**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

# HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA DE HOCHSCHILD DEL SUPER PLANO DE JORDAN

**Sebastián Gustavo Reca**

**Director: Andrea Solotar**

9/03/2017

# Índice general

# Agradecimientos


- En primer lugar quiero agradecer a toda mi familia, mis viejos, mi hermana, mis abuelos, mis tíos y mis primos por todo el apoyo incondicional que me dieron siempre y por confiar en mi.
- A Andrea por todo lo que aprendí este último tiempo, por la paciencia infinita que tuvo y por escucharme que le cuente todas las cuentas de esta tesis, que como verán, son muchas.
- A Mariano, Sergio y Pablo por sus consejos y por escuchar mis dudas.
- A Laura y Darío porque sin ellos esto no hubiera ni siquiera empezado.
- A Seba porque fue mi compañero desde el día 1, por todas las charlas de matemática que tuvimos y por todas las que vamos a tener.
- A Abese porque son los mejores compañeros que pude haber tenido y más aún por ser unos excelentes amigos.
- A Andi, Die y Lu porque son mis hermanos del alma y mi grupo terapéutico.
- A Leda por aguantarse los mejores y peores momentos de la carrera, por apoyarme siempre y porque es una de las personas mas increíbles que conozco.
- A lo bepi porque son la mejor banda que conozco, por desconectarme siempre del día a día y porque los quiero desde que tengo 2 años.
- A 1472 por la amistad y por las charlas más interesantes que tuve.
- A todos los que formaron parte de esto de alguna manera, ya sea en viajes, seminarios o simplemente en alguna charla en las mesas del dm.
- A la UBA por la beca estímulo.

# Introducción

La cohomología de Hochschild es un invariante relevante: es invariante por equivalencias Morita, por procesos inclinantes y por equivalencias derivadas. Las técnicas que utilizamos han permitido calcular la cohomología de Hochschild de numerosas álgebras.

El cálculo de estos invariantes requiere de una resolución del álgebra considerada como bimódulo sobre sí misma. Siempre se cuenta con una resolución canónica, la resolución bar, muy útil desde el punto de vista teórico, pero poco satisfactoria en la práctica: la complejidad de esta resolución rara vez permite llevar a cabo cálculos explícitos. Existen familias de álgebras que poseen una resolución minimal, única a menos de isomorfismo, por ejemplo los cocientes de álgebras tensoriales de espacios vectoriales de dimensión finita por ideales que contienen el radical de Jacobson, o por ideales graduados [BK]. Una resolución minimal permite obtener inmediatamente algunos invariantes del álgebra considerada. Por ejemplo, su longitud es igual a la dimensión global del álgebra. Sin embargo, aún cuando su existencia está asegurada, una resolución minimal no es sencilla de construir.

Las álgebras de Nichols son generalizaciones de las álgebras simétricas en el contexto de las categorías tensoriales trenzadas. Se trata de álgebras graduadas, que aparecieron por primera vez en un artículo de Nichols [Ni] en 1978, en el cual el autor buscaba ejemplos de álgebras de Hopf. Estas álgebras fueron redescubiertas más tarde por Woronowicz [Wo]. Se trata de objetos fundamentales para la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas, como fue puesto de manifiesto por los trabajos de Andruskiewitsch y Schneider (ver por ejemplo [AS]).

Heckenberger clasificó las álgebras de Nichols de dimensión finita de tipo diagonal. La clasificación separa a las álgebras de Nichols en diversas clases: álgebras de Nichols de tipo Cartan, relacionadas esencialmente con los grupos cuánticos finitos de Lusztig; álgebras de Nichols relacionadas con supergrupos cuánticos finitos; y una tercera clase relacionada con superálgebras de Lie contragradientes. Posterioremente, Angiono describió las relaciones de definición de las álgebras de Nichols de la lista de Heckenberger [Ang]. Estos resultados abrieron el camino para el estudio nuevos problemas en teoría de representación y en la clasificación de las álgebras de Hopf punteadas.

La categoría de módulos sobre un álgebra de Hopf $H$ es, gracias a la existencia de la comultiplicación, de la counidad y de la antípoda, una categoría tensorial con objeto unidad y duales. La cohomología de $H$ se define como la generalización de la cohomología de un grupo, es decir $H^\bullet(H, \Bbbk) = \mathrm{Ext}^\bullet_H(\Bbbk, \Bbbk)$. Tal como sucede para el caso de la cohomología de un grupo, $H^\bullet(H, \Bbbk)$ es un álgebra conmutativa graduada con el producto cup.

La generación finita del anillo de cohomología de las álgebras de Hopf de dimensión finita es un problema abierto e interesante por sus consecuencias sobre la categoría de representaciones y porque permite el uso de métodos geométricos. En algunas situaciones este resultado es conocido, como sucede en el caso de las álgebras de grupo (finito) en característica positiva. Se trata de resultados ya clásicos de Venkov [Ve], Golod [Go] y Evens [Ev]. Friedlander y Suslin [FrSu] probaron que el resultado es cierto para álgebras de Hopf coconmutativas de dimensión finita. En 1993, Ginzburg y Kumar demostraron la generación finita de la cohomología de grupos cuánticos pequeños cuando el cuerpo de base son los números complejos y bajo ciertas restricciones de los parámetros [GiKu]. Más recientemente, Bendel, Nakano, Parshall, y Pillen [BNPP] calcularon la cohomología de los grupos cuánticos pequeños bajo condiciones mucho más generales sobre los parámetros. Todos estos resultados llevan a preguntarse si es cierto que el álgebra de cohomología de cualquier álgebra de Hopf finito dimensional es finitamente generada. En 2004 Etingof y Ostrik conjeturaron este resultado en el contexto más general de las categorías tensoriales finitas [EtOs]. En un artículo reciente de Mastnak, Pevtsova, Schauenburg y Witherspoon [MPSW], los autores obtuvieron resultados parciales para álgebras de Hopf no conmutativas de dimensión finita y punteadas sobre un cuerpo de característica $0$ cuyo grupo de elementos de tipo grupo es abeliano, bajo algunas restricciones sobre el orden del grupo. En este trabajo los autores usaron la clasificación de [AS]. El articulo trata de álgebras de Hopf cuya estructura de álgebra es una deformación de un producto smash, en el sentido siguiente: puede darse una filtración del álgebra de Hopf cuyo graduado asociado es isomorfo al producto smash $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk G$, donde $\mathfrak{B}(V)$ es el álgebra de Nichols de un módulo de Yetter-Drinfeld $V$ sobre $\Bbbk G$.

Este problema se relaciona con la cohomología de Hochschild, ya que para toda álgebra $A$ con aumentación $\varepsilon : A \to \Bbbk$, el espacio graduado $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\Bbbk,\Bbbk)$ es isomorfo a la cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes triviales, es decir $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A,\Bbbk)$. Más aún, si $A$ es un álgebra de Hopf cuya antípoda es biyectiva, $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\Bbbk, A^{ad})$ es isomorfo como álgebra a $\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A,A)$ y $\mathrm{Ext}^\bullet_A(\Bbbk,\Bbbk)$ es isomorfa a un sumando directo de la cohomología de Hochschild $H^\bullet(A,A)$. Como consecuencia, si esta última es finitamente generada como álgebra, lo mismo sucederá con la primera.

El objetivo de esta tesis es calcular la homología y cohomología de Hochschild del álgebra $A = \Bbbk\langle x, y | x^2, y^2x - xy^2 - xyx\rangle$, llamada el super plano de Jordan cuando $\Bbbk$ es un cuerpo de característica $0$ y algebraicamente cerrado. Se trata del álgebra de Nichols $\mathfrak{B}(V(-1,2))$, cuya dimensión de Gelfand-Kirillov es 2. Este es el caso más simple, después del plano de Jordan, de la familia de álgebras que queremos estudiar posteriormente: la familia de álgebras de Nichols $\mathfrak{B}(V)$ con dimensión de Gelfand-Kirillov finita.

Los resultados principales obtenidos son los siguientes.

En el Teorema 3.2.1 damos bases explícitas para los espacios de homología de Hochschild $H_i(A,A)$, para todo $i \geq 0$. En el Teorema 3.3.1 hacemos lo mismo para los espacios de cohomología $H^i(A,A)$. Los espacios $H_i(A,A)$ y $H^i(A,A)$ son todos de dimensión infinita salvo el centro $H^0(A,A)$, que es isomorfo a $\Bbbk$.

En la Tabla 3.1 describimos el producto cup entre los generadores de los espacios de cohomología $H^i(A,A)$. A partir de esta descripción vemos que el isomorfismo entre $H^{2p}(A,A)$ y $H^{2p+2}(A,A)$, donde $p > 0$, está dado por la multiplicación con $u_0^2$. Para los grados impares sucede lo mismo.

Finalmente, en la Sección 3.5 describimos la estructura de álgebra de Lie de $H^1(A,A)$ con el corchete de Gerstenhaber (Teorema 3.5.1). La misma resulta isomorfa a una subálgebra de Lie del álgebra de Virasoro: $H^1(A,A)$ es isomorfo como álgebra de Lie a $\mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-$. Queda por describir la estructura de módulo de Lie de $H^n(A,A)$ para todo $n \geq 0$ y ver cuáles son las representaciones del álgebra de Virasoro que estos inducen.

Los contenidos de la tesis son los siguientes. En el Capítulo 1 damos una introducción a las álgebras de Hopf con el objetivo de presentar el concepto de álgebra de Nichols y exponer algunos ejemplos. En el Capítulo 2 resumimos las definiciones y los resultados del álgebra homológica que serán necesarios para el siguiente capítulo. En el capítulo 3 calculamos la homología y cohomología de Hochschild del super plano de Jordan. También describimos parte de la estructura de álgebra de Gerstenhaber que tiene la cohomología de Hochschild. Por último, en el Apéndice incluimos las reglas de conmutación del super plano de Jordan.

# Capítulo 1

# Álgebras de Hopf

El objetivo de este capítulo es presentar el concepto de álgebra de Nichols y exponer algunos ejemplos, entre ellos el super plano de Jordan que será nuestro objeto de estudio. Para esto, primero haremos una introducción a las álgebras de Hopf. A partir de ahora y por el resto de la tesis $\otimes$ denota el producto tensorial sobre $\Bbbk$.

## 1.1 Definiciones básicas

Esta sección se basa en [Mon].

### 1.1.1 Álgebras y coálgebras

Empecemos definiendo $\Bbbk$-álgebra de una manera alternativa a como usualmente se define en un curso básico de estructuras algebraicas, con el propósito de definir luego de manera análoga $\Bbbk$-coálgebras.

**Definición 1.1.1.** Una $\Bbbk$-*álgebra* con unidad es un $\Bbbk$-espacio vectorial $A$ junto con dos transformaciones $\Bbbk$-lineales

$$m : A \otimes A \to A \quad \text{y} \quad \eta : \Bbbk \to A$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

(a) (asociatividad)

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "m\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes m"] & A \otimes A \arrow[d, "m"] \\ A \otimes A \arrow[r, "m"] & A \end{tikzcd}$$

(b) (unidad)

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "m"] & \\
\Bbbk \otimes A \arrow[ur, "\eta \otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr] & & A \otimes \Bbbk \arrow[ul, "\mathrm{id} \otimes \eta"'] \arrow[dl] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

El morfismo $m$ se llama *multiplicación* y el morfismo $\eta$ *unidad*. Notar que el elemento unidad de $A$ viene dado por $1_A = \eta(1_{\Bbbk})$.

**Definición 1.1.2.** Sean $V$ y $W$ dos $\Bbbk$-espacios vectoriales. Definimos la *transposición*

$$\tau_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

como la única transformación $\Bbbk$-lineal tal que $\tau_{V,W}(v \otimes w) = w \otimes v$ para todo $v \in V$ y $w \in W$.

Notar que $A$ es conmutativa si y sólo si $m \circ \tau_{A,A} = m$.

**Observación 1.1.1.** Si $A$ y $B$ son dos $\Bbbk$-álgebras, entonces $A \otimes B$ también lo es con multiplicación $m_{A\otimes B}$ definida en los elementos homogéneos como

$$m_{A\otimes B}((a_1 \otimes b_1) \otimes (a_2 \otimes b_2)) = a_1 a_2 \otimes b_1 b_2$$

y unidad $\eta_{A\otimes B}$ definida como la única transformación $\Bbbk$-lineal tal que

$$\eta_{A\otimes B}(1_{\Bbbk}) = \eta_A(1_{\Bbbk}) \otimes \eta_B(1_{\Bbbk}).$$

Esta reformulación de la definición de $\Bbbk$-álgebra mediante morfismos y diagramas nos permite dualizar fácilmente esta estructura.

**Definición 1.1.3.** Una $\Bbbk$-*coálgebra* con unidad es un $\Bbbk$-espacio vectorial $C$ junto con dos transformaciones $\Bbbk$-lineales

$$\Delta : C \to C \otimes C \quad \text{y} \quad \varepsilon : C \to \Bbbk$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

(a) (coasociatividad)

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta \otimes \mathrm{id}"] \\
C \otimes C \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \Delta"] & C \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}$$

(b) (counidad)

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] \arrow[dd, "\Delta"] \arrow[dr] & \\ \Bbbk \otimes C & & C \otimes \Bbbk \\ & C \otimes C \arrow[ul, "\varepsilon\otimes id"] \arrow[ur, "id\otimes\varepsilon"'] & \end{tikzcd}$$

El morfismo $\Delta$ se llama *comultiplicación* y el morfismo $\varepsilon$ se llama *counidad*. Decimos que C es *coconmutativo* si $\tau_{C\otimes C} \circ \Delta = \Delta$.

**Definición 1.1.4.** Sean C y D coálgebras con comultiplicaciónes $\Delta_C$ y $\Delta_D$ y counidades $\varepsilon_C$ y $\varepsilon_D$ respectivamente. Decimos que $f : C \to D$ es un *morfismo de coálgebras* si es una transformación $\Bbbk$-lineal y los siguientes diagramas conmutan.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

Notar que si damos vuelta las flechas en estos diagramas, cambiamos comultiplicación por multiplicación y counidad por unidad obtenemos la definición de morfismo de álgebras.

**Definición 1.1.5.** Sea C una coálgebra. Un subespacio $I \subseteq C$ es un *coideal* si

$$\Delta(I) \subseteq I \otimes C + C \otimes I \text{ y } \varepsilon(I) = 0.$$

Si I es un coideal, el espacio vectorial $C/I$ con la comultiplicación y la counidad inducidas por $\Delta$ y $\varepsilon$ respectivamente, es una coálgebra.

**Definición 1.1.6.** Sea C una coálgebra. La *coálgebra coopuesta* $C^{cop}$ tiene a C como espacio vectorial subyacente, comultiplicación $\Delta^{cop} = \tau_{C\otimes C} \circ \Delta$ y counidad $\varepsilon^{cop} = \varepsilon$.

**Observación 1.1.2.** Análogamente a lo que sucede para las álgebras, si C y D son coálgebras, entonces $C \otimes D$ es una coálgebra con comultiplicación

$$\Delta_{C\otimes D} = (id \otimes \tau_{C\otimes D} \otimes id) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$$

y counidad

$$\varepsilon_{C\otimes D} = m_{\Bbbk} \circ (\varepsilon_C \otimes \varepsilon_D).$$

### 1.1.2 Biálgebras

Combinaremos ahora las nociones de álgebra y coálgebra.

**Definición 1.1.7.** Un $\Bbbk$-espacio vectorial $B$ es una *biálgebra* si $(B, m, \eta)$ es un álgebra, $(B, \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra y alguna de las siguientes condiciones equivalentes se cumple:

- $\Delta$ y $\varepsilon$ son morfismos de álgebras
- $m$ y $\eta$ son morfismos de coálgebras.

**Definición 1.1.8.** Sean $B$ y $E$ dos biálgebras. Decimos que $f : B \to E$ es un *morfismo de biálgebras* si es un morfismo de álgebras y de coálgebras.

**Ejemplo 1.1.1.** Sea $G$ un grupo. El álgebra de grupo $\Bbbk G$ resulta ser una biálgebra definiendo $\Delta(g) = g \otimes g$ y $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$. Esta biálgebra es coconmutativa pero sólo es conmutativa cuando $G$ es abeliano.

**Ejemplo 1.1.2.** Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. El álgebra envolvente $U(\mathfrak{g})$ es una biálgebra definiendo $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ y $\varepsilon(x) = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Esta biálgebra también resulta ser coconmutativa y sólo es conmutativa cuando $\mathfrak{g}$ es abeliana.

Estos dos ejemplos motivan las siguientes definiciones.

**Definición 1.1.9.** Sea $C$ una coálgebra y $c \in C$. Decimos que $c$ es *tipo grupo* si

$$\Delta(c) = c \otimes c.$$

**Definición 1.1.10.** Sean $C$ una coálgebra y $c \in C$. Decimos que $c$ es *primitivo* si

$$\Delta(c) = c \otimes 1 + 1 \otimes c.$$

**Ejemplo 1.1.3.** Sean $q \in \Bbbk$, $q \neq 0$ y $B = \Bbbk \langle x, y \mid xy = qyx \rangle$. Si definimos $\Delta(x) = x \otimes x$, $\Delta(y) = y \otimes 1 + 1 \otimes y$, $\varepsilon(x) = 1$ y $\varepsilon(y) = 0$, $B$ resulta ser una biálgebra conocida como el *plano cuántico*. Notar que $x$ es un elemento tipo grupo e $y$ es primitivo. El conjunto $\{y^i x^j : i, j \geq 0\}$ es una base de $B$ como $\Bbbk$-espacio vectorial.

**Definición 1.1.11.** Sea $B$ una biálgebra. Un subespacio $I \subseteq B$ es un *biideal* de $B$ si es un ideal y un coideal simultáneamente.

**Ejemplo 1.1.4.** Sea $B$ el plano cuántico del Ejemplo 1.1.3. El ideal bilátero $I \subseteq B$ generado por $y$ resulta ser un coideal y por lo tanto un biideal. Para ver esto primero verifiquemos que $\Delta(I) \subseteq I \otimes B + B \otimes I$. Sea $p \in I$, como $\Delta$ es lineal podemos suponer que $p$ es un elemento de la base, es decir $p = y^n x^m$, con $n \geq 1$. Luego

$$\begin{aligned}
\Delta(p) &= \Delta(\lambda y^n x^m) = \lambda \Delta(y)^n \Delta(x)^m \\
&= \lambda((y \otimes 1 + 1 \otimes y)^n)(x^m \otimes x^m) = \lambda \left( \sum_{i=0}^{n} y^i \otimes y^{n-i} \right) (x^m \otimes x^m) \\
&= \lambda \sum_{i=0}^{n} y^i x^m \otimes y^{n-i} x^m.
\end{aligned}$$

Como $y^i x^m \otimes y^{n-i} x^m \in I \otimes B$ para todo $i \geq 1$ y $x^m \otimes y^n x^m \in B \otimes I$, obtenemos que $\Delta(p) \in I \otimes B + B \otimes I$. Es fácil ver que $\varepsilon(I) = 0$ usando que $\varepsilon$ es morfismo de álgebras.

### 1.1.3 Notación de Sweedler y producto de convolución

Antes de continuar con nuevas definiciones y ejemplos vamos a introducir una nueva notación muy útil a la hora de trabajar con coálgebras. Si C es una coálgebra y $c \in C$, existen $a_i$, $b_i \in C$ tales que $\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$. Lo que sugiere Sweedler es que no usemos nuevas letras $a$ y $b$ sino subíndices $c_{(1)}$, $c_{(2)}$ de modo que

$$\Delta(c) = \sum_{i=1}^{n} c_{(1)i} \otimes c_{(2)i}.$$

Para ciertas manipulaciones que involucren operaciones lineales no necesitamos tener en cuenta el índice $i$ de la sumatoria y por lo tanto podemos escribir:

$$\Delta(c) = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)}$$

o más aún podemos no escribir el símbolo de la suma. Esta notación se vuelve muy útil cuando aplicamos $\Delta$ varias veces. La coasociatividad de la comultiplicación dice en notación de Sweedler que

$$c_{(1)} \otimes c_{(2)_{(1)}} \otimes c_{(2)_{(2)}} = (id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = (\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = c_{(1)_{(1)}} \otimes c_{(1)_{(2)}} \otimes c_{(2)}.$$

Esto nos permite escribir

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta(c) = (id \otimes \Delta) \circ \Delta(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes c_{(3)}$$

y más en general

$$\Delta_n(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)} \otimes \ldots \otimes c_{(n+1)},$$

donde $\Delta_1 = \Delta$ y $\Delta_{n+1}(c) = (\Delta \otimes id^{\otimes^n}) \circ \Delta_n$.

Utilizando esta nueva notación el axioma de counidad se puede expresar de la siguiente forma:

$$c = \varepsilon(c_{(1)})c_{(2)} = \varepsilon(c_{(2)})c_{(1)}.$$

**Definición 1.1.12.** Sea $(A, m, \eta)$ un álgebra y $(C, \Delta, \varepsilon)$ una coálgebra. Definimos el *producto de convolución* $*$ sobre $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ de la siguiente manera: Dados $f, g \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$,

$$f * g = m \circ (f \otimes g) \circ \Delta.$$

En notación de Sweedler el producto está dado por

$$(f * g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}) \text{ para todo } c \in C.$$

Este producto y la unidad $\eta \circ \varepsilon$ le dan a $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(C, A)$ estructura de álgebra.

### 1.1.4 Álgebras de Hopf

**Definición 1.1.13.** Una biálgebra $(H, m, \eta, \Delta, \varepsilon)$ es una $\Bbbk$-*álgebra de Hopf* si existe un morfismo $S \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(H, H)$, llamado *antípoda*, tal que

$$S * id_H = id_H * S = \eta \circ \varepsilon.$$

Es decir, S es la inversa de $id_H$ para el producto convolución.

En notación de Sweedler la antípoda S cumple que

$$S(h_{(1)})h_{(2)} = \varepsilon(h)1_H = h_{(1)}S(h_{(2)}) \text{ para todo } h \in H.$$

**Definición 1.1.14.** Sean $H, K$ álgebras de Hopf con antípodas $S_H$ y $S_K$ respectivamente. Decimos que $f : H \to K$ es un *morfismo de álgebras de Hopf* si es un morfismo de biálgebras y $f \circ S_H = S_K \circ f$.

**Definición 1.1.15.** Un subespacio $I \subseteq H$ es un *ideal de Hopf* si es un biideal y $S(I) \subseteq I$. En este caso $H/I$ es un álgebra de Hopf con la estructura inducida por $H$.

**Ejemplo 1.1.5.** El álgebra de grupo $H = \Bbbk G$ es un álgebra de Hopf definiendo $Sg = g^{-1}$ para todo $g \in G$. En general si $H$ es un álgebra de Hopf y $h \in H$ es un elemento tipo grupo, entonces $S(h) = h^{-1}$ debido a que $S(h)h = 1_H\varepsilon(h) = 1_H$.

**Ejemplo 1.1.6.** El álgebra asociativa envolvente $H = U(\mathfrak{g})$ es un álgebra de Hopf definiendo $S(x) = -x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. En general si $H$ es un álgebra de Hopf y $h \in H$ es un elemento de primitivo, entonces $S(h) = -h$.

**Ejemplo 1.1.7.** (Álgebra de Sweedler) Hasta ahora todos los ejemplos que dimos son coconmutativos. El álgebra de Hopf más chica no conmutativa y no coconmutativa tiene dimensión 4 y es única si $\mathrm{car}(\Bbbk) \neq 2$. Se trata del álgebra

$$\Bbbk \left\langle 1, g, x \mid g^2, x^2, xg + gx \right\rangle,$$

con estructura de álgebra de Hopf dada además por $\Delta(g) = g \otimes g$, $\Delta(x) = x \otimes 1 + g \otimes x$, $\varepsilon(g) = 1$, $\varepsilon(x) = 0$, $S(g) = g = g^{-1}$ y $S(x) = -gx$.

Las siguientes dos propiedades de la antípoda son muy importantes. Daremos la demostración de la primera para mostrar la utilidad de la notación de Sweedler.

**Proposición 1.1.1.** Sea $H$ un álgebra de Hopf con antípoda $S$.

(1) $S$ es un antimorfismo de álgebras, es decir,

$$S(hk) = S(k)S(h) \text{ para todo } h, k \in H \text{ y } S(1_H) = 1_H.$$

(2) $S$ es un antimorfismo de coálgebras, es decir,

$$\Delta \circ S = \tau \circ (S \otimes S) \circ \Delta \text{ y } \varepsilon \circ S = \varepsilon.$$

*Demostración.* Notemos primero que como $H \otimes H$ es una coálgebra, $\mathrm{Hom}_\Bbbk(H \otimes H, H)$ es un álgebra con el producto de convolución. Sean $f$ y $g \in \mathrm{Hom}_\Bbbk(H \otimes H, H)$ los únicos morfismos $\Bbbk$-lineales que cumplen que $f(h \otimes k) = S(hk)$ y $g(h \otimes k) = S(k)S(h)$ para todo $h, k \in H$. Para ver que $f = g$ vamos a probar que $f$ es la inversa a izquierda de $m_H$ y $g$ la inversa a derecha, es decir,

$$f * m_H = m_H * g = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}.$$

Sean $h$ y $k \in H$,

$$\begin{aligned}(f * m_H)(h \otimes k) &= f\left((h \otimes k)_{(1)}\right) m_H \left(((h \otimes k)_{(2)}\right) = f\left(h_{(1)} \otimes k_{(1)}\right) m_H \left(h_{(2)} \otimes k_{(2)}\right)\\ &= S\left(h_{(1)}k_{(1)}\right) h_{(2)}k_{(2)} = S\left((hk)_{(1)}\right) (hk)_{(2)}\\ &= \eta_H \circ \varepsilon_H(hk) = \eta_H \circ \varepsilon_{H\otimes H}(h \otimes k).\end{aligned}$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}(m_H * g)(h\otimes k) &= m_H\left((h\otimes k)_{(1)}\right) g\left((h\otimes k)_{(2)}\right)\\ &= m_H\left(h_{(1)}\otimes k_{(2)}\right) g\left(h_{(1)}\otimes k_{(2)}\right) = h_{(1)}k_{(1)}S\left(k_{(2)}\right)S\left(h_{(2)}\right)\\ &= h_{(1)}(\eta\circ\varepsilon)(k)S\left(h_{(2)}\right) = h_{(1)}S\left(h_{(2)}\right)\varepsilon(k)1_H\\ &= \varepsilon(h)\varepsilon(k)1_H = \eta_H\circ\varepsilon_{H\otimes H}(h\otimes k).\end{aligned}$$

Por lo tanto $f = g$. Para ver que $S(1_H) = 1_H$ alcanza con evaluar la expresión

$$S * id_H = \eta\circ\varepsilon$$

en $1_H$. Esto prueba (1), para probar (2) se utiliza un argumento similar. □

### 1.1.5 Módulos y comódulos

Al igual que para las coálgebras primero vamos a dar una definición alternativa de módulo que facilite dualizar la estructura.

**Definición 1.1.16.** Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Un $A$-*módulo* a izquierda es un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ junto con una transformación $\Bbbk$-lineal

$$\gamma : A\otimes M\to M$$

tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} A\otimes A\otimes M \arrow[r, "m_A\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\gamma"] & A\otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ A\otimes M \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk\otimes M \arrow[r, "\eta\otimes id"] \arrow[dr] & A\otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Denotamos por ${}_A\mathcal{M}$ a la categoría de $A$-módulos a izquierda. Los $A$-módulos a derecha se definen de manera análoga.

**Definición 1.1.17.** Sea $C$ una $\Bbbk$-coálgebra. Un $C$-*comódulo a derecha* es un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$ junto con una transformación $\Bbbk$-lineal

$$\rho : M\to M\otimes C$$

tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"] & M\otimes C \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ M\otimes C \arrow[r, "\rho\otimes id"] & M\otimes C\otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr] & M\otimes C \arrow[d, "id\otimes\varepsilon"] \\ & M\otimes\Bbbk \end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathcal{M}^C$ a la categoría de $C$-comódulos a derecha.

La notación de Sweedler se puede extender a comódulos a derecha escribiendo

$$\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)},$$

manteniendo la convención de que $m_{(i)} \in C$ para todo $i \neq 0$. El primer diagrama de la definición de comódulo dice que $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$. Si escribimos esta condición en notación de Sweedler obtenemos que

$$m_{(0)_{(0)}} \otimes m_{(0)_{(1)}} \otimes m_{(1)} = m_{(0)} \otimes m_{(1)_{(1)}} \otimes m_{(1)_{(2)}}.$$

Esto permite escribir

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho(m) = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \otimes m_{(2)}.$$

El segundo diagrama dice, en notación de Sweedler, que

$$m = m_{(0)}\varepsilon(m_{(1)}).$$

De manera análoga se define $\Bbbk$-*comódulo a izquierda* mediante un morfismo

$$\rho' : M \to C \otimes M.$$

En este caso escribimos $\rho'(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$.

**Definición 1.1.18.** Sean $M$ y $N$ dos $C$-comódulos a derecha con morfismos de estructura $\rho_M$ y $\rho_N$ respectivamente. Una transformación $\Bbbk$-lineal $f : M \to N$ se dice *morfismo de $C$-comódulos a derecha* si $\rho_N \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \rho_M$.

**Ejemplo 1.1.8.** Sea $C$ una coálgebra, el espacio vectorial $M = C$ es un cómodulo a derecha definiendo $\rho = \Delta$.

**Ejemplo 1.1.9.** Si $G$ es un grupo y $M$ un $\Bbbk$-espacio vectorial, entonces $M$ es un $\Bbbk G$-comódulo si y sólo si $M$ es $G$-graduado. Para ver esto empecemos suponiendo que $M$ es un $\Bbbk G$-comódulo. Debido a que los elementos de $G$ forman una base de $\Bbbk G$, podemos escribir $\rho(m) = \sum_{g\in G} m_g \otimes g$ de manera única para todo $m \in M$. Esto define, para cada $g \in G$, el subespacio $M_g = \{m_g \mid m \in M\}$. Como

$$m \xmapsto{\rho} \sum_{g\in G} m_g \otimes g \xmapsto{\mathrm{id}\otimes\varepsilon} \sum_{g\in G} m_g \otimes 1 \xmapsto{\sim} \sum_{g\in G} m_g$$

para todo $m \in M$ y esta composición de morfismos resulta ser la identidad, entonces $M = \sum_{g\in G} M_g$. Nos resta ver que la suma es directa. Si usamos que

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \rho = (\rho \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$$

obtenemos que para todo $m \in M$

$$\sum_{g\in G} m_g \otimes g \otimes g = \sum_{g\in G} \sum_{h\in G} (m_g)_h \otimes g \otimes h.$$

Como los elementos de $G$ forman una base de $\Bbbk G$, entonces $(m_g)_h = \delta_{g,h} m_g$ y luego, $M = \oplus_{g\in G} M_g$. Si empezamos suponiendo que $M = \oplus_{g\in G} M_g$ definimos $\rho(m) = m \otimes g$ para todo $m \in M$.

### 1.1.6 Invariantes y coinvariantes

Dado un grupo $G$ actuando sobre un $\Bbbk$-espacio vectorial $M$, los invariantes y los coinvariantes de $M$ por esta acción son isomorfos cuando el orden de $G$ no es cero en $\Bbbk$. Vamos a ver cómo estos objetos se generalizan al caso de la acción de un álgebra de Hopf.

**Definición 1.1.19.** (1) Sean $H$ un álgebra de Hopf y $M$ un $H$-módulo a izquierda. Los *invariantes de* $M$ *por la acción de* $H$ son los elementos $m \in M$ tales que $h \cdot m = \varepsilon(h)m$ para todo $h \in H$. Este conjunto lo denotamos por $M^H$.

(2) Sean $H$ un álgebra de Hopf y $M$ un $H$-comódulo a derecha. Los *coinvariantes de* $H$ *en* $M$ son los elementos $m \in M$ tales que $\rho(m) = m \otimes 1_H$. Este conjunto los denotamos por $M^{\mathrm{co}H}$.

**Ejemplo 1.1.10.** Sea $H = \Bbbk G$. Si $M$ es un $H$-módulo a izquierda, entonces $M^H = M^G$. Si $M$ es un $H$-comódulo a derecha, entonces $M^{\mathrm{co}H} = M_1$, donde $M_1$ es la componente identidad de la graduación del Ejemplo 1.1.9.

**Ejemplo 1.1.11.** Sea $H = U(\mathfrak{g})$. Si $M$ es un $H$-módulo a izquierda, entonces

$$M^H = \{m \in M \mid x \cdot m = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}.$$

### 1.1.7 Producto tensorial de módulos y comódulos

Sea $H$ un álgebra de Hopf y sean $V$ y $W$ dos $H$-módulos a izquierda. El espacio vectorial $V \otimes W$ resulta ser un $H$-módulo a izquierda definiendo

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w$$

para todo $h \in H$, $v \in V$ y $w \in W$. Lo mismo sucede para $H$-módulos a derecha.

Si $H$ es coconmutativo, entonces $V \otimes W \cong W \otimes V$, donde el isomorfismo está dado por la transposición $\tau_{V,W}$. Si removemos la hipótesis de que $H$ sea coconmutativo este resultado es falso. Por ejemplo, sea $H = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk G, \Bbbk)$, donde $G$ es un grupo finito no conmutativo. Veamos primero que $H$ es un álgebra de Hopf. Su estructura de álgebra está dada por $m_H(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$ y $\eta_H(\lambda) = \lambda\varepsilon_{\Bbbk G}$ para todo $f, g \in H$, $x \in G$ y $\lambda \in \Bbbk$. Para describir la estructura de coálgebra consideramos la base $\{p_g \mid g \in G\}$ de $H$, dual a la base de elementos de $G$, es decir, $p_g(h) = \delta_{g,h}$ para todo $g, h \in G$. La comultiplicación se define en esta base como $\Delta_H(p_g) = \sum_{h \in G} p_h \otimes p_{h^{-1}g}$ y se extiende linealmente a $H$. La counidad $\varepsilon_H$ está dada por $\varepsilon_H(f) = f \circ \eta_{\Bbbk G}(1_{\Bbbk})$. Por último la antípoda se define como $S_H = S^*_{\Bbbk G}$. Sean $g, h \in G$ tales que $gh \neq hg$ y sean $\langle p_g \rangle \subseteq H$ y $\langle p_h \rangle \subseteq H$ los subespacios generados por $p_g$ y $p_h$ respectivamente. Estos subespacios son $H$-módulos con la acción dada por la multiplicación a izquierda. Es fácil ver que $p_{gh}(\langle p_g \rangle \otimes \langle p_h \rangle) = \langle p_g \rangle \otimes \langle p_h \rangle$ y que $p_{gh}(\langle p_h \rangle \otimes \langle p_g \rangle) = 0$. Luego $\langle p_g \rangle \otimes \langle p_h \rangle$ y $\langle p_h \rangle \otimes \langle p_g \rangle$ no son isomorfos como $H$-módulos.

Vimos que si $H$ es un álgebra de Hopf y $V$ y $W$ son dos $H$-módulos a izquierda, entonces $V \otimes W$ resulta ser un $H$-módulo a izquierda y dimos una fórmula para la acción. Reescribamos esta fórmula en términos de morfismos para que resulte más sencillo dualizar. Si $\phi_V : H \otimes V \to V$ y $\phi_W : H \otimes W \to W$ son las acciones de $H$ sobre $V$ y $W$ respectivamente, entonces la acción de $H$ sobre $V \otimes W$ está dada por

$$\phi_{V \otimes W} = (\phi_V \otimes \phi_W) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau_{H,V} \otimes \mathrm{id}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}).$$

Sea $H$ un álgebra de Hopf y sean $V$ y $W$ dos $H$-comódulos a derecha con coacciones $\rho_V$ y $\rho_W$ respectivamente. El espacio vectorial $V \otimes W$ resulta ser un $H$-comódulo a derecha mediante el morfismo

$$\rho_{V\otimes W} = (\mathrm{id} \otimes m) \circ (\mathrm{id} \otimes \tau_{H,W} \otimes \mathrm{id}) \circ (\rho_V \otimes \rho_W)\,.$$

En notación de Sweedler $\rho(v \otimes w) = v_{(0)} \otimes w_{(0)} \otimes v_{(1)} w_{(1)}$ para todo $v \in V$ y $w \in W$.

