UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Curvatura en Grupos de Lie-Finsler con Métrica Invariante a Izquierda

José Alejandro Luna

Director: Gabriel Larotonda

Martes 28 de Marzo de 2017

Índice general

Agradecimientos

Tengo mucha gente a la que agradecer por haber llegado hasta donde estoy. No podría haberlo logrado sin todos ellos, que me acompañaron en todo este camino que se llama vida. Espero no olvidarme de nadie.

A mi mamá, por todo. No podría pedir a una mejor persona para guiarme en la vida. Por la ayuda que me diste en todo momento, aunque no estuvieras de acuerdo con mis decisiones. Por aconsejarme cuando lo pedí (¡y cuando no también!), enseñarme cuando lo necesité y encaminarme cuando estaba perdido. Sin vos no podría haber llegado hasta acá.

A mi abuela Maruja, por malcriarme tanto. Por los buenos momentos, y por todo el amor que siempre me hiciste sentir.

A mis hermanas. A Mechi y Pili, por bancarme cuando las molestaba, inquieto por tener que rendir, por la ternura que cada una me da en su manera tan especial y propia. A Nati, por el apoyo que me diste siempre, por las risas y las charlas bobas, y por no opacarme con tu fama. A Andreita, por quererme tanto, y hacerme sentir tu cariño a pesar de la distancia.

A toda mi familia, que cerca o lejos siempre están ahí cuando los necesito. Al abuelo Fito, con quien siempre puedo contar, para lo que sea. A mi hermano Matías, y a mis primos Aimé, Nahuel, Cami y Vale, por tantos momentos divertidos de la infancia, y por los momentos que compartimos cada vez que los veo. A mis tíos queridos Eduardo, Mario, María Inés, Claudio, Sonia, Silvina y Maxi, por veranos increíbles, llenos de amor e historias lindas. A los chiquitos, para los que soy el primo viejo, Ailén, Lauti, Agus y Martina. A la familia Argañaraz, por adoptarme como un sobrino y nieto más. A Facu y Tomás.

A los que ya no están. A mi papá, a la abuela Alicia y al abuelo Chacho, que desde algún lado deben estar cuidándome.

A Pancho Kordon. Hace cinco años me diste el empujón que necesitaba para empezar esta carrera que me dio tantos buenos momentos. Desde entonces, siempre estuviste cuando te lo pedí. A mi gran amigo, por ayudarme tanto, por estar en las buenas y en las malas.

A Dani, por tu cariño y apoyo en tiempos difíciles. Por dejarme cuidar a Igor y Olga, aunque las experiencias pasadas no estaban de mi lado.

A Julio, por bancarme estos últimos meses. Por calmarme cuando estaba ansioso, asegurarme cuando dudaba de mí, y darme la mano cuando el camino por delante me asustaba.

A Gabriel, por aceptar dirigirme la tesis, por la paciencia y la guía.

A EL Grupo, por tantos años de diversión y risas. Por vacaciones geniales, que aunque éramos trece tuvimos buena suerte. A Nacho, gurú personal, se te extraña mucho. A Marina, por tantas cursadas llenas de carcajadas, y por tu apoyo en la transición de ingeniería a matemática. A Ale, por acompañarme en momentos en los que crecí mucho. A María, por tus mates llenos de ternura y consejos que vienen con la edad (bromita!). A Matu, por tu ternura inigualable. A Agus, Pancho Toledo, Andrés, Gonza, Moroco, el negro Paz y el negro Mariano.

Al Silencio: Juan Zuccotti, Juan Desimoni y Lucho, por tantas noches de estudio, cerveza y whisky (y algún que otro tequilazo!).

A los Groupies de Artur Avila: Rochi, Seba, Sebi y Meli. Por dos meses geniales, en los que aprendí un montón, especialmente de ustedes. Y por todo lo que seguí y seguiré aprendiendo.

A los PapiChulos, por más de quince años de amistad, a Jon, Nahuel y Silver. Y por más que estemos separados, a Aker y Ricky por esta aventura de tantos años.

A Pancho Sepúlveda, por enseñarme tanto de la vida.

A los amigos que hice en estos cinco años de matemática. A Tincho, Juan Orza, Juan Piombo, Santi, Mel, Luz, Paula, Feli, Pablo, Emi, Javi, Bujía, Aye, Mariano, Sofi, Franco, y tantos otros. En especial a Pablo, que me enseñó a escribir; y a Iván, hermano de tesis, que sufriste conmigo estos últimos meses, por apoyarnos mutuamente.

Introducción

El objetivo de esta tesis es el estudio del comportamiento de la curvatura de Ricci en grupos de Lie dotados de una métrica de Finsler invariante a izquierda. Seguimos como guía principal el paper de Libing Huang, *Ricci curvatures of left invariant Finsler metrics on Lie groups*, [8]. También tenemos como principales libros de referencia a *Riemann-Finsler Geometry* [5], y *An introduction to Riemann-Finsler geometry* [2].

La geometría diferencial suele considerar como central el estudio de la geometría riemanniana, en la cual en cada espacio tangente definimos un producto interno que varía de forma diferenciable. En este paper desarrollaremos el caso más general de la geometría de Finsler. En la misma, cada espacio tangente está dotado de una norma de Minkowski en lugar de una norma euclidiana. Esta generalización fue introducida por Riemann en su Disertación Habilitante en 1854. Podemos encontrar una traducción de la misma en [13]. Sin embargo, se la llama geometría de Finsler en reconocimiento a Paul Finsler, quien basó su tesis de 1918 en ella. Una reimpresión de la misma puede ser encontrada en [7]. El punto de partida de la geometría de Finsler es la medida de curvas, y la generalidad de la misma permite diversas aplicaciones en la física. Para indagar sobre ellas, se puede ver [9].

Uno de los principales contribuyentes al tema es Shiing-Shen Chern, uno de los co-autores de los libros de referencia, y uno de los principales elementos de la teoría, la conexión de Chern, lleva su nombre. Shiing comenzó el estudio de las métricas de Finsler en 1948, pero a pesar de su utilidad en la física y en la matemática, el mismo fue dejado de lado por mucho tiempo. Sin embargo, ha tenido mucho progreso en los últimos años, y ha demostrado que la geometría de Finsler es una estructura más natural que la geometría riemanniana. Desgraciadamente, Chern ha muerto recientemente, en 2004, dejando sin embargo grandes contribuciones al tema.

Una pregunta común en la geometría es si una cierta variedad admite alguna métrica riemanniana tal que su curvatura es constante. En el contexto de las variedades de Finsler, podemos preguntar si toda variedad admite alguna estructura de Finsler cuya curvatura de Ricci es constante. Chern pensó que la respuesta era positiva, pues pedir que la curvatura de Ricci sea constante es una sola ecuación en el fibrado tangente, en contraste con el caso riemanniano, que nos ofrece una ecuación tensorial. En la geometría de Finsler, tener curvatura de Ricci constante es mucho menos restrictivo que su contrapartida riemanniana.

Sin embargo, el paper de Libing Huang que desarrollaremos nos da un resultado negativo, considerando una familia de grupos de Lie nilpotentes y no conmutativos cuya métrica de Finsler es invariante a izquierda. Restringida a esta familia, la pregunta de Chern tiene respuesta negativa.

El desarrollo de esta Tesis está organizado en cinco capítulos. En el primero de ellos, daremos algunas nociones básicas necesarias para estudiar las métricas de Finsler. Presentaremos las construcciones mas usuales de fibrados vectoriales, como por ejemplo el pullback y las conexiones lineales. Luego, pasaremos a definir las normas de Minkowski en un espacio vectorial. Daremos algunos resultados sobre las mismas, introduciremos la transformada de Legendre y dotaremos al espacio dual de una norma de Minkowski en la forma usual del análisis funcional. Finalmente, definiremos el tensor de Cartan, y probaremos que distingue a las normas euclidianas entre las normas de Minkowski.

En el segundo capítulo comenzaremos a estudiar las métricas de Finsler. Definiremos las mismas y daremos algunos ejemplos. Luego, presentaremos la conexión de Chern, una conexión lineal en el fibrado pullback π^*TM_0. Introduciremos algunas cantidades en relación con la conexión de Chern, como los coeficientes de la conexión y los coeficientes del spray, y veremos como se relacionan entre sí. Al final del capítulo pasaremos a estudiar el caso particular de un grupo de Lie con una métrica de Finsler invariante a izquierda, calculando las cantidades introducidas anteriormente en este nuevo contexto.

En el tercer capítulo nos desviaremos un poco para comprender mejor la geometría de Finsler. A partir de la conexión de Chern y las cantidades mencionadas anteriormente, definiremos la noción de geodésica y probaremos algunas de las propiedades de estas curvas. Pasaremos a definir el transporte paralelo de vectores y a dar algunos resultados sobre el mismo.

En el cuarto capítulo comenzaremos a definir distintas nociones de curvatura. Definiremos primero la distorsión de una norma de Minkowski y a partir de ella la S-curvatura. Pasaremos a discutir el tensor de Riemann y la curvatura de bandera. Terminaremos, como en el segundo capítulo, centrándonos en el caso particular de los grupos de Lie con métricas invariantes.

Finalmente, en el quinto capítulo daremos los resultados principales de la tesis y probaremos en detalle los resultados del paper de Libing Huang. Probaremos que en un grupo de Lie nilpotente y no conmutativo, dotado de una métrica de Finsler invariante a izquierda, existe una dirección de curvatura de Ricci positiva, y una dirección de curvatura de Ricci negativa, mostrando dónde encontrar estas dos direcciones.

Capítulo 1

Fibrados Vectoriales y Normas de Minkowski

En este capítulo estudiaremos algunas de las estructuras necesarias para el desarrollo de la tesis. La estructura básica que estudiaremos es la de una métrica de Finsler en una variedad diferenciable M. La misma consiste de una familia de normas de Minkowski que varía diferenciablemente en el fibrado tangente pinchado $TM \setminus 0$. Esta diferenciabilidad incompleta nos permitirá definir una estructura de Riemann en un fibrado distinto al tangente. Necesitamos, entonces, entender algunas construcciones de fibrados y obtener algunos resultados sobre normas de Minkowski.

Supondremos, salvo aclaración contraria, que las sumatorias finalizan en n la dimensión de la variedad M.

1.1. Fibrados Vectoriales

El objetivo de esta sección es dar un pequeño vistazo a las construcciones usuales de fibrados vectoriales. Para un estudio más profundo del tema, ver [12] o el Capítulo 3 de [10].

Todos estamos familiarizados con el concepto de fibrado vectorial: el ejemplo no trivial más común es el producto retorcido entre S^1 y la línea real. Este caso particular no es más que la banda de Moebius. Los fibrados vectoriales se volvieron objeto de estudio a finales de la década de 1930 en los trabajos de Hassler Whitney, por ejemplo en [15], quien llegó a la definición que conocemos nosotros generalizando la noción de fibrado esférico.

Sea M una variedad diferenciable. Un fibrado vectorial de dimensión n sobre M es una variedad E y una función diferenciable y suryectiva $\pi : E \to M$ tales que

1. Para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x)$ tiene estructura de espacio vectorial.

2. Para cada $x \in M$, existen un entorno U del elemento x y un difeomorfismo $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, tal que φ_U respeta las fibras, y para cada $y \in U$ su restricción $\varphi_U : \pi^{-1}(y) \to \{y\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Intuitivamente, un fibrado vectorial sobre una variedad M es una variedad que localmente es igual, topológica y diferenciablemente, al producto de un abierto de M con un espacio vectorial.

Si el entorno U puede elegirse como M, decimos que E es un fibrado trivial. Llamamos fibra de x en E al espacio vectorial $\pi^{-1}(x)$. E se denomina espacio total, M espacio base y π la proyección sobre el mismo. Los entornos U se denominan abiertos trivializantes y los difeomorfismos φ_U funciones trivializantes.

Podemos pensar un fibrado vectorial sobre M como una unión disjunta de espacios vectoriales indexados por la variedad. Así, $E = \bigcup_{x \in M} V_x$, donde $V_x = \pi^{-1}(x)$. Esta noción es sólo conjuntista y no topológica.

Proposición 1.1. *Sean M una variedad, $\{V_x\}_{x \in M}$ una familia de espacios vectoriales y $\pi : E \to M$ una función del conjunto $E = \bigcup_{x \in M} V_x$ a M, tal que $\pi(v) = x$ para cada $v \in V_x$. Sea $\{U_i\}$ un cubrimiento por abiertos de M, y supongamos que para cada i tenemos una función biyectiva $\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times \mathbb{R}^n$ que respeta las fibras de π, que para cada $x \in U_i \cap U_j$ la restricción $\varphi_i : \pi^{-1}(x) \to \{x\} \times \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo, y que la composición $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ es un difeomorfismo. Existe entonces una única estructura diferenciable sobre E que le da estructura de fibrado vectorial sobre M.*

No vamos a demostrar esta proposición. Si se requiere una demostración completa de la misma, se puede referir a la Proposición 1.2 del Capítulo 3 de [10], pues es una variante de la misma. A grandes rasgos, damos a E la topología final proveída por las funciones φ_i^{-1}, y proponemos como cartas los pares $(\pi^{-1}(U_i), \varphi_i)$.

Ejemplo 1.2 (Tangente)**.** El fibrado tangente TM de una variedad M es un ejemplo fundamental de fibrado vectorial. Tomamos $E = \bigcup_{x \in M} T_xM$, es decir, los pares (x, v) tales que v pertenece a T_xM, y $\pi : E \to M$, $\pi(x, v) = x$. Elegimos los abiertos y funciones trivializantes de la siguiente forma: dado x en M, existe (U, φ) carta alrededor de x. Podemos tomar $B = \{\frac{\partial}{\partial \varphi_i}|_x\}$ como base de T_xM. Definimos $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$, $\varphi_U(x, v) = (x, [v]_B)$. Es fácil comprobar que caemos en las hipótesis de la Proposición 1.1.

Dados $\pi_1 : E_1 \to M$ y $\pi_2 : E_2 \to M$ dos fibrados sobre M, un morfismo de fibrados sobre M entre E_1 y E_2 es una función diferenciable $f : E_1 \to E_2$ que respeta las fibras, y tal que restringida a cada una de ellas, $f_x : \pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(x)$ es un morfismo de espacios vectoriales. Un isomorfismo de fibrados sobre M es un difeomorfismo entre los espacios totales que respeta fibras y que restringido a cada una de ellas es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Una sección de un fibrado es una función diferenciable $s : M \to E$ tal que para todo x en M, $s(x)$ pertenece a V_x. Un marco local en $x \in M$ es un conjunto de secciones diferenciables $\{e_i\}_{i=1}^n$ definidas en un entorno U de x, tales que para todo y en U $\{e_i(y)\}_{i=1}^n$ es una base de la fibra en y. Luego, dada s una sección del fibrado, puede expresarse localmente como combinación lineal de un marco local, $s(x) = \sum s_i(x)e_i(x)$, con $s_i : U \to \mathbb{R}$. Es fácil comprobar que s es diferenciable si y sólo si las funciones s_i son diferenciables para cada marco local. Notamos $C^\infty(\pi)$ al espacio de secciones diferenciables del fibrado $\pi : E \to M$. Si $E = TM$, lo notamos $\chi(M)$.

Ejemplo 1.3. Sea M una variedad diferenciable, y $\pi : E \to M$ un fibrado trivial sobre M. Es decir, existe un difeomorfismo $\varphi : E \to M \times \mathbb{R}^n$ que restringido a cada fibra es un isomorfismo de espacios vectoriales. Si tomamos las secciones $e_i(x)$ del producto $M \times \mathbb{R}^n$ que a cada punto x de la variedad le asigna el elemento i de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, obtenemos un marco global de $M \times \mathbb{R}^n$. Si a estas secciones las trasladamos por el difeomorfismo al fibrado E, podemos obtener un marco global $\{\varphi^{-1}(e_i)\}$ de E. En particular, como todo fibrado es localmente trivial, dado un fibrado arbitrario F, para todo punto de M podemos obtener un marco local alrededor del mismo.

