



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sistemas de partículas de agregación-difusión

Virginia Pedreira

Director: Pablo Groisman

14 de agosto de 2017

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Cadenas de Markov a tiempo discreto	7
1.2. Criterio de Foster-Lyapunov	17
1.3. Cadenas de Markov a tiempo continuo	22
2. El modelo MDLA	25
2.1. Definición	25
2.2. Crecimiento a lo sumo lineal	26
3. MDLA simplificado	31
3.1. Crecimiento lineal	31
3.2. Estrategia de la prueba	34
3.3. Tiempo entre dos saltos del agregado	42
3.4. Recurrencia positiva	53
3.5. Demostración	65
Bibliografía	69

Introducción

El modelo original de *Agregación Limitada por Difusión* en \mathbb{Z}^d consiste de un agregado creciente $A(t) \subset \mathbb{Z}^d$ que comienza en $A(0) = 0$, es decir, en el origen. En algún momento t_1 , el agregado crece y $A(t_1)$ se obtiene agregándole a $A(0)$ el primer punto de su frontera que es alcanzado por un paseo aleatorio que comienza en el infinito. Este modelo no ha sido comprendido con profundidad aún. Sin embargo, una variante del mismo es la que nos interesará en este trabajo.

El modelo de *Agregación Limitada por Difusión Multipartícula* o MDLA por sus siglas en inglés es el que desarrollaremos a continuación. En este caso, en vez de haber sólo una partícula que viene del infinito moviéndose por vez, hay una colección infinita de partículas distribuidas al inicio del proceso con una distribución Poisson de parámetro μ independiente en cada sitio. Además, también al principio, volvemos a tener un agregado que inicialmente consiste de una sólo partícula especial en el origen. Las partículas en el agregado no se mueven nunca. El sistema evoluciona en tiempo continuo y las partículas que no están en el agregado se mueven siguiendo paseos aleatorios simples simétricos independientes hasta que alguno de ellos intenta saltar sobre el agregado. En ese caso, la partícula se incorpora al agregado y se queda quieta en el último sitio que ocupó antes de intentar saltar. De ahora en adelante, esa partícula no se moverá más. El parámetro de las variables con las que inicialmente se distribirán las partículas modifica la densidad inicial de partículas y el comportamiento del agregado por lo que lo hemos nombrado para citarlo posteriormente.

Este modelo está mejor estudiado y de él se conocen varios resultados recientes relacionados con la velocidad de crecimiento, algunos de los cuales desarrollaremos en la tesis. Se encuentran ciertas diferencias entre el caso unidimensional, es decir $d = 1$ y cuando $d \geq 2$. Nuestros esfuerzos estarán concentrados en entender mejor el primer caso.

A modo de completar la introducción hacemos un repaso de los resultados en la literatura hasta el momento. En el caso unidimensional, Chayes y Swindle estudiaron en [2] el límite hidrodinámico. Hay varios resultados relacionados a la velocidad de crecimiento del agregado. En [5] Kesten y Sidoravicius prueban que la velocidad de crecimiento del agregado es como máximo lineal y en densidades μ menores a 1, el agregado crece a velocidad \sqrt{t} . Eso ocurre pues en el agregado, la densidad de partículas es 1. Como afuera del mismo, la densidad es menor, la cantidad de partículas cerca del agregado capaces de hacerlo crecer tiende a

disminuir conforme pasa el tiempo. En el caso de que $\mu \geq 1$, el obstáculo que se presenta es que con probabilidad positiva a los costados del agregado, puede haber agujeros sin partículas moviéndose luego de los cuales el movimiento del agregado es incierto y que podrían ralentizar el crecimiento del mismo. Sin embargo, en [10] Sly probó que el crecimiento en ese caso es lineal y el resultado se generaliza para el caso en que $d \geq 2$ y $\mu \geq 1$. En este trabajo, estudiaremos los resultados que obtuvieron Kesten y Sidoravicius en [5] para un caso más sencillo que éste donde el obstáculo que suponen los agujeros se resuelve agregando partículas cada vez que el sistema crece siguiendo una distribución independiente. Para evitar mayores obstáculos, también se decide simplificar la cantidad de partículas en movimiento en el modelo y en esta simplificación solo habrá una cantidad finita constante de partículas. Luego, en cada paso del agregado, se incorporan al sistema la misma cantidad de partículas que fueron absorbidas. Aún queda por estudiar qué sucede en el caso de dos dimensiones o más cuando la densidad es menor a 1.

En [9], Sidoravicius y Stauffer han obtenido resultados interesantes en relación a este problema cuando en vez de que las partículas se muevan siguiendo paseos al azar, se mueven siguiendo un proceso de exclusión que sólo permite como máximo una partícula por sitio en todo tiempo. En ese caso, no tiene sentido que la densidad inicial μ sea mayor o igual que 1 pues no puede haber más de una partícula por sitio. El resultado que obtuvieron Sidoravicius y Stauffer es que en el caso $d \geq 2$, cuando $\mu \in (0, 1)$ es lo suficientemente grande, el agregado tiene brazos de crecimiento lineal con probabilidad positiva. Es decir, si denotamos por $F(t)$ el punto del agregado más lejos del origen a tiempo t , entonces existe una constante c tal que $|F(t)| \geq ct$ eventualmente para todo t .

La tesis está organizada de la siguiente forma.

El Capítulo 1 contiene definiciones y resultados preliminares clásicos de la teoría de cadenas de Markov que utilizaremos más adelante.

El Capítulo 2 presenta una definición más precisa de MDLA y el hecho de que el agregado crece a un ritmo lineal como máximo.

El Capítulo 3 trata del estudio de la simplificación mencionada anteriormente que se define en [5] y se prueba que en ese caso, el agregado crece linealmente.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo daremos las definiciones y resultados que serán necesarios para tratar los problemas presentados en la tesis.

La tesis trata en su gran mayoría del estudio de un sistema interactivo de partículas. Como es en general en estos casos, el sistema es además un proceso de Markov. Los procesos de Markov son tal vez los procesos estocásticos más importantes y abundan no sólo porque son interesantes en si mismos sino porque se ha desarrollado una vasta teoría alrededor de ellos. Las referencias que usamos para desarrollar estos conceptos son [8], [6] y [1] en donde se pueden encontrar muchos más resultados de interés relacionados a los procesos de Markov que los que son de interés en esta tesis.

Un proceso de Markov, es un tipo de proceso estocástico particular que tiene la propiedad de no “recordar” qué sitios ha visitado. El conjunto de sitios que un proceso de Markov puede visitar se llama *espacio de estados*. En nuestro caso los espacios de estado serán siempre finitos o numerables. En particular, usaremos la siguiente convención: los procesos de Markov cuyo espacio de estados es numerable se llaman *cadena de Markov*.

Hay dos tipos de cadenas de Markov: aquellas que son a tiempo discreto y las que son a tiempo continuo. Empecemos por definir y tratar a las primeras.

1.1. Cadenas de Markov a tiempo discreto

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Decimos que $(X_n)_{n \geq 0}$ es una *cadena de Markov con distribución inicial μ , matriz de transición P* y espacio de estados E , si la variable X_0 tiene distribución μ y se cumple

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ = \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_n = x_n) = P_{x_n, x} \end{aligned} \quad (1.1)$$

para todo $x, x_0, \dots, x_n \in E$ y $n \geq 0$. Notaremos a la cadena como de Markov (μ, P) sólo cuando su distribución inicial sea relevante.

La propiedad (1.1) se denomina *propiedad de Markov* y es la propiedad la “no memoria” de la que hablábamos antes pues evidencia que sabiendo todos los lugares que visitó la cadena, el único que influye en la elección del siguiente sitio que visitará es el que está actualmente. Gracias a esta propiedad, es fácil probar que, sabiendo que la cadena se encuentra en el sitio x a tiempo m , el proceso $(X_{n+m})_{n \geq m}$ es una cadena de Markov con matriz de probabilidad P y distribución inicial δ_x independiente de X_0, \dots, X_m . Aquí, δ_x es la distribución

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

En algunas ocasiones nos interesará estudiar la cadena después de algún momento aleatorio dado. Por ejemplo, es natural preguntarse cómo evoluciona el proceso después de que visita por primera vez el sitio x_0 o el conjunto de sitios F .

Se denomina tiempo de parada a una variable aleatoria $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que el evento $\{T = n\}$ está incluido en la σ -álgebra generada por X_0, X_1, \dots, X_n . Por ejemplo, sea $F \subseteq E$. La variable aleatoria $T = \min\{n \geq 0 : X_n \in F\}$ es un tiempo de parada pues el evento $\{T = n\}$ ocurre sí y solo sí $X_0 \notin F, \dots, X_{n-1} \notin F$ y $X_n \in F$ por lo que ese evento queda determinado por esas primeras n variables y se encuentra en la σ -álgebra que ellas generan. Una variable aleatoria que no es un tiempo de parada, es la variable $T = \sup\{n \geq 0 : X_n = x_0\}$ ya que $\{T = n\}$ si y solo si $X_n = x_0$ pero $X_k \neq x_0$ para todo $k > n$ y eso no depende sólo de las primeras n variables. Los tiempos de parada que usaremos serán siempre el mínimo tiempo en el que la cadena llega a un determinado conjunto.

Notaremos \mathbb{P}_x a la probabilidad condicional a que X_0 tenga distribución δ_x y, si λ es una distribución de probabilidad en E , llamamos \mathbb{P}_λ a la probabilidad condicional a que X_0 tenga distribución λ . Notaremos a las entradas de la matriz P $P(i, j)$ y p_{ij} .

Las cadenas de Markov a tiempo discreto gozan de la propiedad de no tener memoria incluso después de tiempos aleatorios. Es decir que después de un tiempo de parada, la cadena comienza de nuevo recordando sólo el sitio en el que se encuentra.

Teorema 1 (Propiedad fuerte de Markov). *Sea (X_n) una cadena de Markov con matriz de transición P y sea T un tiempo de parada de la cadena. Entonces, condicionando a $T < \infty$ y a $X_T = x$, el proceso $(X_{T+n})_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov (δ_x, P) independiente de X_0, \dots, X_T .*

Demostración. Si B es un evento en la σ -álgebra generada por X_0, \dots, X_T , entonces, $B \cap \{T = m\}$ es un evento que queda determinado por X_0, \dots, X_m . Luego,

por la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X_T = x_0, \dots, X_{T+n} = x_n\} \cap B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_T = x_0, \dots, X_{T+n} = x_n\} | B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\}) \\
&\quad \times \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\}) \\
&= \mathbb{P}(\{X_m = x_0, \dots, X_{m+n} = x_n\} | B \cap \{T = m\} \cap \{X_m = x\}) \\
&\quad \times \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\}).
\end{aligned}$$

Por la propiedad de Markov, el lado derecho de la última ecuación, queda igual a

$$\mathbb{P}_x(\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}) \mathbb{P}(B \cap \{T = m\} \cap \{X_T = x\}).$$

Sumando para $m = 0, 1, 2, \dots$ tenemos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\{X_T = x_0, \dots, X_{T+n} = x_n\} \cap B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = x_0\}) \\
&= \mathbb{P}_x(\{X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n\}) \mathbb{P}(B | \{T < \infty\} \cap \{X_T = x\}).
\end{aligned}$$

□

Ahora necesitamos estudiar ciertas propiedades de las cadenas de Markov. Decimos que una cadena es *irreducible* si dados dos puntos cualesquiera x e y en E , existe un n tal que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$. Esto significa, en términos sencillos, que la probabilidad de que estando en un sitio llegue en finitos pasos a cualquier otro es positiva, o dicho de otra forma que puedo llegar de un sitio a otro pasando por transiciones todas de probabilidad positiva. Es fácil probar que $\mathbb{P}_x(X_n = y) = P^n(x, y)$, es decir, la distribución de la cadena a tiempo n viene dada por P^n .

Veamos ahora un ejemplo sencillo pero que es de gran importancia para este trabajo.

Paseo aleatorio simple simétrico. En este caso, $E = \mathbb{Z}$ y la matriz de transición es

$$P(j, k) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } k = j + 1 \text{ ó } k = j - 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Simplemente, pensemos en una persona que camina sobre calle recta infinita (claramente imaginaria) y se detiene en cada esquina. Cada vez que se detiene agarra una moneda de bolsillo y la tira al aire. Si cae del lado de la cara sigue en la dirección que venía, si no, retrocede. Otra manera de definir esta cadena, en el caso de que el paseo comience en el 0 que nos será de utilidad más adelante es la siguiente:

Sean $Z_i, i \geq 0$ variables aleatorias i.i.d. cuya distribución es muy sencilla: $\mathbb{P}(Z_i = \pm 1) = 1/2$. Definimos la cadena como $X_n = \sum_{i=1}^n Z_i$. Veamos que efectivamente ese proceso es una cadena de Markov y que tiene las mismas probabilidades

de transición que la cadena que definimos antes con la matriz.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(X_n + Z_{n+1} = x | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = x - x_n | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \\ &= \mathbb{P}(Z_{n+1} = x - x_n | X_n = x_n). \end{aligned}$$

Pero recordemos que X_0, \dots, X_n dependen solamente de Z_0, \dots, Z_n y esas variables son independientes de Z_{n+1} . Luego,

$$\mathbb{P}(Z_{n+1} = x - x_n | X_n = x_n) = \mathbb{P}(Z_{n+1} = x - x_n) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } |x - x_n| = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y eso resulta igual a $P(x, x_n)$. Esta cadena es claramente irreducible porque puedo saltar siempre al lugar más próximo con probabilidad positiva y llegar a cualquier sitio.

Otra noción importante es la de *medida invariante*. Decimos que una medida de probabilidad $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ es una medida invariante para P si

$$\rho(x) = \sum_{y \in E} \rho(y)P(y, x).$$

En notación matricial, $\rho = \rho P$. También haremos referencia a la medida invariante como distribución estacionaria. Veremos ahora, cuándo existen tales medidas y cuándo son únicas. Supongamos que la cadena (X_n) tiene distribución estacionaria ρ y que la distribución inicial de esta cadena también es ρ . Luego,

$$\mathbb{P}_\rho(X_1 = x) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}(X_1 = x | X_0 = y) \rho(y) = \sum_{y \in E} P(y, x) \rho(y) = \rho(x).$$

por lo que X_1 tiene distribución ρ y por inducción la cadena tendrá distribución ρ en todos los tiempos. Es por esto que a estas distribuciones se las denomina invariantes.

Probaremos ahora que toda (X_n) cadena de Markov con espacio de estados E finito irreducible, tiene distribución estacionaria única.

Llamaremos

$$T_x := \min\{n \geq 0 : X_n = x\}$$

al primer tiempo en el que la cadena visita el sitio x y

$$T_x^+ := \min\{n \geq 1 : X_n = x\}$$

para los casos en los que necesitamos que el tiempo de visita al sitio x sea positivo. Cuando $X_0 = x$, el tiempo T_x^+ es el primer tiempo de retorno.

De ahora en adelante y hasta que se indique lo contrario, el espacio de estados E es finito.

Lema 1. *Dados dos estados x e y de una cadena irreducible, $\mathbb{E}_x[T_y^+] < \infty$.*

Demostración. Por irreducibilidad y porque el espacio de estados es finito, existe un entero $r > 0$ y un número real $\varepsilon > 0$ tal que dados dos estados $z, w \in E$, existe un $j \leq r$ tal que $P^j(z, w) > \varepsilon$. Luego, para cada valor de X_n la probabilidad de llegar a un sitio y entre n y $n + r$ es como mínimo ε . Entonces, dado $k > 0$ vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(T_y^+ > kr) &= \mathbb{P}_x(T_y^+ > kr | T_y^+ > (k-1)r) \mathbb{P}_x(T_y^+ > (k-1)r) \\ &= (1 - \mathbb{P}_x(T_y^+ \leq kr | T_y^+ > (k-1)r)) \mathbb{P}_x(T_y^+ > (k-1)r) \\ &\leq (1 - \varepsilon) \mathbb{P}_x(T_y^+ > (k-1)r). \end{aligned}$$

Iterando este proceso obtenemos que

$$\mathbb{P}_x(T_y^+ > kr) \leq (1 - \varepsilon)^k.$$

Entonces, usando que $\mathbb{P}_x(T_y^+ > n)$ es decreciente en n ,

$$\mathbb{E}_x[T_y^+] = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}_x(T_y^+ > n) \leq \sum_{k \geq 0} r \mathbb{P}_x(T_y^+ > kr) \leq r \sum_{k \geq 0} (1 - \varepsilon)^k < \infty.$$

□

Ahora probemos la existencia de medida estacionaria.

Proposición 1. *Sea P la matriz de transición de una cadena de Markov irreducible. Entonces,*

1. *existe una medida de probabilidad ρ en E tal que $\rho = \rho P$ y $\rho(x) > 0$ para todo $x \in E$.*

2. $\rho(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x[T_x^+]}$.

Demostración. Sea $z \in E$ un estado de la cadena de Markov. Vamos a estudiar el tiempo que la cadena pasa en promedio en cada sitio entre visitas a z . Definimos,

$$\tilde{\rho}(y) := \mathbb{E}_z[\text{número de visitas a } y \text{ antes de volver a } z] \quad (1.2)$$

$$= \mathbb{E}_z \left[\sum_{n=0}^{T_z^+ - 1} I[X_n = y] \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_n = y, T_z^+ > n). \quad (1.3)$$

Como el número de visitas a y entre visitas a z es como mucho T_z^+ , tenemos que $\tilde{\rho}(y) \leq \mathbb{E}_z[T_z^+]$. Luego, $\tilde{\rho}(y)$ es finito para todo $y \in E$. Veamos que es invariante.

$$\sum_{x \in E} \tilde{\rho}(x) P(x, y) = \sum_{x \in E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_z(X_n = x, T_z^+ > n) P(x, y). \quad (1.4)$$

Como el evento $\{T_z^+ > n\}$ queda determinado por X_0, \dots, X_n se tiene, por la propiedad de Markov,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_z \left(X_n = x, X_{n+1} = y, T_z^+ > n \right) \\ &= \mathbb{P}_z \left(X_{n+1} = y \mid X_n = x, T_z^+ > n \right) \mathbb{P} \left(X_n = x, T_z^+ > n \right) \\ &= P(x, y) \mathbb{P} \left(X_n = x, T_z^+ > n \right). \end{aligned}$$

Luego, de (1.4),

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \tilde{\rho}(x) P(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{x \in E} \mathbb{P}_z \left(X_n = x, X_{n+1} = y, T_z^+ > n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_z \left(X_{n+1} = y, T_z^+ > n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z \left(X_n = y, T_z^+ \geq n \right). \end{aligned}$$

Ya casi tenemos la expresión (1.3) que queríamos. De hecho, de esa expresión, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z \left(X_n = y, T_z^+ \geq n \right) \\ &= \tilde{\rho}(y) - \mathbb{P}_z \left(X_0 = y, T_z^+ > 0 \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z \left(X_n = y, T_z^+ = n \right) \\ &= \tilde{\rho}(y) - \mathbb{P}_z \left(X_0 = y, T_z^+ > 0 \right) + \mathbb{P}_z \left(X_{T_z^+} = y \right). \end{aligned}$$

Como $T_z^+ > 0$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_z \left(X_n = y, T_z^+ \geq n \right) = \tilde{\rho}(y) - \mathbb{P}_z \left(X_0 = y \right) + \mathbb{P}_z \left(X_{T_z^+} = y \right) = \tilde{\rho}(y).$$

Donde la última desigualdad se sigue de analizar los siguientes dos casos. En el primer caso $y = z$, y $X_0 = z = X_{T_z^+}$ por lo que los últimos dos términos se cancelan. En el segundo caso, ambos términos son 0. Luego, hemos probado que $\tilde{\rho}$ es invariante. Para que sea una medida de probabilidad, dividimos por

$$\sum_{y \in E} \tilde{\rho}(y) = \sum_{y \in E} \mathbb{E}_z \left[\sum_{n=0}^{T_z^+ - 1} I[X_n = y] \right] = \mathbb{E}_z \left[\sum_{n=0}^{T_z^+ - 1} 1 \right] = \mathbb{E}_z [T_z^+]$$

y finalmente $\rho(y) = \frac{\tilde{\rho}(y)}{\mathbb{E}_z [T_z^+]}$ que es una medida de probabilidad estacionaria.

Notemos que $\tilde{\rho}(z) = 1$, por lo que

$$\rho(z) = \frac{1}{\mathbb{E}_z [T_z^+]}$$

y como z era arbitrario, esa expresión vale para todo $z \in E$. □

Observemos que esto también nos da la unicidad de medida invariante en el caso de cadenas finitas e irreducibles. Notemos también que si supieramos que $\mathbb{E}_x[T_x^+]$ es finito para algún $x \in E$ podríamos imitar la demostración que dimos recién y la cadena seguiría teniendo medida invariante incluso si el espacio de estados no fuera finito.

Pasemos ahora a la clasificación de estados de una cadena de Markov. Volvemos ahora a considerar cadenas con espacio de estados numerable. Decimos que un sitio x es *recurrente* si

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ para infinitos } n) = 1$$

y decimos que un sitio es *transitorio* si

$$\mathbb{P}_x(X_n = x \text{ para infinitos } n) = 0.$$

Es decir, un sitio recurrente es un sitio al que se vuelve una y otra vez y un sitio transitorio es un sitio que eventualmente no se vuelve a visitar.