### 1.1.8 Módulo álgebras, comódulo álgebras y productos smash

A partir de ahora todos los módulos son módulos a izquierda y todos los comódulos son comódulos a derecha.

**Definición 1.1.20.** Sea $H$ un álgebra de Hopf. Un álgebra $A$ es un $H$-*módulo álgebra* si:

(1) $A$ es un $H$-módulo con acción $\cdot : H \otimes A \to A$,

(2) $h \cdot (ab) = (h_{(1)} \cdot a)(h_{(2)} \cdot b)$,

(3) $h \cdot 1_A = \varepsilon(h) 1_A$,

para todo $h \in H$, $a, b \in A$. Las condiciones (2) y (3) dicen que la multiplicación $m_A$ y la unidad $\eta_A$ son morfismos de $H$-módulos.

**Definición 1.1.21.** Sea $H$ un álgebra de Hopf. Un álgebra $A$ es un $H$-*comódulo álgebra* si:

1. $A$ es un $H$-comódulo con coacción $\rho : A \to A \otimes H$,
2. la multiplicación $m_A$ y la unidad $\eta_A$ son morfismos de $H$-comódulos.

En notación de Sweedler la condición (2) dice que

$$(ab)_{(0)} \otimes (ab)_{(1)} = \rho(ab) = a_{(0)} b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)}$$

para todo $a, b \in A$ y que $\rho(1) = 1 \otimes 1$.

**Definición 1.1.22.** Sean $H$ un álgebra de Hopf y $A$ un $H$-módulo álgebra. Se define el *producto smash* $A\#H$ de la siguiente manera:

(1) El espacio vectorial subyacente es $A \otimes H$ y escribimos $a\#h$ en vez de $a \otimes h$.

(2) La multiplicación está dada en los tensores elementales por

$$(a\#h)(b\#k) = a(h_{(1)} \cdot b)\#h_{(2)}k.$$

**Ejemplo 1.1.12.** Sean $H$ un álgebra de Hopf y $A$ un álgebra. La acción trivial $h \cdot a = \varepsilon(h)a$ para todo $h \in A$ y $a \in A$ le da estructura a $A$ de $H$-módulo álgebra. Es fácil ver que en este caso $A\#H \cong A \otimes H$.

**Ejemplo 1.1.13.** Sea $A$ un $\Bbbk G$-módulo álgebra. Como $\Delta(g) = g \otimes g$ para todo $g \in G$ y $m_A$ es un morfismo de $\Bbbk G$-módulos, entonces $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$ para todo $g \in G$ y $a, b \in A$, es decir que cada $g$ actúa como endomorfismo de $A$. Más aún como $g$ es inversible, $g$ actúa como un automorfismo. Luego la estructura de $\Bbbk G$-módulo álgebra de $A$ induce un morfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}_{\Bbbk} A$. Recíprocamente un morfismo de grupos de $G$ en los automorfismos de $A$ induce una estructura de $\Bbbk G$-módulo álgebra en $A$. En este caso $A\#\Bbbk G$ es el producto semidirecto de $A$ con $G$.

**Ejemplo 1.1.14.** Sea $A$ un $\Bbbk G$-comódulo álgebra. Ya sabemos que $A = \oplus_{g \in G} A_g$ como $\Bbbk$-espacio vectorial y que para todo $a_g \in A_g$, $\rho(a_g) = a_g \otimes g$. Como $m_A$ es un morfismo de $H$-comódulos, entonces $\rho(a_g b_h) = a_g b_h \otimes gh$, es decir, $a_g b_h \in A_{gh}$ o lo que es lo mismo $A_g A_h \subseteq A_{gh}$. Más aún, como $\eta_A$ es un morfismo de $H$-comódulos, entonces $\rho(1_A) = 1_A \otimes 1_G$ y por lo tanto $A$ es un álgebra $G$-graduada.

**Ejemplo 1.1.15.** Sea $A$ un $U(\mathfrak{g})$-módulo álgebra. Como $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ para todo $x \in \mathfrak{g}$, entonces $x \cdot (ab) = (x \cdot a)b + a(x \cdot b)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $a, b \in A$, es decir, los elementos de $\mathfrak{g}$ actúan como $\Bbbk$-derivaciónes y esto induce un morfismo de álgebras de Lie $U(\mathfrak{g}) \to \operatorname{Der}_{\Bbbk} A$.

### 1.1.9 Dimensión de Gelfand-Kirillov

En esta subsección definimos la dimensión de Gelfand-Kirillov que será mencionada al final de la próxima sección. Nos basamos en [McR, Capítulo 8]. Todas las demostraciones omitidas se encuentran en ese capítulo.

Empezamos con una definición auxiliar.

**Definición 1.1.23.** Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$ una función. Decimos que $f$ tiene crecimiento polinomial si existen $\nu \in \mathbb{R}$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que $f(n) \leq n^{\nu}$ para todo $n \geq N$. Si este es el caso llamamos

$$\gamma(f) = \inf\{\nu \mid f(n) \leq n^{\nu} \text{ para todo } n \text{ lo suficientemente grande }\}.$$

Si $f$ no tiene crecimiento polinomial decimos que $\gamma(f) = \infty$.

Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada y sea $V \subseteq A$ un subespacio generador de dimensión finita. Llamamos $V^n$ al subespacio de $A$ generado por los elementos de la forma $x_1 \dots x_n$, donde $x_i \in V$ para todo $i$ y llamamos $R_n = \sum_{i=0}^{n} V^i$, donde $R_0 = V^0 = \Bbbk$. El conjunto $\{R_n\}_{n \geq 0}$ es una filtración de $A$. Resulta que $\gamma(\dim(R_n))$ no depende del subespacio generador $V$ y eso permite hacer la siguiente definición.

**Definición 1.1.24.** Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra finitamente generada, sea $V \subseteq A$ un subespacio generador y sea $\{R_n\}_{n \geq 0}$ la filtración asociada a $V$. Se define la *dimensión de Gelfand-Kirillov* de $A$ como

$$GK(A) = \gamma(\dim(R_n)).$$

Esta definición se extiende a $\Bbbk$-álgebras arbitrarias como sigue

$$GK(A) = \sup\{GK(R) \mid R \text{ es una subálgebra de } A \text{ finitamente generada}\}.$$

**Ejemplo 1.1.16.** Damos algunos ejemplos sencillos:

- Si $A = \Bbbk[x_1, \dots, x_s]$, entonces $GK(A) = s$.
- Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces $GK(U(\mathfrak{g})) = \dim(\mathfrak{g})$.
- Si $A$ es el álgebra libre $\Bbbk < x_1, \dots, x_s >$, con $s \geq 2$, entonces $GK(A) = \infty$.

## 1.2 Álgebras de Nichols

Esta sección se basa en [AS2]. Todas las demostraciones omitidas se encuentran en ese artículo salvo que aclaremos lo contrario.

### 1.2.1 Espacios vectoriales trenzados y módulos de Yetter-Drinfeld

En esta subsección estudiaremos cuándo el producto smash de un álgebra de Hopf $H$ por un $H$-módulo álgebra resulta ser un álgebra de Hopf. Un teorema de Radford [Ra] dice que si $H$ es un álgebra de Hopf y $B$ es un álgebra de Hopf en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld sobre $H$, entonces $B\#H$ es un álgebra de Hopf. En general que $B$ sea un álgebra, coálgebra, biálgebra o álgebra de Hopf en una categoría $\Bbbk$-lineal $\mathcal{C}$ quiere decir que los morfismos de estructura de $B$ son morfismos en $\mathcal{C}$. Las categorías que nos interesan son las de módulos y comódulos sobre un álgebra de Hopf $H$. Por ejemplo, un álgebra $A$ en ${}_H\mathcal{M}$ es simplemente un $H$-módulo álgebra a izquierda. Análogamente una coálgebra $C$ en ${}_H\mathcal{M}$ es un $H$-módulo coálgebra. Para que $B$ sea una biálgebra en una categoría $\mathcal{C}$ no solo se requiere que $B$ sea un álgebra y una coálgebra en $\mathcal{C}$, sino que también la comultiplicación $\Delta_B : B \to B \otimes B$ debe ser un morfismo en la categoría. En particular $B \otimes B$ debe ser un álgebra en $\mathcal{C}$. La multiplicación usual del producto tensorial de dos álgebras $A$ y $B$ está dada por

$$m_{A\otimes B} = (m_A \otimes m_B) \circ (id \otimes \tau_{A,B} \otimes id)\,.$$

Notar que antes de usar los morfismos $m_A$ y $m_B$ se aplica la transposición $\tau_{A,B}$. Esto sugiere que en la categoría $\mathcal{C}$ debe haber una forma de "torcer" productos tensoriales.

**Definición 1.2.1.** Sean $V$ un $\Bbbk$-espacio vectorial y $c : V \otimes V \to V \otimes V$ un isomorfismo lineal. Decimos que $(V, c)$ es un *espacio vectorial trenzado* si $c$ es solución de la *ecuación de trenzas*, es decir,

$$(c \otimes id) \circ (id \otimes c) \circ (c \otimes id) = (id \otimes c) \circ (c \otimes id) \circ (id \otimes c).$$

**Ejemplo 1.2.1.** Sea $V$ un $\Bbbk$-espacio vectorial con base $\{x_i\}_{i\in I}$ y sea $\{q_{i,j}\}_{i,j\in I} \subseteq \Bbbk$ un conjunto de escalares no nulos. El isomorfismo $c : V \otimes V \to V \otimes V$ dado por

$$c(x_i \otimes x_j) = q_{i,j} x_j \otimes x_i$$

es solución de la ecuación de trenzas. A estos espacios vectoriales trenzados se los llama *de tipo diagonal*.

En esta sección nos vamos a concentrar en estudiar ejemplos de espacios vectoriales trenzados que provengan de módulos de Yetter-Drinfeld.

**Definición 1.2.2.** Sea $H$ un álgebra de Hopf. Un $\Bbbk$-espacio vectorial $V$ es un *módulo de Yetter-Drinfeld a izquierda sobre* $H$ si $(V, \cdot)$ es un $H$-módulo a izquierda, $(V, \rho)$ es un $H$-comódulo a izquierda y se satisface la siguiente condición de compatibilidad:

$$\rho(h \cdot v) = h_{(1)} v_{(-1)} S(h_{(3)}) \otimes h_{(2)} \cdot v_{(0)}$$

para todo $h \in H$ y para todo $v \in V$. La categoría de módulos de Yetter-Drinfeld a izquierda sobre $H$ se denota por ${}^H_H\mathcal{YD}$ y sus morfismos preservan la acción y la coacción.

Sea $H$ un álgebra de Hopf y sean $V, W \in {}^H_H\mathcal{YD}$. El espacio vectorial $V \otimes W$ resulta ser un módulo de Yetter-Drinfeld a izquierda sobre $H$ definiendo

$$\rho(v \otimes w) = v_{(-1)} w_{(-1)} \otimes (v_{(0)} \otimes w_{(0)}) \quad \text{y} \quad h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w$$

para todo $v \in V$, $w \in W$ y $h \in H$.

**Definición 1.2.3.** Sea $H$ un álgebra de Hopf y sean $V, W \in {}^H_H\mathcal{YD}$. La trenza

$$c_{V,W} : V \otimes W \to W \otimes V$$

es la única transformación $\Bbbk$-lineal que cumple que

$$c_{V,W}(v \otimes w) = v_{(-1)} \cdot w \otimes v_{(0)}$$

para todo $v \in V$ y $w \in W$.

Los módulos de Yetter-Drinfeld sobre álgebras de grupo son muy importantes por sus aplicaciones al estudio de álgebras de Hopf punteadas.

**Ejemplo 1.2.2.** Sean $G$ un grupo abeliano y $V \in {}^{\Bbbk G}_{\Bbbk G}\mathcal{YD}$. Análogamente a lo que sucede para $\Bbbk G$-comódulos a derecha, resulta que $V = \oplus_{g \in G} V_g$, donde $V_g = \{v \in V \mid \rho(v) = g \otimes v\}$. Debido a la condición de compatibilidad, resulta que $\rho(h \cdot v) = hgh^{-1} \otimes h \cdot v = g \otimes h \cdot v$ para todo $v \in V$ y $h \in H$. Luego para cada $g \in G$, el subespacio vectorial $V_g$ es un $G$-módulo. En este caso la trenza asociada a $V \otimes V$ está dada por $c_{V,V}(x \otimes y) = g \cdot y \otimes x$ para todo $g \in G$, $x \in V_g$, $y \in V$.

Si suponemos que para cada $g \in G$ el grupo $G$ actúa por caracteres sobre $V_g$, entonces $V_g = \oplus_{\xi \in \hat{G}} V_g^\xi$, donde

$$V_g^\xi = \{v \in V_g \mid h \cdot v = \xi(h)v \text{ para todo } h \in G\}.$$

Notar que $V$ es un módulo de Yetter-Drinfeld de *tipo diagonal*. Si $\Bbbk$ es algebraicamente cerrado, la característica de $\Bbbk$ es cero y $G$ es un grupo finito abeliano, entonces todo módulo de Yetter-Drinfeld sobre $\Bbbk G$ de dimensión finita es de tipo diagonal.

### 1.2.2 Álgebras de Hopf trenzadas

El hecho de que haya productos tensoriales en la categoría de módulos de Yetter-Drinfeld permite definir allí la noción de álgebra y coálgebra.

**Definición 1.2.4.** Sean $H$ un álgebra de Hopf y $B \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Decimos que $B$ es un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ si $(B, m_B, \eta_B)$ es una $\Bbbk$-álgebra tal que la multiplicación $m_B$ y la unidad $\eta_B$ son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

**Definición 1.2.5.** Sean $H$ un álgebra de Hopf y $B \in {}^H_H\mathcal{YD}$. Decimos que $B$ es una coálgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ si $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ es una $\Bbbk$-coálgebra tal que la comultiplicación $\Delta_B$ y la counidad $\varepsilon_B$ son morfismos en ${}^H_H\mathcal{YD}$.

Sean $H$ un álgebra de Hopf y $B$ un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$. La trenza $c_{B,B} : B \otimes B \to B \otimes B$ le da a $B \otimes B$ estructura de álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$ definiendo

$$m_{B \otimes B} = (m_B \otimes m_B) \circ (\mathrm{id} \otimes c_{B,B} \otimes \mathrm{id}).$$

Esta estructura de álgebra trenzada que tiene el producto tensorial de álgebras permite hacer la siguiente definición.

**Definición 1.2.6.** Sea $H$ un álgebra de Hopf. Decimos que $B$ es un *álgebra de Hopf trenzada en* ${}^H_H\mathcal{YD}$ si

- $(B, m_B, \eta_B)$ es un álgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$,

- $(B, \Delta_B, \varepsilon_B)$ es una coálgebra en ${}^H_H\mathcal{YD}$,
- $\Delta_B$ y $\varepsilon_B$ son morfismos de álgebras en ${}^H_H\mathcal{YD}$,
- existe un morfismo $S_B : B \to B$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ que resulta ser la inversa de $id_B$ para el producto de convolución.

Para no confundir el coproducto de $B$ con el de $H$ escribimos $\Delta_B(b) = b^{(1)} \otimes b^{(2)}$ para todo $b \in B$. Un álgebra de Hopf trenzada *graduada* en ${}^H_H\mathcal{YD}$ es un álgebra de Hopf trenzada $B$ en ${}^H_H\mathcal{YD}$ junto con una graduación $B = \oplus_{n\geq 0} B(n)$, donde cada $B(n)$ es un módulo de Yetter-Drinfeld y con esta graduación $B$ es un álgebra graduada y una coálgebra graduada.

**Ejemplo 1.2.3.** Si $H$ es el álgebra del grupo trivial, entonces $B$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ si y sólo si $B$ es un álgebra de Hopf.

**Ejemplo 1.2.4.** Sean $H$ un álgebra de Hopf y $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$. El álgebra tensorial $T(V) = \oplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ es un álgebra de Hopf trenzada en ${}^H_H\mathcal{YD}$ con comultiplicación y counidad dadas por

$$\Delta(v) = v \otimes 1 + 1 \otimes v, \quad \varepsilon(v) = 0 \quad \text{para todo } v \in V.$$

La existencia de la antípoda se puede encontrar en [Mon, 5.2.10]. Si $H = \Bbbk G$, $V$ es de tipo diagonal, $g \in G$, $v \in V_g$ y $w \in W$, entonces

$$\Delta(vw) = 1 \otimes vw + (g \cdot w) \otimes v + v \otimes w + vw \otimes 1.$$

**Proposición 1.2.1.** (Biproducto de Radford, bosonización de Majid) Sean $H$ un álgebra de Hopf y $B \in {}^H_H\mathcal{YD}$ un álgebra de Hopf trenzada. El product smash $B\#H$ resulta ser un álgebra de Hopf definiendo:

$$\begin{aligned}
\Delta(b \otimes h) &= \left(b^{(1)} \otimes (b^{(2)})_{(-1)} h_{(1)}\right) \otimes \left((b^{(2)})_{(0)} \otimes h_{(2)}\right), \\
S(b \otimes h) &= \left(1 \otimes S(h) S\left(b_{(-1)}\right)\right) \left(S_B\left(b_{(0)}\right) \otimes 1\right)
\end{aligned}$$

para todo $b \in B$ y para todo $h \in H$.

*Demostración.* Ver [Ra]. □

### 1.2.3 Definiciones y ejemplos de álgebras de Nichols

Una herramienta esencial para el estudio de álgebras de Hopf punteadas es la *filtración coradical*

$$A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A, \cup_{n\geq 0} A_n = A$$

donde $A$ es un álgebra de Hopf, $A_0$ es la suma de todas las subcoálgebras simples de $A$ y $A_{n+1} = \Delta^{-1}(A_n \otimes A + A \otimes A_0)$, para todo $n \geq 1$. En el caso en el que $A$ sea un álgebra de Hopf punteada, esta filtración resulta ser una filtración de álgebras de Hopf. Por un teorema de Radford [Ra] el graduado asociado $\mathrm{gr}(A)$ a esta filtración es el biproducto $R\#\Bbbk\Gamma$, donde $\Gamma$ es el grupo de todos los elementos tipo grupo de $A$ y $R$ es un álgebra de Hopf trenzada graduada en la categoría de módulos a izquierda de Yetter-Drinfeld de $\Bbbk\Gamma$. El espacio vectorial $V$ formado por todos los elementos primitivos de $R$ es un submódulo de Yetter-Drinfeld de $R$. La subálgebra $\mathfrak{B}(V)$ de $R$ generada por los elementos de $V$ es una subálgebra de Hopf trenzada. En su tesis [Ni], Nichols estudió las álgebras de Hopf de la forma $\mathfrak{B}(V)\#\Bbbk\Gamma$. El álgebra $\mathfrak{B}(V)$ se llama *álgebra de Nichols de* $V$.

Para poder definir formalmente álgebra de Nichols necesitamos enunciar el siguiente lema.

**Lema 1.2.1.** Sean $H$ un álgebra de Hopf, $V \in {}^H_H\mathcal{YD}$ y $T(V)$ el álgebra de Hopf trenzada del Ejemplo 1.2.4. Existe un único coideal maximal $\mathfrak{I}(V)$ entre todos los coideales de $T(V)$ que están contenidos en $\oplus_{n\geq 2}V^{\otimes n}$. Este coideal es homogéneo con respecto a la graduación de $T(V)$ y resulta ser un ideal.

**Definición 1.2.7.** La coálgebra cociente $\mathfrak{B}(V) = T(V)/\mathfrak{I}(V)$ se llama *álgebra de Nichols de $V$*.

**Teorema 1.2.1.** La coálgebra $\mathfrak{B}(V)$ es un álgebra de Hopf trenzada $\mathbb{N}_0$-graduada.

Los siguientes dos ejemplos son los más sencillos de álgebras de Nichols. Para simplificar no vamos a escribir los elementos de $T(V)$ con el símbolo del producto tensorial.

**Ejemplo 1.2.5.** Si $H$ es el álgebra del grupo trivial, entonces $V = V_1$ y $1 \cdot v = v$ para todo $v \in V$. Utilizando la fórmula del Ejemplo 1.2.4 obtenemos que

$$\Delta(vw - wv) = 1 \otimes (vw - wv) + (vw - wv) \otimes 1$$

y por lo tanto $vw - wv \in \mathfrak{I}(V)$ para todo $v, w \in V$. Se puede ver que $\mathfrak{I}(V)$ es el ideal generado por los elementos de la forma $vw - wv$ con $v, w \in V$ y luego $\mathfrak{B}(V)$ resulta ser el álgebra simétrica $S(V)$.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea $H = \Bbbk\mathbb{Z}_2$ y supongamos que $V = V_{-1}$ y que $-1 \cdot v = -v$ para todo $v \in V$. Utilizando la misma fórmula que en el ejemplo anterior obtenemos que

$$\Delta(v^2) = 1 \otimes v^2 + v^2 \otimes 1$$

y por lo tanto $v^2 \in \mathfrak{I}(V)$. Nuevamente se puede ver que $\mathfrak{I}(V)$ está generado por los elementos de la forma $v^2$ con $v \in V$. En este caso $\mathfrak{B}(V)$ resulta ser el álgebra exterior $\bigwedge(V)$.

Un problema importante y difícil es determinar el coideal $\mathfrak{I}(V)$ como hicimos en los ejemplos anteriores.

A partir de ahora $H = \Bbbk G$, donde $\Bbbk$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, $\operatorname{car}(\Bbbk) = 0$ y $G$ es un grupo abeliano. Sea $V$ un módulo de Yetter-Drinfeld a izquierda sobre $H$. Ya sabemos, por lo que vimos en el Ejemplo 1.2.2, que $V = \oplus_{g\in G}V_g$ y que $V_g$ es un $G$-módulo para cada $g \in G$.

En el artículo [AAH2] y las referencias incluidas, los autores estudian la siguiente versión del problema que mencionamos antes. Supongamos que la dimensión de $V$ es finita. Se quiere determinar cuándo la dimensión de Gelfand-Kirillov de $\mathfrak{B}(V)$ es finita y describir el coideal $\mathfrak{I}(V)$. Por hipótesis, $V$ es suma directa de indescomponibles, lo cual permite suponer que $V$ es indescomponible y por lo tanto $V \subseteq V_g$ para algún $g \in G$. A su vez esto nos permite suponer que $V \in {}^{\Bbbk\mathbb{Z}}_{\Bbbk\mathbb{Z}}\mathcal{YD}$ donde $\mathbb{Z} = \langle g \rangle$. Como restringimos escalares, $V$ puede dejar de ser indescomponible. Sea $\mathcal{V}_n(\epsilon, l)$ un objeto en ${}^{\Bbbk\mathbb{Z}}_{\Bbbk\mathbb{Z}}\mathcal{YD}$, homogéneo de grado $g^n$ y dimensión $l > 1$, donde la acción de $g$ está dada por un bloque de Jordan de tamaño $l$ y autovalor $\epsilon$. En este caso, vale el siguiente teorema [AAH].

**Teorema 1.2.2.** La dimensión de Gelfand-Kirillov de $\mathfrak{B}\left(\mathcal{V}_n(\varepsilon, l)\right)$ es finita si y sólo si $l = 2$ y $\varepsilon = \pm 1$. Además,

- si $\varepsilon = 1$, entonces
$$\mathfrak{B}\left(\mathcal{V}_n(1,2)\right) = \Bbbk\left\langle x, y \mid yx - xy + \frac{1}{2}x^2 \right\rangle.$$

- Si $\varepsilon = -1$, entonces
$$\mathfrak{B}\left(\mathcal{V}_n(-1,2)\right) = \Bbbk\left\langle x, y \mid x^2, y^2x - xy^2 - xyx \right\rangle.$$

  El álgebra $\mathfrak{B}\left(\mathcal{V}_n(1,2)\right)$ se conoce como *el plano de Jordan* y $\mathfrak{B}\left(\mathcal{V}_n(-1,2)\right)$ se conoce como *el super plano de Jordan*.

En el mismo artículo en el que se encuentra el teorema recién mencionado, se demuestra que el super plano de Jordan tiene como base al conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ x^a (yx)^b y^c \mid a \in \{0,1\}, b, c \geq 0 \right\}.$$

# Capítulo 2

# Preliminares homológicos

En este capítulo daremos ciertas definiciones y resultados del álgebra homológica que serán necesarios para el próximo capítulo. En la primera sección daremos una definición de la homología y la cohomología de Hochschild. En la segunda sección describiremos ciertas estructuras algebraicas que tiene la cohomología de Hochschild. En la última sección resumiremos algunos resultados de sucesiones espectrales que serán utilizados para facilitar los cálculos del siguiente capítulo.

## 2.1 Homología y cohomología de Hochschild

Esta sección se basa en [We] y en [Gi].

Antes de definir homología y cohomología de Hochschild es necesario observar el siguiente hecho. El álgebra envolvente de $A$ es la $\Bbbk$-álgebra $A^e = A \otimes A^{op}$ con producto definido por $(a \otimes b)(c \otimes d) = ac \otimes db$. Debido a que el producto en $A^{op}$ está invertido, es lo mismo considerar un $A$-módulo a derecha que un $A^{op}$-módulo a izquierda. Por lo tanto dar un $A - A$ bimódulo $M$ es lo mismo que dar un $A^e$-módulo a izquierda, con acción de $A^e$ dada por $(a \otimes b) \cdot m = a \cdot m \cdot b$ para todo $a, b \in A$ y para todo $m \in M$; también es lo mismo que un $A^e$-módulo a derecha, con acción dada por $m \cdot (a \otimes b) = b \cdot m \cdot a$. Esto permite identificar a la categoría de $A - A$ bimódulos con la categoría de $A^e$-módulos a izquierda, lo cual asegura que la categoría de $A - A$ bimódulos tiene suficientes proyectivos.

**Definición 2.1.1.** Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra y $M$ un $A - A$ bimódulo. Se define la *homología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $M$* como

$$H_\bullet(A, M) = \mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A, M)$$

y se define la *cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $M$* como

$$H^\bullet(A, M) = \mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A, M).$$

Para calcular los grupos de homología y cohomología de Hochschild es necesario elegir alguna resolución de $A$ como $A - A$ bimódulo, o lo que es lo mismo, como $A^e$-módulo a izquierda. Sabemos que siempre existe una tal resolución porque la categoría tiene suficientes proyectivos. La resolución que fue usada en la definición original de homología y cohomología de Hochschild es la *resolución bar*.

**Definición 2.1.2.** Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. Se define el *complejo bar de* $A$ *de* $A-A$ *bimódulos*

$$B_\bullet A : \ldots \xrightarrow{b_3'} A\otimes A^{\otimes 3}A \xrightarrow{b_2'} A\otimes A^{\otimes 2}A \xrightarrow{b_1'} A\otimes A\otimes A \xrightarrow{b_0'} A\otimes A \longrightarrow 0$$

donde, para cada $n \geq 0$, el diferencial $b_n : A\otimes A^{\otimes(n+1)}\otimes A \to A\otimes A^{\otimes n}\otimes A$ está dado por

$$\begin{aligned} b_n'(1\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1) &= a_0\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1 \\ &+\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}\otimes a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n\otimes 1+(-1)^{n+1}\otimes\cdots\otimes a_n. \end{aligned}$$

El complejo bar junto con la multiplicación $m_A : A\otimes A \to A$ es una resolución libre de $A$ como $A^e$-módulo a izquierda. Una demostración de este hecho se puede encontrar en [CE, Capítulo 9].

Para calcular los espacios $H_i(A, M)$ aplicamos el funtor $M\otimes_{A^e} -$ al complejo bar y obtenemos

$$M\otimes_{A^e} B_\bullet A : \ldots \xrightarrow{id\otimes b_2'} M\otimes_{A^e} A^{\otimes 4} \xrightarrow{id\otimes b_1'} M\otimes_{A^e} A^{\otimes 3} \xrightarrow{id\otimes b_0'} M\otimes_{A^e} A^{\otimes 2} \longrightarrow 0.$$

Es posible realizar la siguiente simplificación. Dado

$$m\otimes_{A^e}(a_0\otimes\cdots\otimes a_n)\in M\otimes_{A^e} A^{\otimes n},$$

observemos que:

$$\begin{aligned} m\otimes_{A^e}(a_0\otimes\cdots\otimes a_n) &= m\otimes_{A^e}(a_0\otimes a_n^{op})\cdot(1\otimes a_1\cdots\otimes a_{n-1}\otimes 1) \\ &= m\cdot(a_0\otimes a_n^{op})\otimes_{A^e}(1\otimes a_1\cdots\otimes a_{n-1}\otimes 1) \\ &= (a_n\cdot m\cdot a_0)\otimes_{A^e}(1\otimes a_1\cdots\otimes a_{n-1}\otimes 1). \end{aligned}$$

Esta igualdad sugiere el siguiente isomorfismo $\Bbbk$-lineal

$$m\otimes_{A^e}(a_0\otimes\cdots\otimes a_n)\in M\otimes_{A^e} A^{\otimes n}\mapsto (a_n\cdot m\cdot a_0)\otimes_{A^e}(a_1\cdots\otimes a_{n-1})\in M\otimes_{A^e} A^{\otimes n-2}$$

que identifica $M\otimes_{A^e} A^{\otimes n}$ con $M\otimes_{A^e} A^{\otimes n-2}$ e induce el siguiente complejo isomorfo

$$\ldots \xrightarrow{b_3} M\otimes A^{\otimes 3} \xrightarrow{b_2} M\otimes A^{\otimes 2} \xrightarrow{b_1} M\otimes A \xrightarrow{b_0} M \longrightarrow 0.$$

donde los diferenciales están dados por

$$\begin{aligned} b_0(m\otimes a) &= m\cdot a - a\cdot m, \\ b_n(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) &= m\cdot a_1\otimes\cdots\otimes a_n \\ &+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n+(-1)^n a_n\cdot m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1}. \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$.

Para calcular la cohomología de Hochschild aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, M)$ al complejo bar y obtenemos

$$\ldots \xleftarrow{d_2'} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 4}, M) \xleftarrow{d_1'} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 3}, M) \xleftarrow{d_0'} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^{\otimes 2}, M) \longleftarrow 0$$

donde $d_n'(f) = fb_n'$ para todo $f \in \operatorname{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes n+2}, M\right)$ y para todo $n \geq 0$.

Nuevamente es posible realizar una simplificación. Para todo $n \geq 0$,

$$\operatorname{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes(n+2)}, M\right) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}\left(A^{\otimes n}, M\right),$$

mediante el isomorfismo que asocia $\varphi \in \operatorname{Hom}_{A^e}\left(A^{\otimes(n+2)}, M\right)$ con la transformación $\mathbb{k}$-lineal

$$(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \in A^{\otimes n} \mapsto \varphi(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes 1) \in M.$$

Esto reduce el cálculo de la cohomología de Hochschild al cálculo de la homología del siguiente complejo:

$$\ldots \xleftarrow{d_2} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}\left(A^{\otimes 2}, M\right) \xleftarrow{d_1} \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}(A, M) \xleftarrow{d_0} M \longleftarrow 0$$

donde los diferenciales están dados por

$$\begin{aligned}
&d_0(m)(a) = a \cdot m - m \cdot a, \\
&d_n(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) = a_1 \cdot f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n+1}) \\
&\qquad + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot a_{n+1}
\end{aligned}$$

para todo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{k}}\left(A^{\otimes n}, M\right)$ y para todo $n \geq 1$.

A partir de la definición, es claro que si $A$ es proyectivo como $A^e$-módulo, resulta que $H^n(A, M) = H_n(A, M) = 0$ para todo $n \geq 1$ y para todo $A^e$-módulo $M$. Por lo tanto, es importante poder determinar cuándo $A$ es $A^e$-proyectivo. Al igual que en el Capítulo 1, llamamos $m_A : A^e \to A$ a la multiplicación del álgebra.

**Proposición 2.1.1.** El álgebra $A$ es $A^e$-proyectiva si y solo si existe un elemento $e \in A^e$ tal que $m_A(e) = 1$ y $ae = ea$ para todo $a \in A$.

*Demostración.* Supongamos primero que $A$ es un $A^e$-módulo proyectivo. Como el morfismo $m_A$ es sobreyectivo, existe un morfismo $\sigma : A \to A^e$ tal que $m_A \sigma = id_A$. Llamamos $e = \sigma(1)$, luego $m_A(e) = 1$ y $ae = a\sigma(1) = \sigma(a) = \sigma(1)a = ea$ para todo $a \in A$.

Ahora supongamos que existe un elemento $e$ perteneciente a $A^e$ que cumple las condiciones del enunciado. Sea $\sigma : A \to A^e$ la función dada por $\sigma(a) = ae$. Debido a que $ae = ea$ para todo $a \in A$, resulta que $\sigma$ es un morfismo de $A^e$-módulos y como $m_A(e) = 1$, entonces $m_A \sigma = id_A$. Veamos que $A$ es $A^e$-proyectivo. Sean $M$ y $N$ dos $A^e$-bimódulos y sean $f : M \to N$ y $g : A \to N$ dos morfismos de $A^e$-módulos, con $f$ sobreyectivo. Como $A^e$ es $A^e$-proyectivo, existe un morfismo $h : A^e \to M$ tal que $fh = gm_A$ y por lo tanto $fh\sigma = g$. $\square$

**Ejemplo 2.1.1.** Sea $A = M_n(\mathbb{k})$, el álgebra de matrices cuadradas de tamaño $n$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{k}$ y sea $e = \sum_{i=1}^{n} E_{i1} \otimes E_{1i} \in A^e$. Veamos que $e$ verifica las condiciones de la proposición anterior. Dado $B \in A$, resulta que

$$\begin{aligned} Be &= \sum_{i=1}^{n} BE_{i1} \otimes E_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{j=1}^{n} B_{ji}E_{j1} \right) \otimes E_{1i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E_{j1} \otimes B_{ji}E_{1i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} E_{j1} \otimes E_{1i}B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} E_{j1} \otimes E_{1i}B_{ji} = \sum_{j=1}^{n} E_{j1} \otimes \left( \sum_{i=1}^{n} E_{1i}B_{ji} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} E_{j1} \otimes E_{1j}B = eB. \end{aligned}$$

Por otro lado, $m_A(e) = \sum_{i=1}^{n} E_{i1}E_{1i} = \mathrm{Id}_A$ y por lo tanto $H^m(M_n(\Bbbk), M)$ y $H_m(M_n(\Bbbk), M)$ son nulos para todo $m \geq 1$ y para todo $M_n(\Bbbk)$-módulo $M$.

**Ejemplo 2.1.2.** Sea $A = \Bbbk G$, donde $G$ es un grupo finito cuyo cardinal es inversible en $\Bbbk$. El elemento $e = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} x^{-1} \otimes x \in A^e$ verifica las condiciones de la proposición anterior y por lo tanto $H^m(\Bbbk G, M)$ y $H_m(\Bbbk G, M)$ son nulos para todo $m \geq 1$ y para todo $\Bbbk G$-módulo $M$.

Describamos ahora los primeros dos espacios de cohomología.

- $H^0(A, M)$ es isomorfo $\mathrm{Ker}(d_0)$. Un elemento $m$ pertenece a $\mathrm{Ker}\,(d_0)$ si y solo si $a \cdot m - m \cdot a = 0$ para todo $a \in A$. En particular, si $M = A$, resulta que $H^0(A, A)$ es el centro del álgebra.

