsilon\|h\|$ con $\epsilon \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$. En ese contexto decimos que ϕ es la variación de J y la notamos $\delta J[h]$ (notar que depende de dos variables: $y(x)$ y $h(x)$). La variación de un funcional J diferenciable es única:

Teorema 1.54. *La variación de un funcional J es única.*

Demostración. Supongamos que la variación de un funcional no está definida de forma única y sean ϕ_1, ϕ_2 dos posibles variaciones de un funcional J. Tenemos por definición entonces que

$$\Delta J[h] = \phi_1[h] + \epsilon_1\|h\|$$
$$\Delta J[h] = \phi_2[h] + \epsilon_2\|h\|$$

con $\epsilon_i \to 0$ cuando $\|h\| \to 0$. Si restamos las dos igualdades tenemos que $(\phi_1 - \phi_2)[h] = \epsilon_3\|h\|$ con $\epsilon_3 \to 0$ si $\|h\| \to 0$. Esto prueba que $\phi_1 - \phi_2$ es un funcional lineal que satisface

$$\frac{(\phi_1 - \phi_2)[h]}{\|h\|} \to 0$$

cuando $\|h\| \to 0$. Como la única funcional lineal que satisface esta última relación es la funcional nula, esto prueba que $\phi_1 = \phi_2$. □

Definición 1.55. Decimos que una función y es una extremo de un funcional J si hay un entorno de y (en el espacio de funciones en que definimos J) tal que $J(y) - J(\widehat{y})$ no cambia de signo para $\widehat{y}$ en el entorno elegido.

Vale el siguiente resultado, que es un análogo al teorema de Fermat para funciones diferenciables en $\mathbb{R}^n$. Su demostración es muy sencilla y utiliza exactamente las mismas ideas que la demostración del teorema de Fermat por lo que no la incluiremos.

Teorema 1.56. *Si $y(x)$ es una extremo de una funcional diferenciable J entonces la variación de J en y es la funcional nula, es decir $\delta J[h] = 0$ para toda h posible.*

A partir de ahora nos centraremos en funcionales de la forma

$$J(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

donde los valores a, A, b y B están fijos para los problemas que consideraremos: por eso mismo hablamos de problemas variacionales con extremos fijos. Una teoría más general sobre problemas variacionales con extremos variables se puede desarrollar sin mayores dificultades pero para el objetivo de esta tesis comprender problemas con extremos fijos será más que suficiente. La siguiente construcción es el objeto central de esta sección: se trata de la contrucción de la derivada variacional.

Consideramos entonces un problema variacional de extremos fijos. Para este problema queremos introducir la derivada variacional, que será un objeto análogo al de la derivada parcial para funciones de n variables. Lo primero que haremos será aproximar nuestro problema por otro en un espacio de dimensión finita. Para eso consideremos n puntos equiespaciados $\{x_1, \ldots x_n\}$ en el intervalo $[a, b]$ y sea $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ la longitud del espacio entre estos puntos. Reemplazamos la función $y(x)$ por la poligonal que une los puntos

$$(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$$

con $y_i = y(x_i)$. Podemos aproximar entonces la integral que nos da la funcional J por

$$\widetilde{J}(y_1, y_2, \ldots y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x})\Delta x$$

que es una función de n variables. Ahora calculamos las derivadas parciales $\frac{\partial \widetilde{J}}{\partial y_k}$ y vemos qué sucede con estas derivadas cuando Δx se acerca a 0. Esta derivada nos arroja

$$\frac{\partial \widetilde{J}}{\partial y_k} = F_y(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x})\Delta x + F_{y'}(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{\Delta x}) - F_{y'}(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x})$$

que al dividir por Δx y hacerlo tender a cero (eligiendo únicamente particiones de $[a, b]$ que contengan al punto x_k) nos arroja la siguiente igualdad

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\partial \widetilde{J}}{\partial y_k \Delta x} = F_y(x_k, y_k, y'_k) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x_k, y_k, y'_k)$$

Tomando un punto x_k arbitrario obtenemos el objeto que buscábamos que es la derivada variacional.

Definición 1.57. Decimos que el funcional J satisface la ecuación de Euler-Lagrange sobre una curva y si vale

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y') = 0$$

Se tiene el siguiente resultado que es también de demostración análoga al caso finito dimensional.

Proposición 1.58. *Una condición necesaria para que una funcional de la forma*

$$J(y) = \int_a^b F(x,y(x),y'(x))dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

tenga un extremo sobre una curva y es que J satisfaga la ecuación de Euler-Lagrange sobre y.

Definición 1.59. Decimos que una curva y es una extremal de un funcional J si J satisface la ecuación de Euler-Lagrange sobre y. Notar que todos los extremos son extremales (aunque podría no valer la recíproca).

Hasta el momento hemos desarrollado el cálculo de variaciones para funcionales que salen de un espacio de funciones en un espacio vectorial. Las próximas definiciones van en la dirección de obtener una teoría del cálculo de variaciones para variedades.

Definición 1.60. Dada una variedad M, decimos que una curva $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ es admisible si es C^1 y con derivada no nula a trozos.

Definición 1.61. Dada una curva admisible γ y un intervalo $J = (-\epsilon, \epsilon)$ definimos una variación como una función continua $\nu : J \times [0,1] \longrightarrow M$ tal que $\nu(0,t) = \gamma(t)$, $\nu_s(t) = \nu(s,t)$ es admisible para todo $s \in J$ y si $\pi = \{0 = t_0, t_1, \ldots, t_n = 1\}$ es una partición de $[0,1]$ tal que $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ es diferenciable entonces la restricción de ν a los rectángulos $J \times [t_i, t_{i+1}]$ es C^2.
Una variación se dice con extremos fijos si $\nu_s(0) = \gamma(0)$ y $\nu_s(1) = \gamma(1)$ para todo $s \in J$.

El siguiente lema nos habla de una clase de variaciones muy particulares que utilizaremos más adelante.

Lema 1.62. *Sea M una variedad riemanniana de dimensión finita y exp su exponencial. Sea γ una curva en M admisible y sea $\mu : [0,1] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow TM$ una curva suave a trozos tal que $\pi \circ \mu = \gamma$. Entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que si $J = (-\epsilon, \epsilon)$ y $\nu : J \times [0,1] \longrightarrow M$ está dada por*

$$\nu(s,t) = exp_{\gamma(t)}(s\mu(t))$$

entonces ν es una variación de γ con $\frac{\partial}{\partial s}\nu(0,t) = \mu(t)$. Además, la variación tiene extremos fijos si y solo si $\mu(0) = \mu(1) = 0$.

Demostración. Refinando la partición si fuera necesario, podemos suponer que los intervalos en los que γ y μ son suaves son los mismos y tomando s suficientemente pequeño para que $s\mu(t) \in T_{\gamma(t)}M$ pertenezca al entorno en el que $exp_{\gamma(t)}$ es un difeomorfismo (ese entorno existe pues M es de dimensión finita), podemos asegurar que ν es diferenciable en los rectángulos en los que γ lo era. Para ver que se trata de una variación de γ basta ver que

$$\nu(0,t) = exp_{\gamma(t)}(0) = \gamma(t).$$

Además

$$\frac{\partial}{\partial s}\nu(0,t) = D_0(exp_{\gamma(t)})(\mu(t)) = \mu(t).$$

La última afirmación que describe cuándo la variación tiene extremos fijos es inmediata. □

A continuación enunciamos una fórmula muy conocida para la primera variación de la longitud de arco. La demostración de esta proposición puede consultarse en el libro [Le] o en la página 195 de [L1].

Proposición 1.63. *Sean (M,g) una variedad Riemanniana de dimensión finita, γ una curva parametrizada por longitud de arco en M y $\mu : [0,1] \longrightarrow TM$ una curva suave a trozos tal que $\pi \circ \mu = \gamma$. Sea $\nu_s(t)$ la variación asociada a γ y μ como en el lema anterior y supongamos que tiene los extremos fijos. Entonces vale la fórmula*

$$L(\gamma)\frac{d}{ds}|_{s=0}L(\nu_s) = -\int_0^1 \langle D_t\dot{\gamma},\mu\rangle_g + \sum_{i=1}^{n}\langle \mu(t_i), \dot{\gamma}(t_i^-) - \dot{\gamma}(t_i^+)\rangle_g$$

Finalmente tenemos la proposición que justifica el estudio de las geodésicas vía el cálculo variacional en dimensión finita.

Proposición 1.64. *Si γ es una geodésica de una variedad riemanniana M de dimensión finita entonces es punto crítico del funcional L de longitud de arco para toda variación con extremos fijos. Es decir, $\frac{d}{ds}|_{s=0}L(\nu_s) = 0$ para toda ν_s variación propia de γ.*

Demostración. Dada una variación cualquiera de γ con extremos fijos consideramos el campo μ a lo largo de γ dado por $\mu(t) = \frac{d}{ds}|_{s=0}(\nu_s(t))$. Este campo induce una variación $\widetilde{\nu_s}$ vía el lema que probamos anteriormente. Por la proposición anterior, la derivada $\frac{d}{ds}|_{s=0}L(\widetilde{\nu_s}) = 0$ pues γ es geodésica y luego el integrando en el primer término es nulo y es regular por lo que la sumatoria es de términos nulos. Por último, como la derivada de $\widetilde{\nu_s}$ y la de ν_s con respecto a s coinciden para todo t, tenemos que $\frac{d}{ds}|_{s=0}L(\nu_s) = 0$ □

La discusión realizada en los párrafos previos evidencia una relación entre el cálculo de variaciones y las geodésicas en variedades finito dimensionales. En general, para estudiar las geodésicas uno puede definirlas entonces como los puntos críticos del funcional de longitud de arco. El problema de esta definición es que da lugar a una ambiguedad: toda reparametrización de una geodésica resulta una geodésica, y eso es algo que no es cierto cuando uno utiliza la definición convencional en términos de la derivada covariante.

Para evitar esta confusión se suele utilizar otro funcional que llamamos el funcional de energía. Resulta que las curvas que son extremales del funcional de energía lo son también del funcional de longitud de arco, aunque tienen además la restricción extra de tener velocidad constante, motivo por el cual los puntos críticos del funcional de energía son exactamente las geodésicas.

Para lograr estudiar geodésicas en variedades de Riemann de dimensión infinita debemos primero encontrar una definición adecuada de geodésica que englobe al caso de dimensión finita. Las métricas riemannianas débiles, sin embargo, en espacios de Frechét no producen conexiones del modo usual, por lo que la definición más inmediata para generalizar a variedades de Fréchet es la que podemos escribir en términos del cálculo de variaciones. Por esto mismo, damos la siguiente definición.

Definición 1.65. Dada una variedad (M, g) con g una métrica de Riemann débil en M, decimos que una curva y es una geodésica si es un punto crítico del funcional E de energía definido por

$$E(y) = \frac{1}{2} \int g_{y(t)}(y'(t), y'(t))dt.$$

Capítulo 2

El grupo de Lie de difeomorfismos de S^1

Grupos de difeomorfismos

En este capítulo trabajaremos sobre una cierta clase de grupos de Lie modelados en espacios localmente convexos. Estos grupos son los grupos de difeomorfismos de una variedad. Probaremos que los grupos de difeomorfismos de variedades compactas tienen estructura de grupo de Lie-Fréchet y estudiaremos sus fibrados tangentes, para más adelante, en el Capítulo 4, poder estudiar el grupo de Virasoro. Aún cuando la variedad no es compacta existen algunas nociones útiles de diferenciabilidad para mapas que llegan a un grupo de difeomorfismos. Estas nociones no vienen inducidas por una estructura de variedad diferenciable en el grupo (que no existe) sino que se establecen ad-hoc. Comenzaremos por ellas.

Definición 2.1. Sean M y N variedades localmente convexas y sea $\mathrm{Diff}(M)$ el grupo de difeomorfismos de M con la composición. Decimos que $\phi : N \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$ es diferenciable si $\widehat{\phi} : N \times M \longrightarrow M \times M$ dada por $\widehat{\phi}(n,m) = (\phi(n)(m), (\phi(n))^{-1}(m))$ lo es.

Definición 2.2. Definimos el fibrado tangente a $\mathrm{Diff}(M)$ como

$$T(\mathrm{Diff}(M)) = \{X : M \longrightarrow TM : \pi_{TM} \circ X \in \mathrm{Diff}(M)\}$$

junto con la proyección dada por $\pi : T(\mathrm{Diff}(M)) \longrightarrow \mathrm{Diff(M)}$ dada por $\pi(X) = \pi_{TM} \circ X$. De acuerdo con esta definición obtenemos que

$$T_\phi(\mathrm{Diff(M)}) = \{X : M \longrightarrow TM : \pi_{TM} \circ X = \phi\}.$$

Observación 2.3. Tenemos una acción a derecha y otra a izquierda de Diff(M) en su fibrado tangente dadas por: $\varphi \cdot X = d\varphi \circ X$ y $X \cdot \varphi = X \circ \varphi$, para $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ y $X \in T(\mathrm{Diff(M)})$.

Observación 2.4. Podemos verificar que la acción adjunta de Diff(M) en $\mathfrak{X}(M)$ está dada por $Ad : \mathrm{Diff(M)} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ con $Ad(\varphi, X) = Ad_\varphi(X) = d\varphi \circ X \circ \varphi^{-1}$.

Las definiciones que acabamos de dar nos permiten hablar de funciones diferenciables y fibrado tangente para un grupo de difeomorfismos. Estas definiciones estarían naturalmente inducidas por una estructura de variedad en Diff(M): el problema es que en general no existe una tal estructura. Sin embargo, si la variedad es compacta y de dimensión finita Diff(M) resulta una variedad de Fréchet, como veremos a continuación.

Teorema 2.5. *Sea M una variedad diferencial compacta (de dimensión finita) y sea $\mathfrak{X}(M)$ su álgebra de campos de vectores. Entonces Diff(M) tiene estructura de variedad localmente convexa modelada en $\mathfrak{X}(M)$. Además el álgebra de Lie correspondiente a Diff(M) es $\mathfrak{X}(M)$ con el corchete opuesto de campos de vectores.*

Antes de probar el teorema demostraremos un lema sobre topología que nos será útil para la demostración.

Lema 2.6. *Sea $f : M \longrightarrow N$ una función diferenciable entre variedades de dimensión finita y sea $A \subseteq M$ una subvariedad compacta tal que $f|_A : A \longrightarrow N$ es un embedding y $D_x f$ es un isomorfismo para cada $x \in A$. Entonces existe $U \subseteq M$ abierto con $A \subseteq U$ y tal que $f|_U$ es un difeomorfismo con su imagen.*

Demostración. Como $D_x f$ es un isomorfismo lineal para cada $x \in A$ por el teorema de la función inversa tenemos entornos U_x en M y V_x en N en los que f es un difeomorfismo alrededor de cada punto $x \in A$. Por la compacidad de A podemos quedarnos con finitos de estos entornos y así obtener un entorno $A \subseteq U \subseteq M$ en el que $f|_U$ sea un difeomorfismo local con su imagen. Encontraremos un entorno de A contenido en este entorno U donde además la función f se restringa a un homeomorfismo. Dado que todo homeomorfismo que sea difeomorfismo local es un difeomorfismo, el lema estará demostrado. Para esto recordemos que toda función continua de dominio compacto e inyectiva es un homeomorfismo con su imagen. La idea es la siguiente: obtener un filtro de entornos de A con clausura compacta y contenidos en U. Una vez hecho esto bastará encontrar uno de esos entornos en donde la función sea inyectiva pues entonces, restringiéndonos a la clausura (compacta) de cualquier entorno del filtro que esté contenido en él, obtendremos el homeomorfismo deseado. Acá es donde la demostración se pone un poco técnica: dotemos a M de una métrica riemanniana y consideremos los entornos $U_n = U \cap A_{1/n}$, donde A_ϵ es un abierto que se obtiene de engordar A en menos de ϵ vía la métrica riemanniana y que tiene clausura compacta. Es decir, los A_ϵ están dados por la unión de los abiertos de un cubrimiento finito de A cuyos elementos tienen diámetro menor que ϵ y clausura compacta. En efecto, por la compacidad local cada $x \in A$ tiene un entorno V_x localmente compacto que además podemos suponer de diámetro menor que ϵ con respecto a la métrica. Estos abiertos cubren A y podemos extraer un subcubrimiento finito $V_1, V_2, \ldots V_l$ y definir entonces $A_\epsilon = \bigcup_{i=1}^n V_i$ que claramente tiene clausura compacta y cuyos puntos están a menos de ϵ de distancia de A.
Luego los $U_n = U \cap A_{1/n}$ son abiertos que tienen clausura compacta si n es suficientemente grande. Que son abiertos es inmediato y que tienen clausura compacta a partir de un cierto n es consecuencia de que a partir de un cierto n los $A_{1/n}$ quedan contenidos en U (por el lema del tubo y porque $A \subseteq U$ es un compacto y los diámetros de los $A_{1/n}$ tienden a cero). Luego a partir de un cierto n los U_n son precisamente los A_n y tienen clausura compacta en M. Ahora bien, supongamos que f no es inyectiva al restringirse a

ningún U_n y arribemos a un absurdo. En tal caso, tendríamos para cada $n \in \mathbb{N}$ un par de elementos x_n, y_n en U_n cuyas imágenes por f coincidieran. En tal caso, como todos los x_i y los y_i están contenidos en $\overline{U_1}$ que es compacta tendríamos dos subsucesiones x_{n_k}, y_{n_k} convergentes tales que $f(x_{n_k}) = f(y_{n_k})$ para todo k, $d(x_{n_k}, A) \to 0$ y $d(y_{n_k}, A) \to 0$. Luego, los límites de estas subsucesiones serán elementos $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Como $f|_A$ es inyectiva, ambas subsucesiones convergen al mismo límite x. El absurdo lo obtenemos de notar que f es un difeomorfismo en un entorno de x. Esto prueba que existe un n tal que $f|_{U_n}$ es inyectiva y luego f es un homeomorfismo restringida a la clausura de U_{n+1}. Como además es un difeomorfismo local, $f|_{U_{n+1}}$ resulta un difeomorfismo.

$\square$

Ahora sí, damos la demostración del teorema.

Demostración. Sea g una métrica Riemanniana en M y sea $Exp : TM \longrightarrow M$ la exponencial asociada a g que está bien definida pues M es geodésicamente completa, al ser compacta. Definimos $\Phi : TM \longrightarrow M \times M$ dada por $\Phi(p, v) = (p, Exp_p(v))$, para $v \in T_pM$. La observación fundamental es que dado un punto $p \in M$, al considerar el punto $q = (p, 0) \in T_pM$ obtenemos que $d_q\Phi$ es un isomorfismo lineal. En efecto, para verificar esto basta con ver la matriz que lo representa en la base canónica de $T_qTM \cong (T_pM)^2$. En este caso, la matriz está dada por una de la forma:

$$\begin{pmatrix} id_{T_pM} & 0_{T_pM} \\ * & id_{T_pM} \end{pmatrix}$$

Pues la diferencial de Exp_p en $v = 0$ es la identidad. Es claro que esta matriz es un isomorfismo lineal entre espacios vectoriales y luego, por el teorema de la función inversa Φ es un difeomorfismo local entre un entorno de la sección nula vista en TM y un entorno de la diagonal en $M \times M$. Más aún, por el lema anterior Φ resulta un difeomorfismo entre estos entornos. Llamemos a estos entornos U y V respectivamente (con $U \subseteq TM$ y $V \subseteq M \times M$).
Ahora sea $U_{\mathfrak{g}} = \{X \in \mathfrak{X}(M) : X(M) \subseteq U\}$ que es un abierto de $\mathfrak{X}(M)$ en su topología localmente convexa. Sea $\varphi : U_{\mathfrak{g}} \longrightarrow C^\infty(M, M)$ dada por $\varphi(X)(m) = Exp_m(X(m))$ que cumple que $\varphi(0) = id_M$. La inversa de esta función está dada por $\psi(f)(m) = \Phi^{-1}(m, f(m))$ para toda f que satisfaga $(id \times f)(M) \subseteq V$. El conjunto de funciones que satisfacen esta propiedad es un abierto de $C^\infty(M, M)$ y luego lo es en Diff(M): lo llamamos $\widetilde{U}$, por lo que el par $(\psi, \widetilde{U})$ conforma una carta de Diff(M) alrededor de la identidad. Para conformar un atlas basta trasladar la carta obtenida a izquierda por el grupo: de este modo, los mapas de transición obtenidos quedan C^∞ en el sentido Fréchet. $\square$

Observación 2.7. La dificultad principal de la demostración anterior está en obtener un entorno de la identidad del grupo de difeomorfismos que sirva para definir una carta. Debido a que el grupo está modelado en el espacio de campos tangentes a M y estos son su álgebra de Lie, uno podría esperar que el flujo a tiempo 1 del campo de vectores funcione como mapa exponencial para Diff(M) y utilizar este mapa como un difeomorfismo local que le permita establecer el entorno buscado y obtener una carta. La primera parte de la afirmación es verdadera, es decir, si notamos por $Fl_X : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$

al flujo en M asociado al campo X (que es completo por ser M compacta), entonces vale que $\exp_{\mathrm{Diff(M)}}(X) = Fl^1_X$, aunque no es cierto que la exponencial sea un difeomorfismo local en este caso. El motivo por el que esto falla es la inexistencia de una análogo al teorema de la función inversa para espacios localmente convexos que no sean de Banach. Notar que el hecho de que este mapa no sea un difeomorfismo en ningún entorno de la identidad demuestra que el grupo de difeomorfismos de una variedad no puede ser modelado en ningún espacio de Banach. Daremos un bosquejo de la demostración de este hecho para el grupo de difeomorfismos de S^1. Consideremos la función $f(\theta) = \theta + \frac{2\pi}{n} + \epsilon\,\mathrm{sen}^2(n\theta)$ con $\epsilon < \frac{1}{n}$, que es diferenciable y tiene derivada constantemente positiva por lo que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}$. Es claro que $f(\theta + 2\pi) = f(\theta) + 2\pi$ por lo que podemos ver el difeomorfismo $\widetilde{f}$ que induce f en S^1. Para n suficientemente grande y ϵ suficientemente chico este mapa se encuentra en cualquier entorno de la identidad aunque no está en la imagen de $\exp_{\mathrm{Diff}(S^1)}$ porque no puede escribirse como $g \circ g$ para ningún difeomorfismo g de S^1. En efecto, f tiene una única órbita de período $2n$ que es la dada por

$$0 \mapsto \frac{\pi}{n} \mapsto \frac{2\pi}{n} \mapsto \dots$$

mientras que toda función de la forma $g \circ g$ tiene una cantidad par de órbitas de período par. Por último, notemos que toda función en la imagen de $\exp_{\mathrm{Diff}(S^1)}$ satisface

$$\exp_{\mathrm{Diff}(S^1)}(v(x)) = \exp_{\mathrm{Diff}(S^1)}(\frac{v}{2}) \circ \exp_{\mathrm{Diff}(S^1)}(\frac{v}{2})$$

por lo que es de la forma $g \circ g$ para cierto difeomorfismo g de S^1. Para más detalles sobre esta demostración ver [Mil].

Hemos probado así que el grupo de difeomorfismos de una variedad compacta no puede recibir una estructura de grupo de Lie Banach. Otra forma de comprender esto es vía un famoso teorema de Omori (ver [O2]), que establece que todo grupo de Lie-Banach que actúe fiel, suave y transitivamente sobre una variedad compacta, debe ser finito dimensional. De este modo, debemos tomar una decisión: si trabajamos con el grupo de difeomorfismos de una variedad no tendremos estructura de Banach, mientras que si trabajamos con los difeomorfismos C^k para algún k finito, perderemos regularidad por lo que la composición no resultará diferenciable.

Junto a la estructura de variedad vienen aparejadas nociones de funciones diferenciables y de un fibrado tangente cinético y uno operacional sobre Diff(M). Una pregunta que debemos hacernos es si alguna de estas nociones coincide con las que brindamos al inicio de esta sección. La respuesta no sólo es positiva sino que los dos fibrados tangentes (que en general no son isomorfos) son isomorfos al que definimos al inicio de la sección cuando M es compacta.

Proposición 2.8. *Sea M una variedad compacta (de dimensión finita). El espacio tangente cinético de la variedad Diff(M) en el punto φ coincide con $T_\varphi(Diff(M)) = \{X : M \longrightarrow TM : \pi_{TM} \circ X = \varphi\}$.*

Demostración. Escribamos $T^{cin}_\varphi(\mathrm{Diff}(M))$ para el espacio tangente cinético a Diff(M). Probaremos primero que coinciden el espacio tangente cinético en la identidad con el espacio tangente en la identidad definido al inicio de la sección. Sea $X \in T_{Id}(\mathrm{Diff(M)}) = \mathfrak{X}(M)$ que es un campo completo por ser M una variedad compacta y escribamos $\alpha(x,t)$ el flujo que define X sobre M, es decir, $\alpha : M \times \mathbb{R} \longrightarrow M$ satisface $X \circ \alpha_{x,t} = (\alpha_x)'(t)$ donde $\alpha_x = \alpha(x,-)$. Como $\alpha(-,0) = id_M$ y el grupo de difeomorfismos de M es un abierto de la topología Whitney en el espacio de funciones diferenciables de M a M, existe un $\epsilon > 0$ tal que los flujos a tiempo t con un $t < \epsilon$ son difeomorfismos de la variedad. Esto nos da una curva en la variedad de difeomorfismos de M dada por $\gamma : (-\epsilon;\epsilon) \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$. Es claro que $(\phi \circ \gamma)'(0)$ es un elemento del tangente cinético a $\mathrm{Diff}(M)$ en la identidad siempre que ϕ sea una carta de $\mathrm{Diff}(M)$ alrededor de la identidad (esto no es más que observar la identificación entre el espacio tangente cinético y el espacio localmente convexo que modela a M). Afirmo que esta derivada no es más que X. Para esto tomemos la carta construida alrededor de la identidad en la demostración del teorema anterior y llamémosla ϕ. Recordemos que $\phi : U \longrightarrow U_{\mathfrak{g}}$ tiene la forma $\phi(g) = Y : M \longrightarrow TM$ donde $Y(x) = (x, exp_x^{-1}(g(x)))$. Entonces $(\phi \circ \gamma)'(0)(x) = (x, (exp_x^{-1}(\gamma_t(x)))'|_{t=0}) = (x, (\gamma_t(x))'|_{t=0}) = X(x)$. Esto demuestra que $T_{Id}(\mathrm{Diff(M)}) \subseteq T_{Id}^{cin}(\mathrm{Diff}(M))$. La otra inclusión es inmediata pues cualquier elemento de $T_{Id}^{cin}(\mathrm{Diff}(M))$ se encuentra en $\mathfrak{X}(M)$ vía la identificación canónica que ya hemos establecido.

Para ver que la igualdad se da en un punto arbitrario φ del grupo de difeomorfismos notar que el tangente cinético en cualquier punto del grupo se obtiene trasladando por la acción del grupo el tangente en la identidad. Como el producto del grupo se da a través de la composición, si consideramos la acción a derecha obtenemos que $T_{\varphi}^{cin}(\mathrm{Diff}(M)) = \varphi^* T_{Id}^{cin}(\mathrm{Diff}(M)) = \varphi^*(\mathfrak{X}(M))$, que es exactamente lo que queríamos probar. □

El grupo de difeomorfismos sobre el que estaremos interesados en trabajar es el de los difeomorfismos de la circunferencia. Como la circunferencia es una variedad compacta sabemos que el tangente cinético recibe la descripción anterior, aunque además lograremos probar que el tangente operacional coincide con este último. A continuación nos encaminamos hacia la demostración de que el espacio tangente cinético y el operacional coinciden para el grupo de difeomorfismos de S^1. Un argumento un tanto similar funciona para cualquier variedad compacta. Esta demostración es un poco más técnica que la anterior y hará uso de una proposición de análisis funcional. Aunque antes necesitamos una definición.

Definición 2.9. Dado E localmente convexo decimos que una red $(x_\alpha)_\alpha$ converge Mackey a un punto $x \in E$ si existen un conjunto B acotado y convexo y una red $(\mu_\alpha)_\alpha \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $(x_\alpha - x) \in \mu_\alpha B$ para todo α. Decimos que un subconjunto A de E es denso Mackey si todo punto de E es límite Mackey de una red en A.

