



**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

**Tesis de Licenciatura**

**GRADO DE BROUWER:  
UNA CONSTRUCCIÓN Y ALGUNAS  
APLICACIONES A PROBLEMAS NO LINEALES.**

**Nelson Hugo Monzón**

**Director: Dr. Pablo Amster**

Abril de 2017



## Índice general

Agradecimientos.	5
Resumen.	7
Capítulo 1. Introducción.	9
1.1. Reseña histórica.	9
1.2. El caso bidimensional.	10
1.3. La integral de Kronecker.	14
1.4. De la integral de superficie a la integral de volumen.	15
Capítulo 2. El grado de Brouwer.	19
2.1. Caracterización. Las tres propiedades principales.	19
2.2. Existencia del grado. Definición y construcción.	19
2.3. Unicidad del grado.	36
2.4. Generalización a espacios vectoriales de dimensión finita.	43
Capítulo 3. Problemas en dimensión finita.	49
3.1. Introducción.	49
3.2. El problema no resonante.	49
3.3. El problema resonante.	51
Capítulo 4. Una aplicación: ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden.	55
4.1. Introducción.	55
4.2. Planteo del problema.	55
4.3. Espectro de la parte lineal.	56
4.4. No linealidades acotadas.	58
4.5. Subsoluciones y supersoluciones.	59
4.6. Algo más sobre diferencias finitas.	63
4.7. Resultados de multiplicidad del tipo Ambrosetti-Prodi.	65
4.8. No linealidades unilateralmente acotadas.	70
Capítulo 5. Comentarios finales.	81
Bibliografía	85



## **Agradecimientos.**

Agradezco al Dr. Pablo Amster por haberme dirigido y por la calidez, benevolencia y generosidad que tantas veces tuvo para conmigo. Doy gracias al Dr. Pablo de Napoli y al Dr. Diego Rial por su amabilidad y buena disposición en el desempeño de las funciones de jurado. También agradezco a mi pareja, Romina Pech, por el apoyo que me brindó todos estos años, particularmente en la escritura de esta tesis. Doy gracias a mis amigos Guillermo Herrmann y Sebastián Pedersen por haberme acompañado en varios momentos de dudas. Agradezco a mi terapeuta, la Lic. Carolina Riccillo, por haberme ayudado con voluntad y compromiso a transitar las últimas etapas de la licenciatura. Agradezco a todos los que estuvieron presentes en la defensa de esta tesis, especialmente a mi madre y mi hermana. Asimismo, deseo agradecer a todos los compañeros y docentes que me ayudaron en mi carrera. Muchas gracias a todos los que alguna vez me dieron una palabra de aliento.



## Resumen.

En la presente tesis nos interesa hacer una construcción analítica del grado de Brouwer y tratar su existencia y unicidad respecto a un sistema de axiomas. Asimismo, deseamos ilustrar la aplicación de dicha herramienta a los problemas no lineales (no resonante y resonante), primero en un contexto abstracto y luego en algunos ejemplos concretos.

La axiomatización seleccionada se debe a Deimling y consta de tres propiedades principales [4]. Con base en dicha axiomatización construimos el grado en  $\mathbb{R}^n$  de manera analítica y elemental, utilizando una versión modificada de la definición integral dada por Heinz [7], que no involucra necesariamente funciones radiales. Mostramos, además, que tal definición puede emplearse para el grado de funciones  $C^1$ . Luego tratamos la unicidad del grado usando argumentos similares a los que se encuentran en [12, 5]. Complementamos lo hecho con la generalización del grado a espacios vectoriales de dimensión finita y una fórmula de reducción, que nos serán de utilidad para estudiar el siguiente tema.

A continuación, tratamos los problemas no resonante y resonante, en un contexto abstracto de dimensión finita. Para ello combinamos los enfoques hallados en [2, 5].

Finalmente, aplicamos los resultados abstractos demostrados a algunos problemas de ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden. Demostramos en este caso los resultados expuestos en [5], con algunas modificaciones.





## Introducción.

### 1.1. Reseña histórica.

El grado de Brouwer es una herramienta topológica que ha demostrado tener importantes aplicaciones y consecuencias. Algunas de dichas aplicaciones se dan en el estudio de la existencia y multiplicidad de soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones (diferenciales, en diferencias finitas, algebraicas).

Los orígenes de las ideas del grado se remontan a los trabajos de Gauß y Cauchy. Las primeras ideas aparecen en dos demostraciones del Teorema Fundamental del Álgebra por Gauß (1799, 1850), y fueron desarrolladas muchos años después. En los trabajos de Cauchy (1831) figuran, en el plano, el índice de una función alrededor de un punto y el principio del argumento. Se trataba de determinar la cantidad de soluciones de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El 1869 Kronecker, estudiando las soluciones de ecuaciones algebraicas, desarrolla la noción de característica de una función y obtiene una generalización de los resultados de Cauchy a  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas. Más tarde (en 1891/1905), Poincaré aplica resultados de Kronecker al problema de tres cuerpos y logra demostrar la existencia de infinitas soluciones especiales. Luego (1891/1905), Picard modifica los resultados de Kronecker para determinar el número exacto de soluciones, cosa que la integral de Kronecker no daba.

La formación de la noción del grado corresponde a los trabajos de Hadamard y Brouwer, quienes mantenían un activo intercambio de ideas. Hadamard (1910) logra demostrar varios resultados clásicos de la teoría del grado, entre otros el hecho clave de que la integral de Kronecker da como resultado un número entero. Brouwer (1912) define el grado recurriendo a métodos simpliciales, y obtiene varias propiedades y resultados clásicos de la teoría.

Más tarde aparecen nuevas construcciones que no utilizan métodos simpliciales. Los precursores en este sentido son Hadamard (1910) y Sard (1942). En 1950 Nagumo obtiene una construcción analítica elemental que no utiliza ninguna integral en su formulación. Luego, de Rham (1955) desarrolla su cohomología y a partir de ésta construye el grado desde un punto de vista completamente diferente. Después, inspirándose en los trabajos de de Rham, Heinz (1959) realiza una construcción analítica más elemental que la de Nagumo.

Otro aspecto importante de la teoría de grado es la axiomatización. En este sentido el precursor es Nagumo (1951), quien extrajo un conjunto de propiedades, sin probar la unicidad. En su tesis doctoral, Führer (1971) aporta la primera axiomatización completa del grado de Brouwer. Unos años después, Deimling (1985) obtiene una caracterización reducida a sólo tres propiedades principales.

En la sección que sigue ilustraremos las propiedades del grado y su relación con el estudio de soluciones de ecuaciones, examinando el caso bidimensional. Luego, analizaremos algunos aspectos de la integral de Kronecker y la relacionaremos con la definición integral que utilizaremos más adelante.

## 1.2. El caso bidimensional.

Supongamos que queremos estudiar las soluciones de un problema del tipo

$$(1.2.1) \quad f(x) = p,$$

donde  $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua, con  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto acotado y  $p \in \mathbb{R}^n$ . En principio, suponemos que la ecuación 1.2.1 presenta dificultades y no sabemos si tiene alguna solución en  $D$ . Para averiguarlo, nuestro deseo sería cambiar el problema difícil por uno más fácil, que podríamos escribir, por ejemplo como:

$$(1.2.2) \quad g(x) = q,$$

donde  $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es continua. Aquí deberíamos tener alguna herramienta que relacione la existencia de soluciones de ambos problemas, que podemos asociar a ternas del tipo  $(f, D, p)$  y  $(g, D, q)$ . Dicha herramienta tendría que informar una característica en común de los dos problemas, quizá dada por un número que tenga que ver con la existencia de soluciones de cada ecuación. Lo ideal sería que ese número fuera precisamente la cantidad de soluciones de cada ecuación, pero para empezar pensamos en una función

$$d : \{(f, D, p) : D \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto acotado}, f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n), p \in \mathbb{R}^n\} \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Ahora digamos que si

$$d[f, D, p] = d[g, D, q],$$

entonces, de alguna manera, la existencia (o no) de soluciones de 1.2.2 está relacionada con la existencia (o no) de soluciones de 1.2.1. Si  $d$  informara la cantidad exacta de soluciones, es claro que una tal relación tendría lugar. La función que buscamos definir y que cumple el papel de  $d$  es el *grado de Brouwer*, que aunque en general no cuenta exactamente las soluciones de una ecuación, en muchos casos es útil para estudiar problemas en la forma que hemos vagamente descrito. Más aún, el grado de Brouwer tiene una suerte de unicidad respecto a ciertas propiedades que hacen útil y posible la metodología de

cambiar una ecuación por otra, contando (en cierta forma) soluciones. Por ejemplo, si de alguna manera  $d$  cuenta soluciones, es razonable considerar que debe cumplir

$$d[Id, D, p] = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in D \\ 0 & \text{si } p \notin \bar{D} \end{cases},$$

y que  $d[f, D, p] \neq 0$  implica que existe alguna solución de 1.2.1 en  $D$ . Por otro lado, ¿cómo llegamos a 1.2.2 partiendo de 1.2.1? ¿Es tal cosa siempre posible? La respuesta a la segunda pregunta es claramente negativa, ya que de otra forma  $d$  sería inútil. En cuanto a la primera pregunta, la respuesta es tiene que ver con una deformación continua que comienza con 1.2.1 y termina con 1.2.2. Esto sería, una función (homotopía)  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que  $H_0 = H(\cdot, 0) = f$ ,  $H_1 = H(\cdot, 1) = g$ , con una función  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que  $y(0) = p$  e  $y(1) = q$ . Si estas funciones existen, tendría que poder afirmarse

$$d[f, D, p] = d[g, D, q].$$

Pero hay un inconveniente: si definimos

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x),$$

entonces, cualquiera sea  $y$ ,  $H$  siempre existe, y por consiguiente la función  $d$  es inútil. Para evitar este inconveniente, la clave está en el hecho de que nunca se toque el borde de  $D$ , es decir, que  $p \notin \partial D$ ,  $q \notin \partial D$  y que para todo  $t \in (0, 1)$  se cumpla que  $y(t) \notin H(\partial D \times \{t\})$ . Estas condiciones eliminan la posibilidad de relacionar ternas que corresponden a problemas esencialmente diferentes (por ejemplo:  $D = (-1, 1) \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f = Id$ ,  $g \equiv 1$  y  $p = q = 0$ ). Por lo tanto, debemos definir una función

$$d : \{(f, D, p) : D \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto acotado, } f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n), p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

teniendo en cuenta las observaciones recién hechas.

Antes de abordar el caso general será bueno ilustrar lo que venimos diciendo con el caso  $n = 2$ , ya que se trata de una situación especial en la que, como veremos pronto, el grado tiene una interpretación conocida y resultan intuitivas sus propiedades más importantes. Consideremos  $p \in \mathbb{R}^2$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un conjunto abierto acotado con borde suave orientado  $\partial D$  y  $f \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^2)$  tal que  $p \notin f(\partial D)$ . En este caso la integral de Kronecker  $I[f, \partial D, p]$ , que define al grado de Brouwer y cuya fórmula general es 1.3.1, se puede escribir como una integral curvilínea a la que había llegado Cauchy, también llamada *índice de Poincaré* de  $f$  respecto a  $\partial D$  y  $p$ . Así, el *grado de Brouwer* de  $f$  con respecto a  $D$  y  $p$  resulta ser

$$d[f, D, p] = I[f, \partial D, p] = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{(f_1 - p_1) df_2 - (f_2 - p_2) df_1}{\|f - p\|^2}.$$

Si  $\partial D$  tiene una representación paramétrica dada por  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$ , entonces

$$d[f, D, p] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(f_1 - p_1) \circ \gamma(s) \cdot (f_2 \circ \gamma)'(s) - (f_2 - p_2) \circ \gamma(s) \cdot (f_1 \circ \gamma)'(s)}{\|(f - p) \circ \gamma(s)\|^2} ds.$$

Llamando  $\theta = (\theta_1, \theta_2) = (f - p) \circ \gamma$ , tenemos

$$(1.2.3) \quad d[f, D, p] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\theta_1 \theta_2' - \theta_2 \theta_1'}{\|\theta\|^2} ds.$$

Identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  podemos dar una formulación compleja de  $d[f, D, p]$ . En efecto, podemos escribir 1.2.3 como

$$d[f, D, p] = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i \operatorname{Im} \left( \frac{\theta'(s)}{\theta(s)} \right) ds.$$

Asimismo, observamos que

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \left( \frac{\theta'(s)}{\theta(s)} \right) ds = \int_0^{2\pi} (\ln \|\theta\|)'(s) ds = 0,$$

de lo que deducimos

$$(1.2.4) \quad \begin{aligned} d[f, D, p] &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\theta'(s)}{\theta(s)} ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{((f - p) \circ \gamma)'(s)}{(f - p) \circ \gamma(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{(f \circ \gamma)'(s)}{f \circ \gamma(s) - p} ds. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a la siguiente formulación mediante una integral compleja:

$$(1.2.5) \quad d[f, D, p] = \frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma} \frac{1}{z - p} dz = W(f \circ \gamma, p).$$

Esta fórmula mide la cantidad de giros (índice) de la curva  $f \circ \gamma$  alrededor del punto  $p$ , que notamos  $W(f \circ \gamma, p)$ . Si  $\gamma$  es simple, cerrada y orientada en sentido antihorario, entonces  $d[f, D, p]$  puede interpretarse como la número de giros de  $f|_{\partial D}$  alrededor de  $p$ .

A partir de la fórmula 1.2.5 podemos vislumbrar algunas propiedades del grado de Brouwer que lo hacen muy útil y permiten caracterizarlo. Abordaremos la cuestión de la caracterización y la demostración de dichas propiedades en el siguiente capítulo. Por el momento, sólo nos motivaremos con algunas observaciones que nos permitirán lograr cierta familiaridad con nuestro objeto de estudio.

Primero, la integral compleja en 1.2.5 está definida para  $f$  y  $g$  continuas, y además  $d[f, D, p]$  resulta ser un número entero. Esto se debe a la teoría de variable compleja y a la noción de índice de una curva respecto a un punto.

Una propiedad fundamental del grado es la *normalidad*:

$$d[Id_D, D, p] = 1 \quad (p \in D).$$

Este hecho es claro por 1.2.5, ya que  $\gamma$  es una curva simple cerrada. Otra propiedad clara que vale la pena mencionar es que si dos funciones coinciden en el borde de  $D$ , entonces tienen el mismo grado respecto a  $p$ . También, de 1.2.5 se deduce la llamada propiedad de *traslación*:

$$d[f, D, p] = d[f - p, D, 0].$$

Otra propiedad fundamental del grado es la *invariancia homotópica*. En este caso se la puede ver como heredada del índice  $W$ . Decimos que  $f, g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  son *homotópicas* si existe una función  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  (que llamamos una homotopía entre  $f$  y  $g$ ) tal que  $H_0 = H(\cdot, 0) = f$ ,  $H_1 = H(\cdot, 1) = g$  y para todo  $t \in (0, 1)$  vale  $p \notin H_t(\partial D)$  (donde  $H_t = H(\cdot, t)$ ). La propiedad dice que en si  $f$  y  $g$  son homotópicas, entonces  $d[f, D, p] = d[g, D, p]$ . En efecto, esto vale porque si  $f$  y  $g$  son homotópicas, entonces también lo son las curvas cerradas  $f \circ \gamma$  y  $g \circ \gamma$ , y por lo tanto ambas tienen el mismo índice respecto a  $p$ .

Más aún, podemos dar un enunciado más fuerte para la invariancia homotópica: para todo conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , toda función  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  y toda función  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que en todo  $t \in [0, 1]$  se cumple  $y(t) \notin H_t(\partial D)$ , el valor  $d[H_t, D, y(t)]$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ . Es decir que podemos mantener la invariancia del grado, con tal de mover el valor de  $p$  de manera continua respecto a  $t$  y sin tocar  $H_t(\partial D)$ . En efecto, a partir de 1.2.5 escribimos

$$\begin{aligned} d[H_t, D, y(t)] &= \frac{1}{2\pi i} \int_{H_t \circ \gamma} \frac{1}{z - y(t)} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(H_t - y(t)) \circ \gamma} \frac{1}{z} dz = W((H_t - y(t)) \circ \gamma, 0). \end{aligned}$$

Pero las curvas  $(H_t - y(t)) \circ \gamma$  son homotópicas entre sí y no pasan por el origen. Entonces, por la invariancia homotópica de  $W$ , se verifica que  $d[H_t, D, y(t)]$  no depende de  $t \in [0, 1]$ .

Llegamos ahora a la propiedad de *solución*, la cual dice que si  $d[f, D, p] \neq 0$ , entonces existe algún  $x \in D$  tal que  $f(x) = p$ . Este hecho no es evidente y vale para  $n \in \mathbb{N}$ , lo que permite estudiar la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales utilizando el grado de Brouwer en la dimensión adecuada. En el caso especial en que  $f$  es holomorfa en  $\bar{D}$ , si  $\gamma$  es simple, cerrada, orientada en sentido antihorario y  $f \circ \gamma$  no toca a  $p$ , por el principio del argumento tenemos la igualdad:

$$\#\{z \in D : f(z) = p\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - p} dz.$$

Pero entonces, por 1.2.4 y 1.2.5 tenemos

$$(1.2.6) \quad \#\{z \in D : f(z) = p\} = d[f, D, p] = W(f \circ \gamma, p),$$

donde las soluciones de la ecuación  $f(z) = p$  se cuentan con multiplicidad. Así, por lo tanto, la propiedad de solución resulta evidente en esta situación particular. Veremos, además, que si  $f$  es holomorfa en  $\bar{D}$  y  $p$  es un valor regular de  $f$  (según la definición 24), entonces  $d[f, D, p]$  cuenta exactamente las soluciones de la ecuación  $f(z) = p$ , ya que en este caso la multiplicidad de cada cero de  $f - p$  es 1. Este hecho se puede ver en conexión con un contexto más amplio en la observación 27.

En general, el número entero  $d[f, D, p]$  da, de alguna manera, la cantidad de ceros de la función  $f - p$  en  $D$ , pero no siempre exactamente como en 1.2.6. Más tarde veremos cómo se hace dicho recuento, el cual es el punto de partida de la construcción analítica del grado por Nagumo.

La idea de la cuenta de ceros de  $f - p$  nos permite motivar la propiedad de *aditividad* del grado. Tal aditividad se da respecto a los conjuntos: si  $D_1, D_2 \subset D$  son abiertos disjuntos tales que  $p \notin f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ , entonces

$$d[f, D, p] = d[f, D_1, p] + d[f, D_2, p].$$

Esto puede interpretarse como que el conjunto  $\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)$  “no agrega ceros de  $f - p$  a los que hay en  $D_1 \cup D_2$ ”.

En el capítulo siguiente daremos la caracterización de Deimling del grado de Brouwer y demostraremos las propiedades recién mencionadas. También haremos una construcción analítica del grado y probaremos la unicidad del mismo respecto a la caracterización adoptada. En dicho proceso se verá la equivalencia con la construcción de Nagumo y el recuento de ceros de  $f - p$  en  $D$ .

### 1.3. La integral de Kronecker.

La integral de Kronecker fue la primera fórmula útil para definir el grado en dimensión  $n$ . Se trata de una integral de superficie aplicada a condiciones especiales. La historia conservó la importancia de esta fórmula, que aquí presentaremos en dimensión mayor o igual que 2. Comenzamos con un poco de terminología moderna de geometría diferencial, que es conveniente para nuestro objetivo.

Sea  $n \geq 2$  un entero. El *elemento de volumen* en  $\mathbb{R}^n$  es la  $n$ -forma diferencial

$$\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n,$$

y el *ángulo sólido* es la  $(n - 1)$ -forma diferencial

$$\sigma = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x_j dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

donde  $\widehat{dx}_j$  significa que  $dx_j$  no aparece. De acuerdo a esto tenemos la relación

$$\omega = d\left(\frac{\sigma}{n}\right).$$

Ahora damos una primera definición del grado de Brouwer y la integral de Kronecker, ésta última también conocida como índice de Kronecker, y llamada característica en los trabajos originales.

DEFINICIÓN 1. Sean  $p \in \mathbb{R}^n$ ,  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto acotado con borde suave orientado  $\partial D$  y  $f \in C^1(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  tal que  $p \notin f(\partial D)$ . El índice de Kronecker  $I[f, \partial D, p]$  se define por

$$\begin{aligned} I[f, \partial D, p] &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} (f-p)^* \left( \frac{\sigma}{\|y\|^n} \right) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} \frac{(f-p)^*(\sigma)}{\|f-p\|^n} = \\ (1.3.1) \quad &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} \left[ \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \frac{f_j - p_j}{\|f-p\|^n} df_1 \wedge \dots \wedge \widehat{df}_j \wedge \dots \wedge df_n \right], \end{aligned}$$

donde  $df_k$  es la 1-forma diferencial

$$df_k = \sum_{j=1}^n \partial_j f_k dx_j \quad (1 \leq k \leq n)$$

y  $|\mathbb{S}^{n-1}|$  es la medida de la esfera  $(n-1)$ -dimensional

$$\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$$

para la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ .

En esta situación, el grado de Brouwer es

$$d[f, D, p] = I[f, \partial D, p].$$

#### 1.4. De la integral de superficie a la integral de volumen.

Como anteriormente dijimos, Heinz logró pasar de la integral de Kronecker, que se hace sobre  $\partial D$ , a una integral de volumen sobre  $D$ . Dicha integral constituye una definición analítica y elemental del grado de Brouwer, a la vez que tiene algunas ventajas técnicas al momento de tratar casos de menor regularidad en las funciones y conjuntos involucrados. A continuación escribiremos algunos pasos que nos permitirán llegar a una integral muy similar a la dada por Heinz.

Por la definición 1 tenemos que

$$(1.4.1) \quad d[f, D, p] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} \frac{(f-p)^*(\sigma)}{\|f-p\|^n}.$$

Haremos el paso a la integral de volumen aplicando el teorema de Stokes. Ahora, dado que el integrando tiene una singularidad en  $p$ , y eso se debe al denominador, consideraremos una función adecuada que nos permitirá prescindir del mismo y eliminar el problema en  $p$ .

Puesto que  $p \notin f(\partial D)$ , podemos tomar dos números  $\delta$  y  $r$  tales que

$$(1.4.2) \quad 0 < \delta < r < \mu = \min_{x \in \partial D} \|f(x) - p\|.$$

Así, tomamos una función  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$  tal que

- $\psi(y) = 0$  si  $\|y\| \in [0, \delta]$
- $\psi(y) = \frac{1}{\|y\|^n}$  si  $\|y\| \in [r, +\infty)$ .