- Para obtener una descripción de $H^1(A, M)$ vamos a calcular por separado $\mathrm{Ker}(d_1)$ e $\mathrm{Im}(d_0)$. Dado $f \in \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, M)$, $f$ pertenece a $\mathrm{Ker}(d_1)$ si y solo si

  $$0 = d_1(f)(a_1 \otimes a_2) = a_1 \cdot f(a_2) - f(a_1a_2) + f(a_1) \cdot a_2$$

  para todo $a_1, a_2 \in A$. Por lo tanto, $\mathrm{Ker}(d_1)$ es el subespacio de $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(A, M)$ cuyos elementos son las *derivaciones*, $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(A, M)$. Por otro lado la imagen de $d_0$ es el conjunto de *derivaciones interiores* $\mathrm{Inn}_{\Bbbk}(A, M)$, es decir, los morfismos de la forma $a \mapsto a \cdot m - m \cdot a$ para algún $m \in M$. Luego $H^1(A, M)$ resulta ser isomorfo al conjunto de *derivaciones exteriores*

  $$\mathrm{Der}_{\Bbbk}(A, M) / \mathrm{Inn}_{\Bbbk}(A, M).$$

  Notar que si $M = A$, entonces $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(A) := \mathrm{Der}_{\Bbbk}(A, A)$ es un álgebra de Lie e $\mathrm{Inn}_{\Bbbk}(A)$ es un ideal de Lie. Por lo tanto $H^1(A, A)$ es un álgebra de Lie.

**Ejemplo 2.1.3.** Sea $Q$ un carcaj finito y sea $\Bbbk Q$ el álgebra de caminos. Sea $A = \Bbbk Q/J^2$, donde $J$ es el ideal generado por las flechas. Vamos a probar que si $H^1(A, A)$ es igual a cero, entonces $Q$ es un árbol. Sea $Q_0 = \{e_1, \dots, e_n\}$ el conjunto de vértices, sea $Q_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ el conjunto de flechas y llamamos $G$ al grafo que resulta de ignorar el sentido de las flechas en $Q$. Dada una flecha $\alpha$, llamamos $G \setminus \alpha$ al grafo que resulta de eliminar la arista correspondiente. Si $Q$ no es un árbol, entonces existe una flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $G \setminus \alpha$ es conexo. Supongamos que $\alpha = \alpha_1$. Sea $\delta : A \to A$ la derivación definida como

$$\begin{aligned} &\delta(e_i) = 0 \text{ para todo } i,\ 1 \leq 1 \leq n, \\ &\delta(\alpha_1) = \alpha_1, \\ &\delta(\alpha_i) = 0 \text{ para todo } i,\ 2 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Si vemos que $\delta$ no es una derivación interior obtendremos el resultado buscado ya que $H^1(A,A)$ es isomorfo a $\mathrm{Der}_{\Bbbk}(A,M)/\operatorname{Inn}_{\Bbbk}(A,M)$. Supongamos que $\delta$ es una derivación interior y sea $x \in A$ tal que $\delta(a) = ax - xa$ para todo $a \in A$. Escribimos $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{j=1}^{r} \mu_j \alpha_j$, donde $\lambda_i$ y $\mu_j$ pertenecen a $\Bbbk$ para todo $i$ y para todo $j$. Llamamos, para todo $\alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ al vértice donde empieza $\alpha$ y $t(\alpha)$ al vértice donde termina. Como $\delta(a) = ax - xa$ para todo $a \in A$, resulta que

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \delta(\alpha_1) &= \alpha_1 x - x\alpha_1 = \left(\lambda_{s(\alpha_1)} - \lambda_{t(\alpha_1)}\right)\alpha_1, \\ 0 = \delta(\alpha_i) &= \alpha_i x - x\alpha_i = \left(\lambda_{s(\alpha_i)} - \lambda_{t(\alpha_i)}\right)\alpha_i \text{ para todo } i,\ 2 \leq i \leq r. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\lambda_{s(\alpha_1)} - \lambda_{t(\alpha_1)} = 1$ y $\lambda_{s(\alpha_i)} - \lambda_{t(\alpha_i)} = 0$ para todo $i$, $2 \leq i \leq r$. Como $G \setminus \alpha_1$ es conexo, existe un camino en $G \setminus \alpha_1$ que conecta $s(\alpha_1)$ con $t(\alpha_1)$. Sean $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_k}$ las flechas que componen este camino.

$$\begin{tikzcd}
s(\alpha_1) \arrow[dr, "\alpha_{i_1}"] & & & \cdots \arrow[r, dashed] & \cdots \arrow[dr, "\alpha_{i_{k-1}}"] & & t(\alpha_1) \arrow[dl, "\alpha_{i_k}"] \\
& \cdot & \cdot \arrow[l, "\alpha_{i_2}"] \arrow[ur, "\alpha_{i_3}"] & & & \cdot &
\end{tikzcd}$$

Al recorrer el camino empezando en $s(\alpha_1)$ podemos asignarle a cada flecha un número, 1 ó $-1$, según si la flecha apunta en el sentido del recorrido o no, respectivamente. Para cada $j$, llamamos $sg(\alpha_{i_j})$ a este número. Resulta que

$$1 = \lambda_{s(\alpha_1)} - \lambda_{t(\alpha_1)} = \sum_{j=1}^{k} sg(\alpha_{i_j}) \left(\lambda_{s(\alpha_{i_j})} - \lambda_{t(\alpha_{i_j})}\right) = \sum_{j=1}^{k} 0 = 0,$$

lo cual es absurdo. Esta contradicción proviene de suponer que $\delta$ es una derivación interior.

**Ejemplo 2.1.4.** Sea $\Bbbk$ un cuerpo de característica distinta de 2 y sea $A = \Bbbk[x]/(x^2)$. En este ejemplo vamos a calcular la homología y la cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $A$. Consideramos el siguiente complejo de $A^e$-módulos

$$\cdots \longrightarrow A^e \xrightarrow{\delta_n} A^e \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^e \xrightarrow{\delta_2} A^e \xrightarrow{\delta_1} A^e \xrightarrow{\delta_0} A^e \xrightarrow{m_A} A \longrightarrow 0,$$

donde $m_A$ es la multiplicación del álgebra y para todo $i \geq 0$, $\delta_{2i}$ es la multiplicación por $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ y $\delta_{2i+1}$ es la multiplicación por $1 \otimes x + x \otimes 1$. Veamos que el complejo es una resolución proyectiva de $A$ como $A^e$-módulo. El conjunto $\{1, x\}$ es una base de $A$ como $\Bbbk$-espacio vectorial y por lo tanto $\{1 \otimes 1, 1 \otimes x, x \otimes 1, x \otimes x\}$ es una base de $A^e$ como $\Bbbk$-espacio vectorial. Resulta que

$$\begin{aligned} m_A\,(a \cdot 1 \otimes 1 + b \cdot 1 \otimes x + c \cdot x \otimes 1 + d \cdot x \otimes x) &= a \cdot 1 + (b + c) \cdot x, \\ \delta_{2i}\,(a \cdot 1 \otimes 1 + b \cdot 1 \otimes x + c \cdot x \otimes 1 + d \cdot x \otimes x) &= a \cdot (x \otimes 1 - 1 \otimes x) + (b - c)(x \otimes x), \\ \delta_{2i+1}\,(a \cdot 1 \otimes 1 + b \cdot 1 \otimes x + c \cdot x \otimes 1 + d \cdot x \otimes x) &= a \cdot (x \otimes 1 + 1 \otimes x) + (b + c)(x \otimes x). \end{aligned}$$

A partir de este cálculo es sencillo verificar que el complejo es efectivamente una resolución. Empecemos con el cálculo de la homología de Hochschild. Aplicamos el funtor $A \otimes_{A^e} -$ al complejo truncado y obtenemos el siguiente complejo

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_{A^e} A^e \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta_2} A \otimes_{A^e} A^e \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta_1} A \otimes_{A^e} A^e \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \delta_0} A \otimes_{A^e} A^e \longrightarrow 0,$$

que a su vez resulta ser isomorfo al complejo

$$\cdots \longrightarrow A \xrightarrow{d_2} A \xrightarrow{d_1} A \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,$$

donde los diferenciales están dados por $d_{2i}(a) = ax - xa = [a, x]$ y $d_{2i+1}(a) = ax + xa$ para todo $i \geq 0$ y para todo $a \in A$. Es fácil verificar que $\mathrm{Ker}(d_{2i})$ es igual a $A$ y que $\mathrm{Im}(d_{2i+1}) = \mathrm{Ker}(d_{2i+1})$ está generado por $x$, luego se tienen los siguientes isomorfismos

$$H_0(A, A) \cong A, \quad H_n(A, A) \cong \Bbbk \text{ para todo } n \geq 1.$$

Continuemos con la cohomología de Hochschild. Aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$ a la resolución proyectiva y obtenemos el siguiente complejo

$$\cdots \xleftarrow{\delta_2^*} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \xleftarrow{\delta_1^*} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \xleftarrow{\delta_0^*} \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A) \longleftarrow 0$$

donde $\delta_i^*(f) = f\delta_i$ para todo $i \geq 0$ y para todo $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e, A)$. A su vez, este nuevo complejo es isomorfo al siguiente complejo

$$\cdots \xleftarrow{d^2} A \xleftarrow{d^1} A \xleftarrow{d^0} A \longleftarrow 0$$

donde los diferenciales están dados por $d^{2i+1} = d_{2i+1}$ y $d^{2i} = -d_{2i} = 0$. Debido a que los diferenciales son los mismos que para la homología, se tienen los siguientes isomorfismos

$$H^0(A, A) \cong A, \quad H^n(A, A) \cong \Bbbk \text{ para todo } n \geq 1.$$

Es importante aclarar que si bien los espacios $H^{2i}(A, A)$ y $H^{2i+1}(A, A)$ son isomorfos a $\Bbbk$ para todo $i \geq 1$, el primero está generado por la clase del morfismo $1 \otimes 1 \mapsto 1$, mientras que el segundo está generado por la clase del morfismo $1 \otimes 1 \mapsto x$.

## 2.2 Estructura de álgebra de Gerstenhaber

Sea $A$ una $\Bbbk$-álgebra. La cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $A$ tiene estructura de álgebra conmutativa graduada y de álgebra de Lie graduada junto con cierta relación de compatibilidad.

**Definición 2.2.1.** Un *álgebra de Gerstenhaber* es un álgebra conmutativa graduada $G^\bullet = \oplus_i G^i$ junto con un corchete $[\cdot, \cdot] : G^p \times G^q \to G^{p+q-1}$ tal que $(G^\bullet, [\cdot, \cdot])$ es una álgebra de Lie graduada y para todo $a \in G^\bullet$, el morfismo $b \in G^\bullet \mapsto [a, b] \in G^\bullet$ es una derivación graduada con respecto al producto, es decir,

$$[a, bc] = [a, b]\, c + (-1)^{(\mathrm{gr}(a)-1)\,\mathrm{gr}(b)} b\, [a, c]$$

para todo $a, b, c \in G^\bullet$.

Empecemos dándole estructura de álgebra graduada a $\oplus_{n \geq 0} \mathrm{Hom}_\Bbbk \left(A^{\otimes n}, A\right)$.

**Definición 2.2.2.** Sean $f \in \mathrm{Hom}_\Bbbk \left(A^{\otimes n}, A\right)$ y $g \in \mathrm{Hom}_\Bbbk \left(A^{\otimes m}, A\right)$, se define el *producto cup* $f \smile g \in \mathrm{Hom}_\Bbbk \left(A^{\otimes n+m}, A\right)$ como la única transformación $\Bbbk$-lineal que cumple que

$$f \smile g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \otimes a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+m}) = f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) g(a_{n+1} \otimes \ldots \otimes a_{n+m})$$

para todo $a_1, \ldots, a_{n+m} \in A$.

Los diferenciales del complejo resultan ser derivaciones graduadas con respecto a este producto, es decir, si $f$ y $g$ son dos elementos homogéneos de grados $n$ y $m$ respectivamente, entonces

$$d_{n+m}(f \smile g) = d_n(f) \smile g + (-1)^{nm} f \smile d_m(g).$$

Esta fórmula muestra que el producto de dos cociclos es un cociclo y que el producto de un coborde con un cociclo es un coborde. Por lo tanto $H^\bullet(A, A)$ resulta ser una $\Bbbk$-álgebra graduada con el producto inducido por el producto cup.

También existe en $\oplus_{n\geq 0} \operatorname{Hom}_\Bbbk\left(A^{\otimes n}, A\right)$ una estructura de álgebra de Lie graduada.

**Definición 2.2.3.** Sean $f \in \operatorname{Hom}_\Bbbk\left(A^{\otimes n}, A\right)$ y $g \in \operatorname{Hom}_\Bbbk\left(A^{\otimes m}, A\right)$, se define el *asociador* entre $f$ y $g$, $f \circ g \in \operatorname{Hom}_\Bbbk\left(A^{\otimes n+m-1}, A\right)$ como la única transformación $\Bbbk$-lineal que cumple que

$$\begin{aligned} &f \circ g(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{n+m-1}) = \\ &\quad \sum_{i=1}^{n} (-1)^{(i-1)(m-1)} f\left(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \ldots \otimes a_{i+m-1}) \otimes a_{i+m} \otimes \ldots \otimes a_{n+m-1}\right) \end{aligned}$$

para todo $a_1, \ldots, a_{n+m-1} \in A$. Se define el *corchete de Gerstenhaber* entre estos dos elementos como

$$[f, g] = f \circ g - (-1)^{(n-1)(m-1)} g \circ f.$$

El producto cup y el corchete de Gerstenhaber hacen de $H^\bullet(A, A)$ un álgebra de Gerstenhaber.

**Ejemplo 2.2.1.** Vamos a calcular la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología de Hochschild del álgebra $A = \Bbbk[x]/(x^2)$, donde $\Bbbk$ es un cuerpo de característica distinta de dos. Si bien para calcular la cohomología podemos usar cualquier resolución proyectiva, el producto cup y el corchete de Gerstenhaber están definidos a partir de la resolución bar. Para transportar la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología calculada a partir de la resolución bar a la cohomología calculada en el Ejemplo 2.1.4 es necesario encontrar morfismos de comparación $f$ y $g$ entre las dos resoluciones:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^e \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[d, shift left, "f_3"] & A^e \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[d, shift left, "f_2"] & A^e \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, shift left, "f_1"] & A^e \arrow[r, "m_A"] \arrow[d, equal, "id_{A\otimes A}"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal, "id_A"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & A \otimes A^{\otimes 3} \otimes A \arrow[r, "b'_2"] \arrow[u, shift left, "g_3"] & A \otimes A^{\otimes 2} \otimes A \arrow[r, "b'_1"] \arrow[u, shift left, "g_2"] & A \otimes A \otimes A \arrow[r, "b'_0"] \arrow[u, shift left, "g_1"] & A^e \arrow[r, "m_A"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es sencillo verificar que la sucesión de morfismos de $A^e$-módulos $\{f_n : A^e \to A \otimes A^{\otimes n} \otimes A\}_{n\geq 0}$ definida como $f_0 = id_{A\otimes A}$ y $f_n(1 \otimes 1) = 1 \otimes x^{\otimes n} \otimes 1$ para todo $n \geq 1$ resulta ser un morfismo de complejos y un levantado de la identidad. Para todo $n \geq 0$, definimos el morfismo de $A^e$-módulos $g_n : A \otimes A^{\otimes n} \otimes A \to A^e$ como

$$\begin{aligned} &g_n(1 \otimes x^{\otimes n} \otimes 1) = 1 \otimes 1, \\ &g_n(1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n) = 0 \end{aligned}$$

para todo $i$, $1 \leq i \leq n$ y para todo $a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_n \in A$. La sucesión $\{g_n\}_{n\geq 0}$ resulta ser un levantado de la identidad. Para encontrar estos morfismos nos basamos en [GGRSV].

Ya estamos en condiciones de calcular el product cup. Debido a que el producto es bilineal, alcanza con calcular los productos entre los elementos de la base de $H^\bullet(A, A)$. El espacio $H^0(A, A)$ tiene como base al conjunto formado por la clase del morfismo $\alpha_0 : 1 \otimes 1 \mapsto 1$ y la del morfismo $\alpha_1 : 1 \otimes 1 \mapsto x$. Denotamos por

$$\beta^{2n} : 1 \otimes 1 \mapsto 1 \in H^{2n}(A, A) \text{ y } \gamma^{2m+1} : 1 \otimes 1 \mapsto x \in H^{2m+1}(A, A)$$

a los generadores de sus respectivos espacios de cohomología para todo $n \geq 1$ y para todo $m \geq 0$. Por definición, si $\varphi \in H^i(A, A)$ y $\psi \in H^j(A, A)$, entonces $\varphi \smile \psi \in H^{i+j}(A, A)$. Por lo tanto, para calcular $\varphi \smile \psi$ necesitamos saber qué valor toma en el elemento $1 \otimes 1$. Resulta que

$$\begin{aligned}\varphi \smile \psi(1 \otimes 1) &= (\varphi g_i \smile \psi g_j)\, f_{i+j}(1 \otimes 1) = (\varphi g_i \smile \psi g_j) \left(1 \otimes x^{\otimes i+j} \otimes 1\right) \\ &= \varphi g_i \left(1 \otimes x^{\otimes i} \otimes 1\right) \psi g_j \left(1 \otimes x^{\otimes j} \otimes 1\right) = \varphi(1 \otimes 1)\psi(1 \otimes 1)\end{aligned}$$

y por lo tanto es sencillo verificar las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{cc} \alpha_0 \smile \alpha_0 = \alpha_0 & \alpha_1 \smile \beta^{2i} = 0 \\ \alpha_0 \smile \alpha_1 = \alpha_1 & \alpha_1 \smile \gamma^{2j+1} = 0 \\ \alpha_0 \smile \beta^{2i} = \beta^{2i} & \beta^{2i} \smile \beta^{2j} = \beta^{2(i+j)} \\ \alpha_0 \smile \gamma^{2j+1} = \gamma^{2j+1} & \beta^{2i} \smile \gamma^{2j+1} = \gamma^{2(i+j)+1} \\ \alpha_1 \smile \alpha_1 = 0 & \gamma^{2i+1} \smile \gamma^{2j+1} = 0 \end{array}$$

para todo $i$ y para todo $j$.

Por último vamos a calcular la estructura de álgebra de Lie graduada. Al igual que para el producto, solo es necesario conocer los valores que toma el corchete de Gerstenhaber entre los elementos de la base. Empecemos calculando los asociadores. Si $\varphi \in H^m(A, A)$ y $\psi \in H^n(A, A)$, resulta que

$$\begin{aligned}\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) &= (\varphi g_m \circ \psi g_n)\, f_{m+n-1}(1 \otimes 1) = (\varphi g_m \circ \psi g_n) \left(1 \otimes x^{n+m-1} \otimes 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(n-1)} \varphi g_m \left(1 \otimes x^{\otimes i-1} \otimes \psi g_n \left(1 \otimes x^{\otimes n} \otimes 1\right) \otimes x^{\otimes m-i} \otimes 1\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)(n-1)} \varphi g_m \left(1 \otimes x^{\otimes i-1} \otimes \psi(1 \otimes 1) \otimes x^{\otimes m-i} \otimes 1\right).\end{aligned}$$

Separamos el calculo del asociador en casos.

- Si $n$ es par,

$$\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{(i-1)} \varphi g_m \left(1 \otimes x^{\otimes i-1} \otimes \psi(1 \otimes 1) \otimes x^{\otimes m-i} \otimes 1\right),$$

  - si $m$ es par,

$$\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) = 0,$$

  - si $m$ es impar y $\psi(1 \otimes 1) = 1$,

$$\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) = 0,$$

– si $m$ es impar y $\psi(1 \otimes 1) = x$,

$$\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) = \varphi(1 \otimes 1),$$

- si $n$ es impar,

$$\varphi \circ \psi(1 \otimes 1) = \sum_{i=1}^{m} \varphi g_m \left(1 \otimes x^{\otimes m} \otimes 1\right) = m\varphi(1 \otimes 1).$$

A partir de este cálculo es fácil verificar las siguientes igualdades:

$$\begin{array}{cc}
[\alpha_0, \alpha_0] = 0 & \left[\alpha_1, \beta^{2i}\right] = 0 \\
[\alpha_0, \alpha_1] = 0 & \left[\alpha_1, \gamma^{2j+1}\right] = 0 \\
\left[\alpha_0, \beta^{2i}\right] = 0 & \left[\beta^{2i}, \beta^{2j}\right] = 0 \\
\left[\alpha_0, \gamma^{2j+1}\right] = 0 & \left[\beta^{2i}, \gamma^{2j+1}\right] = 2i\beta^{2(i+j)} \\
[\alpha_1, \alpha_1] = 0 & \left[\gamma^{2i+1}, \gamma^{2j+1}\right] = 2(i-j)\gamma^{2(i+j)+1}
\end{array}$$

para todo $i$ y para todo $j$.

## 2.3 Sucesiones espectrales

En esta sección resumiremos algunos resultados sobre sucesiones espectrales que provienen de una filtración de un complejo.

Empecemos considerando el problema de calcular la homología del complejo total $T_\bullet$ de un complejo doble $E_{\bullet,\bullet}$ de espacios vectoriales, cuyas únicas columnas no necesariamente nulas son $E_{0,\bullet}$ y $E_{1,\bullet}$.

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \\
{} & 0 \arrow[l, dashed] \arrow[d] & E_{0,q+2} \arrow[l, "d^h_{0,q+2}"'] \arrow[d, "d^v_{0,q+2}"'] & E_{1,q+2} \arrow[l, "d^h_{1,q+2}"'] \arrow[d, "d^v_{1,q+2}"'] & 0 \arrow[l, "d^h_{2,q+2}"'] \arrow[d] & {} \arrow[l, dashed] \\
{} & 0 \arrow[l, dashed] \arrow[d] & E_{0,q+1} \arrow[l, "d^h_{0,q+1}"'] \arrow[d, "d^v_{0,q+1}"'] & E_{1,q+1} \arrow[l, "d^h_{1,q+1}"'] \arrow[d, "d^v_{1,q+1}"'] & 0 \arrow[l, "d^h_{2,q+1}"'] \arrow[d] & {} \arrow[l, dashed] \\
{} & 0 \arrow[l, dashed] \arrow[d] & E_{0,q} \arrow[l, "d^h_{0,q}"'] \arrow[d, "d^v_{0,q}"'] & E_{1,q} \arrow[l, "d^h_{1,q}"'] \arrow[d, "d^v_{1,q}"'] & 0 \arrow[l, "d^h_{2,q}"'] \arrow[d] & {} \arrow[l, dashed] \\
{} & 0 \arrow[l, dashed] \arrow[d, dashed] & E_{0,q-1} \arrow[l, "d^h_{0,q-1}"'] \arrow[d, dashed] & E_{1,q-1} \arrow[l, "d^h_{1,q-1}"'] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[l, "d^h_{2,q-1}"'] \arrow[d, dashed] & {} \arrow[l, dashed] \\
{} & {} & {} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

Como primer paso, calculamos la homología vertical $H_\bullet(E_{p,\bullet})$ para todo $p$. Denotamos por $E^1_{p,q}$ al espacio vectorial $H_q\left(E_{p,\bullet}\right)$ y lo ubicamos en el punto $(p, q)$ de un nuevo diagrama junto con los diferenciales horizontales inducidos.

$$\dashleftarrow 0 \xleftarrow{d^h_{0,q+2}} E^1_{0,q+2} \xleftarrow{d^h_{1,q+2}} E^1_{1,q+2} \xleftarrow{d^h_{2,q+2}} 0 \dashleftarrow$$

$$\dashleftarrow 0 \xleftarrow{d^h_{0,q+1}} E^1_{0,q+1} \xleftarrow{d^h_{1,q+1}} E^1_{1,q+1} \xleftarrow{d^h_{2,q+1}} 0 \dashleftarrow$$

$$\dashleftarrow 0 \xleftarrow{d^h_{0,q}} E^1_{0,q} \xleftarrow{d^h_{1,q}} E^1_{1,q} \xleftarrow{d^h_{2,q}} 0 \dashleftarrow$$

$$\dashleftarrow 0 \xleftarrow{d^h_{0,q-1}} E^1_{0,q-1} \xleftarrow{d^h_{1,q-1}} E^1_{1,q-1} \xleftarrow{d^h_{2,q-1}} 0 \dashleftarrow$$

Denotamos por $E^2_{p,q}$ al espacio de homología horizontal $H_p\left(E^1_{\bullet,q}\right)$. El objetivo es encontrar, para cada $q$, la relación entre los espacios $E^2_{0,q+1}$, $E^2_{1,q}$ y $H_{q+1}(T_\bullet)$. Como solo las columnas $E_{0,\bullet}$ y $E_{1,\bullet}$ son no necesariamente nulas, escribimos $(a,b) \in E_{0,q+1} \times E_{1,q}$ cuando nos referimos a un elemento de $T_{q+1}$ y llamamos $d_\bullet$ a los diferenciales del complejo total. Si $a$ pertenece a $\operatorname{Ker}\left(d^v_{0,q+1}\right)$, resulta que

$$d_{q+1}(a,0) = \left(d^v_{0,q+1}(a) + d^h_{1,q}(0), d^v_{1,q}(0)\right) = (0,0).$$

Esta observación permite definir el morfismo

$$\hat{\iota} : a \in \operatorname{Ker}\left(d^v_{0,q+1}\right) \mapsto [(a,0)] \in H_{q+1}(T).$$

Sea $a \in \operatorname{Ker}\left(d^v_{0,q+1}\right)$. Si $a = d^v_{0,q+2}(b)$ para algún $b \in E_{0,q+2}$, entonces $(a,0) = d_{q+2}(b,0)$, y si $a = d^h_{1,q+1}(c)$ para algún $c \in \operatorname{Ker}\left(d^v_{1,q+1}\right)$, resulta que $(a,0) = d_{q+2}(0,c)$. Luego el morfismo $\hat{\iota}$ pasa al cociente y obtenemos un nuevo morfismo inyectivo

$$\iota : E^2_{0,q+1} \to H_{q+1}(T).$$

Por otro lado, el elemento $(a,b)$ pertenece a $\operatorname{Ker}(d_{q+1})$ si y solo si $b$ pertenece a $\operatorname{Ker}\left(d^v_{1,q}\right)$ y $d^v_{0,q+1}(a) = -d^h_{1,q}(b)$. Esto permite definir un morfismo

$$\pi : [(a,b)] \in H_{q+1}(T) \mapsto [b] \in E^2_{1,q}.$$

Es claro que $\operatorname{Im}(\iota)$ está incluida en $\operatorname{Ker}(\pi)$. Sea $[(a,b)] \in \operatorname{Ker}(\pi)$, queremos encontrar un elemento $a'$ tal que $(a'-a,b)$ pertenezca a $\operatorname{Im}(d_{q+2})$. Como $\pi([(a,b)]) = 0$, existe $c \in E_{1,q+1}$ tal que $d^v_{1,q+1}(c) = b$, y como $(a,b)$ pertenece a $\operatorname{Ker}(d_{q+1})$, se cumple que

$$d^v_{0,q+1}(a) = -d^h_{1,q}(b) = -d^h_{1,q} d^v_{1,q+1}(c) = d^v_{0,q+1} d^h_{1,q+1}(c).$$

Por lo tanto $d^v_{0,q+1}\left(a - d^h_{1,q+1}(c)\right) = 0$ y si llamamos $a' = a - d^h_{1,q+1}(c)$, obtenemos lo que buscábamos. Acabamos de probar que hay una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E^2_{0,q+1} \xrightarrow{\iota} H_{q+1}(T) \xrightarrow{\pi} E^2_{1,q} \longrightarrow 0,$$

que relaciona $E^2_{0,q+1}$ y $E^2_{1,q}$ con $H_{q+1}(T)$. Como estamos trabajando con espacios vectoriales, $\pi$ es una retracción y resulta que

$$H_{q+1}(T) \cong E^2_{0,q+1} \oplus E^2_{1,q}.$$

**Definición 2.3.1.** Una *sucesión espectral de homología (que empieza en s)* en una categoría abeliana $\mathfrak{A}$ consiste de los siguientes objetos:

- Una familia $\left\{E^r_{p,q}\right\}$ de objetos de $\mathfrak{A}$ definidos para todo $p, q, r \in \mathbb{Z}$, $r \geq s$.
- Una familia de morfismos $\left\{d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \to E^r_{p-r,q+r-1}\right\}$ que resultan ser diferenciales, es decir $d^r_{p,q} \circ d^r_{p+r,q-r+1} = 0$, de manera que la recta de pendiente $-(r+1)/r$ en el reticulado $E^r_{\bullet,\bullet}$ resulte ser un complejo.
- Isomorfismos entre $E^{r+1}_{p,q}$ y la homología de $E^r_{\bullet,\bullet}$ en el punto $E^r_{p,q}$:

$$E^{r+1}_{p,q} \cong \operatorname{Ker}\left(d^r_{p,q}\right) / \operatorname{Im}\left(d^r_{p+r,q-r+1}\right).$$

El *grado total* de $E^r_{p,q}$ es $n = p + q$. Los términos de grado total $n$ yacen en una recta de pendiente $-1$ y cada diferencial hace decrecer el grado total por uno. Llamamos *páginas* a cada reticulado $E^r_{\bullet,\bullet}$ para todo $r \geq s$.

Una sucesión espectral de homología ubicada en *el primer cuadrante* es una sucesión espectral tal que $E^r_{p,q} = 0$ a menos que $p \geq 0$ y $q \geq 0$. Si fijamos $p$ y $q$, entonces $E^r_{p,q} = E^{r+1}_{p,q}$ para todo $r$ suficientemente grande. Esto se debe a que eventualmente el dominio de $d^r_{p+r,q-r+1}$ va a estar ubicado en el cuarto cuadrante y el codominio de $d^r_{p,q}$ en el segundo cuadrante. Denotamos por $E^\infty_{p,q}$ a este valor estable de $E^r_{p,q}$.

**Definición 2.3.2.** Una *sucesión espectral de cohomología (que arranca en s)* en $\mathfrak{A}$ es una familia $\left\{E^{p,q}_r\right\}$ de objetos de $\mathfrak{A}$ junto con morfismos $\left\{d^{p,q}_r : E^{p,q}_r \to E^{p+r,q-r+1}_r\right\}$ que son diferenciales, es decir $d_r \circ d_r = 0$, e isomorfismos entre $E_{r+1}$ y la homología de $E_r$.

**Definición 2.3.3.** Una sucesión espectral de homología se dice *acotada* si para todo $n$ existe una cantidad finita del términos no nulos de grado total $n$ en $E^s_{\bullet,\bullet}$. Recordar que $E^s_{\bullet,\bullet}$ es la primera página. Si este es el caso, para cada $p, q$ existe un $r_0$ tal que $E^r_{p,q} = E^{r_0}_{p,q}$ para todo $r \geq r_0$. Denotamos por $E^\infty_{p,q}$ a este valor estable de $E^r_{p,q}$. Decimos que una sucesión espectral acotada *converge* a $H_\bullet$ si existe una familia de objetos $\{H_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathfrak{A}$, cada uno con una filtración finita

$$0 = F_s H_n \subseteq \cdots \subseteq F_{p-1} H_n \subseteq F_p H_n \subseteq F_{p+1} H_n \subseteq \cdots \subseteq F_t H_n = 0$$

tal que $E^\infty_{p,q} \cong F_p H_{p+q} / F_{p-1} H_{p+q}$. Si la sucesión espectral $E$ converge a $H_\bullet$ escribimos $E^s_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}$.

Una sucesión espectral de cohomología se dice *acotada* si para todo $n$ existe una cantidad finita de términos no nulos de grado total $n$ en $E^{\bullet,\bullet}_s$. Decimos que una sucesión espectral acotada converge a $H^\bullet$ si existe una familia de objetos $\{H^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ en $\mathfrak{A}$, cada uno con una filtración finita

$$0 = F^t H^n \subseteq \cdots \subseteq F^{p+1} H^n \subseteq F^p H^n \subseteq F^{p-1} H^n \subseteq \cdots \subseteq F^s H^n = 0$$

tal que $E^{p,q}_\infty \cong F^p H^{p+q} / F^{p+1} H^{p+q}$.

Una *filtración* $F$ de un complejo $C$ es una familia ordenada de subcomplejos de $C$

$$\cdots \subseteq F_{p-1}C \subseteq F_pC \subseteq \cdots .$$

Como en los cálculos que se harán en esta tesis las sucesiones espectrales se estabilizarán en la segunda página, al igual que en el ejemplo introductorio de esta sección, omitimos la demostración del siguiente teorema. Ver el Capítulo 5 de [We].

**Teorema 2.3.1.** Una filtración $F$ de un complejo $C$ determina una sucesión espectral que empieza con $E^0_{p,q} = F_pC_{p+q}/F_{p-1}C_{p+q}$ y continúa con $E^1_{p,q} = H_{p+q}(E^0_{p,\bullet})$.

Una filtración de un complejo $C$ induce una filtración en la homología de $C$, el espacio $F_p\,H_n(C)$ es la imagen del morfismo $H_n(F_pC) \to H_n(C)$.

**Teorema 2.3.2.** Si $C$ un complejo provisto de una filtración $F$ acotada, entonces la sucesión espectral asociada es acotada y converge a $H_\bullet(C)$:

$$E^1_{p,q} = H_{p+q}(F_pC/F_{p-1}(C)) \Rightarrow H_{p+q}(C).$$

Hay dos filtraciones usuales asociadas a cualquier complejo doble $C$ que resultan en sucesiones espectrales relacionadas con la homología del complejo total $\mathrm{Tot}(C)$. En esta tesis vamos a hacer uso de una de estas.

**Definición 2.3.4.** (Filtración por columnas) Si $C$ es un complejo doble, se puede filtrar el complejo total $\mathrm{Tot}(C)$ de la siguiente manera. Sea ${}^1F_n\,\mathrm{Tot}(C)$ el complejo total del subcomplejo doble de $C$

$$\left(\tau_{\leq n}C\right)_{p,q} = \begin{cases} C_{p,q} & \text{si } p \leq n, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Esta filtración da lugar a una sucesión espectral $\{E^r_{p,q}\}$ que empieza con $E^0_{p,q} = C_{p,q}$. Los morfismos $d^0$ son los morfismos verticales $d^v$ de $C$ y por lo tanto $E^1_{p,q} = H^v_q(C_{p,\bullet})$. Los morfismos $d^1$ son los morfismos horizontales $d^h$ inducidos en al homología. Si $C$ es un complejo doble ubicado en el primer cuadrante la filtración es acotada y por lo tanto la sucesión espectral es convergente: $E^0_{p,q} \Rightarrow H_{p+q}(\mathrm{Tot}(C))$.

La otra sucesión espectral usual es la que surge de filtrar por filas y se define de manera análoga.

# Capítulo 3

# Super plano de Jordan

El super plano de Jordan es la $\Bbbk$-álgebra $A = \Bbbk \left\langle x, y \mid x^2, y^2x - xy^2 - xyx \right\rangle$. En este capítulo calcularemos la homología y cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en la misma álgebra. Luego describiremos la estructura de álgebra graduada que tiene $H^\bullet(A, A)$ y por último calcularemos la estructura de álgebra de Lie de $H^1(A, A)$.