Proposición 2.10. *Sea E un espacio localmente convexo que satisface que $E \otimes E'$ es denso Mackey en $L(E,E)$ y sea $a \in E$. Entonces el conjunto de derivaciones sobre ev_a es isomorfo como espacio vectorial a E''.*

A los espacios E que cumplen la propiedad de la proposición anterior los llamamos espacios con la propiedad de aproximación. Notemos que la inclusión canónica de $E \otimes E'$ en $L(E,E)$ se da vía $v \otimes \varphi(w) = \varphi(w)v$. Decir que $E \otimes E'$ sea denso significa que los operadores en $L(E,E)$ sean aproximables por operadores de rango 1. Es importante notar que la inclusión de E'' en las derivaciones sobre un elemento de E no depende de que el espacio tenga la propiedad de aproximación. En efecto, dado un elemento Y en el doble dual de E podemos identificarlo con la derivación sobre ev_a dada por $Y_a(f) = Y(d_a f)$.

Valen además los siguientes resultados sobre el álgebra de Lie de campos de vectores en una variedad compacta.

Lema 2.11. *El espacio de campos de vectores en* S^1 *es un álgebra de Lie reflexiva y posee la propiedad de aproximación.*

La demostración de este lema se hará en detalle en la próxima sección pues requiere de muchos tecnicismos propios del análisis funcional. Por ahora supongamos el lema y la proposición probados y veamos por qué esto nos dice que los dos tangentes al grupo de difeomorfismos de S^1 coinciden. Llamemos $D_a E$ al conjunto de derivaciones en E sobre ev_a. En nuestro caso, nuestra variedad está modelada sobre $\mathfrak{X}(S^1)$ que es un espacio de Fréchet reflexivo y con la propiedad de aproximación. Esto nos dice que el conjunto de derivaciones sobre $\mathfrak{X}(S^1)$ es isomorfo a $\mathfrak{X}(S^1)$ por el lema y la reflexividad. Por último, notemos que el espacio de las derivaciones en $\mathrm{Diff}(S^1)$ sobre un punto φ es isomorfo a $D_X(\mathfrak{X}(S^1))$ para cualquier campo $X \in \mathfrak{X}(S^1)$ y que el espacio tangente cinético es isomorfo al espacio que modela la variedad. Esto demuestra que ambos espacios son isomorfos. A continuación la demostración de la proposición.

Demostración. Basta probar el resultado para el caso en que $a = 0$. Notemos que E' está contenido en $C^\infty(E)$ por lo que tenemos dos morfismos

$$|_{E'} : D_0 E \longrightarrow E''$$

$$()_0 : E'' \longrightarrow D_0 E$$

donde el primero está dado por la restricción y el segundo es la inclusión de E'' en el espacio de derivaciones que establecimos arriba dada por $(Y)_0(f) = Y(d_0 f)$. Probaremos que $\partial = (\partial|_{E'})_0$ para toda derivación ∂ sobre ev_0. Como la otra composición es trivialmente la identidad obtenemos que $()_0$ y $|_{E'}$ son isomorfismos inversos. Para ver que $\partial = (\partial|_{E'})_0$ llamaremos $\widetilde{\partial} = \partial - (\partial|_{E'})_0$ que es una derivación sobre ev_0 de $C^\infty(E)$. Notemos que esta derivación se anula sobre funcionales lineales en E'. Sea $f \in C^\infty(E)$ y escribamos $f(x) = f(0) + \int_0^1 df(tx)(x)dt$. Sea $g(x) = \int_0^1 df(tx)(x)dt$ y notemos que $\widetilde{\partial}(f) = \widetilde{\partial}(g)$. Como E satisface la propiedad de aproximación tenemos una red $l_\alpha \to Id_E$ con los l_α operadores en $E \otimes E'$. Escribamos a los l_α de la forma $l_\alpha = \sum_{i=1}^n \varphi_i^\alpha \otimes x_i^\alpha$. Consideramos las funciones $g_\alpha \in C^\infty(E)$ dadas por $g_\alpha(x) = \int_0^1 df(tx)(l_\alpha(x))dt$. Lo primero que debemos probar es que las g_α convergen a g en $C^\infty(E)$. Una vez visto esto, llamando $h_i^\alpha(x) = \int_0^1 df(tx)(x_i^\alpha)dt$ tenemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{\partial}(g_\alpha) = \widetilde{\partial}(\int_0^1 df(tx)(l_\alpha(x))dt) =& \widetilde{\partial}(\int_0^1 df(tx)(\sum_{i=1}^n \varphi_i^\alpha(x)x_i^\alpha)dt) \\ =& \widetilde{\partial}\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^\alpha(x)\int_0^1 df(tx)(x_i^\alpha)dt\right) \\ =& \widetilde{\partial}\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i^\alpha(x)h_i^\alpha(x)\right) \\ =& \sum_{i=1}^n \widetilde{\partial}(\varphi_i^\alpha)h_i^\alpha(0) + \widetilde{\partial}(h_i^\alpha)\varphi_i^\alpha(0) = 0\end{aligned}$$

Esto nos permite afirmar debido a la continuidad de la derivación que $\widetilde{\partial}(g) = 0$. Ahora veamos que las g_α convergen a g en $C^\infty(E)$. Recordemos para eso la topología que consideramos en $C^\infty(E)$ que es la de Whitney, viendo a E como una variedad trivial. Basta ver que dado un $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{N}$ y $K \subseteq E$ compacto existe un α_0 tal que

$$|D^l(g_\alpha - g)(x)| < \epsilon \qquad \forall \alpha \geq \alpha_0,\ x \in K$$

Notemos que por la linealidad de la diferencial esto es

$$|D^l\left(\int_0^1 df(tx)((l_\alpha - id_E)(x))dt\right)|$$

pero además, como l_α converge Mackey a id_E, existe un acotado $B \subseteq L(E,E)$ y una red de números reales mayores o iguales a cero $\mu_\alpha \to \infty$ tal que $\mu_\alpha(l_\alpha - id_E) \in B$ para todo α. En particular

$$|D^l\left(\int_0^1 df(tx)((l_\alpha - id_E)(x))dt\right)| = \frac{1}{\mu_\alpha}|D^l\left(\int_0^1 df(tx)(\mu_\alpha(l_\alpha - id_E)(x))dt\right)|$$

Como B está acotado en $L(E,E)$ y K es compacto existe una constante M_n para la cual $p_n(l(x)) \leq M_n$ para todo $l \in B$, $x \in K$ y toda seminorma p_n de E por lo que

$$p_n(\mu_\alpha(l_\alpha - id_E)(x)) \leq M_n$$

para todos n, α, x.
Ahora notemos que para todo $t \in [0,1]$ tenemos que $df(tx) \in L(E,\mathbb{R})$ y que la función

$$\begin{aligned}\widetilde{p} : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sup_{p_n(y)\leq M_n \forall n\in\mathbb{N}} |D^l(df(tx)(y))|\end{aligned}$$

está bien definida pues la diferencial de f es acotada en todo punto y además es continua por la diferenciabilidad de f. Luego alcanza un máximo que llamaremos R_l, pues [0, 1] es compacto. Finalmente

$$\frac{1}{\mu_\alpha}|D^l\left(\int_0^1 df(tx)(\mu_\alpha(l_\alpha - id_E)(x))dt\right)| \leq \frac{1}{\mu_\alpha}\int_0^1 |D_x^l\left(df(tx)(\mu_\alpha(l_\alpha - id_E)(x))\right)|dt$$

Pero esta última integral es menor que $\frac{R_l}{\mu_\alpha}$ que es menor que ϵ para $\alpha \geq \alpha_0$. □

El álgebra de campos de vectores sobre S^1

En esta sección probaremos que el álgebra de campos de vectores sobre la circunferencia tiene la propiedad de aproximación y es reflexiva. El paso fundamental de la demostración se encuentra en la siguiente descripción del conjunto de campos de vectores sobre S^1 que nos permite identificarlo con un espacio de sucesiones.

Proposición 2.12. *Hay un isomorfismo de espacios de Fréchet entre $\mathfrak{X}(S^1)$ y el espacio s de sucesiones rápidamente decrecientes dado por:*

$$s = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=0}^{\infty} |x_n n^k| < \infty \;\forall\, k \in \mathbb{N}\},$$

con las seminormas en s dadas por $x \mapsto \|x\|_k = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| n^k$.

Observación 2.13. Notemos que la familia de seminormas de s es equivalente a la siguiente familia:

$$x \mapsto \|x\|'_k = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|(n+1)^k$$

Demostración. La demostración se hará vía la identificación que nos permite el desarrollo en serie de Fourier. Primero notemos que los campos de vectores en S^1 pueden identificarse con las funciones diferenciables en S^1 dado que cualquier campo de vectores es de la forma $f \cdot \partial\theta$ donde $\partial\theta$ es el campo de vectores tangentes a S^1 nunca nulo que es la base canónica del espacio tangente en cada punto de S^1 y f es una función diferenciable cualquiera en la circunferencia. A su vez, podemos identificar las funciones diferenciables en S^1 con las funciones diferenciables en $\mathbb{R}$ que valen 0 fuera del intervalo $[0, 2\pi]$ y que valen igual sobre 0 que sobre 2π. Probaremos que estas últimas forman un espacio isomorfo a s. Para esto llamemos $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ a este conjunto de funciones y sea

$$\begin{aligned} c : C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R}) &\longrightarrow s \\ f &\longmapsto (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

la transformación lineal que le asigna a una función f los coeficientes de su desarrollo en serie de Fourier, es decir $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{i\cdot nt}dt$. Lo primero que debemos ver es la buena definición del mapa c, para eso debemos probar que las sucesiones de coeficientes de Fourier asociadas a funciones de $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ son rápidamente decrecientes. Notemos que estas funciones están en el espacio de Schwartz y luego todas sus derivadas y las funiones que obtenemos de multiplicarlas por potencias de la variable x lo están. En particular, a todas esas funciones se les asignan coeficientes de Fourier que están en l^1. Además, notemos que si $f \in C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ entonces $f'(x)$ también lo está. Luego los coeficientes de Fourier asociados a f' forman una sucesión en l^1. Pero además, estos coeficientes cumplen la relación:

$$c_n(f') = -c_n(f) \cdot i \cdot n$$

y de forma inductiva, obtenemos que

$$c_n(f^{(k)}) = (-1)^k c_n(f) \cdot M \cdot n^k$$

con M una constante. Esto prueba que las sucesiones de la forma $(c_n(f) \cdot n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ están en l^1 para todo k, pues están asociadas a los coeficientes de Fourier de otras funciones en $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$. Esto concluye la demostración de la buena definición.
Es claro que el mapa c es lineal. Por el teorema de Plancharel, el mapa c es una biyección y por el teorema de la función abierta [1], alcanza con probar que es continuo para obtener que es un isomorfismo de espacios de Fréchet. Para ver la continuidad utilizaremos la familia de seminormas $(\|\cdot\|'_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que definimos en la observación anterior. Notemos que:

$$|c_0(f)| \leq \|f\|_0, \quad m^r|c_m(f)| \leq \frac{1}{m^2}\|f\|_{r+2}$$

En efecto, la primer desigualdad es inmediata mientras que la segunda es consecuencia de

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{imx}dx = \frac{1}{2\pi m^{r+2}}\int_0^{\pi} f^{(r+2)}e^{imx+i(r+2)\frac{\pi}{2}}dx$$

Donde hemos utilizado $r+2$ veces la regla de integración por partes y la observación $e^{\alpha+ki\frac{\pi}{2}} = i^k e^\alpha$. Ahora usando estas desigualdades tenemos que:

$$\|c(f)\|'_r = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n(f)|(n+1)^r \leq \|f\|_0 + 2^r\sum_{n=1}^{\infty}n^r|c_n(f)| \leq \|f\|_0 + 2^r\|f\|_{r+2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)$$

y luego c es continuo, como queríamos probar. □

El espacio de sucesiones rápidamente decrecientes se enmarca dentro de una familia de espacios de sucesiones que resultan un objeto de estudio muy interesante para el análisis funcional: los espacios de Köthe. A lo largo de esta sección desarrollaremos un poco de teoría sobre estos espacios con el objetivo de lograr probar que el espacio s recién construido es reflexivo y satisface la propiedad de aproximación.

Definición 2.14. Decimos que un conjunto de sucesiones de números reales es de Köthe si es de la forma

$$\Lambda(\mathcal{P}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : (p_n x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1 \text{ para todo } p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}\}$$

donde $\mathcal{P}$ es algún conjunto de sucesiones de números reales positivos que es dirigido con relación al orden parcial componente a componente de las sucesiones.

Definición 2.15. Sea $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente y no acotada de números reales. Sea $\mathcal{P}_\infty = \{(e^{k\alpha_n})_{n\in\mathbb{N}} : k \in \mathbb{N}\}$. Bajo estas condiciones llamamos a $\Lambda(\mathcal{P}_\infty)$ espacio de series de potencias de tipo infinito.

Observación 2.16. Los espacios de Köthe tienen estructura de espacios de Fréchet con las seminormas dadas por

$$x \longmapsto \|x\|_p = \|(p_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^1}$$

para cada $p \in \mathcal{P}$.

[1] El teorema de la función abierta vale en su contexto más general para espacios de tipo F. Los espacios de Fréchet, en particular, son de esa clase.

Observación 2.17. Notemos que s es el espacio de series de potencias de tipo infinito asociado a la sucesión $\alpha = (\log(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 2.18. *Todo espacio de series de potencias de tipo infinito tiene la propiedad de aproximación.*

Demostración. Basta ver que hay una sucesión en $E \otimes E'$ que converge a $id_{\Lambda(\mathcal{P})}$. Consideramos para eso la sucesión dada por $\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e'_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Preguntémonos primero qué descripción somos capaces de dar de los conjuntos acotados en $\Lambda(\mathcal{P}_\infty)$. En efecto, un conjunto B acotado en el espacio de series de potencias de tipo finito con respecto a su topología Fréchet no es más que un $B \subseteq \Lambda(\mathcal{P}_\infty)$ tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |p_i x_i| \leq N(p) \quad \forall x \in B$$

donde $N(p)$ es una constante que depende de $p \in \mathcal{P}_\infty$. Sea μ la sucesión de $\mathcal{P}_\infty$ dada por $\mu_n = e^{\alpha_n}$ y notemos que si $p \in \mathcal{P}_\infty$ entonces $p \cdot \mu$ también lo está. Ahora bien, queremos probar que el conjunto de funcionales lineales $\left(\mu_{n+1}(Id_{\Lambda(\mathcal{P}_\infty)} - \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e'_j)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado pues en ese caso, como μ_n tiende a infinito, $\left(\sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e'_j\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergería Mackey a la identidad. Para ver que este conjunto de operadores lineales está acotado, alcanza probar que manda acotados en acotados, pero si B es un acotado en $\Lambda(\mathcal{P}_\infty)$ entonces

$$\sum_k \left| p_k \left(\mu_{n+1}(Id_{\Lambda(\mathcal{P}_\infty)} - \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e'_j)(x) \right)_k \right| = \sum_k p_k \left| \left(\mu_{n+1}(\sum_{k>n} x_k e_k) \right)_k \right|$$

Pero esta última expresión no es más que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |p_k \mu_{n+1} x_k| \leq \sum_{k>n} |p_k \mu_k x_k| \leq N(p \cdot \mu)$$

siempre que $x \in B$. Esto prueba que el conjunto de operadores manda acotados en acotados y luego es acotado como queríamos probar. □

Corolario 2.19. *El álgebra de Lie de campos de vectores en S^1 tiene la propiedad de aproximación finita.*

Durante el resto de esta sección nos enfocaremos en demostrar la reflexividad del espacio $\mathfrak{X}(S^1)$. Para esto requeriremos del desarrollo de algunos conceptos del análisis funcional.

Definición 2.20. Dado un espacio E localmente convexo decimos que un conjunto $A \subseteq E$ es

- balanceado si dado $x \in A$ se tiene que $\lambda x \in A$ para todo λ con $|\lambda| \leq 1$.

- absorbente si para todo $x \in E$ existe un escalar r tal que $|\lambda| \geq |r|$ implica que $x \in \lambda A$.
- un tonel si es convexo, balanceado, absorbente y cerrado

Definición 2.21. Un espacio localmente convexo se dice tonelado si todos sus subconjuntos que son toneles son entornos del origen. Los espacios tonelados tienen una estructura de mayor regularidad que la de los espacios localmente convexos en general. La principal motivación para estudiar los espacios tonelados en el análisis funcional radica en que sobre ellos vale el principio de acotación uniforme (que no es cierto para espacios vectoriales localmente convexos en general). Los espacios de Fréchet son tonelados como probamos a continuación.

Proposición 2.22. *Si E es un espacio de Fréchet entonces es tonelado.*

Demostración. Sea M un tonel en E. Como es absorbente se tiene que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot M$ y luego por el teorema de Baire, dado que E es completo, alguno de los cerrados $n \cdot M$ debe tener interior no vacío. Esto prueba que M tiene interior no vacío pues la multiplicación escalar es un homeomorfismo. Por último, como M es convexo, balanceado y con interior no vacío, debe ser $0 \in int(M)$ como queríamos probar. $\square$

Definición 2.23. Dado un conjunto B en un espacio vectorial topológico localmente convexo X llamamos polar de B al subconjunto

$$B^0 = \{x' \in X' \, : \, sup_{x \in B} |\langle J(x) \, , \, x' \rangle| \leq 1\}$$

donde $J(x)$ es el elemento ev_x en el doble dual X''.

Otra cosa que requeriremos será el siguiente lema de Mazur.

Lema 2.24. *Sea X un espacio vectorial real o complejo, localmente convexo. Sea $M \subseteq X$ cerrado, convexo y balanceado y $x_0 \notin M$. Entonces existe un funcional lineal continuo f en X tal que $|f(x_0)| > 1$ y $|f(x)| \leq 1$ para todo $x \in M$.*

Demostración. Como M es cerrado su complemento es abierto y luego existe un abierto V entorno del origen tal que $M \cap (x_0 + V) = \varnothing$. Podemos tomar V convexo y balanceado pues X es localmente convexo, por lo que $(M + \frac{V}{2}) \cap (x_0 + \frac{V}{2}) = \varnothing$. Esto prueba que x_0 no está en la clausura de $(M + \frac{V}{2})$. Llamemos U a esa clausura y p_U a su seminorma de Minkowski. Como U es cerrado, $p_U(x_0) > 1$ pero como U contiene a M $p_U(x) \leq 1$ para todo $x \in M$. Por último, por el teorema de Hahn Banach, obtenemos el funcional que buscamos. $\square$

Teorema 2.25. *Sea X un espacio vectorial topológico localmente convexo tonelado y tal que todos sus subconjuntos cerrados, convexos, balanceados y acotados son compactos en su topología débil. Entonces X es reflexivo.*

Demostración. Sea $x'' \in X''$ un elemento cualquiera. Como x'' es continuo en la topología fuerte de X'' existe un conjunto B convexo, balanceado y cerrado en X tal que $x'' \in (B^0)^0$. En efecto, basta tomar B como la bola cerrada de radio $\frac{C}{2}$ donde $C = \|x''\|$ para obtener que $x'' \in (B^0)^0$. Por la hipótesis sobre X resulta que B es un compacto en la topología débil de X. En particular, es igual a su clausura en esta topología y entonces $J(\overline{B^w}) = J(B) \subseteq (B^0)^0$. Consideremos el mapa

$$x \longmapsto \phi(x) = (\langle J(x), x'_1\rangle, \langle J(x), x'_2\rangle, ..., \langle J(x), x'_n\rangle)$$

donde $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \in X'$. $\phi(B)$ es convexo, balanceado y compacto en $\mathbb{K}^n$ dado que B es convexo, balanceado y débilmente compacto y ϕ es una función débilmente continua y lineal. Si el punto $(\langle J(x'_1), x''\rangle, \langle J(x'_2), x''\rangle, \ldots, \langle J(x'_n), x''\rangle)$ no perteneciera a $\phi(B)$ entonces por el lema de Mazur existiría un punto $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que

$$\sup_{b \in B} |\sum_i c_i \langle J(b), x'_i\rangle| \leq 1 \qquad \sum_i c_i \langle J(x'_i), x''\rangle > 1$$

lo cual probaría que $\sum_i c_i x'_i \in B^0$ y que x'' no puede pertenecer a $(B^0)^0$. Luego, el punto $(\langle J(x'_1), x''\rangle, \langle J(x'_2), x''\rangle, \ldots, \langle J(x'_n), x''\rangle)$ está en $\phi(B)$ y entonces

$$(x''(x'_1), x''(x'_2), \ldots, x''(x'_n)) = (x'_1(b), x'_2(b), \ldots, x'_n(b))$$

para cierto $b \in B$ y como los x'_i son arbitrarios obtenemos que $x'' = J(b)$ como queríamos probar. $\square$

Corolario 2.26. *El espacio de funciones $C^\infty(\mathbb{R})$ es reflexivo en su topología Fréchet.*

Arribamos finalmente al resultado que perseguimos desde el inicio de esta sección.

Corolario 2.27. *El álgebra de Lie $\mathfrak{X}(S^1)$ es reflexiva.*

Capítulo 3

Las ecuaciones de Euler-Arnold en grupos de Lie

Estructuras simplécticas y de Poisson

Definición 3.1. Sea M una variedad y ω una 2-forma en M. Decimos que el par (M, ω) es una variedad simpléctica si ω es cerrada y no degenerada. Decimos que ω es la forma simpléctica de M.

Las variedades simplécticas son un objeto de estudio muy rico pues son el espacio adecuado para el desarrollo hamiltoniano de la mecánica clásica. El hecho de que la forma sea no degenerada permite que asignemos a cada función $f \in C^\infty(M)$, que puede interpretarse como una energía, un campo de vectores X_f cuyo flujo determina la evolución del sistema físico en M vista como el espacio de fases del sistema. La condición de que ω sea una 2-forma (es decir, que sea alternada) y el hecho de que sea cerrada se interpretan físicamente como la conservación de la energía y la invarianza de las leyes físicas con relación al tiempo, respectivamente.

En este trabajo requeriremos de una noción sutilmente más general que la de variedad simpléctica, que es la de variedad de Poisson. Las variedades de Poisson pueden considerarse como cocientes de variedades simplécticas: el teorema de realización simpléctica afirma que toda variedad de Poisson admite una submersión suryectiva que es además morfismo de Poisson desde una variedad simpléctica. Para nuestro trabajo no será necesario un estudio profundo de la geometría de Poisson sino algunas nociones generales que están incluídas en un primer capítulo de cualquier libro sobre estructuras de Poisson como por ejemplo [We].

Definición 3.2. Decimos que una variedad M tiene estructura de Poisson si viene acompañada de una operación bilineal en sus funciones

$$\{,\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

que da a $C^\infty(M)$ estructura de álgebra de Lie y es además una derivación. Es decir:
(i)$\{,\}$ es antisimétrico.

(ii)$\{,\}$ satisface la identidad de Jacobi.
(iii) Dadas $f, g, h \in C^\infty(M)$ se tiene que

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g.$$

Observación 3.3. Toda variedad simpléctica tiene estructura de Poisson. Basta para eso definir X_f como el único campo tangente a M tal que $\iota_{X_f}(\omega) = df$ y entonces obtenemos el corchete de Poisson dado por $\{f, g\} = \omega(X_f, X_g)$.

Observación 3.4. Dar una estructura de Poisson en una variedad es equivalente a dotarla de un bivector antisimétrico, es decir un elemento de $\Lambda^2 T^*M$. El bivector debe ser tal que el corchete de Poisson satisfaga la identidad de Jacobi. En efecto, dado un tal bivector π podemos establecer el corchete

$$\{f, g\} = \pi(f, g)$$

y dado un corchete de Poisson y un entorno coordenado con funciones coordenadas de la forma $(x_1, x_2, ..., x_n)$ podemos definir las funciones $f_{i,j} = \{x_1, x_j\}$ y tenemos entonces el bivector

$$\pi = \sum f_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$$

La condición de Jacobi para el bivector se traduce vía el corchete de Schouten-Nijenhuis en la condición

$$[\pi,\ \pi] = 0$$

Para mayor detalle ver [M R].

Observación 3.5. Podemos interpretar al corchete de Poisson como un mapa que asigna funciones en $C^\infty(M)$ a campos de vectores operacionales tangentes a M. A este mapa se lo conoce como morfismo estructural de la variedad de Poisson. Como el mapa le asigna la misma derivación a dos funciones cuya diferencia sea una constante, podemos interpretarlo en realidad como un morfismo $H : \Omega^1(M) \longrightarrow T^{op}(M)$, donde $\Omega^1(M)$ es el espacio de 1-formas en M. En esa dirección encontramos la siguiente definición.

Definición 3.6. Sea $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en una variedad de Poisson M. Definimos el campo hamiltoniano asociado a g como el único campo de vectores operacionales que verifica $X_g(f) = \{g, f\} = H(dg)(f)$. En este contexto decimos que g es una función hamiltoniana.

Observación 3.7. Vale la relación $[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}$ que establece que el corchete de campos de vectores hamiltonianos es un campo hamiltoniano.

Observación 3.8. A toda estructura de Poisson en una variedad se le asocia una foliación de esta. En efecto, dada una variedad M de Poisson consideramos la distribución en M generada por los campos de vectores hamiltonianos. Esta distribución es involutiva pues el corchete de campos hamiltonianos es un campo hamiltoniano y luego induce una foliación de la variedad por el teorema de Frobenius.

Definición 3.9. Llamamos foliación simpléctica de M a la foliación construída en la observación anterior. Llamamos hojas simplécticas a las hojas de esta foliación.

Las ecuaciones de Euler-Arnold

Definición 3.10. Una estructura de Poisson sobre un espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice lineal si

$$\{\mathbb{V}^*, \mathbb{V}^*\} \subseteq \mathbb{V}^*$$

A continuación mostraremos que el dual diferenciable de un álgebra de Lie posee un corchete de Poisson lineal.

Proposición 3.11. *El dual de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$ **reflexiva** recibe una estructura natural de Poisson lineal. A esta estructura se la llama estructura de Kirillov-Kostant y viene definida por:*

$$\{f, g\}(m) = \langle [df(m), dg(m)], m \rangle$$

para cada $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $m \in \mathfrak{g}$

Demostración. Sean $f, \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Dado un punto $m \in \mathfrak{g}^*$, las diferenciales $df(m)$, $dg(m)$ son elementos de $T_m^*(\mathfrak{g}^*) = (T_m(\mathfrak{g}^*))^* \simeq (\mathfrak{g}^*)^* \simeq \mathfrak{g}$ y luego podemos considerar su corchete al verlos como elementos del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Este nuevo elemento está en $\mathfrak{g} \simeq (\mathfrak{g}^*)^* \subseteq C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y entonces hemos definido un corchete de Poisson en $\mathfrak{g}^*$. En efecto, el corchete así definido es de Poisson porque está inducido por el corchete de Lie de $\mathfrak{g}$ (y luego satisface la antisimetría y Jacobi) pero además es una derivación pues

$$\begin{aligned}\{f, gh\}(m) &= \langle [df(m), d(gh)(m)], m \rangle \\ &= \langle g(m)[df(m), dh(m)], m \rangle + \langle h(m)[df(m), dg(m)], m \rangle \\ &= g(m)\{f, h\}(m) + h(m)\{f, g\}(m)\end{aligned}$$

Lo cual demuestra que es una estructura de Poisson. Que esta estructura es además lineal es inmediato. □

Las estructuras de Poisson lineales sobre espacios vectoriales se encuentran en correspondencia biunívoca con las álgebras de Lie, pues dado un espacio vectorial con una tal estructura, su dual recibe un corchete de Lie inducido por el de Poisson. El corchete de Kirillov-Kostant es el único corchete que puede darse a $\mathfrak{g}^*$ de manera tal que $\{\ ,\ \}|_{\mathfrak{g}}$ sea el corchete de $\mathfrak{g}$. La estructura que acabamos de brindarle a $\mathfrak{g}^*$ nos permite preguntarnos qué forma toman los campos de vectores hamiltonianos en $\mathfrak{g}^*$. Resulta que estos campos están en la imagen de la representación coadjunta del álgebra $\mathfrak{g}$.