1.1.1. Pullback de Fibrados

Dado $\pi : E \to M$ un fibrado como en la sección anterior, y $f : N \to M$ una función diferenciable, podemos construir un fibrado sobre N a partir de f, llamado el pullback de E por f. El espacio total f^*E del fibrado es un subconjunto de $N \times E$, $f^*E = \{(n, e)$ tales que $f(n) = \pi(e)\}$, y la proyección sobre el espacio base N es π_1, la proyección sobre la primera coordenada. Las operaciones de espacio vectorial sobre cada fibra estan definidas sobre la segunda coordenada. Gracias a que para cada par en f^*E, $f(n) = \pi(e)$, las operaciones están bien definidas. Dado U entorno trivializante en M con función trivializante φ_U, tomamos $V = f^{-1}(U)$ como entorno trivializante en N. La función trivializante en V está definida por $\psi_V : \pi_1^{-1}(V) \to V \times \mathbb{R}^n$, $\psi_V(n, e) = (n, \pi_2(\varphi_U(e)))$, con π_2 la proyección de $U \times \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$.

Como dijimos antes, podemos pensar al pullback como unión de espacios vectoriales. Así, se tiene $f^*E = \bigcup_{n\in N} V_{f(n)}$. Es decir, sobre cada elemento $n \in N$ ponemos una copia del espacio vectorial que está sobre su imagen por f.

Ejemplo 1.4. Tomemos $\pi : E \to M$ un fibrado con $E = \bigcup_{x\in M} V_x$. Podemos considerar el pullback π^*E. Sobre cada elemento (x, v) en E ponemos una copia de V_x. Así, $\pi^*E = \bigcup_{(x,v)\in E} V_x$.

1.1.2. Construcciones Funtoriales de Fibrados

Un funtor covariante T en la categoría $Vect$ de espacios vectoriales, es una operación que asigna un espacio vectorial $T(V)$ a cada espacio vectorial V, y un morfismo $T(f) : T(V) \to T(W)$ a cada morfismo $f : V \to W$, que respeta las identidades de los distintos espacios y las composiciones entre los morfismos, es decir:

- $T(id_V) = id_{T(V)}$;
- $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$.

Un funtor se llama diferenciable si para cada par de espacios V y W, $T(f)$ depende diferenciablemente de f. Ésto tiene sentido pues el espacio de morfismos entre dos espacios vectoriales normados tiene una estructura diferenciable natural.

Dados $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial, $E = \bigcup_{x\in M} V_x$, y T un funtor diferenciable de la categoría de espacios vectoriales en sí misma, podemos construir un nuevo fibrado $T\pi : T(E) \to M$ sobre M. Como unión de espacios vectoriales, tenemos $T(E) = \bigcup_{x\in M} T(V_x)$, con $T\pi$ la proyección sobre cada x. Dado U un entorno trivializante de E, tenemos la función trivializante $\varphi_U : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n$ tal que restringido a cada fibra V_x es un isomorfismo de espacios vectoriales. Llamemos φ_x a esta restricción. Por funtorialidad, $T(\varphi_x) : T(V_x) \to T(\mathbb{R}^n)$ es también un isomorfismo. Definimos así $T(\varphi_U) : T\pi^{-1}(U) \to U \times T(\mathbb{R}^n)$, $T(\varphi)(x, v) = (x, T(\varphi_x)(v))$. La composición entre las funciones trivializantes resulta un difeomorfismo por la diferenciabilidad del funtor T. Luego, caemos en las hipótesis de la Proposición 1.1, por lo que $T\pi : T(E) \to M$ es un fibrado sobre M.

Notemos que en la construcción anterior, la funtorialidad en los morfismos sólo se usó en el caso de isomorfismos. Gracias a ésto, podemos dar una construcción análoga para funtores contravariantes, es decir, para funtores que invierten el dominio y codominio de los morfismos.

Más aún, podemos hacer una construcción análoga en funtores de varias variables. Haremos el desarrollo en dos variables, pero se puede extender fácilmente a más. Sea $T : Vect \times Vect \to Vect$ un funtor covariante en la primera coordenada y contravariante en la segunda. Es decir, T asigna a cada par de espacios vectoriales (V, W) un espacio vectorial $T(V, W)$ y a cada par de morfismos $f : V \to V'$, $g : W' \to W$ un morfismo $T(f, g) : T(V, W) \to T(V', W')$ de forma funtorial. Como antes, llamamos al funtor T diferenciable si $T(f, g)$ depende diferenciablemente de f y g.

Dados $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial, $E = \bigcup_{x\in M} V_x$, y T un funtor diferenciable en dos variables, podemos construir un nuevo fibrado $T\pi : T(E) \to M$ sobre M de forma muy similar que con funtores en una variable. Como unión de espacios vectoriales, $T(E) = \bigcup_{x\in M} T(V_x, V_x)$, con $T\pi$ la proyección sobre cada x. Sean U un entorno trivializante de E, y φ_U su función trivializante con φ_x la restricción a cada espacio V_x. Por funtorialidad, $T(\varphi_x, \varphi_x^{-1}) : T(V_x, V_x) \to T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es también un isomorfismo. Definimos así $T(\varphi_U) : T\pi^{-1}(U) \to U \times T(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $T(\varphi)(x, v) = (x, T(\varphi_x, \varphi_x^{-1})(v))$. La composición entre las funciones trivializantes resulta un difeomorfismo por la diferenciabilidad del funtor T. Luego, caemos en las hipótesis de la Proposición 1.1, por lo que $T\pi : T(E) \to M$ es un fibrado sobre M.

Ejemplo 1.5 (Cotangente)**.** Dada M una variedad, podemos considerar sobre cada x el espacio cotangente T_x^*M, espacio dual a T_xM. Podemos hacer la misma construcción que en el Ejemplo 1.2 para definir el fibrado cotangente a una variedad. Sin embargo, consideremos el funtor contravariante $* : Vect \to Vect$ que a cada espacio vectorial le asigna su espacio dual, y a cada morfismo $f : V \to W$ le asigna el morfismo $f^* : W^* \to V^*$, $f^*(L) = L \circ f$. Con este funtor podemos definir T^*M el fibrado cotangente como $*(TM)$. Las dos construcciones son equivalentes.

Ejemplo 1.6. Podemos considerar el funtor $\bigwedge^k : Vect \to Vect$, que a cada espacio vectorial V le asigna el espacio de funciones k-multilineales alternadas de V en $\mathbb{R}$, y a cada morfismo $f : V \to W$ le asigna $f^* : \bigwedge^k(W) \to \bigwedge^k(V)$,

$$f^*(L)(v_1, \cdots, v_k) = L(f(v_1), \cdots, f(v_k)).$$

Definimos así el fibrado $\bigwedge^k(M) = \bigwedge^k(TM)$.

Ejemplo 1.7. Más en general, consideramos el funtor $\otimes^{(s,r)}$, que a cada par de espacios vectoriales V, W asigna el espacio $\bigotimes^r V \otimes \bigotimes^s W^*$; a cada par de morfismos $f : V \to V'$, $g : W' \to W$ asigna $\otimes^{(s,r)}(f, g) : \otimes^{(s,r)}(V, W) \to \otimes^{(s,r)}(V', W')$,

$$\otimes^{(s,r)}(f, g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_s) = f(v_1) \otimes \cdots \otimes f(v_r) \otimes g^*(w_1) \otimes \cdots \otimes g^*(w_s).$$

Es un funtor en dos variables, covariante en la primera y contravariante en la segunda. Definimos $D^s_r(M) = \otimes^{(s,r)}(TM)$.

Ejemplo 1.8. Sea $Hom(-, -)$ el funtor a dos variables que a cada par de espacios vectoriales V, W les asigna el espacio vectorial $Hom(V, W)$ de morfismos de V en W, y a cada par de morfismos $f : V' \to V$, $g : W \to W'$ les asigna el morfismo $Hom(f, g) : Hom(V, W) \to Hom(V', W')$, $Hom(f, g)(L) = g \circ L \circ f$. Es un funtor contravariante en la primera coordenada y covariante en la segunda. Podemos definir con este funtor el fibrado $End(E) = Hom(-, -)(E)$.

Sabemos que dados V y W espacios vectoriales, el espacio $Hom(V, W)$ se puede identificar con el producto tensorial $V^* \otimes W$ a través del isomorfismo que a cada par $f \otimes w$ le adjudica el morfismo $L : V \to W$, $L(v) = f(v)w$, extendido linealmente. Este isomorfismo de espacios vectoriales nos induce un isomorfismo de fibrados entre $\otimes^{(1,1)}(E)$ y $End(E)$.

Destacaremos algunas secciones diferenciables. Un campo es una sección de TM. Una k-forma es una sección del fibrado $\bigwedge^k(M)$. Un (r, s)-tensor es una sección del fibrado $D^s_r(M)$. Gracias al Ejemplo 1.8, podemos identificar un $(1, 1)$-tensor con una sección del fibrado $End(TM)$, que a cada elemento x de M le asigna una transformación lineal de T_xM en sí mismo.

Una estructura Riemanniana en M es un $(2, 0)$-tensor tal que para cada x en M define un producto interno en T_xM. Podemos generalizar la noción de estructura Riemanniana a un fibrado cualquiera. Una estructura Riemanniana de un fibrado $\pi : E \to M$ es una sección del fibrado $\otimes^{(2,0)}(E)$ tal que para cada x en M define un producto interno en V_x.

1.1.3. Conexión lineal

Pasaremos a definir una conexión lineal en un fibrado E. Para una lectura más profunda, ver el Apéndice 1 de [1].

Sea $\pi : E \to M$ un fibrado, $E = \bigcup_{x \in M} V_x$. Una conexión lineal ∇ en E es una familia de transformaciones lineales $\nabla : T_xM \times C^\infty(\pi) \to V_x$, con la condición adicional que $\nabla_v(fX) = df(v)X + f\nabla_v X$ para cada $f \in C^\infty(M)$.

Podemos también pensar a ∇ como un operador $\nabla : \chi(M) \times C^\infty(\pi) \to C^\infty(\pi)$, $\nabla_V X(x) = \nabla_{V(x)} X$, que es lineal en la primera coordenada, y cumple las condiciones anteriores en la segunda.

Supongamos que $\alpha : \mathbb{R} \to M$ es una curva diferenciable en M. Podemos considerar $\dot{\alpha} : \mathbb{R} \to TM$ el campo de velocidades de α que a cada t le adjudica el par $(\alpha(t), \alpha_{*,t}(\frac{\partial}{\partial t}))$, bien definido y diferenciable a su vez. Para obtener más información sobre la curva, querríamos obtener su campo de aceleraciones $\ddot{\alpha}$, pero ésta sería una función que toma valores en TTM, y no un campo tangente a M. Cuanto más se quiera diferenciar el campo de velocidades, mayor será el grado de complejidad de la función obtenida.

Lo mismo sucede con campos diferenciables. Si tomamos $X : M \to TM$, su diferencial no es un campo en M, sino $X_* : TM \to TTM$, pero uno desearía que el resultado fuera nuevamente un campo tangente a la variedad.

Una conexión soluciona este problema, dando una noción de derivación que nos devuelve nuevamente una sección.

Supongamos que M es una variedad de dimensión 2 y que tenemos una estructura riemanniana definida en el fibrado tangente TM. Tomemos p, q en M y σ una curva de menor longitud entre las que unen p y q. Si tomamos un campo X sobre la curva σ, es decir, un levantado de σ al fibrado TM, podemos decir que es paralelo si el producto interno entre X y el campo de velocidades de σ se mantiene constante.

Aunque en superficies es fácil definir este concepto, al aumentar las dimensiones los campos a lo largo de las curvas pueden girar alrededor de las misma manteniendo su ángulo constante. Para no permitir que esto suceda, debemos dar alguna noción de torsión, pero aunque el enunciado parece simple, traducir esta declaración a lenguaje matemático es muy complicado. Sin embargo, una conexión nos ayuda en ésto.

Tener una definición para paralelismo de campos nos permite dar una idea de transporte paralelo. Como su nombre lo indica, el transporte paralelo de un vector a lo largo de una curva toma el vector y lo traslada a lo largo de la misma sin variar el ángulo con el campo de velocidades y, en algunos casos, sin torcerlo.

Demos entonces definiciones a partir de una conexión dada.

Sean M una variedad diferenciable y $\pi : E \to M$ un fibrado sobre la misma. Supongamos que ∇ es una conexión lineal definida en E y $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ una curva diferenciable en M con $\sigma(0) = x$. Decimos que X una sección a lo largo de σ es paralela si $\nabla_{\dot{\sigma}} X = 0$. En particular, si $E = TM$, decimos que σ es una geodésica si su campo de velocidades es paralelo a lo largo de la misma.

Es fácil ver que dada una curva σ con $\sigma(0) = x$ y $V_0 \in E_x$ existe V una sección paralela a lo largo de σ con $V(0) = V_0$, ya que implica simplemente resolver una ecuación diferencial ordinaria. Gracias a ello, podemos definir el transporte paralelo de V_0 a lo largo de σ. Si $\sigma(\delta) = y$, definimos el transporte de V_0 a E_y como el vector $P(V_0) = V(\delta)$.

Las nociones de conexión y transporte paralelo son equivalentes. Una conexión es básicamente una forma de derivar secciones. Dada V una sección a lo largo de σ

nos gustaría poder definir la derivada de la misma como

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{V(t+\varepsilon) - V(t)}{\varepsilon}.$$

Sin embargo, los elementos $V(t+\varepsilon)$ y $V(t)$ se encuentran en espacios distintos, por los que no se puede a priori operar entre ellos. Pero si tuvieramos una forma de transportarlos a través de los espacios del fibrado, el problema se soluciona.

Profundicemos un poco en el caso de una métrica riemanniana en el fibrado tangente, donde el paralelismo es más evidente. Dada una conexión ∇ en el fibrado tangente, decimos que es libre de torsión si

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para cada par de campos X e Y. Decimos que es compatible con la métrica si para todo trio de campos X, Y y Z,

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$$

Sabemos que dada una métrica riemanniana en una variedad M existe una única conexión libre de torsión y compatible con la métrica, que llamamos conexión de Levi-Civita. Esta conexión cumple las propiedades de paralelismo que enumeramos antes: un campo paralelo a lo largo de una geodésica conserva su ángulo con el campo de velocidades y no gira alrededor de la misma. Se puede probar que si la variedad es en particular una subvariedad de $\mathbb{R}^n$ con la métrica inducida, aplicar la conexión de Levi-Civita consiste simplemente en derivar el campo como función a $\mathbb{R}^n$ y proyectarlo sobre el tangente a la variedad.

Para más detalles sobre el caso riemanniano y la conexión de Levi-Civita, ver [6].

Computemos más en detalle una conexión. Tomemos un marco local $\{e_i\}$. Dado $X = \sum_i x_i e_i$, tenemos que:

$$\nabla_v X = \sum_i dx_i e_i + x_i \nabla_v e_i = \sum_i \left(dx_i + \sum_j x_j \omega_j^i(v) \right) e_i, \tag{1.1}$$

donde $\nabla_v e_i = \sum_j \omega_j^i(v) e_j$, con ω_j^i 1-formas locales. El conjunto $\{\omega_j^i\}$ se denominan las formas de conexión de ∇ con respecto a $\{e_i\}$.

Observación 1.9. De la ecuación (1.1) podemos ver que dar una conexión equivale a dar una familia de 1-formas locales en nuestra variedad que se peguen bien en los dominios comunes.

Tomemos $\Omega_j^i = d\omega_j^i - \sum_k \omega_j^k \wedge \omega_k^i$. Cada Ω_j^i es una 2-forma local. Son llamadas las formas de curvatura de ∇ con respecto a $\{e_i\}$.