El álgebra libre $\Bbbk \langle x, y \rangle$ tiene una graduación tal que el grado $x$ y el grado de $y$ es 1. Como el ideal $(x^2, y^2x - xy^2 - xyx)$ es homogéneo con respecto a esta graduación, resulta que $A$ es un álgebra graduada. Dado $a \in A$, denotaremos por $\mathrm{gr}(a)$ al grado de este elemento. Recordemos que $A$ tiene como base al conjunto

$$\mathcal{B} = \left\{ x^a (yx)^b y^c \mid a \in \{0, 1\}, b, c \geq 0 \right\}.$$

Todos los cálculos los haremos utilizando esta base, por eso es necesario conocer las reglas de conmutación del álgebra que se encuentran en el Apéndice A.

## 3.1 La resolución proyectiva

Si bien la resolución bar es muy útil para probar resultados teóricos, a la hora de realizar cálculos explícitos es conveniente trabajar con resoluciones más chicas. Cuando se trata de un álgebra graduada, como es el caso del super plano de Jordan, sabemos que existe una resolución minimal. En esta sección construiremos una resolución proyectiva minimal de $A$ como $A^e$-módulo utilizando el método desarrollado en el articulo [CS].

Primero debemos definir un sistema de reducción $\mathfrak{R}$ que satisfaga la *condición del diamante* para el el ideal $I = \left(x^2, y^2x - xy^2 - xyx\right)$. Fijamos el orden $y < x$ entre las variables, que induce un orden entre los monomios de $\Bbbk\langle x, y \rangle$ y sea

$$\mathfrak{R} = \{(x^2, 0), (y^2, xy^2 + xyx)\}$$

el sistema de reducción asociado a este orden y al ideal I. Es claro que, para todo $(s, f) \in \mathfrak{R}$, $f$ es irreducible. Nos resta verificar que todas las ambigüedades se resuelven. El conjunto de ambigüedades es $\{x^3, y^2x^2\}$ y los siguientes diagramas muestran que ambas ambigüedades se resuelven:

$$\begin{tikzcd}
 & x(x^2) \arrow[r] & x0 \arrow[dr, equal] & \\
x^3 \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & & 0 \\
 & (x^2)x \arrow[r] & 0x \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & (y^2x)x \arrow[r] & (xy^2+xyx)x \arrow[r, equal] & xy^2x+xyx^2 \arrow[r] & x(xy^2+xyx) \arrow[dr] & \\
y^2x^2 \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & & & & & 0 \\
 & y^2(x^2) \arrow[r] & y^20 \arrow[rr, equal] & & 0 \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathcal{A}_n$ al conjunto de $n$-ambigüedades para todo $n \geq 2$. Es inmediato verificar que $\mathcal{A}_n = \{x^{n+1}, y^2x^n\}$. Además llamamos $\mathcal{A}_0$ al conjunto $\{x, y\}$ y $\mathcal{A}_1$ al conjunto $\{x^2, y^2x\}$. Ya estamos en condiciones de construir la resolución proyectiva. Consideramos el siguiente complejo $P_\bullet A$ de $A^e$-módulos

$$P_\bullet A : \cdots \xrightarrow{d_3} A \otimes \Bbbk\mathcal{A}_2 \otimes A \xrightarrow{d_2} A \otimes \Bbbk\mathcal{A}_1 \otimes A \xrightarrow{d_1} A \otimes \Bbbk\mathcal{A}_0 \otimes A \xrightarrow{d_0} A \otimes A \longrightarrow 0$$

donde los diferenciales están definidos como

$$\begin{aligned}
d_0(1 \otimes x \otimes 1) &= x \otimes 1 - 1 \otimes x, \\
d_0(1 \otimes y \otimes 1) &= y \otimes 1 - 1 \otimes y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1(1 \otimes x^2 \otimes 1) &= x \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes x, \\
d_1(1 \otimes y^2x \otimes 1) &= y^2 \otimes x \otimes 1 + y \otimes y \otimes x + 1 \otimes y \otimes yx \\
&\quad - \left(xy \otimes y \otimes 1 + x \otimes y \otimes y + 1 \otimes x \otimes y^2\right) \\
&\quad - (xy \otimes x \otimes 1 + x \otimes y \otimes x + 1 \otimes x \otimes yx),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_n(1 \otimes x^{n+1} \otimes 1) &= x \otimes x^n \otimes 1 + (-1)^{n+1} \otimes x^n \otimes x, \\
d_n(1 \otimes y^2x^n \otimes 1) &= y^2 \otimes x^n \otimes 1 + (-1)^{n+1} \otimes y^2x^{n-1} \otimes x \\
&\quad - \left(x \otimes y^2x^{n-1} \otimes 1 + xy \otimes x^n \otimes 1 + 1 \otimes x^n \otimes y^2 + 1 \otimes x^n \otimes yx\right)
\end{aligned}$$

para todo $n \geq 2$. Veamos que $P_\bullet A$ resulta ser una resolución proyectiva de $A$. Primero debemos verificar que $m_A d_0 = 0$:

$$\begin{aligned}
m_A d_0(1 \otimes x \otimes 1) &= m_A(x \otimes 1 - 1 \otimes x) = x - x = 0, \\
m_A d_0(1 \otimes y \otimes 1) &= m_A(y \otimes 1 - 1 \otimes y) = y - y = 0.
\end{aligned}$$

Ahora vamos a probar que $P_\bullet A$ es efectivamente un complejo:

$$\begin{aligned}
d_0 d_1\left(1\otimes x^2\otimes 1\right) &= d_0(x\otimes x\otimes 1 + 1\otimes x\otimes x) = x(x\otimes 1 - 1\otimes x)\\
&\quad + (x\otimes 1 - 1\otimes x)x\\
&= x^2\otimes 1 - x\otimes x + x\otimes x - 1\otimes x^2 = 0\otimes 1 - 1\otimes 0 = 0,\\
d_0 d_1\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right) &= d_1\Big(y^2\otimes x\otimes 1 + y\otimes y\otimes x + 1\otimes y\otimes yx\\
&\quad - \left(xy\otimes y\otimes 1 + x\otimes y\otimes y + 1\otimes x\otimes y^2\right)\\
&\quad - (xy\otimes x\otimes 1 + x\otimes y\otimes x + 1\otimes x\otimes yx)\Big)\\
&= y^2(x\otimes 1 - 1\otimes x) + y(y\otimes 1 - 1\otimes y)x + (y\otimes 1 - 1\otimes y)yx\\
&\quad - xy(y\otimes 1 - 1\otimes y) - x(y\otimes 1 - 1\otimes y)y - (x\otimes 1 - 1\otimes x)y^2\\
&\quad - xy(x\otimes 1 - 1\otimes x) - x(y\otimes 1 - 1\otimes y)x - (x\otimes 1 - 1\otimes x)yx\\
&= \left(y^2x - xy^2 - xyx\right)\otimes 1 - 1\otimes\left(y^2x - xy^2 - xyx\right) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2\left(1\otimes x^3\otimes 1\right) &= d_1(x\otimes x^2\otimes 1 - 1\otimes x^2\otimes x)\\
&= x(x\otimes x\otimes 1 + 1\otimes x\otimes x) - (x\otimes x\otimes 1 + 1\otimes x\otimes x)x\\
&= x^2\otimes x\otimes 1 + x\otimes x\otimes x - x\otimes x\otimes x + 1\otimes x\otimes x^2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 d_2\left(1\otimes y^2x^2\otimes 1\right) &= d_1\Big(y^2\otimes x^2\otimes 1 - 1\otimes y^2x\otimes x - x\otimes y^2x\otimes 1 - xy\otimes x^2\otimes 1\\
&\quad - 1\otimes x^2\otimes y^2 - 1\otimes x^2\otimes yx\Big)\\
&= y^2x\otimes x\otimes 1 + y^2\otimes x\otimes x - y^2\otimes x\otimes x + xy\otimes y\otimes x\\
&\quad + x\otimes y\otimes yx + 1\otimes x\otimes y^2x + xy\otimes x\otimes x - xy^2\otimes x\otimes 1\\
&\quad - xy\otimes y\otimes x - x\otimes y\otimes yx + x\otimes x\otimes y^2 + x\otimes x\otimes yx\\
&\quad - xyx\otimes x\otimes 1 - xy\otimes x\otimes x - x\otimes x\otimes y^2 - 1\otimes x\otimes xy^2\\
&\quad - x\otimes x\otimes yx - 1\otimes x\otimes xyx\\
&= \left(y^2x - xy^2 - xyx\right)\otimes x\otimes 1 + 1\otimes x\otimes\left(y^2x - xy^2 - xyx\right)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_n d_{n+1}\left(1\otimes x^{n+2}\otimes 1\right) &= d_n\left(x\otimes x^{n+1}\otimes 1 + (-1)^{n+2}\otimes x^{n+1}\otimes x\right)\\
&= x\left(x\otimes x^n\otimes 1 + (-1)^{n+1}\otimes x^n\otimes x\right)\\
&\quad + (-1)^{n+2}\left(x\otimes x^n\otimes 1 + (-1)^{n+1}\otimes x^n\otimes x\right)x\\
&= (-1)^{n+1}x\otimes x^n\otimes x + (-1)^{n+2}x\otimes x^n\otimes x = 0,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_n d_{n+1}\left(1\otimes y^2x^{n+1}\otimes 1\right) = d_n\Big(& y^2\otimes x^{n+1}\otimes 1 + (-1)^{n+2}\otimes y^2x^n\otimes x - x\otimes y^2x^n\otimes 1\\
&- xy\otimes x^{n+1}\otimes 1 - 1\otimes x^{n+1}\otimes y^2 - 1\otimes x^{n+1}\otimes yx\Big)\\
= {} & y^2\otimes x^n\otimes 1 + (-1)^{n+1}y^2\otimes x^n\otimes x\\
&+ (-1)^{n+2}\Big(y^2\otimes x^n\otimes x - x\otimes y^2x^{n-1}\otimes x\\
&- xy\otimes x^n\otimes x - 1\otimes x^n\otimes y^2x\Big) - xy^2\otimes x^n\otimes 1\\
&+ (-1)^{n+2}x\otimes y^2x^{n-1}\otimes x + x\otimes x^n\otimes y^2\\
&+ x\otimes x^n\otimes yx - xyx\otimes x^n\otimes 1 + (-1)^{n+2}xy\otimes x^n\otimes x\\
&- x\otimes x^n\otimes y^2 + (-1)^{n+2}\otimes x^n\otimes xy^2 - x\otimes x^n\otimes yx\\
&+ (-1)^{n+2}\otimes x^n\otimes xyx\\
= {} & \left(y^2x - xy^2 - xyx\right)\otimes x^n\otimes 1\\
&+ (-1)^{n+1}\otimes x^n\otimes\left(y^2x - xy^2 - xyx\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Llamamos $\delta_n$ a los diferenciales de la resolución de Bardzell del álgebra monomial asociada $\Bbbk\langle x,y\rangle/(x^2,y^2x)$. El teorema [CS, Thm. 4.1] dice que si $P_\bullet A$ es un complejo y para todo $i\geq 0$, los elementos que aparecen en la expresión $(d_i-\delta_i)(1\otimes q\otimes 1)$ al borrar los tensores, son más chicos en el orden inducido por el sistema de reducción, entonces $P_\bullet A\to A\to 0$ resulta ser exacto. Como este es el caso y todos los $A^e$-módulos que componen la resolución son libres, resulta que $P_\bullet A$ es una resolución proyectiva. Como la imagen de cada diferencial está contenido en el radical del módulo codominio, la resolución es minimal.

## 3.2 Homología de Hochschild

Para calcular la homología y la cohomología va a ser conveniente pensar a la resolución $P_\bullet A$ como el complejo total del siguiente complejo doble

$$
\begin{tikzcd}
& \vdots \arrow[d, dashed, "\partial"] & \vdots \arrow[d, dashed, "\partial'"] \\
& A\otimes\Bbbk\{x^4\}\otimes A \arrow[d, "\delta"] & A\otimes\Bbbk\{y^2x^4\}\otimes A \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta'"] \\
& A\otimes\Bbbk\{x^3\}\otimes A \arrow[d, "\partial"] & A\otimes\Bbbk\{y^2x^3\}\otimes A \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\partial'"] \\
& A\otimes\Bbbk\{x^2\}\otimes A \arrow[d, "\delta"] & A\otimes\Bbbk\{y^2x^2\}\otimes A \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "\delta'"] \\
A\otimes A & A\otimes\Bbbk\{x,y\}\otimes A \arrow[l, "d_0"'] & A\otimes\Bbbk\{y^2x\}\otimes A \arrow[l, "d_1"']
\end{tikzcd}
$$

donde $A \otimes A$ está en la posición $(0,0)$, $A \otimes k\{x,y\} \otimes A$ está en el lugar $(1,0)$ y así sucesivamente. Los diferenciales de $A^e$-módulos son los siguientes:

$$d_0(1 \otimes v \otimes 1) = v \otimes 1 - 1 \otimes v, \quad \text{para todo } v \in k\{x,y\},$$

$$\begin{aligned} d_1(1 \otimes y^2x \otimes 1) = {} & y^2 \otimes x \otimes 1 + y \otimes y \otimes x + 1 \otimes y \otimes yx \\ & - (xy \otimes y \otimes 1 + x \otimes y \otimes y + 1 \otimes x \otimes y^2) \\ & - (xy \otimes x \otimes 1 + x \otimes y \otimes x + 1 \otimes x \otimes yx), \end{aligned}$$

$$d(1 \otimes y^2x^n \otimes 1) = y^2 \otimes x^n \otimes 1 - xy \otimes x^n \otimes 1 - 1 \otimes x^n \otimes y^2 - 1 \otimes x^n \otimes yx \quad n \geq 2,$$

$$\begin{aligned} &\delta(1 \otimes x^n \otimes 1) = x \otimes x^{n-1} \otimes 1 + 1 \otimes x^{n-1} \otimes x, \\ &\delta'(1 \otimes y^2x^n \otimes 1) = -(x \otimes y^2x^{n-1} \otimes 1 + 1 \otimes y^2x^{n-1} \otimes x) \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\partial(1 \otimes x^n \otimes 1) = x \otimes x^{n-1} \otimes 1 - 1 \otimes x^{n-1} \otimes x, \\ &\partial'(1 \otimes y^2x^n \otimes 1) = -(x \otimes y^2x^{n-1} \otimes 1 - 1 \otimes y^2x^{n-1} \otimes x) \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Llamamos $X_{\bullet,\bullet}$ a este complejo doble. Los diferenciales están elegidos de manera tal que el complejo total de $X_{\bullet,\bullet}$ sea $P_\bullet A$. Al mirar las columnas, vemos que los diferenciales son muy similares a los diferenciales de la resolución proyectiva de $\Bbbk[x]/(x^2)$. Esto se debe a que las columnas se corresponden con la relación cuadrática. Por otro lado las filas se corresponden con la relación cúbica y son finitas debido a que esta relación no produce ambigüedades consigo misma.

Para calcular la homología de Hochschild aplicamos el funtor $A \otimes_{A^e} (-)$ al complejo doble $\mathbf{X}_{\bullet,\bullet}$ y obtenemos un nuevo complejo doble tal que la homología de su complejo total es isomorfa a $H_\bullet(A,A)$. El complejo es el siguiente

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}\otimes\partial"] & {} \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}\otimes\partial'"] \\
 & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{x^4\} \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"] & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{y^2x^4\} \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta'"] \\
 & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{x^3\} \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\partial"] & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{y^2x^3\} \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\partial'"] \\
 & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{x^2\} \otimes A) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"] & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{y^2x^2\} \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta'"] \\
A \otimes_{A^e} (A \otimes A) & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{x,y\} \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d_0"'] & A \otimes_{A^e} (A \otimes \Bbbk\{y^2x\} \otimes A) \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes d_1"']
\end{tikzcd}$$

Identificando de manera natural $A \otimes_{A^e} (A \otimes W \otimes A)$ con $A \otimes W$ para todo espacio vectorial $W$ resulta el complejo doble

$$\begin{tikzcd}
& {} \arrow[d, dash, dashed, "\partial"] & {} \arrow[d, dash, dashed, "-\partial"] \\
& A & A \arrow[l, "d"'] \\
& A \arrow[from=u, "\delta"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[from=u, "-\delta"] \\
& A \arrow[from=u, "\partial"] & A \arrow[l, "d"'] \arrow[from=u, "-\partial"] \\
A & A \oplus A \arrow[l, "d_0"'] \arrow[from=u, "\overline{\delta}"] & A \arrow[l, "d_1"'] \arrow[from=u, "-\delta"]
\end{tikzcd}$$

con los siguientes diferenciales k-lineales

$$\begin{aligned}
&d_0(a,b) = [a,x] + [b,y]\,,\\
&d_1(a) = \Big([a,y^2] - (axy + yxa), [x,a]y + y\,[x,a] - xax\Big)\,,\\
&d(a) = [a,y^2] - (axy + yxa),\\
&\overline{\delta}(a) = (ax + xa, 0),\\
&\delta(a) = ax + xa,\\
&\partial(a) = [a,x]\,.
\end{aligned}$$

Para calcular la homología total de este complejo vamos a utilizar la sucesión espectral inducida por la filtración por columnas. Denotamos por $E^r_{\bullet,\bullet}$ a la sucesión espectral.

### 3.2.1 Primera página

Para poder calcular los espacios de homología de la primera página de la sucesión espectral vamos a necesitar saber qué valores toman los morfismos $\overline{\delta}$, $\delta$ y $\partial$ en los elementos de la base $\mathcal{B}$.

Empecemos con $\delta$. Sea $z = x^a(yx)^by^c \in \mathcal{B}$, luego $\delta(z) = x^a(yx)^by^cx + x^{a+1}(yx)^by^c$. Nos va a resultar conveniente escribir esta última expresión como combinación lineal de elementos de $\mathcal{B}$ usando las reglas de conmutación demostradas en el Apéndice. Para eso vamos a necesitar considerar diferentes casos.

- Si $a = 0$ y $c = 2k$,

$$\begin{aligned}
\delta(z) = (yx)^by^{2k}x + x(yx)^by^{2k} &= (yx)^b\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}x(yx)^{k-i}y^{2i}\right) + x(yx)^by^{2k}\\
&= \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}(yx)^bx(yx)^{k-i}y^{2i} + x(yx)^by^{2k}.
\end{aligned}$$

  - Si $b = 0$,

$$\delta(z) = \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}x(yx)^{k-i}y^{2i} + xy^{2k}.$$

– Si $b \geq 1$, como $x^2 = 0$,

$$\delta(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b-1}(yx)x(yx)^{k-i}y^{2i} + x(yx)^b y^{2k} = x(yx)^b y^{2k}.$$

- Si $a = 0$ y $c = 2k+1$,

$$\begin{aligned}
\delta(z) &= (yx)^b y^{2k+1} x + x(yx)^b y^{2k+1} \\
&= (yx)^b \left( \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k-i+1} y^{2i} \right) + x(yx)^b y^{2k+1} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1}.
\end{aligned}$$

- Si $a = 1$ y $c = 2k$,

$$\begin{aligned}
\delta(z) &= x(yx)^b y^{2k} x + x^2(yx)^b y^c = x(yx)^b y^{2k} x \\
&= x(yx)^b \left( \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^b x(yx)^{k-i} y^{2i}. \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ya que como $x^2 = 0$, resulta que $x(yx)^b x = 0$ para todo $b \geq 0$.

- Si $a = 1$ y $c = 2k+1$

$$\begin{aligned}
\delta(x) &= x(yx)^b y^{2k+1} x = x(yx)^b \left( \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k-i+1} y^{2i} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i}.
\end{aligned}$$

Con este cálculo probamos que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(\delta) = \Bigg\langle & \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} + xy^{2k},\ x(yx)^{b+1} y^{2k}, \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1}, \\
& \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} \ :\ b, k \geq 0 \Bigg\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora que ya tenemos un conjunto de generadores de $\mathrm{Im}(\delta)$, queremos extraer una base.

**Proposición 3.2.1.** El conjunto

$$\left\{ x(yx)^b y^{2k}, \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1} : b, k \geq 0 \right\}$$

es una base de $\mathrm{Im}(\delta)$.

*Demostración.* Vamos a usar las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned}
\eta_k &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} + xy^{2k},\\
\theta_{b,k} &= x(yx)^{b+1} y^{2k},\\
\lambda_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1},\\
\mu_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i}.
\end{aligned}$$

Sabemos que el conjunto $\{\eta_k,\ \theta_{b,k},\ \lambda_{b,k},\ \mu_{b,k}\ :\ b,k \geq 0\}$ genera $\mathrm{Im}(\delta)$. Como

$$\begin{aligned}
\eta_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} + xy^{2k} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} + 2xy^{2k}\\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} \theta_{k-i-1,i} + 2xy^{2k}
\end{aligned}$$

y la característica de $\Bbbk$ es 0, resulta que $xy^{2k}$ pertenece a $\mathrm{Im}(\delta)$ para todo $k \geq 0$. Por otro lado,

$$\mu_{b,k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} \theta_{b+k-i,i}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\left\{\theta_{b,k},\ xy^{2k},\ \lambda_{b,k}\ :\ b,k \geq 0\right\}\\
&\qquad = \left\{x(yx)^b y^{2k}, \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1} : b,k \geq 0\right\}
\end{aligned}$$

genera $\mathrm{Im}(\delta)$. Más aún, se trata de una base ya que cualquier combinación lineal de elementos de este conjunto es una combinación lineal de elementos distintos de $\mathcal{B}$. $\square$

**Proposición 3.2.2.** El conjunto

$$\left\{\left(x(yx)^b y^{2k}, 0\right), \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1}, 0\right) : b,k \geq 0\right\}$$

es una base de $\mathrm{Im}(\overline{\delta})$.

*Demostración.* Se deduce de que para todo $z \in A$, $\overline{\delta}(z) = (\delta(z), 0)$. $\square$

Nos resta calcular los valores que toma $\partial$ en los elementos de la base y obtener una base de su imagen. Calculemos $\partial(z)$ para $z = x^a(yx)^b y^c \in \mathcal{B}$. Como

$$\partial(z) = x^a(yx)^b y^c x - x^{a+1}(yx)^b y^c,$$

resulta que

- si $a = 0$ y $c = 2k$,

$$\partial(z) = (yx)^b y^{2k} x - x(yx)^b y^{2k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^b x(yx)^{k-i} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k}.$$

  - Si $b = 0$,

$$\partial(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} - xy^{2k} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i}.$$

  - Si $b \geq 1$, usando nuevamente que $x^2 = 0$,

$$\partial(z) = -x(yx)^b y^{2k}.$$

- Si $a = 0$ y $c = 2k + 1$,

$$\partial(z) = (yx)^b y^{2k+1} x - x(yx)^b y^{2k+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}.$$

- Si $a = 1$ y $c = 2k$,

$$\partial(z) = x(yx)^b y^{2k} x - x^2(yx)^b y^{2k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^b x(yx)^{k-i} y^{2i} = 0,$$

  ya que $x(yx)^b x = 0$ para todo $b \geq 0$.

- Si $a = 1$ y $c = 2k + 1$,

$$\partial(z) = x(yx)^b y^{2k} x - x^2(yx)^b y^{2k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i}.$$

Con este cálculo probamos que

$$\operatorname{Im}(\partial) = \Big\langle \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i},\ x(yx)^{b+1} y^{2k},\ \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1},$$
$$\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} : b, k \geq 0 \Big\rangle.$$

**Proposición 3.2.3.** El conjunto

$$\left\{ x(yx)^{b+1} y^{2k}, \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1} : b, k \geq 0 \right\}$$

es una base de $\operatorname{Im}(\partial)$.

*Demostración.* Llamamos como antes

$$\begin{aligned}
\eta_{k-1} &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i}, \\
\theta_{b,k} &= x(yx)^{b+1} y^{2k}, \\
\lambda_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}, \\
\mu_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i}.
\end{aligned}$$

Como $k - i \geq 1$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k-1$, entonces

$$\eta_{k-1} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} \theta_{k-1-i,i}.$$

Por otro lado como $b + k - i + 1 \geq 1$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k$, entonces

$$\mu_{b,k} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k-i+1} y^{2i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} \theta_{b+k-i,i}.$$

Luego el conjunto

$$\left\{ x(yx)^{b+1} y^{2k}, \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1} : b, k \geq 0 \right\}$$

genera $\mathrm{Im}(\partial)$ y es fácil ver que es una base. □

Ya estamos en condiciones de calcular la primera página de la sucesión espectral.

**Proposición 3.2.4.** El espacio vectorial $E^1_{1,0} = \frac{A \oplus A}{\mathrm{Im}(\bar{\delta})}$ tiene como base al conjunto

$$\left\{ \left[ ((yx)^b y^c, 0) \right] \ : \ b, c \geq 0 \right\} \cup \left\{ \left[ (0, x^a (yx)^b y^c) \right] \ : \ a \in \{0, 1\} \text{ y } b, c \geq 0 \right\}.$$

*Demostración.* Debido a la Proposición 3.2.2, resulta que

$$\begin{aligned}
\left[ (x(yx)^b y^{2k}, 0) \right] &= 0, \\
\left[ (-x(yx)^b y^{2k+1}, 0) \right] &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} \left[ (yx)^{b+k-i+1} y^{2i}, 0) \right]
\end{aligned}$$

y por lo tanto, el conjunto que aparece en el enunciado de la proposición genera $E^1_{1,0}$. Es fácil verificar que también es linealmente independiente. □

Vamos a identificar a $E^1_{1,0} = \frac{A \oplus A}{\mathrm{Im}(\bar{\delta})}$ con $\frac{A}{\mathrm{Im}(\delta)} \oplus A$ y vamos escribir a los elementos $[(a, b)] \in E^1_{1,0}$ como $([a], [b])$ para poder trabajar más fácilmente con cada coordenada por separado.

**Proposición 3.2.5.** El espacio vectorial $E^1_{2,0} = \frac{A}{\mathrm{Im}(\delta)}$ tiene como base al conjunto

$$\left\{ \left[ (yx)^b y^c \right] \ : \ b, c \geq 0 \right\}.$$

*Demostración.* Se deduce mediante un razonamiento análogo al anterior. $\square$

**Proposición 3.2.6.** Los espacios vectoriales $E^1_{1,2i+1} \cong E^1_{2,2i+1}$ tienen como base al conjunto $\left\{ \left[ xy^{2n} \right] \ : \ n \geq 0 \right\}$, para todo $i \geq 0$.

*Demostración.* Es claro que el núcleo y la imagen de $\delta : E^0_{1,2i+1} \to E^0_{1,2i}$ son isomorfos, respectivamente, al núcleo y la imagen de $-\delta : E^0_{2,2i+1} \to E^0_{2,2i}$. Lo mismo ocurre con los morfismos $\partial$ y $-\partial$. Además $\mathrm{Ker}(\delta)$ es igual a $\mathrm{Ker}(\overline{\delta})$ y luego $E^1_{1,2i+1}$ es isomorfo $E^1_{2,2i+1}$, para todo $i \geq 0$. Sea $z \in \mathrm{Ker}(\delta)$, como $\delta(w) = 0$ ó $\mathrm{gr}(\delta(w)) = \mathrm{gr}(w) + 1$ para todo $w \in A$ y las relaciones que definen a $A$ son homogéneas, podemos suponer que $z$ es homogéneo. Separamos el cálculo según la paridad del grado de $z$.

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n$, entonces

$$z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x (yx)^{n-i} y^{2i-1}.$$

  Por la Proposición 3.2.3, sabemos que $x(yx)^{n-i}y^{2i-1} - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j}$ pertenece a la imagen de $\partial$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, reduciendo módulo bordes, podemos suponer que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l}$. Si $z$ pertenece al núcleo de $\delta$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \delta(z) = \delta\left( \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l} \right) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \delta((yx)^{n-l} y^{2l}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \delta((yx)^{n-l} y^{2l}) + \alpha_n \delta(y^{2n}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l x (yx)^{n-l} y^{2l} + \alpha_n \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x (yx)^{n-l} y^{2l} + \alpha_n x y^{2n} \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_l + \alpha_n \frac{n!}{l!}) x (yx)^{n-l} y^{2l} + 2\alpha_n x y^{2n}. \end{aligned}$$

  Como el monomio $xy^{2n}$ no aparece en la sumatoria, resulta que $\alpha_n = 0$. Luego

$$\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l x (yx)^{n-l} y^{2l} = 0$$

  y como los monomios que aparecen en la suma son linealmente independientes, entonces $\alpha_l = 0$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n-1$. Es decir, $z = 0$.

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n + 1$, entonces

$$z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n} \beta_l x (yx)^{n-l} y^{2l}.$$

La Proposición 3.2.3, asegura que $x(yx)^{n-l}y^{2l} \in \mathrm{Im}(\partial)$ para todo $0 \leq l \leq n-1$. Por lo tanto, reduciendo módulo bordes, podemos suponer que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l+1} + \beta xy^{2n}$. Si $z$ pertenece al núcleo de $\delta$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \delta(z) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \delta((yx)^{n-l}y^{2l+1}) + \beta\delta(xy^{2n}) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \left( \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!}(yx)^{n+1-i}y^{2i} + x(yx)^{n-l}y^{2l+1} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{l} \alpha_l \frac{l!}{i!}(yx)^{n+1-i}y^{2i} + \sum_{l=0}^{n} \alpha_l x(yx)^{n-l}y^{2l+1}. \end{aligned}$$

En particular $\sum_{l=0}^{n} \alpha_l x(yx)^{n-l}y^{2l+1} = 0$, por lo tanto $\alpha_l = 0$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$. Es decir, $z = \beta xy^{2n}$ y

$$E^1_{1,2i+1} = E^1_{2,2i+1} = \left\langle \left[ xy^{2n} \right] \; : \; n \geq 0 \right\rangle.$$

Veamos que los generadores que encontramos forman una base. Sea $[w] \in \frac{\mathrm{Ker}(\delta)}{\mathrm{Im}(\partial)}$ una combinación lineal de elementos de la forma $[xy^{2n}]$ y supongamos que $[w] = 0$, es decir, $w \in \mathrm{Im}(\partial)$. Como los elementos que generan $\mathrm{Im}(\delta)$ son homogéneos podemos suponer que $w$ también lo es y por lo tanto $w = \lambda xy^{2n}$ para algún $n \geq 0$ y para algún $\lambda \in k$. Pero los únicos elementos de la forma $x(yx)^b y^c$ que pertenecen a $\mathrm{Im}(\delta)$ cumplen que $b \geq 1$. Por lo tanto $\lambda = 0$ y el conjunto $\left\{ [xy^{2n}] \; : \; n \geq 0 \right\}$ es una base de $\frac{\mathrm{Ker}(\delta)}{\mathrm{Im}(\partial)}$. □

**Proposición 3.2.7.** Para todo $i \geq 1$, los espacios vectoriales $E^1_{1,2i} \cong E^1_{2,2i}$ tienen como base al conjunto $\left\{ \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l}y^{2l} \right] \; : \; n \geq 0 \right\}$.

*Demostración.* Sea $z \in \mathrm{Ker}(\partial)$, nuevamente podemos suponer que $z$ es homogéneo por la misma razón que antes. Separamos el cálculo de $z$ según la paridad de su grado.

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n, n \geq 0$,

$$z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x(yx)^{n-i}y^{2i-1}.$$

Debido a la Proposición 3.2.1, sabemos que $x(yx)^{n-i}y^{2i-1} + \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(i-1)!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j} \in \mathrm{Im}(\delta)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto, reduciendo módulo bordes, podemos suponer que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l}$. Si $z \in \mathrm{Ker}(\partial)$, entonces

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \partial((yx)^{n-l}y^{2l}) &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \partial((yx)^{n-l}y^{2l}) + \alpha_n \partial(y^{2n}) \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l (-x(yx)^{n-l}y^{2l}) + \alpha_n \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l}y^{2l} = \sum_{l=0}^{n-1} (-\alpha_l + \alpha_n \frac{n!}{l!}) x(yx)^{n-l}y^{2l}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha_l = \alpha_n \frac{n!}{l!}$ para todo $0 \leq l \leq n$ y

$$z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l} = \alpha_n \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2l}.$$

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n+1, n \geq 0$,

$$z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n} \beta_l x (yx)^{n-l} y^{2l}.$$

Por la Proposición 3.2.1, $x(yx)^{n-l}y^{2l} \in \mathrm{Im}(\delta)$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$. Nuevamente reduciendo módulo bordes, podemos suponer que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l+1}$. Si $z$ pertenece al núcleo de $\partial$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \partial((yx)^{n-l} y^{2l+1}) = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \left( \sum_{i=0}^{l} \frac{l!}{i!} (yx)^{n-i+1} y^{2i} - x(yx)^{n-l} y^{2l+1} \right) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{l} \alpha_l \frac{l!}{i!} (yx)^{n-i+1} y^{2i} - \sum_{l=0}^{n} \alpha_l x (yx)^{n-l} y^{2l+1}. \end{aligned}$$

En particular $\sum_{l=0}^{n} \alpha_l x (yx)^{n-l} y^{2l+1} = 0$ y por lo tanto $\alpha_l = 0$ para todo $0 \leq l \leq n$. Luego $E^1_{1,2i} \cong E^1_{2,2i}$ y están generados por el conjunto

$$\left\{ \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l} y^{2l} \right] \; : \; n \geq 0 \right\}.$$

Nuevamente para verificar que estos generadores forman una base alcanza con probar que para todo $n \geq 0$, $w = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} (yx)^{n-l} y^{2l}$ no pertenece al subespacio $\mathrm{Im}(\delta)$. Como el grado de $w$ es par, si $w \in \mathrm{Im}(\delta)$, entonces necesariamente $w$ debería pertenecer al subespacio

$$\left\langle \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{b+k-i+1} y^{2i} + x(yx)^b y^{2k+1} : b, k \geq 0 \right\rangle.$$

Pero esto es absurdo debido a que aparecen términos de la forma $x(yx)^b y^{2k+1}$. $\square$

El siguiente diagrama describe la primera página de la sucesión espectral:

$$\begin{tikzcd}
 & \langle [xy^{2n}] \rangle & & \langle [xy^{2n}] \rangle \arrow[ll, "d^{(1)}"'] \\
 & \langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} [(yx)^{n-l} y^{2l}] \rangle & & \langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} [(yx)^{n-l} y^{2l}] \rangle \arrow[ll, "d^{(1)}"'] \\
 & \langle [xy^{2n}] \rangle & & \langle [xy^{2n}] \rangle \arrow[ll, "d^{(1)}"'] \\
A & \langle ([(yx)^b y^c], 0) \rangle \oplus A \arrow[l, "d_0^{(1)}"'] & & \langle [(yx)^b y^c] \rangle \arrow[ll, "d_1^{(1)}"']
\end{tikzcd}$$

donde $d_0^{(1)}$, $d_1^{(1)}$ y $d^{(1)}$ son los morfismos inducidos en la homología por $d_0$, $d_1$ y $d$, respectivamente.

### 3.2.2 Segunda página

Debido a la forma del complejo doble, la sucesión espectral se estaciona rápidamente y $E^2 = E^\infty$. Para el cálculo de la segunda página procederemos de igual manera que para la primera. Calcularemos qué valores toman los morfismos $d_0^{(1)}$, $d_1^{(1)}$ y $d^{(1)}$ en los elementos de las bases correspondientes y luego obtendremos una descripción de las imágenes de estos morfismos. Por último calcularemos las homologías en cada lugar.

**Proposición 3.2.8.** Para todo $k \geq 0$, el morfismo $d^{(1)} : E^1_{2,2k+1} \to E^1_{1,2k+1}$ es nulo.

*Demostración.* Sea $\left[xy^{2n}\right]$ un elemento de la base de $E^1_{2,2k+1}$, entonces

$$\begin{aligned} d(xy^{2n}) &= \left[xy^{2n}, y^2\right] - xy^{2n}xy = \left[xy^{2n}, y^2\right] - x\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l}y^{2l+1} \\ &= \left[xy^{2n}, y^2\right] = \left[x, y^2\right] y^{2n} + x\left[y^{2n}, y^2\right] = \left[x, y^2\right] y^{2n} \\ &= (xy^2 - y^2x)y^{2n} = (-xyx)y^{2n}. \end{aligned}$$

Luego $d(xy^{2n}) \in \mathrm{Im}(\partial)$ y por lo tanto $d^{(1)}(\left[xy^{2n}\right]) = 0$. $\square$

**Proposición 3.2.9.** Para todo $k \geq 1$, el morfismo $d^{(1)} : E^1_{2,2k} \to E^1_{1,2k}$ es nulo.

*Demostración.* Sea $w = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2l}$, de modo que $[w]$ es un elemento de la base de $E^1_{2,2k}$.