Proposición 3.12. *Sea H una función hamiltoniana en $\mathfrak{g}^*$ vista con la estructura natural de Lie-Poisson de la proposición anterior. Entonces su campo hamiltoniano asociado tiene la forma:*

$$X_H(m) = -ad^*_{dH(m)}(m)$$

Demostración. Sea $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ una función cualquiera. Tenemos que:

$$L_{X_H}(f)(m) = \{H, f\}(m) = \langle [dH(m), df(m)], m \rangle = \langle ad_{dH(m)}(df(m)), m \rangle$$

Pero recordando la definición de la acción coadjunta resulta entonces que:

$$L_{X_H}(f)(m) = -\langle df(m), ad^*_{dH(m)}(m) \rangle$$

y finalmente esto es equivalente a que $X_H(m)(f) = -ad^*_{dH(m)}(m)(f)$ para toda $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ lo cual demuestra que $X_H(m) = -ad^*_{dH(m)}(m)$. □

Corolario 3.13. *Las hojas de la foliación simpléctica asociada al corchete natural en $\mathfrak{g}^*$ son las órbitas de la acción coadjunta de G.*

Demostración. Es claro que la distribución en $\mathfrak{g}^*$ dada por los vectores Hamiltonianos queda incluída en el tangente a la órbita coadjunta por el resultado anterior. Fijemos un punto $m \in \mathfrak{g}^*$. Notemos que todo elemento de $\mathfrak{g}$ se puede representar como $dH(m)$ para cierta función $H \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Debido a esto el subespacio tangente a $\mathfrak{g}^*$ en m dado por los vectores hamiltonianos, que incluye a todos los elementos de la forma $-ad^*_{dH(m)}(m)$, incluirá a todos los vectores tangentes a la órbita coadjunta que pasa por m, probando la otra inclusión. □

Mezclando el último corolario con el hecho de que a las hojas simplécticas de la foliación de una estructura de Poisson se les puede asociar una forma simpléctica canónica obtenemos:

Corolario 3.14. *Las órbitas de la acción coadjunta de un grupo de Lie G no pueden tener dimensión impar.*

Resulta que esta ecuación para los campos hamiltonianos en $\mathfrak{g}^*$ se encuentra además íntimamente relacionada con la geometría riemanniana del grupo G.

Definición 3.15. Decimos que una métrica en un grupo de Lie G es invariante a izquierda si $\langle l_g^*(v), l_g^*(w)\rangle_{gh} = \langle v, w\rangle_h$ para todo par de vectores $v, w \in T_hG$ y $g, h \in G$, donde l_g^* es la diferencial de la multiplicación a izquierda por g. De forma análoga definimos métricas invariantes a derecha.

Observación 3.16. Describiremos ahora el método de Arnold para el estudio de las ecuaciones geodésicas en un grupo de Lie de dimensión arbitraria. Consideremos un grupo de Lie G y sea $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Fijemos un producto interno continuo en $\mathfrak{g}$ y consideremos la métrica invariante a izquierda que induce en G vía traslaciones. Consideremos ahora las geodésicas de G dada esta métrica. Para describirlas, usaremos el siguiente método: sea $\gamma(t)$ una geodésica en G, su vector velocidad en cada punto es $\gamma'(t)$ y podemos trasladarlo con la multiplicación a izquierda al álgebra de Lie de G. Esto nos da un vector $l^*_{\gamma(t)^{-1}}(\gamma'(t)) = v(t)$ que está en $\mathfrak{g}$ para todo t. La evolución de este vector está codificada en las ecuaciones geodésicas de G. Esas ecuaciones nos dan un sistema no lineal en $\mathfrak{g}$ de la forma:

$$\frac{d}{dt}(v(t)) = B(v(t))$$

Definición 3.17. Dado un grupo de Lie G con una métrica invariante a izquierda, llamamos a la ecuación de arriba ecuación de Euler-Arnold en $\mathfrak{g}$.

Definición 3.18. Llamamos a un operador $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ inversible, continuo y autoadjunto operador de inercia en $\mathfrak{g}$. Este operador induce una forma cuadrática H en $\mathfrak{g}^*$ que llamamos hamiltoniano vía

$$H(m) = \frac{1}{2}\langle m, A^{-1}m\rangle$$

El operador A también induce un producto interno en $\mathfrak{g}$ y luego una métrica invariante a izquierda en G. El siguiente teorema (que llamaremos teorema de Arnold) es la pieza fundamental de la teoría que desarrollaremos en esta tesis. La idea subyacente es traducir problemas riemannianos en problemas hamiltonianos y simplécticos: nos permite estudiar y conocer la ecuación de Euler Arnold de un grupo de Lie basados en la acción coadjunta del grupo.

Teorema 3.19. *(Teorema de Arnold) Sea $A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ un operador de inercia en el grupo G. La ecuación de Euler-Arnold asociada a la métrica invariante a izquierda que induce A en G es*

$$\frac{d}{dt}m(t) = -ad^*_{A^{-1}m}(m(t)),$$

al verla en $\mathfrak{g}^*$ vía el operador de inercia.

A simple vista, la relación entre la fórmula de arriba y la ecuación de Euler no es evidente: la relación del teorema de Arnold debe ser entendida como la que obtenemos de la ecuación de Euler tras aplicar el operador de inercia, pues es una igualdad en $\mathfrak{g}^*$ mientras que la ecuación de Euler es en el álgebra de Lie. La demostración que damos a continuación es la original del paper de Arnold [Ar2] y es válida únicamente para el caso de grupos de Lie-Banach pues utiliza la existencia de una carta alrededor del origen con propiedades de simetrías que, en general, los grupos localmente convexos no poseen. Al momento de la publicación del paper en cuestión no se poseían conocimientos profundos sobre la teoría de grupos de Lie Fréchet por lo que Arnold creía válidos los argumentos propios de la teoría de grupos de Banach para todos los grupos de Lie. El lector interesado en encontrar una demostración más sencilla puede recurrir a [Kh], donde figura una demostración corta que únicamente aborda el caso en que el grupo admite una representación fiel de dimensión finita. La demostración correcta para grupos de difeomorfismos fue completada por Marsden y Ebin en los papers [M A] y [M E] y figura en el apéndice que está al final de esta tesis. Entre el teorema de Arnold y la Proposición 3.12 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.20. *La ecuación de Euler es hamiltoniana con respecto al corchete de Kostant-Kirillov en el dual del álgebra de Lie y su función hamiltoniana es la forma cuadrática H inducida por la métrica en el álgebra de Lie.*

Demostración. El teorema de Arnold nos dice que

$$\frac{d}{dt}m(t) = -ad^*_{A^{-1}m(t)}(m(t))$$

pero notemos que $A^{-1}m(t) = dH(m(t))$ vía la identificación canónica entre $(\mathfrak{g}^*)^*$ y $\mathfrak{g}$ pues dado $v \in \mathfrak{g}^*$

$$\begin{aligned} dH(m(t))(v) &= \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\langle m(t) + \xi v, A^{-1}(m(t) + \xi v)\rangle = \frac{1}{2}(\langle v, A^{-1}m(t)\rangle + \langle m(t), A^{-1}v\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle v, A^{-1}m(t)\rangle + \langle v, A^{-1}m(t)\rangle) = \langle v, A^{-1}m(t)\rangle \end{aligned}$$

por lo que $dH(m(t))$ es la evaluación en $A^{-1}(m(t))$. Por último, notemos que por la Proposición 3.12 tenemos

$$\frac{d}{dt}m(t) = -ad^*_{A^{-1}m(t)}(m(t)) = -ad^*_{dH(m(t))}(m(t)) = X_H(m(t))$$

por lo que la ecuación de Euler resulta hamiltoniana con función hamiltoniana H. $\square$

La demostración original de Arnold de su teorema se aplica sin ningún problema a grupos de Lie Banach aunque utiliza fuertemente el hecho de que la exponencial sea un difeomorfismo en un entorno del origen, cosa que no es cierta para grupos localmente convexos en general. Para esquivar este inconveniente y generalizar levemente esa demostración utilizaremos el siguiente lema:

Lema 3.21. *Dada una carta cualquiera (φ, U) en un entorno de la identidad en un grupo localmente convexo G, se tiene el siguiente desarrollo en serie de Taylor alrededor del $(0,0)$*

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y)) = x + y + b(x,y) + \dots$$

donde $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es un mapa continuo y bilineal que satisface $b(x,y) - b(y,x) = [x,y]$, bajo la identificación entre el espacio localmente convexo que modela a G con $\mathfrak{g}$ vía el mapa $d_1\varphi$.

Demostración. Sea $m : G \times G \longrightarrow G$ la multiplicación del grupo. Sabemos que $d_1m(v,w) = v + w$ por lo que el desarrollo en Taylor de la función $f(x,y) = \varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(y))$ es de la forma enunciada, es decir:

$$f(x,y) = x + y + b(x,y) + \dots,$$

donde $b : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ es la forma cuadrática asociada al teorema de Taylor de orden 2. Como a toda forma cuadrática se le asocia una forma bilineal, podemos escribir

$$b(x,y) = \beta\left((x,y);(x,y)\right)$$

para cierta $\beta : (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^2 \longrightarrow \mathfrak{g}$ bilineal y simétrica. Ahora bien, como $f(x,0) = f(0,x) = x$ debe ser $b(x,0) = b(0,x) = 0$ y entonces

$$b(x,y) = \beta\left((x,y);(x,y)\right) = \beta\left((x,0);(0,y)\right) + \beta\left((0,y);(x,0)\right),$$

por lo que b es un mapa bilineal.
Tomemos ahora $x \in \varphi(U)$ y sea

$$\begin{aligned} \lambda_x : \varphi(U) &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ y &\longmapsto f(x,y). \end{aligned}$$

Es claro que $d_0\lambda_x$ es conjugada a d_1L_x vía la función $d_1\varphi$, por lo que la identificación que brinda $d_1\varphi$ permite ver al campo invariante a izquierda asociado a $v \in \mathfrak{g}$ como $v_l(x) = d_0\lambda_x(v)$. Notemos entonces que si desarrollamos en Taylor de orden 1 este campo invariante a izquierda obtenemos

$$v_l(x) = v + b(x,v) + \dots$$

es decir, $d_0 v_l(x) = b(x, v)$. Por último, calculamos el corchete entre dos vectores v, w en el álgebra de Lie y obtenemos

$$[v, w] = [v_l, w_l](0) = d_0 w_l(v_l(0)) - d_0 v_l(w_l(0)) = d_0 w_l(v) - d_0 v_l(w) = b(v, w) - b(w, v).$$

Lo cual prueba la afirmación que relaciona el corchete de Lie y la forma bilineal b. □

Basándonos en esto obtendremos coordenadas locales en la carta (φ, U) para la traslación a izquierda de un vector velocidad $\dot{g}(t)$. En efecto, para x, y suficientemente cerca del origen y $|t| \to 0$ el desarrollo anterior se torna

$$\varphi(\varphi^{-1}(x)\varphi^{-1}(ty)) = x + ty + tb(x, y) + tO(x^2) + O(t^2)$$

por lo que bajo la identificación dada por $d_1\varphi$ tenemos la igualdad

$$d_e L_{\varphi^{-1}(x)}(y) = y + b(x, y) + O(x^2)$$

y más en general, si consideramos $y = z + \xi t$ en el desarrollo original obtenemos

$$d_{\varphi^{-1}(z)} L_{\varphi^{-1}(x)}(\xi) = \xi + b(x, \xi) + O(x^2) + O(xz) + O(z^2)$$

que en el caso en que $z = -x$ arroja la siguiente identidad que necesitaremos a la brevedad

$$d_{\varphi^{-1}(z)} L_{\varphi^{-1}(-z)}(y) = y - b(z, y) + O(z^2).$$

Nuevamente, si nos restringimos al caso de grupos de Lie Banach, todas estas identidades pueden obtenerse utilizando como carta a la exponencial (para la cual la forma bilineal $b(x, y)$ no es más que $\frac{1}{2}[x, y]$) y observando la serie de Baker-Campbell-Hausdorff.

Finalmente, damos la demostración del teorema.

Demostración. Reiteramos que la demostración que daremos es para el caso de grupos de Lie Banach. Comenzaremos reformulando la identidad que queremos probar. Sea $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ el operador bilineal definido por la identidad

$$\langle [a, b], c\rangle = \langle B(c, a), b\rangle$$

la igualdad que queremos probar es equivalente a ver que para todo elemento $b \in \mathfrak{g}$

$$(\frac{dm}{dt}, b) = (-ad^*_{A^{-1}m}(m), b)$$

donde los paréntesis denotan el pairing entre $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}^*$ para distinguirlo de la métrica que induce el operador A. Escribamos $v = A^{-1}m$ y notemos que valen las igualdades

$$(-ad^*_{A^{-1}m}(m), b) = (m, ad_{A^{-1}m}(b)) = (Av, [v, b]) = \langle v, [v, b]\rangle = \langle B(v, v), b\rangle$$

y además

$$(\frac{dm}{dt}, b) = (A\frac{dv}{dt}, b) = \langle \frac{dv}{dt}, b\rangle$$

por lo que la igualdad que estamos queriendo probar es equivalente a ver que la ecuación de Euler en $\mathfrak{g}$ tiene la forma

$$\frac{dv}{dt} = B(v, v)$$

Ahora encaminémonos a probar esta identidad. Notemos que basta con probar esta igualdad en $t = 0$. En efecto, la ecuación de Euler es autónoma y como para cualquier $v \in \mathfrak{g}$ existe una geodésica $g(t)$ con $g(0) = e$ y $\dot{g}(0) = v$, la identidad probada para $t = 0$ con esta geodésica nos dice precisamente cómo evoluciona el vector tangente cuando este es v. Para probar la identidad consideramos una carta en un entorno de $e \in G$ y la llamamos (φ, U). La idea es usar esta carta para obtener coordenadas locales para $v(g(t), \dot{g}(t))$. Escribamos entonces $q(t) = \varphi(g(t))$ y utilicemos la diferencial $d_1\varphi$ para identificar el espacio modelo de G con su álgebra de Lie. Supongamos además que la carta (φ, U) satisface la condición $\varphi(g^{-1}) = -\varphi(g)$ (en un grupo de Lie Banach, podemos tomar como carta la exponencial para lograr esto). Buscamos coordenadas de la forma $v(q(t), \dot{q}(t))$ y para eso utilizamos la observación anterior que establece

$$v(t) = (d_{\varphi^{-1}(q(t))}L_{\varphi^{-1}(-q)}(\dot{q})) = \dot{q} - b(q, \dot{q}) + O(q^2)$$

Como $g(t)$ es una geodésica debe minimizar el funcional de energía

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\langle\, v(q(t), \dot{q}(t))\ ,\ v(q(t), \dot{q}(t))\,\rangle$$

que puede reescribirse utilizando las coordenadas locales de v en la forma

$$L(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle - \langle \dot{q}, b(q, \dot{q})\rangle + O(q^2).$$

Por el Teorema 1.58 el funcional L debe satisfacer las ecuaciones de Euler Lagrange sobre la curva $q(t)$ por lo que calculamos

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\langle \dot{q}, b(*, \dot{q})\rangle + O(q)$$

pero además

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} - b(q, \dot{q}) - \langle \dot{q}, b(q, *)\rangle$$

Utilizando las coordenadas locales para $v(t)$ podemos escribir $\dot{q} = v(t) + b(q, \dot{q}) + O(q^2)$ por lo que las ecuaciones de arriba se convierten en

$$\frac{\partial L}{\partial q} = -\langle v, b(*, v)\rangle + O(q)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = v - \langle v, b(q, *)\rangle + O(q^2)$$

Escribiendo la ecuación de Euler-Lagrange resulta que v satisface

$$\frac{dv}{dt} - \langle v, b(\dot{q}, *)\rangle = -\langle v, b(*, v)\rangle + O(q)$$

Nuevamente reescribiendo $\dot{q} = v(t) + b(q, \dot{q}) + O(q^2) = v(t) + O(q)$ obtenemos

$$\frac{dv}{dt} - \langle v, b(v, *)\rangle = -\langle v, b(*, v)\rangle + O(q)$$

que se puede reacomodar de la forma

$$\frac{dv}{dt} = \langle v\ ,\ b(v, *) - b(*, v)\rangle + O(q) = \langle v, [v, *]\rangle + O(q) = B(v, v) + O(q)$$

y evaluando en $q = 0$ esto arroja que

$$\frac{dv}{dt}|_{t=0} = B(v(0), v(0))$$

que es la identidad que buscábamos probar.

□

Integrabilidad y estructuras bi-hamiltonianas

En esta sección entenderemos cuestiones ligadas a la integrabilidad de un cierto sistema hamiltoniano. El concepto de integrabilidad de sistemas se remite a la tradición física de llamar a un sistema de ecuaciones diferenciales integrable si puede resolverse a partir de sus condiciones iniciales. Las ecuaciones de Newton son un ejemplo de sistema integrable y estudiar su integrabilidad en mecánica se puede traducir en estudiar ciertas constantes de movimiento: entre mayor cantidad de estas constantes uno pudiera encontrar mejores herramientas tendrá para poder resolver la ecuación en cuestión. Estas constantes del movimiento suelen llamarse primeras integrales de las ecuaciones de Newton y son, generalmente, observables. Ejemplos de estas cantidades son el momento lineal, el momento angular o la energía. La teoría de integrabilidad de sistemas dinámicos es una generalización de esta visión que permite aplicar las mismas ideas a sistemas en variedades simplécticas y de Poisson que, como ya dijimos, son el contexto apropiado para el estudio de la mecánica clásica en términos matemáticos modernos. Primero estableceremos una definición central para este capítulo.

Definición 3.22. Decimos que una terna (M, π, H) es un sistema hamiltoniano si M es una variedad, π es un bivector en M que induce una estructura de Poisson y H es una función diferenciable en M.

Un sistema hamiltoniano no es más que una variedad de Poisson M junto a una función H diferenciable en M. A esa función la llamamos función hamiltoniana de la variedad y la interpretamos como la energía del sistema. Estas interpretaciones heurísticas, nuevamente, se basan en pensar una variedad simpléctica como el espacio de fases de un sistema físico. En ese contexto, es natural brindar al sistema una información extra que permita describir su evolución y esa información debe ser la energía que posee. Las siguientes definiciones van en la dirección de obtener una definición de cantidades conservadas que generalice las primeras integrales de movimiento de las ecuaciones de Newton.

Definición 3.23. Decimos que una función $F : M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función de Casimir si induce un campo hamiltoniano constantemente nulo, es decir, si $\{F, g\}$ es la función nula para toda función $g \in C^\infty(M)$.

Observación 3.24. En el contexto usual de teoría de representaciones de álgebras de Lie tenemos una definición de elemento de Casimir para un álgebra de Lie. Si consideramos el álgebra de Lie de funciones en una variedad de Poisson con el corchete de Poisson obtenemos que el elemento de Casimir es una función de Casimir pues este elemento conmuta con todo elemento del álgebra.

Tenemos el siguiente criterio que será de ayuda para identificar funciones de Casimir.

Proposición 3.25. *Sea $F \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ constante sobre las órbitas de la acción coadjunta del grupo G en $\mathfrak{g}^*$. Entonces F es de Casimir para el corchete de Kostant Kirillov.*

Demostración. Basta probar que $X_f(m)(F) = 0$ para todo $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ y $m \in \mathfrak{g}^*$. Para eso, notemos que por la Proposición 3.12 esto es lo mismo que ver que $ad^*_{df(m)}(m)(F) = 0$. Ahora bien, escribamos esta última expresión de la forma $ad^*_{df(m)}(m)(F) = (F \circ \alpha)'(0)$ con α una curva que represente al vector $ad^*_{df(m)}(m) \in \mathfrak{g}^*$, pero para esto basta observar que dada una curva $\phi(t)$ en G con velocidad $\phi'(0) = df(m)$ entonces $Ad^*_{\phi(t)}(m)$ es una curva $\alpha(t)$ que satisface lo deseado. Como la función F es constante sobre esta curva (pues es constante sobre las órbitas de la acción coadjunta del grupo G) tenemos que la derivada $(F \circ \alpha)'(0)$ se anula y luego lo hace el corchete de Poisson$\{F, f\}(m)$ como queríamos probar. $\square$

Las funciones de Casimir tienen una interpretación física muy interesante al recapitular la mecánica subyacente en la geometría simpléctica. Recordemos que si M es una variedad simpléctica, una función $f \in C^\infty(M)$ se dice una cantidad conservada a lo largo de un campo hamiltoniano X_g si $\{f, g\} = 0$. Más aún, tenemos la siguiente definición:

Definición 3.26. Sea (M, π, H) un sistema hamiltoniano, se dice que f es una cantidad conservada del sistema si $\{f, X_H\} = 0$.

Las cantidades conservadas asociadas a un sistema hamiltoniano se relacionan uno a uno con las simetrías infinitesimales vía el teorema de Noether[1] (siempre que la variedad tenga primer grupo de cohomología nulo) y luego podemos interpretar las funciones de Casimir en una variedad de Poisson como cantidades que se conservan en todas las direcciones hamiltonianas: esto quiere decir que son simetrías infinitesimales del sistema hamiltoniano independientemente de la energía H que se le asocie a la variedad simpléctica.

Observación 3.27. Toda función de Casimir es constante sobre las hojas simplécticas de M. En efecto, dos puntos pertenecen a la misma hoja simpléctica si se pueden unir por un camino cuya velocidad en cada punto es un vector hamiltoniano. La variación de una

[1] Ver [Lee] o [Ko] para mayor detalle.

función de Casimir sobre un tal camino es nula pues es igual al valor de dicho vector aplicado sobre esta. Notemos además que el número de funciones de Casimir definidas localmente de forma independiente es igual a la codimensión de las hojas simplécticas en M.

Las funciones de Casimir se encuentran, naturalmente, en involución, aunque reflejan la degeneración del corchete de poisson y no las simetrías del sistema. Para poder reflejar las simetrías del sistema requerimos la noción de integrabilidad que se refiere a funciones que están en involución *entre ellas*. Ahora sí, diremos a qué nos referimos con sistema integrable.

Definición 3.28. Llamamos a $\mathcal{A}$ un álgebra dinámica $m-$dimensional si está generada como álgebra de Lie por m campos de vectores $\{v_\lambda\}$ en M que conmutan dos a dos y tales que el multivector $\Lambda^m v_\lambda$ se anula en un conjunto nunca denso (a esta condición nos referiremos como independencia en casi todo punto de los vectores v_λ). A $\mathcal{A}$ la consideramos como un $\mathcal{S}-$álgebra de Lie donde $\mathcal{S}$ es la $\mathbb{R}-$subálgebra de $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ generada por las funciones cuyas diferenciales se anulan sobre todos los v_λ.

Definición 3.29. Sea $\mathcal{A}$ un álgebra dinámica $m-$dimensional en una variedad de Poisson (M, π). Decimos que $\mathcal{A}$ es parcialmente integrable si:

1. Sus generadores $\{v_\lambda\}$ son vectores hamiltonianos asociados a ciertas funciones S_λ que son independientes en casi todo punto, es decir, tales que $\bigwedge dS_{\lambda_i}$ se anula en un conjunto nunca denso.

2. Todos los S_λ están en involución, es decir, $\{S_{\lambda_i}, S_{\lambda_j}\} = 0$.

En muchas situaciones nos referiremos a las funciones $\{S_\lambda\}$ como el sistema integrable en M.

Definición 3.30. Dada una variedad (M, ω) simpléctica decimos que un conjunto finito de funciones $\{S_{\lambda_i}\}_{i=1,\ldots n} \subseteq C^\infty(M)$ con 2n=dim(M), es un sistema totalmente integrable si las funciones S_i son independientes en todo punto y están en involución, es decir $\bigwedge dS_{\lambda_i}$ es una forma nunca nula y $\{S_{\lambda_i}, S_{\lambda_j}\} = 0$.

Fijamos entonces un sistema hamiltoniano (M, π, H). Estamos interesados en describir la evolución del sistema y para eso nos preocupa resolver la ecuación diferencial en M dada por

$$\dot{x} = \{x, H\}$$

A estas ecuaciones las llamaremos ecuaciones de movimiento y para resolverlas nos valdremos de las simetrías que establece un sistema integrable. La integrabilidad de un sistema se relaciona con la existencia de constantes del movimiento que nos permitan describir la evolución del sistema, del mismo modo que clásicamente permiten hacerlo el momento angular, el momento lineal y la energía para las ecuaciones de Newton: si consideramos funciones que forman un sistema integrable y buscamos las superficies de nivel de M con respecto a estas funciones obtenemos una subvariedad en la que las ecuaciones de movimiento que nos brinda la estructura de Poisson son integrables. Eso mismo es lo que dice el teorema de Liouville-Arnold que precisamente establece que si un sistema es completamente integrable entonces existe un cambio de coordenadas que lleva las ecuaciones de movimiento a un sistema de ecuaciones diferenciables integrables por cuadraturas. Geométricamente, este teorema nos dice que si intersecamos la variedad de poisson con superficies de nivel de las funciones del sistema, obtenemos una variedad difeomorfa a un toro $m-$dimensional tal que las coordenadas angulares que determinan la posición de un punto del toro son de la forma

$$\varphi_k = c_k + \omega_k t$$

donde ω_k y c_k son constantes (ω_k puede depender de los valores de las F_k que definen nuestro sistema integrable, pero es constante sobre cada superficie de nivel). En su versión más clásica este teorema funciona para sistemas completamente integrables en variedades simplécticas, pero hay resultados que lo generalizan para estructuras de Poisson. No probaremos aquí el teorema de Liouville-Arnold. Para mayor información ver [Ar1].

La integrabilidad de un sistema simplifica su estudio. Los sistemas que poseen pocas constantes de movimiento son más caóticos que los integrables y por eso es que nos vemos interesados en esta teoría. Un problema es que el concepto de integrabilidad de un sistema es mucho más complejo cuando se trata de variedades infinito dimensionales. La principal dificultad es que la cantidad de funciones que deben definir nuestro sistema no es finita (naturalmente) y luego las diferentes definiciones de sistema integrable dejan de coincidir (no son equivalentes infinitas funciones en involución a que las ecuaciones de movimiento sean integrables por cuadraturas por ejemplo). Hay sin embargo, algunos sistemas dinámicos en los que la noción de integrabilidad es clara como la famosa ecuación de Korteweg de Vries que estudiaremos más adelante. En estos sistemas encontramos generalmente la ayuda de poseer una estructura bihamiltoniana.

Definición 3.31. Dos estructuras de Poisson $\{\,,\,\}_0$ y $\{\,,\,\}_1$ son compatibles sobre una variedad M si para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ la combinación lineal $\{\,,\,\}_0 + \lambda\{\,,\,\}_1$ es también un corchete de Poisson en M. Una ecuación diferencial en M se dice bihamiltoniana si puede escribirse de la forma $\dot{x} = \{x, F_0\}_0$ y de la forma $\dot{x} = \{x, F_1\}_1$.

Ejemplo 3.32. Nuestro principal ejemplo para pensar en estructuras bihamiltonianas será el dual de un álgebra de Lie $\mathfrak{g}^*$. En este espacio contamos con el corchete de Kostant Kirillov pero también podemos definir una segunda estructura de poisson que viene asociada a un punto $m_0 \in \mathfrak{g}^*$. Llamamos corchete de poisson constante asociado a m_0 al corchete $\{\,,\,\}_0$ dado por

$$\{f, g\}_0 = \langle [d_m f, d_m g], m_0 \rangle$$

Notemos que en el punto m_0 las dos estructuras coinciden. Decimos que el corchete $\{\,,\,\}_0$ nos da la estructura de poisson de Kostant Kirillov *congelada* en el punto m_0.