1.2. Normas de Minkowski

El objetivo de esta sección es introducir las normas de Minkowski en espacios vectoriales, y obtener algunos resultados básicos sobre ellas que se utilizarán en el estudio de las métricas de Finsler. Puede consultarse sobre el tema el primer Capítulo de [2] o de [5].

Dado V un espacio vectorial de dimensión finita, $F : V \to \mathbb{R}$ se dice norma de Minkowski si:

1. $F(x) \geq 0$ para todo y en V, y $F(y) = 0$ si y solo si $y = 0$.
2. $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ para todo $\lambda \geq 0$.
3. F es una función C^∞ en $V \setminus \{0\}$, y para cada y distinto de 0 se cumple que la función bilineal y simétrica
$$g_y(v,w) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}(F^2(y+tv+sw))_{s,t=0} \tag{1.2}$$
es un producto interno en V. Esta condición es conocida como convexidad fuerte.

Podemos escribir (1.2) de forma distinta. Tomemos $\{e_i\}$ una base de V. Dado $y = \sum_i y_i e_i$, consideremos la matriz Hessiana
$$(g_{ij}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[\frac{1}{2}F^2(y)\right]\right).$$
Si $u = \sum_i u_i e_i$ y $v = \sum_i v_i e_i$, tenemos que $g_y(u,v) = \sum_{i,j} g_{ij}(y) u_i v_j$. Luego, la tercera condición es equivalente a pedir que la matriz Hessiana sea definida positiva.

El par (V, F) es llamado espacio de Minkowski y la función g_y se denomina la forma fundamental en y. Si $F(y) = F(-y)$ para todo y en V se dice que F es reversible.

Es fácil ver que la forma fundamental define una estructura riemanniana en $V \setminus \{0\}$. Es más, $S_r = \{y \in V \text{ tales que } F(y) = r\}$ es una subvariedad riemanniana orientable con normal exterior $n = \sum_i \frac{y_i}{F}\frac{\partial}{\partial y_i}$.

Proposición 1.10. *Dada F una norma de Minkowski, el producto interno definido en* (1.2) *es invariante por reescalas positivas. En particular, $g_{ij}(\lambda y) = g_{ij}(y)$ para todo y distinto de cero y para todo $\lambda > 0$.*

Demostración. Aplicando la regla de la cadena:
$$\begin{aligned} g_{\lambda y}(v,w) &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}F^2(\lambda y + tv + sw)\right)_{s,t=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\lambda^2 \frac{1}{2}F^2(y + \frac{t}{\lambda}v + \frac{s}{\lambda}w)\right)_{s,t=0} \\ &= \lambda^2 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{2}F^2(y+tv+sw)\right)_{s,t=0}\frac{1}{\lambda^2} = g_y(v,w). \end{aligned}$$
□

Como ya dijimos, una norma de Minkowski debe ser positivamente homogénea, es decir, $F(\lambda y) = \lambda F(y)$ para todo λ positivo. Vamos a probar algunas propiedades del caso más general de una función positivamente homogénea y luego deducir los resultados particulares para nuestras normas.

Teorema 1.11 (Teorema de Euler)**.** *Sea $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Son equivalentes:*

1. *$H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ para todo $\lambda > 0$, y en $\mathbb{R}^n$.*
2. *$\sum_i y_i \frac{\partial H}{\partial y_i}(y) = rH(y)$ para todo y en $\mathbb{R}^n$.*

Demostración. Supongamos que, dado y fijo, vale que $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$ para todo $\lambda > 0$. Derivando esta igualdad en función de λ:

$$\sum_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} H(\lambda y) = r\lambda^{r-1} H(y).$$

Luego, para $\lambda = 1$, obtenemos la igualdad que buscamos.

Recíprocamente, si vale que $\sum_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} H(y) = rH(y)$, consideremos la función $f(\lambda) = H(\lambda y)$. Derivando, obtenemos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} H(\lambda y) = \frac{1}{\lambda} \sum_i (\lambda y)_i \frac{\partial}{\partial y_i} H(\lambda y) = \frac{r}{\lambda} H(\lambda y) = \frac{r}{\lambda} f.$$

Luego, f cumple la ecuación diferencial $\frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{r}{\lambda} f = 0$. Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, y teniendo en cuenta que $f = C(y)\lambda^r$ es solución, podemos ver que $H(\lambda y) = C(y)\lambda^r$. Reemplazando $\lambda = 1$, llegamos a que $C(y) = H(y)$. Finalmente, $H(\lambda y) = \lambda^r H(y)$. $\square$

En nuestro caso particular, si F es una norma de Minkowski:

$$F(y) = \sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y), \tag{1.3}$$

o, de otra forma:

$$\sum_i \frac{y_i}{F(y)} \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = 1.$$

Derivando esta última en funcion de cada y_j, obtenemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\sum_i \frac{y_i}{F} \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) = \frac{1}{F} \sum_i y_i \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \left(\frac{\delta_{ij} F - y_i \frac{\partial F}{\partial y_j}}{F^2} \right)$$

Resolviendo la segunda sumatoria:

$$\sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \left(\frac{\delta_{ij} F - y_i \frac{\partial F}{\partial y_j}}{F^2} \right) = \frac{1}{F^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j} F - \frac{\partial F}{\partial y_j} \sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial y_i} \right) = 0.$$

Luego,

$$\sum_i y_i \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} = 0$$

para cada j.

Probemos otra propiedad importante de las funciones positivamente homogéneas.

Proposición 1.12. *Sea $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y positivamente homogénea de orden r en la coordenada i. Entonces, $\frac{\partial H}{\partial y_i}$ es una función positivamente homogénea de orden $r-1$ en la coordenada i.*

Demostración. Sea λ positivo. Calculemos la derivada de $H(\lambda y)$ en la i-ésima dirección de dos formas distintas.

Como H es homogénea de orden r,

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(H(\lambda y)) = \frac{\partial}{\partial y_i}(\lambda^r H(y)) = \lambda^r \frac{\partial H}{\partial y_i}(y).$$

Por otro lado, por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(H(\lambda y)) = \lambda \frac{\partial H}{\partial y_i}(\lambda y).$$

Juntando estas dos ecuaciones, obtenemos el resultado que queríamos:

$$\frac{\partial H}{\partial y_i}(\lambda y) = \lambda^{r-1} \frac{\partial H}{\partial y_i}(y).$$

□

En particular, la proposición anterior puede usarse para dar otra prueba de que la forma fundamental es invariante por reescalas positivas, ya que involucra las derivadas segundas de F^2, una función homogénea de orden 2.

Probemos ahora algunas propiedades mas específicas de las normas de Minkowski.

Teorema 1.13. *Sea $F : V \to [0, +\infty)$ una norma de Minkowski. Entonces:*

1. *Convexidad: $F(x_1 + x_2) \leq F(x_1) + F(x_2)$ y vale la igualdad si y solo si x_1 y x_2 son colineales con coeficiente positivo.*

2. *Desigualdad Fundamental: $\sum_i w_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) \leq F(w)$ para todo y distinto de cero, vale la igualdad si y solo si w e y son colineales con coeficiente positivo.*

Demostración. Observemos que $(g_{ij}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}\left[\frac{1}{2}F^2\right]\right) = F\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}$. Multiplicando por las coordenadas i, j y sumando:

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i y_j &= \sum_{i,j}\left(F\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\right) y_i y_j \\
&= \sum_i F\left(\sum_j y_j \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\right) y_i + \left(\sum_i y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}\right)\left(\sum_j y_j \frac{\partial F}{\partial y_j}\right) \\
&= 0 + F^2(y) = F^2(y).
\end{aligned}$$

Luego,

$$F(y) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i y_j}. \tag{1.4}$$

Notemos que $F(y) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i y_j} = \sqrt{g_y(y,y)} \neq 0$ si $y \neq 0$, al ser g_y un producto interno, por lo cual esta hipótesis no es necesaria para normas de Minkowski.

Aplicando Cauchy-Schwartz a g_y:

$$\left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)\eta_i \xi_j\right)^2 \leq \left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)\eta_i \eta_j\right)\left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)\xi_i \xi_j\right).$$

Si tomamos $\eta = y$:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i \xi_j\right)^2 &\leq \left(\sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i y_j\right)\left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)\xi_i \xi_j\right) \\
&= \left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)\xi_i \xi_j\right) F^2(y),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

y la igualdad vale si y solo si ξ e y son colineales.

Tenemos ademas que $\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{1}{F}\left(g_{ij} - \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\right)$. Luego:

$$\sum_{i,j}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\xi_i \xi_j = \frac{1}{F^3}\sum_{i,j}\left(F^2 g_{ij}\xi_i \xi_j - F^2 \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\xi_i \xi_j\right).$$

Pero:

$$\begin{aligned}
F^2 \sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\xi_i \xi_j &= \left(\sum_{k,l} g_{kl}(y) y_k y_l\right)\left(\sum_{i,j}\frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\xi_i \xi_j\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l} g_{kl}(y) y_k y_l \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\xi_i \xi_j.
\end{aligned}$$

Reordenando y usando (1.3) y (1.4), queda igual a $\left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)y_i\xi_j\right)^2$

Volviendo, y usando (1.5):

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}\xi_i\xi_j &= \frac{1}{F^3}\left(F^2\sum_{i,j} g_{ij}\xi_i\xi_j - \sum_{i,j} F^2 \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j}\xi_i\xi_j\right) \\
&= \frac{1}{F^3}\left(F^2\sum_{i,j} g_{ij}\xi_i\xi_j - \left(\sum_{i,j} g_{ij}(y)y_i\xi_j\right)^2\right) \\
&\geq \frac{1}{F^3}\left(F^2\sum_{i,j} g_{ij}\xi_i\xi_j - F^2\sum_{i,j} g_{ij}\xi_i\xi_j\right) = 0. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Como la desigualdad proviene de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, sabemos que la igualdad se cumple si y solo si ξ e y son colineales.

Probemos lo siguiente: $2F(y) \leq F(y+\xi) + F(y-\xi)$ y la igualdad vale si y solo si $\xi = \lambda y$ para $|\lambda| \leq 1$. Veamos primero los casos linealmente dependientes:

- Si $\xi = \lambda y$ para $|\lambda| \leq 1$, $1 \pm \lambda \geq 0$, y vale:

$$\begin{aligned}
F(y+\xi) + F(y-\xi) &= F((1+\lambda)y) + F((1-\lambda)y) \\
&= (1+\lambda)F(y) + (1-\lambda)F(y) = F(y).
\end{aligned}$$

- Si $\xi = \lambda y$ para $|\lambda| > 1$, $F(y+\xi) + F(y-\xi) = (2+\alpha)F(y) + F(-\alpha y)$ con $\alpha = |\lambda| - 1 > 0$, por lo que se cumple la desigualdad estricta.

- Si y ó ξ son nulos es obvio.

Supongamos ahora que son linealmente independientes. Entonces, tenemos que, para algún $0 < \epsilon < 1$:

$$\begin{aligned}
F(y \pm \xi) &= F(y) \pm \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)\xi_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(y+\epsilon\xi)\xi_i\xi_j \\
&> F(y) \pm \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_i}(y+\epsilon\xi)\xi_i.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se debe a (1.6), pues ξ y $y+\epsilon\xi$ son linealmente independientes. Sumando, $F(y+\xi) + F(y-\xi) > 2F(y)$.

Para terminar con la demostración de convexidad, tomemos en la desigualdad anterior $y = \frac{x_1+x_2}{2}$, $\xi = \frac{x_1-x_2}{2}$, y la desigualdad se convierte en la que queríamos.

Finalmente, probemos la desigualdad fundamental. Primero, veamos los casos linealmente dependientes.

- Si $w = \alpha y$ con α positivo,

$$\sum_i w_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \sum_i \alpha y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \alpha F(y) = F(\alpha y) = F(w).$$

- Si $w = \alpha y$ con α negativo,

$$\sum_i w_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \sum_i \alpha y_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \alpha F(y) < 0 \leq F(w).$$

Supongamos ahora que w e y son linealmente independientes. Como vimos antes, $F(y-\xi) > F(y) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)\xi_i$. Si tomamos $\xi = y - w$, y considerando (1.3):

$$\begin{aligned} F(w) &> F(y) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)(y_i - w_i) \\ &= F(y) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)y_i + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)w_i = \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)w_i. \end{aligned}$$

□

Podemos ahora interpretar la desigualdad fundamental. En primer lugar, con (1.3), tenemos que:

$$F(y) + \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y)(w_i - y_i) \leq F(w).$$

Esto indica que el plano tangente al gráfico de F está por debajo del mismo y lo toca en la recta $(\lambda w, F(\lambda w))$.

Multipliquemos ahora la desigualdad fundamental por $F(y)$. Teniendo en cuenta que:

$$\sum_j y_j g_{ij}(y) = \sum_j F \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} y_j + \sum_j \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j} y_j = \frac{\partial F}{\partial y_i} F,$$

tenemos que:

$$\sum_{i,j} g_{ij}(y) w_i y_j \leq F(y)F(w).$$

Esta puede considerarse como una generalización del teorema de Cauchy-Schwartz para normas de Minkowski.

Notemos que si realizamos una cuenta del teorema anterior con mas cuidado obtenemos una nueva igualdad para estas normas.

$$\sum_j g_{ij} y_j = \sum_j \left(F \frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} y_j + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j} y_j \right) = F \frac{\partial F}{\partial y_i}.$$

Veamos ahora algunos ejemplos de normas de Minkowski.

Ejemplo 1.14. Sean V un espacio vectorial, $\langle , \rangle$ producto interno en V. Dado v en V definimos $F(v) = \|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. F es claramente una norma de Minkowski y se la denomina norma euclidiana.

Ejemplo 1.15. Dados V espacio vectorial, α una norma euclidiana en V y $\beta \in V^*$ un funcional lineal, definimos $F(y) = \alpha(y) + \beta(y)$. Veamos bajo qué condiciones F es una norma de Minkowski.

La homogeneidad es bastante obvia. Para probar la convexidad fuerte, calculemos la forma fundamental. Dada $\{e_i\}$ una base de V e $y = \sum_i y_i e_i$, podemos escribir $\alpha(y) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij} y_i y_j}$ y $\beta(y) = \sum_i b_i y_i$. Tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}(y) = \frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\sqrt{\sum_{k,l} a_{kl} y_k y_l}} + b_i = \frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)} + b_i$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= \frac{a_{ij}\sqrt{\sum_{k,l} a_{kl} y_k y_l} - (\sum_k a_{ik} y_k)(\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\sqrt{\sum_{k,l} a_{kl} y_k y_l}})}{\sum_{k,l} a_{kl} y_k y_l} \\ &= \frac{a_{ij} - (\frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)})(\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\alpha(y)})}{\alpha(y)}\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}g_{ij}(y) &= F\frac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial F}{\partial y_i}\frac{\partial F}{\partial y_j} \\ &= \frac{F}{\alpha}\left(a_{ij} - \frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)}\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\alpha(y)}\right) + \left(\frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)} + b_i\right)\left(\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\alpha(y)} + b_j\right) \\ &= \left(\frac{F}{\alpha}a_{ij} + \left(\frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)} + b_i\right)\left(\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\alpha(y)} + b_j\right)\right) - \frac{F}{\alpha}\frac{\sum_k a_{ik} y_k}{\alpha(y)}\frac{\sum_k a_{jk} y_k}{\alpha(y)}\end{aligned}$$

Para seguir, necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 1.16. *Sean $g = (g_{ij})$ y $h = (h_{ij})$ dos matrices simétricas y $c = (c_i)$ un vector tales que h es inversible, con $h^{-1} = (h^{ij})$, y que $g_{ij} = h_{ij} + \delta c_i c_j$. Entonces, $\det(g_{ij}) = (1 + \delta(\sum_{i,j} h^{ij} c_i c_j)) \det(h_{ij})$.*

Aplicando esta proposición dos veces, llegamos a que $\det g_{ij} = \left(\frac{F}{\alpha}\right)^{n+1} \det a_{ij}$. Es más, esta fórmula puede aplicarse también a los menores. El cálculo es tedioso y no lo haremos aquí.