- Si $n = 0$, entonces

  $$d(w) = d(1) = \left[1, y^2\right] - (xy + yx) = -xy - yx.$$

  Luego $d(w) \in \mathrm{Im}(\delta)$ y $d^{(1)}([w]) = 0$. De hecho, utilizando la notación de la demostración de la Proposición 3.2.1, resulta que $d(w) = -\lambda_{0,0}$.

- Si $n \geq 1$ podemos suponer que $n = m+1$, donde $m \geq 0$. Usando en la última igualdad la Proposición A.0.1, deducimos que

  $$\begin{aligned} w &= \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2l} = \left((m+1)\sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2l}\right) + y^{2m+2} \\ &= (m+1)y^{2m+1}x + y^{2m+2}. \end{aligned}$$

  Aplicando d obtenemos que

  $$d(w) = d((m+1)y^{2m+1}x + y^{2m+2}) = (m+1)d(y^{2m+1}x) + d(y^{2m+2}).$$

Calculemos $d(y^{2m+1}x)$ y $d(y^{2m+2})$ por separado:

$$\begin{aligned}
d(y^{2m+1}x) &= \left[y^{2m+1}x, y^2\right] - yxy^{2m+1}x = y^{2m+1}\left[x, y^2\right] - yxy^{2m+1}x \\
&= y^{2m+1}(-xyx) - yxy^{2m+1}x = -y^{2m+1}xyx - yxy^{2m+1}x \\
&= -\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i+1}y^{2i+1}x - \sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} \\
&= -\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i+1}\left(\sum_{j=0}^{i}\frac{i!}{j!}(yx)^{i-j+1}y^{2j}\right) - \sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} \\
&= -\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{i}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} - \sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} \\
&= -\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=j}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} - \sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} \\
&= -\sum_{j=0}^{m}(m-j+1)\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} - \sum_{j=0}^{m}\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j} \\
&= -\sum_{j=0}^{m}(m-j+2)\frac{m!}{j!}(yx)^{m-j+2}y^{2j}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d(y^{2m+2}) &= \left[y^{2m+2}, y^2\right] - (y^{2m+2}xy + yxy^{2m+2}) = -y^{2m+2}xy - yxy^{2m+2} \\
&= -\sum_{l=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{l!}x(yx)^{m-l+1}y^{2l+1} - yxy^{2m+2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
d^{(1)}([w]) = &-\sum_{j=0}^{m}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&-\sum_{l=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{l!}\left[x(yx)^{m-l+1}y^{2l+1}\right] - \left[yxy^{2m+2}\right] \\
= &-\sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&-\sum_{l=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{l!}\left[x(yx)^{m-l+1}y^{2l+1}\right].
\end{aligned}$$

Como $\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!}(yx)^{b+k-i+1}y^{2i} + x(yx)^{b}y^{2k+1} \in \operatorname{Im}(\delta)$ para todo $b, k \geq 0$, eligiendo $k = l$, $b = m - l + 1$, obtenemos que $-\left[x(yx)^{m-l+1}y^{2l+1}\right] = \sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right]$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
d^1([w]) &= \sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] - \sum_{l=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{l!}\left[x(yx)^{m-l+1}y^{2l+1}\right] \\
&= -\sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&\quad + \sum_{l=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{l!}\left(\sum_{j=0}^{l}\frac{l!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right]\right) \\
&= -\sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&\quad + \sum_{l=0}^{m+1}\sum_{j=0}^{l}\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&= -\sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m+1}\sum_{l=j}^{m+1}\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&= -\sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{m+1}(m-j+2)\frac{(m+1)!}{j!}\left[(yx)^{m-j+2}y^{2j}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente paso va a ser calcular qué valores toma $d_1^{(1)}$ en los elementos de la base de $E^1_{2,0}$. Llamemos $f$ a la composición de $d_1$ con la proyección en la primera coordenada y llamemos $g$ a la composición de $d_1$ con la proyección en la segunda coordenada, de modo que

$$d_1(a) = \left(\left[a, y^2\right] - (axy + yxa), [x,a]\,y + y\,[x,a] - xax\right) = (f(a), g(a)), \text{ para todo } a \in A.$$

Para no complicar la notación seguiremos llamando $f$ al morfismo inducido por $f$ en la homología. Lo mismo haremos con $g$. Empecemos calculando qué valores toma $f$ en los elementos de la base de $E^1_{2,0}$. Sean $b, c \geq 0$ y $z = (yx)^b y^c$, de modo que $[z]$ sea un elemento de la base de $E^1_{2,0}$. Luego

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \left[(yx)^b y^c, y^2\right] - \left((yx)^b y^c xy + yx(yx)^b y^c\right) \\
&= \left[(yx)^b, y^2\right] y^c - (yx)^b(y^c x)y - (yx)^{b+1}y^c \\
&= (yx)^b y^{c+2} - y^2(yx)^b y^c - (yx)^b(y^c x)y - (yx)^{b+1}y^c
\end{aligned}
$$

y debido a la Proposición A.0.3,

$$
\begin{aligned}
f(z) &= (yx)^b y^{c+2} - ((yx)^b y^2 + b(yx)^{b+1})y^c - (yx)^b(y^c x)y - (yx)^{b+1}y^c \\
&= -(b+1)(yx)^{b+1}y^c - (yx)^b(y^c x)y.
\end{aligned}
$$

En la homología, resulta que

- si $c = 2k$,

$$
f([z]) = -(b+1)\left[(yx)^{b+1}y^{2k}\right] - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}\left[(yx)^b x(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right].
$$

  - Si $b = 0$

$$
f([z]) = -\left[(yx)y^{2k}\right] - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}\left[x(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right].
$$

    Como $\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}(yx)^{d+n-l+1}y^{2l} + x(yx)^b y^{2n+1}, 0\right) \in \operatorname{Im}(\bar{\delta})$ para todo $n, d \geq 0$, podemos elegir $n = i$, $d = k - i$ y obtenemos que

$$
-\left[x(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right] = \sum_{l=0}^{i} \frac{i!}{l!}\left[(yx)^{k-l+1}y^{2l}\right].
$$

    Luego

$$
\begin{aligned}
f([z]) &= -\left[(yx)y^{2k}\right] + \sum_{i=0}^{k}\sum_{l=0}^{i} \frac{k!}{l!}\left[(yx)^{k-l+1}y^{2l}\right] \\
&= -\left[(yx)y^{2k}\right] + \sum_{l=0}^{k}(k-l+1)\frac{k!}{l!}\left[(yx)^{k-l+1}y^{2l}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{k-1}(k-l+1)\frac{k!}{l!}\left[(yx)^{k-l+1}y^{2l}\right].
\end{aligned}
$$

  - Si $b \geq 1$,

$$
f([z]) = -(b+1)\left[(yx)^{b+1}y^{2k}\right].
$$

- Si $c = 2k+1$,

$$
\begin{aligned}
f([z]) &= -(b+1)\left[(yx)^{b+1}y^{2k+1}\right] - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}\left[(yx)^{k+b-i+1}y^{2i+1}\right] \\
&= -(b+2)\left[(yx)^{b+1}y^{2k+1}\right] - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}\left[(yx)^{k+b-i+1}y^{2i+1}\right].
\end{aligned}
$$

Ahora vamos a calcular qué valores toma $g$. Dados $b, c$ y $z$ como antes,

$$
\begin{aligned}
g(z) &= [x,z]\,y + y\,[x,z] - xzx = \left[x,(yx)^b y^c\right] y + y\left[x,(yx)^b y^c\right] - x(yx)^b y^c x \\
&= x(yx)^b y^{c+1} - (yx)^b y^c xy + (yx)^{b+1}y^c - y(yx)^b y^c x - x(yx)^b y^c x.
\end{aligned}
$$

- Si $b = 0$,

$$g(z) = xy^{c+1} - y^c xy + yxy^c - y^{c+1}x - xy^c x.$$

  - Si $c = 2k$,

$$\begin{aligned} g(z) &= xy^{2k+1} - y^{2k}xy + yxy^{2k} - y^{2k+1}x - xy^{2k}x \\ &= xy^{2k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i}y^{2i+1} + yxy^{2k} - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i} \\ &= -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i}y^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i}. \end{aligned}$$

  - Si $c = 2k+1$,

$$\begin{aligned} g(z) &= xy^{2k+2} - y^{2k+1}xy + yxy^{2k+1} - y^{2k+2}x - xy^{2k+1}x \\ &= xy^{2k+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i+1} + yxy^{2k+1} - \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!} x(yx)^{k+1-i}y^{2i} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k+1-i}y^{2i} \\ &= -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \left( \frac{(k+1)!}{i!} + \frac{k!}{i!} \right) x(yx)^{k+1-i}y^{2i} \\ &= -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+2)k!}{i!} x(yx)^{k+1-i}y^{2i}. \end{aligned}$$

- Si $b \geq 1$, debido a la Proposición A.0.3,

$$g(z) = x(yx)^b y^{c+1} - (yx)^b y^c xy + (yx)^{b+1}y^c - x(yx)^{b-1}y^{c+2}x - (b+1)x(yx)^b y^c x.$$

  - Si $c = 2k$,

$$g(z) = x(yx)^b y^{2k+1} + (yx)^{b+1}y^{2k}.$$

  - Si $c = 2k+1$,

$$\begin{aligned} g(z) &= x(yx)^b y^{2k+2} - (yx)^b y^{2k+1}xy + (yx)^{b+1}y^{2k+1} \\ &\quad - x(yx)^{b-1}y^{2k+3}x - (b+1)x(yx)^b y^{2k+1}x \\ &= x(yx)^b y^{2k+2} - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k+1-i}y^{2i+1} + (yx)^{b+1}y^{2k+1} \\ &\quad - \sum_{i=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{i!} x(yx)^{b+k+1-i}y^{2i} - (b+1)\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{b+k+1-i}y^{2i} \\ &= -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}(yx)^{b+k+1-i}y^{2i+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{(k+b+2)k!}{i!} x(yx)^{b+k+1-i}y^{2i}. \end{aligned}$$

Con este cálculo encontramos generadores de Im $\left(d_1^{(1)}\right)$. Nos resta obtener una base de este espacio.

Para enunciar la próxima proposición vamos a utilizar la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\theta^1_{b,k} &= -(b+1)\left[(yx)^{b+1}y^{2k}\right],\\
\theta^2_{b,k} &= \left[x(yx)^b y^{2k+1}\right] + \left[(yx)^{b+1}y^{2k}\right],\\
\lambda^1_{b,k} &= (b+1)\left[(yx)^b y^{2k+1}\right] + \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!}\left[(yx)^{k+b-i}y^{2i+1}\right]\\
\lambda^2_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!}\left[(yx)^{b+k-i}y^{2i+1}\right] + \sum_{i=0}^{k}\frac{(k+b+1)k!}{i!}\left[x(yx)^{b+k-i}y^{2i}\right]
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$, $b \geq 1$.

**Proposición 3.2.10.** El conjunto $\left\{\left(\theta^1_{b,k},\theta^2_{b,k}\right),\left(\lambda^1_{b,k},\lambda^2_{b,k}\right) \mid k \geq 0, b \geq 1\right\}$ es una base de Im $\left(d_1^{(1)}\right)$.

*Demostración.* Llamamos

$$\begin{aligned}
\eta^1_k &= \sum_{l=0}^{k-1}(k-l+1)\frac{k!}{l!}\left[(yx)^{k-l+1}y^{2l}\right],\\
\eta^2_k &= -\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!}\left[x(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right] - \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!}\left[(yx)^{k+1-i}y^{2i}\right]
\end{aligned}$$

para todo $k \geq 0$. Sabemos que el conjunto

$$\left\{\left(\theta^1_{b,k},\theta^2_{b,k}\right),\left(\lambda^1_{b,k},\lambda^2_{b,k}\right),\left(\eta^1_k,\eta^2_k\right) \mid k \geq 0, b \geq 1\right\}$$

genera Im $\left(d_1^{(1)}\right)$. Si $k = 0$, entonces $\eta^1_k = 0$ y $\eta^2_k = 0$. Si $k \geq 1$, entonces

$$\left(\eta^1_k,\eta^2_k\right) = \sum_{l=0}^{k-1}\left(\theta^1_{k-l,l},\theta^2_{k-l,l}\right).$$

Por lo tanto el conjunto $\left\{\left(\theta^1_{b,k},\theta^2_{b,k}\right),\left(\lambda^1_{b,k},\lambda^2_{b,k}\right) \mid k \geq 0, b \geq 1\right\}$ genera Im $\left(d_1^{(1)}\right)$ y es fácil ver que es una base. □

Nos resta calcular qué valores toma $d_0^{(1)}$ en los elementos de la base de $E^1_{1,0}$ y obtener una base de su imagen. Recordemos que $E^1_{1,0}$ está generado por los elementos de la forma $\left(\left[(yx)^b y^c\right],0\right)$ y $\left(0,\left[x^a(yx)^b y^c\right]\right)$ para todo $a \in \{0,1\}$ y para todo $b, c \geq 0$. Sea $z = ((yx)^b y^c, 0) \in A \oplus A$, como $d_0(z) = \partial(z)$, resulta que:

- si $c = 2k$ y $b = 0$,

$$d_0(z) = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{k!}{i!}x(yx)^{k-i}y^{2i}.$$

- Si $c = 2k$ y $b \geq 1$,

$$d_0(z) = -x(yx)^b y^{2k}.$$

- Si $c = 2k+1$,

$$d_0(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+b+1-i}y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}.$$

Sea $z = (0, x^a(yx)^b y^c)$, como $d_0(z) = d_0((0, x^a(yx)^b y^c)) = x^a(yx)^b y^{c+1} - yx^a(yx)^b y^c$, resulta que:

- si $a = 1$,

$$d_0(z) = x(yx)^b y^{c+1} - (yx)^{b+1}y^c.$$

- Si $a = 0$ y $b = 0$,

$$d_0(z) = 0.$$

- Si $a = 0$ y $b \geq 1$,

$$d_0(z) = (yx)^b y^{c+1} - x(yx)^{b-1}y^{c+2} - bx(yx)^b y^c.$$

Estos valores que obtuvimos generan $\mathrm{Im}(d_0^{(1)})$. Antes de encontrar una base de $\mathrm{Im}(d_0^{(1)})$ vamos a darle nombres a estos generadores, como hicimos antes, para simplificar la escritura del cálculo:

$$\begin{aligned}
\eta_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i}y^{2i}, \\
\theta_{b,k} &= x(yx)^{b+1}y^{2k}, \\
\lambda_{b,k} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+b+1-i}y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}, \\
\mu_{b,c} &= x(yx)^b y^{c+1} - (yx)^{b+1}y^c, \\
\nu_{b,c} &= (yx)^{b+1}y^{c+1} - x(yx)^b y^{c+2} - (b+1)x(yx)^{b+1}y^c,
\end{aligned}$$

para todo $b, k, c \geq 0$. Sabemos que el conjunto

$$\{\eta_k, \theta_{b,k}, \lambda_{b,k}, \mu_{b,c}, \nu_{b,c} \mid b, k, c \geq 0\}$$

genera $\mathrm{Im}\left(d_0^{(1)}\right)$. Como $\mu_{b,c+1} + \nu_{b,c} = -(b+1)x(yx)^{b+1}y^c$ para todo $b, c \geq 0$, resulta que $x(yx)^{b+1}y^c \in \mathrm{Im}\left(d_0^{(1)}\right)$ y por lo tanto $x(yx)^{b+1}y^{c+1} - \mu_{b+1,c} = (yx)^{b+2}y^c \in \mathrm{Im}\left(d_0^{(1)}\right)$ para todo $b, c \geq 0$. A partir de esta observación es fácil probar la siguiente proposición.

**Proposición 3.2.11.** El conjunto

$$\left\{\left[x(yx)^{b+1}y^c\right], \left[(yx)^{b+2}y^c\right], \left[xy^{c+1} - (yx)y^c\right] \mid b, c \geq 0\right\}$$

es una base de $\mathrm{Im}\left(d_0^{(1)}\right)$.

Ya estamos en condiciones de calcular $E^2$. Vamos a escribir $\overline{a}$, en vez de $[a]$, cuando nos refiramos a un elemento de la segunda página.

Las siguientes tres proposiciones son consecuencia inmediata de las Proposiciones 3.2.8, 3.2.9 y 3.2.11 respectivamente.

**Proposición 3.2.12.** Para todo $i \geq 0$, los espacios vectoriales $E^2_{1,2i+1} \cong E^2_{2,2i+1}$ tienen como base al conjunto $\left\{\overline{xy^{2n}} \ : \ n \geq 0\right\}$.

**Proposición 3.2.13.** Para todo $i \geq 1$, los espacios vectoriales $E^2_{1,2i} \cong E^2_{2,2i}$ tienen como base al conjunto $\left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\overline{(yx)^{n-l}y^{2l}} \ : \ n \geq 0\right\}$.

**Proposición 3.2.14.** El espacio vectorial $E^2_{0,0}$ tiene como base al conjunto $\left\{\overline{xy^n}, \overline{y^n} \ : \ n \geq 0\right\}$.

Nos resta calcular $E^2_{1,0}$ y $E^2_{2,0}$.

**Proposición 3.2.15.** El espacio vectorial $E^2_{2,0}$ tiene como base al conjunto

$$\left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\overline{(yx)^{n-l}y^{2l}} \ : \ n \geq 0\right\}.$$

*Demostración.* Nuevamente escribimos $d_1^{(1)} = (f, g)$. Sea $[z] \in \operatorname{Ker}\left(d_1^{(1)}\right)$, como $f(z) = 0$ ó $gr(f(z)) = gr(z) + 3$, $g(z) = 0$ ó $gr(g(z)) = gr(z) + 3$ y la graduación pasa a la homología, debido a que los diferenciales son graduados, podemos suponer que $[z]$ es homogéneo. Separamos el cálculo de $[z]$ según la paridad de su grado.

- Si $gr(z) = 2n$, $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l}$. Como $[z]$ pertenece a $\operatorname{Ker}\left(d_1^{(1)}\right)$, en particular $f([z]) = 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = f([z]) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l f\left(\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right]\right) \\ &= -\sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l (n-l+1)\left[(yx)^{n-l+1}y^{2l}\right] + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_n (n-l+1)\frac{n!}{l!}\left[(yx)^{n-l+1}y^{2l}\right] \\ &= \sum_{l=0}^{n-1}(n-l-1)\left(\alpha_n\frac{n!}{l!} - \alpha_l\right)\left[(yx)^{n-l+1}y^{2l}\right]. \end{aligned}$$

  Por lo tanto $\alpha_l = \alpha_n \frac{n!}{l!}$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$ y $[z] = \alpha_n \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right]$. Es fácil verificar que si este el caso, $d_1^{(1)}([z]) = 0$.

- Si $gr(z) = 2n+1$, $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l+1}$. Al igual que antes, como $[z]$ pertenece a

$\operatorname{Ker}\left(d_1^{(1)}\right)$, resulta que $f([z]) = 0$ y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
0 = f([z]) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l f\left(\left[(yx)^{n-l} y^{2l+1}\right]\right) \\
&= -\sum_{l=0}^{n} \alpha_l (n-l+2)\left[(yx)^{n-l l} y^{2l+1}\right] - \sum_{l=0}^{n}\sum_{i=0}^{l-1} \alpha_l \frac{l!}{i!}\left[(yx)^{n-i+1} y^{2i+1}\right] \\
&= -\sum_{l=0}^{n} \alpha_l (n-l+2)\left[(yx)^{n-l l} y^{2l+1}\right] - \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{j=l+1}^{n} \frac{j!}{l!}\alpha_l\left[(yx)^{n-l+1} y^{2l+1}\right] \\
&= -2\alpha_n (yx) y^{2n+1} - \sum_{l=0}^{n-1}\left((n-l+2) + \sum_{j=l+1}^{n}\frac{j!}{l!}\right)\alpha_l\left[(yx)^{n-l+1} y^{2l+1}\right]
\end{aligned}
$$

Luego $\alpha_l = 0$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$.

De este cálculo se deduce que $E^2_{2,0} = \left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left[(yx)^{n-l} y^{2l}\right] \mid n \geq 0 \right\rangle$. Más aún, como los generadores que encontramos son combinaciones lineales homogéneas no nulas de elementos de la base de $E^1_{2,0}$ y entre ellos tienen grados distintos, resulta que son linealmente independientes. $\square$

**Proposición 3.2.16.** El espacio vectorial $E^2_{1,0}$ tiene como base al conjunto

$$
\left\{ \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left(\overline{(yx)^{n-l} y^{2l}}, 0\right), \left(-\overline{(yx)^{2n}}, \overline{xy^{2n+1} + (yx)y^{2n}}\right), \left(0, \overline{y^n}\right), \right.
$$
$$
\left. \left(\overline{y^{2n+1}}, \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\frac{n+1}{n+1-l}\overline{x(yx)^{n-l} y^{2l}} + \sum_{l=0}^{n}\frac{n!}{l!}\frac{1}{n-l}\overline{(yx)^{n-l} y^{2l+1}}\right), n \geq 0 \right\}.
$$

*Demostración.* Sea $([z],[w]) \in \operatorname{Ker}(d_0^{(1)})$, nuevamente podemos suponer que $w$ y $z$ son homogéneos y tienen el mismo grado. Separamos el cálculo de $[z]$ y de $[w]$ según la paridad sus grados.

- Si el grado es $2n$,

$$
([z],[w]) = \left(\sum_{l=0}^{n}\alpha_l\left[(yx)^{n-l} y^{2l}\right], \sum_{l=0}^{n-1}\beta_l\left[x(yx)^{n-l-1} y^{2l+1}\right] + \sum_{l=0}^{n}\gamma_l\left[(yx)^{n-l} y^{2l}\right]\right)
$$

y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
0 = d_0^{(1)}([z],[w]) &= \alpha_n \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!}\left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right] - \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right] \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l \left(\left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}\right] - \left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right]\right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \left(\left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right] - \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}\right] - (n-l)\left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right]\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1}(\gamma_l - \beta_l)\left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right] + \sum_{l=0}^{n-1}(\beta_l - \gamma_l)\left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}\right] \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1}\left(\alpha_n \frac{n!}{l!} - \alpha_l - (n-l)\gamma_l\right)\left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right].
\end{aligned}
$$

Como todos los monomios que aparecen en las sumas son linealmente independientes, resulta que $\beta_l = \gamma_l$ y $\alpha_l = \alpha_n \frac{n!}{l!} - (n-l)\gamma_l$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n-1$. Luego

$$
\begin{aligned}
([z],[w]) &= \left( \sum_{l=0}^{n} \left(\alpha_n \frac{n!}{l!} - (n-l)\gamma_l\right)\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], \right. \\
&\qquad \left. \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1} + (yx)^{n-l}y^{2l}\right] + \gamma_n\left[y^{2n}\right] \right) \\
&= \alpha_n \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left(\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], 0\right) + \gamma_n\left(0, \left[y^{2n}\right]\right) \\
&\qquad + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \left(-(n-l)\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}\right] + \left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right]\right) \\
&= \alpha_n \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left(\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], 0\right) + \gamma_n\left(0, \left[y^{2n}\right]\right) \\
&\qquad + \gamma_{n-1}\left(-\left[(yx)y^{2n-2}\right], \left[xy^{2n-1}\right] + \left[yxy^{2n-2}\right]\right).
\end{aligned}
$$

La última igualdad se debe a que

$$
\left(-(n-l)\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}\right] + \left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right]\right)
$$

pertenece a $\operatorname{Im}\left(d_1^{(1)}\right)$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n-2$. De hecho, utilizando la notación de la Proposición 3.2.10, resulta que

$$
\left(-(n-l)\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right], \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}\right] + \left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right]\right) = \left(\theta^1_{n-l-1,l}, \theta^2_{n-l-1,l}\right).
$$

- Si el grado es $2n+1$,

$$
([z],[w]) = \left(\sum_{l=0}^{n} \alpha_l \left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right], \sum_{l=0}^{n} \beta_l \left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right] + \sum_{l=0}^{n} \gamma_l \left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right]\right).
$$

Por la Proposición 3.2.10, $\left(\lambda^1_{b,k}, \lambda^2_{b,k}\right)$ pertenece a la imagen de $d_1^{(1)}$ para todo $b \geq 1$ y para todo $k \geq 0$. Por lo tanto reduciendo módulo bordes podemos suponer que

$$([z],[w]) = \left(\alpha_n \left[y^{2n+1}\right], \sum_{l=0}^{n} \beta_l \left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right] + \sum_{l=0}^{n} \gamma_l \left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right]\right).$$

Si $([z],[w])$ pertenece al núcleo de $d_0^{(1)}$, entonces

$$\begin{aligned}
0 = d_0^{(1)}([z],[w]) &= \alpha \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[(yx)^{n+1-l}y^{2l}\right] - \alpha \left[xy^{2n+1}\right] \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n} \beta_l \left(\left[x(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right] - \left[(yx)^{n-l+1}y^{2l}\right]\right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \gamma_l \left(\left[(yx)^{n-l}y^{2l+2}\right] - \left[x(yx)^{n-l-1}y^{2l+3}\right] - (n-l)\left[x(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right]\right) \\
&= (\alpha n! - \beta_0)\left[(yx)^{n+1}\right] + \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{n!}{l!}\alpha - \beta_l + \gamma_{l-1}\right)\left[(yx)^{n+1-l}y^{2l}\right] \\
&\quad + (\beta_0 - \gamma_0 n)\left[x(yx)^n y\right] + \sum_{l=0}^{n-1} (\beta_l - \gamma_{l-1} - \gamma_l(n-l))\left[x(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right] \\
&\quad + (\beta_n - \gamma_{n-1} - \alpha)\left[xy^{2n+1}\right].
\end{aligned}$$

Como todos los monomios son linealmente independientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= n!\alpha, \\
\beta_l &= \frac{n!}{l!}\alpha + \gamma_{l-1} \text{ para todo } l, 1 \leq l \leq n, \\
\beta_l &= \gamma_{l-1} + \gamma_l(n-l) \text{ para todo } l, 1 \leq n \leq n-1, \\
\gamma_0 &= \frac{1}{n}\beta_0, \\
\gamma_{n-1} &= \beta_n - \alpha.
\end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce que $\gamma_l = \alpha \frac{n!}{l!}\frac{1}{n-l}$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n-1$ y que $\beta_l = \alpha \frac{n!}{l!}\frac{n+1}{n-l+1}$ para todo $0 \leq l \leq n$. Por lo tanto, $([z],[w])$ es igual a

$$\begin{aligned}
&\alpha\left(\left[y^{2n+1}\right], \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\frac{n+1}{n-l+1}\left[x(yx)^{n-l}y^{2l}\right] + \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\frac{1}{n-l}\left[(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right]\right) \\
&\quad + \gamma_n\left(0, \left[y^{2n+1}\right]\right).
\end{aligned}$$

Con este cálculo probamos que el conjunto que aparece en el enunciado de la proposición genera. Alcanza con mirar los grados de estos generadores para deducir que el conjunto es una base. □

De manera similar al ejemplo introductorio de la Sección 2.3 se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow E^2_{1,p} \xrightarrow{\iota} H_{p+1}(A,A) \xrightarrow{\pi} E^2_{2,p-1} \longrightarrow 0.$$

Para encontrar una base de $H_{p+1}(A,A)$ alcanza con completar una base de $\iota\left(E^2_{1,p}\right)$ con elementos tales que sus imágenes, por medio de $\pi$, formen una base de $E^2_{2,p-1}$. Más concretamente, si $\{\overline{a_i}\}_i$ es una base de $E^2_{1,p}$, el conjunto $\{\overline{b_j}\}_j$ es una base de $E^2_{2,p-1}$ y $\{\overline{c_j}\}_j$ son elementos tales que $f(c_j) = -d(b_j)$ para todo j, donde $f = \delta$ ó $f = \partial$ según corresponda, entonces el conjunto $\{(\overline{a_i}, 0)\}_i \cup \{(\overline{b_j}, \overline{c_j})\}_j$ es una base de $H_{p+1}(A,A)$. A partir de esta observación es sencillo verificar el siguiente teorema.

**Teorema 3.2.1.** Se tienen los siguientes isomorfismos:

$$
\begin{aligned}
&H_0(A,A) \cong \left\langle \overline{xy^n}, \overline{y^n} \mid n \geq 0 \right\rangle, \\
&H_1(A,A) \cong \\
&\quad \left\langle \left( \overline{y^{2n+1}}, \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \left( \frac{n+1}{n-(i-1)} \overline{x(yx)^{n-i}y^{2i}} + \frac{1}{n-i} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i+1}} \right) \right) \mid n \geq 0 \right\rangle \\
&\quad \oplus \left\langle \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}, 0 \right), \left(0, \overline{y^n}\right), \left( \overline{-yxy^{2n}}, \overline{xy^{2n+1}} + \overline{yxy^{2n}} \right) \mid n \geq 0 \right\rangle, \\
&H_2(A,A) \cong \left\langle \left( \overline{xy^{2n}}, 0 \right), \left( 0, \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i}} \right) \mid n \geq 0 \right\rangle, \\
&H_{2p+1}(A,A) \cong \left\langle \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}, 0 \right), \left( -\overline{(yx)y^{2n}}, \overline{xy^{2n}} \right) \mid n \geq 0 \right\rangle, \\
&H_{2p+2}(A,A) \cong \left\langle \left( \overline{xy^{2n}}, 0 \right), \left( \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i+1}}, \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} \overline{(yx)^{n-i}y^{2i}} \right) \mid n \geq 0 \right\rangle,
\end{aligned}
$$

para todo $p \geq 1$. En cada caso los conjuntos generadores son bases del espacio que generan.

## 3.3 Cohomología de Hochschild

Para calcular la cohomología de Hochschild procederemos de manera similar al cálculo de la homología. Nuevamente consideramos el complejo doble $X_{\bullet,\bullet}$ pero esta vez le aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_{A^e}(-, A)$. La homología total de este nuevo complejo es isomorfa a $H^\bullet(A,A)$. Identificando de manera natural $\mathrm{Hom}_{A^e}(A \otimes W \otimes A, A)$ con $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, A)$, $\mathrm{Hom}_{\Bbbk}(W, A)$ con $W^* \otimes A$ y luego este último con $A^{\dim(W)}$ para todo espacio vectorial $W$ de dimension finita, resulta el complejo doble

$$
\begin{tikzcd}
 & {} & {} \\
 & A \arrow[u, dashed, "\partial"] \arrow[r, "d"] & A \arrow[u, dashed, "\partial'"] \\
 & A \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "d"] & A \arrow[u, "\delta'"] \\
 & A \arrow[u, "\partial"] \arrow[r, "d"] & A \arrow[u, "\partial'"] \\
A \arrow[r, "d^0"] & A \oplus A \arrow[u, "\hat{\delta}"] \arrow[r, "d^1"] & A \arrow[u, "\delta'"]
\end{tikzcd}
$$

con los siguientes diferenciales $\Bbbk$-lineales

$$
\begin{aligned}
d^0(a) &= ([x,a],[y,a]),\\
d^1(a,b) &= [y^2,a] + [yb+by,x] - (xya+ayx) - xbx,\\
d(a) &= [y^2,a] - (xya+ayx),\\
\hat{\delta}(a,b) &= xa+ax,\\
\delta(a) &= xa+ax,\\
\partial(a) &= [x,a].
\end{aligned}
$$

Para calcular la homología total de este complejo vamos a utilizar la sucesión espectral inducida por la filtración por columnas. Denotamos por $E_r^{\bullet,\bullet}$ a la sucesión espectral.

### 3.3.1 Primera página

Esta vez no es necesario calcular las imágenes de los morfismos verticales debido a que los morfismos son los mismos que en el complejo doble asociado a la homología de Hochschild. Procederemos directamente al cálculo de la primera página. Es claro que $E_1^{0,0} = A$, $E_1^{1,0} = \mathrm{Ker}(\hat{\delta}) = \mathrm{Ker}(\delta) \oplus A$ y $E_1^{2,0} = \mathrm{Ker}(\delta') = \mathrm{Ker}(\delta)$, por lo tanto empezamos calculando $\mathrm{Ker}(\delta)$.

**Proposición 3.3.1.** El espacio vectorial $\mathrm{Ker}(\delta)$ tiene como base al conjunto

$$
\left\{ \left[x(yx)^b y^{2k+1}\right] - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} \left[(yx)^{k+b+1-i} y^{2i}\right], \left[x(yx)^b y^{2k}\right] \mid b,k \geq 0 \right\}.
$$

*Demostración.* Sea $z \in \mathrm{Ker}(\delta)$. Al igual que en todos los cálculos anteriores podemos suponer que $z$ es homogéneo y separar el cálculo según la paridad de su grado.

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n$,

$$
z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l} y^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l x(yx)^{n-l-1} y^{2l+1}.
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
0=\delta(z) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \delta\left((yx)^{n-l}y^{2l}\right) + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l \delta\left(x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\alpha_l + \alpha_n \frac{n!}{l!}\right) x(yx)^{n-l}y^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{l} \beta_l \frac{l!}{i!} x(yx)^{n-i}y^{2i} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\alpha_l + \alpha_n \frac{n!}{l!}\right) x(yx)^{n-l}y^{2l} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{l=i}^{n-1} \beta_l \frac{l!}{i!} x(yx)^{n-i}y^{2i} \\
&= \sum_{l=0}^{n} \left(\alpha_l + \alpha_n \frac{n!}{l!} + \sum_{j=l}^{n-1} \beta_j \frac{j!}{l!}\right) x(yx)^{n-l}y^{2l}.
\end{aligned}
$$

Como los monomios que aparecen en la suma son linealmente independientes, resulta que $\alpha_n = 0$ y $\alpha_l = -\sum_{j=l}^{n-1} \beta_j \frac{j!}{l!}$ para todo $l$, $0 \leq l < n$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
z &= -\sum_{l=0}^{n-1} \left(\sum_{j=l}^{n-1} \beta_j \frac{j!}{l!}\right) (yx)^{n-l}y^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1} \\
&= -\sum_{j=0}^{n-1} \beta_j \left(\sum_{l=0}^{j} \frac{j!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2l} + x(yx)^{n-j-1}y^{2j+1}\right).
\end{aligned}
$$

- Si $\mathrm{gr}(z) = 2n+1$,

$$
z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n} \beta_l x(yx)^{n-l}y^{2l}.
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
0=\delta(z) &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \delta\left((yx)^{n-l}y^{2l+1}\right) + \sum_{l=0}^{n} \beta_l \delta\left(x(yx)^{n-l}y^{2l}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n}\sum_{i=0}^{l} \alpha_l \frac{l!}{i!}(yx)^{n+1-i}y^{2i} + \sum_{l=0}^{n} \alpha_l x(yx)^{n-l}y^{2l+1}
\end{aligned}
$$

y por lo tanto $\alpha_l = 0$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$, es decir, $z = \sum_{l=0}^{n} \beta_l x(yx)^{n-l}y^{2l}$.

Este cálculo prueba que el conjunto del enunciado genera $\mathrm{Ker}(\delta)$ y es claro que es linealmente independiente. □

Como $E_1^{1,2i+1} \cong E_1^{2,2i+1} \cong \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\delta)$ para todo $i \geq 0$ y $E_1^{1,2i} \cong E_1^{2,2i} \cong \mathrm{Ker}(\delta)/\mathrm{Im}(\partial)$, se obtienen las siguientes dos proposiciones.