Recordemos que habíamos definido T_x^+ como el primer tiempo positivo en el que la cadena visita al sitio x . Lo renombramos $T_x^+ = T_1$. Definamos inductivamente el r -ésimo momento en el que la cadena visita el sitio x como

$$T_x^{r+1} = \inf\{n \geq T_x^r + 1 : X_n = x\}.$$

Definimos además, $T_x^0 = 0$. También definimos la r -ésima excursión al sitio x , que es el tiempo que el paseo pasa entre dos visitas a x como

$$S_x^r = \begin{cases} T_x^r - T_x^{r-1} & \text{si } T_x^{r-1} < \infty \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lema 2. Dado que $T_x^{r-1} < \infty$, S_x^r es independiente de $\{X_n : n \leq T_x^{r-1}\}$ y

$$\mathbb{P}(S_x^r = n | T_x^{r-1} < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x^+ = n).$$

Demostración. Aplicando la propiedad fuerte de Markov a $T := T_x^{r-1}$, se tiene que S_x^r es independiente de X_n para todo $n \leq T$ y

$$S_x^r = \inf\{n \geq 1 : X_{T+n} = x\}$$

que es el tiempo que tarda la cadena (X_{T+n}) en volver a pasar por el sitio x . \square

Definimos el número de visitas al sitio x como

$$V_x = \sum_{n=0}^{\infty} I[X_n = x]$$

y notamos $\mathbb{P}_x(X_n = x) = p_{xx}^n$ y $f_x = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$. Notemos que

$$\mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n.$$

Lema 3. Sea $r \in \mathbb{N}_0$, entonces $\mathbb{P}_x(T_x^r < \infty) = f_x^r$.

Demostración. Notemos que si $X_0 = x$, entonces $\{V_x > r\} = \{T_x^r < \infty\}$. Si $r = 0$ el resultado vale. Probemos por inducción que también vale para el resto.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(V_x > r + 1) &= \mathbb{P}_x(T_x^{r+1} < \infty) = \mathbb{P}_x(S_x^{r+1} < \infty \text{ y } T_x^r < \infty) \\ &= \mathbb{P}_x(S_x^{r+1} < \infty | T_x^r < \infty) \mathbb{P}_x(T_x^r < \infty) = \mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) f_x^r = f_x^{r+1}, \end{aligned}$$

donde usamos el lema anterior y que supusimos que valía para valores menores a $r + 1$. \square

Observemos que como le estamos calculando la probabilidad a una sucesión decreciente de conjuntos

$$\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}(V_x > r).$$

Veamos ahora definiciones equivalentes de recurrencia, una en términos de la probabilidad de volver a pasar por el sitio x y otra usando las probabilidades de transición de la cadena en n pasos.

Teorema 2. Dado $x \in E$, se cumple que:

1. si $\mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) = 1$, entonces x es recurrente y $\sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n = \infty$.
2. si $\mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) < 1$, entonces x es transitorio $\sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n < \infty$.

En particular, todos los estados son o bien recurrentes o bien transitorios y tenemos las tres definiciones equivalentes de ambos conceptos que se discutieron antes.

Demostración. Si $f_x = \mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) = 1$, entonces por el lema anterior,

$$\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = \lim_{r \rightarrow \infty} \mathbb{P}_x(V_x > r) = \lim_{r \rightarrow \infty} f_x^r = 1$$

por lo que x es recurrente y

$$\infty = \mathbb{E}_x[V_x] = \sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n.$$

Por otra parte, si $f_x = \mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) < 1$, se deduce del lema anterior que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{xx}^n = \mathbb{E}_x \left[\sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}_x(V_x > r) \right] = \sum_{r=0}^{\infty} f_x^r = \frac{1}{1 - f_x} < \infty,$$

por lo que $\mathbb{P}_x(V_x = \infty) = 0$ y x es transitorio. \square

Veamos que en las cadenas irreducibles, todos los estados son recurrentes o todos los estados son transitivos.

Sean x e y dos sitios en E . Supongamos que x es transitorio. Como la cadena es irreducible, existen $n, m \geq 0$ tales que $p_{xy}^n > 0$ y $p_{yx}^m > 0$ y para todo $r \geq 0$, se cumple que

$$p_{xx}^{n+r+m} \geq p_{xy}^n p_{yy}^r p_{yx}^m$$

por lo que

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{yy}^r \leq \frac{1}{p_{xy}^n p_{yx}^m} \sum_{r=0}^{\infty} p_{xx}^{n+r+m} < \infty$$

por el teorema anterior. Luego, por el mismo teorema, y es un estado transitorio. Como los estados son transitorios o recurrentes, hemos probado que en cadenas irreducibles todos los estados tienen la misma clasificación.

La caracterización de las cadenas en estados recurrentes es importante pues se relaciona con la existencia de medida invariante. De hecho, con una demostración similar a la de la Proposición 1, se prueba la existencia de una medida invariante para toda cadena irreducible y recurrente. Esta medida puede no ser una distribución de probabilidad pues para eso se necesitaría que la medida de todo el espacio de estados fuese finita pero nuevamente:

$$\sum_{y \in E} \tilde{\rho}(y) = \mathbb{E}_z[T_z^+]$$

y esa esperanza no necesariamente lo es. Incluso si hubiera una distribución de probabilidad invariante, esta podría no ser única. De hecho, en nuestro caso vamos a estar interesados en las cadenas en donde sí sucede eso. Decimos que un estado x es *recurrente positivo* si $\mathbb{E}_x[T_x^+]$ es finito. Claramente, los estados recurrentes positivos son recurrentes. Como observamos después de probar la Proposición 1, si la cadena es irreducible y tiene un estado recurrente positivo, entonces tiene distribución invariante ρ . Veamos que en este caso, todos los sitios son recurrentes positivos y por lo tanto

$$\rho(y) = \frac{1}{\mathbb{E}_y[T_y^+]}$$

Sea y un estado cualquiera en E . Como $\sum_{z \in E} \rho(z) = 1$, existe un $z_0 \in E$ tal que $\rho(z_0) > 0$. Por irreducibilidad, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $p_{z_0 y}^n > 0$. Como ρ es invariante,

$$\rho(y) = \sum_{z \in E} \rho(z) p_{zy}^n > 0.$$

Definamos $\lambda(z) = \rho(z)/\rho(y)$. Luego, λ resulta invariante y $\lambda(y) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= \sum_{w_0 \in E} \lambda(w_0) p_{w_0 z} = \sum_{w_0 \neq y} \lambda(w_0) p_{w_0 z} + p_{yz} \\ &= \sum_{w_0, w_1 \neq y} \lambda(w_1) p_{w_1 w_0} p_{w_0 z} + p_{yz} + \sum_{w_0 \neq y} p_{y w_0} p_{w_0 z}. \end{aligned}$$

Y repitiendo el mismo razonamiento

$$\begin{aligned}\lambda(z) &= \sum_{w_0, \dots, w_n \neq y} \lambda(w_n) p_{w_n w_{n-1}} \cdots p_{w_0 z} + p_{yz} + \cdots + \sum_{w_0, \dots, w_{n-1} \neq y} p_{y w_{n-1}} \cdots p_{w_0 z} \\ &\geq \mathbb{P}_y(X_1 = z \text{ y } T_y^+ \geq 1) + \cdots + \mathbb{P}_y(X_n = z \text{ y } T_y^+ \geq n) \\ &= \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{T_y^+} I[X_k = z] I[n \leq T_y^+] \right].\end{aligned}$$

Tomando límite en n en la última expresión, tenemos

$$\lambda(z) \geq \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{T_y^+} I[X_k = z] \right] = \mathbb{E}_y[\text{número de visitas a } z \text{ antes de volver a } y].$$

Entonces,

$$\mathbb{E}_y[T_y^+] = \sum_{z \in E} \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{T_y^+} I[X_k = z] \right] \leq \sum_{z \in E} \lambda(z) = \sum_{z \in E} \frac{\rho(z)}{\rho(y)} = \frac{1}{\rho(y)} < \infty.$$

Hemos probado que en una cadena irreducible con un estado recurrente positivo, todos los estados son recurrentes positivos.

Notemos que el Lema 1 implica que una cadena irreducible con espacio de estados finito, es recurrente positiva.

Si la cadena es recurrente e irreducible, vimos que $\mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) = 1$. Supongamos que $\mathbb{P}_{y_0}(T_x^+ < \infty) < 1$ para algún $y_0 \in E$. Como la cadena es irreducible, existe un número natural n tal que $p_{x y_0}^n > 0$. Luego,

$$1 = \mathbb{P}_x(T_x^+ < \infty) = \sum_{y \in E} \mathbb{P}_y(T_x^+ < \infty) p_{xy}^n < \sum_{y \in E} p_{xy} = 1,$$

lo que es absurdo. Hemos demostrado así que $\mathbb{P}_y(T_x^+ < \infty) = 1$ para todo $y \in E$.

Dada una cadena con espacios de estados numerable, en ocasiones es más sencillo estudiar otra cadena asociada a esta. Supongamos que $F \subseteq E$ es un conjunto finito. Sea

$$\nu_1 = \text{mín}\{n \geq 1 : X_n \in F\}$$

e inductivamente

$$\nu_k = \text{mín}\{n \geq \nu_{k-1} : X_n \in F\}.$$

Notamos al proceso estocástico formado por las posiciones de la cadena cada vez que esta visita un sitio en F como $X_k^F = X_{\nu_k}$. En el caso en el que la cadena sea recurrente, $\nu_k < \infty$ para todo k y por la propiedad fuerte de Markov, (X_k^F) es una cadena de Markov.

Probaremos que si la esperanza del tiempo de retorno al subconjunto F es finito y la cadena es irreducible, entonces la cadena es recurrente positiva. Intuitivamente, recordemos que la esperanza de retorno finita implica que la cadena

visita el conjunto infinitas veces. Pero si la cadena regresa infinitas veces a un conjunto finito, tiene que visitar infinitas veces algún sitio y la esperanza del tiempo de retorno a ese sitio no será muy diferente a la esperanza de retorno al conjunto finito.

Lema 4. *Sea (X_n) irreducible y F un subconjunto finito del espacio de estados. Entonces la cadena es recurrente positiva si $\mathbb{E}_x[\nu_1] < \infty$ para todo $x \in F$.*

Demostración. Definimos $\sigma(y) = \inf\{k \geq 1 : X_k^F = y\}$, $\nu_0 = 0$, $\delta_k = \nu_k - \nu_{k-1}$. Sea $m = \max_{z \in F} \mathbb{E}_z[\nu_1]$. Luego, sabemos que para $y \in F$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y[T_y^+] &= \mathbb{E}_y \left[\sum_{k=1}^{\sigma(y)} \delta_k \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_y \left[\sum_{w \in F} \mathbb{E}[\delta_k | X_{\nu_{k-1}} = w] I[k \leq \sigma(y)] \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_y \left[\sum_{w \in F} \mathbb{E}_w[\nu_1] I[k \leq \sigma(y)] \right] \leq m \sum_{k=1}^{\infty} P_y(k \leq \sigma(y)) = m \mathbb{E}_y[\sigma(y)]. \end{aligned}$$

Como F es finito, $\{X_n^F\}$ es recurrente positiva. Luego, $\mathbb{E}_y[\sigma(y)] < \infty$ por lo que $\mathbb{E}_y[T_y^+] < \infty$ y $\{X_n\}$ resulta recurrente positiva. \square

1.2. Criterio de Foster-Lyapunov

Probemos ahora una proposición esencial en el trabajo que nos da un criterio que nos ayudará a decidir cuándo hay recurrencia y recurrencia positiva en una cadena. Dada una función $h : E \rightarrow \mathbb{E}$, decimos que $h(y) \rightarrow \infty$ si el conjunto $\{y : h(y) \leq a\}$ es finito para todo $a \in \mathbb{R}$.

Teorema 3 (Criterio de Foster-Lyapunov). *Supongamos que la cadena es irreducible y sea F un subconjunto finito del espacio de estados E . Entonces:*

1. *la cadena es recurrente si existe una función $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(x) \rightarrow \infty$ y*

$$\sum_{x \in E} p_{yx} h(x) \leq h(y) \text{ para todo } y \notin F. \quad (1.5)$$

2. *la cadena es recurrente positiva si para alguna función $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ y algún $\varepsilon > 0$ sabemos que $\inf_{x \in E} h(x) > -\infty$ y*

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} p_{yx} h(x) &< \infty \text{ para todo } y \in F \\ \sum_{x \in E} p_{yx} h(x) &\leq h(y) - \varepsilon \text{ para todo } y \notin F \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$Ph(y) \leq h(y) - \varepsilon + bI[y \in F]$$

para algún $b \in \mathbb{R}$.

A una función con las propiedades de h se la suele llamar *función de Lyapunov*. Antes de comenzar la demostración daremos la idea intuitiva detrás del teorema. En ambos casos, se desprende de las hipótesis que h es acotada inferiormente. Notemos que

$$Ph(y) = \sum_{x \in E} p_{yx} h(x) = \mathbb{E}[h(X_{n+1}) | X_n = y]$$

y $h(y) = \mathbb{E}[h(X_n) | X_n = y]$. Luego, en ambos casos tenemos que

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1}) | X_n = y] \leq \mathbb{E}[h(X_n) | X_n = y].$$

En el primer caso, si suponemos que la cadena sólo pasa finitas veces por el conjunto F , tenemos que a partir de la última vez que visita a F , en cada paso, la cadena se va moviendo a sitios donde h tiene un valor menor. Pero los sitios donde h tiene un valor menor a $a \in \mathbb{R}$ son finitos. Luego, a partir de un momento, la cadena se queda siempre en un conjunto finito de valores. Pero entonces, alguno de esos sitios es recurrente. Como la cadena es irreducible, todos lo son y luego, se visita a F infinitas veces lo que implica la recurrencia. En el segundo caso, si la cadena no visita el conjunto F por mucho tiempo, en cada uno de esos pasos fuera de F , $h(X_n)$ es decreciente y decrece al menos ε por paso. Como h es acotada, no puede ser tanto el tiempo que transcurre entre dos visitas a F . En conclusión, F es recurrente positiva.

Para la prueba del teorema usaremos un resultado de la teoría de martingalas que enunciaremos a continuación. Un conjunto de σ -álgebras se denomina filtración si $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$ para todo $n \geq 1$. Un proceso X se denomina una *martingala* adaptada a la filtración $\{\mathcal{F}_n\}$ si X_n es \mathcal{F}_n -medible, $\mathbb{E}(|X_n|) < \infty$ para todo n y $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$ casi seguramente. Similarmente, X se denomina una *supermartingala* si se cumplen las primeras dos condiciones de la martingala y $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \leq X_{n-1}$ casi seguramente.

Teorema 4 (Teorema de convergencia de martingalas de Doob). *Sea X una supermartingala no negativa, entonces casi seguramente $X_\infty := \lim X_n$ existe y es finito.*

Demostración. En [11]. □

Demostración del Teorema (3). Sumando una constante de ser necesario, podemos suponer que $h \geq 0$. Notamos $T = \inf\{n \geq 1 : X_n \in F\} = \mu_1$ y definimos $Y_n = h(X_n)I[T > n]$.

1. Sea \mathcal{F}_n la σ -álgebra generada por $\{X_k\}_{k \leq n}$. Notemos que podemos reescribir (1.5) como $\mathbb{E}[h(X_{n+1}) | X_n = y] \leq h(y)$ para todo $y \notin F$. Sea $X_0 = x \notin F$. Luego, en $\{T > n\}$, $X_n \notin F$ (eso falla en el caso $n = 0$ si $X_0 \notin F$) por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] &\leq \mathbb{E}_x[h(X_{n+1})I[T > n] | \mathcal{F}_n] = I[T > n] \mathbb{E}_x[h(X_{n+1}) | \mathcal{F}_n] \\ &\leq I[T > n] h(X_n) = Y_n, \end{aligned}$$

donde usamos que $I[T > n]$ es \mathcal{F}_n -medible. Por otro lado, si $T \leq n$, entonces, $Y_n = Y_{n+1} = 0$ y resulta $\mathbb{E}_y[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq Y_n$, es decir, $\{Y_n\}$ es una supermartingala no negativa por lo que, por el teorema de convergencia de Doob, converge casi seguramente a Y_∞ . Supongamos que la cadena es transitoria. Como $\{x \in E : h(x) \leq a\}$ es finito para todo $a \in \mathbb{R}$ y la cadena visita ese conjunto sólo finitas veces por ser transitoria, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} h(X_n) = \infty$ casi seguramente. Como $Y_\infty < \infty$, tiene que suceder que $I[T > n] = 0$ a partir de algún momento. Entonces, $\mathbb{P}_x(T = \infty) = 0$ para todo $x \notin F$. Sea N el número de visitas al conjunto F y N_y el número de visitas al sitio $y \in E$. Por una cuenta similar a la que realizamos cuando probamos las equivalencias de recurrencia, $\mathbb{P}_x(T < \infty) = 1$ implica que $\mathbb{P}_x(N = \infty) = 1$. Como $N = \sum_{y \in F} N_y$ y F es finito, existe un $y \in F$ tal que $\mathbb{P}_x(N_y = \infty) = 1$. Luego,

$$1 = \mathbb{P}_x(N_y = \infty) \leq \mathbb{P}_y(N_y = \infty)\mathbb{P}_x(T_y^+ < \infty) \leq 1,$$

por lo que $\mathbb{P}_y(N_y = \infty) = 1$ e y es recurrente lo que resulta absurdo pues habíamos supuesto que la cadena era transitoria.

2. Nuevamente, tomemos $x \notin F$. Como antes, en $\{T > n\}$ se tiene que

$$\mathbb{E}_x[y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq IT > n \mathbb{E}_x[h(X_{n+1})|\mathcal{F}_n] \leq Y_n - \varepsilon I[T > n].$$

De nuevo, la última desigualdad se cumple trivialmente en $\{T \leq n\}$ por lo que

$$0 \leq \mathbb{E}_x[Y_{n+1}] \leq \mathbb{E}_x[Y_n] - \varepsilon \mathbb{P}_x(T > n) \leq \dots \leq \mathbb{E}_x[Y_0] - \varepsilon \sum_{k=0}^n \mathbb{P}_x(T > k).$$

Haciendo tender n al infinito y usando que $Y_0 = h(x)$, resulta que

$$\mathbb{E}_x[T] \leq \varepsilon^{-1}h(x).$$

Luego, para $y \in F$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_y[T] &= \sum_{x \in F} p_{yx} + \sum_{x \notin F} p_{yx} \mathbb{E}_x[T + 1] \leq 1 + \varepsilon^{-1} \sum_{x \notin F} p_{yx} h(x) \\ &\leq 1 + \varepsilon^{-1} \sum_{x \in E} p_{yx} h(x) < \infty \end{aligned}$$

por hipótesis. El teorema se sigue del Lema 4. □

Probaremos algunos resultados sueltos que nos servirán después:

Lema 5 (Principio de reflexión). *Sea $(X_n)_{n \geq 0}$ un paseo al azar simple simétrico que empieza en 0 y $x \in \{2, 3, \dots\}$, entonces*

$$\mathbb{P}(X_u < -x) \leq \frac{1}{2} \mathbb{P}\left(\inf_{s \leq u} X_s \leq -x\right).$$

Demostración. Notamos $m_u = \inf_{s \leq u} X_s$.

$$\mathbb{P}(m_u \leq -x) = \sum_{k=-x+1}^{+\infty} \mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = k) + \sum_{k=-x}^{-\infty} \mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = k).$$

Si $k \leq -x$ y $X_u = k$, entonces, $m_u \leq -x$. Por lo tanto,

$$\mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = k) = \mathbb{P}(X_u = k)$$

para todo $k \leq -x$.

Llamamos $\mathcal{T}_y = \inf\{n \in \mathbb{N} : X_n = y\}$. Si $k > -x$,

$$\mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = k) = \mathbb{P}(\mathcal{T}_{-x} < u, X_u = k).$$

Por la propiedad fuerte de Markov,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{-x} < u, X_u = k) = P(\mathcal{T}_{-x} < u) \mathbb{P}_{-x}(X_{u-\mathcal{T}_{-x}} = k).$$

Por la simetría del paseo al azar, la probabilidad de llegar en $u - \mathcal{T}_{-x}$ pasos del sitio $-x$ al sitio k es igual a la probabilidad de llegar en $u - \mathcal{T}_{-x}$ pasos del sitio $-x$ al sitio $-2x - k$. Luego,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{-x} < u) \mathbb{P}_{-x}(X_{u-\mathcal{T}_{-x}} = k) = P(\mathcal{T}_{-x} < u) \mathbb{P}_{-x}(X_{u-\mathcal{T}_{-x}} = -2x - k).$$

Nuevamente por la propiedad fuerte de Markov,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}_{-x} < u) \mathbb{P}_{-x}(X_{u-\mathcal{T}_{-x}} = -2x - k) = \mathbb{P}(\mathcal{T}_{-x} < u, X_u = -2x - k).$$

Luego,

$$\mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = k) = \mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = -2x - k)$$

y como $-2x - k \leq -x$,

$$\mathbb{P}(m_u \leq -x, X_u = -2x - k) = \mathbb{P}(X_u = -2x - k).$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(m_u \leq -x) &= \sum_{k=-x+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_u = -2x - k) + \sum_{k=-x}^{-\infty} \mathbb{P}(X_u = k) \\ &= \sum_{k=-x-1}^{-\infty} \mathbb{P}(X_u = k) + \sum_{k=-x}^{-\infty} \mathbb{P}(X_u = k) \\ &\geq 2 \sum_{k=-x-1}^{-\infty} \mathbb{P}(X_u = k) = 2\mathbb{P}(X_u < -x). \end{aligned}$$

□

Probemos ahora ciertas estimaciones de la probabilidad de que un paseo al azar esté en cierto sitio a cierto tiempo que nuevamente nos serán de utilidad.