Para una demostración de la Propocisión 1.16 y esta última cuenta en detalle, podemos referirnos al Capítulo 11, Sección 2 de [2].

Como (a_{ij}) es definida positiva, concluímos que (g_{ij}) lo es si y sólo si F es una función positiva. Queremos ver, entonces, para qué β la función F es positiva.

F es positiva si y solo si $\alpha(y) > -\beta(y)$. Basta probar que esto sucede para todo y tal que $\alpha(y) = 1$. La condición se simplifica a pedir que $\beta(-y) < 1$ para estos elementos, o, lo que es equivalente, $|\beta(y)| < 1$. Tomando supremo en los y de α-norma 1, tenemos finalmente que F es positiva si y sólo si

$$\|\beta\|_\alpha = \sup_{\|y\|_\alpha = 1} |\beta(y)| < 1.$$

Estas normas de Minkowski se llaman *normas de Randers.*

Probemos algunas propiedades más de las normas de Minkowski. En primer lugar, veamos que las bolas son convexas.

Proposición 1.17. *Dada F una norma de Minkowski, definimos la bola de radio r centrada en x como $B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n$ tales que $F(y-x) < r\}$. Entonces $\overline{B_r(x)}$ es un conjunto convexo.*

Demostración. Basta probar que la clausura de $B_r = B_r(0)$ es convexa. Dados x_1, x_2 elementos de $\overline{B_r}$, debemos probar que el segmento $tx_1 + (1-t)x_2$ está contenido en $\overline{B_r}$, es decir, que $F(tx_1 + (1-t)x_2) \leq r$ para todo t entre cero y uno.

Si el 0 pertenece al segmento, $x_2 = \lambda x_1$ y el resultado es obvio. Si no, sea $z = t_0 x_1 + (1-t_0)x_2$, con $0 < t_0 < 1$, tal que $F(z)$ sea máximo en el segmento. Definimos $\phi(t) = F(tx_1 + (1-t)x_2)$. ϕ es diferenciable y $\phi'(t_0) = 0$. Computando la derivada, tenemos que $\sum_i (x_{1i} - x_{2i}) \frac{\partial F}{\partial y_i}(z) = 0$.

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \sum_i z_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(z) = \sum_i (t_0 x_{1i} + (1-t_0)x_{2i}) \frac{\partial F}{\partial y_i}(z) \\
&= t_0 \left(\sum_i (x_{1i} - x_{2i}) \frac{\partial F}{\partial y_i}(z) \right) + \sum_i x_{2i} \frac{\partial F}{\partial y_i}(z) \leq F(x_2) \leq r.
\end{aligned}
$$

Como el máximo se realizaba en z, el segmento está contenido en $\overline{B_r}$. □

Observación 1.18. Cabe destacar que gracias a la homogeneidad positiva, toda norma de Minkowski está caracterizada por los elementos de la bola de radio 1. Si tomamos el conjunto S_F de los elementos de norma 1, podemos recuperar la norma, ya que $F(y) = \frac{1}{t}$, donde t es el número real tal que ty pertenece a S_F.

Más aún, si B es un abierto de V convexo centrado en el origen, con borde $S = \partial B$ suave, podemos definir la función no negativa $F : V \to \mathbb{R}$, $F(y) = \frac{1}{t}$ con t el número real tal que ty pertenece a S. Esta función es positiva para todo elemento no nulo, positivamente homogénea (y completamente homogénea si B es simétrico) y convexa. Cumple también que es una función diferenciable fuera del orígen. Sin embargo, en general falla en ser fuertemente convexa.

Por ejemplo, si tomamos $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 < 1\}$, que cumple los requisitos anteriores, es fácil ver que la función F definida es $F(x,y) = \sqrt[4]{x^4 + y^4}$. Los coeficientes de la forma fundamental son:

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= \frac{x^6 + 3x^2y^4}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}}; \\
g_{12} = g_{21} &= \frac{-2x^3y^3}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}}; \\
g_{22} &= \frac{y^6 + 3y^2x^4}{(x^4+y^4)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}
$$

Luego, es obvio que la forma fundamental no es definida positiva en los ejes, pues no es inversible.

1.2.1. Transformada de Legendre

Vamos a probar en esta subsección un resultado para normas de Minkowski análogo al teorema de representación de Riesz en productos internos. Para profundizar en el tema, se puede leer la sección 8 del capítulo 14 de [2].

Sean V un espacio vectorial y V^* el espacio dual a V de funcionales lineales, con $\{e_i\}$ y $\{w_i\}$ una base de V y su correspondiente base dual de V^*. Podemos dotar a V^* de una norma de Minkowski a partir de F. Si p es un funcional lineal, y S_1 es el subconjunto de V de elementos de norma 1, definimos

$$F^*(p) = \sup_{v \in S_1} p(v) = \sup_{v \in V} p\left(\frac{v}{F(v)}\right).$$

El conjunto S_1 es compacto, por lo que el supremo se alcanza. Como p es un funcional lineal, sus conjuntos de nivel son hiperplanos paralelos en V. Y como S_1 es el borde de un conjunto estrictamente convexo, el supremo se alcanza en un único lugar.

La positividad y homogeneidad positiva de F^* son bastante obvias. Sin embargo, para probar la convexidad fuerte, necesitamos primero de la transformada de Legendre. Definimos la misma como $\mathcal{L} : V \to V^*$,

$$\mathcal{L}(y)(v) = g_y(y, v).$$

Si tomamos coordenadas, dados $y = \sum_i y_i e_i$, $v = \sum_i v_i e_i$,

$$\mathcal{L}(y)(v) = \sum_{i,j} g_{ij}(y) y_i v_j.$$

Y tomando coordenadas en el espacio dual,

$$(\mathcal{L}(y))_j = \sum_i g_{ij}(y) y_i = \frac{\partial F}{\partial y_j}(y) F(y).$$

Veremos que la transformada de Legendre es un difeomorfismo entre $V \setminus \{0\}$ y $V^* \setminus \{0\}$. Como los coeficientes de la forma fundamental dependen del punto y, no es en general una transformación lineal. Sin embargo, la transformada sí preserva la norma. Por la desigualdad fundamental,

$$\mathcal{L}(y)(v) = \sum_j \frac{\partial F}{\partial y_j} v_j F(y) \le F(v) F(y).$$

Luego,

$$F^*(\mathcal{L}(y)) = \sup_{v \in S_1} \mathcal{L}(y)(v) \le \sup_{v \in S_1} F(v) F(y) = F(y).$$

Además,

$$\mathcal{L}(y)\left(\frac{y}{F(y)}\right) = \frac{1}{F(y)}\sum_{i,j} g_{ij}(y)y_iy_j = \frac{F^2(y)}{F(y)} = F(y),$$

En conclusión, $F^*(\mathcal{L}(y)) = F(y)$. Podemos pasar a probar la siguiente proposición.

Proposición 1.19. *Sean V un espacio vectorial y F una norma de Minkowski en V. Entonces, $\mathcal{L} : V \to V^*$ la transformada de Legendre es un difeomorfismo si se restringe y correstringe a $V \setminus \{0\}$ y $V^* \setminus \{0\}$ respectivamente.*

Demostración. Comencemos por la inyectividad de la transformada. Sean y_1, y_2 tales que $\mathcal{L}(y_1) = \mathcal{L}(y_2) = p$. Luego, si $v_1 = \frac{y_1}{F(y_1)}$, $v_2 = \frac{y_2}{F(y_2)}$, tenemos que

$$p(v_1) = F(y_1) = F^*(\mathcal{L}(y_1)) = F^*(p)$$

y

$$p(v_2) = F(y_2) = F^*(\mathcal{L}(y_2)) = F^*(p).$$

Como v_1 y v_2 pertenecen a S_1 la indicatriz de V, y como p alcanza su norma en un único vector, tenemos que $v_1 = v_2$. Por lo tanto, $y_2 = \lambda y_1$ para algun λ positivo. Sustituyendo en la fórmula de $\mathcal{L}$, y teniendo en cuenta que los coeficientes de la forma fundamental son invariantes por reescalas positivas,

$$\sum_i g_{ij}(y_1)y_{1_i} = \sum_i g_{ij}(\lambda y_1)\lambda y_{1_i} = \lambda \sum_i g_{ij}(y_1)y_{1_i}.$$

Como $\mathcal{L}(y_1) \neq 0$ (pues preserva la norma), tenemos que $\lambda = 1$ e $y_1 = y_2$.

Probemos ahora que la transformada es sobreyectiva. Sea p un elemento no nulo de V^*. Ya vimos que existe un único v en S_1 tal que $F^*(p) = p(v)$. Afirmo que $\mathcal{L}(y) = p$ para $y = F^*(p)v$.

Para cada t real y w en V, tenemos que

$$p\left(\frac{v+tw}{F(v+tw)}\right) \leq p(v) = F^*(p).$$

Definimos la función $f(t) = p(y+tw) - F(y+tw)F^*(p)$. Dividiendo por $F(y+tw)$,

$$\frac{f(t)}{F(y+tw)} = p\left(\frac{y+tw}{F(y+tw)}\right) - F^*(p) \leq F^*(p) - F^*(p) = 0.$$

Como $F(y+tw)$ es positivo para todo t y w, la función f es no positiva. Es más,

$$f(0) = p(y) - F(y)F^*(p) = p(y) - F(y)p(v) = p(y) - p(y) = 0.$$

Por lo tanto, f tiene un máximo absoluto en 0, y $f'(0) = 0$. Derivando f y evaluando en 0, obtenemos que

$$\begin{aligned} f'(0) &= p(w) - \sum_i \frac{\partial F}{\partial y_i}(y) w_i F^*(p) = p(w) - \frac{F^*(p)}{F(y)} \sum_{i,j} g_{ij}(y) y_j w_i \\ &= p(w) - \frac{F^*(p)}{F^*(p)F(v)} \mathcal{L}(y)(w) = p(w) - \mathcal{L}(y)(w). \end{aligned}$$

Luego, $p(w) = \mathcal{L}(y)(w)$. Como podemos hacer esto para w arbitrario, concluimos que $p = \mathcal{L}(y)$.

Finalmente, debemos probar que la transformada es un difeomorfismo. Es trivial que es diferenciable pues depende solamente de las coordenadas de y y de la función C^∞ F y sus derivadas. Mas aún, como $(\mathcal{L}(y))_j = \frac{\partial F}{\partial y_j} F = \frac{1}{2}\frac{\partial F^2}{\partial y_j}$, tenemos que el diferencial de la transformada de Legendre tiene como matriz asociada a la matriz de la forma fundamental, que es definida positiva, y en consecuencia inversible.

Por lo tanto, $\mathcal{L}$ es biyectiva y un difeomorfismo local, por lo que es un difeomorfismo. □

Corolario 1.20. *Sean V un espacio vectorial y F una norma de Minkowski en V. Entonces, la norma F^* definida en V^* es una norma de Minkowski.*

Demostración. Como dijimos antes, la positividad y homogeneidad positiva son obvias. Faltaría chequear que F^* es C^∞ en $V^* \setminus \{0\}$ y que la matriz con coeficientes $\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial y_i y_j}$ define un producto interno en V^*.

Como la transformada de Legendre preserva esta norma, podemos describir a F^* a partir de F y $\mathcal{L}$, $F^*(p) = F(\mathcal{L}^{-1}(p))$. Y como ambas funciones son diferenciables lejos del origen, tenemos que F^* es una función diferenciable.

Podemos definir entonces $h_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^{*2}}{\partial p_i p_j}$. Debemos ver que la matriz formada por estos coeficientes es definida positiva. Probemos primero que la inversa de la transformada de Legendre esta dada por

$$(\mathcal{L}^{-1}(p))_i = \sum_j h_{ij} p_j.$$

Notemos primero que como F^* es positivamente homogénea y la transformada preserva norma, por el teorema de Euler tenemos que

$$\sum_j h_{ij} p_j = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{1}{2} F^{*2}(p)\right] = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{1}{2} F^2 \circ \mathcal{L}^{-1}(p)\right].$$

Vamos a aplicar ahora la regla de la cadena. Por el teorema de la función inversa, tenemos que este diferencial de la inversa a la transformada de Legendre es la inversa del diferencial de la misma. Pero ya vimos que esta tenía como diferencial a la matriz de la forma fundamental, por lo que el diferencial de la inversa esta dado por

$(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$. Luego,

$$\begin{aligned}\sum_j h_{ij}p_j &= \sum_j \frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2}F^2\right](y)\frac{\partial y_j}{\partial p_i} = \sum_{k,j} \frac{\partial^2}{\partial y_k y_j}\left[\frac{1}{2}F^2\right](y)y_k\frac{\partial y_j}{\partial p_i}\\ &= \sum_{k,j} g_{kj}g^{ji}y_k = y_i.\end{aligned}$$

La segunda igualdad proviene de aplicar el teorema de Euler a $\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\frac{1}{2}F^2\right]$, que es positivamente homogenea de orden 1. Luego, tenemos la inversa de la transformada de Legendre.

Obtuvimos la siguiente igualdad:

$$y_i = \sum_j h_{ij}p_j = \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{1}{2}F^{*2}(p)\right].$$

Derivando en función de y_j y aplicando la regla de la cadena,

$$\delta_{ij} = \sum_k \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_k}\left[\frac{1}{2}F^{*2}(p)\right]\frac{\partial p_k}{\partial y_j} = \sum_k h_{ik}g_{kj}.$$

Por lo tanto, (h_{ij}) es la matriz inversa a (g_{ij}). Como (g_{ij}) es definida positiva, $(h_{ij}) = (g^{ij})$ también lo es. □

Finalmente, probaremos el siguiente corolario que necesitaremos en los siguientes capítulos.

Corolario 1.21. *Sean V un espacio vectorial y F una norma de Minkowski en V. Entonces, dado T un subespacio propio de V, existe y que es g_y-ortogonal a T.*

Demostración. Como T es un subespacio propio de V, existe p funcional lineal no nulo tal que se anula en todo T. Tomamos $y = \mathcal{L}^{-1}(p)$. Entonces, para cada t en T,

$$g_y(y, t) = \mathcal{L}(y)(t) = p(t) = 0.$$

□

1.2.2. Tensor de Cartan

Existe una forma de caracterizar las normas euclidianas entre las normas de Minkowski. Para ello, introduciremos el tensor de Cartan.

Dada F una norma de Minkowski en un espacio vectorial V, y un vector y no nulo, definimos la torsión de Cartan en y como

$$C_y(u, v, w) = \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial t \partial s \partial r}\left(F^2(y + tu + sv + rw)\right).$$

Así como la forma fundamental define una estructura riemanniana en $V \setminus \{0\}$, el tensor de Cartan es una sección del fibrado $D^3_0(V \setminus \{0\})$, simétrico para cada y.

Dada $\{e_i\}$ una base de V, $y = \sum y_i e_i$, podemos definir los coeficientes de Cartan.

$$C_{ijk}(y) = C_y(e_i, e_j, e_k) = \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k}(F^2) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}(g_{ij}).$$

Es obvio que los coeficientes son simétricos en sus subíndices.

Definimos el tensor medio de Cartan como $I_y(u) = \sum_{i,j} g^{ij} C_y(u, e_i, e_j)$, donde (g^{ij}) es la matriz inversa a (g_{ij}). Es una sección del fibrado cotangente.

Es fácil ver que una norma de Minkowski es euclidiana si y solo si el tensor de Cartan es la sección nula. Es obvio que los coeficientes de la forma fundamental de las normas euclidianas son constantes, por lo que el tensor de Cartan será nulo. Inversamente, si el tensor es nulo, los coeficientes son constantes, y ya probamos que $F(y) = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} y_i y_j}$.