Lema 3.33. *Los corchetes de Kostant Kirillov y $\{\,,\,\}_0$ son compatibles para todo punto $m_0 \in \mathfrak{g}^*$.*

Demostración. Para probar esto debemos computar

$$\begin{aligned}\{f,g\}_\lambda = \{f,g\} + \lambda\{f,g\}_0 =& \langle [d_m f, d_m g], m\rangle + \lambda\langle [d_m f, d_m g], m_0\rangle \\ =& \langle [d_m f, d_m g], m + \lambda m_0\rangle,\end{aligned}$$

que no es más que el corchete de Kostant Kirillov desplazado por una constante y luego, sigue siendo un corchete de Poisson. □

Dado un par de estructuras compatibles de poisson en una variedad M, se puede generar una sucesión de funciones en involución dos a dos que satisfagan que sus campos hamiltonianos con respecto a la estructura $\{\,,\,\}_0$ sean también hamiltonianos con respecto a la estructura $\{\,,\,\}_1$. Esta construcción se conoce como esquema de Lenard-Magri y para poder llevarla a cabo tan solo requerimos de un par de corchetes de poisson compatibles y una función h_λ de Casimir para el corchete $\{\,,\,\}_\lambda = \{\,,\,\}_0 + \lambda\{\,,\,\}_1$. En efecto, dado un tal par de corchetes y una tal función para cada λ consideremos a esta función como una función $h(\lambda)$ que a cada valor de λ le asocia una función diferenciable de Casimir sobre M para el corchete en cuestión. Supongamos que esta asignación pueda hacerse de forma diferenciable y expandamos h_λ como una serie de potencias sobre λ: $h_\lambda = h_0 + h_1\lambda + h_2\lambda^2 + ...$ donde cada coeficiente h_j es una función en M. Entonces vale el siguiente teorema:

Teorema 3.34. *Las funciones h_j con $j = 1, 2, ...$ así construidas forman una jerarquía de sistemas hamiltonianos. En otras palabras, cada función h_j genera un campo de vectores respecto del corchete $\{\,,\,\}_1$ que también es hamiltoniano para el corchete $\{\,,\,\}_0$ pero tal que su función hamiltoniana para este corchete es $-h_{j+1}$. Además, las h_i así construidas se encuentran en involución para ambos corchetes.*

Demostración. Sustituyamos el desarrollo en serie de potencias de h_λ en la condición de Casimir para obtener

$$\begin{aligned}0 = \{h_\lambda, f\}_\lambda =& \{h_0 + h_1\lambda + ..., f\}_0 + \lambda\{h_0 + h_1\lambda + ..., f\}_1 \\ =& \{h_0, f\}_0 + \lambda(\{h_1, f\}_0 + \{h_0, f\}_1) + \lambda^2(\{h_2, f\}_0 + \{h_1, f\}_1) + \dots\end{aligned}$$

Por lo que deben darse las identidades:

$$\{h_0, f\}_0 = 0, \quad \{h_1, f\}_0 + \{h_0, f\}_1 = 0, \quad \{h_2, f\}_0 + \{h_1, f\}_1 = 0, \dots$$

y como f es arbitraria esto prueba la primer afirmación. Para ver la segunda basta notar que

$$\{h_i, h_j\}_1 = -\{h_{i+1}, h_j\}_0 = \{h_{i+1}, h_{j-1}\}_1 = \cdots = 0$$

tras repetir el procedimiento suficientes veces como para encontrar el corchete entre una cierta h_l y ella misma. □

Capítulo 4

El grupo y el álgebra de Virasoro

El álgebra de Virasoro

Lo primero que estudiaremos serán los grupos de cohomología del álgebra de Lie de los campos de vectores en el círculo. Tenemos el resultado:

Teorema 4.1. *El segundo grupo de cohomología del álgebra de Lie de campos de vectores en S^1 es de dimensión 1.*

Demostración. Primero encontraremos un 2-cociclo en $\mathfrak{X}(S^1)$ que no sea un coborde. El cociclo que mostraremos recibe el nombre del cociclo de Gelfand-Fuchs y está definido por:

$$\omega : \mathfrak{X}(S^1) \times \mathfrak{X}(S^1) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega(f(\theta)\partial_\theta, g(\theta)\partial_\theta) = \int_{S^1} f'(\theta)g''(\theta)d\theta.$$

Primero veamos que se trata efectivamente de un cociclo. Sean entonces $f, g, h \in C^\infty(S^1)$. Tenemos que:

$$\omega([f\partial_\theta, g\partial_\theta], h\partial_\theta) = \omega((f'g - g'f)\partial_\theta, h\partial_\theta) = \int_{S^1} (f''g - fg'')h''d\theta$$

y permutando las funciones f, g, h de forma cíclica y sumando obtenemos una expresión de la forma:

$$\int_{S^1} f''(gh'' - g''h + g''h - gh'') + f(h''g'' - h''g'')d\theta = 0$$

Por lo que

$$\omega([f\partial_\theta, g\partial_\theta], h\partial_\theta) + \omega([h\partial_\theta, f\partial_\theta], g\partial_\theta) + \omega([g\partial_\theta, h\partial_\theta], f\partial_\theta) = 0$$

y ω es un 2-cociclo.
Ahora veamos que es un cociclo no trivial. En efecto, consideramos los siguientes campos de vectores en S^1:

$$X_1 = \partial_\theta, \quad X_2 = (\theta^3 + \theta)\partial_\theta, \quad X_3 = (3\theta)\partial_\theta, \quad X_4 = (\theta^2 + \frac{1}{3})\partial_\theta$$

Estos cuatro campos de vectores satisfacen las siguientes relaciones:

$$[X_1, X_2] = [X_3, X_4], \quad \omega(X_1, X_2) = 0, \quad \omega(X_3, X_4) \neq 0$$

Lo cual prueba que el cociclo de Gelfand-Fuchs no es un coborde, pues no depende únicamente del valor que toma el corchete entre dos campos.
Para completar la demostración probaremos que el espacio vectorial $H^2(\mathfrak{X}(S^1), \mathbb{R})$ es de dimensión 1. Sea entonces η un cociclo en $\mathfrak{X}(S^1)$ arbitrario. Extendamos η a un cociclo en la complexificación del álgebra $\mathfrak{X}(S^1)$, que notaremos por $\mathfrak{X}(S^1) \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{X}(S^1)_\mathbb{C}$. La ventaja de trabajar en este espacio es que las funciones que definen a nuestros campos de vectores pueden desarrollarse en serie de Fourier, brindándonos una base de campos de vectores amigable sobre la que trabajar. En efecto, cualquier elemento de $\mathfrak{X}(S^1)_\mathbb{C}$ es de la forma $f(\theta)\partial_\theta$ para una cierta f que se puede expandir en serie de Fourier:

$$f(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{i\theta n}$$

Por continuidad (recordemos que únicamente estamos considerando cociclos continuos en el segundo grupo de cohomología) η queda definido por los valores que toma sobre los elementos $L_n = ie^{i\theta n}\partial_\theta$. Sobre estos elementos, una simple inspección arroja la relación $[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m}$. Además, notemos que el cociclo definido por $\xi(L_m, L_n) = \eta(L_0, [L_m, L_n])$ es un 2-coborde pues se puede escribir como $\alpha([L_m, L_n])$ con $\alpha(L_m) = [L_0, L_m]$. Para ver por qué esta observación es importante escribamos la condición de cociclo en los elementos L_0, L_m, L_n que arroja:

$$\eta([L_0, L_m], L_n) + \eta([L_n, L_0], L_m) = \eta(L_0, [L_m, L_n]).$$

Por la observación recién hecha, podemos suponer entonces que

$$\eta([L_0, L_m], L_n) + \eta([L_n, L_0], L_m) = 0$$

con tan solo reemplazar η por un cociclo cohomólogo. Esta última relación, junto con la identidad que establecimos para $[L_n, L_m]$ nos da:

$$m\eta(L_m, L_n) + n\eta(L_m, L_n) = 0$$

que implica que $\eta(L_m, L_n) = 0$ siempre que $n \neq -m$. Además, la antisimetría del cociclo implica que $\eta(L_m, L_{-m}) = \eta(L_{-m}, L_m)$ por lo que alcanza con calcular $\eta(L_m, L_{-m})$ para $m \in \mathbb{N}$. Para hacer esto evaluamos la condición de cociclo en la terna L_1, L_n, L_{-n-1} y obtenemos:

$$(-n+1)\eta(L_{n+1}, L_{-n-1}) + (n+2)\eta(L_n, L_{-n}) - (2n+1)\eta(L_1, L_{-1}) = 0,$$

que es una ecuación lineal recursiva que devuelve los valores de $\eta(L_n, L_{-n})$ una vez que se conocen los de $\eta(L_1, L_{-1})$ y de $\eta(L_2, L_{-2})$. Esto demuestra que el espacio $H^2(\mathfrak{X}(S^1), \mathbb{R})$ tiene dimensión a lo sumo 2. Notemos, por último que si definimos $\eta(L_n) = n$ obtenemos un cociclo que es uno de los dos generadores del espacio solución de la ecuación lineal recursiva anterior. En efecto

$$-(n+1)(n+1) + (n+2)n - (2n+1) = 0.$$

Pero además η así definido es un coborde pues si consideramos el funcional β definido por $\beta(L_n) = -\frac{1}{2}\delta_{n,0}$ obtenemos que $\beta([L_n, L_m]) = \beta((m-n)L_{n+m}) = \frac{n-m}{2}\delta_{n+m,0}$ que coincide con el valor del 2-cociclo η sobre L_n y L_m. Esto prueba que $H^2(\mathfrak{X}(S^1), \mathbb{R})$ tiene dimensión a lo sumo 1 y concluye la demostración. $\square$

Definición 4.2. Al cociclo

$$\omega(f(\theta)\partial_\theta, g(\theta)\partial_\theta) = \frac{1}{2}\int_{S^1} f'(\theta)g''(\theta)d\theta$$

se lo llama cociclo de Gelfand-Fuchs. Notar que es un cociclo no trivial pues es un múltiplo del cociclo del teorema anterior.

Observación 4.3. El álgebra de campos de vectores sobre S^1 es perfecta. En efecto, si consideramos los elementos L_n que conforman la base de Fourier de $\mathfrak{X}(S^1)$ como en el teorema anterior tenemos la fórmula $[L_n, L_m] = (m-n)L_{n+m}$. Esta identidad nos dice que $L_n \in [\mathfrak{X}(S^1), \mathfrak{X}(S^1)]$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ por lo que $\mathfrak{X}(S^1) = [\mathfrak{X}(S^1), \mathfrak{X}(S^1)]$ dado que los elementos de la base de Fourier generan a todos los campos de vectores en S^1.

Definición 4.4. Llamamos álgebra de Virasoro a la extensión generada por el 2-cociclo de Gelfand-Fuchs del álgebra de Lie de campos de vectores en S^1.Esta extensión es la única extensión central a menos de equivalencia. Además, como $\mathfrak{X}(S^1)$ es un álgebra de Lie perfecta, resulta que la extensión es universal. Notamos al álgebra de Virasoro *vir*. De este modo tenemos la descripción siguiente:

$$vir = \mathfrak{X}(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

con el corchete dado por

$$[(f(\theta)\partial_\theta, a), (g(\theta)\partial_\theta, b)] = ((f'g - g'f)\partial_\theta, \frac{1}{2}\int_{S^1} f'(\theta)g''(\theta)d\theta).$$

El álgebra de Virasoro es un objeto de estudio muy interesante por varios motivos. En el campo de la física hay un interés particular por comprender las representaciones de este álgebra porque juegan un rol protagonista en la teoría de cuerdas (ver [Po]).

Nosotros, a diferencia de la mayor parte de los textos que estudian este álgebra, no nos encontramos interesados por sus representaciones: más aún, nos interesa estudiar el grupo de Virasoro que integra esta álgebra y las ecuaciones de Euler en ese grupo, por lo que lo único que necesitaremos conocer sobre el álgebra de Virasoro será la forma de su representación coadjunta. Sin embargo, si el lector está interesado en leer más sobre las representaciones del álgebra de Virasoro y su relación con las álgebras de Kac-Moody puede recurrir a [Se P] o [G O].

A continuación definimos una familia de productos internos en el álgebra de Virasoro que resultarán de interés: más adelante estudiaremos las ecuaciones de Euler asociadas a estas métricas.

Definición 4.5. Llamamos métrica $H^1_{\alpha,\beta}$ al producto interno definido por

$$\langle (v(\theta)\partial_\theta, a)\,;\,(w(\theta)\partial_\theta, b)\rangle_{H^1_{\alpha,\beta}} = \int_{S^1} (\alpha v w + \beta v' w')d\theta + ab$$

Notemos que si $\alpha \neq 0$ estas formas bilineales son no degeneradas y luego pueden extenderse a una métrica en el grupo de Lie que tiene a *vir* como álgebra de Lie. Este grupo será definido en la siguiente sección.

El grupo de Virasoro

Como vimos en el segundo capítulo, el grupo de difeomorfismos de una variedad compacta y de dimensión finita tiene estructura de grupo de Lie con la composición. A continuación definimos el que será nuestro objeto de estudio durante el resto de este trabajo.

Definición 4.6. Definimos al grupo de Virasoro como la siguiente extensión del grupo de difeomorfismos del círculo:

$$Vir = \mathrm{Diff}(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

con el producto dado por

$$(\psi(x), a) \circ (\varphi(x), b) = ((\psi \circ \varphi)(x), a + b + \frac{1}{2}\int_{S^1} log((\psi \circ \varphi)_x) d(log(\varphi_x))).$$

Para ver que se trata de una extensión central de $\mathrm{Diff}(S^1)$ basta ver que la aplicación $(\psi, \varphi) \mapsto \frac{1}{2}\int_{S^1} log((\psi \circ \varphi)_x)d(log(\varphi_x))$ es un 2-cociclo continuo. A este cociclo se lo conoce como el cociclo de Bott. No es cierto en este caso que se trate de la única extensión central a menos de isomorfismo del grupo de difeomorfismos de S^1: el segundo grupo de cohomología en este caso tiene dimensión 2. Sin embargo, sí es cierto que este grupo de Lie tiene por álgebra de Lie al álgebra de Virasoro.

Proposición 4.7. *El cociclo de Bott es un 2-cociclo continuo en Diff(S^1).*

Demostración. Sean ψ, φ, ϕ tres difeomorfismos de S^1 y consideremos la aplicación

$$B(f, g) = \int_{S^1} log((f \circ g)_x) d(log(g_x))$$

queremos ver que B satisface la ecuación de cociclo, es decir

$$B(\varphi \circ \psi, \eta) + B(\varphi, \psi) = B(\varphi, \psi \circ \eta) + B(\psi, \eta)$$

Para esto recurriremos únicamente a la regla de la cadena. Tenemos que

$$\begin{aligned}
B(\varphi\circ\psi,\eta) &= \int_{S^1}\log((\varphi\circ\psi\circ\eta)')d\log(\eta') = \int_{S^1}\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta\cdot(\psi\circ\eta)')d\log(\eta')\\
&= \int_{S^1}(\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta)+\log(\psi\circ\eta)')d\log(\eta')\\
&= \int_{S^1}\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta)d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\psi\circ\eta)')d\log(\eta')\\
&= \int_{S^1}\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta)d\log(\eta') + B(\psi,\eta)
\end{aligned}$$

y como η es un difeomorfismo, pullbackeando por η^{-1} tenemos la igualdad

$$B(\varphi,\psi) = \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi)'d\log(\psi') = \int_{S^1}\log((\varphi\circ\psi)'\circ\eta)d\log(\psi'\circ\eta)$$

que por la regla de la cadena arroja

$$B(\varphi,\psi) = \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\psi'\circ\eta) - \int_{S^1}\log(\eta')d\log(\psi'\circ\eta).$$

Sumando las relaciones que hemos obtenido tenemos:

$$\begin{aligned}
&B(\varphi\circ\psi,\eta) - B(\psi,\eta) + B(\varphi,\psi) =\\
&\int_{S^1}\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta)d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)' - \log(\eta')d\log(\psi'\circ\eta)
\end{aligned}$$

Pero por la regla de integración por partes

$$\begin{aligned}
&\int_{S^1}\log(\varphi'\circ\psi\circ\eta)d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\psi'\circ\eta)\\
&\qquad + \int_{S^1}\log(\psi'\circ\eta)d\log(\eta') =\\
&\int_{S^1}\log[(\varphi'\circ\psi\circ\eta)(\psi'\circ\eta)]d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\psi'\circ\eta) =\\
&\int_{S^1}\log[(\varphi'\circ\psi\circ\eta)(\psi'\circ\eta)\eta']d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\psi'\circ\eta)\\
&\qquad - \int_{S^1}\log(\eta')d\log(\eta') =\\
&\int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\eta') + \int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log(\psi'\circ\eta) - \int_{S^1}\log(\eta')d\log(\eta') =\\
&\int_{S^1}\log(\varphi\circ\psi\circ\eta)'d\log((\psi'\circ\eta)\eta') - \int_{S^1}\log(\eta')d\log(\eta').
\end{aligned}$$

Pero este último renglón no es más que

$$B(\varphi\circ\psi,\eta) - \int_{S^1}\log(\eta')d\log(\eta') = B(\varphi\circ\psi,\eta),$$

donde la última igualdad se da porque S^1 no tiene borde y entonces el teorema de Stokes arroja

$$\int_{S^1}\log(\eta')d\log(\eta') = \int_{S^1}\frac{1}{2}d(\log(\eta'))^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial S^1}\frac{1}{2}(\log(\eta'))^2 = 0.$$

Recopilando todo, hemos llegado a

$$B(\varphi \circ \psi, \eta) - B(\psi, \eta) + B(\varphi, \psi) = B(\varphi \circ \psi, \eta).$$

Esto prueba que B es un cociclo y como el cociclo de Bott es exactamente $\frac{1}{2}B$, la demostración está finalizada. □

Como ya hemos adelantado, el grupo de Virasoro integra al álgebra de Virasoro y eso probamos a continuación.

Proposición 4.8. *El álgebra de Lie del grupo de Virasoro es el álgebra de Virasoro.*

Demostración. El tangente cinético en la identidad del grupo de Virasoro presenta una descomposición de la forma $T_e Vir = \mathfrak{X}(S^1) \oplus \mathbb{R}$ que muestra que el álgebra de Lie del grupo de Virasoro es una extensión por $\mathbb{R}$ de *vir*. Esta extensión es a su vez central pues lo es la extensión del grupo de difeomorfismos que define al grupo de Virasoro. Como la única extensión central salvo isomorfismos de $\mathfrak{X}(S^1)$ es el álgebra de Virasoro esto prueba la proposición. □

La acción coadjunta del álgebra de Virasoro

El objetivo de esta sección es obtener una descripción explícita de la acción coadjunta del álgebra de Virasoro que nos permita calcular las ecuaciones de Euler asociadas a las métricas invariantes a izquierda en *Vir* presentadas anteriormente. Lo primero que debemos lograr es una descripción del dual suave del álgebra de Virasoro. Esto es lo que establece la siguiente proposición.

Definición 4.9. Llamamos espacio de diferenciales cuadráticos en S^1 al espacio

$$\Omega^{\otimes 2}(S^1) = \{u(\theta) d\theta \otimes d\theta\}$$

con la estructura de Fréchet asignada al espacio de secciones del fibrado $T^*S^1 \otimes T^*(S^1)$.

Proposición 4.10. *El dual suave del álgebra de Lie de campos de vectores en S^1 se identifica canónicamente con el espacio de diferenciales cuadráticos en S^1. El pairing entre $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$ y $\mathfrak{X}(S^1)$ está dado por*

$$\langle u(\theta)(d\theta)^2, v(\theta)\partial_\theta \rangle = \int_{S^1} u(\theta) v(\theta) d\theta$$

Demostración. Para ver que el dual suave de $\mathfrak{X}(S^1)$ tiene la descripción que afirmamos basta con probar que el pairing establecido es no degenerado. Sea entonces $u(\theta)(d\theta)^2$ un elemento de $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$ tal que $\int_{S^1} u(\theta)v(\theta)d\theta = 0$ para todo $v(\theta)\partial_\theta \in \mathfrak{X}(S^1)$. Debemos probar que $u(\theta) = 0$ y para eso apelaremos al lema fundamental del cálculo de variaciones (Lema 1.52). En efecto, la función $u(\theta)$ se identifica con una función $u \in C^\infty([0, 2\pi])$ tal que $u(0) = u(2\pi)$ y $\int_0^{2\pi} u(x)v(x)dx = 0$ para toda $v \in C^\infty([0, 2\pi])$ con $v(0) = v(2\pi)$ y por el lema citado entonces debe ser $u = 0$ como queríamos probar. Un razonamiento similar prueba que no hay ninguna función $v \in C^\infty(S^1)$ no nula tal que $\int_{S^1} u(\theta)v(\theta)d\theta = 0$ para toda $u(\theta)(d\theta)^2 \in \Omega^{\otimes 2}(S^1)$ y luego el pairing es no degenerado como queríamos probar.

□

Corolario 4.11. *El dual suave al álgebra de Virasoro admite la descripción.*

$$vir^* = \Omega^{\otimes 2}(S^1) \oplus \mathbb{R}$$

con el pairing dado por

$$\langle \left(u(\theta)(d\theta)^2, a \right), (v(\theta)\partial_\theta, b) \rangle = \int_{S^1} u(\theta)v(\theta)d\theta + ab.$$

Ahora intentaremos clarificar el significado del espacio $\Omega^{\otimes 2}(S^1)$ y su nombre que lo asocia al de formas diferenciales. Un diferencial cuadrático no es otra cosa que una sección de la segunda potencia simétrica del fibrado de 1-formas sobre una superficie que tiene la forma $u(\theta)(d\theta)^2 = u(\theta)(d\theta \odot d\theta)$. Notemos que los difeomorfismos de la variedad conllevan una acción sobre este espacio de diferenciales vía pullback de fibrados de modo tal que $\varphi^{-1} \cdot (u(\theta)(d\theta)^2) = u(\varphi(\theta))(\varphi'(\theta))^2(d\theta)^2 = u(\varphi)(d\varphi)^2$ y esta acción coincide con la acción coadjunta del grupo de difeomorfismos de S^1 sobre el dual de su álgebra de Lie.

Para finalizar esta sección nos proponemos calcular explícitamente la representación coadjunta del álgebra de Virasoro.

Proposición 4.12. *La acción coadjunta del álgebra de Virasoro en el dual vir^* viene dada por la fórmula*

$$ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(u(d\theta)^2, a) = (-(2uv' + u'v + \frac{a}{2}v''')(d\theta)^2, 0).$$

Demostración. La acción coadjunta queda definida por la fórmula

$$\langle ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(u(d\theta)^2, a), (w\partial_\theta, c) \rangle = -\langle (u(d\theta)^2, a), [(v\partial_\theta, b), (w\partial_\theta, c)] \rangle.$$

Utilizando la definición del corchete de Virasoro esto nos arroja

$$\begin{aligned}
\langle ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(u(d\theta)^2, a), (w\partial_\theta, c) \rangle &= - \langle (u(d\theta)^2, a), ((v'w - w'v)\partial_\theta, \frac{1}{2}\int_{S^1} v'w''d\theta) \rangle \\
&= \int_{S^1} -u(v'w - w'v)d\theta + \frac{a}{2}\int_{S^1} -v'w''d\theta,
\end{aligned}$$

pero integrando por partes esta última igualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(u(d\theta)^2, a), (w\partial_\theta, c) \rangle &= \int_{S^1} -u(v'w - w'v)d\theta + \frac{a}{2}\int_{S^1} -v'w''d\theta \\
&= \int_{S^1} -uv'w + uw'vd\theta + \frac{a}{2}\int_{S^1} -v'w''d\theta \\
&= \int_{S^1} -uv'w - w(uv)'d\theta + \frac{a}{2}\int_{S^1} -v'''wd\theta \\
&= \int_{S^1} -w(uv' + uv' + u'v)d\theta + \frac{a}{2}\int_{S^1} -v'''wd\theta \\
&= \int_{S^1} -w(2uv' + u'v + \frac{a}{2}v''')d\theta,
\end{aligned}$$

y esto implica que la acción coadjunta adquiere la forma

$$ad^*_{(v\partial_\theta,b)}(u(d\theta)^2,a) = (-(2uv' + u'v + \frac{a}{2}v''')(d\theta)^2, 0)$$

como queríamos probar. $\square$

Capítulo 5

La teoría de Arnold en el grupo de Virasoro

Ecuaciones de Euler-Arnold en el grupo de Virasoro

En esta sección aplicaremos el método de Euler-Arnold para obtener las ecuaciones de las geodésicas en el grupo de Virasoro con las métricas inducidas por los productos internos definidos en el álgebra de Virasoro anteriormente. El (único) resultado de esta sección es el corazón del capítulo y posiblemente el del trabajo en su totalidad.

Teorema 5.1. *La ecuación de Euler que describe el flujo geodésico en el grupo de Virasoro con respecto a la métrica invariante a izquierda $H^1_{\alpha,\beta}$ con $\alpha \neq 0$ tiene la forma*

$$\alpha(v_t - 3vv_\theta) - \beta(v_{\theta\theta t} - 2v_{\theta\theta}v_\theta - v_{\theta\theta\theta}v) - bv_{\theta\theta\theta} = 0$$

Demostración. Escribamos $\Lambda = \alpha - \beta\partial_\theta^2$ al operador diferencial de segundo orden que actúa sobre funciones de la forma $\Lambda(f(\theta)) = \alpha f - \beta f_{\theta\theta}$. Con esta notación podemos contruir el operador de inercia asociado a la métrica $H^1_{\alpha,\beta}$. En efecto, este operador resulta

$$\begin{aligned} A : vir &\longrightarrow vir^* \\ (v\partial_\theta, b) &\longmapsto ((\Lambda v)(d\theta)^2, b). \end{aligned}$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle A(v\partial_\theta, b), (w\partial_\theta, c)\rangle &= \langle((\Lambda v)(d\theta)^2, b), (w\partial_\theta, c)\rangle = \int_{S^1}(\Lambda v)wd\theta + bc \\ &= \int_{S^1} \alpha vw - \beta v_{\theta\theta}wd\theta + bc = \int_{S^1} \alpha vw + \beta v_\theta w_\theta d\theta + bc, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la fórmula de integración por partes. Notemos que la ecuación de Euler, por el teorema de Arnold toma la forma

$$\frac{d}{dt}(u(d\theta)^2, a) = -ad^*_{A^{-1}((u(d\theta)^2, a))}(u(d\theta)^2, a).$$

Si llamamos $(v\partial_\theta, b) = A^{-1}((u(d\theta)^2, a))$ y utilizamos la descripción explícita de la acción coadjunta obtenemos

$$\frac{d}{dt}(u(d\theta)^2, a) = -ad^*_{(v\partial_\theta,b)}(u(d\theta)^2, a) = ((2uv_\theta + u_\theta v + \frac{a}{2}v_{\theta\theta\theta})(d\theta)^2, 0).$$

Reemplazando $u(\theta) = \Lambda(v)$ y $a = b$ tras utilizar la forma del operador de inercia A obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\alpha v - \beta v_{\theta\theta}) & = 2(\alpha v - \beta v_{\theta\theta})v_\theta + \partial_\theta(\alpha v - \beta v_{\theta\theta})v + \frac{b}{2}v_{\theta\theta\theta} \\ b_t & = 0 \end{cases}$$

Que desarrollando alcanza la forma

$$\begin{cases} \alpha(v_t - 3vv_\theta) - \beta(v_{\theta\theta t} - 2v_{\theta\theta}v_\theta - v_{\theta\theta\theta}v) - \frac{b}{2}v_{\theta\theta\theta} & = 0 \\ b_t & = 0 \end{cases}$$

□

La forma que adquieren las ecuaciones de Euler para algunas de estas métricas invariantes es interesante de por sí, por tratarse de ecuaciones diferenciales ya estudiadas e importantes. En efecto, si elegimos $\alpha = 1$ y $\beta = 0$ obtenemos la ecuación

$$v_t - 3vv_\theta - bv_{\theta\theta\theta} = 0$$

con b una constante. A esta ecuación se la conoce como ecuación de Korteweg-de Vries y es de suma importancia en el mundo de la física por describir la propagación de ondas en medios dispersivos. Como veremos en la próxima sección esta ecuación es bihamiltoniana y por ende se presenta como un ejemplo interesante de sistema integrable para el caso infinito dimensional.

Por otro lado, tomando $\alpha = \beta = 1$ se obtiene la ecuación

$$v_t - v_{t\theta\theta} = 3vv_\theta - 2v_\theta v_{\theta\theta} - (v - b)v_{\theta\theta\theta}$$

que es conocida como la ecuación de Camassa-Holm y ha sido estudiada largamente en física para describir el movimiento de ondas en zonas superficiales del océano. Al igual que la ecuación de Korteweg-de Vries, esta ecuación resulta bihamiltoniana con respecto a dos estructuras de Poisson diferentes en vir^*, cosa que estudiaremos en la próxima sección.

Estructuras bi-hamiltonianas de las ecuaciones

Ahora nos encaminamos a estudiar las propiedades de integrabilidad de los sistemas dinámicos dados por las ecuaciones de Euler en el grupo de Virasoro asociadas a cada una de las métricas $H^1_{\alpha,\beta}$. Estas propiedades serán consecuencia de la estructura bihamiltoniana que presentaremos a continuación. Ya sabemos que estas ecuaciones son hamiltonianas con respecto al corchete de Kostant-Kirillov y la función hamiltoniana $H(v) = \frac{1}{2}\langle v, v\rangle_{H^1_{\alpha,\beta}}$ en vir^*, el próximo paso es mostrar que también lo son para otro corchete de Poisson. Recordemos entonces que en todo dual a un álgebra de Lie, fijado un punto m_0 tenemos un corchete de Poisson constante asociado a m_0. Hemos visto además que estos corchetes son compatibles con el usual por lo que es natural preguntarnos qué forma tienen las ecuaciones hamiltonianas en vir^* con respecto a estos corchetes constantes.

Observación 5.2. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y un punto m_0 en $\mathfrak{g}^*$, la ecuación hamiltoniana computada respecto al corchete constante en el punto m_0 y la función hamiltoniana $f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ admite la forma

$$\frac{dm}{dt} = X_f(m) = -ad^*_{df(m)}(m_0)$$

Esto es sencillo de ver adaptando la demostración de 3.12.