Ahora, de la fórmula 1.4.1 se sigue

$$(1.4.3) \quad d[f, D, p] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} \psi \circ (f - p) \cdot (f - p)^*(\sigma) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial D} (f - p)^*(\psi \cdot \sigma).$$

Aplicando el teorema de Stokes al tercer miembro y las propiedades de los diferenciales obtenemos

$$(1.4.4) \quad d[f, D, p] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D d[(f - p)^*(\psi \cdot \sigma)] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D (f - p)^*[d(\psi \cdot \sigma)].$$

Trataremos de escribir de forma más elemental el último miembro. Para empezar, usando diferencial exterior y recordando que  $d\sigma = n\omega$  tenemos

$$d(\psi \cdot \sigma) = d\psi \wedge \sigma + \psi d\sigma = d\psi \wedge \sigma + n\psi \cdot \omega.$$

Por otro lado, mediante las definición de  $\sigma$  y las propiedades del producto exterior no es difícil demostrar que

$$d\psi \wedge \sigma = (\nabla\psi \cdot y) \omega,$$

de lo que se deduce finalmente

$$(1.4.5) \quad d(\psi \cdot \sigma) = (\nabla\psi \cdot y + n\psi) \omega = \operatorname{div}(\psi y) \cdot \omega.$$

Ahora, a partir de 1.4.4 y 1.4.5 seguimos con

$$\begin{aligned} d[f, D, p] &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D (f - p)^* [\operatorname{div}(\psi y) \cdot \omega] = \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D \operatorname{div}(\psi y) \circ (f - p) \cdot (f - p)^*(\omega) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D [\operatorname{div}(\psi y) \circ (f - p)] \cdot J_{f-p} \cdot \omega = \\ &= \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D [\operatorname{div}(\psi y) \circ (f - p)] \cdot J_f \cdot \omega. \end{aligned}$$



Sea  $t_{-p} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la traslación dada por  $t_{-p}(y) = y - p$  ( $y \in \mathbb{R}^n$ ). Podemos escribir el grado en la forma elemental

$$d[f, D, p] = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_D [\operatorname{div}(\psi y) \circ t_{-p} \circ f] J_f.$$

Entonces, definiendo la función continua  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$(1.4.6) \quad \varphi = \frac{\operatorname{div}(\psi y) \circ t_{-p}}{|\mathbb{S}^{n-1}|},$$

llegamos a

$$d[f, D, p] = \int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f.$$

Esta integral de volumen coincide con la que aparece en la definición que usamos, que está basada en la definición de Heinz. Una condición que figura allí para la función continua  $\varphi$  es que tiene soporte incluido en un cubo centrado en  $p$ , a su vez contenido en el complemento de  $f(\partial D)$ . La otra condición es que

$$(1.4.7) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1.$$

En el siguiente capítulo veremos, con ayuda del lema de Poincaré, que estas dos condiciones son suficientes y que no es necesario definir  $\psi$ . También veremos la definición general de grado de Brouwer, para la que alcanzará con que  $f$  sea continua y  $D$  sea abierto acotado. Por el momento verificaremos que la función  $\varphi$  definida en 1.4.6 cumple las dos condiciones mencionadas. En cuanto a la relativa al soporte, es claro que basta tomar  $r$  lo suficientemente chico en 1.4.2. En efecto puesto que  $\psi(y_0) = \frac{1}{\|y_0\|^n}$  para  $\|y_0\| \in (r, +\infty)$ , podemos escribir

$$\operatorname{div}(\psi y)(y_0) = \operatorname{div}\left(\frac{y}{\|y\|^n}\right)(y_0) = 0,$$

de lo que deducimos

$$\operatorname{sop}\varphi \subseteq \overline{B(p, r)}.$$

Probemos ahora que si  $\varphi$  está definida por 1.4.6, cumple 1.4.7. En efecto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\operatorname{div}(\psi y) \circ t_{-p}}{|\mathbb{S}^{n-1}|} = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(\psi y).$$

Pero, por el soporte de  $\varphi$  y el teorema de Gauß vale

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{B(0,r)} \operatorname{div}(\psi y) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(0,r)} \psi y \cdot dS = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(0,r)} \psi r ds.$$

Por lo tanto, recordando nuevamente la forma en que tomamos  $\psi$  podemos escribir

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(0,r)} \psi r ds = \frac{1}{|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(0,r)} \frac{1}{r^{n-1}} ds = \frac{1}{r^{n-1} |\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\partial B(0,r)} ds = 1.$$



## El grado de Brouwer.

### 2.1. Caracterización. Las tres propiedades principales.

De las propiedades que motivamos mediante el caso bidimensional, hay tres que consideraremos como principales: *normalidad*, *aditividad* y la forma más general que vimos de la *invariancia homotópica*. Se constituye así la caracterización de Deimling del grado de Brouwer, que exponemos en el siguiente resultado.

TEOREMA. (DEIMLING) *Sea  $n \in \mathbb{N}$ . Existe una única función*

$$d : \{(f, D, p) : D \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto acotado}, f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n), p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

*que verifica las siguientes condiciones:*

1. NORMALIDAD: *para todo conjunto abierto acotado  $D \subset \mathbb{R}^n$  y todo  $p \in D$ ,*

$$d[Id_{\bar{D}}, D, p] = 1.$$

2. ADITIVIDAD: *para todo conjunto abierto acotado  $D \subset \mathbb{R}^n$ , todo par de conjuntos abiertos disjuntos  $D_1, D_2 \subset D$ , toda función  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ , y todo punto  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ ,*

$$d[f, D, p] = d[f, D_1, p] + d[f, D_2, p].$$

3. INVARIANCIA HOMOTÓPICA: *para todo conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , toda función  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  y toda función  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que en todo  $t \in [0, 1]$  se cumple  $y(t) \notin H(\partial D \times \{t\})$ , el valor  $d[H(\cdot, t), D, y(t)]$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ .*

### 2.2. Existencia del grado. Definición y construcción.

**2.2.1. Definición para funciones  $C^2$  y  $C^1$ .** En esta subsección nos dedicamos a la definición integral que se obtuvo en la sección 1.4 a partir del índice de Kronecker. Al principio la daremos para funciones  $C^2$  y luego, aunque no sería necesario para construir el grado de Brouwer, demostraremos la validez de dicha fórmula para funciones  $C^1$ . Vale destacar que con esta definición no necesitamos regularidad en el conjunto  $D$ . Llamaremos *n-cubo*, o *cubo*, a un conjunto de la forma  $I^n$ , donde  $I$  es cualquier intervalo abierto de  $\mathbb{R}$ .

DEFINICIÓN 2. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ ,  $K$  un cubo centrado en  $p$  tal que  $K \cap f(\partial D) = \emptyset$ ,  $\varphi \in C_c(K)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$  (una tal  $\varphi$  se llama *admisibile*). Definimos el *grado de Brouwer* como

$$d[f, D, p] = \int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f.$$

A continuación veremos que esta definición no depende de la función admisible  $\varphi$  ni de  $K$ , es decir que dadas dos funciones admisibles  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ ,

$$\int_D (\varphi_1 \circ f) \cdot J_f = \int_D (\varphi_2 \circ f) \cdot J_f,$$

o bien

$$\int_D ((\varphi_1 - \varphi_2) \circ f) \cdot J_f = 0.$$

Teniendo en cuenta que  $\int_D (\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ , esto equivale a demostrar lo siguiente.

LEMA 3. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ ,  $K$  un cubo centrado en  $p$  tal que  $K \cap f(\partial D) = \emptyset$ ,  $\varphi \in C_c(K)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 0$ . Entonces,

$$\int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f = 0.$$

Antes de probar este lema, debemos enunciar y demostrar algunos resultados necesarios para ello. El primero, y fundamental, es el lema de Poincaré, que aquí damos en su versión tradicional y sólo para funciones con soporte compacto en un cubo. El lema dice que una función con soporte compacto en un cubo, e integral nula, es la divergencia de un campo vectorial con soporte en el mismo cubo. El segundo lema fundamental es el 7.

LEMA 4. (POINCARÉ) Sea  $\varphi \in C_c(K)$ , con  $K$  un  $n$ -cubo, tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 0$ . Entonces existe  $F \in C_c^1(K, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\operatorname{div} F = \varphi$ .

DEMOSTRACIÓN. Probaremos esto por inducción en  $n$ .

Para  $n = 1$  definimos  $F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi$ , que cumple lo necesario.

Veamos para  $n > 1$ . Sea  $K = K_1 \times K_2$ , con  $K_1$  el  $(n-1)$ -cubo correspondiente. Para  $x \in \mathbb{R}$  definimos  $\alpha(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dt$ . Resulta entonces  $\alpha \in C_c(K_1)$ . Por hipótesis inductiva, existe  $A \in C_c^1(K_1, \mathbb{R}^{n-1})$  tal que  $\operatorname{div} A = \alpha$ .

Tomamos ahora una función  $\tau \in C_c^1(K_2)$  tal que  $\int_{\mathbb{R}} \tau = 1$  y definimos para  $y \in \mathbb{R}$   $T(y) = \int_{-\infty}^y \tau$ . Entonces,  $T \in C^1(K_2)$ .

Sea  $F \in C_c^1(K)$  definida por:

$$F(x, y) = \left( A(x) \cdot \tau(y), \int_{-\infty}^y \varphi(x, t) dt - \alpha(x) \cdot T(y) \right), \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}, y \in \mathbb{R}.$$

Calculamos:

$$\operatorname{div} F(x, y) = \operatorname{div}_x A(x) \cdot \tau(y) + \varphi(x, y) - \alpha(x) \cdot \tau(y) = \varphi(x, y).$$

□

Ahora veremos dos identidades relativas a la divergencia de campos vectoriales. La primera se debe al matemático Gabrio Piola (1794-1850) y resulta fundamental en la demostración del lema 7. Notamos  $\nabla f$  a la matriz jacobiana de  $f$ .

LEMA 5. (IDENTIDAD DE PIOLA) Si  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  es abierto y  $f \in C^2(D, \mathbb{R}^n)$ , entonces  $\operatorname{div} \operatorname{cof}(\nabla f) = 0$ .

DEMOSTRACIÓN. 1. Para empezar, dada la naturaleza de la matriz de cofactores, es conveniente saber algo de las derivadas parciales del determinante de una matriz, dada por columnas,  $C = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Probaremos que

$$(2.2.1) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \det(C_1, \dots, C_n) = \sum_{j=1}^n \det\left(C_1, \dots, \frac{\partial C_j}{\partial x_i}, \dots, C_n\right) \quad (1 \leq i \leq n).$$

Usando la definición de determinante, luego la regla generalizada del producto, y nuevamente la definición de determinante, escribimos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \det(C_1, \dots, C_n) &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sg}(\sigma) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( C_1^{\sigma(1)} \cdots C_n^{\sigma(n)} \right) = \\ &= \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sg}(\sigma) \sum_{j=1}^n \frac{\partial C_j^{\sigma(j)}}{\partial x_i} \prod_{k \neq j} C_k^{\sigma(k)} = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \operatorname{sg}(\sigma) \frac{\partial C_j^{\sigma(j)}}{\partial x_i} \prod_{k \neq j} C_k^{\sigma(k)} = \sum_{j=1}^n \det\left(C_1, \dots, \frac{\partial C_j}{\partial x_i}, \dots, C_n\right). \end{aligned}$$

2. Definimos primero el campo de  $n - 1$  coordenadas

$$f^{\widehat{m}} = (f_1, \dots, \widehat{f_m}, \dots, f_n),$$

donde “ $\widehat{\phantom{x}}$ ” indica que la correspondiente coordenada fue eliminada del vector original de  $n$  coordenadas.

Aplicando la ecuación 2.2.1 a

$$(\operatorname{cof}(\nabla f))_{mj} = (-1)^{m+j} \det\left(\frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n}\right),$$

podemos derivar:

$$\frac{\partial (\operatorname{cof}(\nabla f))_{mj}}{\partial x_j} = (-1)^{m+j} \sum_{k < j} \det\left(\frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n}\right) +$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{m+j} \sum_{k>j} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) = \\
& = (-1)^{m+j} \sum_{k<j} (-1)^{k-1} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) + \\
& + (-1)^{m+j} \sum_{k>j} (-1)^k \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right).
\end{aligned}$$

Ahora sumamos en  $j$  el último miembro y después permutamos las sumas del segundo término:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} \operatorname{cof}(\nabla f))_m & = \sum_{j=1}^m \frac{\partial (\operatorname{cof}(\nabla f))_{mj}}{\partial x_j} = \\
& = \sum_{j=1}^n \sum_{k<j} (-1)^{m+j+k-1} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^n \sum_{k>j} (-1)^{m+j+k} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) = \\
& = \sum_{j=1}^n \sum_{k<j} (-1)^{m+j+k-1} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) + \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{j<k} (-1)^{m+j+k} \det \left( \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j \partial x_k}, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial f^{\widehat{m}}}{\partial x_n} \right) = 0,
\end{aligned}$$

donde (permutando en el último término los índices  $k$  y  $j$ ) la última igualdad vale por el teorema de Schwarz, ya que  $f^{\widehat{m}} \in C^2(D, \mathbb{R}^{n-1})$ .  $\square$

Continuamos con la segunda identidad matricial, que ayuda a lograr una escritura sintética de la demostración del lema 7.

HECHO 6. Sean  $A \in (C(\mathbb{R}^n))^{n \times n}$  y  $v \in (C(\mathbb{R}^n))^n$  diferenciables. Entonces:

$$(2.2.2) \quad \operatorname{div}(A \cdot v) = \operatorname{Tr}(A \cdot \nabla v) + v \cdot \operatorname{div}(A^t).$$

DEMOSTRACIÓN. En esta prueba respetamos la transposición de los vectores y matrices. Sea  $e_i$  el  $i$ -ésimo vector canónico de  $\mathbb{R}^n$ , puesto como columna. Escribimos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(A \cdot v) & = \sum_i \frac{\partial (e_i^t A v)}{\partial x_i} = \sum_i e_i^t \frac{\partial (A v)}{\partial x_i} = \sum_i e_i^t \left( \frac{\partial A}{\partial x_i} v + A \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) = \\
& = \left( \sum_i \frac{\partial e_i^t A}{\partial x_i} \right) v + \sum_i e_i^t A \nabla v e_i = \left( \sum_i \frac{\partial (A^t e_i)^t}{\partial x_i} \right) v + \sum_i e_i^t A \nabla v e_i =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_i \frac{\partial A^t e_i}{\partial x_i} \right)^t v + \sum_i e_i^t A \nabla v e_i = v^t \left( \sum_i \frac{\partial A^t e_i}{\partial x_i} \right) + \sum_i e_i^t A \nabla v e_i = \\
&= v^t \operatorname{div} (A^t) + \operatorname{Tr} (A \nabla v) = v \cdot \operatorname{div} (A^t) + \operatorname{Tr} (A \cdot \nabla v).
\end{aligned}$$

□

Hemos llegado al segundo lema fundamental. Como el lema de Poincaré, éste es también un lema de “antidivergencia”.

LEMA 7. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto acotado y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(D, \mathbb{R}^n)$ ,  $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\operatorname{sop}(v) \cap f(\partial D) = \emptyset$ . Entonces existe  $u \in C_c^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que para todo  $x \in D$

$$\operatorname{div} u(x) = \operatorname{div} v(f(x)) J_f(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Definimos

$$u = (\operatorname{cof}(\nabla f))^t \cdot (v \circ f).$$

Para  $x \in \mathbb{R}^n$ , aplicando 2.2.2 y la identidad de Piola tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u(x) &= \operatorname{Tr}((\operatorname{cof}(\nabla f(x)))^t \cdot \nabla(v \circ f)(x)) + (v \circ f(x)) \cdot \operatorname{div} \operatorname{cof}(\nabla f)(x) = \\
&= \operatorname{Tr}((\operatorname{cof}(\nabla f(x)))^t \cdot \nabla(v \circ f)(x)) = \operatorname{Tr}((\operatorname{cof}(\nabla f(x)))^t \cdot \nabla v(f(x)) \cdot \nabla f(x)).
\end{aligned}$$

Usando propiedades de la traza y de la matriz de cofactores escribimos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} u(x) &= \operatorname{Tr}((\operatorname{cof}(\nabla f(x)))^t \cdot \nabla f(x) \cdot \nabla v(f(x))) = \operatorname{Tr}(J_f(x) I_n \cdot \nabla v(f(x))) = \\
&= J_f(x) \operatorname{Tr}(\nabla v(f(x))) = J_f(x) \operatorname{div} v(f(x)).
\end{aligned}$$

Falta ver que  $u \in C_c^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Debido a la continuidad de  $f$  y de  $v$  tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sop}(v \circ f) &= \overline{(v \circ f)^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})} = \overline{f^{-1}(v^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}))} \subseteq \\
&\subseteq f^{-1}(\overline{v^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})}) = f^{-1}(\operatorname{sop}(v)) \subseteq \bar{D}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, basta ver que  $f^{-1}(\operatorname{sop}(v)) \cap \partial D = \emptyset$ . En efecto,

$$\begin{aligned}
f^{-1}(\operatorname{sop}(v)) \cap \partial D &\subseteq f^{-1}(f(f^{-1}(\operatorname{sop}(v)) \cap \partial D)) \subseteq \\
&\subseteq f^{-1}(\operatorname{sop}(v) \cap f(\partial D)) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.
\end{aligned}$$

□

Ahora demostramos el lema 3 de la buena definición:

DEMOSTRACIÓN. Por el lema de Poincaré, existe  $v \in C_c^1(K, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\operatorname{div} v = \varphi$ . Ahora, aplicando el lema 7 tenemos

$$\int_D \varphi(f(x)) J_f(x) dx = \int_D \operatorname{div} v(f(x)) J_f(x) dx = \int_D \operatorname{div} u(x) dx = 0.$$

□

Antes de seguir, agregamos un resultado clásico, presente en [8].

TEOREMA 8. (DE APROXIMACIÓN DE WEIERSTRASS). *Sea  $\Omega$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces dados cualesquiera  $f \in C^k(\Omega)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $\varepsilon > 0$  y un conjunto compacto  $K \subseteq \Omega$ , existe una función polinómica  $P \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que*

$$\max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha (f - P)\|_\infty^K < \varepsilon$$

OBSERVACIÓN 9. Podemos extender la definición 2 a cualquier  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que  $p \notin f(\partial D)$ . En efecto, sólo es necesario ampliar el alcance del lema 3 a tales funciones.

Análogamente a como hicimos en el final de la demostración del lema 7, se puede ver que  $\text{sop}(\varphi \circ f) \subseteq f^{-1}(\text{sop} \varphi) \subseteq \bar{D}$  y  $f^{-1}(\text{sop} \varphi) \cap \partial D = \emptyset$ , y por lo tanto  $\text{sop}(\varphi \circ f) \subseteq D$ . Como  $\text{sop} \varphi \subseteq K$ , tomando un cubo más chico, podemos suponer que  $\bar{K} \cap f(\partial D) = \emptyset$ . Entonces, debido a la compacidad de  $\partial D$ , dado que  $f$  es continua y  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{K}$  es abierto, existen  $x_1, \dots, x_m \in \partial D$  tales que para algún  $r > 0$ ,

$$(2.2.3) \quad \partial D \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)} \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{K}).$$

Definimos ahora  $\Omega = D \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)}$ , que cumple  $\text{sop}(\varphi \circ f) \subseteq \Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq D$  y  $\bar{K} \cap f(\partial \Omega) = \emptyset$ . En efecto, por 2.2.3 tenemos

$$\begin{aligned} \text{sop}(\varphi \circ f) &\subseteq \overline{f^{-1}(\text{sop} \varphi)} \subseteq f^{-1}(\bar{K}) = \bar{D} \setminus f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{K}) \subseteq \\ &\subseteq \bar{D} \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)} = D \setminus \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)} = \Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq D \setminus \bigcup_{i=1}^m B(x_i, r) \subseteq D \end{aligned}$$

y

$$\bar{K} \cap f(\partial \Omega) = \bar{K} \cap f(\bar{\Omega} \setminus \Omega) \subseteq \bar{K} \cap f\left(\bar{\Omega} \cap \bigcup_{i=1}^m \overline{B(x_i, r)}\right) \subseteq \bar{K} \cap f(f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus \bar{K})) = \emptyset.$$

Por el teorema de aproximación de Weierstraß, tomamos una sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(D, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f_j - f\|_\infty^{\bar{\Omega}} \xrightarrow{j} 0$  y  $\|J_{f_j} - J_f\|_\infty^{\bar{\Omega}} \xrightarrow{j} 0$ . Por la convergencia uniforme y la compacidad de  $\bar{K}$  y  $f(\partial \Omega)$ , puesto que  $\bar{K} \cap f(\partial \Omega) = \emptyset$ , para  $j$  mayor que cierto  $j_0$  vale  $\bar{K} \cap f_j(\partial \Omega) = \emptyset$ . Entonces, dado que  $\text{sop}(\varphi \circ f) \subseteq \Omega \subseteq \bar{\Omega} \subseteq D$ , tenemos:

$$\int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f = \int_\Omega (\varphi \circ f) \cdot J_f = \int_\Omega \lim_j (\varphi \circ f_j) \cdot J_{f_j} = \lim_j \int_\Omega (\varphi \circ f_j) \cdot J_{f_j} = 0,$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando el lema 3 a  $\Omega$  y  $f_j$  para cada  $j \in \mathbb{N}$ .



**2.2.2. Algunas propiedades y definición para funciones continuas.** En esta subsección vamos a extender la definición del grado de Brouwer de las funciones  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  a las funciones  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Dicho procedimiento lo haremos usando la densidad (uniforme) de  $C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  en  $C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  y tomando límite de  $d(f_j, D, p)$  respecto a  $j$ . Naturalmente, debemos verificar que dicho límite no depende de la sucesión de las  $f_j \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Para ello demostraremos primero algunas propiedades especiales y lemas intermedios.

La siguiente propiedad resulta intuitiva si se tiene en cuenta la interpretación del grado, dada en la sección 1.2 para el caso bidimensional, como el índice de la curva  $f \circ \gamma$  alrededor del punto  $p$ , donde  $\gamma$  parametrizaba  $\partial D$  en sentido positivo. Más adelante demostraremos esta propiedad en el caso general.

LEMA 10. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Entonces  $d[f, D, \cdot]$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .

DEMOSTRACIÓN. Si  $K \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  es un cubo, entonces por la definición 2 y la observación 9,  $d[f, D, \cdot]$  es constante en  $K$ . En efecto si  $p, q \in K$  y  $K$  está centrado en  $p$ , entonces cualquier  $\varphi$  admisible para  $q$ , soportada en un cubo centrado en  $q$  y contenido en  $K$ , también es admisible para  $p$ . Por lo tanto,

$$d[f, D, p] = \int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f = d[f, D, q].$$

Ahora, para cada  $d \in \mathbb{R}$  el conjunto

$$A_d = \{p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D) : d[f, D, p] = d\},$$

resulta abierto en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, como  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D) = \coprod_{d \in \mathbb{R}} A_d$ , cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  está contenida en un  $A_d$ .  $\square$

La siguiente observación es un caso particular de la propiedad de traslación para funciones  $C^1$ . Más tarde probaremos la propiedad para funciones continuas.

OBSERVACIÓN 11. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Entonces  $d[f - p, D, 0] = d[f, D, p]$ . Esto se debe a que  $0 \notin f - p$  y dada  $\varphi$  admisible para  $p$  y  $f$ , resulta  $\varphi - p$  admisible para  $0$  y  $f - p$ .

El lema 10 implica, en particular, que para  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  es posible mantener el valor de  $d[f, D, p]$  cambiando  $p$  lo suficientemente poco. Veamos ahora que si dejamos fijo a  $p$ , lo mismo vale para  $f$ . El siguiente es el lema fundamental para nuestra definición del grado de una función continua.

LEMA 12. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f_1, f_2 \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus (f_1(\partial D) \cup f_2(\partial D))$ . Si  $7\|f_1 - f_2\|_\infty < \text{dist}(p, f_1(\partial D) \cup f_2(\partial D))$ , entonces  $d[f_1, D, p] = d[f_2, D, p]$ .

DEMOSTRACIÓN. En virtud de la observación 11 suponemos  $p = 0$ . Ahora, usando la desigualdad de la hipótesis tomamos  $\varepsilon > 0$  tal que

$$7\|f_1 - f_2\|_\infty < 7\varepsilon < \text{dist}(p, f_1(\partial D) \cup f_2(\partial D)),$$

lo que implica

$$(2.2.4) \quad \overline{B(0, 7\varepsilon)} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus (f_1(\partial D) \cup f_2(\partial D))$$

y

$$(2.2.5) \quad \|f_1 - f_2\|_\infty < \varepsilon.$$

Sea  $\lambda \in C^1([0, +\infty), [0, 1])$  tal que

$$(2.2.6) \quad \lambda(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq r \leq 2\varepsilon \\ 0 & \text{si } 3\varepsilon \leq r \end{cases}.$$

Definimos, para cada  $x \in \bar{D}$ ,

$$f_3(x) = (1 - \lambda(\|f_1(x)\|)) f_1(x) + \lambda(\|f_1(x)\|) f_2(x).$$

Es claro que  $f_3 \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$ .