Lema 6. *Sea X_n un paseo aleatorio simple simétrico en \mathbb{Z} a tiempo discreto. Luego,*

$$\mathbb{P}_0(X_n = k) \leq \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

Demostración. Sabemos que

$$X_{2r} = \sum_{j=1}^{2r} Z_j$$

donde Z_j es una variable aleatoria que toma los valores 1 y -1 con probabilidad $1/2$.

Para comenzar la demostración del resultado, notemos que en tiempos pares el paseo sólo llega a sitios pares y en tiempos impares, el paseo sólo llega a sitios impares. Luego, $\mathbb{P}_0(X_n = k) = 0$ si n y k tienen distinta paridad. Por lo tanto, empecemos por suponer que $n = 2r$ y $k = 2m$. Queremos estimar $\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m)$. Para que el paseo aleatorio que empieza en 0 llegue a $2m$ en exactamente $2r$ pasos, tiene que hacer $r + k$ pasos para arriba y $r - k$ pasos para abajo. Eso es porque si x denota la cantidad de pasos para arriba entre 0 y $2r$, o más precisamente, la cantidad de variables $Z_j, 1 \leq j \leq 2r$ que son iguales a 1 e y denota la cantidad de variables $Z_j, 1 \leq j \leq 2r$ que son iguales a -1 , vale que $X_{2r} = 2m$ si y solo si $x + y = 2r$ y $x - y = 2m$. Luego, por combinatoria, $\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m) = \binom{2r}{r+k} 2^{-2r}$.

Notemos que

$$\binom{2r}{r+k} = \frac{2r!}{(r+k)!(r-k)!} = \frac{(2r)(2r-1)\dots(r-k+1)}{(r+k)!}$$

y como $k \geq 0$, podemos acotar la última expresión y resulta

$$\binom{2r}{r+k} 2^{-2r} \leq \frac{(2r)\dots(r+1)}{r!} = \binom{2r}{r}.$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m) \leq \binom{2r}{r} 2^{-2r}$ para toda $0 \leq k \leq r$.

Recordemos ahora la fórmula de Stirling que nos servirá para estimar los números binomiales. En [7], se prueba una aproximación precisa de los números factoriales. En este trabajo, usaremos

$$n! = \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+1/2} e^{\varepsilon_n}, \quad \frac{1}{12n+1} \leq \varepsilon_n \leq \frac{1}{12n}$$

Usando que $1 \leq e^{1/(12n+1)} \leq e^{1/(12n)} \leq 2$ tenemos que

$$\binom{2r}{r} \leq \frac{\sqrt{2\pi} e^{-2r} (2r)^{2r+1/2} 2}{[\sqrt{2\pi} e^{-r} r^{r+1/2}]^2} = \frac{2^{2r+3/2}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

Luego,

$$\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m) \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2r}}. \quad (1.6)$$

Ahora supongamos que $n = 2r + 1$ y $k = 2m + 1$ con $r \in \mathbb{N}_0$ y $m \in \mathbb{Z}$. Usamos la cota para el caso par y la propiedad de Markov para estimar también el caso impar:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_0(X_{2r+1} = 2m + 1) &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_1(X_{2r} = 2m + 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_{-1}(X_{2r} = 2m + 1) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m) + \frac{1}{2}\mathbb{P}_0(X_{2r} = 2m + 2) \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2r}} \end{aligned}$$

Notemos que si $r = 0$,

$$\mathbb{P}_0(X_1 = 2m + 1) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } m = 0, -1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

y en ambos casos se cumple el teorema. Si $r \geq 1$, entonces, $2r + 1 \geq 2$. Además, si $t > 1$, vale que

$$\left(\frac{t}{t-1}\right)^{1/2} = \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{1/2} \leq \sqrt{2}$$

por lo que para todo $r \geq 1$, reemplazando a t por $2r + 1$ en la desigualdad anterior, se tiene que

$$\mathbb{P}_0(X_{2r+1} = 2m + 1) \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2r}} \leq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2r+1}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2r+1}}. \quad (1.7)$$

Teniendo (1.6) y (1.7) y sabiendo que $\sqrt{8} \leq 4$ y $4/\sqrt{\pi} \leq 3$, obtenemos que

$$\mathbb{P}_0(X_n = k) \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

como queríamos. □

1.3. Cadenas de Markov a tiempo continuo

Por último, definamos las cadenas de Markov a tiempo continuo. Una cadena de Markov a tiempo continuo es un proceso estocástico muy similar a una cadena a tiempo discreto sólo que en vez de producirse los saltos o movimientos de la cadena en todo tiempo discreto fijo en \mathbb{N} , ahora estos tiempos también son aleatorios. Con esa idea, seguimos teniendo un espacio de estados E numerable y una matriz generadora Q que indica las tasas con las que se producen los saltos entre sitios. Esta matriz tiene las siguientes particularidades:

$$q_{xy} \geq 0 \text{ para todo } x \neq y$$

pues la tasa con la que el proceso salta del sitio x al sitio y no puede ser negativa. Notemos que en las cadenas a tiempo continuo, podía haber "saltos" en el lugar si $p_{xx} > 0$, es decir, la cadena podía quedarse algún momento quieta. Sin embargo, en una cadena a tiempo continuo, no hay un tiempo fijo en el que se producen los saltos por lo tanto hacer un salto en el lugar y no hacer ningún salto es lo mismo. Luego, los números en la diagonal de Q no representan la tasa con la que la cadena se queda en un sitio sino la tasa con la que la cadena se mueve de ese sitio. La matriz Q también tiene que satisfacer que

$$0 \leq -q_{xx} < \infty \text{ y } \sum_{y \in E} q_{xy} = 0 \text{ para todo } x.$$

Notaremos $q_x = -q_{xx}$ que es la suma de las tasas de salto desde x al resto de los sitios. De la matriz Q obtenemos una matriz P como antes a la que llamaremos matriz de salto definida como

$$p_{xy} = \begin{cases} q_{xy}/q_x & \text{si } x \neq y \text{ y } q_x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x \neq y \text{ y } q_x = 0 \end{cases}$$

$$p_{xx} = \begin{cases} 0 & \text{si } q_x \neq 0 \\ 1 & \text{si } q_x = 0. \end{cases}$$

El procedimiento que hacemos es en cada fila x , si podemos, reescalamos las entradas que no están en la diagonal para que sumen 1 y ponemos un 0. La única manera de no poder realizar ese procedimiento es que todas las entradas de esa fila que no están en la diagonal sean 0. Luego, ponemos un 1 en la diagonal y en ese caso, si la cadena cae en el sitio x , no saldrá de él.

Ahora si, un proceso estocástico $(X_t)_{t \geq 0}$ es una cadena de Markov a tiempo continuo con distribución inicial λ y matriz Q a una cadena cuya cadena de saltos $(Y_n)_{n \geq 0}$ es una cadena de Markov discreta (λ, P) que cumple además que para cada $n \geq 1$, condicional a Y_0, \dots, Y_{n-1} , los tiempos de espera (entre que se producen los saltos) S_1, \dots, S_n son variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetros $q_{Y_0}, \dots, q_{Y_{n-1}}$ respectivamente. Lo que llamamos la cadena de saltos es justamente el comportamiento de la cadena cuando se produce un salto. Para construir este proceso, sean $(Y_n)_{n \geq 0}$ una cadena de Markov a tiempo discreto y T_1, T_2, \dots variables aleatorias exponenciales independientes de parámetro 1, independientes también de $(Y_n)_{n \geq 0}$. Sean $S_n = T_n/q_{Y_{n-1}}$ que es exponencial de parámetro $q_{Y_{n-1}}$, $J_n = S_1 + \dots + S_n$ (que representan los tiempos en los que se producen los saltos) y

$$X_t = \begin{cases} Y_n & \text{si } J_n \leq t < J_{n+1} \text{ para algún } n \\ \infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En nuestro caso, estaremos interesados nuevamente en los paseos aleatorios simples simétricos a tiempo continuo que son muy sencillos. Como antes, el espacio

de estados es \mathbb{Z} . La matriz Q tiene un parámetro D que es la tasa con la que el paseo salta:

$$q_{xy} = \begin{cases} \frac{D}{2} & \text{si } y = x \pm 1 \\ -D & \text{si } x = y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por último, recordemos que un proceso $(N_t)_{t \geq 0}$ con valores en \mathbb{N}_0 se denomina *proceso de Poisson de tasa* λ ($0 < \lambda < \infty$) si $N(0) = 0$, los incrementos $N(t_{k+1}) - N(t_k)$ son independientes si $t_k < t_{k+1}$ y el número de eventos en un intervalo de longitud t es una variable aleatoria Poisson de parámetro λt . Los procesos de Poisson modelan las sucesiones de eventos discretos no coordinados y sirven también para definir las cadenas a tiempo continuo pues el tiempo que pasa entre dos eventos o marcas del proceso tiene distribución exponencial de parámetro λ . Además, se sabe que condicionando al hecho de que hay una marca del proceso de Poisson en el intervalo (a, b) , la distribución de esa marca es uniforme en ese intervalo. De hecho, por la simplicidad de los paseos al azar simples y simétricos de tasa D , éstos se pueden pensar como un proceso de Poisson de intensidad D que indica los tiempos en los que el paseo salta y una matriz de probabilidad que determina la distribución de la cadena de saltos, es decir, la cadena conformada por la posición al saltar.

Capítulo 2

El modelo MDLA

Definamos ahora el modelo y establezcamos el problema a resolver. Como dijimos antes, nos vamos a concentrar en el caso unidimensional por lo que el proceso ocurre en \mathbb{Z} . Como el agregado comienza siendo el origen, los procesos estocásticos definidos en la semirecta positiva y en la semirecta negativa tienen la misma distribución y son independientes. Por lo tanto, nos concentraremos en estudiar la semirecta positiva. Luego, a tiempo t tendremos un agregado que consistirá de $\mathbb{Z} \cap [0, R(t)]$. Así, $R(t)$ es la partícula más a la derecha del agregado. A tiempo t también tenemos $N(i, t)$ partículas en el sitio i para todo $i > R(t)$. El movimiento de estas partículas generará que el agregado crezca como comentamos en la introducción. El objetivo es determinar cómo crece $R(t)$ como función de t .

2.1. Definición

Comenzamos con $\tau_0 = 0$. Los tiempos τ_k serán los tiempos en los que el agregado aumentará. Como dijimos antes, sea $R(0) = R(\tau_0) = 0$ y $N(i, 0), i \geq 1$ una sucesión de variables Poisson independientes de media μ . Todas las partículas se mueven siguiendo paseos aleatorios simples y simétricos a tiempo continuo con tasa de salto D hasta que son absorbidos por el agregado.

Notamos con $N(i, t)$, el número de partículas en el sitio i a tiempo t . Vamos a definir inductivamente los tiempos de parada τ_k y resultará que $R(t) = k$ en $[\tau_k, \tau_{k+1})$. Si τ_k y $N(i, \tau_k)$ ya fueron definidos y sabemos que $R(\tau_k) = k$, sea

$$\tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k : \text{alguna partícula salta sobre la posición } R(\tau_k) = k\}.$$

y $R(t) = k$ para todo $t \in [\tau_k, \tau_{k+1})$. Como las partículas se mueven siguiendo paseos al azar simples, sólo las partículas en la posición $k + 1$ a tiempo $\tau_{k+1}-$ pueden saltar a k a tiempo τ_{k+1} y cuando eso ocurre, definimos $R(\tau_{k+1}) = k + 1$ y todas las partículas que estaban en $R(\tau_k) + 1 = k + 1$ a tiempo $\tau_{k+1}-$ son absorbidas por el agregado.

Este proceso es un proceso de Markov fuerte aunque no probaremos eso en este trabajo.

2.2. Crecimiento a lo sumo lineal

Probemos ahora el primer resultado básico que dice que el agregado crece a como mucho linealmente en t . De ahora en más, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un paseo aleatorio a tiempo continuo simple y simétrico en \mathbb{Z} con tasa de salto D que comienza en 0. Usaremos $P(A)$ para la probabilidad del evento A y \mathbb{E} para la esperanza con respecto a P .

Teorema 5. Sean $R(0) = 0$ y $N(i, 0)$, $i \geq 1$ variables aleatorias i.i.d. con distribución Poisson de media μ . Entonces, existen constantes $C_i < \infty$ positivas tales que

$$P\{R(t) \geq C_1 t\} \leq e^{-C_2 t}.$$

Como consecuencia,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \leq \infty \quad c.s.$$

Demostración. La prueba de este teorema se basa en un argumento de tipo Peierls, es decir, en la estimación de la probabilidad de un conjunto de trayectorias particulares. En este caso, tomando $k = \lceil C_1 t \rceil$, se estima la probabilidad de que el agregado haya dado al menos k saltos antes del tiempo t . Para que eso suceda, al menos k partículas tienen que haber saltado a la izquierda en algún momento. La probabilidad de que esos saltos ocurran es menor que $\left(\frac{D}{2}\right)^k$ que a su vez, es igual a $Ce^{-k \log 2}$, simplemente porque las partículas se mueven siguiendo paseos aleatorios simples, simétricos e independientes de tasa D . Como k es un múltiplo de t , tenemos la cota que buscábamos.

Concretamente, $k = \lceil C_1 t \rceil$. Como $R(t)$ es un número entero, $R(\tau_k) = k$ y R es una función creciente, sabiendo que $R(t) \geq C_1 t$, tenemos que $R(t) \geq k$ y por lo tanto $\tau_k \leq t$. Luego, $P\{R(t) \geq C_1 t\} \leq P\{\tau_k \leq t\}$ y esto justifica la intención de estimar el conjunto de trayectorias que mencionamos antes.

Numeraremos las partículas según el sitio en el que estaban a tiempo 0. Así, la partícula $\langle i, j \rangle$ es la j -ésima partícula en el sitio i a tiempo 0.

$$\begin{aligned} P\{R(t) \geq C_1 t\} &\leq P\{\tau_k \leq t\} \\ &\leq \int \cdots \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} P\{\text{las partículas } \{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen, son distintas} \\ &\quad \text{y saltan de } i \text{ a } i-1 \text{ durante } dt_i\}. \end{aligned}$$

Fijemos la sucesión $\{\langle u_i, v_i \rangle\}$, $1 \leq i \leq k$ de partículas todas distintas.

Sea $K = \mathbb{P}\{\langle u_i, v_i \rangle \text{ salta del lugar } i \text{ al } i-1 \text{ en } dt_i \text{ para todo } i\}$ donde \mathbb{P} nota la probabilidad condicionando a que todas las partículas existan. Entonces, tenemos que la fórmula dentro de la integral es

$$K \times P\{\text{las partículas } \{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen}\}.$$

En K , como todas las partículas son distintas, sus trayectorias son independientes. Por lo tanto, llamando

$$K_i = \mathbb{P}\{\langle u_i, v_i \rangle \text{ salta del lugar } i \text{ al } i - 1 \text{ en } dt_i\},$$

tenemos que

$$K = \prod_{i=1}^k K_i.$$

Si llamamos, S a un paseo aleatorio simple y simétrico con tasa D que empieza en 0, tenemos que $K_i = \mathbb{P}\{S(t_i-) = i - u_i \text{ y } \langle u_i, v_i \rangle \text{ salte a } i - 1 \text{ en } dt_i\}$. Por la propiedad de Markov,

$$K_i = P\{S(t_i-) = i - u_i\} \times \mathbb{P}\{\langle u_i, v_i \rangle \text{ salte a } i - 1 \text{ en } dt_i\}.$$

Calculemos ahora la probabilidad de que las partículas $\langle u_i, v_i \rangle$ existan y sean distintas.

Fijamos $\{u_i\}_{i=1}^k \subseteq \mathbb{Z}$. Sean a_1, \dots, a_p enteros tales que $\{u_i\}_{i=1}^k = \{a_j\}_{j=1}^p$ y $T_j = \#\{1 \leq i \leq k : u_i = a_j\}$. Llamemos q_j al cardinal de T_j . Recordemos además que $N[x, 0]$ es el número de partículas a tiempo 0 en el sitio x que tiene una distribución Poisson. Definimos

$$N_m := \begin{cases} N(N-1)\dots(N-m+1) & \text{si } N \geq m \\ 0 & \text{si } N < m. \end{cases}$$

Entonces, por linealidad de la esperanza

$$\sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} P\{\{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen}\} = \mathbb{E} \left[\sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} \prod_{i=1}^k I[\langle u_i, v_i \rangle \text{ existe}] \right]$$

y por cómo definimos las variables $N[a_j, 0]_{q_j}$

$$\mathbb{E} \left[\sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} \prod_{i=1}^k I[\langle u_i, v_i \rangle \text{ existe}] \right] = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^p N[a_j, 0]_{q_j} \right].$$

Como las variables aleatorias $N[a_j, 0]$ tienen distribución Poisson de media μ ,

$$\mathbb{E}[N[a_j, 0]_{q_j}] = \sum_{n=q_j}^{\infty} n(n-1)\dots(n-q_j+1) \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} = \mu^{q_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} = \mu^{q_j}.$$

Además, como la distribución inicial de cada sitio es independiente de la distribución inicial de los otros sitios, tenemos que

$$\sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} P\{\{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen}\} = \mathbb{E} \left[\prod_{j=1}^p N[a_j, 0]_{q_j} \right] = \prod_{j=1}^p \mu^{q_j} = \mu^k. \quad (2.1)$$

Luego,

$$\int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} \dots \int P\{\text{las partículas } \{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen, son distintas}$$

y saltan de i a $i - 1$ durante $dt_i\}$

$$\leq \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} \sum_{\{u_i\} \subseteq \mathbb{Z}} \sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} P\{\{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen}\} \\ \times \prod_{i=1}^k P\{S(t_i-) = i - u_i\} \times P\{\langle u_i, v_i \rangle \text{ salte a } i - 1 \text{ en } dt_i\}$$

$$\leq \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} \sum_{\{u_i\} \subseteq \mathbb{Z}} \sum_{\left\{v_i: \begin{array}{l} \langle u_i, v_i \rangle \\ \text{distintas} \end{array}\right\}} P\{\{\langle u_i, v_i \rangle\}_{i=1}^k \text{ existen}\} \\ \times \left(\prod_{i=1}^k P\{S(t_i-) = i - u_i\} \right) \frac{D^k}{2^k} dt_1 \dots dt_k$$

Por (2.1), el lado derecho de la desigualdad queda igual a

$$\int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} \sum_{\{u_i\} \subseteq \mathbb{Z}} P\{S(t_i-) = i - u_i\} \mu^k \frac{D^k}{2^k} dt_1 \dots dt_k.$$

Como los u_i recorren todos los enteros que son todos los valores que puede tomar el paseo aleatorio S , la sumatoria en la anterior integral resulta igual a 1.

En conclusión,

$$P\{R(t) \geq C_1 t\} \leq \mu^k \frac{D^k}{2^k} \int_{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t} dt_1 \dots dt_k = \mu^k \frac{D^k}{2^k} \frac{t^k}{k!} = \left(\frac{D\mu t}{2} \right)^k \frac{1}{k!}$$

Como $e^k = \sum_n \frac{k^n}{n!} \geq \frac{k^k}{k!}$, entonces $\frac{1}{k!} \leq \left(\frac{e}{k} \right)^k$.

Por lo tanto,

$$P\{R(t) \geq C_1 t\} \leq \left(\frac{D\mu t}{2} \right)^k \frac{1}{k!} \leq \left(\frac{De\mu t}{2k} \right)^k.$$

Llamamos $C_1 = De\mu$ y $C_2 = C_1 \log 2$. Recordemos que $k = \lceil C_1 t \rceil$. Luego,

$$\left(\frac{De\mu t}{2k}\right)^k = \left(\frac{C_1 t}{2k}\right)^k \leq \left(\frac{\lceil C_1 t \rceil}{2k}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^k = e^{-k \log 2} \leq e^{-C_1 \log 2 t} = e^{-C_2 t}$$

y obtenemos el resultado buscado.

Como $P\{R(t) \geq C_1 t\} \leq e^{-C_2 t}$, tenemos que $\int_0^\infty \mathbb{E}[I[R(t) \geq C_1 t]] dt$ es menor que $\int_0^\infty e^{-C_2 t} dt$ y por lo tanto resulta finita. Por el teorema de Fubini-Tonelli sabemos que

$$\int_0^\infty \mathbb{E}[I[R(t) \geq C_1 t]] dt = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty I[R(t) \geq C_1 t] dt\right]$$

que también resulta finita.

Llamamos $\Omega_0 = \{\omega \in \Omega : \int_0^\infty I[R(t)(\omega) \geq C_1 t] dt < \infty\}$. Como la esperanza que calculamos anteriormente es finita, se tiene que la variable aleatoria

$$\int_0^\infty I[R(t) \leq C_1 t] dt$$

es finita casi seguramente y por lo tanto $P(\Omega_0) = 1$.