**Proposición 3.3.2.** Los espacios vectoriales $E_1^{1,2i+1} \cong E_1^{2,2i+1} \cong \mathrm{Ker}(\partial)/\mathrm{Im}(\delta)$ tienen como base al conjunto $\left\{\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}\left[(yx)^{n-l}y^{2l}\right] | n \geq 0\right\}$, para todo $i \geq 0$.

**Proposición 3.3.3.** Los espacios vectoriales $E_1^{1,2i} \cong E_1^{2,2i} \cong \mathrm{Ker}(\delta)/\mathrm{Im}(\partial)$ tienen como base al conjunto $\left\{\left[xy^{2n}\right] | n \geq 0\right\}$, para todo $i \geq 1$.

El siguiente diagrama describe la primera página de la sucesión espectral

$$\begin{tikzcd}
 & \left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l} y^{2l} \right] \right\rangle \arrow[r, "d_{(1)}"] & \left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l} y^{2l} \right] \right\rangle \\
 & \left\langle \left[ xy^{2n} \right] \right\rangle \arrow[r, "d_{(1)}"] & \left\langle \left[ xy^{2n} \right] \right\rangle \\
 & \left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l} y^{2l} \right] \right\rangle \arrow[r, "d_{(1)}"] & \left\langle \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} \left[ (yx)^{n-l} y^{2l} \right] \right\rangle \\
A \arrow[r, "d^0_{(1)}"] & \mathrm{Ker}(\delta) \oplus A \arrow[r, "d^1_{(1)}"] & \mathrm{Ker}(\delta)
\end{tikzcd}$$

donde $d^0_{(1)}, d^1_{(1)}$ y $d_{(1)}$ son los morfismos inducidos en la homología por $d^0, d^1$ y $d$ respectivamente.

### 3.3.2 Segunda página

Al igual que para el cálculo de la homología de Hochschild, la sucesión espectral se estaciona rápidamente y $E_2 = E_\infty$. Vamos a empezar calculando bases para las imágenes de $d^0_{(1)}, d^1_{(1)}$ y $d_{(1)}$.

**Proposición 3.3.4.** Para todo $i \geq 0$, el morfismo $d_{(1)} : E_1^{1,2i+1} \to E_1^{2,2i+1}$ es nulo.

*Demostración.* Sea $w = \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} (yx)^{n-l} y^{2l}$, de modo que $[w]$ es un elemento de la base de $E_1^{1,2i+1}$.

- Si $n = 0$, resulta que $d(w) = d(1) = \left[y^2, 1\right] - xy - yx = -xy - yx$. Luego $d(w)$ pertenece a la imagen de $\delta$ y $d_{(1)}([w]) = 0$.
- Si $n \geq 1$, podemos suponer que $n = m + 1$, donde $m \geq 0$. Esto permite reescribir $w$ de la siguiente manera

$$w = \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!} (yx)^{m+1-l} y^{2l} = (m+1) y^{2m+1} x + y^{2m+2}.$$

Aplicando $d$ obtenemos que $d(w) = (m+1) d\left(y^{2m+1}x\right) + d\left(y^{2m+2}\right)$. Calculamos $d\left(y^{2m+1}x\right)$ y $d\left(y^{2m+2}\right)$ por separado:

$$\begin{aligned}
d\left(y^{2m+1}x\right) &= \left[y^2, y^{2m+1}x\right] - xy^{2m+2}x - y^{2m+1}xyx \\
&= y^{2m+1}\left[y^2, x\right] - y^{2m+1}xyx \\
&= y^{2m+1}\left(y^2x - xy^2 - xyx\right) = 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
d\left(y^{2m+2}\right) &= \left[y^2, y^{2m+2}\right] - xy^{2m+3} - y^{2m+3}x \\
&= xy^{2m+3} - \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!} (yx)^{m+2-l} y^{2l}.
\end{aligned}$$

Como $xy^{2m+3} - \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!}(yx)^{m+2-l}y^{2l}$ pertenece a la imagen de $\delta$, entonces $d_{(1)}([w]) = 0$.

$\square$

**Proposición 3.3.5.** Para todo $i \geq 1$, el morfismo $d_{(1)} : E_1^{1,2i} \to E_1^{2,2i}$ es nulo.

*Demostración.* Dado un elemento $\left[xy^{2n}\right]$ de la base de $E_1^{1,2i}$, sabemos que

$$\begin{aligned}
d(xy^{2n}) &= \left[y^2, xy^{2n}\right] - xyxy^{2n} - xy^{2n+1}x \\
&= y^2xy^{2n} - xy^{2n+2} - xyxy^{2n} - \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l+1}y^{2l} \\
&= xy^{2n+2} + xyxy^{2n} - xy^{2n+2} - xyxy^{2n} - \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l+1}y^{2l} \\
&= -\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l+1}y^{2l}.
\end{aligned}$$

Como $x(yx)^b y^c$ pertenece a $\mathrm{Im}(\partial)$ para todo $b \geq 1$ y para todo $c \geq 0$, resulta que $d_{(1)}(\left[xy^{2n}\right]) = 0$ para todo $n \geq 0$. $\square$

**Corolario 3.3.1.** Para todo $i \geq 0$, los espacios vectoriales $E_2^{1,2i}$ y $E_2^{2,2i}$ tienen como base al conjunto $\left\{\overline{xy^{2n}} | n \geq 0\right\}$.

El siguiente paso consiste en calcular qué valores toma $d_{(1)}^0$ en los elementos de la base de $E_1^{0,0} = A$. Por definición $d^0(z) = ([x,z],[y,z])$ para todo $z \in A$. Ya hemos escrito $[x,z]$ y $[y,z]$ en términos de la base de $A$ cuando obtuvimos las bases de las imágenes de los morfismos $\partial$ y $d_0$ en el cálculo de la homología de Hochschild. Si $z = x^a(yx)^b y^c \in B$, resulta que

- si $a = 0$,
  - si $c = 2k$,
    - si $b = 0$,
    $$d_{(1)}^0([z]) = \left(-\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!}\left[x(yx)^{k-l}y^{2l}\right], 0\right),$$
    - si $b \geq 1$,
    $$d_{(1)}^0([z]) = \left(\left[x(yx)^b y^{2k}\right], \left[x(yx)^{b-1}y^{2k+2}\right] + b\left[x(yx)^b y^{2k}\right] - \left[(yx)^b y^{2k+1}\right]\right).$$
  - Si $c = 2k+1$,
    - si $b = 0$,
    $$d_{(1)}^0([z]) = \left(-\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!}\left[(yx)^{k+1-l}y^{2l}\right] + \left[xy^{2k+1}\right], 0\right),$$

* si $b \geq 1$,

$$d^0_{(1)}([z]) = \left( -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} \left[(yx)^{k+1+b-l} y^{2l}\right] + \left[x(yx)^b y^{2k+1}\right], \right.$$

$$\left. \left[x(yx)^{b-1} y^{2k+3}\right] + b\left[x(yx)^b y^{2k+1}\right] - \left[(yx)^b y^{2k+2}\right] \right).$$

- Si $a = 1$,
  - si $c = 2k$,

$$d^0_{(1)}([z]) = \left(0, \left[(yx)^{b+1} y^{2k}\right] - \left[x(yx)^b y^{2k+1}\right]\right),$$

  - si $c = 2k+1$,

$$d^0_{(1)}([z]) = \left( -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} \left[x(yx)^{k+1+b-l} y^{2l}\right], \left[(yx)^{b+1} y^{2k+1}\right] - \left[x(yx)^b y^{2k+2}\right] \right).$$

Es posible simplificar el conjunto de generadores que acabamos de obtener notando que si $b \geq 0$ y $k \geq 0$, entonces

$$d^0\left((yx)^{b+1} y^{2k+1} + x(yx)^b y^{2(k+1)}\right) =$$
$$\left( -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} (yx)^{k+2+b-l} y^{2l} + x(yx)^{b+1} y^{2k+1}, (b+1)x(yx)^{b+1} y^{2k+1} \right)$$

y

$$d^0\left(x(yx)^b y^{2k+1} + (yx)^{b+1} y^{2k}\right) = \left( -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!} x(yx)^{k+1+b-l} y^{2l}, (b+1)x(yx)^{b+1} y^{2k} \right).$$

Para enunciar la próxima proposición vamos a utilizar la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
\eta_k &= \left( \sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!} \left[x(yx)^{k-l} y^{2l}\right], 0 \right), \\
\theta_{b,k} &= \left( \left[x(yx)^{b+1} y^{2k}\right], \left[x(yx)^b y^{2k+2}\right] + (b+1)\left[x(yx)^{b+1} y^{2k}\right] - \left[(yx)^{b+1} y^{2k+1}\right] \right), \\
\lambda_k &= \left( \sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} \left[(yx)^{k+1-l}\right] - \left[xy^{2k+1}\right], 0 \right), \\
\mu_{b,k} &= \left( -\sum_{l=0}^{k} \frac{k!}{l!} \left[(yx)^{k+2+b-l} y^{2l}\right] + \left[x(yx)^{b+1} y^{2k+1}\right], (b+1)\left[x(yx)^{b+1} y^{2k+1}\right] \right), \\
\nu_{b,k} &= \left(0, \left[(yx)^{b+1} y^{2k}\right] - \left[x(yx)^b y^{2k+1}\right]\right), \\
\xi_{b,k} &= \left( -\sum_{l=0}^{k-1} \frac{k!}{l!} \left[x(yx)^{k+1+b-l} y^{2l}\right], (b+1)\left[x(yx)^{b+1} y^{2k}\right] \right).
\end{aligned}$$

**Proposición 3.3.6.** El conjunto $\{\eta_k, \theta_{b,k}, \lambda_k, \mu_{b,k}, \nu_{b,k}, \xi_{b,k} \mid b, k \geq 0\}$ es una base de $\operatorname{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$.

*Demostración.* Ya sabemos que el conjunto del enunciado genera $\mathrm{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$. Nos resta verificar que los generadores son linealmente independientes. Sea $w$ una combinación lineal de los generadores y supongamos que $w$ es igual a cero. Como todos los elementos son homogéneos, en el sentido que cada coordenada es homogénea y a su vez tienen el mismo grado, podemos suponer que $w$ es una combinación lineal homogénea. Si $\mathrm{gr}(w) = 2k+1$, entonces

$$
\begin{aligned}
0 = w = \alpha\eta_k + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i\theta_{k-i-1,i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i\xi_{k-i-1,i} = \alpha\eta_k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i\xi_{k-i-1,i} \\
+ \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \Bigg( \left[x(yx)^{k-i}y^{2i}\right], \left[x(yx)^{k-i-1}y^{2i+2}\right] + (k-i)\left[x(yx)^{k-i}y^{2i}\right] \\
- \left[(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right] \Bigg).
\end{aligned}
$$

Los términos de la forma $(yx)^{k-i}y^{2i+1}$ no aparecen en los elementos $\xi_{*,*}$ ni en los elementos $\eta_*$, por lo tanto $\beta_i = 0$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k-1$ y obtenemos la siguiente igualdad

$$
\begin{aligned}
0 = w &= \alpha\eta_k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i\xi_{k-i-1,i} \\
&= \alpha\eta_k + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \left( -\sum_{l=0}^{i-1} \frac{i!}{l!}\left[x(yx)^{k-l}y^{2l}\right], (k-i)\left[x(yx)^{k-i}y^{2i}\right] \right).
\end{aligned}
$$

Como la segunda coordenada de $\eta_k$ es cero, entonces $\gamma_i = 0$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k-1$ y por lo tanto $\alpha = 0$. El caso $\mathrm{gr}(w) = 2k$ es análogo. □

Nos resta calcular una base de $\mathrm{Im}\left(d^1_{(1)}\right)$. Sea $z = (z_1, z_2)$ un elemento de la base de $\mathrm{Ker}(\delta) \oplus A$. Como ya obtuvimos una base de $\mathrm{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$ podemos reducir a $z$ módulo $\mathrm{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$ para simplificar el cálculo. Utilizando la notación de la proposición anterior, sabemos que $\theta_{b,k}, \lambda_k$ y $\mu_{b,k}$ pertenecen $\mathrm{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$ para todo $b, k \geq 0$ y por lo tanto podemos restarle a $z$ una combinación lineal de estos elementos. Esta observación permite suponer que $z = (xy^{2k}, 0)$ ó $z = (0, x^a(yx)^by^c)$. Si $z = (xy^{2k}, 0)$ para algún $k \geq 0$, entonces

$$
d^1(z) = \left[y^2, xy^{2k}\right] - x(yx)y^{2k} - xy^{2k+1}x = -\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k+1-i}y^{2i}.
$$

Si $z = (0, x^a(yx)^by^c)$, separamos el cálculo en distintos casos.

- Si $a = 0$,

$$
d^1(z) = \left[y(yx)^by^c + (yx)^by^{c+1}, x\right] - x(yx)^by^cx.
$$

  - Si $b = 0$,

$$
d^1(z) = 2\left[y^{c+1}, x\right] - xy^cx = 2\left(y^{c+1}x - xy^{c+1}\right) - xy^cx.
$$

* Si $c = 2k$,

$$d^1(z) = 2\left(y^{2k+1}x - xy^{2k+1}\right) = 2\left(\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i} - xy^{2k+1}\right)$$

* Si $c = 2k+1$

$$\begin{aligned} d^1(z) &= 2\left(y^{2k+2}x - xy^{2k+2}\right) - xy^{2k+1}x \\ &= 2\sum_{i=0}^{k} \frac{(k+1)!}{i!}(yx)^{k+1-i}y^{2i} - \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}x(yx)^{k+1-i}y^{2i} \\ &= (2k+1)\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}x(yx)^{k+1-i}y^{2i}. \end{aligned}$$

- Si $b \geq 1$,

$$\begin{aligned} d^1(z) &= \left[x(yx)^{b-1}y^{c+2} + bx(yx)^b y^c + (yx)^b y^{c+1}, x\right] - x(yx)^b y^c \\ &= x(yx)^{b-1}y^{c+2}x + bx(yx)^b y^c x + (yx)^b y^{c+1}x \\ &\quad - x(yx)^b y^{c+1} - x(yx)^b y^c x \\ &= x(yx)^{b-1}y^{c+2}x + (b-1)x(yx)^b y^c x + (yx)^b y^{c+1}x - x(yx)^b y^{c+1}. \end{aligned}$$

* Si $c = 2k$,

$$d^1(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+b+1-i}y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}.$$

* Si $c = 2k+1$,

$$d^1(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(k+b)x(yx)^{k+b+1-i}y^{2i}.$$

- Si $a = 1$

$$\begin{aligned} d^1(z) &= \left[(yx)^{b+1}y^c x + x(yx)^b y^{c+1}, x\right] \\ &= (yx)^{b+1}y^c x - x(yx)^{b+1}y^c + x(yx)^b y^{c+1}x. \end{aligned}$$

  - Si $c = 2k$,

$$d^1(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k!}{i!}x(yx)^{k+b+1-i}y^{2i}.$$

  - Si $c = 2k+1$,

$$d^1(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+b+2-i}y^{2i} - x(yx)^{b+1}y^{2k+1}.$$

Como $\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}\left[x(yx)^{k+b+1-i}y^{2i}\right]$ y $\sum_{i=0}^{k-1}\left[x(yx)^{k+b+1-i}y^{2i}\right]$ pertenecen a $\mathrm{Im}\left(d^1_{(1)}\right)$, entonces su resta también, es decir, $\left[x(yx)^{b+1}y^{2i}\right]$ pertenece a $\mathrm{Im}\left(d^1_{(1)}\right)$ para todo $b, i \geq 0$. Con esta observación y el cálculo anterior probamos la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.7.** El conjunto

$$\left\{\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!}(yx)^{k+b+1-i}y^{2i} - x(yx)^b y^{2k+1}, x(yx)^{b+1}y^{2i} \mid b,k \geq 0\right\}$$

es una base de $\operatorname{Im}\left(d^1_{(1)}\right)$.

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

**Proposición 3.3.8.** El espacio vectorial $E_2^{2,0}$ tiene como base al conjunto $\left\{\overline{xy^{2n}} \mid n \geq 0\right\}$.

Nos resta calcular $E_2^{0,0}$ y $E_2^{1,0}$.

**Proposición 3.3.9.** El espacio vectorial $E_2^{0,0} = \operatorname{Ker}(d^0_{(1)})$ es isomorfo a $\Bbbk$.

*Demostración.* Sea $[z] \in \operatorname{Ker}\left(d^0_{(1)}\right)$ homogéneo de grado $2n$. Por definición, $z \in \operatorname{Ker}\left(d^0\right)$ si y solo si $[x,z] = [y,z] = 0$. Veamos qué condiciones impone sobre $z$ la ecuación $[y,z] = 0$. Como $\operatorname{gr}(z) = 2n$, resulta que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_l (yx)^{n-l}y^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}$ y por lo tanto, usando la Proposición A.0.2, sabemos que

$$\begin{aligned}
0 = [y,z] &= \sum_{l=0}^{n} \alpha_l \left[y,(yx)^{n-l}y^{2l}\right] + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l \left[y, x(yx)^{n-l-1}y^{2l+1}\right] \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \left(x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2} + (n-l)x(yx)^{n-l}y^{2l} - (yx)^{n-l}y^{2l+1}\right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \beta_l \left((yx)^{n-l}y^{2l+1} - x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{n-1} (\beta_l - \alpha_l)(yx)^{n-l}y^{2l+1} + \sum_{l=-1}^{n-2} \alpha_{l+1}(n-l-1)x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} (\alpha_l - \beta_l)\, x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}.
\end{aligned}$$

Debido a que en las dos últimas sumas no aparecen términos de la forma $(yx)^{n-l}y^{2l+1}$, resulta que $\alpha_l = \beta_l$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n-1$ y

$$\sum_{l=-1}^{n-2} \alpha_{l+1}(n-l-1)x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2} = 0.$$

Por lo tanto $\alpha_l = 0$ para todo $l$ tal que $0 \leq l \leq n-1$ y $z = \alpha_n y^{2n}$. Por otro lado $z$ debe cumplir la ecuación $[x,z] = 0$, es decir,

$$0 = [x,z] = \alpha_n \left(xy^{2n} - \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} x(yx)^{n-l}y^{2l}\right).$$

Luego $\alpha_n = 0$ ó $n = 0$ y entonces $z$ debe pertenecer a $\Bbbk$.

Si el grado de $z$ es $2n+1$, resulta que $z = \sum_{l=0}^{n} \alpha_n (yx)^{n-l} y^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n} \beta_l x (yx)^{n-l} y^{2l}$. Como $z$ pertenece a $\operatorname{Ker}\left(d^0\right)$, entonces

$$\begin{aligned}
0 = [y,z] &= \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l \left( x(yx)^{n-l-1} y^{2l+3} + (n-l) x (yx)^{n-l} y^{2l+1} - (yx)^{n-l} y^{2l+2} \right) \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n} \beta_l \left( (yx)^{n-l+1} y^{2l} - x(yx)^{n-l} y^{2l+1} \right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \alpha_{l-1} x (yx)^{n-l} y^{2l+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \alpha_l (n-l) x (yx)^{n-l} y^{2l+1} - \sum_{l=1}^{n} \alpha_{l-1} (yx)^{n-l+1} y^{2l} \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n} \beta_l (yx)^{n-l+1} y^{2l} - \sum_{l=0}^{n} \beta_l x (yx)^{n-l} y^{2l+1} \\
&= \sum_{l=1}^{n} \left(\beta_l - \alpha_{l-1}\right) (yx)^{n-l+1} y^{2l} + \beta_0 (yx)^{n+1} + \left(\alpha_0 n - \beta_0\right) x (yx)^n y \\
&\quad + \sum_{l=0}^{n-1} \left(\alpha_{l-1} + \alpha_l (n-l) - \beta_l\right) x (yx)^{n-l} y^{2l+1} + \left(\alpha_{n-1} - \beta_n\right) x y^{2n+1}.
\end{aligned}$$

Como todos los monomios son linealmente independientes obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\beta_0 = 0, \tag{3.1}$$
$$\beta_l - \alpha_{l-1} = 0 \text{ para todo } l, 1 \leq l \leq n, \tag{3.2}$$
$$\alpha_0 n - \beta_0 = 0, \tag{3.3}$$
$$\alpha_{l-1} + \alpha_l (n-l) - \beta_l = 0 \text{ para todo } l, 1 \leq l \leq n-1. \tag{3.4}$$

Sumando (3.2) y (3.4) obtenemos que $\alpha_l = 0$ para todo $l$, $1 \leq l \leq n-1$. De (3.1) y (3.3) se deduce que $\alpha_0 = 0$ y de (3.1) y (3.2) se deduce que $\beta_l = 0$ para todo $l$, $0 \leq l \leq n$. Luego $z$ es igual a $\alpha_n y^{2n+1}$. Además $[x,z]$ debe ser nulo, es decir

$$0 = [x,z] = [x, \alpha_n y^{2n+1}] = \alpha_n \left( x y^{2n+1} - \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!} (yx)^{n+1-l} y^{2l} \right).$$

La única posibilidad es que $\alpha_n$ sea cero y por ende $z$ también. □

Para terminar de calcular la segunda página de la sucesión espectral debemos obtener una base de $E_2^{1,0}$. Sea $[z] = ([z_1],[z_2]) \in \operatorname{Ker}\left(d^1_{(1)}\right)$. Como siempre, podemos suponer que cada coordenada de $[z]$ es homogénea y que $z_1$ y $z_2$ tienen el mismo grado. Al igual que en el cálculo de la base de $\operatorname{Im}\left(d^1_{(1)}\right)$, podemos reducir a $[z]$ módulo bordes y suponer que $[z]$ se escribe como combinación lineal de elementos del conjunto

$$\left\{ \left( \left[ x y^{2n} \right], 0 \right), \left( 0, \left[ x^a (yx)^b y^c \right] \right) \mid n \geq 0, a \in \{0,1\}, b, c \geq 0 \right\}.$$

Si el grado de $z$ es $2k$, resulta que

$$z = \left( 0, \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (yx)^{k-i} y^{2i} + \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i x (yx)^{k-i-1} y^{2i+1} \right)$$

y luego

$$
\begin{aligned}
0 = d^1(z) = &\sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left( \sum_{l=0}^{i} \frac{i!}{l!} (yx)^{k+1-l} y^{2l} - x(yx)^{k-i} y^{2i+1} \right) \\
&+ 2\alpha_k \left( \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{k+1-i} y^{2i} - xy^{2k+1} \right) \\
&+ \sum_{i=0}^{k-1} \beta_i \left( \sum_{l=0}^{i} \frac{i!}{l!} (yx)^{k+1-l} y^{2l} - x(yx)^{k-i} y^{2i+1} \right).
\end{aligned}
$$

Debido a que el término $(yx)y^{2k}$ solo aparece en la suma que acompaña al coeficiente $\alpha_k$, resulta que $\alpha_k = 0$ y por lo tanto

$$
0 = \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{i=l}^{k-1} \frac{i!}{l!} (\alpha_i + \beta_i) \right) (yx)^{k+1-l} y^{2l} - \sum_{i=0}^{k-1} (\alpha_i + \beta_i)\, x(yx)^{k-i} y^{2i+1}.
$$

De esta igualdad se deduce que $\alpha_i = -\beta_i$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k-1$ y como $\alpha_k = 0$, resulta que

$$
[z] = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \left(0, \left[(yx)^{k-i} y^{2i}\right] - \left[x(yx)^{k-i-1} y^{2i+1}\right]\right) = 0,
$$

donde la última igualdad proviene de que $\left[(yx)^{k-i} y^{2i}\right] - \left[x(yx)^{k-i-1} y^{2i+1}\right]$ pertenece a $\operatorname{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$ para todo $i$, $0 \leq i \leq k-1$.

Mientras que si el grado de $z$ es $2k+1$, podemos escribir

$$
z = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \left(0, (yx)^{k-i} y^{2i+1}\right) + \sum_{i=0}^{k} \beta_i \left(0, x(yx)^{k-i} y^{2i}\right) + \gamma \left(xy^{2k}, 0\right)
$$

y luego

$$
\begin{aligned}
0 = d^1(z) = &\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{i} \alpha_i \frac{i!}{l!} k x(yx)^{k+1-l} y^{2l} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} \beta_i \frac{i!}{l!} x(yx)^{k+1-l} y^{2l} \\
&+ (\alpha_k(2k+1) - \gamma) \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k+1-i} y^{2i}.
\end{aligned}
$$

Esta ecuación dice que $\alpha_k(2k+1) = \gamma$, ya que solo podemos encontrar al término $x(yx)y^{2k}$ en la última suma, y por lo tanto

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{l=0}^{i} \alpha_i \frac{i!}{l!} k x(yx)^{k+1-l} y^{2l} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} \beta_i \frac{i!}{l!} x(yx)^{k+1-l} y^{2l} \\
&= \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{i=l}^{k-1} \alpha_i \frac{i!}{l!} k \right) x(yx)^{k+1-l} y^{2l} + \sum_{l=0}^{k-1} \left( \sum_{i=l+1}^{k} \beta_i \frac{i!}{l!} \right) x(yx)^{k+1-l} y^{2l}.
\end{aligned}
$$

A partir de esta observación obtenemos que $\sum_{i=l}^{k-1}\alpha_i\frac{i!}{l!}k=-\sum_{i=l+1}^{k}\beta_i\frac{i!}{l!}=-\sum_{i=l}^{k-1}\beta_{i+1}\frac{(i+1)!}{l!}$ para todo $l$, $0\leq l\leq k-1$. Si llamamos $c_l=\sum_{i=l}^{k-1}\alpha_i i!k+\beta_{i+1}(i+1)!=0$, resulta que $0=c_l-c_{l+1}=\alpha_l l!k+\beta_{l+1}(l+1)!$ y por lo tanto $\beta_{l+1}=-\alpha_l\frac{k}{l+1}$ para todo $l$, $0\leq l\leq k-2$. Como $0=c_{k-1}=\alpha_{k-1}k!+\beta_k k!$, entonces $\beta_{l+1}=-\alpha_l\frac{k}{l+1}$ para todo $l$, $0\leq l\leq k-1$ y luego

$$\begin{aligned} z&=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left(0,(yx)^{k-i}y^{2i+1}\right)-\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i-1}\frac{k}{i}\left(0,x(yx)^{k-i}y^{2i}\right)+\alpha_k\left((2k+1)xy^{2k},y^{2k+1}\right)\\ &\quad+\beta_0\left(0,x(yx)^k\right)\\ &=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i\left(0,(yx)^{k-i}y^{2i+1}-\frac{k}{i+1}x(yx)^{k-1-i}y^{2i+2}\right)+\alpha_k\left((2k+1)xy^{2k},y^{2k+1}\right)\\ &\quad+\beta_0\left(0,x(yx)^k\right). \end{aligned}$$

Con este cálculo probamos que

$$\begin{aligned} E_2^{1,0}=\Bigg\langle&\left(0,\overline{(yx)^{b+1}y^{2k+1}}-\frac{b+k+1}{k+1}\overline{x(yx)^b y^{2k+2}}\right),\left(0,\overline{x(yx)^k}\right),\\ &\left((2k+1)\overline{xy^{2k}},\overline{y^{2k+1}}\right)\mid k,b\geq 0\Bigg\rangle. \end{aligned}$$

**Proposición 3.3.10.** El conjunto $\left\{(0,\overline{x}),\left((2k+1)\overline{xy^{2k}},\overline{y^{2k+1}}\right)\mid k\geq 0\right\}$ es una base de $E_2^{1,0}$.

*Demostración.* Vamos a utilizar la notación de la Proposición 3.3.6. Es un cálculo directo verificar las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &\left(0,\left[x(yx)^{k+1}\right]\right)=\frac{1}{k+1}\xi_{0,k},\\ &\left(0,\left[(yx)y^{2k+1}\right]-\left[xy^{2k+2}\right]\right)=-\theta_{0,k}+\xi_{0,k}+\frac{1}{k+1}\eta_{k+1},\\ &\left(0,\left[(yx)^{b+1}y^{2k+1}\right]-\frac{b+k+1}{k+1}\left[x(yx)^b y^{2k+2}\right]\right)=-\theta_{b,k}+\xi_{b,k}-\frac{1}{k+1}\xi_{b-1,k+1} \end{aligned}$$

para todo $b\geq 1$ y para todo $k\geq 0$. Por lo tanto, el conjunto del enunciado genera $E_2^{1,0}$. Sea $w$ una combinación lineal homogénea de estos generadores y supongamos que $w=0$. Si $w$ es combinación lineal de elementos de grado 1 de este conjunto, entonces $0=w=\alpha(0,\overline{x})+\beta(\overline{x},\overline{y})$. Como no aparecen monomios de grado 1 en las segundas coordenadas de los generadores de $\operatorname{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$, resulta que $\alpha=\beta=0$. Si $w$ se escribe como combinación lineal de elementos de grado mayor que 1, entonces $w=\left((2k+1)\overline{xy^{2k}},\overline{y^{2k+1}}\right)$ para algún $k\geq 1$. El monomio $\left[y^{2k+1}\right]$ no aparece en las segundas coordenadas de los generadores de $\operatorname{Im}\left(d^0_{(1)}\right)$, por lo tanto $\alpha=0$. $\square$

Debido a la forma del complejo doble, es claro que $H^0(A,A)=E_2^{0,0}$ y $H^1(A,A)=E_2^{1,0}$. De manera similar al ejemplo introductorio de la Sección 2.3, sólo que con las flechas invertidas, se tiene la siguiente sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow E_2^{2,p-1}\xrightarrow{\iota}H^{p+1}(A,A)\xrightarrow{\pi}E_2^{1,p}\longrightarrow 0.$$

donde $\iota(\overline{a}) = \overline{(0,a)}$ para todo $\overline{a} \in E_2^{2,p-1}$ y $\pi(\overline{(a,b)}) = \overline{b}$ para todo $\overline{(a,b)} \in H^{p+1}(A,A)$.Para encontrar una base de $H^{p+1}(A,A)$ alcanza con completar una base de $\iota\left(E_2^{2,p-1}\right)$ con elementos tales que sus imágenes, por medio de $\pi$, formen una base de $E_2^{1,p}$. A partir de esta observación es sencillo verificar el siguiente teorema.

**Teorema 3.3.1.** Los espacios de cohomología de Hochschild de $A$ con coeficientes en $A$ puede describirse como:

$$\begin{aligned}
&H^0(A,A) \cong \mathbb{k},\\
&H^1(A,A) \cong \left\langle (0,\overline{x}), \left((2n+1)\overline{xy^{2n}}, \overline{y^{2n+1}}\right) : n \geq 0 \right\rangle,\\
&H^{2p}(A) \cong \left\langle \left(0, \overline{xy^{2n}}\right), \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}, -\overline{y^{2n+1}}\right) : n \geq 0 \right\rangle,\\
&H^{2p+1}(A) \cong \left\langle \left(0, \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}\right), \left(\overline{xy^{2n}}, \overline{xy^{2n+1}}\right) : n \geq 0 \right\rangle
\end{aligned}$$

para todo $p \geq 1$.

Existe una clara identificación entre los espacios de cohomología de grado par positivo, dada por el siguiente isomorfismo

$$\begin{aligned}
H^{2p} &\longrightarrow H^{2q}\\
\left(\textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}, -\overline{y^{2n+1}}\right) &\longmapsto \left(\textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}, -\overline{y^{2n+1}}\right)\\
\left(0, \textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}\right) &\longmapsto \left(0, \textstyle\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}\overline{(yx)^{n-i}y^{2i}}\right)
\end{aligned}$$

De manera análoga existe una identificación entre los espacios de cohomología de grado $2p+1$, con $p \geq 1$. Dos espacios vectoriales que tienen la misma dimensión son isomorfos, por lo tanto no resulta interesante decir que los espacios de cohomología de grado $2p$, con $p \geq 1$, son simplemente isomorfos, lo importante es cuál es el isomorfismo entre ellos. Lo mismo podemos decir para los espacios de cohomología de grado impar. La identificación evidente que mencionamos antes proviene del hecho que la resolución es periódica, de período 2, a partir de grado 2, explicitamente para todo $n, m \geq 2$, los $A-A$ bimódulos $P_nA$ y $P_mA$ son isomorfos mediante

$$\begin{aligned}
P_mA &\longrightarrow P_nA\\
x^m &\longmapsto x^n\\
y^2x^{m-1} &\longmapsto y^2x^{n-1}.
\end{aligned}$$

Una vez que realizamos estas identificaciones entre los $A-A$ bimodulos que componen la resolución, los isomorfismos entre los espacios de cohomología que mencionamos antes se vuelven igualdades. Más adelante, cuando calculemos la estructura de álgebra graduada que tiene la cohomología, vamos a ver que estas identificaciones entre los espacios de cohomología pueden ser pensadas de otra manera.

## 3.4 Estructura de álgebra graduada de $H^{\bullet}(A, A)$

En la Sección 2.2 vimos que la cohomología de Hochschild de un álgebra $A$ con coeficientes en $A$ tiene estructura de álgebra de Gerstenhaber. El objetivo de esta sección es calcular la estructura de álgebra graduada de la cohomología en el caso en el que $A$ es el super plano de Jordan.

### 3.4.1 Morfismos de comparación

Si bien la resolución $P_{\bullet}A$ resultó muy útil para calcular la homología y la cohomología de Hochschild, el producto cup y el corchete de Gerstenhaber están definidos a partir de la resolución bar $B_{\bullet}A$. Suele ser posible calcular el producto cup a partir de otra resolución pero no sucede lo mismo con el corchete de Gerstenhaber. Es por esto que necesitamos encontrar morfismos de comparación entre las dos resoluciones, es decir, morfismos de complejos

$$f_{\bullet} : P_{\bullet}A \to B_{\bullet}A \text{ y } g_{\bullet} : B_{\bullet}A \to P_{\bullet}A$$

que extiendan a $\mathrm{id}_A$. Como las dos resoluciones son proyectivas, sabemos que estos morfismos existen.

**Proposición 3.4.1.** Sea $f_{\bullet} : P_{\bullet}A \to B_{\bullet}A$ la sucesión de morfismos de $A^e$-módulos

$$\{f_n : P_nA \to B_nA\}_{n\geq 0}$$

definidos como

- si $n = 0$,

$$f_0 : A \otimes A \to A \otimes A, \quad f_0 = \mathrm{id}_{A\otimes A},$$

- si $n = 1$,

$$\begin{aligned} &f_1 : A \otimes \Bbbk\{x, y\} \otimes A \to A \otimes A \otimes A, \\ &f_1(1 \otimes v \otimes 1) = 1 \otimes v \otimes 1 \quad \text{para todo } v \in \Bbbk\{x, y\}, \end{aligned}$$

- si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} &f_n : A \otimes \Bbbk\left\{x^n, y^2x^{n-1}\right\} \otimes A \to A \otimes A^{\otimes n} \otimes A, \\ &f_n(1 \otimes x^n \otimes 1) = 1 \otimes x^{\otimes n} \otimes 1, \\ &f_n(1 \otimes y^2x^{n-1} \otimes 1) = y \otimes y \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes yx \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1 \\ &\qquad - x \otimes y \otimes y \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes y^2 \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1 \\ &\qquad - x \otimes y \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes yx \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1 \\ &\qquad + \sum_{i=0}^{n-3}(-1)^i \left(1 \otimes x^{\otimes 2+i} \otimes y^2 \otimes x^{\otimes n-3-i} \otimes 1 + 1 \otimes x^{\otimes 2+i} \otimes yx \otimes x^{\otimes n-3-i} \otimes 1\right), \end{aligned}$$

  donde la última suma es cero si $n = 2$.