Por la acotación  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 2.2.4 y 2.2.5 se verifican las siguientes desigualdades:

$$(2.2.7) \quad \|f_i(x) - f_j(x)\| < \varepsilon \quad (x \in \bar{D}, i, j = 1, 2, 3)$$

y

$$(2.2.8) \quad \|f_i(x)\| > 6\varepsilon \quad (x \in \partial D, i = 1, 2, 3).$$

Asimismo, por 2.2.6 tenemos:

$$(2.2.9) \quad f_3(x) = f_1(x) \quad \text{si } \|f_1(x)\| > 3\varepsilon$$

y

$$(2.2.10) \quad f_3(x) = f_2(x) \quad \text{si } \|f_1(x)\| < 2\varepsilon.$$

Sean  $\varphi_1 \in C_c \left( B(0, 5\varepsilon) \setminus \overline{B(0, 4\varepsilon)} \right)$  y  $\varphi_2 \in C_c(B(0, \varepsilon))$  funciones admisibles para  $q_1 \in B(0, 5\varepsilon) \setminus \overline{B(0, 4\varepsilon)}$  y  $q_2 \in B(0, \varepsilon)$ , respectivamente. Se verifican las siguientes igualdades, que demostraremos luego:

$$(2.2.11) \quad (\varphi_1 \circ f_3) \cdot J_{f_3} = (\varphi_1 \circ f_1) \cdot J_{f_1}$$

y

$$(2.2.12) \quad (\varphi_2 \circ f_3) \cdot J_{f_3} = (\varphi_2 \circ f_2) \cdot J_{f_2}.$$

De 2.2.8, 2.2.11, 2.2.12 y el lema 10 aplicado a  $f_3$  con  $q_1$  y  $q_2$  obtenemos:

$$\begin{aligned} d[f_1, D, 0] &= \int_D (\varphi_1 \circ f_1) \cdot J_{f_1} = \int_D (\varphi_1 \circ f_3) \cdot J_{f_3} = d[f_3, D, q_1] = \\ &= d[f_3, D, q_2] = \int_D (\varphi_2 \circ f_3) \cdot J_{f_3} = \int_D (\varphi_2 \circ f_2) \cdot J_{f_2} = d[f_2, D, 0]. \end{aligned}$$

Ahora demostramos 2.2.11. En efecto, por los soportes de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , y las ecuaciones 2.2.7, 2.2.8 y 2.2.9, se verifican:

$$\begin{aligned} \text{sop}((\varphi_1 \circ f_3) \cdot J_{f_3}) &\subseteq f_3^{-1}(\text{sop}(\varphi_1)) \subseteq f_3^{-1}\left(B(0, 5\varepsilon) \setminus \overline{B(0, 4\varepsilon)}\right) = \\ &= \{x \in D : 4\varepsilon < \|f_3(x)\| < 5\varepsilon\} \subseteq \{x \in D : 3\varepsilon < \|f_1(x)\|\} \subseteq \{x \in D : f_1(x) = f_3(x)\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{sop}((\varphi_1 \circ f_1) \cdot J_{f_1}) &\subseteq f_1^{-1}(\text{sop}(\varphi_1)) \subseteq f_1^{-1}\left(B(0, 5\varepsilon) \setminus \overline{B(0, 4\varepsilon)}\right) = \\ &= \{x \in D : 4\varepsilon < \|f_1(x)\| < 5\varepsilon\} \subseteq \{x \in D : 3\varepsilon < \|f_1(x)\|\} \subseteq \{x \in D : f_3(x) = f_1(x)\}. \end{aligned}$$

Esto implica la verdad de 2.2.11.

Análogamente demostramos 2.2.12. En efecto, por los soportes de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$ , y las ecuaciones 2.2.7, 2.2.8 y 2.2.10, se verifican:

$$\begin{aligned} \text{sop}((\varphi_2 \circ f_3) \cdot J_{f_3}) &\subseteq f_3^{-1}(\text{sop}(\varphi_2)) \subseteq f_3^{-1}(B(0, \varepsilon)) = \\ &= \{x \in D : \|f_3(x)\| < \varepsilon\} \subseteq \{x \in D : \|f_1(x)\| < 2\varepsilon\} \subseteq \{x \in D : f_3(x) = f_2(x)\} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{sop}((\varphi_2 \circ f_2) \cdot J_{f_2}) &\subseteq f_2^{-1}(\text{sop}(\varphi_2)) \subseteq f_2^{-1}(B(0, \varepsilon)) = \\ &= \{x \in D : \|f_2(x)\| < \varepsilon\} \subseteq \{x \in D : \|f_1(x)\| < 2\varepsilon\} \subseteq \{x \in D : f_3(x) = f_2(x)\}. \end{aligned}$$

Esto implica la verdad de 2.2.12. □

A continuación daremos un resultado que mejora al anterior en el sentido de que la cota en la condición suficiente sólo depende de una de las funciones y del punto  $p$ .

LEMA 13. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f, g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Si

$$\|f - g\|_\infty < \frac{1}{8} \text{dist}(p, f(\partial D)),$$

entonces

$$d[f, D, p] = d[g, D, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Primero hacemos algunas observaciones sobre distancias.

Si  $x \in \partial D$ , entonces

$$\|f(x) - p\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - p\|,$$

de lo que se deduce que

$$\text{dist}(p, f(\partial D)) \leq \|f - g\|_\infty + \|g(x) - p\|.$$

Por lo tanto,

$$\text{dist}(p, f(\partial D)) \leq \|f - g\|_\infty + \text{dist}(p, g(\partial D)).$$

Permutando  $f$  y  $g$  deducimos

$$(2.2.13) \quad |\text{dist}(p, f(\partial D)) - \text{dist}(p, g(\partial D))| \leq \|f - g\|_\infty.$$

Por otra parte,

$$(2.2.14) \quad \text{dist}(p, f(\partial D) \cup g(\partial D)) = \min\{\text{dist}(p, f(\partial D)), \text{dist}(p, g(\partial D))\}.$$

En efecto, por la continuidad de  $f$  y  $g$ , la compacidad de  $\partial D$  y la monotonía de la distancia respecto a la inclusión, podemos escribir, para algún  $y \in f(\partial D) \cup g(\partial D)$ ,

$$\|y - p\| = \text{dist}(p, f(\partial D) \cup g(\partial D)) \leq \min\{\text{dist}(p, f(\partial D)), \text{dist}(p, g(\partial D))\}.$$

Pero es claro que

$$\min\{\text{dist}(p, f(\partial D)), \text{dist}(p, g(\partial D))\} \leq \|y - p\|,$$

lo que termina de probar la igualdad.

Ahora por 2.2.14 y 2.2.13 tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{dist}(p, f(\partial D)) - \text{dist}(p, f(\partial D) \cup g(\partial D)) \leq \\ &\leq |\text{dist}(p, f(\partial D)) - \text{dist}(p, g(\partial D))| \leq \|f - g\|_\infty, \end{aligned}$$

y entonces

$$(2.2.15) \quad \text{dist}(p, f(\partial D)) - \|f - g\|_\infty \leq \text{dist}(p, f(\partial D) \cup g(\partial D)).$$

Por lo tanto, si

$$\|f - g\|_\infty < \frac{1}{8} \text{dist}(p, f(\partial D)),$$

se cumple

$$7 \|f - g\|_\infty < \text{dist}(p, f(\partial D) \cup g(\partial D)),$$

y usando el lema 12 se concluye que  $d[f, D, p] = d[g, D, p]$ .  $\square$

El siguiente lema mejora al anterior en el sentido de que permite considerar una  $f$  continua, con tal de tomar una función  $g_1$  que sea  $C^1$  y aproxime suficientemente a  $f$ . Resulta, entonces, que el grado es “localmente constante en las funciones  $C^1$  que están alrededor de una  $f$  continua”.

LEMA 14. Para  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado, sean  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  y  $g_1, g_2 \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Si

$$\|f - g_1\|_\infty < \frac{1}{17} \text{dist}(p, f(\partial D))$$

y

$$\|f - g_2\|_\infty < \frac{1}{16} \text{dist}(p, g_1(\partial D)),$$

entonces

$$d[g_1, D, p] = d[g_2, D, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicando la desigualdad 2.2.13 a  $f$  y  $g_1$ , y la hipótesis, escribimos

$$(2.2.16) \quad \begin{aligned} \text{dist}(p, g_1(\partial D)) &= \text{dist}(p, f(\partial D)) + \text{dist}(p, g_1(\partial D)) - \text{dist}(p, f(\partial D)) \geq \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial D)) - \|f - g_1\|_\infty > 16 \|g_1 - f\|_\infty \geq 0, \end{aligned}$$

con lo que está definido  $d[g_1, D, p]$ .

Entonces, por la hipótesis y 2.2.16 vale

$$\begin{aligned} \|g_1 - g_2\|_\infty &\leq \|g_1 - f\|_\infty + \|g_2 - f\|_\infty < \frac{1}{16} \text{dist}(p, g_1(\partial D)) + \frac{1}{16} \text{dist}(p, g_1(\partial D)) = \\ &= \frac{1}{8} \text{dist}(p, g_1(\partial D)), \end{aligned}$$

y por el lema 13 tenemos que  $d[g_1, D, p] = d[g_2, D, p]$ .  $\square$

Ahora definimos el grado de Brouwer para funciones continuas.

DEFINICIÓN 15. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Definimos el grado de Brouwer como

$$d[f, D, p] = \lim_{j \rightarrow +\infty} d[f_j, D, p],$$

donde  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  verifica que  $\|f_j - f\|_\infty \xrightarrow{j} 0$  y, si  $j_0$  es tal que para cada  $j \geq j_0$  vale que  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ , entonces  $d[f_j, D, p]$  es el número dado por la definición 2 y la observación 9.

OBSERVACIÓN 16. La buena definición se deduce del lema 14 , que (por la segunda condición) permite asegurar la independencia de cuál sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tomemos, siempre que  $\|f_j - f\|_\infty \xrightarrow{j} 0$ . La existencia de una tal sucesión de funciones la asegura el teorema de Stone-Weierstraß. Naturalmente,  $j_0$  puede depender de  $p$  y de  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ . Además, el límite se alcanza.

A partir de lo expuesto podemos deducir una propiedad del grado que luego nos será útil. Se trata de una mejora del lema 14 porque permite tomar  $g_2$  como una  $g$  continua, no necesariamente  $C^1$ . Resulta así que el grado es “localmente constante respecto a las  $f$  continuas”.

OBSERVACIÓN 17. Para  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado, sean  $f, g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  y  $g_1 \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - g_1\|_\infty < \frac{1}{17} \text{dist}(p, f(\partial D)).$$

Si

$$(2.2.17) \quad \|f - g\|_\infty < \min \left\{ \frac{1}{16} \text{dist}(p, g_1(\partial D)), \text{dist}(p, f(\partial D)) \right\},$$

entonces

$$d[g, D, p] = d[f, D, p] = d[g_1, D, p].$$

En efecto, usando 2.2.13 y 2.2.17 podemos escribir

$$\begin{aligned} \text{dist}(p, g(\partial D)) &= \text{dist}(p, f(\partial D)) + \text{dist}(p, g(\partial D)) - \text{dist}(p, f(\partial D)) \geq \\ &\geq \text{dist}(p, f(\partial D)) - \|f - g\|_\infty > 0, \end{aligned}$$

lo que prueba que  $p \in \mathbb{R}^n \setminus g(\partial D)$ , y por lo tanto  $d[g, D, p]$  está definido. Así, por el lema 14, para toda  $g_2 \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - g_2\|_\infty < \frac{1}{16} \text{dist}(p, g_1(\partial D)),$$

se verifica

$$d[g_2, D, p] = d[g_1, D, p].$$

Entonces, por la definición 15 y 2.2.17 tenemos que

$$d[g, D, p] = d[f, D, p].$$

**2.2.3. Verificación de la caracterización.** A continuación vamos a probar la existencia de la función  $d$  en el teorema 2.1 de caracterización. Sea trata de ver que el grado de Brouwer es entero y cumple las propiedades principales. Dejamos la unicidad para la siguiente sección.

PROPOSICIÓN 18. (NORMALIDAD) *Para todo conjunto abierto acotado  $D \subset \mathbb{R}^n$  y todo  $p \in D$ ,*

$$d[Id_{\bar{D}}, D, p] = 1.$$

DEMOSTRACIÓN. Como  $Id_{\bar{D}} \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ , para una función admisible  $\varphi$  tenemos

$$d[Id_{\bar{D}}, D, p] = \int_D (\varphi \circ Id_{\bar{D}}) \cdot J_{Id_{\bar{D}}} = \int_D \varphi = 1.$$

□

PROPOSICIÓN 19. (ADITIVIDAD) *Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $D_1, D_2 \subseteq D$  abiertos disjuntos y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Si  $p \notin f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ , entonces*

$$(2.2.18) \quad d[f, D, p] = d[f, D_1, p] + d[f, D_2, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que los términos en 2.2.18 están definidos. Supongamos que  $p \notin f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ . Entonces, como

$$f(\partial D) = f(\bar{D} \setminus D) \subseteq f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$$

y para  $i = 1, 2$  vale

$$f(\partial D_i) = f(\bar{D}_i \setminus D_i) \subseteq f(\bar{D}_i \setminus (D_1 \cup D_2)) \subseteq f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)).$$

Por lo tanto, tenemos que

$$p \notin f(\partial D) \cup f(\partial D_1) \cup f(\partial D_2),$$

que asegura que los tres grados en 2.2.18 están definidos.

Primero supongamos que  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \cap C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Entonces tomando  $\varphi$  admisible tal que  $\text{sop } \varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ , tenemos:

$$\begin{aligned} d[f, D, p] &= \int_D (\varphi \circ f) \cdot J_f = \int_{\bar{D}} (\varphi \circ f) \cdot J_f = \\ &= \int_{D_1} (\varphi \circ f) \cdot J_f + \int_{D_2} (\varphi \circ f) \cdot J_f + \int_{\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)} (\varphi \circ f) \cdot J_f = \\ &= d[f, D_1, p] + d[f, D_2, p] + \int_{\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)} (\varphi \circ f) \cdot J_f. \end{aligned}$$

Pero

$$\int_{\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)} (\varphi \circ f) \cdot J_f = 0,$$

ya que

$$\begin{aligned} \text{sop } (\varphi \circ f) &\subseteq f^{-1}(\text{sop } \varphi) \subseteq f^{-1}(\mathbb{R}^n \setminus f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))) = \\ &= \bar{D} \setminus f^{-1}(f(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))) \subseteq \bar{D} \setminus (\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2)) = D_1 \cup D_2. \end{aligned}$$

Veamos ahora el caso general de  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Tomemos una sucesión  $(f_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que  $\|f_j - f\|_\infty \xrightarrow{j} 0$ . Por la convergencia uniforme, existe  $j_0$  tal que para todo  $j \geq j_0$  vale que  $p \notin f_j(\bar{D} \setminus (D_1 \cup D_2))$ . Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} d[f, D, p] &= \lim_{j \rightarrow +\infty} d[f_j, D, p] = \lim_{j \rightarrow +\infty} (d[f_j, D_1, p] + d[f_j, D_2, p]) = \\ &= \lim_{j \rightarrow +\infty} d[f_j, D_1, p] + \lim_{j \rightarrow +\infty} d[f_j, D_2, p] = d[f, D_1, p] + d[f, D_2, p]. \end{aligned}$$

□

La invariancia homotópica es más difícil de demostrar. Para ello recurriremos al siguiente lema, que generaliza el lema 10 al caso de  $f$  continua.

LEMA 20. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Entonces  $d[f, D, \cdot]$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .

DEMOSTRACIÓN. Razonando como en la demostración del lema 10, tenemos que para en caso  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  basta ver que  $d[f, D, \cdot]$  es localmente constante. Sea  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Tomemos  $f_0 \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - f_0\|_\infty < \frac{1}{17} \text{dist}(p, f(\partial D)).$$

Por la observación 17, tenemos que

$$d[f, D, p] = d[f_0, D, p].$$

Además, por el lema 10 existe  $\delta > 0$  tal que si  $\|p - q\| < \delta$ , entonces

$$d[f_0, D, p] = d[f_0, D, q].$$

Ahora, si tomamos  $q$  tal que  $\|p - q\|$  sea lo suficientemente pequeño para que

$$\|f - f_0\|_\infty < \frac{1}{17} \text{dist}(q, f(\partial D)),$$

tenemos

$$d[f_0, D, q] = d[f, D, q],$$

y por lo tanto

$$d[f, D, p] = d[f, D, q].$$

Veamos que tal  $q$  se puede tomar. Sabemos que si  $y \in f(\partial D)$ , entonces

$$\text{dist}(p, f(\partial D)) - \|p - q\| \leq \|p - y\| - \|p - q\| \leq \|q - y\|,$$

y por lo tanto

$$\text{dist}(p, f(\partial D)) - \|p - q\| \leq \text{dist}(q, f(\partial D)).$$



Entonces, basta tomar  $q$  tal que

$$\text{dist}(p, f(\partial D)) - \|p - q\| > 17 \|f - f_0\|_\infty.$$

Finalmente, para todo  $q$  tal que

$$\|p - q\| < \min\{\delta, \text{dist}(p, f(\partial D)) - 17 \|f - f_0\|_\infty\}$$

se tiene

$$d[f, D, p] = d[f, D, q].$$

□

A continuación enunciaremos y demostraremos la invariancia homotópica.

PROPOSICIÓN 21. (INVARIANCIA HOMOTÓPICA) *Para todo conjunto abierto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , toda  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  y toda función  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que en todo  $t \in [0, 1]$  se cumple  $y(t) \notin H(\partial D \times \{t\})$ , el valor  $d[H(\cdot, t), D, y(t)]$  es independiente de  $t \in [0, 1]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que  $d : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $d(t) = d[H_t, D, y(t)]$  si  $H_t = H(\cdot, t)$  y  $t \in [0, 1]$  es localmente constante. En efecto, por el lema 20 y la continuidad de  $y$ , dado  $t_1 \in [0, 1]$  existe  $\delta > 0$  tal que, para todo  $t_2 \in [0, 1]$ ,  $|t_2 - t_1| < \delta$  implica

$$d[H_{t_1}, D, y(t_2)] = d[H_{t_1}, D, y(t_1)].$$

En principio,  $\delta$  depende de  $t_1$ , pero aprovechando la compacidad de  $[0, 1]$  lo tomamos independiente de dicho valor. Sea ahora  $t_0 \in [0, 1]$  cualquiera. Por la observación 17 y la continuidad (uniforme) de  $H$ , existe  $\gamma(t_0) > 0$  tal que para todo  $t_1 \in [0, 1]$  que verifica  $|t_1 - t_0| < \gamma(t_0)$  vale

$$d[H_{t_1}, D, y(t_0)] = d[H_{t_0}, D, y(t_0)].$$

Entonces, para todo  $t_1 \in [0, 1]$  tal que  $|t_1 - t_0| < \min\{\delta, \gamma(t_0)\}$  se tiene que

$$d[H_{t_1}, D, y(t_1)] = d[H_{t_1}, D, y(t_0)] = d[H_{t_0}, D, y(t_0)].$$

□

Resta probar que el grado es entero. Para ello necesitaremos extender la propiedad de aditividad a una cantidad finita cualquiera de abiertos mutuamente disjuntos. Tal aditividad generalizada también resulta intuitiva, si tenemos en cuenta lo visto en el final del capítulo introductorio.

PROPOSICIÓN 22. Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $D_1, D_2, \dots, D_m \subseteq D$  abiertos mutuamente disjuntos y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Si  $p \notin f\left(\bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j\right)$ , entonces

$$(2.2.19) \quad d[f, D, p] = \sum_{j=1}^m d[f, D_j, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos inducción en  $m$ .

Para  $m = 2$ , tenemos probada la propiedad de aditividad del grado de Brouwer.

Ahora tomemos la hipótesis inductiva para cierto  $m > 1$ .

Supongamos que  $D_1, D_2, \dots, D_{m+1} \subseteq D$  y  $p \notin f\left(\bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} D_j\right)$ . Cambiando los subíndices

si es necesario, podemos asumir que  $p \notin f\left(\bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j\right)$ . Por el caso  $m = 2$  y la hipótesis inductiva escribimos

$$d[f, D, p] = d\left[f, \bigcup_{j=1}^m D_j, p\right] + d[f, D_{m+1}, p] = \sum_{j=1}^m d[f, D_j, p] + d[f, D_{m+1}, p].$$

□

OBSERVACIÓN 23. Nótese que en la demostración anterior sólo se usó la aditividad. Por lo tanto, la propiedad demostrada sólo depende de la caracterización del grado de Brouwer.

La propiedad anterior nos permite relacionar al grado de una función con los números enteros, pero esto (en principio) es en el caso en que  $f \in C^1$  y  $p$  es un valor regular de  $f$ . Primero, veamos algo sobre valores regulares.

DEFINICIÓN 24. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . Decimos que  $p \in \mathbb{R}^n$  es un *valor regular* de  $f$  si para todo  $x \in f^{-1}(p)$  vale que  $J_f(x) \neq 0$ . Observamos que si  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , entonces  $p$  es un valor regular de  $f$ . Si  $p$  no es un valor regular de  $f$ , decimos que  $p$  es un *valor crítico* de  $f$ .

Pronto usaremos el siguiente y muy conocido resultado, que nos permitirá pasar al caso en que  $p$  no es necesariamente un valor regular de  $f$ .

TEOREMA 25. (SARD) Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto y  $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ . El conjunto de valores críticos de  $f$  tiene medida de Lebesgue nula.

En particular, el conjunto de valores regulares de  $f$  es denso en  $\mathbb{R}^n$ .

La siguiente proposición para valores regulares sugiere un punto de partida alternativo para definir el grado de Brouwer, a la vez que da una importante interpretación del mismo.

Se trata del enfoque de Nagumo, que está relacionado con la idea del “conteo de ceros de  $f - p$  en  $D$ ”. Más tarde, cuando demostremos la unicidad, volveremos sobre esta idea. En particular, queda claro que, para el caso de valores regulares, el grado es entero.

PROPOSICIÓN 26. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  y  $p \notin f(\partial D)$  un valor regular de  $f$ . Entonces

$$(2.2.20) \quad d[f, D, p] = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sign}(J_f(q)).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , el resultado es obvio.

Supongamos que  $f^{-1}(p) \neq \emptyset$ . Entonces  $f^{-1}(p) \subseteq D$  es un conjunto compacto no vacío. Por el Teorema de la Función Inversa,  $f^{-1}(p)$  es también discreto, y por lo tanto finito. Así, podemos escribir  $f^{-1}(p) = \{q_1, \dots, q_m\}$ . Por la continuidad de  $f$  y nuevamente por el Teorema de la Función Inversa, consideramos para cada  $1 \leq j \leq m$  un abierto  $D_j$  tal que  $q_j \in D_j \subseteq D$ , de manera que  $f|_{D_j} : D_j \rightarrow V$  es difeomorfismo y, para cualesquiera  $j \neq j'$  vale  $D_j \cap D_{j'} = \emptyset$ . Entonces,  $V$  resulta ser un entorno abierto de  $p$  y como  $f^{-1}(p) \subseteq \bigcup_{j=1}^m D_j$ , se tiene que  $p \notin f\left(\bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j\right)$ . Sea, para cada  $1 \leq j \leq m$ ,  $\varphi_j$  una función admisible para  $d[f, D_j, p]$  con soporte en  $V$ . Aplicando la proposición 22 y el Teorema de Cambio de Variables escribimos:

$$\begin{aligned} d[f, D, p] &= \sum_{j=1}^m d[f, D_j, p] = \sum_{j=1}^m \int_{D_j} (\varphi_j \circ f) \cdot J_f = \\ &= \sum_{j=1}^m \text{sign}(J_f(q_j)) \int_{D_j} (\varphi_j \circ f) \cdot |J_f| = \sum_{j=1}^m \text{sign}(J_f(q_j)) \int_V \varphi_j = \sum_{j=1}^m \text{sign}(J_f(q_j)). \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 27. Como dijimos en la sección 1.2, en el caso  $n = 2$  con  $f$  holomorfa en  $\bar{D}$  la cuenta de los ceros de  $f - p$  en  $D$  es exacta si  $p$  es valor regular de  $f$ . En efecto, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann los jacobianos en 2.2.20 resultan positivos. Esto también puede observarse por el teorema de ceros y polos, ya que por ser  $p$  un valor regular de  $f$ , la multiplicidad de cada cero de  $f - p$  es 1.