Notemos ahora que si ω pertenece a Ω_0 , la integral impropia converge y vale que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I[R(t)(\omega) \geq C_1 t] = 0.$$

Las funciones indicadoras sólo toman valores en $\{0, 1\}$ por lo que, si ω pertenece a Ω_0 , entonces existe un $t_0 \geq 0$ tal que $I[R(t)(\omega) \geq C_1 t] = 0$ para todo t mayor que t_0 . Luego,

$$\Omega_0 \subseteq \{\omega \in \Omega : \text{existe } t_0 \text{ tal que } R(t) < C_1 t \text{ para todo } t \geq t_0\} =: \Omega_1.$$

Como Ω_1 contiene un evento de probabilidad 1, también tiene probabilidad 1. Eso demuestra que casi seguramente,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \leq C_1.$$

□

Capítulo 3

MDLA simplificado

Como el problema de estudiar la velocidad de crecimiento del agregado cuando la densidad inicial de partículas es mayor a 1, es difícil, estudiaremos, un modelo simplificado que fue comentado en la introducción. Ésta simplificación fue propuesta y desarrollada por Kesten y Sidoravicius en [5]. En este modelo, tenemos constantemente, J partículas. Notamos $X_1(t), X_2(t), \dots, X_J(t)$ las posiciones de las J partículas relativas al punto más a la derecha del agregado, es decir, $R(t)$. En la figura 3.1, $X_1(\tilde{t})$ vale 1, $X_2(\tilde{t})$ vale 2, $X_3(\tilde{t})$ vale 5 y $X_4(\tilde{t})$ vale 2. Las posiciones de las partículas sobre la recta real en verdad son $R(t) + X_1(t), \dots, R(t) + X_J(t)$.

3.1. Crecimiento lineal

Para construir el proceso, definimos las siguientes variables aleatorias. Sean $\{S_j(t)\}_{t \geq 0}, 1 \leq j \leq J$ paseos aleatorios simples i.i.d. a tiempo continuo que empiezan en 0 y tienen tasa de salto D . Cuando las partículas intentan saltar sobre el agregado, en vez de ser absorbidas por el mismo, son redistribuidas siguiendo una distribución G . Sean $\{Y_{j,k}, 1 \leq j \leq J, k \geq 1\}$ variables aleatorias i.i.d. con distribución G . Estas variables aleatorias serán las encargadas de determinar a dónde son redistribuidas las partículas absorbidas cada vez que el agregado llega a la posición k . Las variables $\{Y_{j,k}\}$ y $\{S_j(t)\}$ son tomadas independientemente unas de otras.

Definamos ahora, por inducción, los tiempos de parada en los que el agregado crece. Sean $R(0) = 0$ y $\tau_0 = 0$. Para cada $1 \leq j \leq J$, tomamos la posición inicial de la j -ésima partícula $X_j(0) = A_{j,0} \in \{1, 2, \dots\}$ determinísticamente pero arbitrariamente entre los naturales. Habiendo definido τ_k y $X_j(\tau_k)$, definimos

$$\tau_{k+1} = \inf\{t > \tau_k : X_j(\tau_k) + [S_j(t) - S_j(\tau_k)] = 0 \text{ para algún } 1 \leq j \leq J\}$$

y $r(k+1)$ el valor de j tal que $X_j(\tau_k) + [S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)] = 0$, es decir, el número de partícula que provocó el $(k+1)$ -ésimo paso del agregado. Como los saltos de las

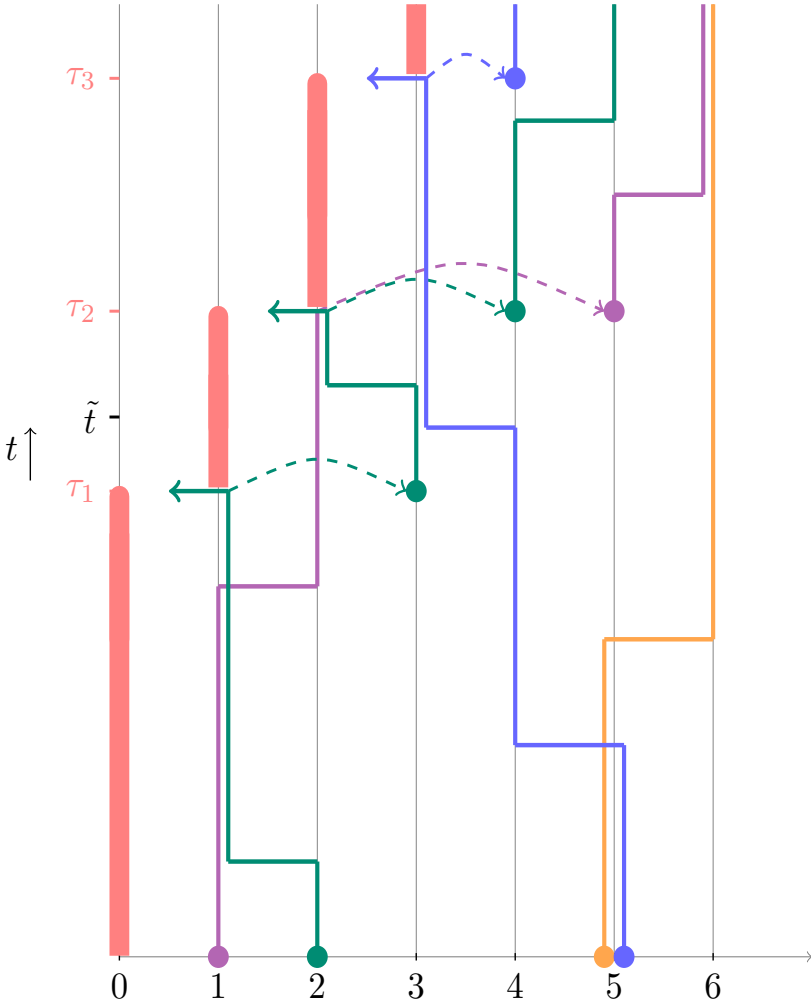


Figura 3.1: El modelo simplificado

finitas partículas ocurren con distribuciones exponenciales independientes, $r(t+1)$ es único y todos las partículas saltan a tiempos distintos casi seguramente.

Definimos ahora las trayectorias de las partículas. Entre los tiempos de crecimiento del agregado, las partículas se mueven como paseos aleatorios simples simétricos desde su posición en el último momento de crecimiento del agregado, es decir,

$$X_j(t) = X_j(\tau_k) + [S_j(t) - S_j(\tau_k)] \text{ si } \tau_k \leq t \leq \tau_{k+1}, 1 \leq j \leq J.$$

Cuando el agregado crece, todas las partículas que no fueron absorbidas por el agregado, vistas desde el agregado, se mueven un paso a la izquierda (aunque en verdad lo que sucede es que el agregado se mueve un paso a la derecha) y las partículas absorbidas se redistribuyen usando las variables $\{Y_{j,k}\}$ que definimos antes. Más explícitamente,

$$X_j(\tau_{k+1}) = X(\tau_{k+1}-) - I[j = r(k+1)] + A_{j,k+1}, 1 \leq j \leq J$$

donde las $A_{j,k+1}$ son los ajustes que se explicaron antes:

$$A_{j,k+1} = \begin{cases} Y_{r(k+1),k+1} & \text{si } j = r(k+1) \\ Y_{j,k+1} - 1 & \text{si } X_j(\tau_{k+1}-) = 1, \text{ pero } j \neq r(k+1) \\ -1 & \text{si } X_j(\tau_{k+1}-) \geq 2. \end{cases}$$

Naturalmente, $X_{r(k+1)}(\tau_{k+1}-) = 1$. Al no incluir el salto $I[j = r(k+1)]$ entre los ajustes, tenemos que

$$X_j(t) = S_j(t) + \sum_{k \geq 0: \tau_k \leq t} A_{j,k}.$$

Volvemos a definir $R(t)$ como

$$R(t) = k \text{ si } \tau_k \leq t < \tau_{k+1}.$$

Así, quedan definidas casi seguramente las variables X_j y es claro que la J -upla ordenada $\{X_1(t), \dots, X_J(t)\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov fuerte cuyo espacio de estados es \mathbb{N}^J .

Teorema 6. *Si*

$$\mu_{10} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{10} G(\{n\}) < \infty$$

entonces existe una cantidad de partículas constante J_0 tal que para toda $J \geq J_0$, $\{X_j(t), 1 \leq j \leq J\}_{t \geq 0}$ es irreducible y recurrente positiva. Más aún, casi seguramente,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} \text{ existe y es estrictamente mayor que } 0.$$

3.2. Estrategia de la prueba

Para probar este teorema usaremos algunos lemas previos y para eso necesitamos un poco más de notación. Definimos $\ell_1(t), \dots, \ell_J(t)$ como los valores $X_1(t), \dots, X_J(t)$ pero ordenados de forma creciente. Además, definimos $\tilde{L}_0 = L_0 = \ell_1(0) + \dots + \ell_J(0)$ y

$$\tilde{L}_k := \ell_1(\tau_k-) + \dots + \ell_J(\tau_k-) - 1, \quad k \geq 1.$$

Así, \tilde{L}_k es la suma de todas las posiciones de las partículas justo antes de que la partícula $r(k)$ salte por sobre el agregado, restando 1. Como la partícula $r(k)$ salta a tiempo τ_k sobre el agregado, $X_{r(k)}(\tau_k) = 1$ y por lo tanto, $\ell_1(\tau_k-) = X_{r(k)}(\tau_k) = 1$. Luego, \tilde{L}_k es la suma de las posiciones de todas las partículas justo antes de que el agregado crezca por k -ésima vez, menos la posición de la partícula que genera que el agregado crezca. Notemos que como $\ell_1(\tau_k-) = 1$, $\ell_j(\tau_k-) \geq 1$ para todo $1 \leq j \leq J$ y por lo tanto, $\tilde{L}_k \geq J - 1$. Definamos también el vector

$$U_k := (X_1(\tau_k-), \dots, X_J(\tau_k-)).$$

Después de producido el salto y las redistribuciones de las partículas, tenemos que

$$L_k := \ell_1(\tau_k) + \dots + \ell_J(\tau_k) = \tilde{L}_k + \sum_{j=1}^J A_{j,k}.$$

Por último, definimos el conjunto

$$\Lambda = \Lambda(\alpha) = \left\{ (x_1, \dots, x_J) \in \Gamma : x_j \in \{1, 2, \dots\}, \sum_{j=1}^J x_j \leq \alpha + 1 \right\}$$

y los tiempos

$$\nu_1 = \nu_1(\alpha) = \inf\{k \geq 1 : U_k \in \Lambda(\alpha)\} = \inf\{k \geq 1 : \tilde{L}_k \leq \alpha\}$$

y

$$\nu_{n+1} = \nu_{n+1}(\alpha) = \inf\{k > \nu_n : U_k \in \Lambda(\alpha)\}.$$

Antes de empezar la demostración daremos una idea de la misma. Los vectores U_k , $k \geq 1$ forman una cadena de Markov con espacio de estados

$$\Gamma := \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_J) : x_i \in \mathbb{Z}_+, \min_i x_i = 1 \right\}.$$

Como dijimos antes, el mínimo de U_k tiene que ser 1 pues el vector U_k representa las posiciones de las partículas justo antes de la k -ésima vez que el agregado crece y por lo tanto, en ese momento, alguna partícula tiene que estar en la posición 1. La cadena U_k visita el conjunto finito $\Lambda(\alpha)$ sucesivamente en los tiempos ν_1, ν_2, \dots

La idea de la demostración es probar que el comportamiento de $R(t)$ y el de la subcadena de Markov $\{U_{\nu_i}\}_{i \geq 1}$ son en algún punto iguales, es decir, que el proceso visita ese espacio de estados finitos Λ con una proporción similar a la que el agregado crece. Para eso, primero se necesita probar que la cadena $\{U_k\}$ visita ese espacio de estados infinitas veces. Con ese objetivo, utilizaremos el criterio de Foster-Lyapunov para probar que esa cadena es recurrente positiva.

Para empezar con la demostración, probaremos que la cadena $\{U_k\}$ es irreducible y, más aún, la subcadena de Markov $\{U_{\nu_i}\}$ es también irreducible. Esta última subcadena tiene como espacio de estados al conjunto finito Λ y por lo tanto, tiene una medida invariante única ρ como se probó en la Proposición 1.

Luego, probaremos que bajo la condición de que G tenga décimo momento finito, y para J mayor que J_0 para algún $J_0 \in \mathbb{N}$ y cualquier elección de estado inicial $(X_1(0), \dots, X_J(0))$ tenemos que

$$\nu_2 < \infty \text{ casi seguramente y } \mathbb{E}[\nu_2] < \infty \quad (3.1)$$

y además

$$\tau_{\nu_2} < \infty \text{ casi seguramente y } \mathbb{E}[\tau_{\nu_2}] < \infty. \quad (3.2)$$

Las condiciones de que $J \geq J_0$ y que G tenga décimo momento finito son técnicas. Conjeturamos que bastaría con que $J_0 = 3$.

Notamos \mathbb{E}^ρ a la esperanza cuando el estado inicial de la cadena de Markov $\{U_{\nu_i}\}$ tiene distribución ρ . Probaremos que los resultados (3.1) y (3.2) implican que

$$\mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1] < \infty \quad (3.3)$$

y

$$\mathbb{E}^\rho[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}] < \infty. \quad (3.4)$$

A continuación, probaremos una ley de los grandes números para este proceso y obtendremos que casi seguramente

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \nu_n = \mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1] < \infty \quad (3.5)$$

y

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \tau_{\nu_n} = \mathbb{E}^\rho[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}] < \infty. \quad (3.6)$$

Se sigue trivialmente de esto último que

$$0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{\tau_{\nu_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_{n+1}}{\tau_{\nu_n}} = \frac{\mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1]}{\mathbb{E}^\rho[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}]} < \infty.$$

Por cómo definimos $R(t)$, si $\tau_{\nu_n} \leq t < \tau_{\nu_{n+1}}$, se tiene que $\nu_n \leq R(t) < \nu_{n+1}$ y

$$\frac{\nu_n}{\tau_{\nu_{n+1}}} \leq \frac{R(t)}{t} \leq \frac{\nu_{n+1}}{\tau_{\nu_n}}$$

por lo que casi seguramente

$$0 < \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{R(t)}{t} = \frac{\mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1]}{\mathbb{E}^\rho[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}]} < \infty,$$

lo que prueba el teorema (6).

Para empezar con los detalles, dejaremos los resultados (3.1) y (3.2) para el final pues resultan los más trabajosos. Comenzaremos entonces con la irreducibilidad de las cadenas y los resultados (3.3), (3.4), (3.5) y (3.6).

Para probar la irreducibilidad de U_k , tomemos dos estados cualesquiera en Γ , $y = (y_1, \dots, y_J)$ y $z = (z_1, \dots, z_J)$ y veamos que la probabilidad de que la cadena U_k pase de y a z es positiva. Sea $1 \leq i_0 \leq J$ tal que $z_{i_0} = 1$.

Supongamos que $y' = (y'_1, \dots, y'_J) = (X_1(\tau_k), \dots, X_J(\tau_k))$, es decir, y' es la posición de las partículas después de los ajustes que ocurren a tiempo τ_k . Claramente la probabilidad de que los paseos al azar $S_i, 1 \leq i \leq J$ se muevan desde y' a z sin pasar por el 0, es positiva. Supongamos que eso ocurre durante el intervalo de tiempo $[\tau_k, \tau_k + s)$. La probabilidad de que el siguiente salto sea el de X_{i_0} desde la posición 1 a la posición 0 es positiva. Supongamos que ese salto ocurre a tiempo $\tau_k + s + u$, luego $\tau_{k+1} = \tau_k + s + u$ y $U_{k+1} = z$. Esto prueba la irreducibilidad de U_k . La irreducibilidad de U_{ν_i} se deduce inmediatamente de la prueba de que la de U_k lo es.

Ahora probemos los resultados (3.3) y (3.4). Notemos que no es del todo inmediato el resultado pues las posiciones iniciales de las partículas no son aleatorias y por lo tanto no siguen la distribución estacionaria ρ de la subcadena U_{ν_i} . De hecho, la cadena no necesariamente empieza en Λ . Si $X(0) = x$ es un elemento cualquiera de Γ e y pertenece a Λ , entonces,

$$P(\nu_1 = 2, U_2 = y | X(0) = x) = \sum_{z \in \Gamma \setminus \Lambda} P(U_1 = z, U_2 = y | X(0) = x)$$

y por la propiedad de Markov, eso es igual a

$$\sum_{z \in \Gamma \setminus \Lambda} P(U_2 = y | U_1 = z) P(U_1 = z | X(0) = x).$$

Por la cuenta que hicimos recién de la irreducibilidad de U_k , tenemos que todos los términos de la última sumatoria son positivos por lo que

$$P(\nu_1 = 2, U_2 = y | X(0) = x) > 0.$$

Ahora usemos que ν_2 tiene esperanza finita, para concluir el resultado (3.3). De nuevo, x pertenece a Γ e y pertenece a Λ . Luego, como $\nu_1 \geq 0$, tenemos que $\nu_2 \geq \nu_2 - \nu_1$ y por lo tanto,

$$\mathbb{E}[\nu_2 | X(0) = x] \geq \mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | X(0) = x].$$

Sabemos que

$$\mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | X(0) = x] = \sum_{k=1}^{\infty} k P(\nu_2 - \nu_1 = k | X(0) = x).$$

Más aún,

$$P(\nu_2 - \nu_1 = k | X(0) = x) = \sum_{z \in \Gamma \cap \Lambda} P(\nu_2 - \nu_1 = k, U_{\nu_1} = z | X(0) = x).$$

La expresión a la derecha del igual es naturalmente mayor o igual que

$$P(\nu_2 - \nu_1 = k, U_{\nu_1} = y | X(0) = x).$$

Usando probabilidad total, tenemos que

$$P(\nu_2 - \nu_1 = k, U_{\nu_1} = y | X(0) = x) = \frac{P(\nu_2 - \nu_1 = k, U_{\nu_1} = y, X(0) = x)}{P(X(0) = x)}$$

pero por la propiedad de Markov

$$\frac{P(\nu_2 - \nu_1 = k, U_{\nu_1} = y, X(0) = x)}{P(X(0) = x)} = P(\nu_2 - \nu_1 = k | U_{\nu_1} = y) P(U_{\nu_1} = y | X(0) = x).$$

Por último, $P(U_{\nu_1} = y | X(0) = x) \geq P(U_{\nu_1} = y, \nu_1 = 2 | X(0) = x)$. En conclusión,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\nu_2 | X(0) = x] &\geq \sum_{k=1}^{\infty} k P(U_{\nu_1} = y, \nu_1 = 2 | X(0) = x) P(\nu_2 - \nu_1 = k | U_{\nu_1} = y) \\ &= P(U_{\nu_1} = y, \nu_1 = 2 | X(0) = x) \mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | U_{\nu_1} = y] \end{aligned}$$

Pero antes, probamos que $P(U_{\nu_1} = y, \nu_1 = 2 | X(0) = x) > 0$ y supusimos que $\mathbb{E}[\nu_2]$ era finito, por lo que $\mathbb{E}[\nu_2 | X(0) = x]$ también lo es.

Así probamos que $\mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | U_{\nu_1} = y]$ es finito para todo $y \in \Lambda$. Como Λ es finito, resulta que

$$\mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1] = \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | U_{\nu_1} = y] \rho(y)$$

es finita como queríamos.

Una cuenta análoga pero usando el hecho de que

$$\mathbb{E}[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1} | X(0) = 0] = \int_0^{\infty} P(\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1} | X(0) = 0) dt,$$

demuestra que $\mathbb{E}^\rho[\tau_{\nu_2} - \tau_{\nu_1}]$ también es finita.

Por último, antes de comenzar con la prueba de que la cadena U_k visita el conjunto finito Λ infinita veces, vamos a probar los resultados (3.5) y (3.6).

Queremos demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \nu_n = \mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1]$. Este es un resultado similar al clásico teorema ergódico para cadenas de Markov pero ligeramente distinto. En el teorema ergódico estándar (que se puede encontrar en [8]), se tiene una cadena de Markov $(X_n)_{n \geq 1}$ con espacio de estados I numerable y distribución (λ, P) . La cadena además es irreducible y recurrente positiva. Entonces, para toda función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada se tiene que

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \bar{f} \right) = 1$$

donde

$$\bar{f} = \sum_{i \in I} \rho(i) f(i)$$

y $\rho: I \rightarrow [0, 1]$ es la distribución estacionaria de la cadena.

En nuestro caso, tenemos a la cadena U_{ν_i} que es irreducible y cuyo espacio de estados es finito y por lo tanto resulta además recurrente positiva como probamos en el Lema 1. Como

$$\mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1] = \sum_{y \in \Lambda} \mathbb{E}[\nu_2 - \nu_1 | U_{\nu_1} = y] \rho(y),$$

si pudiesemos probar un teorema ergódico para la función aleatoria $\nu_2 - \nu_1$ tendríamos el resultado buscado. Demostraremos ese resultado adaptando la demostración del teorema ergódico para cadenas de Markov que enunciamos antes.

Sea j un estado fijo en Λ que es el espacio de estados de la cadena $(U_{\nu_i})_{i \geq 1}$. Llamamos $1 \leq T_1 < T_2 < \dots$ a los sucesivos tiempos en los que $U_{\nu_i} = j$. Como la cadena es recurrente, los tiempos están bien definidos y son finitos.