Es fácil también probar que el tensor de Cartan en y se anula si uno de los argumentos es y. Alcanza con verlo para uno solo por simetría.

$$\begin{aligned}
C_y(y, v, w) &= \frac{1}{4}\frac{\partial^3}{\partial t \partial s \partial r}\left(F^2(y + ty + sv + rw)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s \partial r}\left(F^2((1+t)y + sv + rw)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_{(1+t)y}(v, w)\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(g_y(v, w)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Veamos que los coeficientes de Cartan C_{ijk} contraídos con y_i se anulan. Notemos que éste hecho se puede deducir de que $C_y(y, u, v) = 0$ para cualquier par de vectores u, v, pero haremos la cuenta de todos modos.

$$\begin{aligned}
g_{kj} &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_k \partial y_j}\left(F^2\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(F\frac{\partial F}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial y_k}\left(\sum_i g_{ij} y_i\right) \\
&= \sum_i \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} y_i + g_{kj} = 2\sum_i C_{ijk} y_i + g_{kj}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\sum_i C_{ijk} y_i = 0. \tag{1.7}$$

Como los coeficientes de Cartan son simétricos en sus índices, esta igualdad vale contrayendo en cualquiera de ellos. Por ejemplo,

$$\sum_j C_{ijk} y_j = \sum_j C_{jik} y_j = 0.$$

Para terminar, veremos que el tensor medio de Cartan también caracteriza a las métricas riemannianas entre las métricas de Finsler.

Proposición 1.22. *Dada (M, F) una métrica de Finsler, F es euclidiana si y solo si el tensor medio de Cartan es nulo.*

Demostración. Es obvio que si F es euclidiana el tensor medio de Cartan es nulo, pues ya probamos que el tensor de Cartan lo es.

Recíprocamente, supongamos que el tensor medio de Cartan I es idénticamente nulo. Dado $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$, definimos el operador $\Delta = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}$. Como (g_{ij}) define un producto interno, es una matriz definida positiva, y (g^{ij}) también lo es, por lo que el operador Δ es elíptico. Apliquemos este operador a cada coeficiente de la forma fundamental.

$$\begin{aligned}
\Delta(g_{kl}) &= \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial y_i \partial y_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial^4 F^2}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k \partial y_l} = 2 \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial C_{ijk}}{\partial y_l} \\
&= 2 \sum_{i,j} \frac{\partial (g^{ij} C_{ijk})}{\partial y_l} - 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_l} C_{ijk} \\
&= 2 \frac{\partial}{\partial y_l} \left(\sum_{i,j} g^{ij} C_{ijk} \right) - 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_l} C_{ijk} \\
&= 2 \frac{\partial I_k}{\partial y_l} - 2 \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_l} C_{ijk} = -2 \sum_{i,j} \frac{\partial g^{ij}}{\partial y_l} C_{ijk}.
\end{aligned}$$

Para proseguir, necesitamos el siguiente lema de álgebra lineal para calcular las derivadas de la inversa de una matriz.

Lema 1.23. *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz inversible. Entonces los coeficientes de A^{-1} son diferenciables en función de los coeficientes de A, y vale*

$$\frac{\partial (A^{-1})_{kl}}{\partial a_{ij}} = -(A^{-1})_{ki} (A^{-1})_{jl}.$$

Demostración. Que los coeficientes de la inversa son diferenciables en función de los coeficientes de A es obvio, pues podemos expresarlos como la división de un cofactor por el determinante. Para encontrar las derivadas, supongamos primero que $A : (-\varepsilon, \varepsilon) \to GL(n, \mathbb{R})$ es una curva diferenciable en las matrices inversibles. Luego, como $AA^{-1} = Id$, derivando esta equivalencia,

$$\dot{A} A^{-1} + A (A^{-1})^{\cdot} = 0.$$

Luego, al despejar,

$$(A^{-1})^{\cdot} = -A^{-1} \dot{A} A^{-1}.$$

Podemos aplicar esto para calcular $\frac{\partial (A^{-1})_{kl}}{\partial a_{ij}}$, pensando a A como matriz de coeficientes constantes, salvo en el lugar ij, donde es lineal. □

Aplicando el lema y la regla de la cadena,

$$\Delta(g_{kl}) = -2\sum_{i,j}\frac{\partial g^{ij}}{\partial y_l}C_{ijk} = 4\sum_{i,j,p,q} g^{ip}g^{jq}C_{ijk}\frac{\partial g_{pq}}{\partial y_l} = 8\sum_{i,j,p,q} g^{ip}g^{jq}C_{ijk}C_{pql}.$$

Luego, la matriz (Δg_{kl}) es semidefinida positiva y simétrica. En particular, $\Delta g_{kk} \geq 0$ para cada k. Luego, es una supersolución para el operador elíptico Δ, por lo que cumple el principio fuerte del máximo.

Sea $B(r) = \{y \in V : F(y) < r\}$. Como la función g_{kk} es homogénea de orden 0, tenemos que su máximo se realiza en el interior de $\overline{B(r)} \setminus B(1/r)$. Luego, por el principio fuerte del máximo, debe ser constante. Si hacemos tender r a infinito, tenemos que la función g_{kk} es constante en $V \setminus \{0\}$ para cada k. Luego, $\Delta g_{kk} = 0$ para cada k. Por lo tanto, la traza de la matriz (Δg_{kl}) es nula, pero como es una matriz simétrica y semidefinida positiva, debe ser la matriz nula, concluyendo que $\Delta g_{kl} = 0$ para todo k, l. Es decir, las funciones g_{kl} son soluciones para el operador elíptico Δ, por lo que también cumplen el principio fuerte del máximo.

Haciendo el mismo argumento que para g_{kk}, podemos ver que g_{kl} es constante en $V \setminus \{0\}$. Por lo tanto, (g_{ij}) es constante, y $F = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}y_iy_j}$ es euclidiana. $\square$

Capítulo 2

Métricas de Finsler y Conexión de Chern

En este capítulo comenzaremos a estudiar las métricas de Finsler. En particular, dotaremos al fibrado pullback de una conexión conocida como la conexión de Chern, la cual tendrá una función análoga a la conexión de Levi Civita en las métricas Riemannianas. Finalmente, estudiaremos el caso particular de los grupos de Lie.

Supondremos de ahora en más, salvo aclaración, que las variedades con las que tratamos son conexas y de dimensión finita.

2.1. Métricas de Finsler

Tomemos M una variedad diferenciable. Como dijimos antes, una métrica de Finsler es una norma de Minkowski que se mueve de forma diferenciable en el fibrado tangente pinchado, $TM_0 = TM \setminus \{0\}$, donde 0 nota a la sección nula.

Definición 2.1 (Métrica de Finsler). *Dada M una variedad, $F : TM \to \mathbb{R}$ se dice métrica de Finsler si:*

- *F es una función diferenciable en TM_0.*
- *Restringida a cada espacio tangente, F es una norma de Minkowski.*

El par (M, F) se denomina variedad de Finsler. Una métrica de Finsler se dice reversible si la norma de Minkowski en cada tangente es reversible. Se dice Riemanniana o Euclidiana si cada norma de Minkowski proviene de un producto interno, es decir, $F(x, y) = \sqrt{\langle y, y\rangle_x}$. Es obvio que una métrica de Finsler riemanniana es reversible.

Ejemplo 2.2 (Métrica Riemanniana). Una métrica Riemanniana es una familia de productos internos $\langle , \rangle_x : T_xM \times T_xM \to \mathbb{R}$ que varía en forma diferenciable. Hemos definido ya en el capítulo anterior lo que significa que una métrica riemanniana sea diferenciable, pero podemos dar una definición equivalente. En cada espacio tangente, $\langle y, z\rangle_x = \sum_{i,j} g_{ij}(x) y_i z_j$. Decimos que la familia varía en forma diferenciable si las funciones $g_{ij} : M \to \mathbb{R}$ son diferenciables.

Definimos la métrica de Finsler $F(x,y) = \sqrt{\langle y, y\rangle_x}$. Calculemos los coeficientes $g_{ij} : TM_0 \to \mathbb{R}$ de la forma fundamental de F.

$$g_{ij}(x,y) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(F^2(x,y)) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}(\sum_{i,j} g_{ij}(x) y_i y_j) = g_{ij}(x).$$

Es decir, los coeficientes de la forma fundamental son simplemente los coeficientes del producto interno. En particular, pueden extenderse a todo el fibrado tangente TM, lo cual en general no es posible.

Demos una familia de métricas Riemannianas mas concreta. Dado $\mu \in \mathbb{R}$, definamos una métrica Riemanniana en $B^n(r_\mu) \subset \mathbb{R}^n$, donde $r_\mu = \sqrt{-\mu}$ si $\mu < 0$, y $r_\mu = +\infty$ si $\mu \geq 0$.

$$\alpha_\mu(x,y) = \frac{\sqrt{|y|^2 + \mu(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle)}}{1 + \mu|x|^2}.$$

Podemos describir la métrica $\alpha_\mu(x,y)$ resaltando que proviene de un producto interno como $\alpha_\mu(x,y) = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}(x) y_i y_j}$ con $a_{ij}(x) = \frac{1}{1+\mu|x|^2}\left(\delta_{ij} - \frac{\mu x_i x_j}{\mu|x|^2}\right)$.

Si $\mu = 0$, α_0 es la métrica usual en $\mathbb{R}^n$.

Si $\mu = 1$, α_1 está definida en todo $\mathbb{R}^n$ y se llama el modelo proyectivo esférico. Se puede probar que esta métrica proviene de tomar pullback a la métrica usual en la esfera S^n (como subvariedad Riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$) por la proyección estereográfica.

Si $\mu = -1$, α_{-1} es una métrica definida en la bola de radio 1, llamada métrica de Klein.

Para más información sobre estas métricas en el contexto de las métricas de Finsler, puede consultarse [5].

El espectro de métricas riemannianas es muy amplio y rico en ejemplos particulares, pero está entre las más simples de las métricas de Finsler. Entre otras cosas, porque la forma fundamental (1.2) es constante al movernos dentro de un mismo espacio tangente.

Ejemplo 2.3 (Métrica de Randers)**.** Dada M una variedad, sean $\alpha = \alpha(x)$ la norma inducida por una métrica riemanniana en M, y $\beta = \beta(x)$ una 1-forma en M. Definimos la función $F(x,y) = \alpha(x)(y) + \beta(x)(y)$. Ya vimos en el Ejemplo 1.15 que este tipo de normas son de Minkowski si y solo si $\|\beta(x)\|_\alpha < 1$. Todas las métricas que se construyen de esta forma se llaman *métricas de Randers*.

Demos un ejemplo más concreto de una métrica de Randers. Tomemos como variedad $M = B^n(1)$ la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$. Definimos aquí la siguiente métrica de Finsler:

$$F(x,y) = \frac{\sqrt{|y|^2 - (|x|^2 - \langle x, y\rangle^2)} - \langle x, y\rangle}{1 - |x|^2}.$$

La misma se llama métrica de Funk. Para obtener más información sobre esta métrica, se puede ver [5].

2.1.1. Longitud de curvas y distancia

Una métrica de Finsler F nos permite medir longitud de curvas C^∞ a trozos, y en consecuencia definir una distancia en nuestra variedad. Una función $c : I \to M$ continua se dice curva C^∞ a trozos si existe una partición $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ de I tal que para cada i, c restringida a (t_i, t_{i+1}) es C^∞. Notamos $\dot{c} = \frac{dc}{dt}$

Dada una curva $c : I = [a, b] \to M$ C^∞ a trozos, podemos definir $c_{\_} : I \to M$, $c_{\_}(t) = c(a + b - t)$. La curva $c_{\_}$ describe el mismo camino en M pero recorrido en la dirección contraria.

Tomemos dos puntos p y q en M, y una curva C^∞ a trozos $c : I = [a, b] \to M$ con extremos p y q. Definimos la longitud de c como

$$L_F(c) = \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t))dt.$$

Supongamos que $\alpha : J = [d, e] \to M$ es una reparametrización orientada de c, es decir, existe $\sigma : I \to J$ creciente, $\sigma(d) = a$, $\sigma(e) = b$, C^∞ tal que $c = \alpha \circ \sigma$. Observemos que como σ es creciente, σ' es positiva.

$$\begin{aligned} L_F(c) &= \int_a^b F(c(t), \dot{c}(t))dt = \int_a^b F(\alpha \circ \sigma(t), \dot{\alpha} \circ \sigma(t)\sigma'(t))dt \\ &= \int_a^b F(\alpha \circ \sigma(t), \dot{\alpha} \circ \sigma(t))\sigma'(t)dt = \int_d^e F(\alpha(s), \dot{\alpha}(s))ds \\ &= L_F(\alpha). \end{aligned}$$

Entonces, la longitud es invariante por reparametrizaciones orientadas, y la longitud de un camino está bien definida.

Definimos así la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de las curvas que los unen,

$$d_F(p, q) = \inf_C L_F(C). \tag{2.1}$$

Es bastante directo que la distancia es positiva y cumple la desigualdad triangular. Un poco mas complicado es ver que $d_F(p, q) = 0$ si y sólo si $p = q$. Para ello, probemos que para cada punto de M existe una carta (U, φ) y un número real λ tal que

$$\lambda^{-1}|y| \leq F(x, y) \leq \lambda|y|\,,$$

donde si $y = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$, $|y| = \|(y_i)\| = \sqrt{\sum_i y_i^2}$. Si esto vale, es fácil ver que existe $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$C^{-1}|\varphi(p) - \varphi(q)| \leq d(p, q) \leq C|\varphi(p) - \varphi(q)|\,,$$

por lo que $d(p,q) = 0$ si y solo si $p = q$.

Para probar esto, dado $x \in M$ tomemos (V, φ) una carta alrededor de x con $\varphi(x) = 0$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(r)} \subset \varphi(V)$. Tomemos como la carta deseada a $U = \varphi^{-1}(B(r))$ y φ restringida a dicho abierto. Notemos que la clausura de U es compacta en M.

Consideremos el subconjunto K de TM de los pares (p, y) tales que p pertenece a U y $F(p, y) = 1$. Es obvio que este conjunto es un compacto. Tomemos la función $g(x, y) = \frac{F(x,y)}{|y|}$, que es continua lejos de la sección nula, e invariante por reescalas positivas. Luego, realiza su máximo A y mínimo a en K. Luego, por la invarianza por reescalas positivas, estos valores son el máximo y mínimo de TU. Si elegimos λ tal que $\frac{1}{\lambda} < a \leq A < \lambda$, tenemos que

$$\lambda^{-1}|y| \leq F(x, y) \leq \lambda|y| \,.$$

Observación 2.4. Las métricas de Finsler no son generalmente reversibles. La longitud de una curva recorrida hacia un lado no es la misma que recorrida de forma contraria. Luego, la distancia definida no será en general simétrica. Es más, lo será si y sólo si la métrica de Finsler es reversible.

Podemos también definir una forma de volumen canónica. Dado $x \in M$, tomemos $\{e_i\}$ una base de T_xM, y $\{\theta_i\}$ su base dual. Definimos

$$\sigma_F(x) = \frac{Vol(B_1(0))}{Vol\{(y_i) \in \mathbb{R}^n : F(x, \sum y_i e_i) < 1\}},$$

donde Vol nota al volumen dado por la norma euclidiana canónica definida con respecto a la base $\{e_i\}$. Notemos que esta función depende de la base elegida.

Definimos la forma de volumen como

$$dV_F = \sigma_F \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n.$$

A pesar de que σ_F depende de la base, la forma de volúmen no, pues la proporción entre el cambio de volumen en σ_F y el factor de cambio en $\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_n$ a la base dual correspondiente es el mismo. Llamamos a dV_F la forma de volumen de Finsler.

Con esta forma, podemos definir el volumen de un subconjunto abierto $\mathcal{U} \subset M$ como

$$Vol(\mathcal{U}) = \int_{\mathcal{U}} dV_F.$$

Aplicación de las métricas de Finsler: El problema de navegación.