El morfismo $f_{\bullet}$ resulta ser un morfismo de complejos que levanta a la identidad.

*Demostración.* Es claro que $f_\bullet$ levanta a la identidad ya que $f_0 = \mathrm{id}_{A\otimes A}$. Para probar que f es un morfismo de complejos debemos verificar que $b_n \circ f_{n+1} = f_n \circ d_n$ para todo $n \geq 0$. Es un cálculo directo, aunque tedioso, hacer esta verificación por inducción y omitiremos la demostración. □

El morfismo $f_\bullet$ guarda la información de los distintos términos que aparecen al aplicarle las reglas de reescritura a las $n-$ambigüedades: estos términos pueden obtenerse cambiando los tensores por productos en la definición de $f_n(1 \otimes x^n \otimes 1)$ y de $f_n(1 \otimes y^2 x^{n-1} \otimes 1)$.

No vamos a dar una fórmula explícita de $g_\bullet : B_\bullet A \to P_\bullet A$ sobre todo el complejo bar sino solo sobre los términos que nos interesan para poder calcular el producto cup y el corchete de Gerstenhaber. Como $B_\bullet A$ es una resolución libre, es posible definir, para cada $n \geq 0$, el morfismo $g_n$ sobre un conjunto linealmente independiente $B_n \subseteq A \otimes A^{\otimes n} \otimes A$ siempre y cuando $d_n \circ g_n(z) = g_n \circ b_n(z)$ para cada $z \in B_{n+1}$. Notar que para que sea posible verificar esta condición $b_n(B_{n+1})$ debe estar incluido en $B_n$. Al igual que para el morfismo $f_\bullet$ no daremos una demostración de la siguiente proposición ya que es una verificación directa por inducción.

**Proposición 3.4.2.** Existe un morfismo de complejos $g_\bullet : B_\bullet A \to P_\bullet A$ que cumple que

- $g_0 = \mathrm{id}_{A\otimes A}$,
- para todo $x^a(yx)^b y^c$ perteneciente a la base de $A$,

$$g_1\left(x^a(yx)^b y^c\right) = a \otimes x \otimes (yx)^b y^c + \sum_{i=0}^{b-1} x^a(yx)^i \otimes y \otimes x(yx)^{b-1-i}y^c$$
$$+ \sum_{i=0}^{b-1} x^a(yx)^i y \otimes x \otimes (yx)^{b-1-i}y^c + \sum_{i=0}^{c-1} x^a(yx)^b y^i \otimes y \otimes y^{c-1-i}$$

y para todo $n \geq 2$,

- $g_n\left(1 \otimes y \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1\right) = 0$,
- $g_n\left(1 \otimes y \otimes yx \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1\right) = 1 \otimes y^2 x^{n-1} \otimes 1$,
- $g_n\left(1 \otimes y \otimes y \otimes x^{\otimes n-2} \otimes 1\right) = 0$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes n} \otimes 1\right) = 1 \otimes x^n \otimes 1$,
- $g_n\left(1 \otimes y^2 \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1\right) = 1 \otimes y^2 x^{n-1\otimes 1}$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes i} \otimes y^2 \otimes x^{n-1-i} \otimes 1\right) = 0$ para todo $i$, $1 \leq i \leq n-1$,
- $g_n\left(1 \otimes yx \otimes x^{n-1} \otimes 1\right) = y \otimes x^n \otimes 1$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes i} \otimes yx \otimes x^{\otimes n-1-i} \otimes 1\right) = 0$ para todo $i$, $1 \leq i \leq n-1$,
- $g_n\left(1 \otimes xy^2 \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1\right) = x \otimes y^2 x^{n-1} \otimes 1 + 1 \otimes x^n \otimes y^2 + 1 \otimes x^n \otimes yx$
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes i} \otimes xy^2 \otimes x^{\otimes n-1-i} \otimes 1\right) = 1 \otimes x^n \otimes y^2 + 1 \otimes x^n \otimes yx$ para todo $i$, $1 \leq i \leq n-2$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes n-1} \otimes xy^2 \otimes 1\right) = 1 \otimes x^n \otimes y^2$,

- $g_n\left(1 \otimes xyx \otimes x^{\otimes n-1} \otimes 1\right) = xy \otimes x^n \otimes 1$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes i} \otimes xyx \otimes x^{\otimes n-1-i} \otimes 1\right) = 0$ para todo $i$, $1 \leq i \leq n-2$,
- $g_n\left(1 \otimes x^{\otimes n-1} \otimes xyx \otimes 1\right) = 1 \otimes x^n \otimes yx$.

El morfismo $g_\bullet$ también guarda la información de los distintos términos que aparecen al aplicarle las reglas de reescritura a las $n-$ambigüedades.

### 3.4.2 Producto cup

Como $f$ y $g$ son levantados de la identidad, resulta que los morfismos inducidos en la cohomología $f^*$ y $g^*$ son isomorfismos y más aún $(f^*)^{-1} = g^*$. Esta observación nos permite transportar la estructura de álgebra de Gerstenhaber de la cohomología calculada a partir de la resolución bar a la cohomología calculada a partir de $P_\bullet A$. Dados $\varphi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_n A, A)$ y $\phi \in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_m A, A)$, el producto cup entre las clases de estos dos elementos resula ser $\overline{\varphi} \smile \overline{\phi} = \overline{(\varphi g_n \smile \phi g_m) f_{n+m}}$. Como todos los cálculos serán realizados en la cohomología, dejaremos de escribir la barra sobre los elementos para indicar que se trata de una clase en el cociente. Además, utilizaremos indistintamente la notación de morfismo y la notación de vector de dos coordenadas para los elementos de $H^\bullet(A, A)$.

Antes de calcular los productos entre los distintos generadores de $H^\bullet(A, A)$ vamos a introducir una notación para estos elementos:

$$
\begin{aligned}
c &= (0, x) \in H^1(A, A), \\
s_n &= \left((2n+1)xy^{2n}, y^{2n+1}\right) \in H^1(A, A), \\
t_n^{2p} &= \left(0, xy^{2n}\right) \in H^{2p}(A, A), \\
u_n^{2p} &= \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{l!}(yx)^{n-i}y^{2i}, -y^{2n+1}\right) \in H^{2p}(A, A), \\
v_n^{2p+1} &= \left(0, \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{l!}(yx)^{n-i}y^{2i}\right) \in H^{2p+1}(A, A), \\
w_n^{2p+1} &= \left(xy^{2n}, xy^{2n+1}\right) \in H^{2p+1}(A, A)
\end{aligned}
$$

para todo $n \geq 0$.

Es sencillo verificar que si $\lambda \in H^0(A, A)$ y $\varphi \in H^n(A, A)$, entonces

$$\varphi \smile \lambda = \lambda \smile \varphi = \lambda\varphi.$$

**Observación 3.4.1.** Como $H^1(A, A)$ es de dimensión infinita y $H^0(A, A) \cong \Bbbk$ actúa sobre la cohomología como producto por escalares, resulta que $H^\bullet(A, A)$ no es finitamente generada como álgebra.

Sean $n, m \geq 1$ y sean $\varphi \in H^n(A, A)$ y $\phi \in H^m(A, A)$ elementos homogéneos de la cohomología. Por definición del producto cup, el morfismo $\varphi \smile \phi$ pertenece a $H^{n+m}(A, A)$, por lo tanto para calcular $\varphi \smile \phi$ debemos saber qué valor toma en $1 \otimes x^{n+m} \otimes 1$ y en $1 \otimes y^2x^{n+m-1} \otimes 1$. Como el producto cup es conmutativo en el sentido graduado, podemos calcular los productos en el orden que nos resulte más conveniente.

Ahora vamos a calcular estos productos para finalmente resumir los resultados en la Tabla 3.1.

**1)** $c \smile s_n$:

$$\begin{aligned} c \smile s_n \left(1 \otimes x^2 \otimes 1\right) &= (cg_1 \smile s_n g_1)\, f_2 \left(1 \otimes x^2 \otimes 1\right) = (cg_1 \smile s_n g_1)\,(1 \otimes x^{\otimes 2} \otimes 1) \\ &= c(1 \otimes x \otimes 1) s_n (1 \otimes x \otimes 1) = 0(2n+1)xy^{2n} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c \smile s_n \left(1 \otimes y^2 x \otimes 1\right) &= (cg_1 \smile s_n g_1)\, f_2 \left(1 \otimes y^2 x \otimes 1\right) \\ &= (cg_1 \smile s_n g_1) \Big(y \otimes y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes yx \otimes 1 - x \otimes y \otimes y \otimes 1 \\ &\qquad - 1 \otimes x \otimes y^2 \otimes 1 - x \otimes y \otimes x \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes yx \otimes 1\Big) \\ &= yc(1 \otimes y \otimes 1) s_n (1 \otimes x \otimes 1) + c(1 \otimes y \otimes 1) s_n (y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\ &\qquad - xc(1 \otimes y \otimes 1) s_n (1 \otimes y \otimes 1) - c(1 \otimes x \otimes 1) s_n (y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\ &\qquad - xc(1 \otimes y \otimes 1) s_n (1 \otimes x \otimes 1) - c(1 \otimes x \otimes 1) s_n (y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\ &= yx(2n+1)xy^{2n} + x\left(y(2n+1)xy^{2n} + y^{2n+1}x\right) - x^2 y^{2n+1} \\ &\qquad - 0\left(y^{2n+2} + y^{2n+2}\right) - x^2(2n+1)xy^{2n} - 0\left(y(2n+1)xy^{2n} + y^{2n+1}x\right) \\ &= (2n+1)xyxy^{2n} + xy^{2n+1}x = (2n+1)xyxy^{2n} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} x(yx)^{n+1-i} y^{2i}. \end{aligned}$$

Si bien con este cálculo obtuvimos que

$$c \smile s_n = \left(0, (2n+1)xyxy^{2n} + \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} x(yx)^{n+1-i} y^{2i}\right),$$

el producto no está escrito en términos de la base de $H^2(A, A)$. Esto dice que es posible reducir a $c \smile s_n$ módulo bordes. Haciendo esto veremos que este producto es nulo. Para esto, denotamos por $d^n$ a los diferenciales del complejo $\operatorname{Hom}_{A^e}(P_\bullet A, A)$. Sea $\alpha \in \operatorname{Hom}_{A^e}(A \otimes \Bbbk\{x, y\} \otimes A, A)$ tal que

$$\alpha(1 \otimes x \otimes 1) = -xy^{2n} \text{ y } \alpha(1 \otimes y \otimes 1) = 0,$$

luego

$$\begin{aligned} d^1(\alpha)\left(1 \otimes x^2 \otimes 1\right) &= \alpha\left(d_1\left(1 \otimes x^2 \otimes 1\right)\right) = \alpha(x \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes x) \\ &= x\left(-xy^{2n}\right) - xy^{2n}x = 0 \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
d^1(\alpha)\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right) &= \alpha\left(d_1\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right)\right)\\
&= \alpha\Big(y^2\otimes x\otimes 1 + y\otimes y\otimes x + 1\otimes y\otimes yx - xy\otimes y\otimes 1 - x\otimes y\otimes y - 1\otimes x\otimes y^2\\
&\qquad - xy\otimes x\otimes 1 - x\otimes y\otimes x - 1\otimes x\otimes yx\Big)\\
&= -y^2xy^{2n} + xy^{2n+2} + xyxy^{2n} + xy^{2n+1}x\\
&= -xy^{2n+2} - xyxy^{2n} + xy^{2n+2} + xyxy^{2n} + \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sea $\beta \in \mathrm{Hom}_{A^e}\left(A\otimes \Bbbk\{x,y\}\otimes A, A\right)$ tal que

$$\beta(1\otimes x\otimes 1) = 0 \text{ y } \beta(1\otimes y\otimes 1) = y^{2n+1} - (2n+1)xy^{2n},$$

luego

$$d^1(\beta)\left(1\otimes x^2\otimes 1\right) = \beta(x\otimes x\otimes 1 + 1\otimes x\otimes x) = 0$$

y

$$
\begin{aligned}
d^1(\beta)\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right) &= \beta\left(d_1\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right)\right)\\
&= \beta\Big(y^2\otimes x\otimes 1 + y\otimes y\otimes x + 1\otimes y\otimes yx - xy\otimes y\otimes 1 - x\otimes y\otimes y - 1\otimes x\otimes y^2\\
&\qquad - xy\otimes x\otimes 1 - x\otimes y\otimes x - 1\otimes x\otimes yx\Big)\\
&= 2\left(y^{2n+2}x - xy^{2n+2}\right) - xy^{2n+1}x - (2n+1)\left(xy^{2n+1}x - xyxy^{2n}\right)\\
&= 2\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\right) - \sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\\
&\qquad - (2n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2(n+1)!}{i!} - \frac{n!}{i!}\right)x(yx)^{n+1-i}y^{2i} - (2n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\\
&= (2n+1)\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i} - (2n+1)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!}x(yx)^{n+1-i}y^{2i}\\
&= (2n+1)xyxy^{2n}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $c \smile s_n = d^1(\alpha+\beta) = 0$.

**2)** $s_m \smile s_n$:

$$\begin{aligned}
s_m \smile s_n\left(1\otimes x^2\otimes 1\right) &= (s_m g_1 \smile s_n g_1)\, f_2\left(1\otimes x^2\otimes 1\right)\\
&= (s_m g_1 \smile s_n g_1)\,(1\otimes x^{\otimes 2}\otimes 1) = s_m(1\otimes x\otimes 1)s_n(1\otimes x\otimes 1)\\
&= (2m+1)xy^{2m}(2n+1)xy^{2n} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_m \smile s_n\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right) &= (s_m g_1 \smile s_n g_1)\, f_2\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right)\\
&= (s_m g_1 \smile s_n g_1)\Big(y\otimes y\otimes x\otimes 1 + 1\otimes y\otimes yx\otimes 1 - x\otimes y\otimes y\otimes 1\\
&\qquad -1\otimes x\otimes y^2\otimes 1 - x\otimes y\otimes x\otimes 1 - 1\otimes x\otimes yx\otimes 1\Big)\\
&= ys_m(1\otimes y\otimes 1)s_n(1\otimes x\otimes 1) + s_m(1\otimes y\otimes 1)s_n(y\otimes x\otimes 1 + 1\otimes y\otimes x)\\
&\qquad - xs_m(1\otimes y\otimes 1)s_n(1\otimes y\otimes 1) - s_m(1\otimes x\otimes 1)s_n(y\otimes y\otimes 1 + 1\otimes y\otimes y)\\
&\qquad - xs_m(1\otimes y\otimes 1)s_n(1\otimes x\otimes 1) - s_m(1\otimes x\otimes 1)s_n(y\otimes x\otimes 1 + 1\otimes y\otimes x)\\
&= (2n+1)y^{2m+2}xy^{2n} + (2n+1)y^{2m+2}xy^{2n} + y^{2(m+n+1)}x - xy^{2(m+n+1)}\\
&\qquad + 2(2m+1)xy^{2(m+n+1)} - (2n+1)xy^{2m+1}xy^{2n} - (2m+1)(2n+1)xy^{2m+1}xy^{2n}\\
&\qquad - (2m+1)xy^{2(m+n)+1}x\\
&= (4n+2)\sum_{i=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{i!}x(yx)^{m+1-i}y^{2(i+n)} + \sum_{i=0}^{m+n+1}\frac{(m+n+1)!}{i!}x(yx)^{m+n+1-i}y^{2i}\\
&\qquad - (4m+3)xy^{2(m+n+1)} - (2m+2)(2n+1)\sum_{i=0}^{m+1}\frac{(m+1)!}{i!}x(yx)^{m+1-i}y^{2(i+n)}\\
&\qquad - (2m+1)\sum_{i=0}^{m+n}\frac{(m+n)!}{i!}x(yx)^{m+n+1-i}y^{2i}.
\end{aligned}$$

Cuando escribimos a $c \smile s_n$ en términos de la base, encontramos un elemento $\beta$, tal que $d^1(\beta)(1\otimes x^2\otimes 1) = 0$ y $d^1(\beta)(1\otimes y^2x\otimes 1) = (2n+1)x(yx)y^{2n}$. Esto permite borrar cualquier término de la forma $x(yx)y^{2i}$ de la segunda coordenada de $s_m \smile s_n$. Notar que es esencial que $d^1(\beta)(1\otimes x^2\otimes 1)$ sea $0$.

Ahora sean $b \geq 1$ e $i \geq 0$ y sea $\gamma_{b,i} \in \mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes \Bbbk\{x,y\}\otimes A, A)$ tal que

$$\gamma_{b,i}(1\otimes x\otimes 1) = 0 \text{ y } \gamma_{b,i}(1\otimes y\otimes 1) = \frac{1}{b+i}(yx)^b y^{2i+1} - x(yx)^b y^{2i},$$

resulta que

$$d^1(\gamma_{b,i})\left(1\otimes x^2\otimes 1\right) = 0 \text{ y } d^1(\gamma_{b,i})\left(1\otimes y^2x\otimes 1\right) = x(yx)^{b+1}y^{2i}.$$

Por lo tanto podemos borrar cualquier término de la forma $x(yx)^{b+1}y^{2n}$ de la segunda coordenada de $s_m \smile s_n$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}
s_m \smile s_n(1\otimes y^2x\otimes 1) &= (4n+2)y^{2(m+n+1)} + xy^{2(m+n+1)} - (4m+3)xy^{2(m+n+1)}\\
&= 4(n-m)xy^{m+n+1},
\end{aligned}$$

es decir, $s_m \smile s_n = 4(n-m)t^2_{n+m+1}$.

**3)** $c \smile c$**:**

Como el producto cup es conmutativo graduado y el grado de $c$ es 1, resulta $c \smile c = 0$.

**4)** $t_m^{2p} \smile c$**:**

$$t_m^{2p} \smile c(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1) = t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
t_m^{2p} \smile c(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1) &= \left(t_m^{2p} g_{2p} \smile c g_1\right)\Bigg(y \otimes y \otimes x^{\otimes 2p} \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes yx \otimes x^{\otimes 2p-1} \\
&\quad - x \otimes y \otimes y \otimes x^{\otimes 2p-1} \otimes 1 - 1 \otimes x \otimes y^2 \otimes x^{\otimes 2p-1} \otimes 1 - x \otimes y \otimes x^{\otimes 2p} \\
&\quad - 1 \otimes x \otimes yx \otimes x^{\otimes 2p-1} \otimes 1 + \sum_{i=0}^{2p-2} (-1)^i \Big(1 \otimes x^{\otimes 2+i} \otimes y^2 \otimes x^{\otimes 2p-2-i} \otimes 1 \\
&\qquad + 1 \otimes x^{\otimes 2+i} \otimes yx \otimes x^{\otimes 2p-2-i} \otimes 1\Big)\Bigg) \\
&= y t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) + t_m^{2p}\left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) - x t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) - x t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) - t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + \sum_{i=0}^{2p-3} (-1)^i \left(t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1) + t_m^{2p}(0) c(1 \otimes x \otimes 1)\right) \\
&\quad + t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) c(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\
&\quad + t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) c(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) = 0,
\end{aligned}$$

ya que $c(1 \otimes x \otimes 1) = t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) = 0$ y por lo tanto $t_m^{2p} \smile c$ es igual a 0.

**5)** $t_m^{2p} \smile s_n$**:**

$$t_m^{2p} \smile s_n\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) = t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
t_m^{2p} \smile s_n\left(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1\right) &= t_m^{2p}\left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad + t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) s_n(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\
&\quad + t_m^{2p}\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) s_n(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\
&= xy^{2m}(2n+1)xy^{2n} = 0.
\end{aligned}$$

Nuevamente resulta que $t_m^{2p} \smile s_n$ es igual a 0.

**6)** $u^{2p}_m \smile c$**:**

$$u^{2p}_m \smile c\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right) = u^{2p}_m\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)c(1\otimes x\otimes 1) = 0,$$

$$\begin{aligned}
u^{2p}_m \smile c\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right) &= u^{2p}_m\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right)c(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad + u^{2p}_m\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)c(y\otimes y\otimes 1+1\otimes y\otimes y)\\
&\quad + u^{2p}_m\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)c(y\otimes x\otimes 1+1\otimes y\otimes x)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}(yx+xy)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i+1}x+\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}xy\\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}\sum_{l=0}^{i}\frac{i!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2l}+y^{2m}xy\\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}\sum_{l=0}^{i}\frac{i!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2l}+\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}x(yx)^{m-i}y^{2i+1}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}\left(\sum_{l=0}^{i}\frac{i!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2l}+x(yx)^{m-i}y^{2i+1}\right).
\end{aligned}$$

Sea $\alpha_{b,i}\in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_{2p}A, A)$ tal que

$$\alpha_{b,i}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)=0 \text{ y } \alpha_{b,i}\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right)=-(yx)^b y^{2i},$$

luego

$$d^{2p}(\alpha)\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right)=0 \text{ y } d^{2p}(\alpha)\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right)=\sum_{l=0}^{i}\frac{i!}{l!}(yx)^{b+i+1-l}y^{2l}+x(yx)^b y^{2i+1}$$

y por lo tanto $u^{2p}_m \smile c = \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}d^{2p}\left(\alpha_{m-i,i}\right)=0$.

Antes de continuar calculando los productos vamos a probar un lema auxiliar.

**Lema 3.4.1.** Sean $n, m \geq 0$, resulta que

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{(n+i)!}{i!}=\frac{(m+n+1)!}{m!(n+1)}.$$

*Demostración.* Si dividimos por $n!$ ambos lados de la igualdad que aparece en el enunciado obtenemos la siguiente expresión $\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}=\binom{m+n+1}{m}$. Probaremos por inducción en $m$ que esta nueva igualdad vale para todo $n, m\geq 0$. Si $m=0$, resulta que

$$\sum_{i=0}^{0}\binom{n+i}{i}=\binom{n}{0}=1=\binom{n+1}{0}.$$

Si $m \geq 1$,

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i}=\sum_{i=0}^{m-1}\binom{n+i}{i}+\binom{n+m}{m}=\binom{m+n}{m-1}+\binom{n+m}{m}=\binom{m+n+1}{m}.$$

□

Sigamos ahora calculando el producto cup entre los generadores.

**7)** $u_m^{2p} \smile s_n$:

$$\begin{aligned}
u_m^{2p} \smile s_n\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right) &= u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)s_n(1\otimes x\otimes 1)\\
&=\sum_{i=0}^{m}(yx)^{m-i}y^{2i}(2n+1)xy^{2n}=(2n+1)\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}x(yx)^{m-i}y^{2(i+n)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_m^{2p} \smile s_n\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right) &= u_m^{2p}\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right)s_n(1\otimes x\otimes 1)\\
&\quad + u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)s_n(y\otimes y\otimes 1+1\otimes y\otimes y)\\
&\quad + u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)s_n(y\otimes x\otimes 1+1\otimes x\otimes y)\\
&= -y^{2m+1}(2n+1)xy^{2n}+2\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}y^{2n+2}\\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\left((2n+1)yxy^{2n}+y^{2n+1}x\right)\\
&=2\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n+1)}+(2n+1)\sum_{i=0}^{m-1}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i+1}xy^{2n}\\
&\quad +\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)+1}x.
\end{aligned}$$

Calcularemos cada una de las sumas por separado:

$$2\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n+1)}=2\sum_{l=n+1}^{m+n+1}\frac{m!}{(l-n-1)!}(yx)^{m+n+1-l}y^2l,$$

$$\begin{aligned}
(2n+1)\sum_{i=0}^{m-1}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i+1}xy^{2n} &= \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i}\frac{m!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{l+n}\\
&=(2n+1)\sum_{l=0}^{m-1}\frac{m!}{l!}(m-l)(yx)^{m+1-l}y^{2(l+n)}\\
&=(2n+1)\sum_{l=n}^{m+n-1}\frac{m!}{(l-n)!}(m+n-l)(yx)^{m+n+1-l}y^{2l},
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)+1}x=\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}\sum_{l=0}^{i+n}\frac{(i+n)!}{l!}(yx)^{i+n+1-l}y^{2l}$$
$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{l=0}^{i+n}\frac{m!}{l!}\frac{(i+n)!}{i!}(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}=\sum_{l=0}^{n}\frac{m!}{l!}\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{(i+n!)}{i!}\right)(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$$
$$+\sum_{l=n+1}^{m+n}\frac{m!}{l!}\left(\sum_{i=l-n}^{m}\frac{(i+n!)}{i!}\right)(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$$

Debido a las reglas de conmutación del Apéndice y al Lema 3.4.1, resulta que

$$\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)+1}x=\sum_{l=0}^{n+m}\frac{m!}{l!}\left(\frac{(n+m+1)!}{m!(n+1)}\right)(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$$
$$-\sum_{l=n+1}^{m+n}\frac{m!}{l!}\left(\frac{l!}{(l-n-1)!(n+1)}\right)(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$$

A partir de ahora denotaremos por $\lambda_l$ a $(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$. Con los cálculos que hicimos obtuvimos que

$$u_m^{2p}\smile s_n\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right)=2\sum_{l=n+1}^{m+n+1}\frac{m!}{(l-n-1)!}\lambda_l+\sum_{l=0}^{n+m}\frac{(n+m+1)!}{l!(n+1)}\lambda_l$$
$$+(2n+1)\sum_{l=n}^{m+n-1}\frac{m!}{(l-n)!}(m+n-l)\lambda_l-\sum_{l=n+1}^{m+n}\frac{m!}{(l-n-1)!(n+1)}\lambda_l.$$

Sea $i$, $0\leq i<m$ y sea $\alpha_i\in \operatorname{Hom}_{A^e}(P_{2p}A,A)$ tal que

$$\alpha_i\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right)=(2n+1)\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}\text{ y }\alpha_i\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right)=0,$$

resulta que

$$d^{2p}(\alpha_i)\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right)=(2n+1)\frac{m!}{i!}x(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}$$

y

$$d^{2p}(\alpha_i)\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right)=(2n+1)\frac{m!(m-i)}{i!}(yx)^{m-i+1}y^{2(i+n)}$$
$$-(2n+1)\frac{m!}{i!}\sum_{i=0}^{i+n}\frac{(i+n)!}{i!}(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}.$$

Reduciendo a $u_m^{2p}\smile s_n$ módulo bordes, obtenemos que

$$u_m^{2p}\smile s_n\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right)=\left(u_m^{2p}\smile s_n-\sum_{i=0}^{m-1}d^{2p}(\alpha_i)\right)\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right)$$
$$=(2n+1)xy^{2(n+m)}$$

y

$$u_m^{2p} \smile s_n \left(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1\right) = \left(u_m^{2p} \smile s_n - \sum_{i=0}^{m-1} d^{2p}(\alpha_i)\right) \left(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1\right)$$

$$= 2 \sum_{l=n+1}^{m+n+1} \frac{m!}{(l-n-1)!}\lambda_l + \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m+1)!}{l!(n+1)}\lambda_l$$

$$- \sum_{l=n+1}^{m+n} \frac{m!}{(l-n-1)!(n+1)}\lambda_l + (2n+1) \sum_{i=0}^{m-1} \frac{m!}{i!} \sum_{l=0}^{i+n} \frac{(i+n)!}{l!}\lambda_l$$

$$= 2 \sum_{l=n+1}^{m+n+1} \frac{m!}{(l-n-1)!}\lambda_l + \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m+1)!}{l!(n+1)}\lambda_l - \sum_{l=n+1}^{m+n} \frac{m!}{(l-n-1)!(n+1)}\lambda_l$$

$$+ (2n+1) \sum_{i=0}^{m} \sum_{l=0}^{i+n} \frac{m!}{i!} \frac{(i+n)!}{l!}\lambda_l - (2n+1) \sum_{l=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{l!}\lambda_l$$

$$= 2 \sum_{l=n+1}^{m+n+1} \frac{m!}{(l-n-1)!}\lambda_l + (2n+2) \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m+1)!}{l!(n+1)}\lambda_l$$

$$- (2n+2) \sum_{l=n+1}^{m+n} \frac{m!}{(l-n-1)!(n+1)}\lambda_l - (2n+1) \sum_{l=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{l!}\lambda_l$$

$$= 2\lambda_{n+m+1} + (2m+1) \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{l!}\lambda_l$$

$$= 2 \left(\sum_{l=0}^{n+m+1} \frac{(n+m+1)!}{l!}\lambda_l - \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m+1)!}{l!}\lambda_l\right) + (2m+1) \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{l!}\lambda_l$$

$$= 2 \sum_{l=0}^{n+m+1} \frac{(n+m+1)!}{l!}\lambda_l - (2n+1) \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{l!}\lambda_l$$

Sea $\beta \in \mathrm{Hom}_{A^e}(P_{2p}A, A)$ tal que

$$\beta\left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) = 0 \text{ y } \beta\left(1 \otimes y^2 x^{2p-1} \otimes 1\right) = -y^{2(n+m)+1},$$

resulta que

$$d^{2p}(\beta)(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1) = 0 \text{ y } d^{2p}(\beta)(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1) = \sum_{l=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{l!}\lambda_l + xy^{2(n+m)+1}$$

y por lo tanto el producto cup $u_m^{2p} \smile s_n$ queda escrito en términos de la base como sigue

$$u_m^{2p} \smile s_n = u_m^{2p} \smile s_n - \sum_{i=0}^{m-1} d^{2p}(\alpha_i) + d^{2p}((2n+1)\beta) = 2v_{n+m+1}^{2p+1} + (2n+1)w_{n+m}^{2p+1}.$$

**8) $v_m^{2p+1} \smile c$:**

$$v_m^{2p+1} \smile c\left(1 \otimes x^{2p+2} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) = 0,$$

$$
\begin{aligned}
v_m^{2p+1} \smile c\left(1 \otimes y^2 x^{2p+1} \otimes 1\right) &= v_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\
&\quad - v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) = 0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $v_m^{2p+1} \smile c$ es igual a cero.

**9)** $v_m^{2p+1} \smile s_n$**:**

$$
v_m^{2p+1} \smile s_n\left(1 \otimes x^{2p+2} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
v_m^{2p+1} \smile s_n\left(1 \otimes y^2 x^{2p+1} \otimes 1\right) &= v_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\
&\quad - v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i} y^{2i}(2n+1)xy^{2n} = (2n+1)\sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!} x(yx)^{m-l} y^{2(l+n)}.
\end{aligned}
$$

Como $x(yx)^b y^{2i}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\partial)$ para todo $b \geq 1$ y para todo $i \geq 0$, resulta que $v_m^{2p+1} \smile s_n\left(1 \otimes y^2 x^{2p+1} \otimes 1\right) = (2n+1)xy^{2(n+m)}$ y por lo tanto

$$
v_m^{2p+1} \smile s_n = (2n+1)t_{m+n}^{2p+2}.
$$

Es importante notar nuevamente que este argumento solo puede ser utilizado para términos que aparezcan en la segunda coordenada del producto que estemos calculando.

**10)** $w_m^{2p+1} \smile c$**:**

$$
w_m^{2p+1} \smile c\left(1 \otimes x^{2p+2} \otimes 1\right) = w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
w_m^{2p+1} \smile c\left(1 \otimes y^2 x^{2p+1} \otimes 1\right) &= w_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2 x^{2p} \otimes 1\right) c(1 \otimes x \otimes 1) \\
&\quad - w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\
&\quad - w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) c(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\
&= -xy^{2m}(yx + xy) = \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!} x(yx)^{m+1-i} y^{2i}.
\end{aligned}
$$

Como $x(yx)^b y^{2i}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\partial)$ para todo $b \geq 1$ y para todo $i \geq 0$, resulta que $w_m^{2p+1} \smile s_n\left(1 \otimes y^2 x^{2p+1} \otimes 1\right) = 0$ y por lo tanto $w_m^{2p+1} \smile c = 0$.

**11)** $w_m^{2p+1} \smile s_n$**:**

$$\begin{aligned} w_m^{2p+1} \smile s_n \left(1 \otimes x^{2p+2} \otimes 1\right) &= w_m^{2p+1} \left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) \\ &= xy^{2m}(2n+1)xy^{2n} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m^{2p+1} \smile s_n \left(1 \otimes y^2x^{2p+1} \otimes 1\right) &= w_m^{2p+1} \left(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1\right) s_n(1 \otimes x \otimes 1) \\ &\quad - w_m^{2p+1} \left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y) \\ &\quad - w_m^{2p+1} \left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) s_n(y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x) \\ &= xy^{2m+1}(2n+1)xy^{2n} - 2xy^{2m}y^{2n+2} - xy^{2m}\left((2n+1)yxy^{2n} + y^{2n+1}x\right) \\ &= -2xy^{2m}y^{2n+2} - xy^{2(n+m)+1}x \\ &= -2xy^{2(m+n+1)} - \sum_{i=0}^{n+m} \frac{(n+m)!}{i!} x(yx)^{m+n+1-i}y^{2i}. \end{aligned}$$

Como $x(yx)^{m+n+1-i}y^{2i}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\partial)$ para todo $i$, $0 \le i \le n+m$, resulta que

$$w_m^{2p+1} \smile s_n \left(1 \otimes y^2x^{2p+1} \otimes 1\right) = 2xy^{2(n+m+1)}$$

y por lo tanto $w_m^{2p+1} \smile s_n = -2t_{n+m+1}^{2p+2}$.

**12)** $t_m^{2p} \smile t_n^{2q}$**:**

$$t_m^{2p} \smile t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2p+2q} \otimes 1\right) = t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2q} \otimes 1\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} t_m^{2p} \smile t_n^{2q} \left(1 \otimes y^2x^{2p+2q-1} \otimes 1\right) &= t_m^{2p} \left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2q} \otimes 1\right) \\ &\quad + t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes y^2x^{2q-1} \otimes 1\right) \\ &\quad + t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(y \otimes x^{2q} \otimes 1\right) = 0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $t_m^{2p} \smile t_n^{2q}$ es igual a cero.

**13)** $u_m^{2p} \smile t_n^{2q}$**:**

$$u_m^{2p} \smile t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2p+2q} \otimes 1\right) = u_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2q} \otimes 1\right) = 0,$$

$$\begin{aligned} u_m^{2p} \smile t_n^{2q} \left(1 \otimes y^2x^{2p+2q-1} \otimes 1\right) &= u_m^{2p} \left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2q} \otimes 1\right) \\ &\quad + u_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(1 \otimes y^2x^{2q-1} \otimes 1\right) \\ &\quad + u_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) t_n^{2q} \left(y \otimes x^{2q} \otimes 1\right) \\ &= \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-l}y^{2i}xy^{2n} = \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!} x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)} \end{aligned}$$

Como $x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)}$ pertenece a $\mathrm{Im}\,(\partial)$ para todo $l$, $0 \le l \le m-1$, resulta que

$$u_m^{2p} \smile t_n^{2q} = t_{n+m}^{2p+2q}.$$

Antes de continuar calculando productos vamos a probar el siguiente lema que utilizaremos en los cálculos que siguen.