Teorema 5.3. *La ecuación de Euler en el grupo de Virasoro asociada a la métrica $H^1_{1,0}$ es hamiltoniana con respecto al corchete constante en vir^* asociado al punto $(\frac{1}{2}(d\theta)^2, 0)$.*

Demostración. Consideremos la función en vir^*:

$$F(u(d\theta)^2, a) = \int \left(\frac{1}{2}u^3 - \frac{a}{4}(u_\theta)^2\right) d\theta$$

Por la observación anterior la ecuación hamiltoniana con respecto al corchete constante admite la forma:

$$\frac{d}{dt}(u(d\theta)^2, a) = -ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(\frac{1}{2}(d\theta)^2, 0) = (v'(d\theta)^2, 0)$$

Donde $(v\partial_\theta, b) = dF(u(d\theta)^2, a)$. Notemos que $dF(u(d\theta)^2, a)$ lo vemos en vir vía la identificación entre $(vir^*)^*$ y vir. Para identificarlo como elemento de $(vir^*)^*$ tomamos un $(\xi(d\theta)^2, c)$ y evaluamos

$$\begin{aligned} dF_{(u(d\theta)^2,a)}(\xi(d\theta)^2, c) =& \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0} F((u+\xi\epsilon)(d\theta)^2, a + c\epsilon) \\ =& \frac{d}{d\epsilon}|_{\epsilon=0}(\int_{S^1} \frac{1}{2}(u+\epsilon\xi)^3 - \frac{a}{4}(u+\epsilon\xi)^2_\theta d\theta) \\ =& \int_{S^1} \frac{3}{2}u^2\xi - \frac{a}{2}u_\theta\xi_\theta d\theta = \int_{S^1} \frac{3}{2}u^2\xi + \frac{a}{2}u_{\theta\theta}\xi d\theta \\ =& \langle(\xi(d\theta)^2, c), ((\frac{3}{2}u^2 + \frac{a}{2}u_{\theta\theta})\partial_\theta, 0)\rangle. \end{aligned}$$

Por lo que el elemento de vir con el que se identifica $dF_{(u(d\theta)^2,a)}$ es $((\frac{3}{2}u^2 + \frac{a}{2}u_{\theta\theta})\partial_\theta, 0)$. Esto prueba que $v = \frac{3}{2}u^2 + \frac{a}{2}u_{\theta\theta}$ y luego la ecuación hamiltoniana con respecto al corchete constante y asociada a la función F resulta el sistema

$$\begin{cases} u_t &= 3u_\theta u + \frac{a}{2}u_{\theta\theta\theta} \\ a_t &= 0, \end{cases}$$

que es la ecuación de Euler asociada a la métrica $H_{1,0}$ en el grupo de Virasoro con respecto al corchete de Kostant-Kirillov. Esto prueba que esta ecuación, que es la de Korteweg de Vries, es bihamiltoniana. □

La ecuación de Korteweg de Vries no es la única que presenta estructura bihamiltoniana de entre las que se obtienen como ecuaciones de Euler en el grupo de Virasoro para las métricas $H_{\alpha,\beta}$: todas ellas poseen esta estructura y la demostración es similar.

Durante el resto del capítulo clasificaremos las órbitas de la acción coadjunta del grupo de Virasoro en su álgebra. El objetivo de obtener una tal clasificación es el de poder encontrar una función de Casimir adecuada para poder explotar la estructura bihamiltoniana de la ecuación de Korteweg de Vries y mostrar su integrabilidad vía un esquema de Lenard-Magri. Esa clasificación, sin embargo, requiere de un desarrollo teórico preliminar en el que incurriremos en la siguiente sección.

Las órbitas coadjuntas del grupo de Virasoro

En general el sistema integrable que se obtenga de un sistema dinámico mediante un esquema de Lenard-Magri no estará unívocamente determinado por el par de corchetes de Poisson: diferentes funciones de Casimir pueden arrojar diferentes sistemas en involución. Sin embargo, cuando la codimensión de las hojas simplécticas de los corchetes $\{\, ,\, \}_\lambda$ es 1 obtenemos una única función de Casimir (salvo constantes) y luego la elección del corchete determina el sistema. Este es el caso para los sistemas bihamiltonianos que hemos trabajado y para la ecuación de Korteweg de Vries, por lo que el único ingrediente que aún nos hace falta es la función de Casimir en cuestión. Resulta que cualquier invariante por conjugaciones que podamos asignarle a la matriz de monodromía del operador diferencial $\partial_\theta^2 + u(\theta)$ será una función de Casimir (por ejemplo, podemos tomar la traza del operador o cualquier función de esta). Para poder ver esto, primero brindaremos un poco de contexto sobre las matrices de monodromía asociadas a ecuaciones diferenciales. Las siguientes definiciones se enmarcan dentro de la teoría de Floquet y para profundizar sobre este tema se puede consultar [Ch].

Teorema 5.4. *(Floquet) Sea $\dot{x} = A(t)x$ un sistema lineal de ecuaciones diferenciales tal que $t \mapsto A(t)$ es una asignación T-periódica y continua al espacio de matrices de $n \times n$ y coeficientes reales. Sea $\Phi(t)$ la matriz fundamental del sistema. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$*

$$\Phi(t+T) = \Phi(t)\Phi^{-1}(0)\Phi(T)$$

Demostración. Primero notemos que la matriz $\Psi(t) = \Phi(t+T)$ es solución al sistema. En efecto

$$(\dot{\Psi})(t) = (\dot{\Phi})(t+T) = A(t+T)\Phi(t+T) = A(t)\Psi(t)$$

ahora consideremos la matriz $C = \Phi^{-1}(0)\Phi(T) = \Phi^{-1}(0)\Psi(o)$. Es claro que la asignación $t \mapsto \Phi(t)C$ es solución al sistema y además satisface que $\Phi(0)C = \Psi(0)$. Por el teorema de unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales tenemos que $\Psi(t) = \Phi(t)C$ que es exactamente lo que queríamos probar. □

Definición 5.5. Llamamos matriz de monodromía del sistema $\dot{x} = A(t)x$ a la matriz $B = \Phi^{-1}(0)\Phi(T)$ donde $\Phi(t)$ es la matriz fundamental del sistema. Notemos que esta matriz depende de la elección de Φ aunque su clase de conjugación no.

El dual del álgebra de Virasoro (que ha sido descripto como un espacio de diferenciales cuadráticos) también admite una descripción en términos de operadores diferenciales. Estos operadores se llaman operadores de Hill y reciben este nombre pues son aquellos que definen la ecuación de Hill, la cual ha sido extensamente estudiada con el objetivo de describir los movimientos de la luna. La ecuación de Hill es la ecuación diferencial

$$\ddot{u} + a(t)u = 0, \qquad a(t+T) = a(t)$$

y los operadores de Hill son los operadores diferenciales de la forma $\partial_\theta^2 + u(\theta)$. La identificación entre el espacio de estos operadores y el dual del álgebra de Virasoro es la siguiente

$$(u(\theta)(d\theta)^2, a) \longmapsto a\partial_\theta^2 + u(\theta)$$

y bajo esta identificación tiene sentido hablar del operador de monodromía asociado a un punto del dual suave del álgebra de Virasoro. En efecto, dado un punto $a\partial_\theta^2 + u(\theta) \in vir^*$ tenemos la ecuación diferencial

$$a\ddot{x} = -u(\theta)x$$

que es equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales lineales

$$\begin{cases} \dot{x} & = y \\ \dot{y} & = -\frac{u(\theta)}{a}x, \end{cases}$$

tal que la asignación $\theta \mapsto A(\theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u(\theta)}{a} & 0 \end{pmatrix}$ es continua y 2π-periódica. Como estamos en las hipótesis del teorema de Floquet, podemos entonces afirmar que a cada punto de vir^* se le asocia una clase de conjugación de matriz de monodromía. Las matrices de monodromía asociadas a ecuaciones de Hill tienen la particularidad de pertenecer a $SL(2,\mathbb{R})$ (esto se puede demostrar usando la fórmula de Liouville para el determinante de la matriz fundamental de un sistema lineal aunque no lo haremos aquí, para más detalle ver [Ch], página 180) y luego, las matrices de monodromía asociadas a puntos del dual del álgebra de Virasoro en el hiperplano $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) | a = 1\}$ están en $SL(2,\mathbb{R})$.

A continuación nos encaminamos a clasificar las órbitas de la acción coadjunta del grupo de Virasoro en el dual de su álgebra de Lie. El objetivo será probar que sobre cada hiperplano $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) | a = a_0\} \subseteq vir^*$ las órbitas por la acción coadjunta del grupo de Virasoro quedan clasificadas por dos objetos: la clase de conjugación de la matriz de monodromía asociada a un punto cualquiera del hiperplano y un número entero. Para comenzar la clasificación comenzamos con la siguiente observación.

Observación 5.6. El centro del grupo de Virasoro actúa trivialmente sobre vir^* vía la acción coadjunta, es decir

$$Ad^*_{(0,a)} = Id_{vir^*}$$

Para notar esto basta observar la forma de la acción coadjunta del álgebra de Virasoro sobre su dual y notar que el centro se encuentra en el núcleo de esta acción. Por otro lado, observemos que los hiperplanos $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) | a = a_0\}$ también son invariantes por la acción coadjunta del grupo de Virasoro: esto tambié surge de observar la forma de la acción coadjunta del álgebra de Virasoro en su dual.

Gracias a la observación anterior, alcanza con encontrar la acción coadjunta de un difeomorfismo sobre el dual del álgebra de Virasoro para entender la acción del grupo de Virasoro en su totalidad. Además, podemos restringirnos a estudiar esta acción sobre los hiperplanos $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) | a = a_0\}$ que son subespacios invariantes por ella. Sin embargo, no será conveniente obtener una fórmula explícita para la acción de un difeomorfismo del círculo sobre vir^*: no es que no haya una tal fórmula, sino que es más sencilla la forma en la que estos difeomorfismos actúan sobre las soluciones de una ecuación de Hill que la forma en la que actúan sobre la ecuación en sí misma. Para esto consideremos un punto del dual al álgebra de Virasoro representado vía una ecuación de la forma

$$(a\partial_\theta^2 + u(\theta))y = 0$$

y sean f, g dos soluciones linealmente independientes de la ecuación. Estas soluciones inducen un mapa

$$\begin{aligned} \eta : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{RP}^1 \\ \theta &\longmapsto (f(\theta) : g(\theta)) \end{aligned}$$

donde $(x : y)$ son las coordenadas homogéneas del punto (x, y) en el espacio proyectivo $\mathbb{RP}^1$. Este mapa puede verse también como el mapa $\eta(\theta) = \frac{f(\theta)}{g\theta)}$ que va de $\mathbb{R}$ a S^1, vía la identificación canónica entre $\mathbb{RP}^1$ y S^1. Resulta que la acción coadjunta de un difeomorfismo induce una acción sobre el mapa η así construido y esta acción es muy entendible.

Observación 5.7. Dado un difeomorfismo φ de S^1 tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, dashed, "\widehat{\varphi}"] \arrow[d, "p"] & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ S^1 \arrow[r, "\varphi"] & S^1 \end{tikzcd}$$

donde los mapas de $\mathbb{R}$ a S^1 son los revestimientos. Como $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, podemos levantar la composición $\varphi \circ p$ a un único mapa $\widehat{\varphi}$ tal que $\widehat{\varphi}(0) \in [0, 2\pi)$. Además, este mapa resulta un difeomorfismo de $\mathbb{R}$ y satisface $\widehat{\varphi}(\theta + 2\pi) = \widehat{\varphi}(\theta) + 2\pi$ dado que la acción de $\pi_1(S^1) \cong 2\pi\mathbb{Z}$ en $\mathbb{R}$ está dada por la suma.

Proposición 5.8. *La acción de Virasoro de un difeomorfismo φ induce una acción vía cambio de coordenadas sobre el mapa η de la forma*

$$\varphi : \eta(\theta) \mapsto \eta(\widehat{\varphi}(\theta))$$

donde $\widehat{\varphi} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es el levantado de φ a $\mathbb{R}$ como revestimiento de S^1.

Demostración. Sean f y g dos soluciones linealmente independientes a la ecuación de Hill $(a\partial_\theta^2 + u(\theta))y = 0$. Definimos

$$F(\theta) = f(\varphi(\theta))(\varphi'(\theta))^{-1/2} \quad y \quad G(\theta) = g(\varphi(\theta))(\varphi'(\theta))^{-1/2}$$

y afirmamos que F y G son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Hill $(a\partial_\theta^2 + U(\theta))y = 0$, donde $U(\theta) = Ad^*_{\varphi^{-1}}(u(\theta)(d\theta)^2, a)$. Si probamos esto, entonces habremos visto que la acción coadjunta del grupo de Virasoro sobre el mapa η es la deseada pues

$$\frac{F(\theta)}{G(\theta)} = \frac{f(\varphi(\theta))}{g(\varphi(\theta))} = \eta(\varphi(\theta)).$$

Ahora bien, tenemos la relación

$$\begin{aligned} aF'' &= a(f'' \circ \varphi)(\varphi')^{\frac{3}{2}} + a\frac{3}{4}(f \circ \varphi)(\varphi')^{-\frac{5}{2}}(\varphi'')^2 - a\frac{1}{2}\varphi'''(f \circ \varphi)(\varphi')^{-\frac{3}{2}} \\ &= -(u \circ \varphi)(f \circ \varphi)(\varphi')^{\frac{3}{2}} + a\frac{3}{4}(f \circ \varphi)(\varphi')^{-\frac{5}{2}}(\varphi'')^2 - a\frac{1}{2}\varphi'''(f \circ \varphi)(\varphi')^{-\frac{3}{2}} \\ &= (f \circ \varphi)(\varphi')^{-\frac{1}{2}}\left(-(u \circ \varphi)(\varphi')^2 + a\frac{3}{4}(\varphi')^{-2}(\varphi'')^2 - a\frac{1}{2}\varphi'''(\varphi')^{-1}\right) \\ &= -U(\theta)F(\theta), \end{aligned}$$

donde $U(\theta) = (u \circ \varphi)(\varphi')^2 + a\frac{1}{2}\frac{(\varphi''')(\varphi') - \frac{3}{2}(\varphi'')^2}{(\varphi')^2}$, por lo que basta demostrar la igualdad

$$Ad^*_{\varphi^{-1}}(u(\theta)(d\theta)^2, a) = (u \circ \varphi)(\varphi')^2 + a\frac{1}{2}\frac{(\varphi''')(\varphi') - \frac{3}{2}(\varphi'')^2}{(\varphi')^2}.$$

Para ver esto, alcanza con probar que la fórmula dada induce una representación del grupo de difeomorfismos en vir^*, y que si consideramos una curva de difeomorfismos $t \mapsto \varphi_t$ con $\varphi_0 = id$ y $\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t = v\partial_\theta$ y computamos $\frac{d}{dt}((u \circ \varphi_t)(\varphi_t')^2 + a\frac{1}{2}\frac{(\varphi_t''')(\varphi_t') - \frac{3}{2}(\varphi_t'')^2}{(\varphi_t')^2})$, el resultado no es otro que la acción coadjunta del álgebra de Virasoro, $ad^*_{(v\partial_\theta, b)}(u(\theta)(d\theta)^2, a)$, calculada en la Proposición 4.12. □

El mapa η que definimos arriba resulta muy importante a la hora de clasificar las órbitas de la acción coadjunta del grupo de Virasoro. Su importancia radica en que a cada punto del hiperplano $\{a = a_0\}$ en el dual del álgebra de Virasoro se le asocia un mapa η distinto. Más aún, una vez que conocemos el mapa η asociado a un punto $(u(\theta), a_0)$ en este hiperplano podemos reconstruir el punto del que hemos partido. Eso es lo que dice la siguiente proposición.

Proposición 5.9. *Dado el mapa η asociado a un punto en el hiperplano $\{(u, a) : a = a_0\}$ hay una fórmula explícita para obtener el punto $(u(\theta), a_0)$ que induce ese mapa.*

Demostración. Consideramos dos soluciones linealmente independientes f y g de la ecuación $(a\partial_\theta^2 + u(\theta))y = 0$ y el mapa inducido por ellas η. Notemos primero que el wronskiano

$$W(\theta) = \det\begin{pmatrix} f & g \\ f' & g' \end{pmatrix} = fg' - gf'$$

es constante. En efecto, derivándolo obtenemos

$$(fg' - gf')' = f'g' + fg'' - g'f' - gf'' = -\frac{1}{a}fug + \frac{1}{a}guf = 0.$$

Como f y g son linealmente independientes, el wronskiano no se anula y podemos normalizarlo para que valga constantemente -1 reemplazando a f por un múltiplo suyo. Supongamos entonces que el wronskiano se encuentra normalizado y notemos que en ese caso la derivada del mapa η arroja

$$\eta'(\theta) = \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{-W}{g^2} = \frac{1}{g^2}$$

por lo que podemos recuperar f y g a partir de η pues $f = \eta \cdot g = \frac{\eta}{\sqrt{\eta'}}$. En el caso en que el wronskiano fuera una constante desconocida podemos reconstruir las funciones f y g salvo multiplicación por una constante (es decir, podemos recontruir el mapa η visto como mapa a $\mathbb{RP}^1$). Una vez probado esto solo resta construir $u(\theta)$ a partir de f y g. Notemos que como el espacio de soluciones de la ecuación de Hill en cuestión es de dimensión 2 entonces el determinante de la matriz de 3×3

$$\begin{pmatrix} y & f & g \\ y' & f' & g' \\ y'' & f'' & g'' \end{pmatrix}$$

debe ser constantemente nulo para toda $y(\theta)$ solución a la ecuación. Desarrollando tenemos

$$\begin{aligned} 0 = y \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} &- y'(fg'' - gf'') + y''(f'g - fg') \\ = y \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} &+ y'\frac{1}{a}(fug - guf) - y'' \\ = y \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} &- y'', \end{aligned}$$

que multiplicando por a se convierte en la ecuación

$$ya \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} - ay'' = 0.$$

Y como las funciones y que anulan ese determinante son exactamente las soluciones a nuestra ecuación diferencial, tenemos que debe ser

$$u(\theta) = -a \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}$$

lo cual nos da una fórmula para $u(\theta)$ una vez que conocemos η (Observar que si $W \neq -1$ con los mismos pasos podríamos despejar $u(\theta)$ aunque no podríamos despejar f ni g). $\square$

Ahora estamos en condiciones de clasificar las órbitas coadjuntas del grupo de Virasoro.

Teorema 5.10. *Las órbitas de Virasoro en el hiperplano $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) : a = a_0\} \subseteq vir^*$ con $a_0 \neq 0$ fijo, se clasifican por la forma normal de Jordan de las matrices en $SL(2, \mathbb{R})$ y un número entero positivo.*

Demostración. Sea (f, g) un par de soluciones linealmente independientes de la ecuación $(a\partial_\theta^2 + u(\theta))y = 0$. Consideremos el morfismo η que estas inducen. Sea M la matriz de monodromía asociada al par de soluciones (f, g) de la ecuación. Notemos que η es cuasiperiódica en el sentido de que satisface:

$$\eta(\theta + 2\pi) = [M]\eta(\theta)$$

donde $[M]$ es la clase de M en $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{R})$. Notemos que como las funciones son linealmente independientes el wronskiano asociado es nunca nulo. En particular, si consideramos ahora a η como el mapa $\eta(\theta) = \frac{f(\theta)}{g(\theta)}$ obtenemos que $\eta'(\theta) = -\frac{W}{g^2} \neq 0$. Más aún, eligiendo f y g de modo que $W > 0$ podemos suponer que $\eta' < 0$. Esto nos dice que si nos restringimos al intervalo $[0, 2\pi]$, η representa una rotación alrededor de S^1 no singular (que no necesariamente termina en el mismo punto en el que comienza). Reparametrizando η vía un difeomorfismo de S^1 podemos garantizar que $\eta(\varphi)$ sea una rotación uniforme manteniendo la misma relación de monodromía en los bordes del intervalo $[0, 2\pi]$. Es decir, existe un (único) difeomorfismo de S^1 que preserva su orientación φ tal que $(\eta(\widehat{\varphi}))$ es una rotación en sentido negativo a velocidad constante (vista como mapa hacia $\mathbb{RP}^1$) y $\eta(\widehat{\varphi}(2\pi)) = \eta(\widehat{\varphi}(0) + 2\pi) = [M]\eta(\widehat{\varphi}(0))$(observar que la segunda condición se satisface para todo difeomorfismo φ por lo que tan solo hay que tomar aquel que satisfaga la primera). De esta forma, obtenemos dos invariantes para cada posible η vía la acción coadjunta de *Vir*: uno es la matriz M que satisface la relación de monodromía y el otro es el grado de η (es decir, la cantidad de vueltas que da alrededor de S^1 entre 0 y 2π, también llamado su winding number). En efecto, el grado de η es invariante por esta acción de Virasoro porque al componer con un difeomorfismo (que preserva la orientación) tenemos

$$\deg(\eta \circ \widehat{\varphi}) = \deg(\eta)\deg(\widehat{\varphi}) = \deg(\eta)$$

pues $\widehat{\varphi}$ es un difeomorfismo entre $[0, 2\pi]$ y $[\widehat{\varphi}(0), \widehat{\varphi}(2\pi)]$. Estos dos invariantes además clasifican completamente las órbitas coadjuntas por lo que estas órbitas se encuentran clasificadas por un parámetro continuo (la clase de conjugación de la matriz M en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$) y uno discreto (el winding number de η). Notemos que vía la elección de $\eta' < 0$ logramos que el winding number sea un parámetro positivo. □

El teorema anterior puede interpretarse de la siguiente manera. Consideremos la matriz de monodromía de un punto en el hiperplano seleccionado. Esta matriz de monodromía define una clase de conjugación de matrices en $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ y esta clase de conjugación puede levantarse a una clase de conjugación en el revestimiento universal $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$. En efecto, dada una matriz fundamental para la ecuación diferencial que representa el punto en cuestión, podemos considerar esta matriz como un lazo en $SL(2, \mathbb{R})$ y este lazo puede ser levantado al único elemento del revestimiento universal tal que en 0 sea la identidad. Es decir, un par de soluciones (f, g) linealmente independientes nos arroja el único elemento del revestimiento universal

$$\begin{pmatrix} f(\theta) & g(\theta) \\ f'(\theta) & g'(\theta) \end{pmatrix}$$

tal que al evaluarlo en $\theta = 0$ obtenemos la matriz identidad. La elección de $W > 0$ que hicimos durante la demostración que nos permitió obtener la unicidad en la clasificación con únicamente morfismos de grado positivo nos dice que los levantados al revestimiento que debemos considerar son solo aquellos que se encuentran en "la mitad"de $\widetilde{SL}(2,\mathbb{R})$. Tampoco podemos obtener el camino constante en la identidad vía esta identificación, por lo que podemos decir que el espacio que clasifica las órbitas coadjuntas en el hiperplano $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) : a = a_0\}$ del grupo de Virasoro, es el de clases de conjugación de matrices en el espacio $(\widetilde{SL}(2,\mathbb{R}) - \{id\})/\mathbb{Z}_2$. Debido al teorema de dependencia suave de las soluciones a una ecuación diferencial con respecto a los parámetros de la misma obtenemos el siguiente corolario que será fundamental a la hora de explorar la estructura bihamiltoniana de la ecuación de Korteweg de Vries. La demostración completa del corolario, sin embargo, requiere de algún desarrollo de teoría de deformaciones que escapa a los límites de esta tesis. Para ver los detalles sobre la demostración ver [Kh-Ov].

Corolario 5.11. *La codimensión de la órbita por un punto $a\partial_\theta^2 + u(\theta)$ en el hiperplano $\{a\partial_\theta^2 + u(\theta) : a = a_0\}$ es igual a la codimensión de la clase de conjugación de su matriz de monodromía en $SL(2,\mathbb{R})$.*

Integrabilidad de la ecuación de Korteweg de Vries

En esta sección aplicaremos el esquema de Lenard Magri descripto en el Capítulo 3 a la ecuación de Korteweg de Vries. Recordemos que esta ecuación presenta estructura bihamiltoniana con respecto a los corchetes de Kostant Kirillov y al constante en el punto $(\frac{1}{2}(d\theta)^2, 0)$ por lo que resta encontrar la función de Casimir asociada a cada combinación lineal de estos corchetes para poder ejecutar el método.

Observación 5.12. Como ya dijimos, las integrales que arroja el esquema de Lenard Magri dependen de los corchetes de Poisson elegidos pero también de la función de Casimir que utilicemos. En este caso, como las órbitas de la acción coadjunta en el hiperplano $\{\frac{1}{2}\partial_\theta^2 + u(\theta)\}$ tienen codimensión 1 hay una única elección salvo multiplicación por una constante para una función de Casimir. Esto nos dice que el esquema está unívocamente determinado por los corchetes que brindan la estructura bihamiltoniana.

Proposición 5.13. *Sea M_λ la matriz de monodromía asociada al operador $\partial_\theta^2 + u(\theta) - \lambda^2$. Entonces la función*

$$h_\lambda(\partial_\theta^2 + u(\theta)) = log(tr(M_\lambda))$$

es una función de Casimir para el corchete $\{\ ,\ \}_\lambda = \{\ ,\ \} + \lambda^2\{\ ,\ \}_0$ donde $\{\ ,\}$ es el corchete usual de Kostant Kirillov en vir^* y $\{\ ,\ \}_0$ es el constante asociado al punto $m_0 = (\frac{1}{2}(d\theta)^2, 0)$.

Demostración. Como la clase de conjugación de la matriz de monodromía es invariante por la acción del grupo de Virasoro, entonces la traza de la matriz de monodromía también lo es y luego lo son las funciones h_λ. Como estas funciones son constantes sobre las órbitas de esta acción, por la proposición 3.25 tenemos que las h_λ son funciones de Casimir para el corchete de Kostant Kirillov. Pero además toda función de Casimir para el corchete de Kostant Kirillov resulta de Casimir para el corchete $\{\, ,\, \}_0$ y luego para el corchete $\{\, ,\, \}_\lambda$. □

El motivo para elegir la parametrización de los corchetes dada por $\{\, ,\, \}_\lambda = \{\, ,\, \} + \lambda^2\{\, ,\, \}_0$ es simplemente que las integrales h_i que obtengamos mediante el esquema de Lenard-Magri resulten más sencillas. El método arroja entonces integrales de la ecuación de Korteweg de Vries expandiendo en serie de potencias la función h_λ y como puede verse en [Z], [Kh] o [Ba] las primeras de estas integrales son

$$h_1 = \frac{1}{2}\int_{S^1} u d\theta, \quad h_2 = 0, \quad h_3 = \frac{1}{8}\int_{S^1} u^2 d\theta, \quad h_4 = 0, \quad h_5 = \frac{1}{16}\int_{S^1}(u^3 - \frac{1}{2}(u')^2)d\theta, \ldots$$

mientras que las demás pueden calcularse haciendo uso del método descrito en 3.34.

El caso de métricas degeneradas

Para terminar el capítulo, abordaremos el caso dado por la métrica $H_{0,1}$, que, al poseer $\alpha = 0$, no define una métrica de Riemann en el grupo de Virasoro. Por una cuestión de espacio, daremos únicamente las ideas generales con las cuales se sigue el tratamiento de este caso y aquel que esté interesado en conocer los detalles puede recurrir a [Kh M]. En esencia, reemplazaremos el grupo de Virasoro por un espacio homogéneo al cual nuestra métrica descienda de un modo no degenerado. Para comprender esto damos primero unos preliminares en espacios homogéneos: el tratamiento sobre este tema está extraido esencialmente de [W] (donde está explicado el caso finito dimensional), aunque otras buenas referencias son [B] y [ON].

Definición 5.14. Decimos que una variedad M es un espacio homogéneo asociado a un grupo de Lie G si se tiene una acción $G \curvearrowright M$ transitiva tal que el mapa

$$\eta : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$$

se correstringe a un mapa

$$\eta : G \longrightarrow \mathrm{Diff}(M)$$

Es decir, $\eta(g) \in \mathrm{Diff}(M)$ para todo $g \in G$.

Observación 5.15. Sea $m_0 \in M$ y sea $H = \{\sigma \in G : \eta(\sigma)(m_0) = m_0\}$ el subgrupo de isotropía de G en m_0; H es un subgrupo cerrado de G. Notemos que se tiene un mapa bien definido

$$\begin{aligned}\beta : & G/H \longrightarrow M \\ & \sigma H \longmapsto \eta(\sigma)(m_0)\end{aligned}$$

Este mapa se puede utilizar para transferir la estructura de variedad (y de espacio homogéneo) de M al conjunto de coclases G/H. Nos interesaría que esa estructura fuera compatible con la estructura algebraica subyacente a la definición de G/H como un cociente: nos interesa que la proyección resulte una submersión y que la acción de G en G/H sea C^∞. Ambas cosas se satisfacen para esta estructura (y además es la única que lo hace) como lo indica el siguiente teorema.