COROLARIO 28. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Entonces  $d[f, D, p]$  es un entero.

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 10,  $d[f, D, \cdot]$  es constante en cada componente conexa del abierto  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . Por el Teorema de Sard, toda componente conexa de dicho abierto contiene algún valor regular de  $f$ , ya que es abierta en  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, por la proposición 26  $d[f, D, \cdot]$  da un valor entero en cada punto de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ . □

COROLARIO 29. Sean  $D \subset \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  y  $p \notin f(\partial D)$ . Entonces  $d[f, D, p]$  es un entero.

DEMOSTRACIÓN. Es claro por la definición 15.  $\square$

### 2.3. Unicidad del grado.

Sea ahora

$$d : \{(f, D, p) : D \subset \mathbb{R}^n \text{ abierto acotado, } f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n), p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

una función que verifica las tres propiedades principales del grado de Brouwer dadas en el teorema 2.1. Veremos que esta función es única. Nuestra estrategia puede dividirse en dos partes: primero demostrar la unicidad de  $d$  para valores regulares de funciones  $C^1$ , y luego demostrar que tal unicidad es suficiente. El primer objetivo se alcanzará al probar un enunciado similar al de la proposición 26. Lograremos nuestro segundo objetivo usando dicho enunciado, el teorema de Sard, la observación 32 y la proposición 33. En esta sección se pondrá de manifiesto el hecho de que la propiedad de invariancia homotópica que usamos es muy fuerte, ya que interviene de manera fundamental en casi todas las demostraciones.

Comenzamos con algunas propiedades, derivadas de las principales, que nos servirán para conseguir nuestros dos objetivos.

PROPOSICIÓN 30. *Se satisfacen:*

1. (NULIDAD) *Para todo  $p \in \mathbb{R}^n$  se satisface  $d[f, \emptyset, p] = 0$ .*
2. (ESCISIÓN) *Si  $p \notin f(\bar{D} \setminus D_1)$ , entonces  $d[f, D, p] = d[f, D_1, p]$ .*
3. (SOLUCIÓN) *Si  $p \notin f(\bar{D})$ , entonces  $d[f, D, p] = 0$ .*
4. (TRASLACIÓN) *Si  $p \notin f(\partial D)$ , entonces  $d[f, D, p] = d[f - p, D, 0]$ .*

DEMOSTRACIÓN. 1. Basta tomar  $D = \emptyset$  en la propiedad de aditividad.

2. Basta tomar  $D_2 = \emptyset$  en la propiedad de aditividad y usar la propiedad de nulidad.

3. Basta tomar  $D_1 = \emptyset$  en la propiedad de escisión y usar la propiedad de nulidad.

4. Consideramos la homotopía  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$H(x, t) = f(x) - tp$$

y la función  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$y(t) = (1 - t)p.$$

Se tiene que  $H_0 = f$ ,  $H_1 = f - p$ ,  $y(0) = p$  e  $y(1) = 0$ . Además, si  $(x, t) \in \partial D \times [0, 1]$ , entonces

$$H(x, t) - y(t) = f(x) - p \neq 0,$$

y por lo tanto  $y(t) \notin H_t(\partial D)$ . Así, por la invariancia homotópica tenemos el resultado.  $\square$

En la demostración de la propiedad de traslación podemos ver el principio de lo que será un esquema frecuente de procedimiento para demostrar proposiciones mediante el uso del grado de Brouwer. Esto es: probar una o varias igualdades de grados mediante la selección de funciones  $H$  e  $y$  adecuadas. En general, las igualdades de grados a probar estarán relacionadas con nuestro problema a través de otras propiedades del grado, sean éstas principales o derivadas. Por ejemplo, veamos que la aplicación  $d[f, D, \cdot]$  es localmente constante.

PROPOSICIÓN 31. *Si  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ ,  $q \in \mathbb{R}^n$  y  $\|p - q\| < \frac{1}{4} \text{dist}(p, f(\partial D))$ , entonces  $d[f, D, p] = d[f, D, q]$ .*

DEMOSTRACIÓN. Tomamos la homotopía  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$H(x, t) = f(x)$$

y la curva  $y \in C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$y(t) = t(q - p) + p.$$

Tenemos entonces que  $y(0) = p$ ,  $y(1) = q$  y  $H_0 = H_1 = f$ .

Sea ahora  $(x, t) \in \partial D \times [0, 1]$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - y(t)\| &= \|f(x) - p - t(q - p)\| \geq \|f(x) - p\| - \|q - p\| > \\ &> \frac{1}{2} \text{dist}(p, f(\partial D)) - \frac{1}{4} \text{dist}(p, f(\partial D)) > 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $y(t) \notin H_t(\partial D)$ , y el resultado se sigue de la invariancia homotópica.  $\square$

Razonando como hicimos en otras oportunidades, es claro que se cumple el siguiente hecho, que vimos como una propiedad derivada del grado de Brouwer.

OBSERVACIÓN 32. La aplicación  $d[f, D, \cdot]$  es constante en cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ .

Otra propiedad conocida del grado, que no resulta obvia de nuestra definición, es que si dos funciones coinciden en el borde de  $\partial D$ , entonces tienen el mismo grado. Este hecho lo mencionamos en la sección 1.4, y parece razonable si se tiene en cuenta que la integral de Kronecker se realiza sobre  $\partial D$ . La siguiente proposición aporta una cota y la propiedad mencionada resulta inmediata a partir de ella.

PROPOSICIÓN 33. *Si  $f, g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  y*

$$\|f - g\|_{\infty}^{\partial D} < \text{dist}(f(\partial D), p),$$

*entonces*

$$d[f, D, p] = d[g, D, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Tomamos algún  $\delta \in (0, 1)$  tal que

$$\|f - g\|_{\infty}^{\partial D} < \delta \operatorname{dist}(f(\partial D), p).$$

Sea la homotopía  $H \in C(\bar{D} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$H(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x).$$

Ahora, para  $(x, t) \in \partial D \times [0, 1]$  tenemos

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - p\| &= \|f(x) - p + t(g(x) - f(x))\| \geq \\ &\geq \|f(x) - p\| - t\|g(x) - f(x)\| \geq (1 - t\delta) \operatorname{dist}(f(\partial D), p) > 0. \end{aligned}$$

Entonces, como  $H_0 = f$  y  $H_1 = g$ , vale  $d[f, D, p] = d[g, D, p]$ .  $\square$

OBSERVACIÓN 34. Si  $f, g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ ,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  y  $f|_{\partial D} = g|_{\partial D}$ , entonces  $d[f, D, p] = d[g, D, p]$ .

Recordamos que de la proposición 22 y la observación 23 se deduce la siguiente propiedad de aditividad generalizada.

PROPOSICIÓN 35. Sea  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $D_1, D_2, \dots, D_m \subseteq D$  abiertos mutuamente disjuntos y  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$ . Si  $p \notin f\left(\bar{D} \setminus \bigcup_{j=1}^m D_j\right)$ , entonces

$$(2.3.1) \quad d[f, D, p] = \sum_{j=1}^m d[f, D_j, p].$$

A partir de esta propiedad nos dirigiremos hacia nuestro primer objetivo, pero antes necesitamos saber cómo es el grado de los isomorfismos lineales. Ello se debe a que, en cierta forma, para abiertos  $D_j$  suficientemente pequeños, reduciremos el cálculo de  $d[f, D_j, p]$  al caso lineal. Más específicamente, pasaremos a considerar la aproximación lineal de  $f$  alrededor de un punto, como luego veremos en detalle.

Ante todo, estudiaremos el caso de un isomorfismo lineal en el origen. Primero veremos dos resultados acerca de equivalencia homotópica entre matrices no singulares. Si  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$ , notaremos  $\operatorname{diag}(m_1, \dots, m_n)$  a la matriz diagonal cuya diagonal consta de tales números en el mismo orden. Si  $A_1, \dots, A_k$  son matrices cuadradas, notaremos  $\operatorname{blog}(A_1, \dots, A_k)$  a la matriz por bloques  $A_1, \dots, A_k$ . Si  $A, B \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  son lineales no singulares, escribiremos  $A \cong B$  si existe una homotopía  $H \in C(\mathbb{R}^n \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  tal que para todo  $t \in [0, 1]$  vale  $\det H_t \neq 0$ . En esta sección a menudo identificaremos los endomorfismos lineales de  $\mathbb{R}^n$  con su correspondiente matriz en la base canónica de dicho espacio.

LEMA 36. Si  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$  son tales que  $m_1^2 = \dots = m_n^2 = 1$ , entonces  $\text{diag}(m_1, \dots, m_n) \cong \text{diag}(m_1 \dots m_n, 1, \dots, 1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Procederemos por inducción en  $n$ . El caso  $n = 1$  es obvio.

El caso  $n = 2$  se deduce de que  $\text{bloq}(\pm 1, 1) \cong \text{bloq}(\mp 1, -1)$  a través de la homotopía dada por

$$H_t = \begin{bmatrix} \pm \cos \pi t & \mp \sin \pi t \\ \sin \pi t & \cos \pi t \end{bmatrix}.$$

Ahora suponemos válido el resultado para algún  $n > 2$  y vemos que vale para  $n + 1$ . En efecto, sean  $m_1, \dots, m_{n+1} \in \mathbb{R}$  tales que  $m_1^2 = \dots = m_{n+1}^2 = 1$ . Usando el caso  $n = 2$  y la hipótesis inductiva escribimos

$$\begin{aligned} \text{diag}(m_1, \dots, m_{n+1}) &\cong \text{bloq}(\text{diag}(m_1, \dots, m_{n-1}), \text{diag}(m_n, m_{n+1})) \cong \\ &\cong \text{bloq}(\text{diag}(m_1, \dots, m_{n-1}), \text{diag}(m_n m_{n+1}, 1)) = \\ &= \text{bloq}(\text{diag}(m_1, \dots, m_{n-1}, m_n m_{n+1}), \text{diag}(1)) \cong \\ &\cong \text{bloq}(\text{diag}(m_1 \dots m_{n+1}, 1, \dots, 1), \text{diag}(1)) = \text{diag}(m_1 \dots m_{n+1}, 1, \dots, 1). \end{aligned}$$

□

LEMA 37. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es no singular, entonces  $A \cong \text{diag}(\text{sign det } A, 1, \dots, 1)$ .

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que multiplicar una columna por una constante positiva y sumar columnas preserva la pertenencia a una clase homotópica de matrices no singulares, y por lo tanto (por continuidad) no se modifica el signo del determinante al aplicar de manera sucesiva estas operaciones.

En efecto, sean  $A = (C_1, \dots, C_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\lambda > 0$ . Tomando, para  $t \in [0, 1]$  y  $1 \leq i \leq j \leq n$ ,

$$H_j(t) = (C_1, \dots, (\lambda t + (1-t))C_j, \dots, C_n),$$

$$G_{ij} = (C_1, \dots, C_i, \dots, tC_i + C_j, \dots, C_n)$$

y

$$L_{ij} = (C_1, \dots, tC_i + C_j, \dots, C_i, \dots, C_n),$$

y aplicando las propiedades del determinante, resulta que

$$A \cong (C_1, \dots, \lambda C_j, \dots, C_n),$$

$$A \cong (C_1, \dots, C_i, \dots, C_i + C_j, \dots, C_n)$$

y

$$A \cong (C_1, \dots, C_i + C_j, \dots, C_i, \dots, C_n).$$

Entonces existen  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{R}$  tales que  $m_1^2 = \dots = m_n^2 = 1$  y

$$A \cong \text{diag}(m_1, \dots, m_n).$$

Ahora, por el lema 36 vale

$$A \cong \text{diag}(m_1 \dots m_n, 1, \dots, 1).$$

Dado que el signo del determinante se mantiene, tenemos que  $m_1 \dots m_n = \text{sign det } A$ .  $\square$

El siguiente resultado fundamental es la herramienta que nos faltaba para alcanzar nuestro primer objetivo. Este enunciado es evidente si se tiene en cuenta la descripción de grado de Brouwer para valores regulares dada en la proposición 26.

PROPOSICIÓN 38. *Si  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lineal no singular y  $D$  es un entorno abierto y acotado de 0, entonces  $d[A, D, 0] = \text{sign det } A$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el lema 37

$$d[A, D, 0] = d[\text{diag}(\text{sign det } A, 1, \dots, 1), D, 0],$$

y por la propiedad de escisión este número no depende del entorno  $D$ .

Si  $\text{sign det } A = 1$ , entonces por la propiedad de normalidad  $d[A, D, 0] = 1$ .

Supongamos ahora que  $\text{sign det } A = -1$  y veamos que

$$d[\text{diag}(-1, 1, \dots, 1), D, 0] = -1.$$

Definimos los abiertos

$$U_1 = (-1, 1)^n,$$

$$U_2 = (1, 3) \times (-1, 1)^{n-1}$$

y

$$U = (-1, 3) \times (-1, 1)^{n-1}.$$

Entonces tenemos que  $U_1, U_2 \subseteq U$  y  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ . Sean  $M_1, M_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  las aplicaciones dadas por

$$M_1(x_1, \tilde{x}) = (|x_1 - 1| - 1, \tilde{x})$$

y

$$M_2(x_1, \tilde{x}) = (1, \tilde{x}),$$

respectivamente. Tomamos la homotopía  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$H(x, t) = tM_1(x) + (1 - t)M_2(x).$$

Entonces,  $H_0 = M_2$  y  $H_1 = M_1$ .



Veamos que esta homotopía es válida para  $U$  y  $0$ . Para ello usamos el hecho de que  $\partial U = \partial((-1, 3) \times (-1, 1)^{n-1}) = (\{-1, 3\} \times [-1, 1]^{n-1}) \cup ([-1, 3] \times \partial([-1, 1]^{n-1}))$ .

A partir de esta igualdad analizamos las posibilidades para  $t \in [0, 1]$  y  $(x_1, \tilde{x}) \in \partial U$ . Para  $(x, \tilde{x}) \in \{-1, 3\} \times [-1, 1]^{n-1}$  tenemos

$$H(x_1, \tilde{x}, t) = t(|x_1 - 1| - 1, \tilde{x}) + (1 - t)(1, \tilde{x}) = (1, \tilde{x}) \neq 0.$$

Para  $(x, \tilde{x}) \in [-1, 3] \times \partial([-1, 1]^{n-1})$  tenemos

$$H(x_1, \tilde{x}, t) = t(|x_1 - 1| - 1, \tilde{x}) + (1 - t)(1, \tilde{x}) = (t(|x_1 - 1| - 1) + (1 - t), \tilde{x}) \neq 0.$$

Entonces,  $H$  es válida y por lo tanto  $d[M_1, U, 0] = d[M_2, U, 0]$ . Pero, por la propiedad de solución, vale  $d[M_2, U, 0] = 0$ . Así, resulta  $d[M_1, U, 0] = 0$ . Ahora, como

$$M_1^{-1}(0) = \{(0, 0), (2, 0)\} \subseteq U_1 \cup U_2,$$

aplicando la aditividad escribimos

$$0 = d[M_1, U, 0] = d[M_1, U_1, 0] + d[M_1, U_2, 0].$$

Como  $M_1|_{\bar{U}_1} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$  y  $M_1|_{\bar{U}_2} = Id_{\mathbb{R}^n} - (2, 0)$ , vale

$$\begin{aligned} d[\text{diag}(-1, 1, \dots, 1), U_1, 0] &= d[M_1, U_1, 0] = \\ &= -d[M_1, U_2, 0] = -d[Id_{\mathbb{R}^n} - (2, 0), U_2, 0]. \end{aligned}$$

Ahora, como  $(2, 0) \in U_2$ , aplicando las propiedades de traslación y normalidad obtenemos

$$d[\text{diag}(-1, 1, \dots, 1), U_1, 0] = -d[Id_{\mathbb{R}^n} - (2, 0), U_2, 0] = -d[Id_{\mathbb{R}^n}, U_2, (2, 0)] = -1.$$

Observamos que el hecho de que  $d[M_1, U_1, 0] = 1$  y  $d[M_1, U_2, 0] = -1$  es en cierta forma intuitivo, si tenemos en cuenta la definición de la función  $M_1$  y recordamos el comportamiento del grado de Brouwer con respecto a los valores regulares dado por el teorema 26.  $\square$

Llegamos ahora a la proposición que establece la igualdad de la función  $d$  con el grado de Brouwer en el caso especial de un valor regular de una función  $C^1$ . Dicha igualdad resulta clara por la proposición 26. Pero principalmente, queda establecida la unicidad de  $d$  en el caso especial mencionado, que es nuestro primer objetivo. Como habíamos dicho, la idea de la demostración es usar la aditividad extendida para descomponer el grado en una suma de grados respecto a abiertos más pequeños, y en cada uno de esos abiertos reducir la situación al caso lineal, usando la aproximación de primer orden de  $f$ . Lo primero es posible por la aditividad y por tratarse de un valor regular, cosa que además

permite tomar los abiertos de manera que  $f$  restringida a cada uno sea un difeomorfismo. Lo segundo podemos hacerlo aplicando esto último y otras propiedades del grado .

PROPOSICIÓN 39. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un abierto acotado,  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$  un valor regular de  $f$ . Se verifica

$$d[f, D, p] = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \text{sign}(J_f(q)).$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $f^{-1}(p) = \emptyset$ , por la propiedad de solución vale

$$d[f, D, p] = 0.$$

Ahora supongamos que  $f^{-1}(p) \neq \emptyset$ . Por la aditividad extendida vale

$$(2.3.2) \quad d[f, D, p] = \sum_{q \in f^{-1}(p)} d[f, U_q, p],$$

donde si  $q_1, q_2 \in f^{-1}(p)$  son distintos, entonces  $U_{q_1}$  y  $U_{q_2}$  son abiertos disjuntos de  $D$ .

Sea  $q \in f^{-1}(p)$ . Por la diferenciabilidad de  $f$  tenemos

$$(2.3.3) \quad f(x) = \nabla f(q)(x - q) + f(q) + w_q(x) = \nabla f(q)(x - q) + p + w_q(x),$$

donde  $w_q$  es continua tal que  $\lim_{x \rightarrow q} \frac{w_q(x)}{\|x - q\|} = 0$ .

Como  $p$  es valor regular de  $f$ , existe  $c > 0$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  vale

$$\|\nabla f(q) \cdot x\| > c \|x\|.$$

Además, elegimos  $U_q$  de manera que en todo  $x \in \bar{U}_q$  vale

$$\|w_q(x)\| < \frac{c}{2} \|x - q\|.$$

Ahora tratamos de reducir  $d[f, U_q, p]$  al caso lineal, usando la aproximación de primer orden de  $f$  alrededor de  $q$ . Tomamos la homotopía  $H \in C(\bar{U}_q \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  dada por

$$H(x, t) = (1 - t)(f(x) - p) + t\nabla f(q)(x - q) + p.$$

Si  $(x, t) \in \partial U_q \times [0, 1]$ , entonces por la ecuación 2.3.3 escribimos

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - p\| &= \|(1 - t)(\nabla f(q)(x - q) + w_q(x)) + t\nabla f(q)(x - q)\| = \\ &= \|\nabla f(q)(x - q) + (1 - t)w_q(x)\| > c\|x - q\| - (1 - t)\|w_q(x)\| > \frac{c}{2}\|x - q\| > 0. \end{aligned}$$

Así, aplicando la invariancia homotópica y la traslación obtenemos

$$(2.3.4) \quad \begin{aligned} d[f, U_q, p] &= d[H_0, U_q, p] = d[H_1, U_q, p] = \\ &= d[\nabla f(q)(\cdot - q) + p, U_q, p] = d[\nabla f(q)(\cdot - q), U_q, 0]. \end{aligned}$$

Ahora necesitamos cambiar  $\nabla f(q)(\cdot - q)$  por la matriz  $\nabla f(q)$ . Consideremos  $r > 0$  tal que  $U_q \subseteq B(0, r)$ . Sea la homotopía  $G \in C(\overline{B(0, r)} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$  definida por

$$G(x, t) = \nabla f(q)(x - tq).$$

Entonces, para  $(x, t) \in \partial B(0, r) \times [0, 1]$  tenemos

$$G(x, t) = 0 \iff \nabla f(q)(x - tq) = 0 \iff x = tq \implies x \in B(0, r),$$

y lo último es falso. Por lo tanto, esta homotopía es válida y tenemos

$$(2.3.5) \quad \begin{aligned} d[\nabla f(q)(\cdot - q), U_q, 0] &= d[\nabla f(q)(\cdot - q), B(0, r), 0] = \\ &= d[G_1, B(0, r), 0] = d[G_0, B(0, r), 0] = d[\nabla f(q), B(0, r), 0]. \end{aligned}$$

Pero como  $p$  es valor regular de  $f$ ,  $\det \nabla f(q) \neq 0$ , y por la proposición 38

$$(2.3.6) \quad d[\nabla f(q), B(0, r), 0] = \text{sign} \det \nabla f(q) = \text{sign}(J_f(q)).$$

Entonces, por las ecuaciones 2.3.4, 2.3.5 y 2.3.6 tenemos

$$d[f, U_q, p] = \text{sign}(J_f(q)),$$

lo que junto con la ecuación 2.3.2 termina de probar el resultado.  $\square$

A continuación demostraremos la unicidad de la función  $d$ . Esto constituye nuestro segundo objetivo. Si  $f \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n)$  y  $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial D)$ , por el teorema de aproximación de Weierstraß consideramos una función  $g \in C(\bar{D}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(D, \mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|f - g\|_{\infty}^{\partial D} < \text{dist}(f(\partial D), p).$$

Así, por la proposición 33 tenemos que

$$d[f, D, p] = d[g, D, p].$$

Ahora, por el teorema de Sard, podemos elegir un valor regular  $q$  de  $g$  que pertenece a la misma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus g(\partial D)$  que  $p$ . Por la observación 32 se verifica que

$$d[g, D, p] = d[g, D, q].$$

Pero por la proposición 39 el valor  $d[g, D, q]$  está unívocamente determinado. Esto termina de probar la unicidad de la función  $d$ .

## 2.4. Generalización a espacios vectoriales de dimensión finita.

Más adelante abordaremos resultados para cuyo tratamiento es conveniente contar con un poco más de generalidad en la noción de grado. La primera y más natural generalización es a espacios vectoriales de dimensión finita. Para ello nos inspiraremos en la idea de carta global de coordenadas, presente en la geometría diferencial. Pero sólo necesitamos ver

cómo afecta al grado la composición con isomorfismos lineales. El siguiente lema ilustra esta situación.

LEMA 40. Sean  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto acotado,  $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$  continua,  $p \in \mathbb{R}^n \setminus A \circ g(\partial D)$  y  $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  isomorfismos lineales. Entonces

$$d[A \circ g \circ B, B^{-1}(D), p] = \text{sign}(\det(AB)) d[g, D, A^{-1}(p)].$$

DEMOSTRACIÓN. La aplicación  $f = A \circ g \circ B$  es continua en  $B^{-1}(\bar{D}) = \overline{B^{-1}(D)}$  y  $p \notin f(\partial B^{-1}(D)) = f(B^{-1}(\partial D))$ , lo que es equivalente a que  $A^{-1}(p) \notin g(\partial D)$ . En consecuencia, los grados  $d[A \circ g \circ B, B^{-1}(D), p]$  y  $d[g, D, A^{-1}(p)]$  están definidos.