Aunque vivimos en un mundo euclidiano, una métrica riemanniana tiene una pequeña desventaja: supone que moverse de una cierta forma es igual a moverse de modo contrario. Pero sabemos que este no es el caso, no es lo mismo una piedra cayendo por una ladera que subiendo la misma. En este contexto entran en juego las métricas de Finsler.

Supongamos que tenemos un bote navegando en un mar sin viento, y pensemos al mar como $\mathbb{R}^2$ con la métrica Riemanniana usual α_0 del Ejemplo 2.2. El bote está parado en el origen y puede moverse en cualquier dirección sin restricciones. Podemos modelar a $\mathbb{R}^2$ por $T_0\mathbb{R}^2$ tomando coordenadas en la base canónica $\{\frac{\partial}{\partial e_i}\Big|_0\}$. Bajo esta carta, dado $v \in T_0\mathbb{R}^2$, el número $\left\|\frac{\partial}{\partial v}\right\|$ simboliza el tiempo que tardaría el bote en llegar a v moviéndose en línea recta y a velocidad constante de norma 1.

Generalicemos esto por un momento. Tomemos M una variedad con h una métrica riemanniana, y un punto p en M arbitrario. No podemos como antes modelar toda la variedad por T_pM pero si un entorno del punto, tomando la función exponencial en el entorno donde es un difeomorfismo. Es más, la exponencial transforma los rayos salientes del origen en geodésicas de la variedad, por lo que la interpretación de $\|v\|$ como el tiempo que se tarda en moverse por la geodésica desde p hasta $exp_p(v)$ a velocidad constante sigue valiendo. Como en este entorno las geodésicas son minimizantes, es en realidad el tiempo mínimo necesario para ir de p a $exp_p(v)$.

Volvamos al ejemplo simple del bote. Supongamos que comienza a soplar un viento leve modelizado por un campo vectorial $V(x)$ con $\|V(x)\| < 1$. Simplifiquemos primero el ejemplo si $V(x) = V$ constante. Sin este viento, si el capitán del bote navegara con velocidad constante u, llegaría en un tiempo 1 hasta el punto u. Ahora, con la presencia del viento, si el bote navega a velocidad constante u, en tiempo 1 llegará al punto $u + V$. Luego, la estructura riemanniana ya no nos indica el tiempo que toma llegar a un cierto punto, pues el viento modifica la forma en que los elementos se mueven.

Sin el viento, los elementos de norma 1, notados por S, son los puntos a los que se tarda en llegar en tiempo 1. El viento modifica esto, y los nuevos elementos a donde podemos llegar en una unidad de tiempo son los del conjunto $S + V$. Queremos una función F que sea idénticamente 1 en exactamente este conjunto.

Dijimos en el capítulo anterior, en la Observación 1.18, que podemos obtener dicha función F, pero que en general no será una norma de Minkowski. Sin embargo, para este caso particular, al ser el corrimiento de una bola euclidiana, obtenemos que se cumple la condición necesaria de convexidad fuerte.

Para más información sobre este problema, se puede consultar la Sección 4 del Capítulo 1 de [5].

2.2. Conexión de Chern

Tomemos el fibrado tangente $\pi : TM \to M$ y consideremos la restricción de la proyección a $\pi : TM_0 \to M$. Con ella, obtenemos el pullback del fibrado por esta función, π^*TM_0, que sobre cada par (x, y) con y no nulo, pone una copia de T_xM. Podemos hacer lo mismo con el fibrado $\Pi : T^*M \to M$, obteniendo el pullback Π^*TM_0, donde sobre cada par (x, y) de TM_0 hay una copia de T^*_xM. Estas construcciones pueden considerarse como duales en el siguiente sentido: dados $(x, y, v) \in \pi^*TM_0$, $(x, y, \theta) \in \Pi^*TM_0$, definimos $(x, y, \theta)(x, y, v) = \theta(v)$.

Tomemos una carta en TM, (x_i, y_i), donde (x_i) es una carta en M e (y_i) son los coeficientes en la base $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ de T_xM. Luego, $\{\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}\}$ y $\{dx_i, dy_i\}$ son marcos locales naturales para $T(TM_0)$ y $T^*(TM_0)$. Llamamos $VTM = \langle \frac{\partial}{\partial y_i} \rangle$ el fibrado tangente vertical, y $HT^*M = \langle dx_i \rangle$ el fibrado cotangente horizontal. Son subfibrados bien definidos de $T(TM_0)$ y $T^*(TM_0)$ respectivamente. El fibrado $\Pi^*(TM_0)$ es isomorfo a HT^*M, identificando naturalmente $(x, y, \theta) \in \Pi^*(TM_0)$ con $(x, y, \theta, 0) \in HT^*M$. Usaremos esta identificación indistintamente al operar con elementos de estos espacios.

Podemos distinguir algunas secciones del fibrados π^*TM_0. Notaremos como $\frac{\partial}{\partial x_i}$ a la sección que a cada par (x, y) le asigna el elemento $\left(x, y, \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x\right)$. El conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ es un marco local de π^*TM_0. Este fibrado tiene también una sección canónica Υ, definida como $\Upsilon(x, y) = (x, y, y)$. En coordenadas, $\Upsilon(x, y) = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Como dijimos al comienzo del capítulo, queremos presentar una conexión en el fibrado TM_0 que llamaremos conexión de Chern. Estará caracterizada por ser libre de torsión y casi métricamente compatible. La misma fue presentada por Shiing Chern en su paper de 1943 [4].

Como comentamos en el capítulo anterior, en la Obsevación 1.9 que podemos definir una conexión a través de formas locales $\{\omega_j^i\}$ que se comporten bien en los dominios comunes. La misma estará definida como en la ecuación (1.1). Definiremos primero, entonces, estas familias de formas locales, y con ellas la conexión de Chern.

Teorema 2.5 (Chern). *Sea (M, F) una variedad de Finsler de dimensión n. Dados $\{e_i\}$ un marco local de π^*TM_0 y $\{\omega_i\}$ su marco dual de Π^*TM_0, existen únicas 1-formas $\{\omega_j^i\}$ de TM_0 tales que:*

$$d\omega_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \wedge \omega_j^i. \text{ (Libre de torsión)} \tag{2.2}$$

$$dg_{ij} = \sum_{l=1}^{n} \left(g_{lj}\omega_i^l + gil\omega_j^l + 2C_{ijl}\omega_{n+l} \right). \text{ (Casi compatible con la métrica)} \tag{2.3}$$

Donde $\omega_{n+l} = dy_l + \sum_h y_h \omega_h^l$, C_{ijk} son los coeficientes de Cartan y g_{ij} los coeficientes de la forma fundamental.

Observación 2.6. Notar que estamos realizando un wedge entre formas de fibrados distintos, pero las condiciones están bien definidas por la identificación de $\Pi^*(TM_0)$ y HT^*M, es decir, podemos realizar wedge entre 1-formas de TM_0 y secciones del fibrado $\Pi^*(TM_0)$.

Demostración. La estructura de esta demostración es bastante usual. Veremos que las condiciones impuestas permiten expresar a las formas en función de la métrica F y sus derivadas, por lo que están definidas y de forma unívoca.

Tomemos el sistema usual de coordenadas de π^*TM_0 definido al principio de la sección, $e_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, y su marco dual $\omega_i = dx_i$. Podemos expresar a las formas ω_j^i en coordenadas de la base $\{dx_i, dy_i\}$,

$$\omega_j^i = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{jk}^i dx_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_{jk}^i dy_k.$$

Reemplazando en (2.2),

$$0 = d(dx_i) = \sum_j dx_j \wedge \omega_j^i = \sum_{j,k} \Gamma_{jk}^i dx_j \wedge dx_k + \sum_{j,k} \beta_{jk}^i dx_j \wedge dy_k.$$

Luego, $\beta_{jk}^i = 0$ y, como el wedge es anticonmutativo, $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$ para todo i, j y k. Tenemos entonces que $\omega_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i dx_k$. Reemplazando en (2.3), dg_{ij} es igual a:

$$\sum_l \left(g_{lj} \left(\sum_k \Gamma_{ik}^l dx_k \right) + g_{il} \left(\sum_k \Gamma_{ik}^l dx_k \right) + 2C_{ijl} \left(dy_l + \sum_h y_h \left(\sum_k \Gamma_{hk}^l dx_k \right) \right) \right).$$

A su vez, $dg_{ij} = \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} dx_k + \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} dy_k$. Si llamamos $N_j^i = \sum_h y_h \Gamma_{jh}^i$, reemplazando en la ecuación anterior y reordenando las sumatorias, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} dx_k + \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} dy_k =& \sum_k \left(\sum_l g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l + 2C_{ijl} N_k^l \right) dx_k \\ &+ \sum_k 2C_{ijk} dy_k. \end{aligned}$$

Igualando coordenada a coordenada,

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} = 2C_{ijk}.$$
$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_l g_{lj} \Gamma_{ik}^l + g_{il} \Gamma_{jk}^l + 2C_{ijl} N_k^l. \tag{2.4}$$

Mientras que la primera ecuación ya era conocida, la ecuación (2.4) nos da nueva información. Si permutamos los índices, sumamos y restamos, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} =& \sum_l g_{lk} \Gamma_{ji}^l + g_{jl} \Gamma_{ki}^l + 2C_{jkl} N_i^l \\ &+ g_{li} \Gamma_{kj}^l + g_{kl} \Gamma_{ij}^l + 2C_{kil} N_j^l \\ &- g_{lj} \Gamma_{ik}^l - g_{il} \Gamma_{jk}^l - 2C_{ijl} N_k^l. \end{aligned}$$

Como $g_{ij} = g_{ji}$ y $\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l$, la ecuación queda:

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} = \sum_l 2g_{lk} \Gamma_{ij}^l + 2C_{jkl} N_i^l + 2C_{kil} N_j^l - 2C_{ijl} N_k^l.$$

Despejando Γ^l_{ij}, nos queda el sistema

$$\sum_l g_{lk}\Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) - \sum_h C_{jkh}N^h_i + C_{kih}N^h_j - C_{ijl}N^h_k.$$

Como (g_{ij}) define un producto interno, es una matriz inversible. Multiplicando por su inversa (g^{ij}),

$$\Gamma^l_{ij} = \sum_k \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) - g^{lk}\left(\sum_h C_{jkh}N^h_i + C_{kih}N^h_j - C_{ijl}N^h_k\right). \tag{2.5}$$

Luego, si podemos expresar N^i_j en función de F, terminamos la demostración. Multiplicando (2.5) por y_i y sumando en i:

$$\sum_i \Gamma^l_{ij}y_i = \sum_{i,k} \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)y_i - \sum_{k,h} g^{lk}C_{jkh}\left(\sum_i N^h_i y_i\right).$$

Los otros términos desaparecen pues $\sum_i C_{kih}y_i = 0$, como vimos en (1.7). Definiendo $G^h = \frac{1}{2}\sum_i N^h_i y_i$ y reemplazando en la ecuación anterior, tenemos que

$$N^l_j = \sum_{i,k} \frac{1}{2}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)y_i - \sum_{k,h} 2g^{lk}C_{jkh}G^h. \tag{2.6}$$

Como antes, si expresamos G^h en función de F, terminamos. Multiplicando (2.6) por $\frac{1}{2}y_j$ y sumando en j:

$$\frac{1}{2}\sum_j N^l_j y_j = \sum_{i,j,k} \frac{1}{4}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)y_i y_j - \sum_{k,h} 2g^{lk}G^h\left(\sum_j C_{jkh}y_j\right).$$

Como $\sum_j C_{jkh}y_j = 0$,

$$G^l = \sum_{i,j,k} \frac{1}{4}g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right)y_i y_j. \tag{2.7}$$

Finalmente, completamos la demostración. Podemos obtener fórmulas explícitas de N^i_j reemplazando G^h en (2.6), y de Γ^i_{jk} reemplazando N^i_j en (2.5). Obtenemos $\omega^i_j = \sum_k \Gamma^i_{jk}dx_k$.

Para terminar, habría que probar que las formas se comportan bien a través de los cambios de coordenada, pero la cuenta queda para el lector y no la haremos aquí. $\square$

Las funciones locales Γ^i_{jk} se denominan símbolos de Christoffel. Las funciones locales N^i_j se llaman coeficientes de la conexión de F, mientras que G^h se llaman coeficientes del spray de F.

Con estas formas que hemos conseguido, definimos la conexión de Chern ∇ en el fibrado π^*TM. Dados $X = \sum_i X_i(x,y)e_i$ sección de π^*TM y $v \in T_{(x,y)}TM_0$,

$$\nabla_v X = \sum_i \left(dX_i(v) + \sum_j X_j \omega^i_j(v) \right) e_i.$$

La conexión de Chern se caracteriza por ser libre de torsión y casi métricamente compatible como definimos en (2.2) y (2.3). La torsión nula está codificada en el hecho que las formas de la conexión tienen coordenada dy_j nula. La conexión ∇ es también libre de torsión en el siguiente sentido, similar a la conexión de Levi-Civita en métricas riemannianas.

Proposición 2.7. *Sea (M, F) una variedad de Finsler y ∇ la conexión de Chern asociada a F. Consideramos $\rho : T(TM_0) \to \pi^*TM$ morfismo de fibrados definido por $\rho(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\rho(\frac{\partial}{\partial y_i}) = 0$, es decir, actúa como la identidad en T_xM y como la función nula en T_yT_xM. Dados $X, Y \in C^\infty(T(TM_0))$,*

$$\nabla_X(\rho Y) - \nabla_Y(\rho X) = \rho([X,Y]).$$

Demostración. Supongamos que $X = \sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $Y = \sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\nabla_X(\rho Y) - \nabla_Y(\rho X) &= \nabla_X \left(\sum_i Y_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \nabla_Y \left(\sum_i X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= \sum_i \left(dY_i(X) + \sum_j Y_j \omega^i_j(X) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_i \left(dX_i(Y) + \sum_j X_j \omega^i_j(Y) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \\
&= \sum_i \left(dY_i(X) - dX_i(Y) \right) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \left(Y_j \omega^i_j(X) - X_j \omega^i_j(Y) \right) \\
&= \rho([X,Y]) + \sum_{i,j} \left(Y_j \omega^i_j(X) - X_j \omega^i_j(Y) \right).
\end{aligned}$$

Veamos que el término de la derecha es nulo para terminar. Teniendo en cuenta que $dx_k(X) = X_k$ y $dx_k(Y) = Y_k$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j} \left(Y_j \omega^i_j(X) - X_j \omega^i_j(Y) \right) &= \sum_{i,j} \left(Y_j \left(\sum_k \Gamma^i_{jk} dx_k \right)(X) - X_j \left(\sum_k \Gamma^i_{jk} dx_k \right)(Y) \right) \\
&= \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk} Y_j X_k - \Gamma^i_{jk} X_j Y_k = \sum_{i,j,k} \Gamma^i_{jk}(Y_j X_k - X_j Y_k).
\end{aligned}$$

Como el sumando de índice jk es el opuesto al de índice kj (pues los símbolos de Christoffel son simétricos en sus subíndices), la suma es nula. $\square$

La casi compatibilidad de la métrica también se puede expresar en términos de la conexión.