Como $U_{\nu_{T_k}} = j$, la cadena $(U_{\nu_{T_k+n}})$ tiene distribución (δ_j, P) y, por la propiedad fuerte de Markov, es independiente de $U_{\nu_1}, \dots, U_{\nu_{T_k}}$.

Luego, definiendo

$$Y_k = \sum_{m=T_k}^{T_{k+1}-1} (\nu_{m+1} - \nu_m) = \nu_{T_{k+1}} - \nu_{T_k}$$

tenemos que las variables $\{Y_k\}_{k \geq 1}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

Sea

$$S_n = \sum_{m=1}^n \nu_{m+1} - \nu_m = \sum_{m=1}^{T_1-1} (\nu_{m+1} - \nu_m) + \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} Y_k + \sum_{m=T_{\ell(n)}}^n (\nu_{m+1} - \nu_m)$$

donde $\ell(n) = \max\{k \geq 1 : T_k \leq n\}$.

Notamos al primer término de S_n como $Y' := \sum_{m=1}^{T_1-1} (\nu_{m+1} - \nu_m)$. Como los tiempos $\nu_{m+1} - \nu_m$ y T_1 son finitos, Y' resulta finito y por lo tanto, al dividirlo por n converge a 0 casi seguramente.

Notemos además que

$$\sum_{k=1}^{\ell(n)-1} Y_k \leq S_n \leq Y' + \sum_{k=1}^{\ell(n)} Y_k. \quad (3.7)$$

Como j es un sitio recurrente, $\lim_{n \rightarrow \infty} \ell(n) = \infty$ casi seguramente. Luego, usando ese resultado y la ley fuerte de los grandes números, se tiene que

$$P \left(\frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=1}^{\ell(n)} Y_k \rightarrow \mathbb{E}[Y_1] \right) = 1.$$

Este resultado, más el hecho de que Y' sobre $\ell(n)$ converge a 0 casi seguramente y las desigualdades (3.7) concluyen que

$$P \left(\frac{1}{\ell(n)} S_n \rightarrow \mathbb{E}[Y_1] \right) = 1. \quad (3.8)$$

Recordemos que nosotros buscábamos el límite de $\frac{\nu_n}{n}$. Sabiendo que ν_2 es finita y que $\nu_n = \nu_2 + \sum_{k=2}^{n-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) = \nu_2 + S_{n-1}$, tenemos que, de existir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=2}^{n-1} (\nu_{k+1} - \nu_k)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{n}. \quad (3.9)$$

Hasta ahora obtuvimos el límite de $\frac{S_n}{\ell(n)}$. De hallar el límite de $\frac{\ell(n)}{n}$ tendríamos lo que buscábamos.

De nuevo, notemos que

$$T_{\ell(n)} = T_1 + \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} (T_{k+1} - T_k).$$

Ya habíamos visto que T_1 era finito casi seguramente y como sabemos que $\ell(n) \rightarrow \infty$, concluimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_1}{\ell(n)} = 0 \text{ casi seguramente.}$$

Por otro lado, las variables aleatorias $T_{k+1} - T_k$ son independientes e idénticamente distribuidas por lo que por la ley fuerte de los grandes números, tenemos que casi seguramente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T_{\ell(n)}}{\ell(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ell(n)} \sum_{k=1}^{\ell(n)-1} (T_{k+1} - T_k) = \mathbb{E}[T_2 - T_1] = \mathbb{E}_j[T_1]$$

donde $\mathbb{E}_j[T_1]$ representa la esperanza condicional a que la cadena comience en el sitio j .

Recordando la definición de $\ell(n)$, deducimos que

$$\frac{T_{\ell(n)}}{\ell(n)} \leq \frac{n}{\ell(n)} < \frac{T_{\ell(n)+1}}{\ell(n)}$$

y por lo tanto con probabilidad 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\ell(n)} = \mathbb{E}_j[T_1]. \quad (3.10)$$

Usando las ecuaciones (3.8), (3.9) y (3.10), sabemos que con probabilidad 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\nu_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1}}{\ell(n-1)} \frac{\ell(n-1)}{n-1} \frac{n-1}{n} = \frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}_j[T_1]}.$$

Sólo falta que probemos que

$$\frac{\mathbb{E}[Y_1]}{\mathbb{E}_j[T_1]} = \mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1]$$

Calculemos $\mathbb{E}[Y_1]$,

$$\mathbb{E}[Y_1] = \mathbb{E} \left[\sum_{k=T_1}^{T_2-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) \right].$$

Por la propiedad de Markov, como $U_{\nu_{T_1}} = j$,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{k=T_1}^{T_2-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) \right] = \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) \right].$$

Reescribiendo,

$$\mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) \right] = \mathbb{E}_j \left[\sum_{x \in \Lambda} \sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) I[U_{\nu_k} = x] \right]$$

y por linealidad,

$$\mathbb{E}_j \left[\sum_{x \in \Lambda} \sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) I[U_{\nu_k} = x] \right] = \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) I[U_{\nu_k} = x] \right].$$

Reescribiendo de nuevo, tenemos que

$$\sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} (\nu_{k+1} - \nu_k) I[U_{\nu_k} = x] \right] = \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\nu_{k+1} - \nu_k) I[U_{\nu_k} = x, k < T_1] \right].$$

Escribimos a la expresión a la derecha del igual como

$$\sum_{x \in \Lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}_j [\nu_{k+1} - \nu_k | U_{\nu_k} = x, k < T_1] P_j(U_{\nu_k} = x, k < T_1).$$

Como el evento $\{U_{\nu_k} = x, k < T_1\}$ depende de la trayectoria de la cadena $\{U_{\nu_i}\}$ sólo hasta tiempo k , por propiedad de Markov, esta última expresión la podemos escribir como

$$\sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x [\nu_2 - \nu_1] \sum_{k=1}^{\infty} P_j (U_{\nu_k} = x, k < T_1) = \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x [\nu_2 - \nu_1] \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} I[U_{\nu_k} = x] \right].$$

Llamamos

$$\gamma_x^j = \mathbb{E}_j \left[\sum_{k=1}^{T_1-1} I[U_{\nu_k} = x] \right]$$

que es el número esperado de visitas al sitio x entre visitas al sitio j . En conclusión, casi seguramente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x [\nu_2 - \nu_1] \frac{\gamma_x^j}{\mathbb{E}_j[T_1]} = \sum_{x \in \Lambda} \mathbb{E}_x [\nu_2 - \nu_1] \rho(x) = \mathbb{E}^\rho[\nu_2 - \nu_1].$$

En la anteúltima igualdad se usó la descripción de la medida invariante para una cadena de Markov con espacio de estados finitos como en la demostración de la Proposición 1.

Comencemos ahora con las demostraciones de

$$\nu_2 < \infty \text{ casi seguramente y } \mathbb{E}[\nu_2] < \infty$$

y

$$\tau_{\nu_2} < \infty \text{ casi seguramente y } \mathbb{E}[\tau_{\nu_2}] < \infty.$$

Antes de dar una idea de la demostración, daremos algunas definiciones que nos serán útiles.

Definimos primero,

$$\delta_k = \tau_{k+1} - \tau_k$$

y las σ -álgebras

$$\mathcal{F}(t), \text{ generada por } \{S_j(s) : 1 \leq j \leq J, 0 \leq s \leq t\}$$

y

$$\mathcal{G}_k = \mathcal{F}(\tau_k) \vee \{Y_{j,n}, 1 \leq j \leq J, n \leq k-1\}$$

donde dadas una σ -álgebras \mathcal{F} y un conjunto de variables aleatorias Y_k , notamos $\mathcal{F} \vee \{Y_k\} = \sigma(\mathcal{F} \cup \{Y_k^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k \in \mathbb{N}\})$, es decir, a la menor σ -álgebra que contiene a \mathcal{F} y también a la σ -álgebra generada por $\{Y_k\}$.

Notemos que las variables $Y_{j,k}$ no están incluidas en el conjunto de variables que genera a \mathcal{G}_k . Por lo tanto, \mathcal{G}_k determina τ_k , $X_j(\tau_k-)$ y \tilde{L}_k , pero no los ajustes $A_{j,k}$ ni las posiciones de las partículas a tiempo τ_k .

A la σ -álgebra que sí contiene esa información la llamaremos

$$\mathcal{H}_k := \mathcal{G}_k \vee \{Y_{j,k}, 1 \leq j \leq J\}.$$

A lo largo de las siguientes demostraciones, D_i denotarán constantes positivas independientes de J . Los valores de D_i podrán variar a lo largo de la demostración.

3.3. Tiempo entre dos saltos del agregado

Para usar el criterio de Foster-Lyapunov como queremos, tenemos que acotar una esperanza asociada a una función de Lyapunov. Como función de Lyapunov, usaremos $h : \Lambda^J \rightarrow \mathbb{R}$ donde $h(x_1, \dots, x_J) = \sum_{k=1}^J (x_k)^q - 1$. Ahora tenemos que acotar $\mathbb{E}[h(U_{k+1}) | \mathcal{G}_k] \leq h(U_k) - \varepsilon$. Notemos que U_{k+1} es el vector conformado por las posiciones de las partículas justo antes del $(k+1)$ -ésimo salto del agregado. Sabiendo la posición de esas partículas justo antes del k -ésimo salto, hay dos componentes a analizar para obtener el valor esperado de $h(U_{k+1})$: el reacomodamiento de las partículas a tiempo τ_k y el movimiento de los paseos al azar hasta acomodarse en U_{k+1} . El siguiente lema nos servirá para acotar la primera componente.

Lema 7. Sean $2q \in \{2, 3, \dots\}$ y $p \geq 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2q+p} G(\{n\}) < \infty.$$

Entonces, para todo $\varepsilon > 0$, existe un $J(q, \varepsilon)$ tal que para todo $J \geq J(q, \varepsilon)$ y $k \geq 0$, vale que

$$\mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p | \mathcal{G}_k] \leq \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p.$$

Aclaración: si $K = 0$, interpretamos a $X_j(\tau_0-)$ como $X_j(0)$ y en ese caso, $J(q, \varepsilon)$ también depende de ℓ_1 .

Demostración. Fijemos k y para simplificar la notación, vamos a escribir $\ell_j(\tau_k)$ como ℓ_j . Primero empezaremos condicionando a \mathcal{H}_k y por lo tanto, a partir de ahora y hasta que condicionemos a \mathcal{G}_k , ℓ_j , \tilde{L}_k y L_k están fijos. La demostración consiste entonces en probar que

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq \varepsilon \ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1}.$$

En la demostración usaremos el principio de reflexión probado en el Lema 5: si $x \in \{2, 3, \dots\}$,

$$P(S_j(u) < -x) \leq \frac{1}{2} P\left(\inf_{s \leq u} S_j(s) \leq -x\right).$$

El principio de reflexión implica que para todo $u \geq 1, x_j \in \{1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} P(x_j + S_j(s) > 0 \text{ para algún } 0 \leq s \leq u) &= P\left(\inf_{s \leq u} S_j(s) > -x_j\right) \\ &= 1 - P\left(\inf_{s \leq u} S_j(s) \leq -x_j\right) \\ &\leq 1 - 2P(S_j(u) < -x_j). \end{aligned}$$

Por simetría,

$$1 - 2P(S_j(u) < -x_j) = P(-x_j \leq S_j(u) \leq x_j).$$

Usaremos el teorema central del límite local para ver que,

$$P(-x_j \leq S_j(u) \leq x_j) \leq \min \left\{ 1, \frac{D_1 x_j}{\sqrt{u}} \right\}. \quad (3.11)$$

Ya probamos en el Lema 6 una cota parecida para el caso de las cadenas de Markov a tiempo discreto. Pasemos ahora al teorema del límite central local en el caso del paseo al azar a tiempo continuo.

Queremos probar que existe D_1 constante tal que $P(S(u) = x) \leq \frac{D_1 x}{\sqrt{u}}$ donde S es un paseo aleatorio a tiempo continuo con tasa D que comienza en 0 como los paseos aleatorios que determinan las trayectorias de nuestras partículas en el problema actual.

Recordemos que podemos pensar los paseos al azar a tiempo continuo como un proceso de Poisson que indica los tiempos en los que el paseo se mueve más una matriz de probabilidades que indica a dónde se mueve la partícula cuando suena el proceso de Poisson.

Sea $u > 1$ y $x \geq 1$. Llamamos N al proceso de Poisson y

$$T_u = \inf\{t \leq u : N(t) = N(u)\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} P(S(u) = x) &= \mathbb{E}[P(S(u) = x|N)] \\ &= \mathbb{E}[I[T_u > 1]P(S(u) = x|N)] \\ &\quad + \mathbb{E}[I[T_u \leq 1]P(S(u) = x|N)]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Acotamos $P(S(u) = x|N) \leq 1$. Notemos además, que como N tiene toda la información de los tiempos de salto del agregado, el paseo condicionado a N es análogo a un paseo aleatorio a tiempo discreto para el que hemos calculado las cotas. Luego,

$$P(S(u) = x|N) = P(S(T_u) = x|N) \leq \frac{3}{\sqrt{T_u}}.$$

Entonces, de (3.12) se tiene que

$$P(S(u) = x) \leq \mathbb{E} \left[I[T_u > 1] \frac{3}{\sqrt{T_u}} \right] + P(T_u \leq 1). \quad (3.13)$$

Calculemos primero $P(T_u \leq 1)$. Llamaremos $N(a, b] := N(b) - N(a)$. Notemos ahora que x no es 0 y el paseo aleatorio empieza en 0, por lo que el paseo se tuvo que haber movido antes de u lo que significa que el proceso de Poisson tiene una marca antes de u . Luego,

$$P(T_u \leq 1) = P(N(1) \geq 1) \cdot P(N(1, u] = 0) \leq e^{-(u-1)}. \quad (3.14)$$

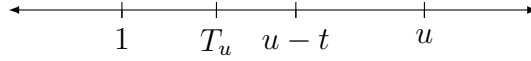


Figura 3.2: Graficamos la situación

Calculemos ahora el otro término. Condicionando, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[I[T_u > 1] \frac{3}{\sqrt{T_u}} \right] \\ = \mathbb{E} \left[\frac{3}{\sqrt{T_u}} \middle| T_u > 1 \right] P(T_u > 1) + \mathbb{E} \left[I[T_u > 1] \frac{3}{\sqrt{T_u}} \middle| T_u \leq 1 \right] P(T_u \leq 1). \end{aligned}$$

Es evidente que el segundo término del lado derecho de la igualdad es 0 por lo que nos alcanza con acotar el primero. De hecho, como $P(T_u > 1) \leq 1$, nos basta con acotar $\mathbb{E} \left[\frac{3}{\sqrt{T_u}} \middle| T_u > 1 \right]$. Para eso necesitamos calcular la distribución de $T_u | T_u > 1$.

Si $u - t > 1$, como en la figura 3.2, entonces

$$\begin{aligned} P(u - T_u > t | T_u > 1) &= \frac{P(u - T_u > t, T_u > 1)}{P(T_u > 1)} \\ &= \frac{P(u - T_u > t, N(1, u - t] \geq 1, T_u > 1)}{P(T_u > 1)} \\ &\quad + \frac{P(u - T_u > t, N(1, u - t] = 0, T_u > 1)}{P(T_u > 1)}. \end{aligned}$$

Notemos que si no hay marcas del proceso de Poisson entre 1 y $u - t$ pero $T_u > 1$, entonces hay una marca del proceso de Poisson entre $u - t$ y u . En esas circunstancias, $u - T_u \leq t$ por lo que

$$P(u - T_u > t, N(1, u - t] = 0, T_u > 1) = 0.$$

Usando probabilidad total, tenemos que

$$P(u - T_u > t | T_u > 1) = P(u - T_u > t | N(1, u - t] \geq 1) P(N(1, u - t] \geq 1 | T_u > 1).$$

Recordemos que $T_u > 1$ si y solo si $N(1, u] \geq 1$. Luego, $P(N(1, u - t] \geq 1 | T_u > 1)$ es la probabilidad de que, sabiendo que el proceso de Poisson tiene una marca entre 1 y u , haya una marca entre los tiempos 1 y $u - t$. Sabemos que esa probabilidad es uniforme en el intervalo $(1, u)$ por lo que

$$P(N(1, u - t] \geq 1 | T_u > 1) = \frac{u - t - 1}{u - 1}.$$

Por otro lado,

$$P(u - T_u > t | N(1, u - t] \geq 1) = P(N(u - t, u] = 0) = e^{-t}.$$

En conclusión,

$$P(u - T_u > t | T_u > 1) = e^{-t} \frac{u - t - 1}{u - 1}.$$

Reemplazamos $u - t = s$, entonces

$$P(T_u < s | T_u > 1) = e^{-(u-s)} \frac{s - 1}{u - 1}.$$

Habíamos dicho que $u - t > 1$, por lo que $0 < t < u + 1$. Reemplazando en s , tenemos que $1 < s < u$. Derivando,

$$f_{T_u | T_u > 1}(s) = \frac{s}{u - 1} e^{-(u-s)}.$$

Volviendo a nuestro problema,

$$\mathbb{E} \left[\frac{3}{\sqrt{T_u}} \middle| T_u > 1 \right] = \int_1^u \frac{3}{\sqrt{s}} \frac{s}{u - 1} e^{-(u-s)} ds = \frac{3e^{-u}}{u - 1} \int_1^u e^s \sqrt{s} ds.$$

Nos gustaría ver que $\int_1^u e^s \sqrt{s} ds \leq e^u \sqrt{u}$ pues así nos quedaría algo de orden $1/\sqrt{u}$. Pero llamando

$$f(u) = \int_1^u e^s \sqrt{s} ds - e^u \sqrt{u},$$

se tiene que

$$f'(u) = e^u \sqrt{u} - e^u \sqrt{u} - \frac{1}{2} \frac{e^u}{\sqrt{u}} \leq 0.$$

Por lo tanto, f es decreciente y $f(1) = -e < 0$. Luego, $f(u) \leq 0$ para todo $u > 1$ o equivalentemente

$$\int_1^u e^s \sqrt{s} ds \leq e^u \sqrt{u} \quad \text{y} \quad \mathbb{E} \left[\frac{3}{\sqrt{T_u}} \middle| T_u > 1 \right] \leq \frac{3\sqrt{u}}{u - 1} \quad (3.15)$$

para todo $u > 1$.

Entonces, juntando (3.13), (3.14) y (3.15) obtenemos que para todo $x \geq 1$, $u > 1$,

$$P(S(u) = x) \leq e^{-(u-1)} + \frac{3\sqrt{u}}{u - 1}.$$

Querriamos que $e^{-(u-1)} + \frac{3\sqrt{u}}{u-1} \leq \frac{D_1}{\sqrt{u}}$ con D_1 constante independiente de x y de u pero notemos que si u está cerca del 1, la expresión de la izquierda del menor se hace muy grande. De todas formas, eso no es un problema mayor pues si $u \geq 2$, podemos ver que existe una constante D_1 tal que

$$e^{-(u-1)} + \frac{3\sqrt{u}}{u-1} \cdot \sqrt{u} = \sqrt{u} e^{-(u-1)} + \frac{3u}{u-1} \leq D - 1.$$

Tomando $D_1 \geq \sqrt{2}$, si $1 \leq u < 2$,

$$\frac{D_1}{\sqrt{u}} \geq \frac{D_1}{\sqrt{2}} \geq 1 \geq P(S(u) = x).$$

Por lo tanto,

$$P(S(u) = x) \leq \frac{D_1}{\sqrt{u}}$$

para todo $u, x \geq 1$ como queríamos.