Teorema 5.16. *Sea H un subgrupo cerrado de un grupo de Lie G que además es una subvariedad split y sea G/H el conjunto de coclases de G módulo H a izquierda. Sea $\pi : G \longrightarrow G/H$ la proyección natural con $\pi(\sigma) = \sigma H$. Entonces existe una única estructura de variedad en G/H que satisface simultáneamente:*

- *π es C^∞.*
- *para cada $\sigma H \in G/H$ existe un entorno W y un mapa C^∞ que llamamos $\tau : W \longrightarrow G$ tal que $\pi \circ \tau = id$.*

Como dijimos, esta estructura es la que podemos obtener si H es el subgrupo de isotropía de una variedad homogénea y utilizamos el mapa β que definimos anteriormente para trasladar la estructura diferenciable. Eso queda evidenciado en el siguiente teorema.

Teorema 5.17. *Sea $\eta : G \times M \longrightarrow M$ una acción transitiva de un grupo de Lie G en una variedad M homogénea. Sea H el subgrupo de isotropía de G en un punto $m_0 \in M$. Entonces el mapa*

$$\begin{aligned} \beta :& G/H \longrightarrow M \\ & \sigma H \longmapsto \eta(\sigma)(m_0) \end{aligned}$$

es un difeomorfismo entre G/H con su estructura natural de variedad y M.

Podemos encontrar demostraciones de los teoremas anteriores en el libro [W]. En conjunto, estos teoremas nos brindan una nueva descripción de los espacios homogéneos. Sea G un grupo de Lie y H un subgrupo cerrado. Entonces es claro que tenemos una acción transitiva y de clase C^∞ dada por

$$\begin{aligned} \eta :& G \times G/H \longrightarrow G/H \\ & (\sigma, \tau H) \longmapsto \sigma\tau H \end{aligned}$$

que hace de G/H un espacio homogéneo. Como además vimos, dada una variedad M con estructura de espacio homogéneo, esta es difeomorfa a un conjunto de coclases G/H con su estructura natural de variedad. Estas dos construcciones nos dan una correspondencia

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Espacios homogéneos sobre} \\ \text{un grupo de Lie } G \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Variedades de coclases a izquierda} \\ \text{módulo un subgrupo cerrado } H \leq G \end{array} \right\}$$

por lo que podemos definir un espacio homogéneo de forma alternativa como una variedad de la forma G/H con H un subgrupo cerrado de G y la única estructura diferenciable que hace de la proyección una submersión diferenciable con secciones locales.

Definición 5.18. Decimos que un espacio homogéneo de la forma G/H es reductivo si existe un complemento cerrado al álgebra de lie $\mathfrak{h} = Lie(H)$ en $\mathfrak{g}$ que además es Ad_H-invariante. A un tal complemento lo llamamos espacio de Lie de G/H y hay un isomorfismo canónico entre los espacios tangentes a G/H y su espacio de Lie que viene dado por la traslación a izquierda de coclases.

La primera pregunta que debemos hacernos es cuál es la definición correcta de una métrica en un espacio de coclases de la forma G/K. Para eso será de ayuda la definición de arriba. No estaremos interesados en cualquier métrica, sino en aquellas que son invariantes por la acción de G sobre el espacio homogéneo G/K. La definición que nos interesaría que funcionara es la usual para una métrica cociente:

$$\langle g_1 + K, g_2 + K\rangle := \text{ínf}_{k_1,k_2\in\mathfrak{K}}\langle g_1 + k_1, g_2 + k_2\rangle,$$

donde $\mathfrak{K}$ es el álgebra de Lie de K, g_1 y g_2 son elementos de $\mathfrak{g}$, y la métrica utilizada en la derecha de la igualdad es la que tenemos en G.

La siguiente pregunta que debemos hacernos sobre las métricas en G es cuándo podemos afirmar que una métrica en G desciende vía la definición de arriba a una en G/K. Sea entonces G un grupo de Lie y consideremos una métrica degenerada sobre G invariante a izquierda. El núcleo de nuestra métrica es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ y luego es integrable[1] a un subgrupo de G que llamaremos K. Podemos considerar entonces el espacio de coclases G/K, siempre que K resulte un subgrupo cerrado y split de G. En un principio, uno estaría tentado a afirmar que la métrica inducida en el espacio G/K debería ser no degenerada. El primer problema que encontramos es que no toda métrica invariante a izquierda desciende a este cociente como veremos con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.19. Consideramos el grupo de Lie $SO(3)$. Sea $\mathfrak{so}(3)$ su álgebra de Lie y consideremos el operador de inercia dado por

$$A : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \alpha a_1 & \beta a_2 \\ -\alpha a_1 & 0 & 0 \\ -\beta a_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Este operador define una métrica degenerada sobre $SO(3)$ y su núcleo es el subgrupo generado por el elemento $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\mathfrak{so}(3)$. Para hallar el subgrupo calculamos e^{Bt} con B el generador del núcleo de la métrica. Este cálculo arroja la matriz

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & \text{sen}(t) \\ 0 & -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

[1]Si bien no todas las álgebras de Lie son integrables en dimensión infinita, aquellas que son subálgebras de un álgebra integrable lo son. Para ver una demostración ir a [B], corolario 3.33.

y luego el grupo buscado es S^1. Notemos que la métrica que induce A no desciende a una métrica en $\mathfrak{so}(3)/\mathbb{R}$ si $\alpha \neq \beta$. En efecto, si ese es el caso, tomamos la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y consideramos su órbita adjunta por la acción de S^1. Un simple cálculo nos muestra que $Ad_{S^1}(C)$ contiene a C y a la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero entonces la métrica inducida por A en el espacio de coclases debería satisfacer

$$\alpha = \langle [C], [C] \rangle_A = \langle [E \cdot C], [E \cdot C] \rangle_A = \langle [D], [D] \rangle_A = \beta$$

donde los corchetes indican clase en el cociente $\mathfrak{so}(3)/\mathbb{R}$ y la matriz E es la matriz en S^1 que satisface $ECE^{-1} = D$, es decir

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como habíamos supuesto que $\alpha \neq \beta$, obtenemos un absurdo.

Proposición 5.20. *Sea G/H un espacio homogéneo reductivo y $\mathfrak{m}$ su espacio de Lie. Entonces hay una correspondencia uno a uno entre productos escalares en $\mathfrak{m}$ que son Ad_H-invariantes y métricas $G-$invariantes en G/H.*

Demostración. Sea $\pi : G \longrightarrow G/H$ la proyección natural y sea τ_h la multiplicación a izquierda por un elemento $h \in H$ en G/H. Notemos primero que $\tau_h \circ \pi = \pi \circ C_h$, donde C_h es la conjugación por h como automorfismo de G. Diferenciando esa última igualdad llegamos a $d\tau_h \circ d\pi = d\pi \circ Ad_h$ y notemos que esta igualdad tiene sentido vista en $\mathfrak{m}$ pues $Ad_h(\mathfrak{m}) \subseteq \mathfrak{m}$. Fijemos a $d\pi$ como la identificación canónica entre $T_1(G/H)$ y $\mathfrak{m}$, de modo que bajo esta identificación vemos a $d\tau_h$ como la acción adjunta Ad_h. Bajo esta identificación, todo producto interno en $\mathfrak{m}$ que sea Ad_H invariante se extiende vía traslación a izquierda a una métrica en G/H que resulta invariante por la acción de G por traslaciones. Por otro lado, toda métrica invariante por la acción de G en G/H tiene a las traslaciones $d\tau_h$ como isometrías lineales y como estamos requiriendo a la identificación $d\pi$ como una isometría lineal, resulta que los morfismos lineales Ad_h son isometrías de la métrica y luego la métrica en $\mathfrak{m}$ es Ad_H invariante. $\square$

El siguiente teorema nos dice precisamente cuál es la condición que debe satisfacer una métrica para descender al espacio de coclases.

Teorema 5.21. *Supongamos que G/K es reductivo y G tiene una métrica invariante a izquierda. Si la forma cuadrática $E(v) = \langle v\,;\,v\rangle$ en $\mathfrak{g}$ satisface $ker(E) \subseteq Lie(K) = \mathfrak{k}$ y además, la métrica es $ad-$invariante, es decir:*

$$\langle ad_w u, v\rangle = -\langle u, (ad_w v)\rangle,$$

para todo $u, v \in \mathfrak{g}$ y $w \in \mathfrak{K}$, entonces la métrica invariante a izquierda $\langle\,;\,\rangle$ en el grupo G desciende al espacio homogéneo G/K.

Observación 5.22. La propiedad de $ad-$invariancia puede leerse en términos de la acción adjunta del grupo. En ese caso, la propiedad que debe satisfacer la métrica es

$$\langle Ad_k u, Ad_k v\rangle = \langle u, v\rangle,$$

para todo elemento $k \in K$. En efecto, estas dos condiciones son equivalentes pues si se satisface

$$\langle Ad_{k(t)} u, Ad_{k(t)} v\rangle = \langle u, v\rangle,$$

para una curva $k(t)$ en K con $k(0) = 1_K$ y $k'(0) = w$, derivando la igualdad con respecto de t en $t = 0$, obtenemos

$$\langle ad_w u, Av\rangle = -\langle u, A(ad_w v)\rangle,$$

para todo $u, v \in \mathfrak{g}$ y $w \in \mathfrak{K}$. Mientras que si se satisface la $ad-$invariancia entonces considerando una curva $k(t)$ en K con $k(0) = 1_K$ y su correspondiente curva $k'(t) = w(t)$ en $\mathfrak{K}$ (vía traslación a izquierda) podemos integrar la igualdad de arriba para obtener

$$\langle Ad_{k(t)} u, Ad_{k(t)} v\rangle = cte = \langle Ad_{k(0)} u, Ad_{k(0)} v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Esto último prueba que se satisface la condición de $Ad-$invariancia y luego, que ambas condiciones son equivalentes.
Notemos también que la condición de invariancia en el álgebra de Lie no es más que pedirle a los operadores ad_w con $w \in \mathfrak{K}$ que sean antiadjuntos con respecto a la métrica de G.

Demostración. La buena definición de la métrica cociente es inmediata y la invariancia por la acción de G es consecuencia de la Proposición 5.20. Resta probar únicamente que la métrica inducida en G/K resulta no degenerada, pero esto es inmediato de la cadena de desigualdades:

$$\langle g_1 + \mathfrak{K}, g_1 + \mathfrak{K}\rangle = \text{ínf}_{k_1,k_2\in\mathfrak{K}}\langle g_1 + k_1, g_1 + k_2\rangle \geq \langle g_1, g_1\rangle > 0$$

que se da si g_1 no está en $\mathfrak{K}$. □

Comenzamos esta sección refiriéndonos a la métrica $H_{0,1}$ que resulta degenerada. A continuación, explicaremos cómo utilizar la teoría desarrollada para estudiar este caso. Notemos que el subespacio de *vir* que se corresponde con el núcleo de la forma cuadrática

$$E(v\partial_\theta, b) = \langle (v\partial_\theta, b), (v\partial_\theta, b)\rangle_{H_{0,1}} = \int_{S^1} (v')^2 + b^2,$$

no es otro que el de los vectores constantes de la forma $(v\partial_\theta, 0)$, donde v es una función constante en S^1. Estos campos de vectores se integran a un subgrupo de Vir, que se corresponde con las rotaciones de $S1$ y al cual notaremos $Rot(S^1)$. Con un trabajo similar al realizado anteriormente en este capítulo, se puede encontrar la forma de la ecuación de Euler en $Vir/Rot(S^1)$. En este caso la ecuación es la famosa ecuación de Hunter-Saxton

$$v_{t\theta\theta} = -2v_\theta v_{\theta\theta} - vv_{\theta\theta\theta},$$

que está bien definida como ecuación en $Vir/Rot(S^1)$. Esta ecuación es de importancia para el estudio de cristales líquidos en física y posee propiedades interesantes de integrabilidad, al igual que la de Korteweg de Vries. Para ver más detalles sobre la deducción de la ecuación de Hunter Saxton como ecuación de Euler en el espacio homogéneo $Vir/Rot(S^1)$, ver [Kh M].

Capítulo 6

El método de Euler-Arnold en grupoides de Lie

Arribamos al capítulo final de la tesis. En este capítulo implementaremos las ideas ya desarrolladas para tratar de describir las ecuaciones de Euler desde un ángulo más general. Siguiendo la reciente publicación de Khesin [Kh I] estudiaremos métricas sobre un algebroide conformado por una extensión del algebroide de campos discontinuos sobre S^1. La intención es generalizar nuestros estudios sobre métricas invariantes en el álgebra de Virasoro de modo tal de poder incluir ecuaciones geodésicas que describan fluidos discontinuos. Para el caso del grupo $\mathrm{SDiff}(M)$ con M una variedad compacta esto ya ha sido logrado. El método sigue los siguientes pasos: primero se busca un grupoide que describa el espacio de configuraciones del fluido con discontinuidades que se pretende analizar, luego se estudian las métricas que pueden definirse en él y finalmente se estudia la ecuación de Euler-Arnold para esta métrica. En un principio repetir este procedimiento implica la obtención de un algebroide de tipo Virasoro y un grupoide que se le corresponda. Para el algebroide esto se logra sin mayores dificultades obteniendo un posible algebroide de Virasoro. Este algebroide es naturalmente una extensión por $\mathbb{R}$ de un algebroide de campos de vectores en S^1. El grupoide sin embargo, no queda claro que pueda obtenerse aunque la existencia de un grupoide que integre dicho algebroide se ha podido reducir a una pregunta sobre los periodos del cociclo de Gelfand Fuchs.

Grupoides de Lie

Definición 6.1. Un grupoide consiste de

- Dos conjuntos G y M que los llamamos flechas y objetos respectivamente.
- Dos funciones $s : G \longrightarrow M$ y $t : G \longrightarrow M$.
- Una multiplicación $m : G \underset{M}{\times} G \longrightarrow G$ asociativa con neutros e inversa. El producto debe entenderse como fibrado sobre los mapas s y t, es decir g es componible con h si $t(h) = s(g)$.

Si G, M son variedades, s y t son submersiones y las funciones m, i, e_g dadas por la multiplicación, inversión y los neutros son suaves entonces decimos que $G \rightrightarrows M$ es un grupoide de Lie. Comunmente se hace la siguiente salvedad: a la variedad de flechas G se le permite no ser Hausdorff.

Ejemplo 6.2. Todo grupo de Lie es un grupoide de Lie con variedad de base dada por un punto. Toda variedad es un grupoide de Lie si consideramos sobre ella únicamente las flechas de identidad.

Ejemplo 6.3. $M \times M \rightrightarrows M$ es un grupoide de Lie con las proyecciones como mapas de s y t y la multiplicación dada por $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$. A este grupoide se lo conoce como grupoide par.

Observación 6.4. Dado un grupoide $G \rightrightarrows M$ y un punto $x \in M$ tenemos un grupo de Lie dado por $s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x) = G_x$ que llamamos grupo de isotropía.

Los grupoides de Lie son objetos más generales que los grupos de Lie: basta considerar M como una variedad trivial de un único punto y obtenemos un grupo de Lie. Así como los grupos nos referían a simetrías sobre un objeto, los grupoides pueden referirnos a simetrías que varían continuamente sobre una familia de objetos. El contexto en el que surgen los grupoides de Lie de manera más natural es en el estudio de fibrados y las simetrías que estos poseen, aunque actualmente son también muy estudiados por su conexión con la geometría de Poisson y teorías de quantización.

A continuación trataremos de motivar la presentación de esta generalización de los grupos de Lie en el contexto de la teoría de Arnold. Como ya hemos establecido, el teorema de Arnold permite estudiar las geodésicas en grupos de difeomorfismos. Cuando nos enfocamos en el caso del grupo de difeomorfismos que preservan el volumen de una variedad compacta, Arnold ya explicó en [Ar2], cómo puede utilizarse este método para describir la evolución de un fluido incompresible confinado en la variedad en cuestión. En efecto, el grupo $\mathrm{SDiff}(M)$ es en ese caso el espacio de configuraciones del fluido. En [Kh I], se propone una descripción similar para espacios de configuraciones de fluidos discontinuos. Ejemplos de fluidos discontinuos pueden encontrarse en la vida cotidiana, como por ejemplo cuando un barco navega a altas velocidades por aguas calmas generando una discontinuidad en la superficie del agua al alejarse. Estudiar los espacios de configuraciones de estos fluidos y las geodésicas en estos espacios puede hacerse mediante el método de Arnold aunque debe adaptarse la teoría pues, para estos sistemas físicos, el espacio de configuraciones no es un grupo sino un grupoide. El resto de este capítulo debe ser leído con esta generalización de la teoría de Arnold en mente.

Algebroides de Lie

La contracara infinitesimal de un grupoide de Lie es llamada algebroide de Lie. Los teoremas de Lie se generalizan al contexto de grupoides y algebroides sin demasiada dificultad permitiéndonos extender la mayoría de las técnicas de la teoría de Lie. Comenzaremos con la definición.

Definición 6.5. Un algebroide de Lie $A \Rightarrow M$ es un fibrado vectorial $A \to M$ equipado con

- Un morfismo de fibrados vectoriales $\rho : A \longrightarrow TM$ que llamamos ancla.
- Un corchete de Lie $[\ ,\ ]$ en las secciones del fibrado $\Gamma(A)$ que satisface

$$[a\,,\,f\cdot b] = f[a\,,b] + (\mathcal{L}_{\rho(a)}f)b$$

  para todas las secciones $a, b \in \Gamma(A)$ y $f \in C^\infty(M)$. A esta propiedad de compatibilidad entre el ancla y el corchete de Lie la llamamos regla de Leibniz.

Observación 6.6. De la regla de Leibniz es fácil deducir que $\rho([a\,,\,b]) = [\rho(a)\,,\,\rho(b)]$.

Observación 6.7. Dado un punto $x \in M$ el núcleo del ancla en la fibra sobre x forma un álgebra de Lie que notamos $\mathfrak{g}_x$. Este álgebra es el álgebra de Lie del grupo de isotropía sobre x siempre que el algebroide se corresponda con un grupoide. Más aún, todo fibrado sobre una variedad M de álgebras de Lie puede identificarse de este modo con un algebroide de Lie cuyo ancla es el morfismo nulo.

Describiremos a continuación la construcción del algebroide de Lie asociado a un grupoide de Lie dado $G \rightrightarrows M$. Notemos que hay una inmersión canónica $u : M \longrightarrow G$ dado por las unidades de G (los elementos neutros sobre cada punto de M). Sea

$$ds|_M : TG|_M \longrightarrow TM$$

la diferencial del mapa s restringida a la inclusión de M en G. Llamamos $A = \ker(ds|_M)$ que es un fibrado vectorial sobre M. Asociamos a este fibrado el ancla

$$\begin{aligned} \rho :& A \longrightarrow TM \\ & a \longmapsto dt(a). \end{aligned}$$

Ahora nos falta encontrar un corchete de Lie en las secciones de nuestro fibrado que sea compatible con el ancla. Al igual que con los grupos de Lie, en un grupoide poseemos mapas de traslación a izquierda y a derecha (aunque no pueden aplicarse sobre todos los elementos de G). Usaremos estas traslaciones a derecha para identificar el espacio de secciones de nuestro algebroide con campos de vectores en G invariantes a derecha. En efecto, dado un $g \in G$ sean $s(g) = x$ y $t(g) = y$. Sea $R_g : s^{-1}(y) \longrightarrow s^{-1}(x)$ la traslación a derecha. Notemos que la fibra de nuestro algebroide A sobre el punto $y \in M$ se identifica con $T^s_{u(y)}(G)$. Notamos $T^sG = \ker(ds) \subseteq TG$ al fibrado tangente a las s-fibras. Definimos los campos de vectores en G invariantes a derecha como:

$$\mathfrak{X}_{inv}(G) = \{X \in \Gamma(T^sG) / X_{hg} = d_hR_g(X_h)\}.$$

Finalmente, tenemos una identificación natural

$$\begin{aligned} &\Gamma(A) \approx \mathfrak{X}_{inv}(G) \\ &\quad a \mapsto \widetilde{a} \qquad \text{tal que } \widetilde{a}|_g = d_{u(t(g))}R_g(a(t(g))). \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de grupos, los campos invariantes a derecha conforman una subálgebra de los campos en G y luego $\Gamma(A)$ hereda un corchete de Lie (que no es más que el corchete de campos de vectores). Al algebroide $A \Rightarrow M$ así construido lo llamamos algebroide asociado al grupoide $G \rightrightarrows M$.

Un problema central en la teoría de Lie es el de la integrabilidad. En el caso de álgebras de Lie el tercer teorema de Lie afirma que todas las álgebras de lie de dimensión finita se integran a un único (salvo isomorfismo) grupo de Lie simplemente conexo G. En el caso de álgebras de Lie de dimensión infinita y de algebroides de Lie es un poco diferente y hay algebroides que no se pueden realizar como el algebroide asociado a un grupoide de Lie. La noción con la que debemos reemplazar la simple conexión del grupo que integra para obtener unicidad es la de s-simple conexión. Decimos que un grupoide $G \rightrightarrows M$ es s-simplemente conexo si $s^{-1}(x)$ es simplemente conexo para todo $x \in M$. Ajustándonos a este nuevo concepto encontramos que la unicidad del tercer teorema de Lie se mantiene para el caso de algebroides y grupoides: el único problema son las obstrucciones que puedan haber para lograr que exista algún grupoide que lo integra. Estas obstrucciones pueden describirse completamente haciendo uso de los grupos de monodromía del algebroide y el teorema de Crainic y Fernandes se encarga de describirlas: un algebroide es integrable si y solo si todos sus grupos de monodromía son localmente uniformemente discretos. Debido a que no es nuestro objetivo discutir los problemas de integrabilidad de algebroides ni las generalizaciones de los teoremas de Lie no profundizaremos sobre estos grupos de monodromía ni sobre el teorema de Crainic Fernandes. Para más información sobre este teorema y una introducción detallada a la teoría de grupoides y algebroides de Lie recomendamos [CF].

Antes de terminar la sección daremos una relación entre los algebroides de Lie y la geometría de Poisson. Así como las álgebras de Lie están en biyección con las estructuras de Poisson lineales los algebroides se encuentran en una tal relación con los llamados fibrados vectoriales Poisson. Tenemos la definición:

Definición 6.8. Un fibrado vectorial Poisson es un fibrado vectorial $E \to B$ dotado con un corchete de Poisson lineal en cada fibra, es decir, un corchete tal que si dos funciones son lineales en cada fibra, entonces su corchete también lo es.

Enunciamos sin demostración la relación que más nos interesará entre algebroides de Lie y fibrados de Poisson.

Proposición 6.9. *El fibrado dual de un algebroide de Lie cuyas fibras son espacios vectoriales **reflexivos** $A^* \Rightarrow B$ recibe una estructura natural de fibrado vectorial de Poisson, que queda unívocamente determinada por las relaciones*

$$\{\eta, \xi\} = [\eta, \xi] \quad \{\eta, f\} = L_{\rho(\eta)}(f)$$

para η, ξ lineales en cada fibra y f constante en cada fibra.

La estructura de fibrado de Poisson que nos brindan los algebroides de Lie es enteramente análoga a la de Kostant Kirillov. El motivo por el que nos resultará de interés más adelante será el de estudiar las ecuaciones de Euler-Arnold en un grupoide de Lie: estas ecuaciones eran hamiltonianas con respecto al corchete de Poisson de Kostant Kirillov y esa relación nos motiva a estudiar esta estructura de fibrado vectorial de Poisson.

Las ecuaciones de Euler-Arnold en algebroides de Lie

En esta sección trataremos de sentar las bases del método de Euler Arnold para el estudio de geodésicas en un grupoide de Lie. Mucha de la teoría que hemos desarrollado es fácilmente generalizable para este nuevo contexto: la principal diferencia se encuentra en el teorema de Arnold, el cual no podemos generalizar de un modo claro ante la ausencia de una acción coadjunta bien definida para algebroides de Lie (en esta teoría, la representación coadjunta es una representación a menos de homotopía). Existen sin embargo resultados en esta dirección para un cierto grupoide (no generales) y que permiten escribir las ecuaciones de Euler de un modo explícito y ver que resultan hamiltonianas. Comenzaremos dando las principales definiciones.

Definición 6.10. Sea $A \Longrightarrow B$ un algebroide de Lie y sea A^* el fibrado dual suave (al igual que en el caso de álgebras de Lie tenemos que apelar a un dual suave para preservar la estructura de Fréchet en general). Llamamos a $\mathcal{I} : A \longrightarrow A^*$ un operador de inercia si es un morfismo de fibrados inversible. Un operador de inercia define una métrica en A dada por

$$\langle u, v\rangle_A = \langle \mathcal{I}(u), v\rangle$$

para todo par u, v en la misma fibra del algebroide $A \Longrightarrow B$. De igual modo, el operador de inercia define una métrica en A^* debido a que es inversible. Tenemos entonces una función $\mathcal{H} \in C^\infty(A^*)$ dada por

$$\mathcal{H}(\xi) = \frac{1}{2}\langle \xi, \xi\rangle_{A^*} \qquad \forall \xi \in A^*.$$

Esta función recibe el nombre de función hamiltoniana asociada al operador de inercia $\mathcal{I}$.

Definición 6.11. Llamamos ecuación de Euler-Arnold de grupoides asociada a la métrica $\langle\, ,\, \rangle_A$ a la ecuación de Hamilton asociada a la estructura de Poisson canónica en A^* y la función $\mathcal{H}$.

La definición anterior está motivada en el teorema de Euler-Arnold que nos garantiza que la ecuación de Euler que describe el movimiento de geodésicas en un grupo de Lie sea la ecuación de Hamilton vinculada a la estructura de Kostant-Kirillov y a la función H.

Observación 6.12. En el caso en que el algebroide A esté asociado a un grupoide de Lie G podemos interpretar esta ecuación como un sistema dinámico que describe la evolución de geodésicas en el grupoide G. Recordemos que la fibra de A sobre un punto x de la base es el espacio tangente a $s^{-1}(x) \subseteq G$ en el punto id_x. Al igual que en el caso de grupos y álgebras, si tenemos una métrica en A tenemos una en cada espacio tangente $T_{id_x} s^{-1}(x)$ y luego podemos usar traslaciones a izquierda para obtener una métrica en todas las s-fibras de G, que son de la forma $s^{-1}(x)$. En efecto, definimos

$$\langle u, v\rangle_g = \langle l^*_{g^{-1}}(u), l^*_{g^{-1}}(v)\rangle_{id_x} = \langle l^*_{g^{-1}}(u), l^*_{g^{-1}}(v)\rangle_A,$$

donde $s(g) = x$ y el producto interno se puede calcular sobre todo par de vectores $u, v \in T_g(s^{-1}(x))$. Esta métrica nos brinda una noción de geodésicas en cada s-fibra de G y el flujo geodésico induce un sistema dinámico en el tangente $T_{id_x}(s^{-1}(x))$. Las soluciones a este sistema dinámico (que llamamos ecuación de Euler) descienden a soluciones de la ecuación de Euler-Arnold. La demostración de este hecho consiste en observar que la unión de los espacios cotangentes a las s-fibras de G es una variedad simpléctica con una acción de G a derecha y que al tomar el cociente por esta acción el teorema de Mardsen-Weinstein nos dice que la ecuación de Euler en el grupoide desciende a una en la variedad de Poisson reducida: esta reducción hamiltoniona arroja el espacio A^* con la estructura de Kostant Kirillov y las soluciones a la ecuación de Euler se corresponden vía este método a soluciones de la ecuación de Euler-Arnold de grupoides. Para más detalle ver [Kh I].

Extensiones de algebroides de Lie

En esta sección cubriremos la teoría necesaria sobre extensiones de algebroides de Lie. Al igual que en el caso de grupos y álgebras, las extensiones están dadas por cociclos en el algebroide. La generalización de la teoría de extensiones a este nuevo contexto es bastante lineal y las demostraciones siguen en general los mismos pasos. Nos limitaremos sin embargo al caso particular de extensiones de rango 1 pues estas han sido estudiadas en detalle por Marius Crainic en [C]. El motivo por el que estas extensiones suelen ser interesantes es que permiten estudiar la teoría de fibrados S^1-principales sobre una variedad y así obtener teoremas generales sobre prequantización, aunque para nosotros la importancia que presentan radica en que nos interesa estudiar una extensión particular y es de este tipo. Estaremos principalmente enfocados en decidir cuándo un algebroide que extiende a uno dado es integrable. Nuestro punto de partida es la siguiente definición.