Por la definición de grado de Brouwer para funciones continuas, el teorema de Sard y la proposición 26, podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $g \in C(\bar{D}) \cap C^1(D)$  y que  $p$  es un valor regular de  $A \circ g \circ B$ , y escribir:

$$\begin{aligned} d[A \circ g \circ B, B^{-1}(D), p] &= \sum_{x \in (A \circ g \circ B)^{-1}(p)} \text{sign} J_{A \circ g \circ B}(x) = \\ &= \sum_{x \in (A \circ g \circ B)^{-1}(p)} \text{sign}(\det A J_g(Bx) \det B) = \text{sign} \det AB \sum_{y \in g^{-1}(A^{-1}p)} \text{sign} J_g(y) = \\ &= (\text{sign} \det AB) d[g, D, A^{-1}(p)]. \end{aligned}$$

□

Ahora damos una primera generalización del grado de Brouwer. Las cartas globales se corresponderían con los isomorfismos  $g$  y  $h$  que figuran en el enunciado.

DEFINICIÓN 41. Sean  $X, Y$  dos espacios vectoriales topológicos de dimensión  $n$ . Sean  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $h : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos isomorfismos lineales. Sean  $D \subseteq X$  abierto acotado,  $f : \bar{D} \rightarrow Y$  continua y  $p \in Y \setminus f(\partial D)$ . Llamando  $\mu_g$  y  $\mu_h$  a las orientaciones inducidas por  $g$  y  $h$  en  $X$  e  $Y$ , respectivamente, definimos:

$$d[f, D, p, \mu_g, \mu_h] = d[g \circ f \circ h^{-1}, h(D), g(p)].$$

El segundo miembro de la igualdad está definido porque  $l = g \circ f \circ h^{-1}$  es continua en  $\overline{h(D)} = h(\bar{D})$  y  $g(p) \notin l(\partial h(D)) = g \circ f(\partial D)$  equivale a  $p \notin f(\partial D)$ .

Esta definición depende sólo de las orientaciones inducidas por  $g$  y  $h$ . En efecto, sean  $\tilde{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\tilde{h} : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  dos isomorfismos lineales que inducen las mismas orientaciones que  $g$  y  $h$ , respectivamente. Sean  $i = \tilde{h} \circ h^{-1}$  y  $j = \tilde{g} \circ g^{-1}$ . Escribimos:

$$\begin{aligned} (2.4.1) \quad d[g \circ f \circ h^{-1}, h(D), g(p)] &= d[j^{-1} \circ (\tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}) \circ i, h(D), g(p)] = \\ &= d[j^{-1} \circ (\tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}) \circ i, i^{-1}(\tilde{h}(D)), j^{-1}(\tilde{g}(p))], \end{aligned}$$

y por el lema 40,

$$(2.4.2) \quad \begin{aligned} d \left[ j^{-1} \circ \left( \tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1} \right) \circ i, i^{-1} \left( \tilde{h}(D) \right), j^{-1} \left( \tilde{g}(p) \right) \right] = \\ = \text{sign} \left( \det j^{-1}i \right) d \left[ \tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}, \tilde{h}(D), \tilde{g}(p) \right]. \end{aligned}$$

Ahora,  $j^{-1}i = (g \circ \tilde{g}^{-1}) \circ (\tilde{h} \circ h^{-1})$ , y como las orientaciones inducidas son las mismas,  $\text{sign}(\det j^{-1}i) = 1$ , con lo que se tiene

$$d[g \circ f \circ h^{-1}, h(D), g(p)] = d[\tilde{g} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}, \tilde{h}(D), \tilde{g}(p)].$$

A partir de esto definiremos el grado de Brouwer en un espacio vectorial topológico de dimensión finita.

DEFINICIÓN 42. Sean  $X$  un espacio lineal topológico de dimensión finita,  $D \subseteq X$  abierto y acotado,  $f: \bar{D} \rightarrow X$  continua y  $p \in X \setminus f(\partial D)$ . El grado de Brouwer se define como

$$d[f, D, p] = d[h \circ f \circ h^{-1}, h(D), h(p)],$$

donde  $h: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un isomorfismo lineal.

Esta definición es un caso particular de la definición anterior, en la forma

$$d[f, D, p] = d[f, D, p, \mu_h, \mu_h],$$

por lo que en principio sólo depende de  $\mu_h$ . Más aún, si se considera otro isomorfismo lineal  $\tilde{h}: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ , poniendo  $g = h$  y  $\tilde{g} = \tilde{h}$  en las ecuaciones 2.4.1 y 2.4.2, dado que  $j^{-1}i = (h \circ \tilde{h}^{-1}) \circ (\tilde{h} \circ h^{-1}) = Id_{\mathbb{R}^n}$ , se tiene

$$d[h \circ f \circ h^{-1}, h(D), h(p)] = d[\tilde{h} \circ f \circ \tilde{h}^{-1}, \tilde{h}(D), \tilde{h}(p)].$$

Por lo tanto, la definición no depende de  $h$ .

OBSERVACIÓN. Puede probarse que este grado verifica propiedades análogas al grado de Brouwer en  $\mathbb{R}^n$ .

Veremos a continuación una propiedad que es importante por tratar el grado en el caso de la intersección con un subespacio de menor dimensión.

PROPOSICIÓN 43. (FÓRMULA DE REDUCCIÓN) Sean  $X$  un espacio vectorial topológico de dimensión finita,  $Y \subseteq X$  un subespacio de  $X$  tal que  $1 \leq \dim Y < \dim X$ ,  $D \subseteq X$  abierto y acotado,  $f: \bar{D} \rightarrow Y$  continua y  $p \in Y \setminus (Id_X - f)(\partial D)$ . Se verifica:

$$d[Id_X - f, D, p] = d[Id_Y - f|_Y, D \cap Y, p].$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos  $g = Id_X - f$ . Sean  $m = \dim Y < \dim X = n$ . Extendiendo una base de  $Y$  a una base de  $X$  podemos definir isomorfismos lineales  $s: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  y

$r : Y \rightarrow \mathbb{R}^m$  tales que  $s|_Y = r \times c_0$ , donde  $c_0 : \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$  es la función nula. Quedan así,  $X$  identificado con  $\mathbb{R}^n$  e  $Y$  identificado con  $\mathbb{R}^m$  y  $\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$ . Por las definiciones recién vistas podemos escribir

$$(2.4.3) \quad d[g, D, p] = d[sgs^{-1}, s(D), s(p)]$$

y

$$(2.4.4) \quad d[g|_Y, D \cap Y, p] = d[r g|_Y r^{-1}, r(D \cap Y), r(p)].$$

Llamando  $\tilde{g} = sgs^{-1}$  y  $\tilde{f} = sfs^{-1}$ , tenemos  $\tilde{g} = I_n - \tilde{f}$ . Sean también  $\hat{f} = r f|_Y r^{-1}$  y  $\hat{g} = r g|_Y r^{-1} = I_m - \hat{f}$ . Ahora, si  $(x, 0) \in s(D \cap Y) = r(D \cap Y) \times \{0\}^{n-m}$ , entonces

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x, 0) &= (I_n - \tilde{f})(x, 0) = (x, 0) - \tilde{f}(x, 0) = (x, 0) - sfs^{-1}(x, 0) = \\ &= (x, 0) - s|_Y fs^{-1}(x, 0) = (x, 0) - (r \times c_0) fs^{-1}(x, 0) = \\ &= (x, 0) - (rfs^{-1}(x, 0), 0) = (x - rfs^{-1}(x, 0), 0) = \\ &= (x - r f|_Y r^{-1}(x), 0) = (x - \hat{f}(x), 0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, si  $(x, 0) \in r(D \cap Y) \times \{0\}^{n-m}$ , valen

$$(I_n - \tilde{f})(x, 0) = ((I_m - \hat{f})(x), 0)$$

y

$$(2.4.5) \quad \tilde{f}(x, 0) = (\hat{f}(x, 0), 0).$$

Ahora, por la definición de grado de Brouwer y el teorema de aproximación de Weierstraß podemos asumir que

$$\tilde{f} \in C(\overline{s(D)}, \mathbb{R}^n) \cap C^1(s(D), \mathbb{R}^n),$$

por lo que

$$\hat{f} \in C(\overline{r(D \cap Y)}, \mathbb{R}^m) \cap C^1(r(D \cap Y), \mathbb{R}^m),$$

ya que valen

$$\begin{aligned} r(D \cap Y) \times \{0\}^{n-m} &= s(D \cap Y) = s(D) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}), \\ \overline{r(D \cap Y)} \times \{0\}^{n-m} &= \overline{s(D \cap Y)} = \overline{s(D)} \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}) \end{aligned}$$

y la igualdad 2.4.5.

Entonces, si  $(x, 0) \in r(D \cap Y) \times \{0\}^{n-m}$ , tenemos

$$\nabla \tilde{g}(x, 0) = \begin{bmatrix} I_m - \left( \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \Big|_x \right)_{1 \leq i, j \leq m} & \left( \frac{\partial \tilde{f}_i}{\partial x_j} \Big|_{(x, 0)} \right)_{1 \leq i \leq m; m+1 \leq j \leq n} \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix},$$

y así

$$(2.4.6) \quad J_{\tilde{g}}(x, 0) = \det \left[ I_m - \left( \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial x_j} \Big|_x \right)_{1 \leq i, j \leq m} \right] = J_{\hat{g}}(x).$$

Por lo tanto,  $(y, 0) \in \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$  es un valor regular de  $\tilde{g}$  si y sólo si  $y$  es un valor regular de  $\hat{g}$ . Así, por el teorema de Sard y el lema 20 podemos asumir que  $s(p) = (r(p), 0) = (y, 0)$  es valor regular de  $\tilde{g}$ , lo que equivale a que  $y = r(p)$  es valor regular de  $\hat{g}$ . Ahora, teniendo en cuenta las ecuaciones 2.4.3, 2.4.6 y 2.4.4, escribimos

$$\begin{aligned} d[g, D, p] &= d[\tilde{g}, s(D), (y, 0)] = \sum_{(x, 0) \in \tilde{g}^{-1}(y, 0)} \text{sign } J_{\tilde{g}}(x, 0) = \\ &= \sum_{x \in \hat{g}^{-1}(y)} \text{sign } J_{\hat{g}}(x) = d[\hat{g}, r(D \cap Y), y] = d[g|_Y, D \cap Y, p]. \end{aligned}$$

□





## Capítulo 3

### Problemas en dimensión finita.

#### 3.1. Introducción.

En este capítulo veremos dos tipos de problemas no lineales abstractos en el contexto de dimensión finita. En las dos secciones que siguen, con ayuda del grado de Brouwer, daremos condiciones para la existencia de soluciones de estos problemas. Los ejemplos concretos y aplicaciones se desarrollarán en el siguiente capítulo. Si bien nosotros tratamos el caso de dimensión finita, existe también una versión para dimensión infinita, que se aplica a ecuaciones diferenciales.

Los problemas abstractos que queremos estudiar corresponden a ecuaciones de la forma

$$Lx = A(x),$$

donde  $L$  y  $A$  son operadores en un espacio vectorial real topológico de dimensión finita adecuado,  $L$  es lineal y  $A$  es no lineal y continuo. El problema se llamará *no resonante* si  $L$  es inversible, lo que permite plantearlo como un problema de punto fijo equivalente:

$$x = L^{-1}A(x).$$

Si  $L$  no es inversible, diremos que el problema es *resonante*. Como la dimensión es finita, este caso equivale a que el núcleo de  $L$  no es trivial.

El nombre de *resonante* se debe a una analogía con la excitación de los modos normales de oscilación de un sistema físico. Vagamente hablando, si  $L$  correspondiera a un sistema capaz de oscilar y  $A$  fuera un término forzante (una fuerza externa), cada modo normal de oscilación, que es un generador “especial” del núcleo de  $L$ , podría ser excitado por un  $A$  adecuado. Tal  $A$  adecuado podría ser, por ejemplo, una fuerza oscilando a una frecuencia suficientemente cercana a la *frecuencia de resonancia* del modo normal a excitar.

Cabe destacar que, para poder asegurar existencia de soluciones, el caso resonante requiere más condiciones que el no resonante, por lo que será abordado en segundo lugar.

#### 3.2. El problema no resonante.

DEFINICIÓN 44. Sean  $X$  un espacio vectorial real topológico de dimensión finita,  $L : X \rightarrow X$  un isomorfismo lineal y  $A : X \rightarrow X$  una aplicación continua. En este

contexto, llamamos *problema no resonante* a la ecuación

$$Lx = Ax.$$

El siguiente es el primer resultado de existencia, ampliamente aplicado y de simple demostración. Nótese que se aplica, además de las propiedades del grado, el lema que establece el grado de un isomorfismo lineal en el origen.

TEOREMA 45. Sean  $X$  un espacio vectorial topológico de dimensión finita,  $L : X \rightarrow X$  un isomorfismo lineal y  $A : X \rightarrow X$  una aplicación continua y acotada. Si, para alguna norma  $\| \cdot \|$  en  $X$ , llamamos

$$\gamma = \min_{\|x\|=1} \|Lx\| > 0,$$

entonces para todo  $r > \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}$

$$d[L - A, B(0, r), 0] = \text{sign det } L = \pm 1.$$

En particular, el problema no resonante

$$Lx = Ax$$

tiene al menos una solución en  $\overline{B\left(0, \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}\right)}$ .

DEMOSTRACIÓN. Basta suponer que  $A$  es no nula. Definimos la homotopía  $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$  dada por

$$H(x, t) = Lx - tAx.$$

Entonces  $H$  es continua,  $H_0 = L$  y  $H_1 = L - A$ . Veamos que esta homotopía es válida. En efecto, si  $\|x\| > 0$ , entonces

$$\begin{aligned} H(x, t) = 0 &\Rightarrow Lx = tAx \Rightarrow \|x\| \gamma \leq \|x\| \left\| L \frac{x}{\|x\|} \right\| = \\ &= \|Lx\| = t \|Ax\| \leq t \|A\|_\infty \|x\| \leq \|A\|_\infty \|x\| \Rightarrow \|x\| \leq \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $r > \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}$ ,  $t \in [0, 1]$  y  $x \in \partial B(0, r)$ , vale  $H(x, t) \neq 0$ . Entonces  $H$  es válida para, con ayuda de la proposición 38, afirmar

$$\left( \forall r > \frac{\|A\|_\infty}{\gamma} \right) d[L - A, B(0, r), 0] = d[L, B(0, r), 0] = \text{sign det } L = \pm 1.$$

Además, por la propiedad de solución, si  $r > \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}$ , entonces el problema no resonante tiene al menos una solución en  $B(0, r)$ . Por lo tanto, dicho problema tiene al menos una solución en  $\overline{B\left(0, \frac{\|A\|_\infty}{\gamma}\right)}$ .  $\square$

### 3.3. El problema resonante.

DEFINICIÓN 46. Sean  $X$  un espacio vectorial real topológico de dimensión finita,  $L : X \rightarrow X$  un morfismo lineal no inversible y  $A : X \rightarrow X$  una aplicación continua. Llamamos *problema resonante* a la ecuación

$$(3.3.1) \quad Lx = Ax.$$

OBSERVACIÓN 47. (REDUCCIÓN DE LYAPUNOV-SCHMIDT) En el contexto de la definición anterior haremos algunas consideraciones para, bajo ciertas condiciones, aplicar el grado de Brouwer al problema resonante.

Sea  $P : X \rightarrow \ker L$  una proyección a  $\ker L$ . Se tiene que

$$X = \ker L \oplus \ker P = \operatorname{Im} L \oplus W,$$

donde  $W$  es algún subespacio de  $X$ . Sea también  $Q : X \rightarrow W$  la proyección a  $W$  tal que

$$\ker Q = \operatorname{Im} L.$$

Entonces,

$$\dim \ker L = \operatorname{codim} \operatorname{Im} L = \dim W = \dim \operatorname{Im} Q,$$

y

$$\dim \operatorname{Im} L = \dim \ker P.$$

Como además  $X = \ker L \oplus \ker P$ ,  $L|_{\ker P} : \ker P \rightarrow \operatorname{Im} L$  es un monomorfismo entre dos espacios de igual dimensión finita, y por ende es un isomorfismo. Podemos, entonces, considerar dos isomorfismos lineales  $K : \operatorname{Im} L \rightarrow \ker P$  y  $J : \operatorname{Im} Q \rightarrow \ker L$ , donde  $K$  es inversa de  $L|_{\ker P} : \ker P \rightarrow \operatorname{Im} L$ . Esto se completa con la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 48. *Bajo las condiciones de la observación 47, la ecuación 3.3.1 equivale a la ecuación*

$$(3.3.2) \quad x = Px + JQAx + K(I - Q)Ax.$$

DEMOSTRACIÓN. Si  $Lx = Ax$ , aplicando  $Q$  tenemos que  $QAx = QLx = 0$ , y por lo tanto

$$Lx = Ax - QAx = (I - Q)Ax \in \operatorname{Im} L,$$

y como  $K$  es inversa de  $L|_{\ker P} : \ker P \rightarrow \operatorname{Im} L$ , vale

$$Lx = LK(I - Q)Ax.$$

Ahora, por definición de  $P$ ,  $Lx = L(x - Px)$ , por lo que

$$L(x - Px) = LK(I - Q)Ax.$$

Entonces, como  $x - Px$  y  $K(I - Q)Ax$  pertenecen a  $\ker P$  y  $L|_{\ker P} : \ker P \rightarrow \text{Im}L$  es isomorfismo, podemos escribir

$$x - Px = K(I - Q)Ax,$$

y dado que  $QAx = 0$ , tenemos

$$x - Px = JQAx + K(I - Q)Ax,$$

que equivale a la ecuación 3.3.2.

Supongamos ahora la verdad de 3.3.2. Esto implica que

$$0 = Px - x + JQAx + K(I - Q)Ax,$$

donde  $Px - x \in \ker P$ ,  $JQAx \in \ker L$  y  $K(I - Q)Ax \in K(\ker Q) = K(\text{Im}L) = \ker P$ . Entonces,

$$JQAx = 0,$$

con lo que  $QAx = 0$  y

$$0 = Px - x + K(I - Q)Ax = Px - x + KAx.$$

Así, puesto que

$$(3.3.3) \quad x - Px = KAx$$

y  $Ax = (I - Q)Ax \in \ker Q = \text{Im}L$ , aplicando  $L$  a ambos miembros de 3.3.3 tenemos la ecuación 3.3.1.  $\square$

Ahora veremos el resultado principal de esta sección.

**TEOREMA 49.** *En el contexto de la observación 47, si  $D \subseteq X$  es un abierto acotado y*

1.  $Lx \neq tAx$  para todo  $(x, t) \in \partial D \times (0, 1]$
  2.  $QAx \neq 0$  para todo  $x \in \ker L \cap \partial D$
  3.  $d[JQA, D \cap \ker L, 0] \neq 0$ ,
- entonces el problema resonante

$$Lx = Ax$$

tiene al menos una solución en  $D$ .

**DEMOSTRACIÓN.** Consideramos la homotopía  $H : \bar{D} \times [0, 1] \rightarrow X$  definida por

$$(3.3.4) \quad H(x, t) = x - [Px + JQAx + tK(I - Q)Ax].$$

Veamos la validez de  $H$ .

Supongamos primero que  $t \neq 0$  y  $H(x, t) = 0$ . Entonces aplicando  $P$  a 3.3.4 tenemos

$$0 = P(x - Px) + PJQAx + tPK(I - Q)Ax = PJQAx = JQAx,$$

con lo que

$$QAx = 0,$$

y por lo tanto 3.3.4 puede escribirse:

$$(3.3.5) \quad x - Px = tKAx.$$

Ahora, aplicando  $L$  a 3.3.5 tenemos

$$Lx = tAx,$$

y por lo tanto, debido a la condición 1 de la hipótesis,  $x \notin \partial D$ . Luego, podemos afirmar

$$x \in \partial D \times (0, 1] \Rightarrow H(x, t) \neq 0.$$

Ahora supongamos que  $0 = H(x, 0)$ . Por 3.3.4 tenemos

$$0 = x - Px - JQAx,$$

y como  $X = \ker L \oplus \ker P$ ,  $JQAx \in \ker L$  y  $J$  es isomorfismo, tenemos que  $x = Px$  y  $QAx = 0$ . Por lo tanto,

$$x \in \ker L, QAx = 0,$$

con lo que, debido a la condición 2 de la hipótesis resulta que  $x \notin \partial D$ . Luego, tenemos

$$(3.3.6) \quad x \in \partial D \Rightarrow H(x, 0) \neq 0.$$

Esto termina de probar que  $H$  es una homotopía válida para escribir

$$\begin{aligned} d[I - [P + JQA + K(I - Q)A], D, 0] &= d[H_1, D, 0] = \\ &= d[H_0, D, 0] = d[I - (P + JQA), D, 0]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por la proposición 48, la propiedad de solución y la invariancia homotópica, basta probar que

$$(3.3.7) \quad d[I - (P + JQA), D, 0] \neq 0.$$

Veamos la verdad de 3.3.7. Por 3.3.6 tenemos que  $0 \notin I - (P + JQA)(\partial D)$ . Aplicando la condición 3 de la hipótesis, luego de la fórmula de reducción probada en la proposición 43 (con  $Y = \ker L$ ,  $f = (P + JQA)$  y  $p = 0$ ) y el lema 40, escribimos

$$\begin{aligned} d[I - (P + JQA), D, 0] &= d[[I - (P + JQA)]|_{\ker L}, D \cap \ker L, 0] = \\ &= d[-JQA|_{\ker L}, D \cap \ker L, 0] = (-1)^{\dim \ker L} d[JQA|_{\ker L}, D \cap \ker L, 0] \neq 0, \end{aligned}$$

lo que prueba 3.3.7. □



## Una aplicación: ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden.

### 4.1. Introducción.

En este capítulo aplicamos las propiedades del grado de Brouwer y los resultados dados en el anterior (sobre los problemas resonante y no resonante) a las ecuaciones de segundo orden en diferencias finitas. El presente capítulo contiene algunas nociones típicas de la teoría de diferencias finitas, pero abordadas con el enfoque de operadores en espacios lineales. Ello se debe a que nuestra intención ha sido manifestar con claridad la metodología abstracta relacionada con el grado de Brouwer. Asimismo, aparecen algunas nociones y problemas concretos que poseen análogo en la teoría de ecuaciones diferenciales.

### 4.2. Planteo del problema.

Para un entero  $n \geq 2$  y  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  definimos la segunda diferencia finita  $T : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $Tx = (\Delta^2 x_0, \dots, \Delta^2 x_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , mediante

$$(4.2.1) \quad Tx_m = \Delta^2 x_{m-1} = x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1} \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Para funciones continuas  $f_m : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ), consideramos el problema de Dirichlet

$$(4.2.2) \quad \Delta^2 x_{m-1} = f_m(x_0, \dots, x_n), \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n.$$

Definimos el espacio lineal

$$V^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0 = 0 = x_n\} \simeq \mathbb{R}^{n-1},$$

donde la identificación se hace en la forma

$$x = (0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \simeq (x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Ahora, teniendo en cuenta esta identificación, podemos pensar la segunda diferencia finita como la transformación lineal  $L : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  dada por

$$(4.2.3) \quad Lx = T(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0),$$

es decir,

$$(Lx)_1 = -2x_1 + x_2,$$

$$(Lx)_m = x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1} \quad (2 \leq m \leq n-1),$$

$$(Lx)_{n-1} = -2x_{n-1} + x_{n-2},$$

y tiene la matriz simétrica

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

También definimos la aplicación continua  $F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  mediante

$$F_m(x) = f_m(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Ahora el problema dado en 4.2.2 puede escribirse:

$$(4.2.4) \quad Lx = Fx \quad (x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

### 4.3. Espectro de la parte lineal.

Como también sucede en la teoría de ecuaciones diferenciales, al abordar un problema como 4.2.4 es conveniente conocer los autovalores y los autovectores de la parte lineal  $L$ .