En conclusión, hemos probado que

$$P(-x_j \leq S_j(u) \leq x_j) \leq \min \left\{ 1, \frac{D_1 x_j}{\sqrt{u}} \right\}.$$

Volviendo al problema original, estamos queriendo calcular la esperanza de δ_k^q por lo que necesitamos acotar la $P(\delta_k > u)$. Notemos que $\delta_k > u$ sucede si y solo si ninguna partícula toca el cero entre los tiempos τ_k y $\tau_k + u$, es decir, si $X_j(t) = X_j(\tau_k) + [S_j(t) - S_j(\tau_k)] > 0$ para todo $\tau_k \leq t \leq \tau_k + u$ y $1 \leq j \leq J$. Luego,

$$P(\delta_k > u | \mathcal{H}_k) \leq \prod_{j=1}^J \left[\min \left\{ 1, \frac{D_1 \ell_j}{\sqrt{u}} \right\} \right]. \quad (3.16)$$

Fijamos $\ell_0 = 0$ y $\ell_1 \dots \ell_0 = 1$ y suponemos que $J \geq 8q + 2 \geq 10$. Luego, por (3.11) vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &= q \int_0^\infty u^{q-1} P(\delta_k > u | \mathcal{H}_K) du \\ &\leq q \int_0^\infty u^{q-1} \prod_{j=1}^J \left[\min \left\{ 1, \frac{D_1 \ell_j}{\sqrt{u}} \right\} \right] du \\ &\leq q \sum_{0 \leq j < 2q} \int_{[D_1 \ell_j]^2}^{[D_1 \ell_{j+1}]^2} u^{q-1} \prod_{i=1}^j \frac{D_1 \ell_i}{\sqrt{u}} du \\ &\quad + q \int_{[D_1 \ell_{2q}]^2}^{[D_1 \ell_{2q+1}]^2} u^{q-1} \prod_{i=1}^{2q} \frac{D_1 \ell_i}{\sqrt{u}} du \\ &\quad + q \int_{[D_1 \ell_{2q+1}]^2}^\infty u^{q-1} \prod_{i=1}^{2q+1} \frac{D_1 \ell_i}{\sqrt{u}} du \\ &= q \sum_{0 \leq j < 2q} \ell_1 \dots \ell_j D_1^j \int_{[D_1 \ell_j]^2}^{[D_1 \ell_{j+1}]^2} u^{q-1-j/2} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q} D_1^{2q} \int_{[D_1 \ell_{2q}]^2}^{[D_1 \ell_{2q+1}]^2} u^{q-1-(2q)/2} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q+1} D_1^{2q+1} \int_{[D_1 \ell_{2q+1}]^2}^\infty u^{q-1-(2q+1)/2} du. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Resolviendo las integrales, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq q \sum_{0 \leq j < 2q} \ell_1 \dots \ell_j D_1^j \left([D_1 \ell_{j+1}]^{2q-j} - [D_1 \ell_j]^{2q-j} \right) [q - j/2]^{-1} \\
&\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q} D_1^{2q} 2 \log \left(\frac{\ell_{2q+1}}{\ell_{2q}} \right) \\
&\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q+1} D_1^{2q+1} 2 [D_1 \ell_{2q+1}]^{-1} \\
&\leq D_2 \sum_{0 \leq j < 2q} \ell_1 \dots \ell_j \ell_{j+1}^{2q-j} \\
&\quad + D_2 \ell_1 \dots \ell_{2q} \log \left(\frac{\ell_{2q+1}}{\ell_{2q}} \right) \\
&\quad + D_2 \ell_1 \dots \ell_{2q}
\end{aligned}$$

donde D_2 no depende de J pues si $j < 2q$, entonces $[q - j/2]^{-1} \leq 1/2$. Como $\ell_1 \leq \dots \leq \ell_J$, tenemos que

$$\ell_1 \dots \ell_j \ell_{j+1}^{2q-j} \leq \ell_1 \dots \ell_{2q} \text{ para toda } 0 \leq j < 2q$$

y además,

$$\ell_{2q+1}(J - 2q) \leq \sum_{i=2q+1}^J \ell_i \leq L_k$$

por lo que, si $J \geq 4q$,

$$\ell_{2q+1} \leq L_k / (J - 2q) \leq 2L_k / J.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq D_3 \ell_1 \dots \ell_{2q} \left[1 + \log \left(\frac{\ell_{2q+1}}{\ell_{2q}} \right) \right] \\
&\leq D_3 \ell_1 \dots \ell_{2q-1} \frac{L_k}{J} \left[\frac{J \ell_{2q}}{L_k} + \frac{J \ell_{2q}}{L_k} \log \left(\frac{2L_k}{J \ell_{2q}} \right) \right] \\
&\leq D_3 \ell_1 \ell_{2q}^{2q-2} \frac{L_k}{J} \left[\frac{J \ell_{2q}}{L_k} + \frac{J \ell_{2q}}{L_k} \log \left(\frac{2L_k}{J \ell_{2q}} \right) \right]. \tag{3.18}
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} D_3 \lambda^{2q-2} [\lambda + \lambda \log(2/\lambda)] = 0.$$

Por lo tanto, existe $0 < \eta = \eta(\varepsilon)$ tal que

$$D_3 \lambda^{2q-2} [\lambda + \lambda \log(2/\lambda)] \leq \varepsilon \text{ para todo } 0 \leq \lambda \leq \eta.$$

Para que el logaritmo resulte bien definido, pedimos además que $\eta < 2/e$.

Definamos el evento

$$\mathcal{A}_k = \left\{ \ell_{2q} \leq \frac{\eta L_k}{J} \right\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_k \in \mathcal{H}_k$ y que gracias a la ecuación (3.18),

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq \varepsilon \ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1} \text{ en } \mathcal{A}_k$$

como buscábamos.

Para ver que esa cota también vale fuera de \mathcal{A}_k necesitamos hacer las desigualdades de (3.17) más finas.

Primero, notemos que si $j \leq J/2$, y teniendo en cuenta nuevamente que ℓ_j es creciente en j , en \mathcal{A}_k^c se cumple que

$$\frac{\eta}{2} \ell_j \leq \frac{\eta}{J} (J - j + 1) \ell_j \leq \frac{\eta L_k}{J} \leq \ell_{2q}. \quad (3.19)$$

Luego, si fijamos $D_4 = \max \left\{ 1, \frac{2}{\eta} \right\}$, en \mathcal{A}_k^c ,

$$\ell_j \leq D_4 \ell_{2q},$$

para todo $1 \leq j \leq J/2$. Por lo tanto, dado $x > 0$,

$$P(S_j(t) > -\ell_j \text{ para todo } t \leq x) \leq P_j(S(x) > -D_4 \ell_{2q}),$$

para todo $1 \leq j \leq J$.

Notemos que

$$P(S_j(t_0) > -x) < 1 \text{ para todo } x > 0, t_0 > 0, 1 \leq j \leq J$$

independientemente de j . Luego, dado $\zeta > 0$, existe $f(\zeta) = f(\zeta, \varepsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} P(S_j(t) > -\ell_j \text{ para todo } t \leq [\zeta D_1 \ell_{2q}]^2) &\leq P(S([\zeta D_1 \ell_{2q}]^2) > -D_4 \ell_{2q}) \\ &\leq 1 - f(\zeta), \end{aligned}$$

para todo $1 \leq j \leq J$. Luego, por lo probado anteriormente con el teorema de reflexión junto con lo que acabamos de probar, tenemos que

$$P(\ell_j + S_j(s) > 0 \text{ para } s \leq u) = \min \left\{ \frac{D_1 \ell_j}{\sqrt{u}}, 1 - f(\zeta) \right\}.$$

Por ahora ζ es un número positivo fijo a determinar.

Si $0 < \zeta \leq 1$ y ℓ_{2q-1}, ℓ_{2q} son tales que $\zeta \ell_{2q} \geq \ell_{2q-1}$, entonces rehaciendo la desigualdad en (3.17) y recordando que $J \geq 8q + 2$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq q \sum_{0 \leq j \leq 2q-2} D_1^j \ell_1 \dots \ell_j \left([D_1 \ell_{j+1}]^{2q-j} - [D_1 \ell_j]^{2q-j} \right) [q - j/2]^{-1} \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q-1} D_1^{2q-1} \int_{[D_1 \ell_{2q-1}]^2}^{[\zeta D_1 \ell_{2q}]^2} u^{q-1-(2q-1)/2} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q-1} D_1^{2q-1} \int_{[\zeta D_1 \ell_{2q}]^2}^{[D_1 D_4 \ell_{2q}]^2} u^{q-1-(2q-1)/2} [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q+1} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{\lfloor J/2 \rfloor} D_1^{\lfloor J/2 \rfloor} \int_{[D_1 D_4 \ell_{2q}]^2}^{\infty} u^{q-1-\lfloor J/2 \rfloor/2} du. \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales, acotando como antes y usando en el último término que $\ell_j \leq D_4 \ell_{2q}$ cuando $\lfloor J/2 \rfloor \geq j \geq 2q$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq D_5 \ell_1 \dots \ell_{2q-2} \ell_{2q-1}^2 \\ &\quad + D_5 \zeta \ell_1 \dots \ell_{2q} \\ &\quad + D_5 \ell_1 \dots \ell_{2q} [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q + 1} \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q-1} [D_4 \ell_{2q}]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q + 1} D_1^{\lfloor J/2 \rfloor} \int_{[D_1 D_4 \ell_{2q}]^2}^{\infty} u^{q-1 - \lfloor J/2 \rfloor / 2} du \\ &\leq D_5 \ell_1 \dots \ell_{2q-2} \ell_{2q-1}^2 + D_5 \zeta \ell_1 \dots \ell_{2q} + D_5 \ell_1 \dots \ell_{2q} [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q + 1} \\ &\quad + q D_1^{2q} D_4 \ell_1 \dots \ell_{2q} [\lfloor J/2 \rfloor / 2 - q]^{-1}. \end{aligned}$$

Finalmente, usando que $\ell_{2q-1} \leq \zeta \ell_{2q}$ en el primer término de la última desigualdad, tenemos que

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq D_6 \ell_1 \dots \ell_{2q} \left[\zeta + [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q + 1} + J^{-1} \right]. \quad (3.20)$$

La constante D_6 depende de q , de η y de ε pero no de ζ o J . Sin pérdida de generalidad, tomamos $\varepsilon \leq 1$ y $D_6 \geq 1$.

Ahora sí, sea

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{2q-1} D_6} \leq 1.$$

Como $1 - f(\zeta) < 1$, podemos tomar J lo suficientemente grande como para que

$$[1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q + 1} \leq \zeta$$

y $J^{-1} \leq \zeta$. Luego, acotando (3.20) nos queda

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq D_6 \ell_1 \dots \ell_{2q} 3\zeta.$$

y usando (3.19), nos queda

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq D_6 \ell_1 \left(\frac{2L_k}{J} \right)^{2q-1} 3\zeta \leq \varepsilon \ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1}$$

como buscábamos. Recordemos que estas desigualdades las obtuvimos en el evento $\mathcal{A}_k^c \cap \{\ell_{2q-1} \leq \zeta \ell_{2q}\}$. Aún, nos falta probar el resultado en $\mathcal{A}_k^c \cap \{\ell_{2q-1} > \zeta \ell_{2q}\}$.

Volvemos entonces a reescribir las integrales (3.17). En el caso $\ell_{2q-1} > \zeta \ell_{2q}$, sea

$$j_0 = \max\{j \geq 0 : \ell_j \leq \zeta \ell_{2q}\}.$$

Habíamos fijado $\ell_0 = 0$, por lo que j_0 está bien definido. Como $\ell_{2q} \geq \ell_{2q-1} > \zeta \ell_{2q}$,

vale que $j_0 \leq 2q - 2$ Además, por definición, $\zeta \leq 1 \leq D_4$ por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq q \sum_{0 \leq j \leq J_0 - 1} D_1^j \ell_1 \dots \ell_j \left([D_1 \ell_{j+1}]^{2q-j} - [D_1 \ell_j]^{2q-j} \right) [q - j/2]^{-1} \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{j_0} D_1^{2q-1} \int_{[D_1 \ell_{j_0}]^2}^{[\zeta D_1 \ell_{2q}]^2} u^{q-1-(2q-1)/2} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q-2} D_1^{2q-2} \int_{[\zeta D_1 \ell_{2q}]^2}^{[D_1 D_4 \ell_{2q}]^2} u^{q-1-(2q-2)/2} [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q+2} du \\ &\quad + q \ell_1 \dots \ell_{2q-1} [D_4 \ell_{2q}]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q+1} D_1^{\lfloor J/2 \rfloor} \int_{[D_1 D_4 \ell_{2q}]^2}^{\infty} u^{q-1-\lfloor J/2 \rfloor / 2} du. \end{aligned}$$

Resolviendo las integrales y acotando, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] &\leq 2\zeta \ell_1 \ell_{2q}^{2q-1} \\ &\quad + D_5 \ell_1 \dots \ell_{2q-q} \ell_{2q}^2 [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q+2} \\ &\quad + q D_1^{2q} D_4 \ell_1 \dots \ell_{2q} [\lfloor J/2 \rfloor / 2 - q]^{-1} \\ &\leq D_6 \ell_1 \ell_{2q}^{2q-1} \left[\zeta + [1 - f(\zeta)]^{\lfloor J/2 \rfloor - 2q+1} + J^{-1} \right]. \end{aligned}$$

Igual que antes, existe un $J(q, \varepsilon)$ tal que para todo $J \geq J(q, \varepsilon)$,

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq \varepsilon \ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1}$$

también en $\mathcal{A}_k^c \cap \{\ell_{2q-1} > \zeta \ell_{2q}\}$.

En conclusión, hemos probado que existe un $J(q, \varepsilon)$ tal que si $J \geq J(q, \varepsilon)$, entonces

$$\mathbb{E}[\delta_k^q | \mathcal{H}_k] \leq \varepsilon \ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1}.$$

Para finalizar el teorema, tenemos que probar que eso implica que si $J \geq J(q, \varepsilon)$, entonces

$$\mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p | \mathcal{G}_k] \leq \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p.$$

Sabiendo que $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{H}_k$, empezamos por tomar probabilidad condicional a la expresión obtenida. Haciendo eso, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p | \mathcal{G}_k] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p | \mathcal{H}_k] | \mathcal{G}_k] \\ &\leq \varepsilon \mathbb{E} \left[\ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k \right]. \end{aligned}$$

De ahora en adelante, $k \geq 1$ pues en el caso $k = 0$, vale que $L_0 = \tilde{L}_0 + 1$, $X_j(\tau_0-)^p = X_j(\tau_0)^p$ y puedo tomar $J(q, \varepsilon) \leq \ell_1^{1/(2q-1)}$ y entonces obtener que

$$\ell_1 \left(\frac{L_0}{J} \right)^{2q-1} \leq \left(\frac{L_0 + 1}{J} \right)^{2q-1} = \left(\frac{\tilde{L}_0}{J} \right)^{2q-1}$$

para todo $J \geq J(q, \varepsilon)$ probando así el resultado.

El objetivo es probar que

$$\mathbb{E} \left[\ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k \right] \leq \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k^-)^p.$$

Para eso, recordemos ahora algunas hechos del modelo que nos serán útiles:

$$0 \leq X_j(\tau_k) = X_j(\tau_k^-) - I[j = r(k)] + A_{j,k} \leq X_j(\tau_k^-) + Y_{j,k},$$

$$L_k = \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k) = \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k^-) - I[j = r(k)] + A_{j,k} = \tilde{L}_k + \sum_{j=1}^J A_{j,k} \leq \tilde{L}_k + \sum_{j=1}^J Y_{j,k}$$

y $\ell_1(\tau_k) \leq Y_{r(k),k}$ pues $\ell_1(\tau_k)$ es la mínima posición de las partículas a tiempo τ_k y $Y_{r(k),k}$ es la posición a la que se redistribuye al partícula absorbida a tiempo τ_k . Ambos $r(k)$ y \tilde{L}_k son \mathcal{G}_k -medibles pero $Y_{r(k),k}$ es independiente de \mathcal{G}_k , por lo tanto también lo es de \tilde{L}_k y además, tiene distribución G . Por último, si $j \neq r(k)$, las variables $Y_{j,k}$ y $Y_{r(k),k}$ son independientes. Luego,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ell_1 \left(\frac{L_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k \right] \\ \leq \mathbb{E} \left[Y_{r(k),k} \left(\tilde{L}_k + \sum_{j=1}^J Y_{j,k} \right)^{2q-1} (X_j(\tau_k^-) + Y_{j,k})^p \middle| \mathcal{G}_k \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A continuación usaremos un caso particular de la desigualdad de Hölder. Si $a_j \geq 0$, $p \geq 1$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\sum_{j=1}^n a_j \leq \left(\sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^n 1^q \right)^{1/q} = \left(\sum_{j=1}^n a_j^p \right)^{1/p} n^{1/q}.$$

Entonces,

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j \right)^p \leq n^{p/q} \sum_{j=1}^n a_j^p = n^{p-1} \sum_{j=1}^n a_j^p.$$

En nuestro caso lo usaremos con $p = 2q - 1$ y en el primer caso $n = 2$ y en el segundo, $n = J$.

$$\begin{aligned} \left(\tilde{L}_k + \sum_{j=1}^J Y_{j,k} \right)^{2q-1} &\leq 2^{2q-2} \left(\tilde{L}_k^{2q-1} + \left[\sum_{j=1}^J Y_{j,k} \right]^{2q-1} \right) \\ &\leq 2^{2q-2} \tilde{L}_k^{2q-1} + (2J)^{2q-2} \sum_{j=1}^J Y_{j,k}^{2q-1}. \end{aligned}$$

Ahora, usaremos la siguiente desigualdad: sean a y b no negativos y $p \geq 0$. Entonces, $a + b \leq 2 \max\{a, b\}$ por lo que

$$(a + b)^p \leq 2^p \max\{a, b\}^p \leq 2^p a^p + 2^p b^p.$$

Usando eso, resulta que

$$(X_j(\tau_k-) + Y_{j,k})^p \leq 2^p X_j(\tau_k-)^p + 2^p Y_{j,k}^p.$$

Recordemos que μ_k es el k -ésimo momento de G . Sean $1 \leq \ell, m \leq J$ y $a, b \geq 0$. Por la desigualdad de Hölder, tomando $p = (a + b)/a$ y $q = (a + b)/b$,

$$\mathbb{E}[Y_{\ell,k}^a Y_{m,k}^b] \leq \mathbb{E}[Y_{\ell,k}^{a+b}]^{a/(a+b)} \mathbb{E}[Y_{m,k}^{a+b}]^{b/(a+b)}.$$

Como las variables $Y_{j,k}$ son idénticamente distribuidas, la última expresión es igual a $\mathbb{E}[Y_{\ell,k}^{a+b}] = \mu_{a+b}$.

Luego, podemos acotar la expresión a la derecha en (3.21) y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\ell_1 L_k^{2q-1} X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k \right] &\leq 2^{2q+p-2} \tilde{L}_k^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p \mathbb{E}[Y_{r(k),k}] \\ &\quad + 2^{2q+p-2} \tilde{L}_k^{2q-1} \mathbb{E}[Y_{r(k),k} Y_{j,k}^p] \\ &\quad + 2^{2q+p-2} J^{2q-2} X_j(\tau_k-)^p \sum_{\ell=1}^J \mathbb{E}[Y_{r(k),k} Y_{\ell,k}^{2q-1}] \\ &\quad + 2^{2q+p-2} J^{2q-2} \sum_{\ell=1}^J \mathbb{E}[Y_{r(k),k} Y_{\ell,k}^{2q-1} Y_{j,k}^p] \\ &\leq 2^{2q+p-2} \mu_1 \tilde{L}_k^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p + 2^{2q+p-2} \mu_{p+1} \tilde{L}_k^{2q-1} \\ &\quad + 2^{2q+p-2} J^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p \mu_{2q} + 2^{2q+p-2} J^{2q-1} \mu_{2q+p}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k] &\leq \varepsilon 2^{2q+p-2} \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} (\mu_1 X_j(\tau_k-)^p + \mu_{p+1}) \\ &\quad + \varepsilon 2^{2q+p-2} (X_j(\tau_k-)^p \mu_{2q} + \mu_{2q+p}). \end{aligned}$$

Por lo tanto, dado que todos los términos son positivos, es evidente que existe $J(q, \varepsilon)$ tal que para toda $J \geq J(q, \varepsilon)$,

$$\mathbb{E}[\delta_k^q X_j(\tau_k)^p \middle| \mathcal{G}_k] \leq D_7 \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} X_j(\tau_k-)^p$$

donde D_7 es un aconstante independiente de J . El lema se concluye reemplazando ε por ε/D_7 . \square

3.4. Recurrencia positiva

A continuación probaremos en un lema que el proceso $\{X(\tau_k-)\}_{k \geq 0}$ es recurrente positivo y algunas cotas que nos servirán para probar el teorema enunciado al principio. En este lema usaremos el criterio de Foster-Lyapunov y para eso necesitamos definir ciertas funciones que servirán de funciones de Lyapunov.

$$\mathcal{Q}_q(t) = \sum_{j=1}^J X_j(t)^q, \quad \tilde{\mathcal{Q}}_{q,0} = \sum_{j=1}^J X_j(0)^q$$

y para $k \geq 1$,

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} = \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q.$$

La suma $\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}$ es un análogo de \tilde{L}_k sólo que en vez de sumar las posiciones de las partículas justo antes de que se produzca el k -ésimo salto (siempre sin contar la posición de la partícula que genera el salto), sumamos las mismas elevadas a la q .

Lema 8. Sean $X_j(0) \geq 1$ números naturales fijos no aleatorios, $q \in \{2, 3, \dots\}$ y $k \geq 1$. Supongamos que $\mu_q := \sum_{n=1}^{\infty} n^q G(\{n\}) < \infty$. Entonces existe un entero $J(q)$ y para cada $J \geq J(q)$, existe un $\alpha(q) = \alpha(q, J)$ tal que para todo $J \geq J(q)$ y $\alpha \geq \alpha(q, J)$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} \middle| \mathcal{G}_k \right] &\leq \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} - q2^{-q-1} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} \\ &\leq \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} - 1 \end{aligned} \quad (3.22)$$

en el evento $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$. Como consecuencia, $\nu_1(\alpha) < \infty$ casi seguramente y el proceso $\{X(\tau_k-)\}_{k \geq 0}$ es recurrente. Además, existe una constante C_1 finita tal que para $J \geq J(q)$ y $k \geq 0$,

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2(\alpha) > k] \right] \leq C_1$$

donde la constante $C_1 = C_1(J, q, \alpha, X(0))$.

Demostración. Primero observemos que todos los τ_m son finitos casi seguramente. Eso implica que el agregado va a crecer siempre. Haremos inducción en m . Como $\tau_0 = 0$, el caso base está probado. Para el paso inductivo, recordemos que en (3.16) probamos que

$$P(\delta_m > u) | \mathcal{H}_m \leq \prod_{j=1}^J \left[\min \left\{ 1, \frac{D_1 \ell_j}{\sqrt{u}} \right\} \right].$$

Si τ_m es finito casi seguramente, entonces $\ell_j(\tau_m) < \infty$ para toda $1 \leq j \leq J$ por lo que

$$P(\delta_m > u) | \mathcal{H}_m \leq \frac{K^J}{u^{J/2}}$$

Por Borel-Cantelli, eso implica que existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_m \leq N$ c.s.. Notemos que

$$\tau_{m+1} = \sum_{k=1}^m \delta_k.$$

Luego, τ_{m+1} es finito.