Definición 6.13. Sea $(A, \rho, [\ ,\ ])$ un algebroide de Lie sobre una variedad M. Una extensión de A por $\mathbb{R}$ es una sucesión exacta corta de algebroides sobre M

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_M \xrightarrow{i} \widetilde{A} \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

donde $\mathbb{R}_M$ es el fibrado trivial real sobre M visto como un fibrado de álgebras de Lie (y luego, como un algebroide con ancla nula). Decimos que esta extensión es central si $[i(1), \alpha] = 0$ para todo $\alpha \in \widetilde{A}$.

El siguiente paso es, naturalmente, dar una definición de cociclo para algebroides. Para eso consideramos el complejo de De Rham de algebroides asociado a A dado por $(C(A), d_A)$ donde $C^p(A)$ es el conjunto de funciones $C^\infty(M)$-multilineales alternadas que van de la potencia p-ésima tensorial de $\Gamma(A)$ en $C^\infty(M)$. Es decir,

$$c : \Gamma(A)^{\otimes p} \longrightarrow C^\infty(M) \qquad C^\infty(M)\text{-multilineal y alternada}$$

El diferencial lo definimos en p-cocadenas como

$$\begin{aligned} d_A(c)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} c([\alpha_i, \alpha_j], \alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_i}, \ldots, \widehat{\alpha_j}, \ldots, \alpha_{p+1}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} L_{\rho(\alpha_i)}(c(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_i}, \ldots, \alpha_{p+1})). \end{aligned}$$

De este modo un 2-cociclo va a ser un elemento $c \in C^2(A)$ que satisfaga $d_A(c) = 0$.

Proposición 6.14. *Todo 2-cociclo de algebroides en A induce una extensión central de A por $\mathbb{R}$.*

Demostración. Sea c un 2-cociclo en A. Comenzaremos definiendo el algebroide A_c que extiende a A. Como fibrado vectorial, tenemos que $A_c = A \oplus \mathbb{R}_M$ con el ancla $\rho : A_c :\longrightarrow TM$ dada por la composición entre el ancla de A y la proyección de A_c a A. Es claro que esta función es un morfismo de fibrados vectoriales pues lo es el ancla de A, por lo que resta probar que hay una estructura de Lie en las fibras de A_c que satisface Leibniz. Definimos el corchete en $\Gamma(A_c)$ vía la fórmula

$$[(X,f)\,,\,(Y,g)] = ([X\,,\,Y], L_{\rho(X)}(g) - L_{\rho(Y)}(f) + c(X,Y))$$

Este corchete satisface la identidad de Leibniz pues dada $h \in C^\infty(M)$ tenemos

$$\begin{aligned}
[(X,f)\,,\,h(Y,g)] &= ([X,hY], L_{\rho(X)}(hg) - L_{\rho(hY)}(f) + c(X,hY)) \\
&= (h[X,Y] + L_{\rho(X)}(h)Y, L_{\rho(X)}(h)g + L_{\rho(X)}(g)h - hL_{\rho(Y)}(f) + hc(X,Y)) \\
&= h([X,Y]\,,\,L_{\rho(X)}(g) - L_{\rho(Y)}(f) + c(X,Y)) + L_{\rho(X)}(h)(Y,g) \\
&= h[(X,f)\,,\,(Y,g)] + L_{\rho(X,f)}(h)(Y,g).
\end{aligned}$$

Resta probar que el corchete satisface la identidad de Jacobi. Para eso, un simple cómputo nos muestra que la suma cíclica de Jacobi toma la forma

$$\begin{aligned}
&[[(X,f)\,,\,(Y,g)]\,,\,(Z,h)] + [[(Z,h)\,,\,(X,f)]\,,\,(Y,g)] + [[(Y,g)\,,\,(Z,h)]\,,\,(X,f)] = \\
&([[X,Y],Z] + [[Z,XY],] + [[Y,Z],X]\ ,\ d_A c(X,Y,Z)) = (0\ ,\ d_A c(X,Y,Z))
\end{aligned}$$

que es constantemente cero únicamente cuando c es un cociclo. Esto prueba que A_c es un algebroide de Lie y como la extensión

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_M \xrightarrow{i} A_c \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

es exacta, obtenemos que es una extensión de A por $\mathbb{R}$. Para ver que es central basta notar que $[(0,1)\ ,\ (Y,g)] = 0$ para todo (Y,g) en A_c. □

El próximo paso será integrar un algebroide obtenido vía una extensión por un 2-cociclo a un grupoide de Lie. Ya han sido discutidos los problemas que se presentan a la hora de la integración de algebroides de Lie y es claro que no todo algebroide obtenido de este modo será integrable. Sin embargo, tenemos una descripción clara debido a Crainic de cuándo esto será posible. Previamente requerimos algunas definiciones.

Sea ahora c un 2-cociclo en un algebroide A sobre una variedad M que es el algebroide asociado a un grupoide de Lie G s-simplemente conexo. Utilizamos las traslaciones a derecha para definir una 2-forma en la s-fibra $s^{-1}(x)$, asociada a cada x en M, de la siguiente manera

$$\omega_c^x(X_g, Y_g) = c_y((dR)_{g^{-1}}(X_g, (dR)_{g^{-1}}(Y_g))$$

donde estamos usando la identificación entre la fibra A_x y el espacio tangente $T_{u(x)}s^{-1}(x)$. Esto nos permite definir los siguientes fibrados de grupos sobre M.

Definición 6.15. Llamamos grupo de periodos y grupo estructural del cociclo c en $x \in M$ a los grupos:

$$\mathcal{P}_x(c) = Per(\omega_c^x) \subseteq \mathbb{R}$$
$$\mathcal{S}_x(c) = \mathbb{R}/\mathcal{P}_x(c),$$

donde el grupo de periodos de una 2-forma ω en una variedad M está definido como el subgrupo de $\mathbb{R}$ consistente de todas las integrales de la forma $\int_d \omega$ con d un 2-ciclo en M. Notemos que variando $x \in M$ tenemos dos fibrados de grupos sobre M, que pueden no resultar suaves. A estos fibrados los llamamos fibrado de periodos y fibrado estructural de c respectivamente. Los notamos $\mathcal{P}(c)$ y $\mathcal{S}(c)$.

En un principio podríamos dotar a estos fibrados de varias estructuras diferenciables diferentes. Sin embargo, nos interesan las estructuras canónicas que reciben en relación al fibrado trivial $\mathbb{R}_M$. Decimos que $\mathcal{P}(c)$ es suave si lo es como subfibrado de $\mathbb{R}_M$ y que $\mathcal{S}(c)$ es suave si tiene estructura diferenciable de modo que la proyección

$$\pi : \mathbb{R}_M \longrightarrow \mathcal{S}(c)$$

resulta C^∞. Como veremos en el siguiente teorema, la suavidad de estos fibrados nos permite determinar la integrabilidad del algebroide A_c.

Teorema 6.16. *(Crainic) Si A es el algebroide de Lie asociado al grupoide de Lie s-simplemente conexo G, $c \in C^2(A)$ es un 2-cociclo y A_c la extensión asociada, entonces existe un grupoide topológico $G(A_c)$ y una extensión central de grupoides topológicos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}(c) \longrightarrow GA_c \xrightarrow{\pi} G \longrightarrow 0$$

y las siguientes condiciones son equivalentes:

1. *A_c es integrable.*
2. *$G(A_c)$ es suave.*
3. *$\mathcal{S}(c)$ es suave.*
4. *$\mathcal{P}(c)$ es suave.*

En cualquier caso $G(A_c)$ es el grupoide que integra a A_c.

El teorema anterior nos da un criterio para la integrabilidad de una extensión de algebroide por un 2-cociclo. Notemos que la extensión obtenida será de rango 1 aunque puede no obtenerse vía una extensión por $\mathbb{R}_M$ dependiendo del grupo de periodos de ω_c^x. En efecto, si este grupo es discreto obtenemos una extensión por el grupoide S^1_M.

Un algebroide de Virasoro

Nuestro objetivo ahora será brindar una generalización del álgebra de Virasoro al contexto de algebroides. Para lograr esto seguiremos el tratamiento de Khesin para obtener un grupoide que generalice el grupo de difeomorfismos que preservan el volumen de una variedad compacta. En el fondo, estamos construyendo grupoides de difeomorfismos discontinuos y estos grupoides tendrán como contraparte infinitesimal algebroides de campos de vectores discontinuos. Consideramos entonces el siguiente espacio que hará las veces de espacio base para nuestro algebroide.

Definición 6.17. Llamamos DS^1 al espacio de pares de puntos en S^1. Es decir:

$$DS^1 = S^1 \times S^1 - \Delta(S^1 \times S^1).$$

Notemos que el espacio DS^1 tiene estructura de variedad de dimensión finita pues es un abierto dentro de una variedad. Los puntos de DS^1 nos marcan las discontinuidades de nuestro campo de vectores, el cual consideraremos para simplicidad con únicamente dos discontinuidades (aunque puede estudiarse sin problemas el caso de finitas discontinuidades). A continuación el primer objeto de estudio:

Definición 6.18. Sea $\Gamma = \{x_1, x_2\} \in DS^1$. Notamos Γ^+ al arco de circunferencia cerrado que une x_1 con x_2 en el sentido antihorario y Γ^- al arco de circunferencia que une x_1 con x_2 en el otro sentido. Llamamos a v un campo de vectores en S^1 discontinuo sobre Γ si es de la forma $v = (f^+\chi_{\Gamma^+} + f^-\chi_{\Gamma^-})\partial_\theta$ donde f^+ y f^- son funciones diferenciables en S^1. Notamos $D\mathfrak{X}(S^1, \Gamma)$ al conjunto de estos campos de vectores.

Observación 6.19. Notemos que un campo de vectores discontinuo sobre Γ es C^∞ sobre $S^1 - \Gamma$ y que si $x \in \Gamma$ entonces $v(x) \in T_x(S^1)$. Es decir, v es una sección discontinua del fibrado tangente pero que es diferenciable sobre $S^1 - \Gamma$.

Definición 6.20. Llamamos espacio de campos de vectores discontinuos en S^1 al espacio $D\mathfrak{X}(S^1)$ dado por

$$D\mathfrak{X}(S^1) = \sqcup_{\Gamma \in DS^1} D\mathfrak{X}(S^1, \Gamma)$$

que recibe estructura de fibrado vectorial sobre la variedad DS^1.

Observación 6.21. Para dotar de estructura de algebroide de Lie a este fibrado vectorial debemos darle un ancla y un corchete de Lie entre sus secciones. Notemos que en cada fibra una sección no es más que un campo de vectores discontinuo sobre el punto base por lo que podemos extender el corchete de campos de vectores para obtener un corchete entre las secciones. Para brindarle un ancla al fibrado debemos primero preguntarnos cuál es el fibrado tangente a la base. Resulta que ese espacio tangente tiene una descripción muy sencilla.

Proposición 6.22. *El espacio tangente a DS^1 en un punto $\Gamma = \{x_1, x_2\}$ es isomorfo a $T_{x_1}(S^1) \times T_{x_2}S^2$. El fibrado tangente a DS^1 es un subfibrado $TS^1 \times TS^1$ como fibrado tangente a $S^1 \times S^1$.*

Demostración. Es solo notar que la variedad DS^1 es un abierto de la variedad $S^1 \times S^1$. □

Ahora estamos en condiciones de preguntarnos qué ancla podemos asignarle a nuestro fibrado vectorial. Para eso consideremos un elemento $v \in D\mathfrak{X}(S^1)$ y sean $\Gamma = \{x_1, x_2\}$ sus puntos de discontinuidad. Consideramos

$$\rho(v) = (v(x_1), v(x_2)) \in T_\Gamma DS^1$$

Entonces ρ es un morfismo de fibrados vectoriales que además sirve como ancla para dotar de estructura de algebroide de Lie a $D\mathfrak{X}(S^1)$. Por último, podemos preguntarnos qué corchete debemos asignarle a los campos de vectores discontinuos. Como se trata de campos de vectores tenemos un corchete natural dado por el corchete en cada parte diferenciable, es decir:

$$[U,V]^{\mathcal{R}}(\Gamma) = [u^+, v^+]\chi_{\Gamma^+} + [u^-, v^-]\chi_{\Gamma^-}$$

Lastimosamente este corchete no alcanza para hacer de $D\mathfrak{X}(S^1)$ un algebroide de Lie pues no es compatible con el ancla que hemos asignado. Sin embargo con la siguiente variante obtenemos la estructura deseada.

Proposición 6.23. *$(D\mathfrak{X}(S^1), \rho, [,])$ es un algebroide de Lie-Frechét, donde el corchete entre secciones está dado por*

$$[U,V](\Gamma) = [U,V]^{\mathcal{R}}(\Gamma) + \rho(U) \cdot V(\Gamma) - \rho(V) \cdot U(\Gamma)$$

Observación 6.24. La expresión $\rho(U) \cdot V(\Gamma)$ debe considerarse como la siguiente derivada

$$\rho(U) \cdot V(\Gamma) = \frac{d}{dt}(V(\Gamma_t))|_{t=0}$$

donde Γ_t es una curva en DS^1 que pasa por Γ en $t = 0$ y cuya velocidad es $\rho(U(\Gamma))$ a ese tiempo. Notemos que esto no es más que la derivada usual extendida a campos discontinuos.

Demostración. Lo único que hay que probar para ver que la estructura es de algebroide de Lie es la propiedad de Leibniz. Para eso consideremos $f \in C^\infty(DS^1)$ y $U, V \in D\mathfrak{X}(S^1)$ y hagamos el cálculo

$$\begin{aligned}
[U, f \cdot V] =& [U, f \cdot V]^{\mathcal{R}} + \rho(U) \cdot (fV) - \rho(fV) \cdot (U) \\
=& f[U,V]^{\mathcal{R}} + \rho(U) \cdot (fV) - f\rho(V) \cdot (U) \\
=& f[U,V]^{\mathcal{R}} + \mathcal{L}_{\rho(U)}(f)V + f\rho(U)(V) - f\rho(V) \cdot (U) \\
=& f[U,V] + \mathcal{L}_{\rho(U)}(f)V,
\end{aligned}$$

como queríamos probar. La estructura de Fréchet de las fibras es inmediata a partir de la estructura de Fréchet del espacio de campos de vectores en S^1. □

Observación 6.25. Si consideramos el espacio base $S^1 \times S^1$ en vez de DS^1 obtenemos otro algebroide más grande. Notemos que sobre la diagonal los vectores que estén en la fibra serán diferenciables por lo que el fibrado tendrá una copia de $\mathfrak{X}(S^1)$ por cada elemento de S^1.

Para poder obtener un algebroide de Virasoro lo primero que debemos buscar es un cociclo que extienda este algebroide de campos de vectores discontinuos. Afortunadamente, el mismo cociclo de Gelfand Fuchs nos sirve como cociclo para este algebroide.

Proposición 6.26. *El cociclo de Gelfand Fuchs en $\mathfrak{X}(S^1)$ se extiende a un cociclo en $D\mathfrak{X}(S^1)$.*

Demostración. La misma demostración que para los vectores continuos sirve. Notemos que un cociclo de algebroide

$$\Omega : \Gamma(D\mathfrak{X}(S^1)) \times \Gamma(D\mathfrak{X}(S^1)) \longrightarrow C^\infty(DS^1)$$

puede ser dado punto a punto. Es decir, si $a, b \in \Gamma(D\mathfrak{X}(S^1))$ entonces para un cierto punto $\Gamma \in DS^1$ tenemos que $a(\Gamma) = f^+\chi_{\Gamma^+} + f^-\chi_{\Gamma^-}$ y $b(\Gamma) = g^+\chi_{\Gamma^+} + g^-\chi_{\Gamma^-}$. Definimos entonces el cociclo

$$\Omega(a,b)(\Gamma) = \int_{S^1} (f^{+\prime}(\theta)\chi_{\Gamma^+}(\theta) + f^{-\prime}(\theta)\chi_{\Gamma^-}(\theta))(g^{+\prime\prime}(\theta)\chi_{\Gamma^+}(\theta) + g^{-\prime\prime}(\theta)\chi_{\Gamma^-}(\theta))d\theta$$

se puede escribir como

$$\Omega(a,b)(\Gamma) = \int_{\Gamma^+} f^{+\prime}(\theta)g^{+\prime\prime}(\theta)d\theta + \int_{\Gamma^-} f^{-\prime}(\theta)g^{-\prime\prime}(\theta)d\theta$$

que por exactamente los mismos cálculos que en el caso del cociclo de Gelfand Fuchs resulta un cociclo que no es un coborde. □

Corolario 6.27. *Sea $(D\mathfrak{X}(S^1), \rho, [\,,\,])$ el algebroide de campos de vectores discontinuos en S^1. Se tiene una extensión central de algebroides de la forma*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}_{DS^1} \xrightarrow{i} D\mathfrak{X}(S^1)_\Omega \xrightarrow{\pi} D\mathfrak{X}(S^1) \longrightarrow 0$$

Donde $D\mathfrak{X}(S^1)_\Omega$ es el algebroide $D\mathfrak{X}(S^1) \oplus \mathbb{R}$ sobre la variedad de base DS^1 con el ancla $(a, f) \mapsto \rho(a)$ y el corchete dado por

$$[(a,f),(b,g)] = ([a,b], L_{\rho(a)}(g) - L_{\rho(b)}(f) + \Omega(a,b))$$

con Ω la extensión del cociclo de Gelfand Fuchs a $D\mathfrak{X}(S^1)$.

Definición 6.28. Llamamos al algebroide $D\mathfrak{X}(S^1)_\Omega$ con la estructura dada en el corolario anterior algebroide de Virasoro y lo notamos $Dvir \Rightarrow DS^1$.

El algebroide definido arriba intenta dar una forma no clásica del álgebra de Virasoro para estudiar extensiones discontinuas de campos de vectores.

La pregunta que inmediatamente surge es la posible construcción de un grupoide de Virasoro. Como se trata de un algebroide que hemos construido como extensión de otro, primero debemos preguntarnos si el algebroide de campos de vectores discontinuos en S^1 puede integrarse a un grupoide. La respuesta es afirmativa y como era de imaginarse el grupoide es el de difeomorfismos discontinuos. La base del grupoide será naturalmente DS^1 mientras que las flechas estarán dadas por cuaternas de la forma $(\Gamma_1, \Gamma_2, \phi^+, \phi^-)$ donde $\Gamma_i \in DS^1$ y $\phi^{+/-} : \Gamma_1^{+/-} \longrightarrow \Gamma_2^{+/-}$ son difeomorfismos. A este grupoide (con la multiplicación dada por la composición de difeomorfismos) lo notamos DDiff(S^1).

Proposición 6.29. *$DDiff(S^1) \rightrightarrows DS^1$ es un grupoide de Lie Fréchet.*

Demostración. La composición de difeomorfismos da estructura de grupoide inmediatamente a $\mathrm{DDiff}(S^1) \rightrightarrows DS^1$ por lo que lo único que hay que verificar es que los mapas $s : \mathrm{DDiff}(S^1) \longrightarrow DS^1$ y $t : \mathrm{DDiff}(S^1) \longrightarrow DS^1$ con $s((\Gamma_1, \Gamma_2, \phi^+, \phi^-)) = \Gamma_1$ y $t((\Gamma_1, \Gamma_2, \phi^+, \phi^-)) = \Gamma_2$ sean submersiones y que los morfismos estructurales sean suaves. Para ver que los mapas s y t son submersiones probaremos que son localmente representables por proyecciones desde una variedad producto. Más aún, probaremos que el morfismo $\pi = (s, t) : \mathrm{DDiff}(S^1) \longrightarrow DS^1 \times DS^1$ es un fibrado. Para esto debemos ver que es localmente trivial dándole a $\mathrm{DDiff}(S^1)$ estructura de variedad de Fréchet.

Sea $\Gamma_0 \in DS^1$ un par arbitrario de puntos de S^1. Notemos que

$$\pi^{-1}(\Gamma_0, \Gamma_0) = \mathrm{Diff}(\Gamma_0^+) \times \mathrm{Diff}(\Gamma_0^-).$$

Como cada factor es un grupo de Lie, la fibra sobre (Γ_0, Γ_0) es un grupo de Lie. Además, para cualquier $\Gamma \in DS^1$ se tiene un difeomorfismo suave $\phi_\Gamma \in \mathrm{Diff}(S^1)$ con $\phi_\Gamma(\Gamma_0) = \Gamma$ que induce una biyección

$$\begin{aligned} \Phi_{\Gamma_1, \Gamma_2} : \pi^{-1}(\Gamma_1, \Gamma_2) &\longrightarrow \pi^{-1}(\Gamma_0, \Gamma_0) \\ \psi &\longmapsto \phi_{\Gamma_2}^{-1} \circ \psi \circ \phi_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

por lo que todas las fibras de π están en una biyección (que no es canónica pues depende de las elecciones de los ϕ_Γ y de Γ_0). Ahora bien, para cada $\Gamma \in DS^1$ se puede elegir un entorno suyo $O(\Gamma)$ en el que la función $\widetilde{\Gamma} \mapsto \phi_{\widetilde{\Gamma}}$ sea diferenciable. En estos entornos las biyecciones $\Phi_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ nos proveen de identificaciones

$$\pi^{-1}(O(\Gamma_1), O(\Gamma_2)) \approx O(\Gamma_1) \times O(\Gamma_2) \times \pi^{-1}(\Gamma_0, \Gamma_0)$$

que nos permiten cubrir $\mathrm{Diff}(S^1)$ con cartas que le dan estructura de variedad de Fréchet y de fibrado sobre $DS^1 \times DS^1$ con proyección π. Como π es localmente trivial en estas estructuras, s y t resultan submersiones. Por último, hay que probar que los morfismos estructurales (multiplicación, inversión y neutros) son suaves aunque eso es inmediato de que se factorizan por los mapas estructurales de $\pi^{-1}(\Gamma_0, \Gamma_0)$ como grupo de Lie.

□

El grupoide de difeomorfismos discontinuos en S^1 puede entenderse como el espacio de configuraciones de un fluido confinado a S^1 que fluye sin ningún tipo de restricción y presenta dos discontinuidades en todo momento. El difeomorfismo ϕ^+ nos dice cómo evoluciona uno de los arcos continuos del fluido mientras que el ϕ^- nos habla del otro arco. Los mapas s y t en todo momento nos refieren a las discontinuidades que tiene una de estas transformaciones al comenzar y al terminar respectivamente. Hemos adelantado ya que este grupoide se corresponde con el algebroide de campos discontinuos en S^1. Esta correspondencia no es más que una versión discontinua de la relación entre el grupo de difeomorfismos en una variedad compacta y el álgebra de Lie de campos de vectores que probamos en el Capítulo 2.

Proposición 6.30. *El algebroide asociado al grupoide $DDiff(S^1) \rightrightarrows DS^1$ es el algebroide de campos de vectores discontinuos en S^1, $D\mathfrak{X}(S^1) \Rightarrow DS^1$.*

Demostración. Sea $\Gamma_0 \in DS^1$ y consideremos la fibra A_{Γ_0} del algebroide asociado a $\mathrm{DDiff}(S^1) \rightrightarrows DS^1$. Esta fibra es precisamente el espacio tangente a $s^{-1}(\Gamma_0)$ en el punto $(\Gamma_0, \Gamma_0, id, id)$. Debemos probar que A_{Γ_0} es $D\mathfrak{X}(S^1, \Gamma_0)$ y para eso consideraremos la descripción del espacio tangente dada por curvas. Notemos que una curva en $s^{-1}(\Gamma_0)$ no es más que una asignación de la forma $t \mapsto (\Gamma_0, \Gamma_t, \phi_t^+, \phi_t^-)$ por lo que un vector tangente no es más que un objeto de la forma $\frac{d}{dt}|_{t=0}(\Gamma_0, \Gamma_t, \phi_t^+, \phi_t^-)$ con $\Gamma_t = \{x_1(t), x_2(t)\}$ y $\phi_t^{+/-} : \Gamma_0^{+/-} \longrightarrow \Gamma_t^{+/-}$ difeomorfismos tales que $\phi_0^{+/-} = id_{\Gamma_0^{+/-}}$. Al igual que en la demostración anterior, podemos tomar un entorno de Γ_0 que llamamos $O(\Gamma_0)$ tal que la asignación $t \mapsto \phi_{\Gamma_t}$ resulte diferenciable para t suficientemente chico. Para tales valores de t tenemos que los difeomorfismos $\phi_t^{+/-}$ pueden escribirse como $\phi_t^{+/-} = \phi_{\Gamma_t} \circ \widetilde{\phi}_t^{+/-}$ para ciertos $\widetilde{\phi}_t^{+/-} \in \mathrm{Diff}(S^1)$. Luego, la derivada con respecto de t evaluada en $t = 0$ se traduce en

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\phi_t^{+/-} = \frac{d}{dt}(\phi_{\Gamma_t})|_{t=0} + \widetilde{u}_0^{+/-} \qquad \text{con } \widetilde{u}_0^{+/-} \in \mathfrak{X}(\Gamma_0^{+/-})$$

La elección de los difeomorfismos $t \mapsto \phi_{\Gamma_t}$ prefijada nos permite identificar un vector tangente a la $s-$fibra con los tres elementos, $\frac{d}{dt}|_{t=0}\Gamma_t$, $\widetilde{u_0}^+$ y $\widetilde{u_0}^-$. Por último, notemos que $\phi_t^+(x_1(0)) = \phi_t^-(x_1(0)) = x_1(t)$ por lo que el par $\frac{d}{dt}|_{t=0}\Gamma_t = \{x_1'(0), x_2'(0)\}$ queda también determinado por los campos $\widetilde{u}_0^{+/-}$, por lo que los vectores tangentes se ven identificados con $D\mathfrak{X}(S^1, \Gamma_0)$, como queríamos probar. $\square$

Con lo probado anteriormente y el teorema de Crainic (Teorema 6.16) estamos en condiciones de formularnos la pregunta sobre la integrabilidad del algebroide de Virasoro. Si la 2-forma inducida por el cociclo de Gelfand-Fuchs tiene fibrado de periodos suave obtendremos un grupoide de Virasoro que integra nuestro algebroide. Más aún, si el fibrado de periodos es el fibrado trivial entonces el grupoide de Virasoro se realiza como una extensión del grupoide de difeomorfismos por el fibrado R_{DS^1}, lo cual daría lugar a una bella analogía con el caso clásico.

En este punto surgen muchísimas preguntas sobre las propiedades de este algebroide pero una que surge naturalmente tras el desarrollo de este trabajo es la forma de las ecuaciones de Euler en *Dvir*. Es decir, ¿pueden recontruirse las cuentas llevadas a cabo en los capítulos 4 y 5 en este nuevo contexto? Para eso, lo primero que requerimos es una descripción del dual suave a *Dvir*, lo cual obtenemos en las siguientes definiciones y proposiciones.

Definición 6.31. Llamamos fibrado de diferenciales cuadráticos sobre S^1 al fibrado vectorial $D\Omega^{\otimes 2}(S^1) \Rightarrow DS^1$ donde $D\Omega_\Gamma^{\otimes 2}(S^1) = \{u(\theta)\chi_{\Gamma^+} + v(\theta)\chi_{\Gamma^-}(d\theta)^2 : u, v \in C^\infty(S^1)\}$ para cada $\Gamma \in DS^1$.

Proposición 6.32. *El dual suave del algebroide de campos de vectores discontinuos sobre S^1 es el fibrado de diferenciales cuadráticos sobre S^1.*

Demostración. Basta probar que fibra a fibra se da la dualidad que se afirma. Para eso sea $\Gamma \in DS^1$ y sea $D\mathfrak{X}_\Gamma(S^1)$ su fibra en el algebroide de campos de vectores discontinuos.