Teniendo en cuenta las identificaciones hechas en la sección anterior observamos que el problema de autovalores de Dirichlet

$$(4.3.1) \quad \Delta^2 x_{m-1} = \lambda x_m \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n,$$

donde  $\lambda \in \mathbb{R}$ , es equivalente al problema de autovalores en  $\mathbb{R}^{n-1}$

$$Lx = \lambda x, \quad (x = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}),$$

que en  $\mathbb{R}^{n+1}$  podemos escribir

$$Tx = \lambda \tilde{x}, \quad x_0 = 0 = x_n,$$

donde sin identificar ponemos  $x = (x_0, \dots, x_n)$  y  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$ . Observamos, usando esta última notación, que si  $x_0 = 0 = x_n$ , entonces

$$Tx = L\tilde{x}.$$



Si para  $\theta \in \mathbb{R}$  tomamos el vector  $z(\theta) = (z_0(\theta), \dots, z_n(\theta))$  dado por

$$z_m(\theta) = e^{im\theta} \quad (0 \leq m \leq n),$$

entonces, para  $1 \leq m \leq n-1$ , y extendemos  $T$  a un operador  $T : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$  con la misma fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} Tz(\theta)_m &= \Delta^2 z(\theta)_{m-1} = e^{i(m+1)\theta} - 2e^{im\theta} + e^{i(m-1)\theta} = \\ &= e^{im\theta} (e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta}) = z(\theta)_m 2(\cos \theta - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$Tz(\theta) = 2(\cos \theta - 1) \widetilde{z(\theta)}.$$

Entonces, si definimos

$$s(\theta) = \frac{z(\theta) - z(-\theta)}{2i} \in \mathbb{R}^{n+1},$$

tenemos

$$Ts(\theta) = 2(\cos \theta - 1) \widetilde{s(\theta)},$$

con

$$s(\theta)_m = \sin m\theta \quad (0 \leq m \leq n),$$

$$s(\theta)_0 = 0 \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

y

$$s(\theta)_n = \sin n\theta = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ahora podemos escribir los autovectores de  $L$  en la forma

$$\varphi^k = s\left(\widetilde{\frac{k\pi}{n}}\right), \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

o bien,

$$\varphi_m^k = \sin \frac{mk\pi}{n}, \quad 1 \leq k, m \leq n-1.$$

En efecto, dado que  $s\left(\frac{k\pi}{n}\right) \in V$ , por las consideraciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} L\varphi^k &= Ls\left(\widetilde{\frac{k\pi}{n}}\right) = Ts\left(\frac{k\pi}{n}\right) = 2\left(\cos \frac{k\pi}{n} - 1\right) s\left(\widetilde{\frac{k\pi}{n}}\right) = \\ &= 2\left(\cos \frac{k\pi}{n} - 1\right) \varphi^k \quad (1 \leq k \leq n-1). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $1 \leq k \leq n-1$ ,  $\varphi^k$  es autovector de  $L$  con autovalor

$$\lambda_k = 2\left(\cos \frac{k\pi}{n} - 1\right) = -4 \sin^2 \frac{k\pi}{2n}.$$

Además, por tratarse de los autovectores de  $n - 1$  autovalores distintos de  $L$ , que es un operador simétrico, el conjunto  $\Phi = \{\varphi^k : 1 \leq k \leq n - 1\}$  es una base ortogonal de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . No obstante, observamos que  $\Phi$  no es ortonormal, como lo muestra el siguiente cálculo. Si  $1 \leq k \leq n - 1$ , entonces

$$\begin{aligned} \|\varphi^k\|_2^2 &= \sum_{m=1}^{n-1} \sin^2 \frac{mk\pi}{n} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1 - \cos \frac{2mk\pi}{n}}{2} = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \cos \frac{2mk\pi}{n} = \\ &= \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \sum_{m=1}^{n-1} \left( e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)^m \right) = \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\left( e^{\frac{i2k\pi}{n}} \right)^n - 1}{e^{\frac{i2k\pi}{n}} - 1} - 1 \right) = \\ &= \frac{n-1}{2} - \frac{1}{2} (-1) = \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|\varphi^k\|_2 = \sqrt{\frac{n}{2}} \quad (1 \leq k \leq n - 1).$$

Más adelante haremos uso del siguiente hecho.

OBSERVACIÓN 50. El autovector

$$\varphi^1 = \left( \sin \frac{\pi}{n}, \dots, \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$$

correspondiente al autovalor

$$\lambda_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{n} - 1 \right) = -4 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$$

tiene todas sus coordenadas positivas.

#### 4.4. No linealidades acotadas.

Tratamos ahora un problema de Dirichlet similar a 4.3.1 pero con una perturbación no necesariamente lineal:

$$(4.4.1) \quad \Delta^2 x_{m-1} = \lambda x_m + a_m(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad (1 \leq m \leq n - 1), \quad x_0 = 0 = x_n,$$

donde cada  $a_m : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y acotada.

Si definimos  $L$  como en 4.2.3 y  $A : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  mediante

$$A_m(x_1, \dots, x_{n-1}) = a_m(0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad (1 \leq m \leq n - 1),$$

el problema 4.4.1 equivale al problema semi lineal en  $\mathbb{R}^{n-1}$

$$Lx = \lambda x + A(x),$$

o bien,

$$(4.4.2) \quad (L - \lambda I)x = A(x).$$

Ahora, si  $\lambda$  no es autovalor de  $L$ , entonces  $(L - \lambda I)$  es inversible y por lo tanto 4.4.2 es un problema no resonante. Como  $A$  es continua y acotada, por aplicación del teorema 45 tenemos el siguiente resultado de existencia.

TEOREMA 51. *En el contexto de los problemas 4.4.1 y 4.4.2, si*

$$\lambda \neq 2 \cos \frac{k\pi}{n} - 2 \quad (1 \leq k \leq n-1)$$

*y las funciones  $a_m$  son continuas y acotadas, entonces para todo  $r > \frac{\|A\|_\infty}{\min_{\|x\|=1} \|Lx - \lambda x\|}$  se verifica*

$$d[L - \lambda I - A, B(0, r), 0] = \pm 1.$$

*En particular, el problema 4.4.1 tiene al menos una solución en  $B\left(0, \frac{\|A\|_\infty}{\min_{\|x\|=1} \|Lx - \lambda x\|}\right)$ .*

En particular, este resultado es válido para cualquier  $\lambda \in (-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ .

#### 4.5. Subsoluciones y supersoluciones.

Sean  $n \geq 2$  y  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) funciones continuas. Estudiaremos la existencia de soluciones del problema de contorno de Dirichlet

$$(4.5.1) \quad \Delta^2 x_{m-1} = f_m(x_m) \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n.$$

Definiendo para cualquier  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  el vector  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,  $F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  como  $F(x_1, \dots, x_{n-1}) = (f_1(x_1), \dots, f_{n-1}(x_{n-1}))$  y usando los operadores  $T$  y  $L$  definidos anteriormente, el problema 4.5.1 puede escribirse

$$(4.5.2) \quad Tx = F(\tilde{x}), \quad x_0 = 0 = x_n,$$

o bien

$$Lu = F(u), \quad u \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Por comodidad utilizaremos algunas notaciones especiales. Para  $k \in \mathbb{N}$  y  $x = (x_1, \dots, x_k)$  e  $y = (y_1, \dots, y_k)$  pertenecientes a  $\mathbb{R}^k$  escribiremos

$$x \leq y,$$

o

$$y \geq x,$$

si y sólo si

$$x_i \leq y_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

También podremos escribir

$$x \prec y,$$

o

$$y \succ x,$$

cuando

$$x_i < y_i \quad (1 \leq i \leq k).$$

Negaremos “ $x \leq y$ ” escribiendo “ $x \not\leq y$ ” y negaremos “ $x \prec y$ ” escribiendo “ $x \not\prec y$ ”.

Las siguientes nociones tienen análogo en la teoría de ecuaciones diferenciales.

DEFINICIÓN 52.  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  se dice una *subsolución* para 4.5.1 si

$$\alpha_0 \leq 0, \quad \alpha_n \leq 0, \quad F(\tilde{\alpha}) \leq T\alpha.$$

Análogamente,  $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  se dice una *supersolución* para 4.5.1 si

$$\beta_0 \geq 0, \quad \beta_n \geq 0, \quad F(\tilde{\beta}) \geq T\beta.$$

$\alpha$  se llama *estricta* si  $F(\tilde{\alpha}) \prec T\alpha$ , y análogamente,  $\beta$  es *estricta* si  $F(\tilde{\beta}) \succ T\beta$ .

Diremos además que la subsolución  $\alpha$  y la supersolución  $\beta$  forman un *par bien ordenado*  $(\alpha : \beta)$  para 4.5.1 si  $\alpha \leq \beta$ , o equivalentemente,  $\tilde{\alpha} \leq \tilde{\beta}$ .

Demostremos que todo par bien ordenado  $(\alpha : \beta)$  de 4.5.1 tiene una solución intermedia, es decir, que hay por lo menos una solución en el intervalo  $[\alpha, \beta]$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Para probar este hecho recurriremos al siguiente *principio del máximo*, el cual es una propiedad que verifica el operador  $T$  en analogía con el que verifica la derivada segunda de funciones.

LEMA 53. (PRINCIPIO DEL MÁXIMO) Si  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  y  $1 \leq j \leq n-1$ , entonces

$$(4.5.3) \quad x_j = \min_{0 \leq m \leq n} x_m \Rightarrow Tx_j \geq 0$$

y

$$(4.5.4) \quad x_j = \max_{0 \leq m \leq n} x_m \Rightarrow Tx_j \leq 0.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos la verdad de 4.5.3. Si  $x_j$  es como en el antecedente, entonces

$$(4.5.5) \quad Tx_j = (x_{j+1} - x_j) + (x_{j-1} - x_j) \geq 0,$$

ya que ambos términos son no negativos. Análogamente se demuestra 4.5.4, ya que en ese caso ningún término de 4.5.5 sería positivo.  $\square$

TEOREMA 54. Si  $(\alpha : \beta)$  es un par bien ordenado para el problema 4.5.1, entonces existe una solución  $x$  de 4.5.1 tal que  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Más aún, si  $\alpha$  y  $\beta$  son estrictas, entonces  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x} \prec \tilde{\beta}$ .

DEMOSTRACIÓN. *I. Un problema modificado.*

En principio no podemos suponer que la función  $F$  es acotada, así que no podemos aplicar el grado de Brouwer directamente. Por consiguiente, reduciremos 4.5.1 a un problema modificado de manera tal que junto con las hipótesis se le puede aplicar el problema no resonante. Primero veamos que tal reducción es posible. En esto será de importancia el principio del máximo recién demostrado.

Sean  $h_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) las funciones continuas definidas por

$$h_m(x_m) = \begin{cases} \alpha_m & \text{si } x_m \leq \alpha_m \\ x_m & \text{si } \alpha_m \leq x_m \leq \beta_m \\ \beta_m & \text{si } \beta_m \leq x_m \end{cases}$$

y la función de *truncamiento*  $h : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  dada por

$$h(x_1, \dots, x_{n-1}) = (h_1(x_1), \dots, h_{n-1}(x_{n-1})).$$

Consideramos el problema modificado

$$(4.5.6) \quad Tx = Fh(\tilde{x}) + \tilde{x} - h(\tilde{x}), \quad x_0 = 0 = x_n,$$

que también puede escribirse

$$Lu = Fh(u) + u - h(u), \quad u \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Veamos que si  $x = (x_0, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  es solución de 4.5.6, entonces  $\alpha \leq x \leq \beta$ , y por lo tanto es solución de 4.5.2 y de 4.5.1. Para probar que  $\alpha \leq x$  definimos el conjunto

$$A = \{j \in [1, n-1] \cap \mathbb{N} : x_j \leq \alpha_j\}.$$

Observamos que si  $A = \emptyset$ , entonces  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x}$ , y no hay nada que hacer. Por otro lado, si  $A \neq \emptyset$ , para algún  $k \in A$  tenemos

$$(4.5.7) \quad x_k - \alpha_k = \min_{j \in A} x_j - \alpha_j = \min_{1 \leq j \leq n-1} x_j - \alpha_j = \min_{0 \leq j \leq n} x_j - \alpha_j,$$

por lo que aplicando del principio del máximo, para tal  $k \in A$ , podemos afirmar

$$(4.5.8) \quad T(x - \alpha)_k \geq 0.$$

Ahora, por 4.5.6, para dicho  $k \in A$ , escribimos

$$Tx_k = (Fh(\tilde{x}))_k + (\tilde{x} - h(\tilde{x}))_k,$$

y como  $h(\tilde{x})_k = \alpha_k$  (porque  $k \in A$ ), vale

$$Tx_k = F(\tilde{\alpha})_k + (\tilde{x} - \tilde{\alpha})_k,$$

o bien,

$$(4.5.9) \quad T(x - \alpha)_k + (T\alpha - F(\tilde{\alpha}))_k = x_k - \alpha_k.$$

Como  $\alpha$  es subsolución de 4.5.1, por 4.5.8 el primer miembro de 4.5.9 es no negativo. Pero, dado que  $k \in A$ , el segundo miembro no es positivo. En consecuencia, si  $k \in A$  satisface 4.5.7, entonces  $x_k - \alpha_k = 0$ . Por lo tanto, por 4.5.7, vale:

$$(4.5.10) \quad A \neq \emptyset \Rightarrow (\alpha \leq x, \tilde{\alpha} \not\prec \tilde{x}).$$

En consecuencia, tanto si  $A$  es vacío como si no, se satisface  $\alpha \leq x$ . Por otra parte, si  $\alpha$  es una subsolución estricta y  $A$  no es vacío, entonces  $T\alpha \succ F(\tilde{\alpha})$  y el primer miembro de 4.5.9 resulta positivo y el segundo no, lo que es falso. Por lo tanto, si  $\alpha$  es estricta,  $A$  es vacío, y entonces  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x}$ .

Análogamente puede probarse que  $x \leq \beta$  y que si  $\beta$  es supersolución estricta, entonces  $\tilde{x} \prec \tilde{\beta}$ .

## II. Solución del problema modificado.

Escribimos 4.5.6 en la forma

$$(4.5.11) \quad (L - I)u = (F - I)h(u), \quad u \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Dado que 1 no es autovalor de  $L$ ,  $L - I$  es lineal e inversible. Como además  $(F - I)h$  es continua y acotada, la ecuación 4.5.11 es un problema no resonante y, por el teorema 45, existe  $r > 0$  tal que

$$(4.5.12) \quad |d[L - I - (F - I)h, B(0, r), 0]| = 1.$$

En particular, el problema 4.5.11 tiene al menos una solución.  $\square$

OBSERVACIÓN 55. En el contexto del teorema anterior, si  $\alpha$  y  $\beta$  son estrictas, entonces

$$|d[L - F, (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), 0]| = 1.$$

En efecto, si en 4.5.12 usando el teorema 45 consideramos  $r$  suficientemente grande para que  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \subseteq B(0, r)$ , como toda solución de 4.5.6 está en  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ , por las propiedades de escisión y solución,

$$|d[L - I - (F - I)h, (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), 0]| = |d[L - I - (F - I)h, B(0, r), 0]| = 1.$$

Por otro lado, como las funciones  $L - F$  y  $L - I - (F - I)h$  coinciden en  $\overline{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})} = [\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}]$ , tenemos

$$d[L - F, (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), 0] = d[L - I - (F - I)h, (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}), 0],$$

con lo que se concluye la observación.

Una consecuencia del teorema 54 es el siguiente resultado.

COROLARIO 56. Si existen números  $\alpha \leq 0 \leq \beta$  tales que

$$f_m(\alpha) \leq 0 \leq f_m(\beta) \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

entonces el problema 4.5.1 tiene al menos una solución tal que

$$\alpha \leq x_m \leq \beta \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que  $(\alpha, \dots, \alpha)$  es una subsolución y  $(\beta, \dots, \beta)$  es una supersolución, respectivamente, para 4.5.1.  $\square$

EJEMPLO 57. Si  $p > 0$ ,  $a_m > 0$  y  $b_m \in \mathbb{R}$  para  $1 \leq m \leq n-1$ , entonces el problema

$$\Delta^2 x_{m-1} = a_m |x_m|^p x_m + b_m \quad (1 \leq m \leq n-1)$$

tiene al menos una solución. Basta aplicar el corolario anterior con  $\alpha < 0$  y  $\beta > 0$ , cada uno de módulo suficientemente grande.

#### 4.6. Algo más sobre diferencias finitas.

En esta sección haremos algunas observaciones básicas sobre las diferencias finitas de primer y segundo orden, adecuadas al enfoque adoptado en este trabajo. Dichas observaciones nos permitirán demostrar fácilmente la simetría del operador  $L$  definido en 4.2.3, propiedad ya mencionada que nos será útil en la sección siguiente.

Comenzamos por definir la *primera diferencia finita* como un operador lineal  $\Delta : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Por ejemplo, para  $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , escribimos

$$\Delta x = (\Delta x_0, \dots, \Delta x_{n-1}),$$

donde

$$\Delta x_m = x_{m+1} - x_m \quad (0 \leq m \leq n-1).$$

Así,

$$\Delta^2 x_{m-1} = x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1} = \Delta x_m - \Delta x_{m-1} = [\Delta(\Delta x)]_{m-1} \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

lo que nos permite definir el operador lineal  $\Delta^2 : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  como

$$\Delta^2 x = \Delta(\Delta x) = (\Delta^2 x_0, \dots, \Delta^2 x_{n-2}).$$

Entonces, si  $\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$  y  $x_0 = 0 = x_n$  (es decir,  $x \in V$ ), vale la igualdad vectorial

$$L\tilde{x} = \Delta^2 x.$$

Resulta, por lo tanto, que los operadores  $T$  y  $\Delta^2$  son vectorialmente iguales, pero tienen numeraciones diferentes en las coordenadas, ya que

$$Tx_m = x_{m+1} - 2x_m + x_{m-1} = L\tilde{x}_m \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

mientras que

$$\Delta^2 x_m = x_{m+2} - 2x_{m+1} + x_m \quad (0 \leq m \leq n-2).$$

Ahora definimos los operadores de primeras diferencias corridas  $l^+ : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  y  $l^- : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  dados, si  $x \in V$ , por

$$l^+ \tilde{x}_m = \Delta x_m, \quad l^- \tilde{x}_m = \Delta x_{m-1} \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

A partir de esto tenemos que

$$(4.6.1) \quad L = l^+ \circ l^-.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (l^+ l^- \tilde{x})_m &= (l^+ (l^- \tilde{x}))_m = \Delta (l^- \tilde{x})_m = l^- \tilde{x}_{m+1} - l^- \tilde{x}_m = \\ &= \Delta x_m - \Delta x_{m-1} = \Delta^2 x_{m-1} = L \tilde{x}_m \quad (1 \leq m \leq n-1). \end{aligned}$$

Estos operadores tienen además una relación entre sí.

OBSERVACIÓN 58. Si  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^j$  ( $j \in \mathbb{N}$ ), entonces para todo  $\tilde{x}, \tilde{y} \in V$  se verifica

$$(4.6.2) \quad \langle l^- \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = -\langle \tilde{x}, l^+ \tilde{y} \rangle.$$

DEMOSTRACIÓN. Podemos interpretar los operadores de diferencias corridas utilizando dos operadores de corrimiento y la identidad. Definimos los corrimientos izquierdo  $S^+ : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  y derecho  $S^- : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por medio de

$$S^+ x = S^+ (x_0, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0) = (S^+ x_0, \dots, S^+ x_n)$$

y

$$S^- x = S^- (x_0, \dots, x_n) = (0, x_0, \dots, x_{n-1}) = (S^- x_0, \dots, S^- x_n),$$

respectivamente. Entonces, para  $\tilde{x} \in V$  las diferencias corridas pueden escribirse como

$$l^+ \tilde{x} = (\widetilde{S^+ - I}) x$$

y

$$l^- \tilde{x} = (\widetilde{I - S^-}) x,$$

respectivamente.

Ahora, para  $\tilde{x}, \tilde{y} \in V$  podemos escribir

$$\langle l^- \tilde{x}, \tilde{y} \rangle = \langle (\widetilde{I - S^-}) x, \tilde{y} \rangle = \langle (I - S^-) x, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle S^- x, y \rangle.$$

Pero

$$\langle S^- x, y \rangle = \sum_{m=0}^n y_m \cdot S^- x_m = \sum_{m=1}^{n-1} y_m \cdot x_{m-1} = \sum_{m=1}^{n-1} y_{m+1} \cdot x_m = \sum_{m=0}^n S^+ y_m \cdot x_m = \langle x, S^+ y \rangle,$$



y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle l^- \tilde{x}, \tilde{y} \rangle &= \langle x, y \rangle - \langle x, S^+ y \rangle = \langle x, y - S^+ y \rangle = \\ &= - \langle x, S^+ y - y \rangle = - \langle \tilde{x}, \widetilde{(S^+ - I) y} \rangle = - \langle \tilde{x}, l^+ \tilde{y} \rangle. \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 59. El operador  $L$  es simétrico. En efecto, de 4.6.1 y 4.6.2, para  $u, v \in \mathbb{R}^{n-1}$  deducimos

$$\langle u, Lv \rangle = \langle u, l^+ l^- v \rangle = - \langle l^- u, l^- v \rangle = \langle l^+ l^- u, v \rangle = \langle Lu, v \rangle.$$

#### 4.7. Resultados de multiplicidad del tipo Ambrosetti-Prodi.

En esta sección estudiaremos problemas del tipo

$$(4.7.1) \quad \Delta^2 x_{m-1} - \lambda_1 x_m = f_m(x_m) + s\varphi_m^1 \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n,$$

donde  $n \geq 2$  está fijo,  $f_1, \dots, f_{n-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas,  $s \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1$  y  $\varphi^1$  son los dados en la observación 50, y

$$(4.7.2) \quad f_m(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} -\infty \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Definiendo, como hicimos antes, la función continua  $F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  mediante

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) = (f_1(x_1), \dots, f_{n-1}(x_{n-1}))$$

para  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ , la ecuación 4.7.1 puede escribirse

$$(4.7.3) \quad Lx - \lambda_1 x = F(x) + s\varphi^1 \quad x \in \mathbb{R}^{n-1},$$

y la condición 4.7.2 será notada en la forma

$$(4.7.4) \quad F(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} -\infty.$$

Escribiendo 4.7.3 como

$$(L - \lambda_1 I)x = F(x) + s\varphi^1$$

podemos notar que el núcleo de la parte lineal no es trivial, por lo que el problema sería resonante. Por otro lado, un término de la parte no lineal pertenece a  $\ker(L - \lambda_1 I)$ . Además, dicha parte no lineal es no acotada y no hay (en principio) un conjunto acotado al que reducir el problema. Resulta, entonces, que no se pueden aplicar directamente los teoremas abstractos vistos en el capítulo anterior. En cuanto al problema de la acotación, daremos pronto un lema. También usaremos lo visto sobre supersoluciones y subsoluciones. Para probar el resultado sobre multiplicidad de esta sección, esencialmente aplicaremos el teorema de existencia para el problema no resonante, puesto que recurriremos fundamentalmente al teorema 54.

Comenzamos con un lema que establece la existencia de cotas a priori para una solución  $x$  de 4.7.1 con  $s$ .