A continuación usaremos la siguiente desigualdad. Para $\nu \geq 2$, existe una constante $D_8 = D_8(\nu, D)$ tal que en $\{\tau_k < \infty\}$,

$$\mathbb{E}[|S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^\nu | \mathcal{H}_k] \leq D_8 \left(1 + \mathbb{E}[\delta_k^{\nu/2} | \mathcal{H}_k]\right). \quad (3.23)$$

Para probar esta desigualdad definimos las variables

$$Z(s, n) = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s+1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) - S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right).$$

Luego,

$$\sum_{s=0}^{Nn} Z(s, n) = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + N + \frac{1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) - S_j(\tau_k)$$

Por continuidad a derecha,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + N + \frac{1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + N, \tau_{k+1} \right\} \right).$$

Como $\tau_k < \infty$ existe un N_0 tal que $\min \{\tau_k + N_0, \tau_{k+1}\} = \tau_{k+1}$. Entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{Nn} Z(s, n) = S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k). \quad (3.24)$$

Más aún, para n fijo, el proceso $Z(s, n)$, $s \geq 0$, es una sucesión de diferencias de martingalas con respecto a la σ -álgebra

$$\tilde{\mathcal{F}}_s := \mathcal{F} \left(\min \left\{ \left(\tau_k + \frac{s+1}{n} \right), \tau_{k+1} \right\} \right) \vee \mathcal{H}_k.$$

Es claro que $Z(s, n)$ tiene esperanza finita pues S_j es un paseo aleatorios simétrico que comienza en 0 y la esperanza de la posición de un paseo así hasta tiempos finitos (aleatorios) es 0. Además,

$$\mathbb{E}[Z(s, n) | \tilde{\mathcal{F}}_{s-1}] = \mathbb{E} \left[S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s+1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{s-1} \right] - S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right)$$

Llamemos $a_s = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right)$ y X_m a las variables Bernoulli que determinan el paseo aleatorio. Entonces,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s+1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{s-1} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) + \sum_{m=a_s+1}^{a_{s+1}} X_m \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{s-1} \right] \\ &= S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) \end{aligned}$$

pues esa expresión a la derecha del igual queda determinada por $\tilde{\mathcal{F}}_{s-1}$. En la última igualdad usamos la ecuación de Wald (en [3] pág. 158) para calcular la esperanza de sumas de variables aleatorias donde la cantidad de términos a sumar también es aleatoria. Pudimos usar la ecuación de Wald pues ya probamos que τ_k es finito casi seguramente. Luego, $\mathbb{E}[Z(s, n)|\tilde{\mathcal{F}}_{s-1}] = 0$ y el proceso $Z(s, n)$ resulta una sucesión de diferencias de martingalas. Además,

$$\mathbb{E} \left[\sum_{s=0}^m Z(s, n) \middle| \tilde{\mathcal{F}}_{m-1} \right] = S_j \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{m}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right) - S_j(\tau_k) = \sum_{s=0}^{m-1} Z(s, n)$$

por lo que $\sum_{s=0}^m Z(s, n)$ es una $\tilde{\mathcal{F}}$ -martingala. Luego, estamos en condiciones de usar el Lema de Fatou y la desigualdad de Burkholder-Davis (que se puede encontrar en [4] Teorema A.2.2). Usando 3.24,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^\nu | \mathcal{H}_k] &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{s=0}^{Nn} Z(s, n) \right|^\nu \middle| \mathcal{H}_k \right] \\ &\leq D_8(\nu) \liminf_{N \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left| \sum_{s=0}^{Nn} Z^2(s, n) \right|^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right]. \end{aligned}$$

Notemos que $|Z(s, n)|$ es la diferencia entre las posiciones de la j -ésima partícula entre los tiempos $\tau_k + s/n$ y $\tau_k + (s+1)/n$. Luego, no cuenta exactamente los saltos que realiza el paseo entre esos tiempos porque el paseo puede tranquilamente avanzar y retroceder a la misma posición entre esos tiempos, pero vale que

$$\begin{aligned} |Z(s, n)| &\leq \text{cantidad de saltos de } S_j \\ &\text{en } \left(\min \left\{ \tau_k + \frac{s}{n}, \tau_{k+1} \right\}, \min \left\{ \tau_k + \frac{s+1}{n}, \tau_{k+1} \right\} \right). \end{aligned}$$

Usando la desigualdad entre la normas euclídea y la norma 1 y lo recién observado, tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{Nn} Z^2(s, n) &\leq \left[\sum_{s=0}^{Nn} |Z(s, n)| \right]^2 \\ &\leq [\text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \min\{\tau_k + N + 1/n, \tau_{k+1}\})]^2 \\ &\leq [\text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \min\{\tau_k + N + 1, \tau_{k+1}\})]^2 \\ &\leq [\text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \tau_k + N + 1)]^2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Además, si hacemos tender a n al infinito, los intervalos $(\tau_k + \frac{s}{n}, \tau_k + \frac{s+1}{n})$ se hacen muy pequeños por lo que $Z(s, n)$ va a tender a captar exactamente la cantidad de saltos que se producen en ese intervalo. De hecho, como los procesos de Poisson en un intervalo son variables aleatorias Poisson cuyo parámetro es proporcional a la longitud del intervalo, la cantidad de saltos del paseo aleatorio

entre τ_k y τ_{k+1} es finita casi seguramente. Por lo tanto, puedo tomar un n_0 tal que $1/n_0$ sea menor que la distancia entre cualesquiera dos de esos saltos. En esas circunstancias, si $n \geq n_0$, y s es tal que $\tau_k + (s+1)/n \leq \tau_{k+1}$, resulta que

$$Z(s, n) = \begin{cases} 1 & \text{si en el intervalo } \left(\tau_k + \frac{s}{n}, \tau_k + \frac{s+1}{n}\right) \text{ hay un salto del paseo} \\ 0 & \text{si no hay saltos en ese intervalo.} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{s=0}^{Nn} Z^2(s, n) = \text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \min\{\tau_k + N, \tau_{k+1}\}].$$

Notemos que, condicionando a \mathcal{H}_k , el número de saltos en la expresión a la derecha de (3.25) es una variable Poisson de media $D(N+1)$. Como las variables aleatorias Poisson tienen todos sus momentos finitos, por el teorema de convergencia dominada, vale que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left\{ \left| \sum_{s=0}^{Nn} Z^2(s, n) \right|^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right\} &= \mathbb{E} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{s=0}^{Nn} Z^2(s, n) \right|^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right\} \\ &= \mathbb{E} \left[(\text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \min\{\tau_k + N, \tau_{k+1}\}])^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[(\text{cantidad de saltos de } S_j \text{ en } (\tau_k, \tau_k + \min\{N, \lceil \tau_{k+1} - \tau_k \rceil\}))^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right]. \end{aligned}$$

Por la propiedad de la independencia de los incrementos de los procesos de Poisson, condicionando a \mathcal{H}_k , los saltos de S_j forman un proceso de Poisson de parámetro D en (τ_k, ∞) . Usando otra desigualdad de Burkholder (que se encuentra en [4] Teorema 1.2.5) acotamos el lado derecho de la última expresión por

$$D_9 \mathbb{E} \left[(\min\{N, \lceil \tau_{k+1} - \tau_k \rceil\})^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right] \leq D_9 2^{\nu-1} (1 + \mathbb{E} \left[(\tau_{k+1} - \tau_k)^{\nu/2} \middle| \mathcal{H}_k \right])$$

donde la última desigualdad sale de notar que

$$(\lceil \tau_{k+1} - \tau_k \rceil)^{\nu/2-1} \leq (1 + \lceil \tau_{k+1} - \tau_k \rceil)^{\nu/2}$$

y usar Hölder en esta última expresión teniendo en cuenta que $2^{\nu/2} \leq 2^{\nu-1}$. Recordando que $\delta = \tau_{k+1} - \tau_k$ y siguiendo la cadena desigualdades que probamos recién obtenemos la desigualdad buscada en (3.23).

Volvamos al problema original de las partículas y el agregado. Fijemos q y α . Antes de empezar con la demostración del lema tenemos que mostrar que la esperanza condicional que se encuentra a la izquierda de la expresión (3.22) está bien definida, es decir, que $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}] = \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q < \infty$. Por cómo definimos el modelo, si $\{\tau_k < \infty\}$,

$$X_j(\tau_{k+1}-) - I[j = r(k+1)] = X_j(\tau_k) + S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k) \quad (3.26)$$

por lo que, usando la fórmula del binomio de Newton,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} &= \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_{k+1}-) - I[j = r(k+1)])^q \\ &= \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k)^q + \sum_{j=1}^J \sum_{u=1}^q \binom{q}{u} X_j(\tau_k)^{q-u} [S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)]^u.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Más aún, también por definición, para $k \geq 1$,

$$X_j(\tau_k) = X_j(\tau_{k-}) - I[j = r(k)] + A_{j,k}.$$

Luego, usando Hölder se obtiene que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J X_j(\tau_k)^q &= \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_{k-}) - I[j = r(k)] + A_{j,k})^q \\ &\leq 2^{q-1} \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_{k-}) - I[j = r(k)])^q + 2^{q-1} \sum_{j=1}^J |A_{j,k}|^q \\ &= 2^{q-1} \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} + 2^{q-1} \sum_{j=1}^J |A_{j,k}|^q.\end{aligned}$$

Por la cota (3.23), sabemos que

$$\mathbb{E}[|S_j(\tau_1) - S_j(\tau_0)|^q] \leq D_8(1 + \mathbb{E}[\delta_1^{q/2}]).$$

En la prueba del Lema 7, se demostró que existe un entero $J_1(q)$ tal que

$$\mathbb{E}[\delta_1^{q/2} | \mathcal{H}_k] \leq \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{2q-1} < \infty$$

por lo que $\mathbb{E}[\delta_1^{q/2}] < \infty$ para todo $J \geq J_1$. Luego, como los $X_j(0)$ no son aleatorios, sabemos por (3.27) que $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,1}]$ es finito para todo $J \geq J_1$. Probaremos que en general $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}]$ es finito, haciendo inducción en k . Usando que por las desigualdades probadas anteriormente, se tiene que

$$\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} \leq 2^{q-1} \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} + 2^{q-1} \sum_{j=1}^J |A_{j,k}|^q + \sum_{j=1}^J \sum_{u=1}^q \binom{q}{u} X_j(\tau_k)^{q-u} [S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)]^u.$$

Además, por Hölder,

$$\mathbb{E}[X_j(\tau_k)^{q-u} (S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k))^u] \leq \mathbb{E}[X_j(\tau_k)^q]^{(q-u)/q} \mathbb{E}[|S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^q]^{u/q}.$$

Por el Lema 7 sabemos que $\mathbb{E}[\delta_k^q]$ es finita y por la cota (3.23) podemos acotar la expresión a la derecha de la última desigualdad por

$$\mathbb{E}[X_j(\tau_k)^q]^{(q-u)/q} D_8(1 + \mathbb{E}[\delta_k^q])^{u/q}$$

que es finito. Luego, por inducción y porque G tiene q -ésimo momento finito, vale que $\mathbb{E}[\tilde{Q}_{q,k+1}]$ es finito.

Ahora sí, comencemos con la prueba del lema propiamente dicho. La propiedad (3.26) que se infiere de las definiciones del proceso, implican que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_j(\tau_{k+1}-) - I[j = r(k+1)] - X_j(\tau_k) | \mathcal{H}_k] &= \mathbb{E}[S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k) | \mathcal{H}_k] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{m=\tau_k+1}^{\tau_{k+1}} Z_m \middle| \mathcal{H}_k\right] = 0 \end{aligned}$$

donde las Z_m son las variables aleatorias de rango $\{-1, 1\}$ que definen el paseo. Luego,

$$\mathbb{E}[qX_j(\tau_k)^{q-1}(S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)) | \mathcal{H}_k] = qX_j(\tau_k)^{q-1}\mathbb{E}[(S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)) | \mathcal{H}_k] = 0$$

pues $qX_j(\tau_k)^{q-1}$ es \mathcal{H}_k -medible. Entonces, usando (3.27),

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{Q}_{q,k+1} | \mathcal{H}_k] &= \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^q + \sum_{u=2}^q \binom{q}{u} X_j(\tau_k)^{q-u} [S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)]^u \middle| \mathcal{H}_k\right] \\ &\leq \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^q + \sum_{u=2}^q \binom{q}{u} X_j(\tau_k)^{q-u} |S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^u \middle| \mathcal{H}_k\right] \end{aligned}$$

En breve usaremos el Lema 7. Por ahora, sea $J \geq J(q, \varepsilon)$ con ε a determinar. Entonces, gracias a (3.23), tenemos que para $q \geq 2$,

$$\sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^{q-u} |S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^u \middle| \mathcal{H}_k\right] \leq D_8 \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k)^{q-u} (1 + \mathbb{E}[\delta_k^{u/2} | \mathcal{H}_k]) \quad (3.28)$$

donde nuevamente usamos que $X_j(\tau_k)$ es \mathcal{H}_k -medible. Recordemos que por definición, $X_j(\tau_k) = X(\tau_k-) - I[j = r(k)] + A_{j,k} \leq X(\tau_k-) + Y_{j,k}$ y usando Hölder como antes tenemos que para todo $q \geq u$,

$$X_j(\tau_k)^{q-u} \leq 2^{q-u} X_j(\tau_k-)^{q-u} + 2^{q-u} Y_{j,k}^{q-u}. \quad (3.29)$$

Como $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{H}_k$, condicionando a \mathcal{G}_k y usando la propiedad de torres de la esperanza condicional en (3.28), resulta

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^{q-u} |S_j(\tau_{k+1}) - S_j(\tau_k)|^u \middle| \mathcal{G}_k\right] \\ \leq D_8 \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^{q-u} \middle| \mathcal{G}_k\right] + D_8 \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^{q-u} \delta_k^{u/2} \middle| \mathcal{G}_k\right]. \end{aligned}$$

Ahora, usando (3.29), el lado derecho de la última ecuación se puede acotar por

$$D_8 \sum_{j=1}^J 2^{q-u} \left(\mathbb{E}\left[X_j(\tau_k-)^{q-u} \middle| \mathcal{G}_k\right] + \mathbb{E}\left[Y_{j,k}^{q-u} \middle| \mathcal{G}_k\right] \right) + D_8 \sum_{j=1}^J \mathbb{E}\left[X_j(\tau_k)^{q-u} \delta_k^{u/2} \middle| \mathcal{G}_k\right].$$

Notemos que $X_j(\tau_k-)$ es \mathcal{G}_k -medible y $Y_{j,k}$ es independiente de \mathcal{G}_k y además tien distribución G cuyos momentos notamos como μ_m . Recordemos también que G tiene q -ésimo momento finito. Además, usando el Lema 7 podemos acotar la última expresión por

$$\begin{aligned} & D_8 \sum_{j=1}^J 2^{q-u} \left(X_j(\tau_k-)^{q-u} + \mu_{q-u} \right) + D_8 \sum_{j=1}^J \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} X_j(\tau_k-)^{q-u} \\ & \leq D_{10} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k-)^{q-u} + D_{10} J \\ & \leq D_{11} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \left[\sum_{j=1}^J X_j(\tau_k-)^{q-u} + J \right]. \end{aligned}$$

Volviendo atrás, recordemos que $X_j(t) \geq 1$ por lo que $\sum_{j=1}^J X_j(\tau_k-)^{q-u} \geq J$. Por otro lado, $X_j(\tau_k-) = X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)]$ para todo $j \neq r(k)$ y $X_{r(k)}(\tau_k-) = 1$. Por lo tanto,

$$J \leq \sum_{j=1}^J X_j(\tau_k-)^{q-u} = \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k} + 1 \leq 2\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k}.$$

Luego,

$$D_{11} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \left[\sum_{j=1}^J X_j(\tau_k-)^{q-u} + J \right] \leq D_{11} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] 4\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] & \leq \mathbb{E} \left[\sum_{j=1}^J X_j(\tau_k)^q \middle| \mathcal{G}_k \right] + \sum_{u=2}^q \binom{q}{u} D_{11} \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] 4\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k} \\ & = \mathbb{E}[\mathcal{Q}_q(\tau_k) | \mathcal{G}_k] + D_{12} \sum_{u=2}^q \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k}. \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de acotar $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k]$ como queríamos. Notemos que

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] = \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} - \mathcal{Q}_q(\tau_k) | \mathcal{G}_k] + \mathbb{E}[\mathcal{Q}_q(\tau_k) - \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} | \mathcal{G}_k] + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}.$$

donde usamos que $\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}$ es \mathcal{G}_k -medible. Básicamente, dividimos la expresión a acotar en tres términos y para concluir el teorema debemos probar que la suma de los dos primeros es menor a -1 . El primer término se relaciona con el movimiento de las partículas desde su posición a tiempo τ_k hasta justo antes del siguiente salto del agregado y hemos utilizado el Lema 7 y las cuentas que hicimos hasta ahora en el Lema 8 para que podamos acotar esa magnitud relacionandola con el tiempo que transcurre entre dos saltos del agregado consecutivos y posteriormente con el promedio de las posiciones de las partículas justo antes del primero de esos saltos.

Notemos que si J es grande, ese promedio será pequeño. El segundo término se relaciona con la diferencia entre las posiciones de las partículas justo antes de que el agregado crezca y justo después, cuando las partículas ya se ajustaron y las partículas absorbidas ya se redistribuyeron. Notemos que en $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$, si J es significativamente más grande que α , alguna partícula tiene que estar lejos del agregado justo antes de que este se agrande. Entonces, esa partícula, al reajustarse, sólo se moverá un lugar a la izquierda pero ese movimiento sumado al hecho de que las partículas absorbidas se redistribuyen con distribución G que tiene colas pequeñas pues tiene muchos momentos finitos hará que el sistema vaya convergiendo a ese espacio de estados finito Λ y por lo tanto se cumpla la cota buscada y gracias al criterio de Lyapunov podamos concluir que la cadena es recurrente.

Ahora intentaremos explicar los detalles de esta idea acotando ambos términos. Usando la cota de $\mathbb{E}[\tilde{Q}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k]$ que probamos recién obtenemos que

$$\mathbb{E}[\tilde{Q}_{q,k+1} - Q_q(\tau_k)|\mathcal{G}_k] \leq D_{12} \sum_{u=2}^q \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \tilde{Q}_{(q-u),k}.$$

Pasemos ahora al segundo término.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Q_q(\tau_k) - \tilde{Q}_{q,k}|\mathcal{G}_k] &= \sum_{j=1}^J \mathbb{E}[X_j(\tau_k)^q - (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q|\mathcal{G}_k] \\ &= \sum_{j=1}^J \mathbb{E}[(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] + A_{j,k})^q - (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q|\mathcal{G}_k]. \end{aligned}$$

Usando ahora el teorema del valor medio para la función x^q tenemos que

$$(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] + A_{j,k})^q - (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q = qA_{j,k}X^*(j, k)^{q-1}$$

donde $X^*(j, k)$ es algún valor entre $X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] + A_{j,k} = X_j(\tau_k)$ y $X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)]$ (que naturalmente es aleatorio pues depende de las posiciones de las partículas que son aleatorias). Luego,

$$\mathbb{E}[Q_q(\tau_k) - \tilde{Q}_{q,k}|\mathcal{G}_k] = q\mathbb{E}[A_{j,k}X^*(j, k)^{q-1}|\mathcal{G}_k].$$

Consideremos ahora los siguientes dos casos:

1. *Caso* $X_j(\tau_k) \geq 2$. En este caso, las partículas no serán absorbidas por el agregado y $A_{j,k} = -1$. Además, $I[j = r(k)] = 0$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)]) &= \frac{1}{2}X_j(\tau_k-) \leq X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] - 1 \\ &= X_j(\tau_k) < X^*(j, k). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$X^*(j, k)^{q-1} > 2^{1-q}(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^{q-1}.$$

En conclusión, usando que $X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)]$ es \mathcal{G}_k -medible, se tiene que

$$q\mathbb{E}[A_{j,k}X^*(j,k)^{q-1}|\mathcal{G}_k] \leq q2^{1-q}(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^{q-1}.$$

2. *Caso* $X_j(\tau_k) = 1$. En este otro caso, la partícula j estaba justo al lado del agregado antes de que éste crezca y por lo tanto fue absorbida y redistribuida. Notemos que la partícula $r(k)$ está en ésta categoría. En particular, se cumple que $0 \leq A_{j,k} \leq Y_{j,k}$ y

$$X^*(j,k) \leq X_j(\tau_k) = Y_{j,k}$$

Luego,

$$A_{j,k}X^*(j,k)^{q-1} \leq Y_{j,k}^q$$

por lo que

$$q\mathbb{E}[A_{j,k}X^*(j,k)^{q-1}|\mathcal{G}_k] \leq q\mathbb{E}[Y_{j,k}^q|\mathcal{G}_k] = q\mu_q.$$

Fijemos ahora el conjunto

$$\tilde{\mathcal{U}}_k = \{1 \leq j \leq J : X_j(\tau_k-) \geq 2\},$$

y entonces usando ambos casos,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^J \mathbb{E}[(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] + A_{j,k})^q - (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^q | \mathcal{G}_k] \\ & \leq q \sum_{j \in \tilde{\mathcal{U}}_k} (-2^{1-q})(X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^{q-1} + q \sum_{j \notin \tilde{\mathcal{U}}_k} \mu_q \\ & \leq -q2^{1-q}\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + q2^{1-q} \sum_{j \notin \tilde{\mathcal{U}}_k} (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^{q-1} + qJ\mu_q. \end{aligned}$$

Como $X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)] \leq 1$ para todo $j \notin \tilde{\mathcal{U}}_k$, tenemos que el lado derecho de la última ecuación lo podemos acotar y resulta

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathcal{Q}_q(\tau_k) - \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} | \mathcal{G}_k] & \leq -q2^{1-q}\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + q2^{1-q}(J - |\tilde{\mathcal{U}}_k|) + qJ\mu_q \\ & \leq -q2^{1-q}\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J. \end{aligned}$$

En conclusión, uniendo las cotas de los dos términos, obtenemos

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] \leq D_{12} \sum_{u=2}^q \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J} \right)^{u-1} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k} - q2^{1-q}\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}. \quad (3.30)$$

En el evento $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$, si $q \geq 2$, usando la desigualdad de Hölder, se verifica,

$$\begin{aligned} \alpha^{q-1} < \tilde{L}_k^{q-1} & = \left[\sum_{j=1}^J (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)]) \right]^{q-1} \\ & \leq J^{q-2} \sum_{j=1}^J (X_j(\tau_k-) - I[j = r(k)])^{q-1} = J^{q-2} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k}. \end{aligned}$$

Luego, puedo tomar $\alpha > J$ tan grande que

$$J < \alpha < \left(\frac{J}{\alpha}\right)^{q-2} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} < q2^{-q} D_{13}^{-1} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k}$$

por lo que puedo volver a acotar la esperanza que queremos estimar obteniendo

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] \leq D_{12} \sum_{u=2}^q \left[1 + \varepsilon \left(\frac{\tilde{L}_k}{J}\right)^{u-1} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k} - q2^{-q} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}$$

en el evento $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$.