Proposición 2.8. *Sea (M,F) una variedad de Finsler y ∇ la conexión de Chern asociada a F. Consideramos $\rho : T(TM_0) \to \pi^*TM$ morfismo de fibrados definido en la proposición anterior. Dados $U,W,V \in C^\infty(T(TM_0))$,*

$$W(g_y(\rho U, \rho V)) - g_y(\nabla_W \rho U, \rho V) - g_y(\rho U, \nabla_W \rho V) = 2C_y(\nabla_W y, \rho U, \rho V).$$

Demostración. Supongamos que $U = \sum_i U_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $W = \sum_i W_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \gamma_i \frac{\partial}{\partial y_i}$, $V = \sum_i V_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i \beta_i \frac{\partial}{\partial y_i}$. Luego,

$$\begin{aligned}
W(g_y(\rho U, \rho V)) &- g_y(\nabla_W \rho U, \rho V) - g_y(\rho U, \nabla_W \rho V)\\
&= W\left(\sum_{i,j} g_{ij} U_i V_j\right) - g_y\left(\sum_i \left(dU_i(W) + \sum_k \omega_k^i(W) U_k\right) \frac{\partial}{\partial x_i}, V\right)\\
&\quad - g_y\left(U, \sum_i \left(dV_i(W) + \sum_k \omega_k^i(W) V_k\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\\
&= \sum_{i,j} (dg_{ij}(W) U_i V_j + g_{ij} dU_i(W) V_j + g_{ij} U_i dV_j(W))\\
&\quad - \sum_{i,j} g_{ij} \left(dU_i(W) + \sum_k \omega_k^i(W) U_k\right) V_j\\
&\quad - \sum_{i,j} g_{ij} U_i \left(dV_j(W) + \sum_k \omega_k^j(W) V_k\right)\\
&= \sum_{i,j} dg_{ij}(W) - \sum_{i,j,k} g_{ij} \omega_k^i(W) U_k V_j - \sum_{i,j,k} g_{ij} \omega_k^j(W) U_i V_k\\
&= \sum_{i,j} \left(dg_{ij}(W) - \sum_k g_{kj} \omega_i^k(W) - \sum_k g_{ik} \omega_j^k(W)\right) U_i V_j\\
&= \sum_{i,j,k} 2C_{ijk} \omega_{n+k}(W) U_i V_j\\
&= \sum_{i,j,k} 2C_{ijk} \left(dy_k(W) + \sum_k y_h \omega_h^k(W)\right) U_i V_j\\
&= \sum_{i,j,k} 2C_{ijk} (\nabla_W y)_k U_i V_j = 2C_y(\nabla_W y, \rho U, \rho V).
\end{aligned}$$

□

La conexión de Chern actúa solamente sobre secciones de π^*TM_0. Sin embargo, podemos extenderla a cualquier tensor sobre este fibrado. Recordemos que hemos definido los fibrados de tensores en el Ejemplo 1.7.

Si f es una función diferenciable, definimos $\nabla_v(f) = df(v)$.

Supongamos que tenemos un marco local $\{e_i\}$, tal que $\nabla_v e_i = \sum_j \omega_j^i(v) e_j$. Tomemos $\{\omega_i\}$ el marco dual a $\{e_i\}$. Podemos definir $\nabla_v \omega_i = -\sum_j \omega_j^i(v)\omega_j$. Extendiendo linealmente, queda definida la conexión de Chern para una 1-forma arbitraria.

Una vez definida en formas y campos y funciones diferenciables, podemos extender la conexión a todo tensor como una derivación. Por ejemplo, si T es un $(0,2)$-tensor, $T = \sum_{i,j} T_{ij}\omega_i \otimes \omega_j$:

$$\nabla_v(T) = \sum_{i,j} \left(dT_{ij}(v)\omega_i \otimes \omega_j + T_{ij}(\nabla_v \omega_i) \otimes \omega_j + T_{ij}\omega_i \otimes (\nabla_v \omega_j) \right).$$

Ejemplo 2.9. Calculemos la conexión aplicada al tensor g.

$$\begin{aligned}
\nabla_v g &= \nabla_v \left(\sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j \right) \\
&= \sum_{i,j} \left(dg_{ij}(v) - \sum_k g_{kj}\omega_i^k(v) - \sum_k g_{ik}\omega_j^k(v) \right) dx_i \otimes dx_j \\
&= \sum_{i,j} \left(\sum_k 2C_{ijk}\omega_{n+k}(v) \right) dx_i \otimes dx_j.
\end{aligned}$$

Definamos G un campo en TM_0, $G = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2\sum_i G^i \frac{\partial}{\partial y_i}$. G se denomina el spray inducido por F. Las funciones G^l son homogéneas de orden 2 en su segunda coordenada:

$$\begin{aligned}
G^l(x,\lambda y) &= \sum_{i,j,k} \frac{1}{4} g^{lk}(x,\lambda y) \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(x,\lambda y) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}(x,\lambda y) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x,\lambda y) \right) \lambda y_i \lambda y_j \\
&= \lambda^2 \sum_{i,j,k} \frac{1}{4} g^{lk}(x,y) \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i}(x,y) + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j}(x,y) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(x,y) \right) y_i y_j \\
&= \lambda^2 G^l(x,y),
\end{aligned}$$

pues como ya vimos en la Proposición 1.10, los coeficientes de la forma fundamental son invariantes por reescalas en la segunda coordenada, y por ende también los coeficientes de su inversa y las derivadas en función de las primeras coordenadas.

Veamos otra forma de escribir los coeficientes del spray. Teniendo en cuenta que $\frac{\partial F^2}{\partial x_l} = \sum_{i,j} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} y_i y_j$ y $\sum_k \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial y_l} y_k = \sum_{i,k} 2\frac{\partial g_{il}}{\partial x_k} y_i y_k$,

$$G^i = \frac{1}{4} \sum_l g^{il} \left(\sum_k \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial y_l} y_k - \frac{\partial F^2}{\partial x_l} \right). \tag{2.8}$$

Observación 2.10. Un campo diferenciable G en TM_0 de la forma

$$G = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2\sum_i G^i \frac{\partial}{\partial y_i},$$

con G^i funciones homogéneas de orden 2, se denomina spray en M. No todos los sprays son inducidos por métricas de Finsler, por lo que un spray es una estructura mas general. A partir de un spray podemos definir la noción de geodésica, campos paralelos a lo largo de curvas y transporte paralelo.

Veamos que podemos expresar los coeficientes de la conexión en función de los coeficientes del spray.

Proposición 2.11. *Sea (M, F) variedad de Finsler, G^i los coeficientes del spray de F y N_j^i los coeficientes de la conexión de F. Entonces,*

$$N_j^i = \frac{\partial G^i}{\partial y_j}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^i}{\partial y_j} =& \frac{1}{4}\sum_{l,k,h} g^{il}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}(y_h y_k) \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{l,k,h} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial y_j}\right)\right) y_h y_k \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{l,k,h} \frac{\partial g^{il}}{\partial y_j}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l}\right) y_h y_k.\end{aligned}$$

Veamos cuánto da cada sumando. El primero queda:

$$\begin{aligned}&\sum_{l,k,h} g^{il}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l}\right)\frac{\partial}{\partial y_j}(y_h y_k) \\ &\quad= \sum_{l,k} g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right) y_k + \sum_{l,h} g^{il}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hj}}{\partial x_l}\right) y_h \\ &\quad= 2\sum_{l,k} g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l}\right) y_k,\end{aligned}$$

pues las dos sumatorias son iguales cambiando k por h.

La segunda queda:

$$\begin{aligned}&\sum_{l,k,h} g^{il}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial y_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial y_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial g_{hk}}{\partial y_j}\right)\right) y_h y_k \\ &\quad= \sum_{l,k,h} 2g^{il}\left(\frac{\partial C_{hlj}}{\partial x_k} + \frac{\partial C_{lkj}}{\partial x_h} - \frac{\partial C_{hkj}}{\partial x_l}\right) y_k y_h = 0,\end{aligned}$$

pues $\sum_i C_{ijk} y_i = 0$ por (1.7), en cada uno de los índices.

Para computar el último sumando, necesitamos primero obtener $\frac{\partial g^{il}}{\partial y_j}$. Para ello, usaremos el lema de álgebra lineal que enunciamos en el Lema 1.23.

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial y_j} = \sum_{n,m} \frac{\partial g^{il}}{\partial g_{nm}} \frac{\partial g_{nm}}{\partial y_j} = \sum_{n,m} (-2) g^{in} g^{ml} C_{nmj}.$$

Reemplazando en el último sumando,

$$\begin{aligned}
&\sum_{l,k,h} \frac{\partial g^{il}}{\partial y_j} \left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l} \right) y_h y_k \\
&\quad = \sum_{l,k,h,m,n} (-2) g^{in} g^{ml} C_{mnj} \left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l} \right) y_h y_k \\
&\quad = (-2) \sum_{n,m} g^{in} C_{mnj} \left(\sum_{l,k,h} g^{ml} \left(\frac{\partial g_{hl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_h} - \frac{\partial g_{hk}}{\partial x_l} \right) y_h y_k \right) \\
&\quad = (-8) \sum_{m,n} g^{in} C_{mnj} G^m.
\end{aligned}$$

Juntando los tres sumandos,

$$\frac{\partial G^i}{\partial y_j} = \frac{1}{2} \sum_{l,k} g^{il} \left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial x_k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_l} \right) y_k - 2 \sum_{m,n} g^{in} C_{mnj} G^m = N^i_j.$$

□

Como los coeficientes del spray son positivamente homogéneos de orden 2, y los coeficientes de la conexión se obtienen derivando los mismos, podemos concluir por la Proposición 1.12 que los coeficientes de la conexión son positivamente homogéneos de orden 1, es decir,

$$N^i_j(x, \lambda y) = \lambda N^i_j(x, y).$$

Definimos los coeficientes de Landsberg:

$$L^i_{jk} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y_j \partial y_k} - \Gamma^i_{jk}. \tag{2.9}$$

Es obvio que son simétricos en sus subíndices. Llamamos tensor de Landsberg a

$$\mathcal{L} = \sum_{ijk} L^i_{jk} \frac{\partial}{\partial x_i} \otimes dx_j \otimes dx_k.$$

Podemos expresar a los coeficientes de Landsberg en función de los símbolos de Christoffel a partir de la proposición anterior.

$$\frac{\partial G^i}{\partial y_j} = N^i_j = \sum_l \Gamma^i_{jl} y_l.$$

Derivando nuevamente en función de y_k,

$$\frac{\partial^2 G^i}{\partial y_k \partial y_j} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y_k} y_l + \Gamma^i_{jk}.$$

Luego,

$$L^i_{jk} = \sum_l \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y_k} y_l.$$

Para simplificar algunas cuentas vamos a introducir un campo en TM_0,

$$\frac{\delta}{\delta x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_j N^j_i \frac{\partial}{\partial y_j}.$$

Así, por ejemplo, el spray de F queda descrito más simple como $G = \sum_i y_i \frac{\delta}{\delta x_i}$.

Introduciremos también un campo dual en TM_0, que ya hemos usado antes,

$$\delta y_i = dy_i + \sum_j N^i_j dx_j. \tag{2.10}$$

Notemos que la base $\{dx_j, \delta y_j\}$ es dual a la base $\{\frac{\delta}{\delta x_j}, \frac{\partial}{\partial y_j}\}$.

2.2.1. Ecuaciones de Estructura

Pasamos a realizar algunos cálculos sobre los elementos ya definidos, para llegar a alguna noción de curvatura.

Dado $\{e_i\}$ un marco local para un fibrado y $\{\omega_i\}$ su marco dual, ya definimos en el capítulo anterior las formas de curvatura para una conexión como

$$\Omega^i_j = d\omega^i_j - \sum_k \omega^k_j \wedge \omega^i_k.$$

Tomando la conexión de Chern y diferenciando la condición de torsión nula pedida para las formas de la conexión, llegaremos a algunas identidades para las mismas:

$$\begin{aligned}
0 = d^2\omega_i = d\left(\sum_j \omega_j \wedge \omega^i_j\right) &= \sum_j d\omega_j \wedge \omega^i_j - \omega_j \wedge d\omega^i_j \\
&= \sum_j \left(\sum_k \omega_k \wedge \omega^j_k\right) \wedge \omega^i_j - \omega_j \wedge \left(\Omega^i_j + \sum_k \omega^k_j \wedge \omega^i_k\right) \\
&= -\sum_j \omega_j \wedge \Omega^i_j + \sum_{j,k} \omega_k \wedge \omega^j_k \wedge \omega^i_j - \sum_{j,k} \omega_j \wedge \omega^k_j \wedge \omega^i_k \\
&= -\sum_j \omega_j \wedge \Omega^i_j,
\end{aligned}$$

pues el segundo y tercer sumando son la misma sumatoria, intercambiando los índices j y k.

Obtenemos así la que se conoce como la primera identidad de Bianchi,

$$\sum_j \omega_j \wedge \Omega_j^i = 0.$$

Al ser 2-formas en TM_0, podemos escribir a las formas de curvatura como combinación lineal de los wedge de formas $\omega_i \wedge \omega_j$, $\omega_i \wedge \omega_{n+j}$ y $\omega_{n+i} \wedge \omega_{n+j}$, donde $\omega_{n+j} = dy_j + \sum_k y_k \omega_k^i$:

$$\Omega_j^i = \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{k,l} P_{jkl}^i \omega_k \wedge \omega_{n+l} + \sum_{k,l} Q_{jkl}^i \omega_{n+k} \wedge \omega_{n+l}, \tag{2.11}$$

donde pedimos la condición $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$ y $Q_{jkl}^i = -Q_{jlk}^i$, para tener en cuenta la anticonmutatividad del wedge.

Reemplazando en la primera identidad de Bianchi,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \omega_j \wedge \Omega_j^i \\ &= \sum_{j,k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{j,k,l} P_{jkl}^i \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_{n+l} + \sum_{j,k,l} Q_{jkl}^i \omega_j \wedge \omega_{n+k} \wedge \omega_{n+l}. \end{aligned}$$

Cada sumatoria tiene formas de distinto ”tipo”, por lo que cada una debe anularse. De esto podemos deducir algunas identidades sobre los coeficientes.

Como $\sum_{j,k,l} Q_{jkl}^i \omega_j \wedge \omega_{n+k} \wedge \omega_{n+l} = 0$, es necesario que $Q_{jkl}^i = Q_{jlk}^i$. Luego, como pedimos también que estos coeficientes fueran anticonmutativos, tenemos que $Q_{jkl}^i = 0$.

De forma análoga, $\sum_{j,k,l} P_{jkl}^i \omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_{n+l} = 0$ implica que $P_{jkl}^i = P_{jlk}^i$.

Finalmente, como la primera sumatoria se anula, $R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0$.

Resumiendo, $\Omega_j^i = \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{jkl}^i \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{k,l} P_{jkl}^i \omega_k \wedge \omega_{n+l}$.