LEMA 60. *Sea  $b \in \mathbb{R}$ . Entonces existe  $\rho = \rho(b) > 0$  tal que toda posible solución de 4.7.1 con  $s \leq b$ , que verifique la condición 4.7.2, pertenece a la bola abierta  $B(0, \rho)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $x$  una solución con  $s \leq b$ . Por 4.7.3, usando el producto escalar podemos escribir

$$(4.7.5) \quad \langle (L - \lambda_1 I - F)x, \varphi^1 \rangle = \langle s\varphi^1, \varphi^1 \rangle = s \|\varphi^1\|_2^2 = s \frac{n}{2},$$

pero como  $L$  es simétrico y  $\varphi^1 \in \ker(L - \lambda_1 I)$ , tenemos

$$(4.7.6) \quad \begin{aligned} \langle (L - \lambda_1 I - F)x, \varphi^1 \rangle &= \langle (L - \lambda_1 I)x, \varphi^1 \rangle - \langle F(x), \varphi^1 \rangle = \\ &= \langle x, (L - \lambda_1 I)\varphi^1 \rangle - \langle F(x), \varphi^1 \rangle = -\langle F(x), \varphi^1 \rangle. \end{aligned}$$

Así, de 4.7.5 y 4.7.6 deducimos

$$(4.7.7) \quad \langle F(x), \varphi^1 \rangle = -s \frac{n}{2},$$

por lo que llegamos a que si  $x$  es solución de 4.7.1 con  $s \leq b$ , entonces

$$(4.7.8) \quad \langle F(x), \varphi^1 \rangle \geq -\frac{bn}{2}.$$

Por otro lado, como  $\varphi^1 \succ 0$  existe  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\varphi^1 \succ C \succ 0$ , donde  $C = (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Ahora, si  $u \in \mathbb{R}^{n-1}$  es tal que  $F(u) \prec 0$ , entonces

$$\langle F(u), \varphi^1 \rangle \leq \langle F(u), C \rangle = -c \|F(u)\|_1.$$

Por lo tanto, 4.7.4 implica

$$(4.7.9) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \langle F(u), \varphi^1 \rangle = -\infty.$$

De 4.7.8 y 4.7.9 se sigue una solución  $x$  con  $s \leq b$  no puede, en norma, superar un cierto valor que depende de  $b$ .  $\square$

A continuación veremos un primer resultado de multiplicidad del tipo Ambrosetti-Prodi.

TEOREMA 61. *Para el problema 4.7.1 con la condición 4.7.2 existe un valor  $s_1 \in \mathbb{R}$  tal que:*

1. *Si  $s < s_1$ , entonces no existe ninguna solución con  $s$ .*
2. *Si  $s = s_1$ , entonces existe al menos una solución con  $s$ .*
3. *Si  $s > s_1$ , entonces existen al menos dos soluciones con  $s$ .*

DEMOSTRACIÓN. Nos convendrá escribir la ecuación 4.7.3 en la forma

$$(4.7.10) \quad Tx = \lambda_1 \tilde{x} + F(\tilde{x}) + s\varphi^1 \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad x_0 = 0 = x_n.$$

Definimos los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+2}$ :

$$\mathcal{S} = \{(s, x) : x \text{ es solución con } s\},$$

$$\mathcal{S}^+ = \{(s, x) : x \text{ es supersolución estricta con } s\}$$

y

$$\mathcal{S}^- = \{(s, x) : x \text{ es subsolución estricta con } s\}.$$

Sea  $\pi : \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$  la proyección en la primera coordenada. Haremos la demostración en los siguientes pasos.

*I. Dados  $s \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , existe un vector  $\alpha \in \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\alpha_0 = 0 = \alpha_n$ ,  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x}$  y  $(s, \alpha) \in \mathcal{S}^-$ .*

Sea  $\alpha = (0, R\varphi^1, 0)$ . Reemplazando  $\alpha$  en ambos miembros de 4.7.10 obtenemos

$$T\alpha = \lambda_1 \tilde{\alpha}, \quad \lambda_1 \tilde{\alpha} + F(\tilde{\alpha}) + s\varphi^1 = \lambda_1 \tilde{\alpha} + F(R\varphi^1) + s\varphi^1.$$

Así que  $\alpha$  es subsolución estricta de 4.7.10 con  $s$  si y sólo si

$$F(R\varphi^1) + s\varphi^1 \prec 0.$$

Pero esto puede lograrse tomando  $R \prec 0$  de módulo suficientemente grande, ya que  $\varphi^1 \succ 0$  y  $F$  verifica la condición 4.7.4.

*II. Existe al menos un  $s \in \mathbb{R}$  tal que  $(s, 0) \in \mathcal{S}^+$ .*

Evaluando ambos miembros de 4.7.10 en 0 llegamos a que  $(s, 0) \in \mathcal{S}^+$  si y sólo si

$$F(0) + s\varphi^1 \succ 0.$$

Pero, como  $\varphi^1 \succ 0$ , es claro que si  $s$  es lo suficiente grande, esta condición puede lograrse.

*III. Si  $(s, x) \in \mathcal{S}$  y  $s' > s$ , entonces  $(s', x) \in \mathcal{S}^+$ .*

En efecto, como  $(s, x) \in \mathcal{S}$ , tenemos

$$Tx = \lambda_1 \tilde{x} + F(\tilde{x}) + s\varphi^1 \prec \lambda_1 \tilde{x} + F(\tilde{x}) + s'\varphi^1,$$

y por lo tanto  $x$  es supersolución con  $s'$ .

*IV.  $\mathcal{S} \neq \emptyset$ .*

Por el paso *II*. consideramos un  $(s, 0) \in \mathcal{S}^+$  y por el paso *I*. tomamos  $\alpha = (0, R\varphi^1, 0)$  tal que  $(s, \alpha) \in \mathcal{S}^-$ . Pero  $(\alpha : 0)$  es un par bien ordenado con  $s$ , ya que  $R\varphi^1 \prec 0$ . Entonces, de acuerdo al teorema 54, existe una solución  $x$  con  $s$  tal que  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x} \prec 0$ .

*V. Si  $s \in \pi(\mathcal{S})$ , entonces  $[s, +\infty) \subseteq \pi(\mathcal{S})$ .*

En efecto, si  $(s, x) \in \mathcal{S}$  y  $s' > s$ , por *III*. afirmamos que  $(s', x) \in \mathcal{S}^+$ . Ahora, por *I*. existe  $(s', \alpha) \in \mathcal{S}^-$  tal que  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x}$ , y así resulta que  $(\alpha : x)$  es un par bien ordenado con

$s'$ . Nuevamente por el teorema 54, existe una solución  $z$  con  $s'$  tal que  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{z} \prec \tilde{x}$ . Por lo tanto, tenemos que  $s' \in \pi(\mathcal{S})$ .

VI.  $\pi(\mathcal{S})$  es acotado inferiormente y si  $s_1 = \inf \pi(\mathcal{S})$ , entonces  $(s_1, +\infty) \subseteq \pi(\mathcal{S})$ .

Sea  $k \in \mathbb{R}_{>0}$  una cota superior de  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ), que existe por 4.7.4. Entonces, si  $(s, x) \in \mathcal{S}$ , entonces aplicando 4.7.7 tenemos

$$\frac{sn}{2} = -\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle \geq -k \cdot \|F(\tilde{x})\|_1,$$

lo que muestra que  $\pi(\mathcal{S})$  es acotado inferiormente. Ahora sea  $s_1 = \inf \pi(\mathcal{S})$ . Por V. se tiene que  $(s_1, +\infty) \subseteq \pi(\mathcal{S})$ .

VII. Si  $s > s_1 = \inf \pi(\mathcal{S})$ , entonces 4.7.10 tiene por lo menos dos soluciones con  $s$ .

Acá reformulamos 4.7.10 para aplicar el grado de Brouwer. Consideramos la función continua  $G : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  definida por

$$(4.7.11) \quad G(s, u) = (L - \lambda_1 I)u - (F(u) + s\varphi^1).$$

De esta forma,  $(0, u_1, \dots, u_{n-1}, 0)$  es una solución de 4.7.10 con  $s$  si y sólo si  $G(s, u) = 0$ . Sean  $s_3 < s_1 < s_2$ . Por el lema 60 podemos tomar un  $\rho > 0$  tal que

$$G_s^{-1}(\{0\}) \subseteq B(0, \rho) \quad (s \in [s_3, s_2]).$$

Entonces, el grado  $d[G_s, B(0, \rho), 0]$  está bien definido y (por invariancia homotópica) es constante para  $s \in [s_3, s_2]$ . Como además  $s_3 \notin \pi(\mathcal{S})$ , aplicando la propiedad de solución obtenemos

$$d[G_{s_2}, B(0, \rho), 0] = d[G_{s_3}, B(0, \rho), 0] = 0.$$

Ahora, por la propiedad de escisión,

$$(4.7.12) \quad d[G_{s_2}, B(0, \rho'), 0] = 0 \quad (\rho' \geq \rho).$$

Sean  $s \in [s_1, s_2] \cap \pi(\mathcal{S})$  y  $(s, x) \in \mathcal{S}$ . Por III.  $(s_2, x) \in \mathcal{S}^+$  y por I. existe  $(s_2, \alpha) \in \mathcal{S}^-$  tal que  $\alpha_0 = 0 = \alpha_n$  y  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{x}$ . Entonces, por el teorema 54 y la observación 55, podemos afirmar que existe  $(s_2, z) \in \mathcal{S}$  tal que  $\tilde{\alpha} \prec \tilde{z} \prec \tilde{x}$ , y también que

$$|d[G_{s_2}, (\tilde{\alpha}, \tilde{x}), 0]| = |d[L - (\lambda_1 I + F + s_2 \varphi^1), (\tilde{\alpha}, \tilde{x}), 0]| = 1.$$

Tomando  $\rho'$  suficientemente grande, de esto último, 4.7.12 y la propiedad de aditividad deducimos que

$$\begin{aligned} \left| d \left[ G_{s_2}, B(0, \rho') \setminus \overline{(\tilde{\alpha}, \tilde{x})}, 0 \right] \right| &= |d[G_{s_2}, B(0, \rho'), 0] - d[G_{s_2}, (\tilde{\alpha}, \tilde{x}), 0]| = \\ &= |d[G_{s_2}, (\tilde{\alpha}, \tilde{x}), 0]| = 1, \end{aligned}$$

y por la propiedad de solución, existe  $(s_2, y) \in \mathcal{S}$  tal que  $\tilde{y} \in B(0, \rho') \setminus \overline{(\tilde{\alpha}, \tilde{x})}$ . Por lo tanto, hay otra solución  $y$  con  $s_2$ .

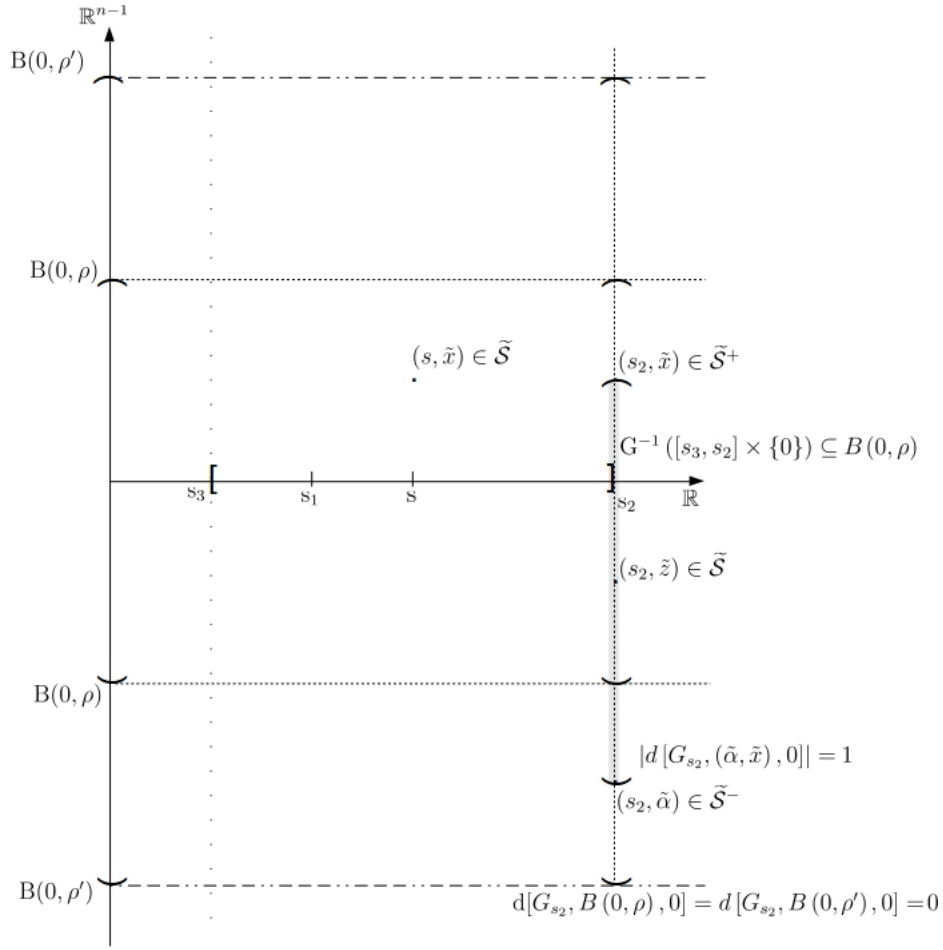


FIGURA 4.7.1. Un esquema del paso VII. de la demostración del teorema 61.

En la figura 4.7 puede verse un esquema de este paso de la demostración. En Los conjuntos a los que se hace referencia son:

$$\tilde{\mathcal{S}} = \{(s, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n : (s, x) \in \mathcal{S}, x_0 = 0 = x_n\},$$

$$\tilde{\mathcal{S}}^+ = \{(s, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n : (s, x) \in \mathcal{S}^+, x_0 = 0 = x_n\}$$

y

$$\tilde{\mathcal{S}}^- = \{(s, \tilde{x}) \in \mathbb{R}^n : (s, x) \in \mathcal{S}^-, x_0 = 0 = x_n\}.$$

VIII.  $s_1 \in \pi(\mathcal{S})$ .

En efecto, sea  $(\sigma_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (s_1, +\infty)$  una sucesión decreciente que converge a  $s_1$ , y sea  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $\{(\sigma_k, x_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{S}$ . Debido al lema 60  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  es acotada, y entonces existe una subsucesión  $(x_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$  convergente (por la continuidad de la función  $G$  definida en 4.7.11) a una solución  $x$  con  $s = s_1$ .  $\square$

Mediante argumentos análogos a los recién utilizados es posible probar el siguiente resultado de multiplicidad con otra condición de no acotación.

TEOREMA 62. *Para el problema 4.7.1 con la condición*

$$f_m(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

existe un valor  $s_1 \in \mathbb{R}$  tal que:

1. Si  $s > s_1$ , entonces no existe ninguna solución con  $s$ .
2. Si  $s = s_1$ , entonces existe al menos una solución con  $s$ .
3. Si  $s < s_1$ , entonces existen al menos dos soluciones con  $s$ .

EJEMPLO 63. Existe  $s_1 \in \mathbb{R}$  tal que el problema

$$\Delta^2 x_{m-1} - \lambda_1 x_m = -|x_m|^{\frac{1}{2}} + s\varphi_m \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n$$

no tiene solución si  $s < s_1$ , tiene al menos una solución si  $s = s_1$  y tiene por lo menos dos soluciones si  $s > s_1$ .

En este ejemplo se aplica el teorema 61 y en el siguiente se aplica el teorema 62.

EJEMPLO 64. Existe  $s_1 \in \mathbb{R}$  tal que el problema

$$\Delta^2 x_{m-1} - \lambda_1 x_m = e^{x_m^2} + s\varphi_m \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n$$

no tiene solución si  $s > s_1$ , tiene al menos una solución si  $s = s_1$  y tiene por lo menos dos soluciones si  $s < s_1$ .

#### 4.8. No linealidades unilateralmente acotadas.

Sean  $n \geq 2$  y  $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funciones continuas ( $1 \leq m \leq n-1$ ). Consideramos el problema

$$(4.8.1) \quad \Delta^2 x_m - \lambda_1 x_m = f_m(x_m) \quad (1 \leq m \leq n-1), \quad x_0 = 0 = x_n.$$

Definiendo, como antes, la función continua  $F : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  por

$$F(u) = (f_1(u_1), \dots, f_{n-1}(u_{n-1})) \quad (u \in \mathbb{R}^{n-1}),$$

y usando el operador  $L$  que figura en 4.2.3, podemos escribir 4.8.1 en la forma

$$(4.8.2) \quad Lu - \lambda_1 u = F(u) \quad (u \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Siendo  $\lambda_1$  el autovalor de  $L$  de autovector  $\varphi^1$  mencionados anteriormente, definimos el operador  $L_1 = L - \lambda_1 I$  y escribimos 4.8.2 como

$$(4.8.3) \quad L_1 u = F(u) \quad (u \in \mathbb{R}^{n-1}).$$

Observamos que  $L_1$  es un operador no inversible tal que

$$\ker L_1 = \text{Gen} \{\varphi^1\},$$

y, como además es simétrico,

$$\text{Im} L_1 \subseteq (\ker L_1)^\perp,$$

y por el teorema de la dimensión, dado que los autovectores de  $L$ , forman una base ortogonal se verifican

$$\text{Im} L_1 = (\ker L_1)^\perp = (\text{Gen} \{\varphi^1\})^\perp = \text{Gen} \{\varphi^2, \dots, \varphi^{n-1}\}.$$

Nos será útil definir y emplear el operador  $P : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  de proyección ortonormal al núcleo de  $L_1$ . Es claro que

$$(4.8.4) \quad \ker P = \text{Gen} \{\varphi^2, \dots, \varphi^{n-1}\} = (\ker L_1)^\perp = (\text{Gen} \{\varphi^1\})^\perp = \text{Im} L_1.$$

En esta sección llegaremos a aplicar teorema abstracto de existencia de soluciones del problema resonante a la ecuación 4.8.3, bajo la condición de que las  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) estén unilateralmente acotadas (del mismo lado), para obtener un resultado de existencia de soluciones de 4.8.1.

LEMA 65. *Existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  vale*

$$(4.8.5) \quad \|x - Px\|_2 \leq \delta \sum_{m=1}^{n-1} |L_1(x - Px)_m| \varphi_m^1.$$

DEMOSTRACIÓN. En efecto, 4.8.5 se deduce de que la aplicación  $N : (\text{Gen} \{\varphi^1\})^\perp \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Nu = \sum_{m=1}^{n-1} |L_1(u)_m| \varphi_m^1$$

define una norma sobre  $\ker P = (\text{Gen} \{\varphi^1\})^\perp$ , ya que  $L_1|_{\ker P}$  es monomorfismo. Así,  $N$  resulta equivalente a la norma  $\|\cdot\|_2$  en  $(\text{Gen} \{\varphi^1\})^\perp$ .  $\square$

El siguiente resultado establece la existencia de cierto tipo de cotas a priori y es fundamental para el teorema que queremos demostrar.

LEMA 66. *Si todas las funciones  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) son acotadas inferiormente o son acotadas superiormente, y si, para algún  $R = (r, \dots, r) \succ 0$  y todo  $x$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , se tiene*

$$(4.8.6) \quad (x \geq R \vee x \leq -R) \implies \langle F(x), \varphi^1 \rangle \neq 0,$$

entonces existe  $\gamma > r$  tal que para todo  $(\lambda, x) \in (0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$  vale

$$(4.8.7) \quad L_1 x = \lambda F(x) \implies x \in B(0, \gamma).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que vale 4.8.6 y que las funciones  $f_m$  son acotadas por arriba y escribamos

$$F(x) \prec W \quad (x \in \mathbb{R}^{n-1}),$$

donde  $W = (w, \dots, w) \succ 0$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Sea  $(\lambda, x) \in (0, 1] \times \mathbb{R}^{n-1}$  tal que

$$L_1 x = \lambda F(x).$$

Veamos primero que

$$(4.8.8) \quad \langle F(x), \varphi^1 \rangle = 0.$$

En efecto, aplicando el operador  $P$  al antecedente de 4.8.7, por 4.8.4 tenemos que

$$0 = PL_1 x = \lambda PF(x),$$

y como  $\lambda \neq 0$ , resulta que  $PF(x) = 0$ , y entonces  $F(x) \in \ker P = (\text{Gen } \{\varphi^1\})^\perp$ , lo que implica 4.8.8. Por lo tanto, puesto que asumimos la verdad de 4.8.6, tenemos que

$$(4.8.9) \quad L_1 x = \lambda F(x) \implies R \not\prec x \not\prec -R.$$

Ahora buscamos otra condición necesaria para las soluciones del antecedente de 4.8.7, que junto con la que acabamos de encontrar determinarán un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^{n-1}$ . Definimos los vectores  $F(x)^+ \geq 0$  y  $F(x)^- \geq 0$  mediante

$$F(x)_m^+ = \text{máx} \{F(x)_m, 0\}, \quad F(x)_m^- = -\text{mín} \{F(x)_m, 0\} \quad (1 \leq m \leq n-1).$$

Así,  $F(x) = F(x)^+ - F(x)^-$  y por consiguiente

$$\langle F(x)^+, \varphi^1 \rangle - \langle F(x)^-, \varphi^1 \rangle = \langle F(x), \varphi^1 \rangle = 0,$$

de lo que deducimos

$$(4.8.10) \quad \langle F(x)^-, \varphi^1 \rangle = \langle F(x)^+, \varphi^1 \rangle < \langle W, \varphi^1 \rangle = w \|\varphi^1\|_1.$$

Ahora, aplicando 4.8.5 y 4.8.10 obtenemos

$$(4.8.11) \quad \begin{aligned} \|x - Px\|_2 &\leq \delta \sum_{m=1}^{n-1} |L_1(x - Px)_m| \varphi_m^1 = \lambda \delta \sum_{m=1}^{n-1} |F(x)_m| \varphi_m^1 = \\ &= \lambda \delta \langle F(x)^+ + F(x)^-, \varphi_m^1 \rangle < 2\lambda \delta w \|\varphi^1\|_1. \end{aligned}$$

Entonces, definiendo  $r_2 = 2\lambda \delta w \|\varphi^1\|_1$  y el conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : \|x - Px\|_2 < r_2, R \not\prec x \not\prec -R\},$$

por 4.8.9 y 4.8.11 tenemos

$$L_1 x = \lambda F(x) \implies x \in M.$$



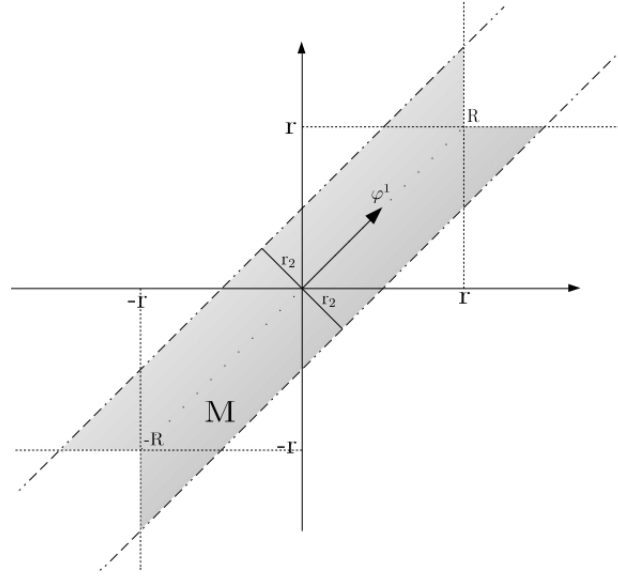


FIGURA 4.8.1. El conjunto  $M$  para  $n = 3$ .

Por lo tanto, basta probar que  $M$  es acotado. En la figura 4.8.1 se representa dicho conjunto para  $n = 3$ .

Supongamos que  $M$  no es acotado. Si  $x \in M$ , tenemos

$$\|x\|_2^2 = \|Px\|_2^2 + \|x - Px\|_2^2,$$

de lo que se deduce

$$(4.8.12) \quad \|Px\|_2^2 > \|x\|_2^2 - r_2^2.$$

Así, dado que  $M$  se supone no acotado, podemos considerar un  $x \in M$  tal que  $\|Px\|_2$  sea tan grande como deseemos, en particular suponemos que es no nulo y que

$$(4.8.13) \quad \|x\|_2^2 - r_2^2 > 0.$$

Ahora escribimos

$$x_j = Px_j + (x - Px)_j = \frac{2}{n} \langle x, \varphi^1 \rangle \varphi_j^1 + (x - Px)_j \quad (1 \leq j \leq n - 1).$$

Nuevamente basándonos en que  $\varphi^1 \succ 0$ , consideramos  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  tal que  $\varphi^1 \succ C \succ 0$ , donde  $C = (c, \dots, c) \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Como  $Px$  es no nulo, se verifica que  $\langle x, \varphi^1 \rangle \neq 0$ . Analizaremos los dos casos posibles.