La última cota que nos queda probar es que para todo $2 \leq u \leq q$ vale que

$$\left(\frac{\tilde{L}_k}{J}\right)^{u-1} \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-u),k} \leq \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k}. \quad (3.31)$$

Veamos que efectivamente esa cota implica el lema. Supongamos entonces que vale. Luego, en $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] &\leq \left[D_{12} \sum_{u=2}^q \left(\frac{J}{\tilde{L}_k}\right)^{u-1} + D_{12}q\varepsilon - q2^{-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \\ &\leq \left[D_{12} \sum_{u=2}^q \left(\frac{J}{\alpha}\right)^{u-1} + D_{12}q\varepsilon - q2^{-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \\ &\leq \left[D_{12} \frac{J}{\alpha - J} \left[1 - \frac{J^{q-1}}{\alpha^{q-1}} \right] + D_{12}q\varepsilon - q2^{-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}. \end{aligned}$$

donde la última igualdad viene de resolver la suma geométrica.

Tomamos ε tal que

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{D_{12}2^{q+3}}$$

y α tal que

$$D_{12} \frac{J}{\alpha - J} \leq q2^{-q-2}.$$

Recordemos que ya habíamos pedido que α cumpla

$$q2^{-q} \frac{\alpha^{q-1}}{J^{q-2}} \geq D_{13}J.$$

Entonces, en $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$ tenemos,

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} | \mathcal{G}_k] \leq \left[q2^{-q-2} \left[1 - \frac{J^{q-1}}{\alpha^{q-1}} \right] + q2^{-q-3} - q2^{-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}$$

y, usando que

$$\left[1 - \frac{J^{q-1}}{\alpha^{q-1}} \right] \leq \frac{3}{2},$$

resulta que

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k] \leq -q2^{-q-1}\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \leq \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} - 1$$

como queríamos.

Esta última desigualdad implica, gracias al criterio de Foster-Lyapunov que ya hemos probado que la cadena $\{U_k\}$ conformada por el vector de posiciones $\{X_j(\tau_k-)\}_1^J$ es recurrente positiva y por lo tanto, $\nu_1(\alpha)$, que es el tiempo que tarda la cadena en una excursión fuera de $\{\tilde{L}_k \leq \alpha\}$ es finito y, más aún, tiene esperanza finita como buscábamos.

Resta probar ahora, la segunda parte del lema y la desigualdad (3.31). Probemos primero la segunda parte del lema, es decir, que para $J \geq J(q)$ y $k \geq 0$, vale que

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}I[\nu_2(\alpha) > k]] \leq C_1$$

para alguna constante $C_1 = C_1(J, q, \alpha, X(0)) < \infty$. Esta cota nos servirá después para probar que $\mathbb{E}[\tau_{\nu_2}]$ es finito y así concluir el teorema.

Usando (3.30) y (3.31) se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k] &\leq \left[D_{12} \sum_{u=2}^q \left(\frac{J}{\tilde{L}_k} \right)^{u-1} + D_{12}q\varepsilon - q2^{1-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \\ &\leq \left[D_{12} \sum_{u=2}^q \left(\frac{J}{J-1} \right)^{u-1} + D_{12}q\varepsilon - q2^{1-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \\ &\leq \left[D_{12} \sum_{u=2}^q 2^{u-1} + D_{12}q\varepsilon - q2^{1-q} \right] \tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J + \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \end{aligned}$$

donde usamos que $\tilde{L}_k \geq J-1$. Estas desigualdades las obtubimos antes de poner la restricción de que $\{\tilde{L}_k > \alpha\}$ por lo que vale en general. Luego,

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k] - \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} \leq C_2\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} + D_{13}J$$

donde $C_2 = C_2(J, q, \varepsilon)$. Si $\tilde{L}_k \leq \alpha$, entonces, $X_j(\tau_k-) \leq \alpha+1$ para todo $1 \leq j \leq J$ por lo que $\tilde{\mathcal{Q}}_{(q-1),k} \leq J(\alpha+1)^{q-1}$. En particular, si

$$\{\nu_1 = \ell\} = \{\inf\{k \geq 1 : \tilde{L}_k \leq \alpha\} = \ell\} \in \mathcal{G}_\ell,$$

ya sabemos que $\tilde{L}_\ell \leq \alpha$ por lo que

$$\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1}|\mathcal{G}_\ell] - \tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell} \leq C_3 \quad (3.32)$$

para alguna constante $C_3 = C_3(J, q, \varepsilon, \alpha)$. Elijamos ahora $k \geq \ell+1$. Luego, $\mathcal{G}_\ell \subseteq \mathcal{G}_k$ y $\{\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell\} \in \mathcal{G}_k$. Entonces, usando que ya probamos en el Lema 8 que $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k] \leq \tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}$, vale que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}|\mathcal{G}_k]I[\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell]|\mathcal{G}_\ell] &= \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1}I[\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell]|\mathcal{G}_\ell] \\ &\leq \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}I[\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell]|\mathcal{G}_\ell] \leq \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k}I[\nu_2(\alpha) > k-1, \nu_1(\alpha) = \ell]|\mathcal{G}_\ell]. \end{aligned}$$

Iterando esta desigualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell] \middle| \mathcal{G}_\ell \right] &\leq \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1} I[\nu_2(\alpha) > \ell, \nu_1(\alpha) = \ell] \middle| \mathcal{G}_\ell \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1} I[\nu_1(\alpha) = \ell] \middle| \mathcal{G}_\ell \right].\end{aligned}$$

Como $I[\nu_1(\alpha) = \ell] \in \mathcal{G}_\ell$, vale que

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2(\alpha) > k, \nu_1(\alpha) = \ell] \middle| \mathcal{G}_\ell \right] &\leq I[\nu_1(\alpha) = \ell] \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1} \middle| \mathcal{G}_\ell \right] \\ &\leq I[\nu_1(\alpha) = \ell] [\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell} + C_3] \\ &\leq I[\nu_1(\alpha) = \ell] [J(\alpha + 1)^q + C_{13}]\end{aligned}$$

donde las últimas desigualdades se desprenden de las cotas que probamos con anterioridad. Notemos que como ya probamos que en $\{\nu_1 = \ell\} \in \mathcal{G}_\ell$ se cumple que $\mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1} | \mathcal{G}_\ell] - \tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell} \leq C_3$, entonces,

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell+1} I[\nu_2(\alpha) > \ell, \nu_1(\alpha) = \ell] \middle| \mathcal{G}_\ell \right] &\leq [\tilde{\mathcal{Q}}_{q,\ell} + C_3] I[\nu_1 = \ell] \\ &\leq [J(\alpha + 1)^q + C_3] I[\nu_1(\alpha) = \ell]\end{aligned}$$

por lo que esa desigualdad vale para $\ell = 1, 2, \dots, k$. Luego, sumando y tomando esperanza obtenemos

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k \leq \nu_1] \right] \leq [J(\alpha + 1)^q + C_3] P(\nu_1 \leq k).$$

Además, notemos que ne $\{\nu_1 > k\}$ se cumple que $\tilde{L}_k > \alpha$ por lo que multiplicando por $I[\nu_2 > k, \nu_1 > k]$ y tomando esperanza en la la primera parte del lema resulta

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k, \nu_1 > k] \right] &= \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_1 > k] \right] \\ &< \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} I[\nu_1 > k] \right] \leq \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k} I[\nu_1 > k - 1] \right].\end{aligned}$$

Nuevamente, iterando se obtiene

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k, \nu_1 > k] \right] \leq \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,1} I[\nu_1 > 0] \right] = \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,1} \right] < \infty.$$

Sumando

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k \leq \nu_1] \right] + \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k, \nu_1 > k] \right] = \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,k+1} I[\nu_2 > k] \right] \leq C_4.$$

donde $C_4 = C_4(J, q, \varepsilon, \alpha)$. Para concluir la segunda parte del lema, basta probar la desigualdad para el caso $k = 0$. En ese caso,

$$\mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{q,1} I[\nu_2 > 0] \right] \leq C_4$$

pues ya hemos probado eso anteriormente.

Para concluir la demostración, probemos la desigualdad (3.31). Recordemos que por Hölder probamos que para todo $u \geq 2$,

$$\tilde{L}_k^{u-1} \leq J^{u-2} \tilde{Q}_{(u-1),k}$$

que a su vez implica que

$$[\tilde{L}_k/J]^{u-1} \leq \tilde{Q}_{(u-1),k}/J.$$

Entonces, para concluir la desigualdad, basta probar que

$$\frac{1}{J} \tilde{Q}_{(u-1),k} \frac{1}{J} \tilde{Q}_{(q-u),k} \leq \frac{1}{J} \tilde{Q}_{(q-1),k}$$

que es un resultado inmediato de la desigualdad de Harris-FKG. □

3.5. Demostración

Probemos ahora el teorema en si.

Demostración del teorema. Tomamos $q = 2$ y fijamos ε como en la demostración del Lema 8. Fijemos J tal que $J \geq J(2, \varepsilon)$ y $J \geq J(2)$ como en Lema 7 y Lema 8 y $\alpha \geq \alpha(2, J)$. Para simplificar la notación abreviamos $I[\nu_1 > k]$ como I_k y $I[\nu_2 > k]$ como $I_k^{(2)}$. Para concluir el teorema basta probar que τ_{ν_2} es finito y también lo es su esperanza.

Supongamos que logramos demostrar que

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_2 > k)^{1/2} < \infty. \quad (3.33)$$

Como $P(\nu_2 > k) \leq 1$, vale que $P(\nu_2 > k) \leq P(\nu_2 > k)^{1/2}$ por lo que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_2 > k)$$

también es finita. Recordemos que al principio de de la demostración del Lema 8 se probó que

$$\mathbb{E} \left[\tau_k = \sum_{j=0}^{k-1} \delta_j \right] < \infty.$$

Además,

$$\tau_{\nu_2} = \tau_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \delta_k I_k^{(2)}$$

y usando que $\{\nu_2 > j\} \in \mathcal{G}_k$, tomando $q = 1$ y $p = 0$ en el resultado del Lema 7 se tiene que

$$\mathbb{E} [\delta_k I_k^{(2)} | \mathcal{G}_k] \leq \varepsilon \frac{\tilde{L}_k}{J} I_k^{(2)}$$

y tomando esperanza,

$$\mathbb{E} [\delta_k I_k^{(2)}] \leq \frac{\varepsilon}{J} \mathbb{E} [\tilde{L}_k I_k^{(2)}] = \frac{\varepsilon}{J} \mathbb{E} [\tilde{L}_k (I_k^{(2)})^{1/2} (I_k^{(2)})^{1/2}].$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la expresión a la derecha de la última ecuación, obtenemos

$$\mathbb{E} [\delta_k I_k^{(2)}] \leq \frac{\varepsilon}{J} \left(\mathbb{E} [\tilde{L}_k^2 I_k^{(2)}] P(\nu_2 > k) \right)^{1/2}.$$

Usamos nuevamente la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $[\tilde{L}_k]^2$, podemos volver a acotar la expresión a la derecha en la última ecuación y resulta

$$\mathbb{E} [\delta_k I_k^{(2)}] \leq C_5 \left(\mathbb{E} [\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} I_k^{(2)}] P(\nu_2 > k) \right)^{1/2} \leq C_5 \left(\mathbb{E} [\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} I_{k-1}^{(2)}] P(\nu_2 > k) \right)^{1/2}$$

donde la última desigualdad proviene de $P(\nu_2 > k) \leq P(\nu_2 > k - 1)$. Por la segunda parte del Lema 8 se concluye que

$$\mathbb{E} [\delta_k I_k^{(2)}] \leq C_5 (C_1 P(\nu_2 > k))^{1/2}$$

Finalmente, se obtiene que

$$\mathbb{E}[\tau_{\nu_2}] \leq \mathbb{E}[\tau_1] + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[\delta_k I_k^{(2)}] \leq \mathbb{E}[\tau_1] + C_6 \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_2 > k)^{1/2}.$$

Supusimos que el segundo término a la derecha del igual era finito y ya probamos que $\mathbb{E}[\tau_1]$ era finito por lo que quedaría demostrado el problema.

Resta probar que la serie (3.33) converge. Para eso consideremos la siguiente \mathcal{G}_n -martingala

$$M_n := \sum_{k=1}^{n-1} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} - \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} | \mathcal{G}_k] \right] I_k^{(2)}.$$

Probemos que M_n es efectivamente una \mathcal{G}_n -martingala. Notemos que M_n involucra sólo a $\{\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k}\}_{k \leq n}$, $\{I_k^{(2)}\}_{k \leq n}$ y esperanzas condicionales a $\mathcal{G}_k \subseteq \mathcal{G}_n$ para toda $1 \leq k \leq n$ por lo que M_n es \mathcal{G}_n -medible. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M_n] &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} - \mathbb{E}[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k} | \mathcal{G}_k] I_k^{(2)} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k}] I_k^{(2)} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}[[\tilde{\mathcal{Q}}_{2,k+1} - \tilde{\mathcal{Q}}_{2,k}] I_k^{(2)} | \mathcal{G}_k] \right] = 0. \end{aligned}$$

Por último,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \mathbb{E}\left[M_n + \left[\tilde{Q}_{2,n+1} - \tilde{Q}_{2,n} - \mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,n+1} - \tilde{Q}_{2,n}|\mathcal{G}_n]I_n^{(2)}\right]|\mathcal{G}_n\right] \\ &= M_n + \mathbb{E}\left[\left[\tilde{Q}_{2,n+1} - \tilde{Q}_{2,n}\right]I_n^{(2)}|\mathcal{G}_n\right] - \mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,n+1} - \tilde{Q}_{2,n}|\mathcal{G}_n]I_n^{(2)} = M_n.\end{aligned}$$

En conclusión, M_n es una \mathcal{G}_n -martingala. Notemos ahora que si $\nu_2 > n$, $I_k^{(2)} = 1$ para todo $1 \leq k \leq n$ y si además $k \neq \nu_1$, se cumple que $\tilde{L}_k > \alpha$ por lo que vale el resultado del Lema 8 y

$$\mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k}|\mathcal{G}_k] \leq -1.$$

En el caso de que $\{\nu_1 = k\}$, probamos en (3.32) que vale

$$\mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k}|\mathcal{G}_k] \leq C_3.$$

Luego, en $\{\nu_2 > n\}$,

$$\begin{aligned}M_n &\geq \sum_{k=1}^{n-1} [\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k}] + n - 2 - C_3 \\ &= \tilde{Q}_{2,n} - \tilde{Q}_{2,1} + n - 2 - C_3 \geq -\tilde{Q}_{2,1} + n - 2 - C_3.\end{aligned}$$

Entonces,

$$P(\nu_2 > n) \leq P\left(M_n + \tilde{Q}_{2,1} \geq n - 2 - C_3\right) \leq (n - 2 - C_3)^{-5} \mathbb{E}\left[|M_n + \tilde{Q}_{2,1}|^5\right]$$

donde en la última desigualdad usamos la desigualdad de Markov. Usando Hölder, tenemos que

$$P(\nu_2 > n) \leq (n - 2 - C_3)^{-5} 2^4 \left(\mathbb{E}\left[|M_n|^5\right] + \mathbb{E}\left[\tilde{Q}_{2,1}^5\right]\right)$$

Queremos ver que la raíz cuadrada de la expresión a la derecha de la última ecuación es sumable. Notemos que, nuevamente gracias a Hölder,

$$\mathbb{E}\left[\tilde{Q}_{2,1}^5\right] \leq J^4 \mathbb{E}\left[\tilde{Q}_{10,1}\right]$$

que ya hemos probado que es finito para J suficientemente grande en la página 58. Entonces, basta probar que $\mathbb{E}\left[M_n^5\right] \leq C_5 n^{5/2}$ es sumable y habremos terminado el

teorema. Por la desigualdad de Burkholder (ver [4] A.2.2)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[|M_n|^5 \right] &\leq C_6 \mathbb{E} \left[\left| \sum_{k=1}^{n-1} \left[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k} - \mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k} | \mathcal{G}_k] \right]^2 I_k^{(2)} \right|^{5/2} \right] \\
&\leq C_7 n^{3/2} \mathbb{E} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \left| \tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k} - \mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k} | \mathcal{G}_k] \right|^5 I_k^{(2)} \right] \\
&C_7 3^4 n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Q}_{2,k+1} \right|^5 I_k^{(2)} \right] + C_7 3^4 n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Q}_{2,k} \right|^5 I_k^{(2)} \right] \\
&+ C_7 3^4 n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \mathbb{E}[\tilde{Q}_{2,k+1} - \tilde{Q}_{2,k} | \mathcal{G}_k] \right|^5 I_k^{(2)} \right] \\
&\leq C_7 3^4 (1 + 2^4) n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Q}_{2,k+1} \right|^5 I_k^{(2)} \right] \\
&+ C_7 3^4 (1 + 2^4) n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Q}_{2,k} \right|^5 I_k^{(2)} \right] \\
&\leq C_8 n^{3/2} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \left[\left| \tilde{Q}_{2,k} \right|^5 I_{k-1}^{(2)} \right]
\end{aligned}$$

donde en todos los pasos usamos Hölder salvo en el último que usamos que $I_k^{(2)} \leq I_{k-1}^{(2)}$. Usando Hölder nuevamente,

$$\left| \tilde{Q}_{2,k} \right|^5 \leq J^4 \tilde{Q}_{10,k}$$

y en la segunda parte del Lema 8 probamos que $\mathbb{E} \left[\tilde{Q}_{10,k} I_{k-1}^{(2)} \right]$ es acotado. Así queda probado el teorema. \square

Notemos que como $(X_1(t), \dots, X_J(t))$ es irreducible y cualquiera de los estados en Γ es recurrente positivo, entonces, $(X_1(t), \dots, X_J(t))$ es recurrente positiva como cadena.

Bibliografía

- [1] Søren Asmussen. *Applied probability and queues*. Second. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [2] L. Chayes y G. Swindle. “Hydrodynamic limits for one-dimensional particle systems with moving boundaries”. En: *Ann. Probab.* 24.2 (1996), págs. 559-598.
- [3] Rick Durrett. *Probability: theory and examples*. Fourth. Vol. 31. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [4] Allan Gut. *Stopped random walks*. Second. Springer, New York, 2009.
- [5] Harry Kesten y Vladas Sidoravicius. “A problem in one-dimensional diffusion-limited aggregation (DLA) and positive recurrence of Markov chains”. En: *Ann. Probab.* 36.5 (2008), págs. 1838-1879.
- [6] David A. Levin, Yuval Peres y Elizabeth L. Wilmer. *Markov chains and mixing times*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [7] Gergő Nemes. “New asymptotic expansion for the Gamma function”. En: *Arch. Math. (Basel)* 95.2 (2010), págs. 161-169.
- [8] J. R. Norris. *Markov chains*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [9] Vladas Sidoravicius y Alexandre Stauffer. “Multi-Particle Diffusion Limited Aggregation”. En: *ArXiv e-prints* (2016). arXiv: [1603.03218](https://arxiv.org/abs/1603.03218) [[math.PR](#)].
- [10] Allan Sly. “On One-dimensional Multi-Particle Diffusion Limited Aggregation”. En: *ArXiv e-prints* (2016). arXiv: [1609.08107](https://arxiv.org/abs/1609.08107) [[math.PR](#)].
- [11] David Williams. *Probability with martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
- [12] T. A. Witten y L. M. Sander. “Diffusion-limited aggregation”. En: *Phys. Rev. B* (3) 27.9 (1983), págs. 5686-5697.