**Lema 3.4.2.** Sean $n, m \ge 0$, resulta que

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j}\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{k!}(yx)^{m+n-k}y^{2k}$$

*Demostración.* Dados $n, m \ge 0$, calculamos el producto de la izquierda de la igualdad

$$\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j}\right) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \frac{m!n!}{i!j!}(yx)^{m-i}y^{2i}(yx)^{n-j}y^{2j}$$

$$= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!n!}{i!j!}(yx)^{m-i}y^{2i}(yx)^{n-j}y^{2j} + \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}.$$

Debido a las reglas de conmutación del Apéndice, obtenemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j}\right)\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1} \frac{m!n!}{i!j!}(yx)^{m-i}\sum_{l=0}^{i}\binom{i}{l}\frac{(n-j+i-l-1)!}{(n-j-1)!}(yx)^{n-j+i-l}y^{2(l+j)}\\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}\\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{i} \frac{m!n!}{i!j!}\binom{i}{l}\frac{(n-j+i-l-1)!}{(n-j-1)!}(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)}\\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{i=l}^{m}\frac{(n-j+i-l-1)!}{(n-j-1)!(i-l)!}\right)\frac{m!n!}{l!j!}(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)}\\
&\quad + \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}\\
&= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\left(\sum_{r=0}^{m-l}\binom{n-1-j+r}{r}\right)\frac{m!n!}{l!j!}(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)} + \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}
\end{aligned}$$

Debido al Lema 3.4.1, resulta que $\sum_{r=0}^{m-l}\binom{n-1-j+r}{r}=\binom{m+n-(j+l)}{n-j}$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j}\right)\\
&=\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m}\binom{m+n-(j+l)}{n-j}\frac{m!n!}{l!j!}(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)}+\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2(i+n)}\\
&=\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\binom{n}{j}(n+m-(j+l))!(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)}.
\end{aligned}$$

Como la igualdad que queremos probar es simétrica en $m$ y en $n$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $n\leq m$ y escribir $m=n+t$ con $t\geq 0$. Realizamos el cambio de índice $k=j+l$ y denotamos por $\lambda_k$ a $(yx)^{m+n-k}y^{2k}$ para simplificar la escritura. Separamos la suma en tres partes, según el valor de $k$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}\binom{m}{l}\binom{n}{j}(n+m-(j+l))!(yx)^{m+n-(j+l)}y^{2(l+j)}\\
&=\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}(2n+t-k)!\lambda_k+\sum_{k=n+1}^{n+t}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}(2n+t-k)!\lambda_k\\
&\quad+\sum_{k=n+t+1}^{2n+t}\sum_{j=k-(n+t)}^{n}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}(2n+t-k)!\lambda_k.
\end{aligned}$$

Para probar la proposición lo único que falta verificar es que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}&=\binom{2n+t}{k}\text{ para todo }k,0\leq k\leq n,\\
\sum_{j=0}^{n}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}&=\binom{2n+t}{k}\text{ para todo }k,n+1\leq k\leq n+t,\\
\sum_{j=k-(n+t)}^{n}\binom{n+t}{k-j}\binom{n}{j}&=\binom{2n+t}{k}\text{ para todo }k,n+t+1\leq k\leq 2n+t.
\end{aligned}$$

Vamos a probar estas igualdades mediante un argumento combinatorio. El coeficiente binomial $\binom{2n+t}{k}$ cuenta de cuántas maneras es posible elegir $k$ elementos de un conjunto de tamaño $2n+t$. Una manera de calcular esto es dividir el conjunto en dos subconjuntos, uno de tamaño $n$ y el otro de tamaño $n+t$, y elegir $j$ elementos del primer conjunto y $k-j$ del segundo. □

**14)** $u_m^{2p} \smile u_n^{2q}$:

$$u_m^{2p} \smile u_n^{2q}(1 \otimes x^{2p+2q} \otimes 1) = \left( \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i} \right) \left( \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!}(yx)^{n-j}y^{2j} \right)$$
$$= \sum_{k=0}^{m+n} \frac{(m+n)!}{k!}(yx)^{m+n-k}y^{2k},$$

donde la igualdad se desprende del lema anterior.

$$u_m^{2p} \smile u_n^{2q}(1 \otimes y^2x^{2p+2q-1} \otimes 1) = u_m^{2p} \left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) u_n^{2q} \left(1 \otimes x^{2q} \otimes 1\right)$$
$$+ u_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) u_n^{2q} \left(1 \otimes y^2x^{2q-1} \otimes 1\right)$$
$$+ u_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) u_n^{2q} \left(y \otimes x^{2q} \otimes 1\right)$$
$$= -\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}y^{2m+1}(yx)^{n-l}y^{2l} - \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2l}y^{2n+1}$$
$$+ \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!}(yx)^{m-l}y^{2l+1} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!}(yx)^{n-i}y^{2i}$$
$$= -\sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}y^{2m+1}(yx)^{n-l}y^{2l} - \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2(n+l)+1}$$
$$+ \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m!}{l!}(yx)^{n-l}y^{2(n+l)+1} + \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{n-1} \frac{m!n!}{l!i!}(yx)^{m-l}y^{2l+1}(yx)^{n-i}y^{2i}$$
$$+ \sum_{l=0}^{n} \frac{n!}{l!}y^{2m+1}(yx)^{n-l}y^{2l} = -y^{2(m+n)+1}.$$

Es decir, $u_m^{2p} \smile u_n^{2q}$ es igual a $u_{m+n}^{2p+2q}$.

**15)** $t_m^{2p} \smile v_n^{2q+1}$:

$$t_m^{2p} \smile v_n^{2q+1} \left(1 \otimes x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) = t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) v_n^{2q+1} \left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) = 0,$$

$$t_m^{2p} \smile v_n^{2q+1} \left(1 \otimes y^2x^{2p+2q} \otimes 1\right) = t_m^{2p} \left(1 \otimes y^2x^{2p-1} \otimes 1\right) v_n^{2q+1} \left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right)$$
$$+ t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) v_n^{2q+1} \left(1 \otimes y^2x^{2q} \otimes 1\right)$$
$$+ t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) v_n^{2q+1} \left(y \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) = 0.$$

y en consecuencia $t_m^{2p} \smile v_n^{2q+1}$ es igual a cero.

**16)** $t_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}$:

$$t_m^{2p} \smile w_n^{2q+1} \left(1 \otimes x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) = t_m^{2p} \left(1 \otimes x^{2p} \otimes 1\right) w_n^{2q+1} \left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}t_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}\left(1\otimes y^2x^{2p+2q}\otimes 1\right) &= t_m^{2p}\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1\otimes x^{2q+1}\otimes 1\right)\\ &\quad + t_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1\otimes y^2x^{2q}\otimes 1\right)\\ &\quad + t_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(y\otimes x^{2q+1}\otimes 1\right) = xy^{2m}xy^{2m} = 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto $t_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}$ es igual a cero.

**17)** $v_m^{2p+1} \smile u_n^{2q}$**:**

$$v_m^{2p+1} \smile u_n^{2q}(1\otimes x^{2q+2p+1}\otimes 1) = 0,$$

$$\begin{aligned}v_m^{2p+1} \smile u_n^{2q}(1\otimes y^2x^{2q+2p}\otimes 1) &= v_m^{2p+1}\left(1\otimes y^2x^{2p}\otimes 1\right) u_n^{2q}\left(1\otimes x^{2q}\otimes 1\right)\\ &\quad - v_m^{2p+1}\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right) u_n^{2q}\left(1\otimes y^2x^{2q-1}\otimes 1\right)\\ &\quad - v_m^{2p+1}\left(1\otimes x^{2p+1}\otimes 1\right) u_n^{2q}\left(y\otimes x^{2q}\otimes 1\right)\\ &= \left(\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!}(yx)^{m-j}y^{2j}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m+n}\frac{(m+n)!}{i!}(yx)^{m+n-i}y^{2i}.\end{aligned}$$

y luego $v_m^{2p+1} \smile u_n^{2q}$ es igual a $v_{m+n}^{2p+2q+1}$.

**18)** $u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}$**:**

$$\begin{aligned}u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}\left(1\otimes x^{2p+2q+1}\otimes 1\right) &= u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1\otimes x^{2q+1}\otimes 1\right)\\ &= \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}xy^{2n} = y^{2m}xy^{2n} = \sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!}x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}\left(1\otimes y^2x^{2p+2q}\otimes 1\right) &= u_m^{2p}\left(1\otimes y^2x^{2p-1}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1\otimes x^{2q+1}\otimes 1\right)\\ &\quad + u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1\otimes y^2x^{2q}\otimes 1\right)\\ &\quad + u_m^{2p}\left(1\otimes x^{2p}\otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(y\otimes x^{2q+1}\otimes 1\right)\\ &= -y^{2m+1}xy^{2n} + \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}xy^{2n+1} + \sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i+1}xy^{2n}\\ &= y^{2m}xy^{2n+1} + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{i}\frac{m!}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2(l+n)}\\ &= \sum_{l=0}^{m}\frac{m!}{l!}x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)+1} + \sum_{i=0}^{m-1}\frac{m!(m-l)}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2(l+n)}.\end{aligned}$$

Como $x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)+1} + \sum_{i=0}^{l+n} \frac{(l+n)!}{i!}(yx)^{m+n+1-i}y^{2i}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\delta)$ para todo $l$, $0 \leq l \leq m-1$, resulta que

$$u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q} \otimes 1\right) = xy^{2(m+n)+1}$$
$$- \sum_{l=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{l+n} \frac{m!(l+n)!}{l!i!}(yx)^{m+n+1-i}y^{2i} + \sum_{l=0}^{m-1} \frac{m!(m-l)}{l!}(yx)^{m+1-l}y^{2(l+n)}.$$

Sean $l$, $0 \leq l \leq m-1$ y $\alpha_l \in \operatorname{Hom}_{A^e}(P_{2p+2q}A, A)$, tales que

$$\alpha_l\left(1 \otimes x^{2p+2q} \otimes 1\right) = (yx)^{m-l}y^{2(l+n)} \text{ y } \alpha_l\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q-1} \otimes 1\right) = 0,$$

resulta que

$$d^{2p+2q}(\alpha_l)\left(1 \otimes x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) = x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)},$$
$$d^{2p+2q}(\alpha_l)\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q-1} \otimes 1\right) = (m-l)(yx)^{m+1-l}y^{2(l+n)}$$
$$- \sum_{i=0}^{l+n} \frac{(l+n)!}{i!}(yx)^{m+n+1-l}y^{2l}$$

y por lo tanto

$$u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1} = u_m^{2p} \smile w_n^{2q+1} - \sum_{l=0}^{m-1} d^{2p+2q}(\alpha_l) = w_{n+m}^{2p+2q+1}.$$

**19)** $v_m^{2p+1} \smile v_n^{2q+1}$**:**

$$v_m^{2p+1} \smile v_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2p+2q+2} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)v_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) = 0,$$

$$v_m^{2p+1} \smile v_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1\right)v_n^{2q}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right)$$
$$- v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)v_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2q} \otimes 1\right)$$
$$- v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)v_n^{2q+1}\left(y \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) = 0.$$

Lo cual implica que $v_m^{2p+1} \smile v_n^{2q+1}$ es igual a cero.

**20)** $v_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}$**:**

$$v_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2p+2q+2} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)w_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right)$$
$$= 0,$$

$$v_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) = v_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1\right)w_n^{2q}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right)$$
$$- v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)w_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2q} \otimes 1\right)$$
$$- v_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right)w_n^{2q+1}\left(y \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right)$$
$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!}(yx)^{m-i}y^{2i}xy^{2n} = \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l!}x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)}.$$

Como $x(yx)^{m-l}y^{2(l+n)}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\partial)$ para todo $l$, $0 \leq l \leq m-1$, resulta que $v_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}$ es igual a $t_{n+m}^{2p+2q+2}$.

**21)** $w_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}$**:**

$$\begin{aligned} w_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2p+2q+2} \otimes 1\right) &= w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) \\ &= xy^{2m}xy^{2n} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p+2q+1} \otimes 1\right) &= w_m^{2p+1}\left(1 \otimes y^2x^{2p} \otimes 1\right) w_n^{2q}\left(1 \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) \\ &\quad - w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(1 \otimes y^2x^{2q} \otimes 1\right) \\ &\quad - w_m^{2p+1}\left(1 \otimes x^{2p+1} \otimes 1\right) w_n^{2q+1}\left(y \otimes x^{2q+1} \otimes 1\right) \\ &= xy^{2m+1}xy^{2n} - xy^{2m}xy^{2n+1} - xy^{2m+2}xy^{2n} \\ &= \sum_{i=0}^{m} \frac{m!}{i!} x(yx)^{m+1-i}y^{2(i+n)} \end{aligned}$$

Como $x(yx)^{m+1-i}y^{2(i+n)}$ pertenece a $\operatorname{Im}(\partial)$ para todo $i$, $0 \leq i \leq m$, resulta que

$$w_m^{2p+1} \smile w_n^{2q+1} = 0.$$

Resumimos los resultados obtenidos en la siguiente tabla, donde en la entrada $(i, j)$ escribimos el producto entre el $i$-ésimo término de la primera columna y el $j$-ésimo término de la primera fila.

| | $c$ | $s_n$ | $t_n^{2q}$ | $u_n^{2q}$ | $v_n^{2q+1}$ | $w_n^{2q+1}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $c$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $s_m$ | $0$ | $4(n-m)t_{n+m+1}^2$ | $0$ | $2v_{n+m+1}^{2q+1}$ $+(2n+1)w_{n+m}^{2q+1}$ | $-(2n+1)t_{n+m}^{2p+2}$ | $2t_{n+m+1}^{2p+2}$ |
| $t_m^{2p}$ | $0$ | $0$ | $0$ | $t_{m+n}^{2p+2q}$ | $0$ | $0$ |
| $u_m^{2p}$ | $0$ | $2v_{n+m+1}^{2p+1}$ $+(2n+1)w_{n+m}^{2p+1}$ | $t_{n+m}^{2p+2q}$ | $u_{m+n}^{2p+2q}$ | $v_{n+m}^{2p+2q+1}$ | $w_{n+m}^{2p+2q+1}$ |
| $v_m^{2p+1}$ | $0$ | $(2n+1)t_{n+m}^{2p+2}$ | $0$ | $v_{m+n}^{2p+2q+1}$ | $0$ | $t_{m+n}^{2p+2q+2}$ |
| $w_m^{2p+1}$ | $0$ | $-2t_{n+m+1}^{2p+2}$ | $0$ | $w_{m+n}^{2p+2q+1}$ | $-t_{m+n}^{2p+2q+2}$ | $0$ |

Tabla 3.1: Productos entre los elementos de la base de $H^\bullet(A, A)$.

A partir de esta descripción es sencillo verificar que $H^\bullet(A, A)$ está generado como álgebra por los elementos $1$, $c$, $t_0^2$, $s_n$, $u_n^2$ y $v_n^3$ para todo $n \geq 0$.

Al final de la Sección 3.3, mencionamos que todos los espacios de cohomología de grado $2p$, con $p \geq 1$ se pueden identificar entre si de manera evidente y lo mismo sucede con los espacios de cohomología de grado $2p+1$, con $p \geq 1$. Más aún, observamos de dónde proviene esta identificación. Podemos ver en la tabla que estos isomorfismos están dados por la multiplicación con $u_0^{2p}$. Más precisamente, la identificación está dada por los morfismos

$$\varphi \in H^{2q} \mapsto \varphi \smile u_0^{2p} \in H^{2q+2p}, \qquad \varphi \in H^{2q+1} \mapsto \varphi \smile u_0^{2p} \in H^{2q+2p+1}.$$

## 3.5 Estructura de álgebra de Lie de $H^1(A, A)$

Si restringimos el corchete de Gerstenhaber a $H^1(A, A)$ obtenemos un álgebra de Lie. En esta sección vamos a describir esta estructura que resultará ser isomorfa a una subálgebra de Lie del álgebra de Virasoro. Al igual que para el producto cup solo vamos a calcular el corchete entre los elementos de la base de $H^1(A, A)$. Vamos a empezar con el corchete entre $c$ y $s_n$ y para eso debemos calcular los respectivos asociadores:

$$\begin{aligned}
c \circ s_n(1 \otimes x \otimes 1) &= (cg_1 \circ s_n g_1)\, f_1(1 \otimes x \otimes 1) = (cg_1 \circ s_n g_1)\,(1 \otimes x \otimes 1) \\
&= cg_1\,(1 \otimes s_n(1 \otimes x \otimes 1) \otimes 1) = cg_1 \left(1 \otimes (2n+1)xy^{2n} \otimes 1\right) \\
&= (2n+1)c \left(1 \otimes x \otimes y^{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} xy^i \otimes y \otimes y^{2n-1-i}\right) \\
&= (2n+1) \sum_{i=0}^{2n-1} xy^i xy^{2n-1-i} \\
&= (2n+1) \sum_{i=0}^{n-1} xy^{2i+1} xy^{2(n-i-1)} \\
&= (2n+1) \sum_{i=0}^{n-1} x \sum_{l=0}^{i} \frac{i!}{l!} (yx)^{i-l+1} y^{2(n-i+l-1)} \\
&= (2n+1) \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{i} \frac{i!}{(i-k)!} x(yx)^{k+1} y^{2(n-1-k)} \\
&= (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=k}^{n-1} \frac{i!}{(i-k)!}\right) x(yx)^{k+1} y^{2(n-1-k)} \\
&= (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{l=0}^{n-1-k} \frac{(k+l)!}{l!}\right) x(yx)^{k+1} y^{2(n-1-k)} \\
&= (2n+1) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-l)} x(yx)^{n-l} y^{2l},
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad utilizamos el Lema 3.4.1. Ahora vamos a calcular el otro asociador:

$$
\begin{aligned}
c \circ s_n(1\otimes y\otimes 1) &= (cg_1\circ s_n g_1)\, f_1(1\otimes y\otimes 1) = (cg_1\circ s_n g_1)\,(1\otimes y\otimes 1)\\
&= cg_1\,(1\otimes s_n(1\otimes y\otimes 1)\otimes 1) = cg_1\left(1\otimes y^{2n+1}\otimes 1\right)\\
&= c\left(\sum_{i=0}^{2n} y^i\otimes y\otimes y^{2n-i}\right) = \sum_{i=0}^{2n} y^i x y^{2n-i} = \sum_{i=0}^{n} y^{2i}xy^{2(n-i)} + \sum_{i=0}^{n-1} y^{2i+1}xy^{2(n-i)-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{l=0}^{i}\frac{i!}{l!}x(yx)^{i-l}y^{2(n-i+l)} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{l}\frac{i!}{l!}(yx)^{i-l+1}y^{2(n-i+l)-1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i}\frac{i!}{(i-k)!}x(yx)^k y^{2(n-k)} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{i+1}\frac{i!}{(i-k+1)!}(yx)^k y^{2(n-k)+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=k}^{n}\frac{i!}{(i-k)!}\right)x(yx)^k y^{2(n-k)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=k-1}^{n-1}\frac{i!}{(i-k+1)!}\right)(yx)^k y^{2(n-k)+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(k+l)!}{l!}\right)x(yx)^k y^{2(n-k)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{l=0}^{n-k}\frac{(k+l-1)!}{l!}\right)(yx)^k y^{2(n-k)+1}\\
&= \sum_{i=0}^{n}\frac{(n+1)!}{i!(n-i+1)}x(yx)^{k-i}y^{2i} + \sum_{i=0}^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i)}(yx)^k y^{2i+1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_n \circ c(1\otimes x\otimes 1) &= (s_n g_1\circ cg_1)\, f_1(1\otimes x\otimes 1) = (s_n g_1\circ cg_1)\,(1\otimes x\otimes 1)\\
&= s_n g_1\,(1\otimes c(1\otimes x\otimes 1)\otimes 1) = s_n g_1\,(1\otimes 0\otimes 1) = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s_n \circ c(1\otimes y\otimes 1) &= (s_n g_1\circ cg_1)\, f_1(1\otimes y\otimes 1) = (s_n g_1\circ cg_1)\,(1\otimes y\otimes 1)\\
&= s_n g_1\,(1\otimes c(1\otimes y\otimes 1)\otimes 1) = s_n g_1\,(1\otimes x\otimes 1) = (2n+1)xy^{2n},
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
&[c, s_n]\,(1\otimes x\otimes 1) = (2n+1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}x(yx)^{n-l}y^{2l},\\
&[c, s_n]\,(1\otimes y\otimes 1) = \sum_{l=0}^{n}\frac{(n+1)!}{l!(n-l+1)}x(yx)^{k-l}y^{2l} + \sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}(yx)^k y^{2l+1}\\
&\quad -(2n+1)xy^{2n}.
\end{aligned}
$$

Utilizando la notación de la Proposición 3.3.6, sea $l$ tal que $0\le l\le n-1$ y sean

$$
\begin{aligned}
\theta_{n-l-1,l} &= \left(x(yx)^{n-l}y^{2l},\, x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2} + (n-l)x(yx)^{n-l}y^{2l} - (yx)^{n-l}y^{2l+1}\right),\\
\xi_{n-l-1,l} &= \left(-\sum_{i=0}^{l-1}\frac{l!}{i!}x(yx)^{n-i}y^{2i},\, (n-l)x(yx)^{n-l}y^{2l}\right),\\
\eta_n &= \left(\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!}x(yx)^{n-l}y^{2l}, 0\right)
\end{aligned}
$$

pertenecientes a $\operatorname{Im}\left(d^0\right)$. Por un lado

$$\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}\theta_{n-l-1,l}(1\otimes x\otimes 1)=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}x(yx)^{n-l}y^{2l}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}\theta_{n-l-1,l}(1\otimes y\otimes 1)\\
&=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}\left(x(yx)^{n-l-1}y^{2l+2}+(n-l)x(yx)^{n-l}y^{2l}-(yx)^{n-l}y^{2l+1}\right)\\
&=\sum_{l=1}^{n}\frac{n!}{(l-1)!(n-l+1)}x(yx)^{n-l}y^{2l}+\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!}x(yx)^{n-l}y^{2l}\\
&\qquad-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}(yx)^{n-l}y^{2l+1}\\
&=nxy^{2n}+\sum_{l=1}^{n-1}\left(\frac{n!}{(l-1)!(n-l+1)}+\frac{n!}{l!}\right)x(yx)^{n-l}y^{2l}+n!x(yx)^{n}\\
&\qquad-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}(yx)^{n-l}y^{2l+1}\\
&=-xy^{2n}+\sum_{l=0}^{n}\frac{(n+1)!}{l!(n-l+1)}x(yx)^{n-l}y^{2l}-\sum_{l=0}^{n-1}\frac{n!}{l!(n-l)}(yx)^{n-l}y^{2l+1},
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta ahora al elemento $\xi_{n-l-1,l}$, resulta que

$$\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2(n+1)!}{l!(n-l+1)(n-l)}\xi_{n-l-1,l}(1\otimes y\otimes 1)=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2(n+1)!}{l!(n-l+1)}x(yx)^{n-l}y^{2l},$$

mientras que

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{n-1}\frac{2(n+1)!}{l!(n-l+1)(n-l)}\xi_{n-l-1,l}(1\otimes x\otimes 1)\\
&=-\sum_{l=0}^{n-1}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{2(n+1)!}{(n-l+1)(n-l)i!}x(yx)^{n-i}y^{2i}\\
&=-\sum_{i=0}^{n-2}\left(\sum_{l=i+1}^{n-1}\frac{1}{(n-l+1)(n-l)}\right)\frac{2(n+1)!}{i!}x(yx)^{n-i}y^{2i}\\
&=-\sum_{i=0}^{n-2}\left(\sum_{k=1}^{n-i-1}\frac{1}{(k+1)(k)}\right)\frac{2(n+1)!}{i!}x(yx)^{n-i}y^{2i}\\
&=-\sum_{i=0}^{n-2}\frac{(n-i-1)2(n+1)!}{(n-i)i!}x(yx)^{n-i}y^{2i},
\end{aligned}$$

donde en la última igualdad usamos que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(i+1)i} = \frac{n}{n+1}$. Es sencillo verificar que

$$[c, s_n] + \sum_{l=0}^{n-1} \frac{n!}{l!(n-l)} \theta_{n-l-1,l} - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{2(n+1)!}{l!(n-l+1)(n-l)} \xi_{n-l-1,l} = 2(n+1)\eta_n$$

y por lo tanto $[c, s_n]$ resulta nulo en la cohomología.

Ahora vamos a calcular el corchete entre $s_m$ y $s_n$ para todo $m, n \geq 0$. Como antes, empezamos con los asociadores:

$$\begin{aligned}
s_m \circ s_n(1 \otimes x \otimes 1) &= (2n+1)s_m \left(1 \otimes x \otimes y^{2n} + \sum_{i=0}^{2n-1} xy^i \otimes y \otimes y^{2n-1-i}\right) \\
&= (2n+1)(2m+1)xy^{2(n+m)} + (2n+1)\sum_{i=0}^{2n-1} xy^i y^{2m+1} y^{2n-1-i} \\
&= (2n+1)(2m+1)xy^{2(n+m)} + (2n+1)2nxy^{2(m+n)} \\
&= (2n+1)(2(m+n)+1)xy^{2(m+n)},
\end{aligned}$$

por otro lado

$$s_m \circ s_n(1 \otimes y \otimes 1) = s_m \left(\sum_{i=0}^{2n} y^i \otimes y \otimes y^{2n-i}\right) = (2n+1)y^{2(n+m)+1},$$

luego $[s_m, s_n] = 2(n-m)s_{m+n}$.

El álgebra de Virasoro, denotada por Vir, es el álgebra de Lie con base $\{L_n, c \mid n \in \mathbb{Z}\}$ y corchete definido, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, como

$$\begin{aligned}
&[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \delta_{m,-n}\frac{m^3-m}{12}c, \\
&[L_m, c] = 0.
\end{aligned}$$

Esta álgebra es la única extensión no trivial, unidimensional y central del álgebra de Witt, que consiste en la subálgebra de Lie generada por el conjunto $\{L_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Notar que Vir tiene la siguiente descomposición triangular en subálgebras de Lie:

$$\mathrm{Vir}^+ = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Bbbk L_n \qquad \mathfrak{h} = \Bbbk c \oplus \Bbbk L_0 \qquad \mathrm{Vir}^- = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Bbbk L_{-n}.$$

Para identificar a $H^1(A, A)$ con una subálgebra de Lie del álgebra de Virasoro va a ser conveniente hacer un cambio de base. Llamamos $L_{-m} = 2^{-m-1}s_m$ para todo $m \geq 0$. Es claro que el conjunto $\{L_{-m}, c \mid m \geq 0\}$ resulta ser una base de $H^1(A, A)$ y es sencillo verificar que el corchete cumple las siguientes igualdades

$$[L_{-m}, L_{-n}] = (-m-(-n))L_{-(m+n)} \text{ y } [L_{-m}, c] = 0.$$

A partir de esta observación es evidente que $H^1(A, A)$ es una subálgebra de Lie de Vir. Más precisamente se tiene el siguiente teorema.

**Teorema 3.5.1.** Existe un isomorfismo de álgebras de Lie

$$H^1(A, A) \cong \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-.$$

## 3.6 Comentarios finales y perspectivas

Al final de la última sección probamos que $H^1(A,A)$ resulta ser isomorfo a $\mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-$. Si $M$ es un módulo de Lie sobre $\mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-$, o lo que es lo mismo, una representación del álgebra envolvente $\mathcal{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-)$, entonces $\mathcal{U}(\mathrm{Vir}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{h} \oplus \mathrm{Vir}^-)} M$ resulta ser una representación de $\mathcal{U}(\mathrm{Vir})$. La familia de espacios vectoriales $H^n(A,A)$ da una familia de representaciones de $H^1(A,A)$ y debido al comentario anterior, se obtiene así una familia de representaciones del álgebra de Virasoro. Queremos saber cuál es esta familia y si se trata de representaciones ya conocidas. También nos interesa saber cuáles son las álgebras de Lie que aparecerán para otras álgebras de Nichols de dimensión de Gelfand-Kirillov finita.

# Apéndice A

# Reglas de conmutación

En este apéndice se incluyen las reglas de conmutación del super plano de Jordan.

**Proposición A.0.1.** Para todo $c \geq 0$,

$$y^c x = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i} & \text{si } c = 2k, \\ \\ \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{k-i+1} y^{2i} & \text{si } c = 2k+1. \end{cases}$$

*Demostración.* Lo probaremos por inducción. Los casos $c = 0, 1, 2$ son claros. Si $k \geq 1$ y $c = 2k+1$,

$$y^{2k+1}x = y(y^{2k}x) = y(\sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i}) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} (yx)^{k-i+1} y^{2i}.$$

Si $k \geq 1$ y $c = 2k+2$,

$$\begin{aligned} y^{2k+2}x &= y^{2k}y^2x = y^{2k}(xy^2 + xyx) = y^{2k}x(y^2 + yx) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i}(y^2 + yx) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i+2} + \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i+1} x \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i+2} + \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} \left( \sum_{j=0}^{i} \frac{i!}{j!} (yx)^{i-j+1} y^{2j} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!} x(yx)^{k-i} y^{2i+2} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{k!}{j!} x(yx)^{k-j+1} y^{2j} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{k!}{(j-1)!} x(yx)^{k-i+1} y^{2j} + \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{k!}{j!} x(yx)^{k-j+1} y^{2j} \\ &= \sum_{j=1}^{k+1} \frac{k!}{(j-1)!} x(yx)^{k-i+1} y^{2j} + \sum_{j=0}^{k} (k-j+1) \frac{k!}{j!} x(yx)^{k-j+1} y^{2j} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= xy^{2k+1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{k!}{(j-1)!} x(yx)^{k-i+1} y^{2j} \\
&\qquad\qquad + (k+1)!x(yx)^{k+1} + \sum_{j=1}^{k} (k-j+1)\frac{k!}{j!}(yx)^{k-j+1} y^{2j} \\
&= xy^{2k+1} + \sum_{j=1}^{k} \left( \frac{k!}{(j-1)!} + (k-j+1)\frac{k!}{j!} \right) (yx)^{k-j+1} y^{2j} + (k+1)!x(yx)^{k+1} \\
&= xy^{2k+1} + \sum_{j=1}^{k} \frac{(k+1)!}{j!}(yx)^{k-j+1} y^{2j} + (k+1)!x(yx)^{k+1} \\
&= \sum_{j=0}^{k+1} \frac{(k+1)!}{j!}(yx)^{k-j+1} y^{2j}.
\end{aligned}
$$

□

El siguiente resultado será utilizado en la demostración de la Proposición A.0.3.

**Proposición A.0.2.** Sea $b \geq 1$, entonces $y(yx)^b = x(yx)^{b-1}y^2 + bx(yx)^b$.

*Demostración.* Lo probaremos por inducción. El caso $b = 1$ es claro. Sea $b \geq 1$, luego

$$
\begin{aligned}
y(yx)^{b+1} &= y(yx)^b(yx) = (x(yx)^{b-1}y^2 + bx(yx)^b)yx = x(yx)^{b-1}y^3x + bx(yx)^{b+1} \\
&= x(yx)^{b-1}(yxy^2 + (yx)^2) + bx(yx)^{b+1} = x(yx)^b y^2 + (b+1)x(yx)^{b+1}.
\end{aligned}
$$

□

**Proposición A.0.3.** Si $k \geq 0$ y $b \geq 1$, entonces

$$
\begin{aligned}
y^{2k}(yx)^b &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-i-1)!}{(b-1)!}(yx)^{b+k-i} y^{2i}, \\
y^{2k+1}(yx)^b &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{(b+k-i)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-i} y^{2i}.
\end{aligned}
$$

*Demostración.* Lo probaremos haciendo inducción en $k$. Empecemos con los elementos de la forma $y^{2k}(yx)^b$. El caso $k = 0$ es claro. Si $k \geq 1$,

$$
\begin{aligned}
y^{2k}(yx)^b = yy^{2(k-1)+1}(yx)^b &= y \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-1-i)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-1-i} y^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-1-i)!}{(b-1)!}(yx)^{b+k-i} y^{2i}.
\end{aligned}
$$

Continuemos con los elementos de la forma $y^{2k+1}(yx)^b$. El caso $k = 0$ es el resultado de la Proposición A.0.2. Si $k \geq 1$,

$$
y^{2k+1}(yx)^b = yy^{2k}(yx)^b = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-i-1)!}{(b-1)!} y(yx)^{b+k-i} y^{2i}
$$

y debido a la Proposición A.0.2, resulta que

$$\begin{aligned}
y^{2k+1}(yx)^b &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-i-1)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-1-i} y^{2(i+1)} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-i)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-i} y^{2i} \\
&= \sum_{j=1}^{k+1} \binom{k}{j-1} \frac{(b+k-j)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-j} y^{2j} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{(b+k-i)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-i} y^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} \frac{(b+k-i)!}{(b-1)!} x(yx)^{b+k-i} y^{2i}.
\end{aligned}$$

□

# Bibliografía


[AAH] Andruskiewitsch, Nicolás; Angiono, Iván; Heckenberger, István, *Liftings of Jordan and super Jordan planes*. `arXiv:1512.09271`.

[AAH2] Andruskiewitsch, Nicolás; Angiono, Iván; Heckenberger, István, *On finite GK-dimensional Nichols algebras over abelian groups*. `arXiv:1606.02521`.

[AS] Andruskiewitsch, Nicolás; Schneider, Hans-Jürgen *On the classification of finite-dimensional pointed Hopf algebras*. Ann. of Math. (2) 171 (2010), no. 1, 375–417.

[AS2] Andruskiewitsch, Nicolás, and Hans-Jürgen Schneider. *Pointed Hopf algebras*. New directions in Hopf algebras 43 (2002): 1-68.

[Ang] Angiono, Iván, *On Nichols algebras of diagonal type*. J. Reine Angew. Math. 683 (2013), 189–251.

[BNPP] Bendel, Christopher P.; Nakano, Daniel K.; Parshall, Brian J.; Pillen, Cornelius, *Cohomology for quantum groups via the geometry of the nullcone*. Mem. Amer. Math. Soc. 229 (2014), no. 1077, x+93 pp.

[BK] Butler, M. C. R.; King, A. D., *Minimal resolutions of algebras*. J. Algebra 212 (1999), no. 1, 323–362.

[CE] Cartan, Henri; Eilenberg, Samuel, *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956. xv+390 pp.

[CS] Chouhy, Sergio; Solotar, Andrea, *Projective resolutions of associative algebras and ambiguities*. J. Algebra 432 (2015), 22–61.

[EtOs] Etingof, Pavel; Ostrik, Viktor, *Finite tensor categories*. Mosc. Math. J. 4 (2004), no. 3, 627–654.

[Ev] Evens, Leonard, *The cohomology ring of a finite group*. Trans. Amer. Math. Soc. 101 (1961), 224–239.

[FrSu] Friedlander, Eric M.; Suslin, Andrei, *Cohomology of finite group schemes over a field*. Invent. Math. 127 (1997), no. 2, 209–270.

[GGRSV] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic homology of algebras with one generator*. Jorge A. Guccione, Juan José Guccione, María Julia Redondo, Andrea Solotar and Orlando E. Villamayor participated in this research. K-Theory 5 (1991), no. 1, 51–69.

[Gi] Ginzburg, Victor, *Lectures on noncommutative geometry*. `arXivmath/0506603`.

[GiKu] Ginzburg, Victor; Kumar, Shrawan, *Cohomology of quantum groups at roots of unity*. Duke Math. J. 69 (1993), no. 1, 179–198.

[Go] Golod, E., *The cohomology ring of a finite p-group*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 125 (1959), 703–706.

[McR] McConnell, J. C.; Robson, J. C., *Noncommutative Noetherian rings*. With the cooperation of L. W. Small. Revised edition. Graduate Studies in Mathematics, 30. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. xx+636 pp.

[Mon] Montgomery, Susan, *Hopf algebras and their actions on rings*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1993. xiv+238 pp.

[MPSW] Mastnak, M.; Pevtsova, J.; Schauenburg, P.; Witherspoon, S., *Cohomology of finite-dimensional pointed Hopf algebras*. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 100 (2010), no. 2, 377–404.

[Ni] Nichols, Warren D., *Bialgebras of type one*. Comm. Algebra 6 (1978), no. 15, 1521–1552.

[Ra] Radford, David E., *The structure of Hopf algebras with a projection*. J. Algebra 92 (1985), no. 2, 322–347.

[Ve] Venkov, B. B., *Cohomology algebras for some classifying spaces*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 127 (1959), 943–944.

[We] Weibel, Charles A. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 38. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. xiv+450 pp.

[Wo] Woronowicz, S. L., *Differential calculus on compact matrix pseudogroups (quantum groups)*. Comm. Math. Phys. 122 (1989), no. 1, 125–170.