Afirmamos que el dual suave de este espacio de Fréchet no es más que $D\Omega_\Gamma^{\otimes 2}(S^1)$ y para probar esto debemos mostrar el pairing no degenerado entre estos dos espacios. Consideramos

$$\langle (u(\theta)\chi_{\Gamma^+} + v(\theta)\chi_{\Gamma^-})(d\theta)^2, (f^+\chi_{\Gamma^+} + f^-\chi_{\Gamma^-})\partial_\theta \rangle = \int_{\Gamma^+} u(\theta)f^+(\theta)d\theta + \int_{\Gamma^-} v(\theta)f^-(\theta)d\theta$$

Sea $(u(\theta)\chi_{\Gamma^+} + v(\theta)\chi_{\Gamma^-})(d\theta)^2$ tal que $\langle (u(\theta)\chi_{\Gamma^+} + v(\theta)\chi_{\Gamma^-})(d\theta)^2, X\rangle = 0$ para todo $X \in D\mathfrak{X}_\Gamma(S^1)$. Tomando campos discontinuos de la forma $X = f^+\chi_{\Gamma^+}$ y $X = f^-\chi_{\Gamma^-}$ obtenemos que tanto u como v son funciones que satisfacen

$$\int_{\Gamma^+} u(\theta)f(\theta) = 0$$

para toda función $f \in C^\infty(\Gamma^+)$ y obtenemos una propiedad similar cumplida por v. Por el lema fundamental del cálculo de variaciones deben ser $u|_{\Gamma^+} = 0$ y $v|_{\Gamma^-} = 0$ por lo que el diferencial cuadrático es nulo. Esto prueba que el pairing es no degenerado como queríamos. □

Corolario 6.33. *El dual suave del algebroide de Virasoro admite la descripción*

$$(Dvir)^* = D\Omega^{\otimes 2}(S^1) \oplus \mathbb{R}_{DS^1}$$

Los fibrados duales a los algebroides de campos discontinuos y de Virasoro vienen acompañados de su estructura de Poisson lineal canónica por ser duales a un algebroide de Lie. Como ya mencionamos, esa estructura nos permite hablar de ecuaciones de Euler-Arnold siempre que tengamos un operador de inercia (o más en general, una métrica en el álgebroide de Lie). Es por esto que daremos definiciones de métricas en el algebroide de Virasoro que se corresponden con aquellas brindadas para el álgebra de Virasoro en el Capítulo 4.

Definición 6.34. Dados $u, v \in Dvir_\Gamma$ con $u = ((u_+\chi_{\Gamma_+} + u_-\chi_{\Gamma_-})\partial_\theta, a)$ y $v = ((v_+\chi_{\Gamma_+} + v_-\chi_{\Gamma_-})\partial_\theta, b)$ definimos el producto interno $H^1_{\alpha,\beta}$ entre ellos como

$$\langle u, v\rangle_{H^1_{\alpha,\beta}} = \int_{\Gamma^+} \alpha(u_+v_+(\theta)) + \beta(u'_+v'_+(\theta)) + \int_{\Gamma^-} \alpha(u_-v_-(\theta)) + \beta(u'_-v'_-(\theta)) + ab.$$

Al igual que en el caso de las métricas en el álgebra de Virasoro, estas métricas son no degeneradas para $\alpha \neq 0$.

Por último dejamos abierta la pregunta que enunciamos anteriormente: ¿cuál es la forma de las ecuaciones de Euler en $Dvir$ con respecto a las métricas $H_{\alpha,\beta}$? Fundamentalmente podemos preguntarnos qué propiedades de integrabilidad presenta la ecuación de Euler respecto a la métrica $H_{1,0}$ y cómo se relaciona esta ecuación con la de Korteweg de Vries. Notemos que para contestar esta pregunta puede ser de utilidad primero preguntarnos la relación entre la acción coadjunta del algebroide $Dvir$ (que no es una representación sino una representación a menos de homotopía pues en algebroides de Lie no hay un concepto completamente análogo al de representación coadjunta) y las ecuaciones de Euler en el algebroide porque, como vimos en el Capítulo 3, para el caso de álgebras de Lie hay una relación directa entre estos conceptos y explotando esta relación es que logramos obtener información sobre las ecuaciones de Euler en Vir.

Apéndice A

Demostración del teorema de Arnold

En este apéndice brindaremos una demostración completa del Teorema 3.19 en su versión más general para grupos de Lie Frechét. La demostración original de Arnold que fue discutida en el Capítulo 3 utiliza coordenadas locales y requiere de desarrollos en serie de Taylor o de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff para formalizarse, motivo por el que no es un acercamiento adecuado al tema a la hora de trabajar con grupos localmente convexos. La demostración que brindamos a continuación es completa y sigue los pasos de los trabajos [M A] y [M E].

Para esta demostración necesitaremos algunos resultados de análisis global y de geometría simpléctica. Lo primero que requeriremos es recordar la estructura canónica de variedad simpléctica del fibrado cotangente a una variedad. Esta estructura suele construirse en coordenadas locales en los libros elementales de geometría diferencial, pero nosotros requeriremos una descripción global de la forma simpléctica en cuestión.

Proposición A.1. *Sea M una variedad modelada en un espacio vectorial topológico localmente convexo reflexivo E. Definimos una 1-forma θ en T^*M de la forma*

$$\theta_{\alpha_m}(w_{\alpha_m}) = -\alpha_m(d\tau^*(w_{\alpha_m})),$$

donde $\tau^* : T^*M \longrightarrow M$ es la proyección canónica, $\alpha_m \in T^*_m M$ y $w_{\alpha_m} \in T_{\alpha_m}(T^*M)$. Entonces $\omega = d\theta$ es una forma simpléctica en T^*M.

Demostración. Es claro que localmente la 1-forma admite la siguiente fórmula:

$$\theta_{(u,\alpha)}(e,\beta) = -\alpha(e),$$

donde las coordenadas locales de $T_{(u,\alpha)}T^*M$ han sido elegidas de la forma (e,β) con $e \in T_u M$ y $\beta \in T^*_u M$. Con esta fórmula obtenemos inmediatamente que su diferencial $d\theta = \omega$ satisface localmente la ecuación

$$\omega_{(u,\alpha)}((e_1,\alpha_1),(e_2,\alpha_2)) = \frac{1}{2}[\alpha_1(e_2) - \alpha_2(e_1)],$$

la cual define una forma cerrada (por ser exacta) y no degenerada. En efecto, para ver que es no degenerada supongamos que (e_1,α_1) es tal que $\omega_{(u,\alpha)}((e_1,\alpha_1),(e,\beta)) = 0$ para todo elemento (e, β) en $T_{(u,\alpha)}T^*M$. Eligiendo una carta fijamos un isomorfismo entre el espacio modelo E y T_uM y entre E^* y T_u^*M. Es claro que si tomamos $\beta = 0 \in E^*$ la fórmula de ω arroja que $\alpha_1 = 0$ pero entonces $\beta(e_1) = 0$ para todo elemento $\beta \in E^*$, por lo que invocando el teorema de Hahn Banach obtenemos que $e_1 = 0$. Esto prueba que el mapa que obtenemos vía la contracción de la forma simpléctica con un elemento tangente es un monomorfismo. Debemos ver que es también un epimorfismo y para esto utilizaremos la reflexividad de E. Sea $\sigma = (\alpha_1, e) \in E^* \times E^{**}$, buscamos entonces un elemento $\varphi \in E \times E^*$ tal que $\omega_{(u,\alpha)}(\varphi, *) = \sigma$. Para esto consideramos un elemento $f \in E$ tal que $ev_f = e$ y entonces tenemos que

$$\omega_{(u,\alpha)}((2f, -2\alpha), (e_1, \alpha_1)) = \frac{1}{2}[2\alpha_1(f) + 2\alpha(e_1)] = e(\alpha_1) + \alpha(e_1) = \sigma(e_1, \alpha_1).$$

Esto demuestra que la forma ω es no degenerada y luego una forma simpléctica. □

A continuación daremos una definición y demostraremos algunos teoremas clásicos de geometría simpléctica. Asumiremos que el dominio de las funciones que definen un campo hamiltoniano es toda la variedad simpléctica aunque esto es algo que puede no suceder. Para leer las definiciones adecuadas en tal caso ver [M].

Definición A.2. Sea (M, ω) una variedad simpléctica y $F : M \longrightarrow M$ un mapa suave. Decimos que F es un simplectomorfismo si $F_*\omega = \omega$.

Proposición A.3. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica. Entonces valen*

1. *Un campo de vectores es hamiltoniano si y solo si su flujo asociado es un simplectomorfismo.*

2. *Si X_H es un campo de vectores hamiltoniano, F_t es su flujo asociado y F_t posee un punto fijo entonces $H \circ F_t = H$.*

3. *F es simplectomorfismo si y solo si para todo campo hamiltoniano X_H se tiene $F^*X_H = X_{H \circ F^{-1}}$, donde $F^*(X) = dF \circ X \circ F^{-1}$. Observar que esta operación sobre campos de vectores es la inversa del pullback.*

Demostración. Ver [M], teoremas 2.9, 3.1 y 3.3 respectivamente. □

La proposición anterior muestra tres propiedades clásicas de los campos hamiltonianos en una variedad simpléctica y sus demostraciones en dimensión finita figuran en cualquier texto que aborde el tema, sin embargo, para el caso de grupos de Lie localmente convexos, estas demostraciones suelen presentar detalles técnicos que las complican. Las demostraciones citadas abordan estas complicaciones especiales: en particular la segunda proposición requiere de la hipótesis de un punto fijo para F_t que es innecesaria para el caso finito dimensional (esta proposición se conoce como la conservación de la energía en un sistema hamiltoniano).

A continuación brindamos las principales definiciones sobre acciones simplécticas. Estas acciones son una herramienta fundamental para obtener leyes de conservación en un sistema hamiltoniano y una de las leyes que obtendremos nos permitirá brindar una demostración adecuada del teorema de Arnold.

Definición A.4. Sea G un grupo de Lie y M una variedad. Una acción de G en M es un morfismo de grupos

$$\begin{aligned}\Phi : G &\longrightarrow \mathrm{Diff}(M)\\ g &\longmapsto \Phi_g\end{aligned}$$

donde $\mathrm{Diff}(M)$ es el grupo de difeomorfismos de M. No asumimos que Φ sea un mapa diferenciable. La acción se dice simpléctica si M es una variedad simpléctica y Φ_g es un simplectomorfismo para todo $g \in G$.

Observación A.5. Si X es un campo de vectores invariante a izquierda en G, podemos considerar su flujo F_t, el cual induce un flujo correspondiente F_t' en M vía la acción de G del siguiente modo

$$F_t'(m) = \Phi_{F_t(e)}(m),$$

donde $e \in G$ es el elemento neutro de G. Llamamos X' al campo de vectores que genera al flujo F_t' en M y asumimos que el flujo X' es suave. En ese caso, llamamos a X' una transformación infinitesimal. Notemos que la acción Φ es simpléctica si y solo si los flujos F_t' son simplectomorfismos, lo cual es equivalente a pedir que las transformaciones infinitesimales sean campos localmente hamiltonianos.

Teorema A.6. *Sea M una variedad modelada en un espacio reflexivo y Φ una acción en M. Definimos una acción en T^*M vía la fórmula*

$$\Phi_g^*(\alpha_m) = \alpha_m \circ (d_m\Phi_g)^{-1} \in T^*_{\Phi_g(m)}M.$$

Entonces Φ^* es una acción simpléctica en T^*M con la estructura simpléctica natural.
Más aún, si X' es un generador infinitesimal de Φ, y $X^{*'}$ es el correspondiente generador infinitesimal de Φ^*, entonces

$$X^{*'} = X_{P_{X'}}$$

donde $P_{X'}$ es la función hamiltoniana dada por $P_{X'}(\alpha_m) = \alpha_m(X'(m))$. Llamamos a $P_{X'}$ el mapa de momentos asociado a X'.

Demostración. Probaremos primero que si θ es la 1-forma canónica de T^*M entonces $(\Phi_g^*)_*\theta = \theta$, lo cual implicará que Φ_g^* es simplectomorfismo para todo $g \in G$ y, luego, que Φ^* es una acción simpléctica. Para esto notemos que

$$\begin{aligned}(\Phi_g^*)_*\theta_{\alpha_m}(v) &= \theta_{\Phi_g^*(\alpha_m)}(d\Phi_g^*(v)) = -\Phi_g^*(\alpha_m)(d\tau^*(d\Phi_g^*(v)))\\ &= -\alpha_m \circ (d\Phi_g)^{-1} \circ d\tau^* \circ d\Phi_g^*(v)\\ &= -\alpha_m(d(\Phi_g^{-1} \circ \tau^* \circ \Phi_g^*)(v))\\ &= -\alpha_m(d\tau^*(v)) = \theta_{\alpha_m}(v)\end{aligned}$$

Lo cual prueba que la acción es simpléctica. Sea ahora $F_t^{'*}$ el flujo de $X^{*'}$, que satisface $(F_t^{'*})_*\theta = \theta$, o lo que es lo mismo, $L_{X^{*'}}\theta = 0$. Por la fórmula mágica de Cartan tenemos

$$0 = d \circ i_{X^{*'}}(\theta) + i_{X^{*'}}d\theta = d(\theta(X^{*'})) + \omega(X^{*'}, *)$$

por lo que llamando $P_{X'} = -\theta(X^{*'})$ obtenemos

$$dP = \omega(X^{*'}, *)$$

lo cual nos dice que $X^{*'} = X_{P_{X'}}$. Resta verificar que esta función $P_{X'}$ coincide con la del enunciado pero eso se puede verficiar vía la siguiente cadena de igualdades:

$$\theta(X^{*'}) \circ \alpha_m = \theta_{\alpha_m}(X^{*'}(\alpha_m)) = -\alpha_m(d\tau^* \circ X*'(\alpha_m)) = -\alpha_m(X'(\tau(\alpha_m))) = -\alpha_m(X'(m))$$

que es precisamente lo que faltaba probar. □

Teorema A.7. *Sea (M, ω) una variedad simpléctica y X_H un campo de vectores hamiltoniano en M. Sea Φ una acción simpléctica en M. Supongamos que Φ es una simetría de H, es decir, $H \circ \Phi_g = H$ para todo $g \in G$. Supongamos además que X_H tiene un flujo F_t con un punto fijo y que X_K es una transformación infinitesimal de Φ. Entonces K es constante sobre el flujo de X_H, es decir, $K \circ F_t = K$.*

Demostración. Como F_t es simplectomorfismo por ser el flujo asociado a un campo hamiltoniano, tenemos que $(F_t)_* X_K = X_{K \circ F_t}$ por lo que basta probar que $(F_t)_* X_K = X_K$ para obtener el resultado. Llamemos F'_t al flujo de X_K y notemos que la igualdad que estamos intentando de probar es equivalente a ver que $F_t \circ F'_t \circ F_{-t} = F'_t$. Esta última igualdad es equivalente a probar que $F_t = F'_t \circ F_t \circ F'_{-t}$, lo cual a su vez equivale a probar que $(F'_t)_* X_H = X_H$. Esto último es cierto pues $H \circ F'_t = H$, por lo que K resulta invariante por el flujo de X_H. □

Corolario A.8. *Sea M una variedad con una acción Φ de un grupo G, y sea $H : T^*M \longrightarrow T^*M$ tal que $H \circ \Phi^*_g = H$ para todo $g \in G$. Si H tiene un flujo F_t con un punto fijo entonces las funciones P_X con X un generador infinitesimal de Φ son constantes sobre el flujo de X_H.*

Las propiedades y los teoremas probados arriba han sido extraídos en su mayoría de [M]. En ese paper, Marsden sienta las bases de la geometría simpléctica en variedades localmente convexas. El resto del apéndice se puede encontrar en la primer sección de [M A], donde se demuestra el teorema de Arnold con toda su generalidad haciendo uso del teorema A.6.

Definición A.9. Sea G un grupo de Lie localmente convexo y $\langle\ ,\ \rangle$ una métrica riemanniana débil en él. Decimos que la métrica es compatible con G si

1. La métrica es invariante a izquierda.
2. El funcional de energía dado por

$$\begin{aligned} T : TG &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_x &\longmapsto \frac{1}{2}\langle e_x, e_x \rangle \end{aligned}$$

   se puede levantar a un campo de vectores suave X_T usando la estructura simpléctica en TG, inducida por la estructura canónica en T^*G y la métrica riemanniana.

3. X_T posee un flujo local suave al cual llamamos flujo geodésico en G.

Aclaremos algunas cosas de la definición de arriba. En el caso de un grupo G con una métrica débil, tenemos un monomorfismo entre el fibrado tangente a G y su fibrado cotangente. Este monomorfismo nos permite dotar al fibrado tangente de una *estructura simpléctica débil*. En efecto, localmente podemos ver la estructura simpléctica en TG como

$$\omega_g((e_1, f_1), (e_2, f_2)) = \frac{1}{2}[\langle f_2, e_1\rangle - \langle f_1, e_2\rangle],$$

la cual es la estructura simpléctica de T^*G transportada a TG vía la métrica débil. El motivo por el que llamamos a esta forma una estructura simpléctica débil es que no necesariamente satisface la condición de no degeneración que se le pide a una forma simpléctica. En efecto, si la métrica riemanniana no era fuerte esta forma será degenerada. Debido a esto mismo no es cierto que para toda función $f : TG \longrightarrow \mathbb{R}$ exista un campo hamiltoniano X_f, aunque si existe será único. Es por eso que las condiciones 2 y 3 de la definición no son triviales, como sí lo son en el caso finito dimensional, en el que todas las métricas de Riemann son fuertes. En el paper [M E] se prueba que las métricas canónicas asociadas a grupos de difeomorfismos son compatibles. Para más información en formas simplécticas débiles ver [M A]. A continuación nos encaminamos hacia la demostración del teorema de Arnold, la demostración del lema que enunciamos a continuación puede encontrarse como la proposición 5.5.8 de [T].

Lema A.10. *Sean $x(t)$ una curva suave en un grupo de Lie localmente convexo G, $v \in T_eG$ un elemento de su álgebra de Lie y $v(t) = Ad_{x^{-1}(t)}(v)$. Entonces tenemos que*

$$\frac{dv}{dt} = [v(t), d_{x(t)}L_{x^{-1}(t)}(\frac{dx}{dt})]$$

De los teoremas A.6 y A.7 obtenemos un corolario al trasladar la estructura simpléctica del fibrado cotangente al fibrado tangente vía una métrica riemanniana.

Corolario A.11. *Sea $\langle\ ,\ \rangle$ una métrica de Riemann en una variedad M, modelada en un espacio reflexivo y con una acción Φ de un grupo G. Sea ω la forma simpléctica débil inducida en TM por la métrica y la forma canónica en T^*M. Si X_H es un campo hamiltoniano en TM con respecto a esta estructura y H es invariante respecto a la acción inducida en TM entonces las funciones $P_X(e_m) = \langle e_m, X(m)\rangle$ son invariantes bajo el flujo de X_H, siempre que X sea generador infinitesimal de Φ.*

Demostración. No es más que el corolario A.8 tras componer todas las funciones con el mapa $g_b : TM \longrightarrow T^*M$ que induce la métrica de Riemann. □

Teorema A.12. *Sea G un grupo de Lie con una métrica compatible. Sea X_H un campo de vectores hamiltoniano en TG tal que $H \circ dL_x = H$ para todo $x \in G$ (donde $L_x : G \longrightarrow G$ es la multiplicación a izquierda). Entonces para cada vector $v \in T_eG$ la función*

$$\begin{aligned} P_v : TG &\longrightarrow \mathbb{R} \\ e_x &\longmapsto \langle d_eR_x(v), e_x\rangle, \end{aligned}$$

es invariante por el flujo de X_H.

Demostración. La demostración se basa en el corolario anterior. En efecto, miremos a G actuando sobre sí mismo por traslaciones a izquierda. Cada $v \in T_eG$ determina un flujo exponencial en G por la asunción sobre la métrica en G. Llamemos X al generador infinitesimal del flujo de v. Tenemos

$$X(y) = \frac{d}{dt}(exp_y(tv)) = \frac{d}{dt}(R_y(exp_e(tv))) = d_eR_y(v) \qquad \text{en t=0.}$$

Donde la segunda igualdad se debe a que la transformación infinitesimal generada por un vector invariante a izquierda es una traslación a derecha (ver [T], 5.4.3) y la tercera se debe a la regla de la cadena. Esto prueba que el campo de vectores $X(y) = d_eR_y(v)$ es un generador infinitesimal del flujo de v, el cual es una acción de $\mathbb{R}$ sobre G. Por el corolario anterios, los mapas de momentos asociados a X, que son las funciones P_v definidas en el enunciado, son invariantes por el flujo de X_H para todo campo hamiltoniano respecto a la estructura simpléctica débil en TG, tal que H sea invariante respecto a la acción inducida en TG. Como eso es exactamente lo que satisface nuestra función hamiltoniana, tenemos que P_v es invariante por el flujo de X_H. □

Por último, arribamos a la demostración del Teorema 3.19.

Teorema A.13. *Sea G un grupo de Lie con una métrica de Riemann compatible y X_T el campo de vectores hamiltoniano asociado al operador de energía con flujo geodésico $F_t : TG \longrightarrow TG$. Definimos*

$$H_t = d_{x(t)}L_{x^{-1}(t)}(F_t(v)),$$

donde $F_t(v) \in T_{x(t)}G$. Entonces H_t define un flujo suave en T_eG y tiene un campo de vector asociado determinado por la relación $Y : T_e \longrightarrow T_eG$, $\langle Y(u), v\rangle = \langle [u, v], u\rangle$.

Demostración. (Teorema de Arnold 3.19) Comenzamos con la relación

$$0 = \frac{d}{dt}\langle F_tu, d_eR_{x(t)}v\rangle$$

que vale por el teorema anterior. Por la invariancia a izquierda de la métrica esto se traduce en

$$0 = \frac{d}{dt}\langle d_{x(t)}L_{x(t)^{-1}}F_tu, Ad_{x(t)^{-1}}v\rangle = \frac{d}{dt}\langle H_t(u), Ad_{x(t)^{-1}}v\rangle,$$

que al derivar y evaluar en $t = 0$, por el lema obtenemos

$$\langle Y(u), v\rangle + \langle u, [v, u]\rangle = 0$$

de donde se desprende el resultado. □

Bibliografía

[Ar1] Arnold, Vladimir. Mathematical methods of classical mechanics. Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1989.

[Ar2] Arnold, Vladimir. Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 1966 fasc. 1 319–361.

[Ar3] Arnold, Vladimir. Polymathematics: is mathematics a single science or a set of arts? Mathematics: frontiers and perspectives, 403–416, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[AKh] Arnold, Vladimir; Khesin, Boris. Topological methods in hydrodynamics. Applied Mathematical Sciences, 125. Springer-Verlag, New York, 1998.

[B] Beltita, Daniel. Smooth homogeneous structures in operator theory. Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 137. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[Ba] Babelon, Olivier; Bernard, Denis; Talon, Michel. Introduction to classical integrable systems. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[Bru] Bruveris, Martins. Notes on Riemannian geometry on manifolds of maps.

[C] Crainic, Marius. Prequantization and Lie brackets. J. Symplectic Geom. 2 (2004), no. 4, 579–602.

[CF] Crainic, Marius; Fernandes, Rui Loja. Lectures on integrability of Lie brackets. Lectures on Poisson geometry, 1–107, Geom. Topol. Monogr., 17, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2011.

[Chi] Chicone, Carmen. Ordinary differential equations with applications. Texts in Applied Mathematics, 34. Springer-Verlag, New York, 1999.

[G G] Golubitsky, M.; Guillemin, V. Stable mappings and their singularities. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973.

[G O] Goddard, Peter; Olive, David. Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to quantum physics. Internat. J. Modern Phys. A 1 (1986), no. 2, 303–414.

[G R] Guieu, Laurent; Roger, Claude. L'algèbre et le groupe de Virasoro. (French), aspects géométriques et algébriques, généralisations. Les Publications CRM, Montreal, QC, 2007.

[H] Hirsch, Morris W. Differential topology. Corrected reprint of the 1976 original. Graduate Texts in Mathematics, 33. Springer-Verlag, New York, 1994.

[Kl] Klingenberg, Wilhelm P. A. Riemannian geometry. Second edition. De Gruyter Studies in Mathematics, 1. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[Kh] Khesin, Boris; Wendt, Robert. The geometry of infinite-dimensional groups. A Series of Modern Surveys in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[KhOv] Khesin, B. A.; Ovsienko, V. Yu. Symplectic leaves of the Gel'fand-Dikiĭ brackets and homotopy classes of nonflattening curves. (Russian) ; translated from Funktsional. Anal. i Prilozhen. 24 (1990), no. 1, 38–47 Funct. Anal. Appl. 24 (1990), no. 1, 33–40.

[Kh M] Khesin, Boris; Misiołek, Gerard. Euler equations on homogeneous spaces and Virasoro orbits. Adv. Math. 176 (2003), no. 1, 116–144.

[Kh I] Khesin, Boris; Izosimov, Anton. Vortex sheets and diffeomorphism groupoids. Adv. Math. 338 (2018), 447–501.

[Kir] Kirillov, A. A. The orbits of the group of diffeomorphisms of the circle, and local Lie superalgebras. Funktsional. Anal. i Prilozhen. 15 (1981), no. 2, 75–76.

[Ko] Kordon, Francisco. Sistemas Hamiltonianos: Integrabilidad y Simetrías.

[Kr] A. Kriegl. Fréchet Spaces. 2016.

[Le] Serge, Lang. Differential and Riemannian manifolds. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 14. Springer-Verlag, New York. 1994.

[Lee] Lee, John M. Introduction to smooth manifolds. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[L1] Larotonda, G. Estructuras geométricas para las variedades de Banach. 2013.

[L2] Larotonda, Gabriel. The metric geometry of infinite dimensional Lie groups and their homogeneous spaces. eprint arXiv:1805.02631.

[Ma] Mackenzie, Kirill C. H. General theory of Lie groupoids and Lie algebroids. London Mathematical Society Lecture Note Series, 213. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[M] Marsden, J. E. Hamiltonian one parameter groups: A mathematical exposition of infinite dimensional Hamiltonian systems with applications in classical and quantum mechanics. Arch. Rational Mech. Anal. 28 1968.

[M A] Abraham R.; Marsden, Jerrold. Hamiltonian mechanics on Lie groups and hydrodynamics. University of California, Berkeley and Santa Cruz, 1969.

[MAR] Abraham, Ralph; Marsden, Jerrold E. Foundations of mechanics. Second edition, revised and enlarged. With the assistance of Tudor Raţiu and Richard Cushman. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Advanced Book Program, Reading, Mass., 1978.

[M E] Ebin, David G.; Marsden, Jerrold. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. Ann. of Math. (2) 92 102-163, 1970.

[M R] Marsden, Jerrold E.; Ratiu, Tudor S. Introduction to mechanics and symmetry. A basic exposition of classical mechanical systems. Second edition. Texts in Applied Mathematics, 17. Springer-Verlag, New York, 1999.

[MiKr] Michor, Peter W.; Kriegl, Andreas. The convenient setting of global analysis. Mathematical Surveys and Monographs, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[MiKr2] Michor, Peter W.; Kriegl, Andreas. Regular infinite-dimensional Lie groups. J. Lie Theory 7 (1997), no. 1, 61–99.

[MiMu] Michor, Peter W.; Mumford, David. Riemannian geometries on spaces of plane curves. J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 8 (2006), no. 1, 1–48.

[Mil] Milnor, J. Remarks on infinite-dimensional Lie groups. Relativity, groups and topology, II (Les Houches, 1983), 1007–1057, North-Holland, Amsterdam, 1984.

[N] Neeb, Karl-Hermann. Towards a Lie theory of locally convex groups. Jpn. J. Math. 1 (2006), no. 2, 291–468.

[O1] Omori, Hideki. A remark on nonenlargeable Lie algebras. J. Math. Soc. Japan 33 (1981), no. 4, 707–710.

[O2] Omori, Hideki. On Banach-Lie groups acting on finite dimensional manifolds. Tôhoku Math. J. (2) 30 (1978), no. 2, 223–250.

[ON] O'Neill, Barrett. Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983.

[Ov T] Ovsienko, V.; Tabachnikov, S. Projective differential geometry old and new. From the Schwarzian derivative to the cohomology of diffeomorphism groups. Cambridge Tracts in Mathematics, 165. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Po] Polchinski, Joseph. String theory. Vol. I. An introduction to the bosonic string. Reprint of the 2003 edition. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[R] Rudin, Walter. Functional analysis. Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[S] G. Sardanashvily. Lectures on integrable Hamiltonian systems. 2013.

[Se] Segal, Graeme. Unitary representations of some infinite-dimensional groups. Comm. Math. Phys. 80 (1981), no. 3, 301–342.

[SeP] Segal, Graeme; Pressley, Andrew. Loop groups. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1986.

[T] Tondeur, Philippe. Introduction to Lie groups and transformation groups. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1965.

[V] Valdivia, Manuel. Topics in locally convex spaces. North-Holland Mathematics Studies, 67. Notas de Matemática, 85. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1982.

[W] Warner, Frank. Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983.

[We] Weinstein, Alan; Cannas da Silva, Ana. Geometric models for noncommutative algebras. Berkeley Mathematics Lecture Notes, 10. American Mathematical Society, Providence, RI; Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, Berkeley, CA, 1999.

[Y] Yosida, Kōsaku. Functional analysis. Reprint of the sixth (1980) edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Z] Zakharevich I.; Gelfand I.M. Spectral theory of a pencil of third-order skew-symmetric differential operators on S^1. Funct. Anal. Appl. 23 (1989) 85–93.