Si  $\langle x, \varphi^1 \rangle > 0$ , entonces dado que  $\|x - Px\|_2 < r_2$ , por 4.8.12 y 4.8.13 tenemos

$$x_j > \frac{2}{n} c \langle x, \varphi^1 \rangle + (x - Px)_j = c \sqrt{\frac{2}{n}} \|Px\|_2 + (x - Px)_j >$$

$$> c\sqrt{\frac{2}{n}(\|x\|_2^2 - r_2^2)} - r_2 \quad (1 \leq j \leq n-1),$$

y por lo tanto, tomando  $x$  de manera tal que  $\|x\|_2$  sea lo suficientemente grande podemos lograr que  $x \succ R$ , lo que no puede ser porque  $x \in M$ . Llegamos así a un absurdo.

Si  $\langle x, \varphi^1 \rangle < 0$ , entonces nuevamente por 4.8.12 y 4.8.13 vale

$$\begin{aligned} x_j &< \frac{2}{n}c\langle x, \varphi^1 \rangle + (x - Px)_j = -c\sqrt{\frac{2}{n}}\|Px\|_2 + (x - Px)_j < \\ &< -c\sqrt{\frac{2}{n}(\|x\|_2^2 - r_2^2)} + r_2 \quad (1 \leq j \leq n-1), \end{aligned}$$

y si  $\|x\|_2$  es lo suficientemente grande, vale  $x \prec -R$ , lo que no puede ser porque  $x \in M$ . Llegamos otra vez a un absurdo.

Esto prueba que  $M$  es acotado, y por lo tanto el resultado vale para el caso en que las funciones  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) son acotadas por arriba.

En el caso en que las funciones  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) son acotadas por abajo escribimos el problema

$$\widetilde{L}_1 x = \widetilde{F}(x),$$

donde  $\widetilde{L}_1 = -L_1$  y  $\widetilde{F} = -F$ , donde  $\widetilde{L}_1$  y  $L_1$  tienen la misma imagen y el mismo núcleo, y  $\widetilde{F}$  es acotado por arriba. Así, este caso queda reducido al anterior y se pueden aplicar los razonamientos recién utilizados.  $\square$

Llegamos ahora al teorema de existencia anteriormente mencionado, en el que aplicaremos el teorema de existencia de soluciones del problema resonante. Para enunciarlo, definiremos la función continua  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mediante

$$\varphi(u) = \langle F(u\varphi^1), \varphi^1 \rangle,$$

y el número

$$\mu = \min_{1 \leq k \leq n-1} \varphi_k^1 = \sin \frac{\pi}{n}.$$

OBSERVACIÓN 67.  $\mu \in (0, 1]$  y para todo  $t \in \mathbb{R}$  vale

$$(t\varphi^1 \succ R \vee t\varphi^1 \prec -R) \iff |t| > \frac{r}{\mu}$$

TEOREMA 68. Si las funciones  $f_m$  ( $1 \leq m \leq n-1$ ) satisfacen las condiciones del lema 66 y si

$$(4.8.14) \quad \varphi\left(-\frac{r}{\mu}\right) \varphi\left(\frac{r}{\mu}\right) < 0,$$

entonces el problema 4.8.1 tiene al menos una solución.

DEMOSTRACIÓN. Consideramos, como venimos haciendo, el problema 4.8.1 escrito en la forma

$$L_1 x = F(x)$$

y buscamos aplicarle el teorema 49 poniendo  $X = \mathbb{R}^{n-1}$ , el operador lineal no inversible  $L$  del enunciado como el operador simétrico  $L_1$  que utilizamos en esta sección,  $A = F$  y  $D = B(0, \gamma)$  con un número adecuado  $\gamma$ , que es como en la tesis del lema 66. A continuación probamos las tres condiciones enunciadas en la hipótesis del teorema 49.

1.  $L_1 x \neq tF(x)$  para todo  $(x, t) \in \partial B(0, \gamma) \times (0, 1]$ .

En efecto, esto vale porque  $\gamma > r$  y el resto de la tesis del lema 66.

2.  $QF(x) \neq 0$  para todo  $x \in \ker L_1 \cap \partial B(0, \gamma)$ .

En efecto, tomando en la reducción de Lyapunov-Schmidt desarrollada en la observación 47, el operador  $P$  como la proyección ortonormal al núcleo de  $L_1$ , por 4.8.4 el operador  $Q$  que figura allí puede tomarse como el mismo operador  $P$ , considerándolo también como una proyección ortonormal. Entonces

$$0 = QF(x) = PF(x) = \frac{2}{n} \langle F(x), \varphi^1 \rangle \varphi^1$$

implica que

$$\langle F(x), \varphi^1 \rangle = 0.$$

Así, por 4.8.6 vale

$$R \not\leq x \not\leq -R.$$

Por consiguiente, como  $\ker L_1 = \text{Gen} \{\varphi^1\}$  y  $\varphi^1 \succ 0$ , el conjunto

$$\{x \in \ker L_1 : QF(x) = 0\}$$

es acotado y, tomando  $\gamma$  suficientemente grande, podemos considerarlo incluido en  $B(0, \gamma)$ , por lo que se verifica la segunda condición.

3.  $d [JQF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0] \neq 0$ .

En la aplicación de la reducción de Lyapunov-Schmidt al caso específico de este teorema, resulta que podemos considerar como el operador  $J$  a la identidad de  $\text{Im } Q = \ker L_1$ . Usando también que  $P = Q$ , escribimos

$$d [JQF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0] = d [PF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0].$$

Pero definiendo el isomorfismo lineal  $h : \mathbb{R} \rightarrow \ker L_1$  mediante

$$h(u) = u\varphi^1 \quad (u \in \mathbb{R}),$$

tenemos que

$$h^{-1} \circ PF \circ h = \frac{2}{n} \varphi$$

y

$$h^{-1} \left( B(0, \gamma) \cap \text{Gen} \{ \varphi^1 \} \right) = \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right).$$

En consecuencia, aplicando la definición 42 podemos escribir:

$$\begin{aligned} d \left[ PF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0 \right] &= d \left[ PF|_{\text{Gen}\{\varphi^1\}}, B(0, \gamma) \cap \text{Gen} \{ \varphi^1 \}, 0 \right] = \\ &= d \left[ h^{-1} \circ PF|_{\text{Gen}\{\varphi^1\}} \circ h, h^{-1} \left( B(0, \gamma) \cap \text{Gen} \{ \varphi^1 \} \right), 0 \right] = d \left[ \frac{2}{n}\varphi, \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right), 0 \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto, aplicando el lema 40 al último miembro tenemos

$$(4.8.15) \quad d \left[ JQF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0 \right] = d \left[ \varphi, \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right), 0 \right].$$

Tomando  $\gamma > r$  de manera que

$$[-R, R] \subseteq \left[ -\frac{r}{\mu}, \frac{r}{\mu} \right]^{n-1} \subseteq B \left( 0, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right),$$

por la hipótesis 4.8.6, la observación 67, 4.8.14 y la continuidad de  $\varphi$  vale

$$\varphi \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right) \varphi \left( \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right) < 0.$$

Entonces, por la observación 34 y la proposición 39, estamos en condiciones de afirmar

$$(4.8.16) \quad d \left[ \varphi, \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right), 0 \right] = d \left[ \psi, \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right), 0 \right] = \pm 1,$$

donde  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la función lineal definida por

$$\psi(u) = \frac{\varphi \left( \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right) - \varphi \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right)}{2\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma} \left( u + \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right) + \varphi \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right) \quad (u \in \mathbb{R}),$$

que coincide con  $\varphi$  en  $\partial \left( -\sqrt{\frac{2}{n}}\gamma, \sqrt{\frac{2}{n}}\gamma \right)$ .

Finalmente, por 4.8.15 y 4.8.16 llegamos a

$$|d \left[ JQF|_{\ker L_1}, B(0, \gamma) \cap \ker L_1, 0 \right]| = 1,$$

lo que implica la condición 3. □

EJEMPLO 69. El problema

$$\Delta^2 x_{m-1} - \lambda_1 x_m = t_m - e^{x_m} \quad (1 \leq m \leq n-1) \quad x_0 = 0 = x_n,$$

tiene por lo menos una solución si y sólo si

$$(4.8.17) \quad \sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1 > 0.$$

La necesidad de la condición se sigue de sumar ambos miembros de la ecuación desde 1 hasta  $n - 1$ , previa multiplicación por  $\varphi_m^1$ . En efecto, por la simetría de  $L$  y porque  $\varphi^1$  es autovector de autovalor  $\lambda_1$ , se anula el primer miembro:

$$\sum_{m=1}^{n-1} \Delta^2 x_{m-1} \varphi_m^1 - \lambda_1 \sum_{m=1}^{n-1} x_m \varphi_m^1 = \langle L\tilde{x}, \varphi^1 \rangle - \lambda_1 \langle \tilde{x}, \varphi^1 \rangle = \langle \tilde{x}, L\varphi^1 \rangle - \langle \tilde{x}, \lambda_1 \varphi^1 \rangle = 0.$$

Llegamos, entonces, a la igualdad

$$\sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1 = \sum_{m=1}^{n-1} e^{x_m} \varphi_m^1,$$

y considerando los signos de los términos involucrados se tiene la condición. Para la suficiencia consideramos la correspondiente función  $\varphi$  dada por

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{n-1} (t_m - e^{u\varphi_m^1}) \varphi_m^1$$

y observamos que existe  $r > 0$  tal que  $\varphi(u) < 0$  para  $u \geq r$  y  $\varphi(u) > 0$  para  $u \leq -r$ .

Falta ver que se cumplen el resto de las condiciones del teorema anterior. Dado que sería

$$f_m(x_m) = t_m - e^{x_m} \quad (1 \leq m \leq n - 1),$$

es claro que las  $f_m$  son acotadas superiormente. La hipótesis restante figura en el lema 66 y tiene que ver con 4.8.6. Recordando la forma en que está escrito el problema 4.8.1 tenemos

$$(4.8.18) \quad \langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle = \sum_{m=1}^{n-1} (t_m - e^{x_m}) \varphi_m^1,$$

y por lo tanto, como  $\lim_{u \rightarrow -\infty} e^u = 0$ , por 4.8.17 vale que si  $r > 0$  es lo suficientemente grande y  $\tilde{x} \prec (-r, \dots, -r)$ , entonces

$$\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle > 0.$$

Por otro lado, como  $\lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$ , para  $r > 0$  suficientemente grande vale que si  $\tilde{x} \succ (r, \dots, r)$ , entonces

$$\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle < 0.$$

Así, tenemos que se verifican todas las condiciones del teorema 68.

Veamos una condición del tipo Landesman-Lazer para ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden.

EJEMPLO 70. Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua acotada superiormente o acotada inferiormente y  $t = (t_1, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  es tal que

$$(4.8.19) \quad \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) < \frac{\sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1}{\sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m^1} < \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u),$$

entonces el problema

$$(4.8.20) \quad \Delta^2 x_{m-1} - \lambda_1 x_m = t_m - g(x_m) \quad (1 \leq m \leq n-1) \quad x_0 = 0 = x_n,$$

tiene por lo menos una solución.

En efecto, llamamos

$$\tau = \frac{\sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1}{\sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m^1},$$

la correspondiente función  $\varphi$  está definida por

$$\varphi(u) = \sum_{m=1}^{n-1} (t_m - g(u\varphi_m^1)) \varphi_m^1$$

y para analizar su signo nos conviene escribir

$$(4.8.21) \quad \frac{\varphi(u)}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(u\varphi_m^1) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1}.$$

Ahora, si  $\tau < \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u)$ , entonces (trabajando en  $\bar{\mathbb{R}}$ , si es necesario) podemos afirmar

$$\limsup_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(u)}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(u\varphi_m^1) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} \leq \tau - \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u) < 0,$$

de lo que deducimos  $\limsup_{u \rightarrow +\infty} \varphi(u) < 0$ , y por lo tanto existe  $u_1 > 0$  tal que

$$\varphi(u) < 0 \quad (u \geq u_1).$$

Por otro lado, si  $\tau > \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u)$ , entonces análogamente se sigue

$$\liminf_{u \rightarrow -\infty} \frac{\varphi(u)}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \limsup_{u \rightarrow -\infty} \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(u\varphi_m^1) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} \geq \tau - \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) > 0,$$

de lo que deducimos  $\liminf_{u \rightarrow -\infty} \varphi(u) > 0$ , y por lo tanto existe  $u_0 < 0$  tal que

$$\varphi(u) > 0 \quad (u \leq u_0).$$

Si tomamos  $r = \max\{-u_0, u_1\}$ , vale que  $\varphi(u) < 0$  para  $u \geq r$  y  $\varphi(u) > 0$  para  $u \leq -r$ , con lo que estamos en la situación del ejemplo anterior.

Veamos ahora que se verifican las condiciones del lema 66. Si, de manera análoga a como hicimos en el ejemplo anterior, ponemos

$$f_m(x_m) = t_m - g(x_m) \quad (1 \leq m \leq n-1),$$

entonces las  $f_m$  resultan acotadas del lado opuesto al de  $g$ . Además, siguiendo los pasos mediante los que llegamos a 4.8.18, obtenemos

$$\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle = \sum_{m=1}^{n-1} (t_m - g(x_m)) \varphi_m^1.$$

Así, como en 4.8.21 podemos escribir

$$(4.8.22) \quad \frac{\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(x_m) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1},$$

de donde poniendo  $R = (r, \dots, r)$  y trabajando en  $\bar{\mathbb{R}}$  deducimos

$$\sup_{\tilde{x} \succ R} \frac{\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \inf_{\tilde{x} \succ R} \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(x_m) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} \leq \tau - \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \inf_{\tilde{x} \succ R} g(x_m) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \inf_{u > r} g(u).$$

Ahora, por la segunda desigualdad de 4.8.19 vale

$$\inf_{R > 0} \sup_{\tilde{x} \succ R} \langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle \leq \|\varphi^1\|_1 \left( \tau - \sup_{r > 0} \inf_{u > r} g(u) \right) = \|\varphi^1\|_1 \left( \tau - \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u) \right) < 0.$$

Por lo tanto, existe algún  $R = (r, \dots, r) \succ 0$  tal que para todo  $\tilde{x} \succ R$  vale  $\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle < 0$ .

De forma análoga podemos ver que existe algún  $R = (r, \dots, r) \succ 0$  tal que para todo  $\tilde{x} \prec -R$  vale  $\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle > 0$ . En efecto, de 4.8.22 se sigue

$$\inf_{\tilde{x} \prec -R} \frac{\langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \sup_{\tilde{x} \prec -R} \frac{\sum_{m=1}^{n-1} g(x_m) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} \geq \tau - \frac{\sum_{m=1}^{n-1} \sup_{\tilde{x} \prec -R} g(x_m) \varphi_m^1}{\|\varphi^1\|_1} = \tau - \sup_{u < -r} g(u).$$

Ahora, por la primera desigualdad de 4.8.19 tenemos

$$\sup_{R > 0} \inf_{\tilde{x} \prec -R} \langle F(\tilde{x}), \varphi^1 \rangle \geq \|\varphi^1\|_1 \left( \tau - \inf_{r > 0} \sup_{u < -r} g(u) \right) = \|\varphi^1\|_1 \left( \tau - \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) \right) > 0,$$

de lo que se deduce la existencia de tal  $R \succ 0$ . Esto termina de probar que se satisfacen las condiciones del lema 66. Por lo tanto, se verifican todas las hipótesis del teorema anterior, y entonces tenemos la suficiencia de la condición 4.8.19.

Finalmente, observamos que si para todo  $v \in \mathbb{R}$  se satisface

$$(4.8.23) \quad \limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) < g(v) < \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u),$$

entonces 4.8.19 es también una condición necesaria. En efecto, como hicimos en el ejemplo anterior, multiplicando los términos de 4.8.20 por  $\varphi_m^1$  y sumando en  $m$  tenemos que se anula el primer miembro y podemos llegar a la igualdad

$$\sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1 = \sum_{m=1}^{n-1} g(x_m) \varphi_m^1,$$

de la que usando 4.8.23 deducimos

$$\limsup_{u \rightarrow -\infty} g(u) \sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m^1 < \sum_{m=1}^{n-1} t_m \varphi_m^1 < \liminf_{u \rightarrow +\infty} g(u) \sum_{m=1}^{n-1} \varphi_m^1$$

y en consecuencia 4.8.19.



### Comentarios finales.

En este capítulo nos referiremos a algunos de los temas que no llegaremos a tratar en esta tesis, pero están relacionados con lo que vimos en los anteriores capítulos. Resultaría natural seguir con el estudio del caso continuo, es decir, pasar de las ecuaciones en diferencias finitas a las ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, en lugar del problema 4.2.2, considerar

$$(5.0.24) \quad u''(t) = f(u(t)), \quad (0 \leq t \leq 1), \quad u(0) = u(1) = 0,$$

donde  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua. También podríamos, cosa que no hemos hecho en el caso discreto, tomar condiciones periódicas, plantear un segundo miembro más general del estilo de  $f(t, u(t), u'(t))$ , tomar un orden diferente, etc. A veces es posible aplicar el grado de Brouwer a problemas “continuos” (por ejemplo, para encontrar soluciones periódicas vía la aplicación de Poincaré), pero en muchos otros casos necesitaríamos una herramienta diferente: el *grado de Leray-Schauder*.

En 1934 Leray y Schauder publicaron una extensión del grado de Brouwer a operadores en espacios de Banach reales, cuya caracterización fue dada en 1973 por Amann y Weiss. La generalización no es posible para operadores continuos arbitrarios ([2]) pero Leray y Schauder lograron definir el grado para perturbaciones compactas de la identidad, es decir, operadores de la forma  $F = I - K$  con  $K$  compacto. En el proceso de construcción juega un papel importante la fórmula de reducción ya conocida para dimensión finita, arrojando además cierta intuición sobre la noción de grado a desarrollar. Este nuevo grado cumple propiedades análogas a las tres propiedades principales. En [4] puede encontrarse una caracterización similar a la que se dio en el teorema 2.1.

El grado de Leray-Schauder se aplica a problemas para los que la dimensión finita no es suficiente, como ecuaciones diferenciales, ecuaciones integrales, ecuaciones integro-diferenciales, etc. Tal aplicación es posible a través de los problemas abstractos. Allí vuelven a aparecer los casos no resonante y resonante, en una versión más general. La ecuación sigue siendo

$$Lx = A(x),$$

donde  $L : E \rightarrow F$  lineal,  $A : E \rightarrow F$  no lineal continuo y  $E, F$  espacios de Banach. Aquí surgen complicaciones técnicas derivadas de no asumir dimensión finita. Por ejemplo, el

problema no resonante es con  $L$  inversible, pero con eso no basta para aplicar el grado de Leray-Schauder. Asumimos, además, que  $L^{-1} : F \rightarrow E$  es compacta y que la imagen por  $A$  de cada conjunto acotado es acotada. La primera condición adicional resulta razonable porque generalmente el operador  $L$  es diferencial, y en muchos de tales casos eso se satisface. De hecho, la condición permite pensar en una situación similar al caso discreto ya que, como consecuencia de la compacidad, el conjunto de autovalores es discreto. Observamos además que si la dimensión de  $E$  es infinita, entonces  $L$  no puede ser acotado porque tiene inversa compacta. Así, aplicando el grado de Leray-Schauder se puede demostrar que si  $D \subseteq E$  es un conjunto abierto acotado tal que  $0 \in D$  y

$$L^{-1}Ax \neq tx \quad ((t, x) \in [0, 1] \times \partial D),$$

se tiene

$$d [Id_E - L^{-1}A, D, 0] = 1,$$

y en particular, el problema no resonante tiene por lo menos una solución en  $D$ .

La situación recién descrita está desarrollada en un estilo diferente al que seguimos para tratar el caso de dimensión finita (ver [2]). Por ejemplo, aquí no se necesita que  $A$  sea acotada. Pero estas diferencias no son esenciales. También hay otras condiciones que podríamos analizar (como la sublinealidad) y no hemos planteado.

En cuanto al problema resonante en espacios de Banach, el grado de Leray-Schauder tiene una aplicación parecida al caso de dimensión finita dado en el teorema 49, con las correspondientes hipótesis adicionales debidas a la mayor generalidad.

Cabe señalar que la parte lineal de los problemas abstractos no siempre es un operador diferencial, y que si lo es, en general la parte no lineal involucra derivadas de orden menor.

Por otro lado, debemos observar que la resonancia tratada en las ecuaciones en diferencias es muy específica. Por ejemplo, en el problema de Ambrosetti-Prodi dado por 4.7.3, como hicimos antes, podemos escribir

$$(L - \lambda_1 I)x = F(x) + s\varphi^1.$$

En este caso se dice que *la resonancia se da en el primer autovalor*. También resulta que el núcleo de la parte lineal es unidimensional y las coordenadas del autovector correspondiente tienen todas el mismo signo. Hay otras situaciones posibles que no hemos tratado. En [2] se muestra (para el caso continuo con condiciones periódicas) un ejemplo de *resonancia en un autovalor de orden superior*, en el que además el núcleo de la parte lineal tiene dimensión mayor que 1. Mencionamos también que cuando hay resonancia en un autovalor de orden superior, las autofunciones tienen cambios de signo. Este hecho es consecuencia del teorema de comparación de Sturm.

Por último, aclaramos que existen extensiones de la noción de grado a otros espacios, pero quedan aún más lejos del alcance de esta tesis que el grado de Leray-Schauder.

En este trabajo hemos presentado una serie de primeros pasos y aplicaciones de la teoría de grado a problemas abstractos y concretos de ecuaciones (en diferencias finitas). Métodos análogos se aplican en la teoría de grado para dimensión infinita y las ecuaciones diferenciales. Si bien la idea del grado surge en dimensión finita, ambas teorías comparten muchos rasgos, siendo uno importante el ser aplicables a una variedad de problemas mediante (casi) el mismo enfoque abstracto. Dichas similitudes resaltan la importancia de los resultados expuestos, ya que en muchos casos se discretizan problemas de ecuaciones diferenciales, obteniéndose problemas de ecuaciones en diferencias finitas. La similitud entre estos dos tipos de problemas está relacionada con la que existe entre ambas teorías de grado.



## Bibliografía

- [1] AMBROSIO, LUIGI - DANCER, NORMAN: *Calculus of Variations and Partial Differential Equations - Topics on Geometrical Evolution Problems and Degree Theory*. Springer-Verlag, Berlín, 2000.
- [2] AMSTER, PABLO: (*Universitext*) *Topological Methods in the Study of Boundary Value Problems*. Springer, New York, 2014.
- [3] CIARLET, PHILIPPE G.: *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*. SIAM-Society for Industrial and Applied Mathematics, Filadelfia, 2013.
- [4] DEIMLING, KLAUS: *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, Würzburg, 1985.
- [5] DINCA, GEORGE - MAWHIN, JEAN: *Brouwer Degree and Applications*. 2009.
- [6] FONSECA, IRENE - GANGBO, WILFRID: (*Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*, 2) *Degree Theory in Analysis and Applications*. Oxford University Press, Nueva York, 1995.
- [7] HEINZ, ERHARD: *An Elementary Analytic Theory of the Degree of a Mapping in n-Dimensional Space*. Comunicado por C. LOEWNER. Stanford University, Stanford, California.
- [8] NARASIMHAN, RHAGAVAN: *Analysis on Real and Complex Manifolds*. Masson & Cie., París, 1973.
- [9] OUTERELO, ENRIQUE - RUIZ, JESÚS M.: (*Graduate Studies in Mathematics 108*) *Mapping Degree Theory*. American Mathematical Society, Real Sociedad Matemática Española, Providence, Rhode Island, 2009.
- [10] SAUVIGNY, FRIEDRICH: (*Universitext*) *Partial Differential Equations 1 - Foundations and Integral Representations*. Springer-Verlag, Berlín, 2006.
- [11] SCHWARTZ, J.T.: (*Notes on Mathematics and Its Applications*) *Nonlinear Functional Analysis*. Gordon and Breach Science Publishers Inc., New York, 1969.
- [12] TESCHL, GERALD: *Nonlinear Functional Analysis*. 2005.