Supongamos ahora que $\{e_i\} = \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$, $\omega_i = dx_i$ y $\omega_{n+i} = dy_i + \sum_h y_h \omega_h^i = \delta y_i$, que definimos en (2.10). Para estos marcos, las formas de la conexión son $\omega_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i dx_k$. Luego,

$$d\omega_j^i = \sum_k d\Gamma_{jk}^i \wedge dx_k = \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_k + \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} dy_l \wedge dx_k.$$

Calculemos las formas de curvatura.

$$
\begin{aligned}
\Omega_j^i &= \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_k + \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} dy_l \wedge dx_k - \sum_{k,l,h} \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i dx_l \wedge dx_k \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} dy_l \wedge dx_k + \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} \left(\sum_h N_h^l dx_h \right) \wedge dx_k \\
&\quad - \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} \left(\sum_h N_h^l dx_h \right) \wedge dx_k + \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_l} dx_l \wedge dx_k - \sum_{k,l,h} \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i dx_l \wedge dx_k \\
&= \sum_{k,l} \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} \delta y_l \wedge dx_k + \sum_{k,l} \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_l} - \sum_h N_l^h \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_h} - \sum_h \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \right) dx_l \wedge dx_k \\
&= \sum_{k,l} \left(-\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} \right) dx_k \wedge \delta y_l + \sum_{k,l} \left(-\frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x_l} + \sum_h \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i \right) dx_k \wedge dx_l.
\end{aligned}
$$

Podemos comparar los coeficientes para encontrar R_{jkl}^i y P_{jkl}^i. Es directo que $P_{jkl}^i = -\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l}$, pero hay que recordar que pedimos como condición que R_{jkl}^i fuera anticonmutativo en k y l, y nada indica que como están en la combinación lineal lo sean. Esto se arregla fácilmente, restando los coeficientes simétricos y dividiendo por dos. Notar que es por esto que en (2.11), estos coeficientes están multiplicados por $\frac{1}{2}$. Finalmente,

$$
P_{jkl}^i = -\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial y_l} \tag{2.12}
$$

$$
R_{jkl}^i = \frac{\delta \Gamma_{jl}^i}{\delta x_k} - \frac{\delta \Gamma_{jk}^i}{\delta x_l} + \sum_h \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i - \sum_h \Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i. \tag{2.13}
$$

Definimos $\Omega^i = d\omega_{n+i} - \sum_j \omega_{n+j} \wedge \omega_j^i$, la parte esencial de las formas de curvatura. Diferenciando ω_{n+i},

$$
\begin{aligned}
\Omega^i &= d^2 y_i + \sum_k \left(dy_k \wedge \omega_k^i + y_k d\omega_k^i - \omega_{n+k} \wedge \omega_j^i \right) \\
&= \sum_k \left(\omega_{n+k} - \sum_l y_l \omega_l^k \right) \wedge \omega_k^i + \sum_k y_k \left(\Omega_k^i + \sum_l \omega_k^l \wedge \omega_l^i \right) - \sum_k \omega_{n+k} \wedge \omega_k^i \\
&= \sum_k y_k \Omega_k^i.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

Como hicimos con las formas de curvatura, podemos expresar a las partes esenciales como combinación lineal de $\omega_i \wedge \omega_j$, $\omega_i \wedge \omega_{n+j}$ y $\omega_{n+i} \wedge \omega_{n+j}$:

$$
\Omega^i = \sum_{k,l} \frac{1}{2} R_{kl}^i \omega_k \wedge \omega_l + \sum_{k,l} P_{kl}^i \omega_k \wedge \omega_{n+l} + \sum_{k,l} Q_{kl}^i \omega_{n+k} \wedge \omega_{n+l},
$$

pidiendo, como antes, que $R^i_{kl} = -R^i_{lk}$ y $Q^i_{kl} = -Q^i_{lk}$.

Usando (2.14) y la escritura en coordenadas de las formas de curvatura, obtenemos que $R^i_{kl} = \sum_j y_j R^i_{jkl}$, $P^i_{kl} = \sum_j y_j P^i_{jkl}$ y $Q^i_{kl} = 0$.

Volvamos a suponer que $\{e_i\} = \{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$, $\omega_i = dx_i$ y $\omega_{n+i} = \delta y_i$ y $\omega^i_j = \sum_k \Gamma^i_{jk} dx_k$, y calculemos la parte esencial de la curvatura.

Sabemos por (2.12) que $P^i_{jkl} = -\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y_l}$. Luego,

$$P^i_{kl} = \sum_j y_j P^i_{jkl} = -\sum_j y_j \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y_l} = -L^i_{kl},$$

donde L^i_{kl} son los coeficientes de Landsberg definidos en (2.9).

También sabemos por (2.13) que

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x_k} - \sum_h N^h_k \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y_h} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_l} + \sum_h N^h_l \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y_h} + \sum_h \Gamma^h_{jl}\Gamma^i_{hk} - \sum_h \Gamma^h_{jk}\Gamma^i_{hl}.$$

Luego, contrayendo contra y_j, obtenemos

$$\begin{aligned}
R^i_{kl} &= \sum_j \left(y_j \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x_k} - y_j \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_l} \right) + \sum_h \left(\sum_j y_j \Gamma^h_{jl} \right) \Gamma^i_{hk} - \sum_h \left(\sum_j y_j \Gamma^h_{jk} \right) \Gamma^i_{hl} \\
&\quad - \sum_h N^h_k \left(\sum_j y_j \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial y_h} \right) + \sum_h N^h_l \left(\sum_j y_j \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y_h} \right) \\
&= \frac{\partial N^i_l}{\partial x_k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial x_l} + \sum_h N^h_l \Gamma^i_{hk} - \sum_h N^h_k \Gamma^i_{hl} - \sum_h N^h_k L^i_{lh} + \sum_h N^h_l L^i_{kh} \qquad (2.15) \\
&= \frac{\partial N^i_l}{\partial x_k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial x_l} + \sum_h N^h_l (\Gamma^i_{hk} + L^i_{kh}) - \sum_h N^h_k (\Gamma^i_{hl} + L^i_{lh}) \\
&= \frac{\partial N^i_l}{\partial x_k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial x_l} + \sum_h N^h_l \frac{\partial N^i_k}{\partial y_h} - \sum_h N^h_k \frac{\partial N^i_l}{\partial y_h}.
\end{aligned}$$

Como los coeficientes de la conexión pueden expresarse en función de los coeficientes del spray, tambien los coeficientes R^i_{kl}, por lo que dependen sólo del spray de F.

Para terminar, definimos $R^i_k = \sum_l y_l R^i_{kl} = \sum_{j,l} y_j y_l R^i_{jkl}$, y el tensor de Riemann como

$$\mathcal{R} = \sum_{i,k} R^i_k e_i \otimes \omega_k.$$

Como los coeficientes R^i_{kl} solo dependen del spray, lo mismo vale para R^i_k y el tensor de Riemann. Contrayendo (2.15) con y_l, obtenemos una fórmula explícita para R^i_k.

$$R^i_k = -\sum_l y_l \frac{\partial^2 G^i}{\partial x_l \partial y_k} + 2\frac{\partial G^i}{\partial x_k} + 2\sum_h G^h \frac{\partial^2 G^i}{\partial y_h \partial y_k} - \sum_h \frac{\partial G^h}{\partial y_k}\frac{\partial G^i}{\partial y_h}. \qquad (2.16)$$

El tensor de Riemann es uno de los objetos más importantes de la geometría de Finsler, pues mide la curvatura de una variedad de Finsler. En los próximos capítulos desarrollaremos más este tensor.

2.3. El Caso Particular de los Grupos de Lie

En esta sección estudiaremos el caso particular de un grupo de Lie. Se supondran conocimientos básicos sobre los mismos, y por cualquier consulta puede referirse a [14].

Tomemos (M, F) una variedad de Finsler, y supongamos que M es un grupo de Lie, que notaremos como G. Decimos que la métrica F es invariante a izquierda si

$$F(g, y) = F(e, L^{-1}_{g*,e}(y)), \tag{2.17}$$

donde e es el elemento neutro de G, y L_g es el difeomorfismo definido como multiplicar a izquierda por el elemento g.

Bajo estas hipótesis, podemos pensar a la métrica como una norma de Minkowski en T_eG trasladada a izquierda a cada espacio T_gG. Además, como todo grupo de Lie es paralelizable, podemos dar un marco global de π^*TM_0. Dada $\{e_i\}$ una base de $T_eG \simeq \mathcal{G}$ el algebra de Lie de G de campos invariantes a izquierda, definimos $e_i(x, y) = (x, y, e_i(x))$. El conjunto de estos elementos es el marco global de π^*TM_0. Notaremos estos elementos indistintamente.

Es fácil ver que F no depende del punto en G. Tomando nuevamente $\{e_i\}$ una base de $\mathcal{G}$, cada y en T_gG se escribe como $\sum_i y_ie_i(g)$. Además, $L^{-1}_{g*,e}(y) = \sum_i y_ie_i(e)$. Por la invarianza a izquierda,

$$F(g, \sum_i y_ie_i(g)) = F(e, L^{-1}_{g*,e}(y)) = F(e, \sum_i y_ie_i(e)).$$

Luego, las derivadas de F, de los coeficientes de forma y de las cantidades definidas en la sección anterior en función del punto de la variedad son nulas. Es decir, son constantes en la variedad y sólo dependen del elemento tangente.

Por todo esto, podemos calcular todas estas cantidades explícitamente a nivel del álgebra de Lie.

Nuevamente, elijamos $\{e_i\}$ una base de $\mathcal{G}$, $\{\omega_i\}$ su base dual y $\{\omega^i_j\}$ las formas de la conexión de Chern para este marco. Definimos las constantes de estructura λ^i_{jk} como

$$[e_j, e_k] = \sum_i \lambda^i_{jk} e_i.$$

Lema 2.12. *Dados $\{e_i\}$ y $\{\omega_i\}$ como antes, vale que*

$$d\omega_i = -\frac{1}{2} \sum_{j,k} \lambda^i_{jk} \omega_j \wedge \omega_k.$$

Demostración. Escribiendo a $d\omega_i$ en coordenadas, tenemos que $d\omega_i = \sum_{j,k} c^i_{jk}\omega_j \wedge \omega_k$, pidiendo que $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ para tener en cuenta la anticonmutatividad del wedge. Luego, $d\omega_i(e_j, e_k) = 2c^i_{jk}$.

Sabemos que para cualquier 1-forma ω vale que

$$d\omega(X,Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X,Y]).$$

Aplicando esto a $d\omega_i$,

$$\begin{aligned} 2c^i_{jk} &= d\omega_i(e_j, e_k) = e_j(\omega_i(e_k)) - e_k(\omega_i(e_j)) - \omega_i([e_j, e_k]) \\ &= e_j(\delta_{ik}) - e_k(\delta_{ij}) - \omega_i(\sum_l \lambda^l_{jk} e_l) = -\lambda^i_{jk}. \end{aligned}$$

Notar que las funciones δ son constantes, por lo que si les aplicamos un campo se anulan. Finalmente, $c^i_{jk} = \frac{-1}{2}\lambda^i_{jk}$, obteniendo lo que queríamos. □

Por la torsión nula, $d\omega_i = \sum_j \omega_j \wedge \omega^i_j$, con $\omega^i_j = \sum_k \Gamma^i_{jk}\omega_k$. Aplicando el lema, obtenemos

$$\sum_{j,k} \frac{-1}{2}\lambda^i_{jk}\omega_j \wedge \omega_k = \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\omega_j \wedge \omega_k.$$

Para continuar necesitamos primero el lema de Cartan. Para una demostración del mismo, puede leerse el Teorema 3.4 de [3].

Lema 2.13. *Sean $\{v_1, \cdots, v_r\}$ conjunto de vectores linealmente independiente, y $\{w_1, \cdots, w_r\}$ conjunto de vectores, tales que*

$$\sum_{i=1}^r v_i \wedge w_i = 0.$$

Entonces, $w_i = \sum_{i=1}^r \alpha_{ij} v_j$, con $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$.

Para aplicar el lema a la igualdad anterior, debemos reordenarla.

$$\sum_j \omega_j \wedge \left(\sum_k \frac{1}{2}\lambda^i_{jk}\omega_k \right) = \sum_j \omega_j \wedge \left(\sum_k \Gamma^i_{jk}\omega_k \right).$$

Luego,

$$\sum_j \omega_j \wedge \left(\sum_k (\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\lambda^i_{jk})\omega_k \right) = 0.$$

Usando el lema de Cartan, $\sum_k (\Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\lambda^i_{jk})\omega_k = \sum_k T^i_{jk}\omega_k$ con $T^i_{jk} = T^i_{kj}$. Así, comparando coordenada a coordenada, $\Gamma^i_{jk} = \frac{-1}{2}\lambda^i_{jk} + T^i_{jk}$. Luego, $\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} = -\lambda^i_{jk}$ y $\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} = 2\Gamma^i_{jk} - \lambda^i_{kj}$.

Expresemos la casi compatibilidad con la métrica, teniendo en cuenta que g_{ij} sólo dependen de y.

$$\sum_k 2C_{ijk}dy_k = \sum_{k,l} g_{kj}\Gamma^k_{il}\omega_l + \sum_{k,l} g_{ik}\Gamma^k_{jl}\omega_l + \sum_k 2C_{ijk}dy_k + \sum_{k,h,l} 2C_{ijk}y_h\Gamma^k_{hl}\omega_l.$$

Recordando que $N^k_l = \sum_h y_h\Gamma^k_{hl}$ y $G^k = \frac{1}{2}\sum_l y_l N^k_l$, nos queda que

$$\sum_l \left(\sum_k g_{kj}\Gamma^k_{il} + g_{ik}\Gamma^k_{jl} + 2C_{ijk}N^k_l\right)\omega_l = 0.$$

Luego, cada coeficiente es nulo, es decir

$$\sum_k g_{kj}\Gamma^k_{il} + g_{ik}\Gamma^k_{jl} + 2C_{ijk}N^k_l = 0$$

para cada l.

Usando el mismo truco que en la demostración del teorema de Chern, intercambiando índices, sumando y restando, nos queda que

$$\sum_k g_{kj}(\Gamma^k_{il}-\Gamma^k_{li})+g_{ik}(\Gamma^k_{jl}+\Gamma^k_{lj})+g_{kl}(\Gamma^k_{ij}-\Gamma^k_{ji})+2C_{ijk}N^k_l+2C_{ilk}N^k_j-2C_{ljk}N^k_i = 0.$$

Reemplazando por lo obtenido con el lema de Cartan,

$$\sum_k 2g_{ik}\Gamma^k_{jl} - g_{kj}\lambda^k_{il} - g_{ik}\lambda^k_{lj} - g_{kl}\lambda^k_{ij} + 2C_{ijk}N^k_l + 2C_{ilk}N^k_j - 2C_{ljk}N^k_i = 0. \quad (2.18)$$

Contrayendo con y_j, y teniendo en cuenta que $\sum_j C_{ijk}y_j = 0$ para cada uno de los índices,

$$\sum_k \left(2g_{ik}N^k_l - \sum_j g_{kj}\lambda^k_{il}y_j - \sum_j g_{ik}\lambda^k_{lj}y_j - \sum_j g_{kl}\lambda^k_{ij}y_j + 4C_{ilk}G^k\right) = 0.$$

Contrayendo con y_l, y teniendo en cuenta que $\sum_{j,l}\lambda^k_{jl}y_jy_l = 0$ por la anticonmutatividad de los subíndices,

$$\sum_k \left(4g_{ik}G^k - 2\sum_{j,l} g_{kj}\lambda^k_{il}y_jy_l\right) = 0.$$

Pasando para el otro lado de la igualdad y multiplicando por (g^{ij}) la inversa de (g_{ij}),

$$G^k = \frac{1}{2}\sum_{i,j,l,h} g_{il}g^{kh}\lambda^l_{hj}y_iy_j.$$

Sustituyendo y multiplicando por (g^{ij}),

$$N_k^i = \frac{1}{2}\left(\sum_j \lambda_{kj}^i y_j + \sum_{j,l,h} g_{kl} g^{ih} \lambda_{hj}^l y_j + \sum_{j,l,h} g_{jl} g^{ih} \lambda_{hk}^l y_j - \sum_{h,j} 4 g^{ih} C_{hjk} G^j\right).$$

Podemos también obtener una fórmula explícita para Γ_{jk}^i, reemplazando N_k^i en (2.18).

Nuevamente podremos expresar a N_k^i en función de G^i.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G^k}{\partial y_l} &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j,h} g_{li} g^{kh} \lambda_{kj}^i y_j - \sum_{h,i,j,s,r,m} 2 g^{ki} C_{kjl} g_{rh} g^{js} \lambda_{sm}^h y_r y_m + \sum_{h,s,j} g_{jh} g^{ks} \lambda_{sl}^h\right)\\ &= N_l^k - \frac{1}{2}\sum_j \lambda_{lj}^k y_j.\end{aligned}$$

Hemos terminado de determinar la conexión de Chern. Calculemos ahora las formas de curvatura.

Recordemos que definimos la parte esencial de las formas de curvatura como

$$\Omega^i = d\omega_{n+i} - \sum_k \omega_{n+k} \wedge \omega_k^i,$$

con $\omega_{n+k} = dy_k + \sum_l y_l \omega_l^i = dy_k + \sum_l N_l^i \omega_l$.

Reemplazando,

$$\begin{aligned}\Omega^i &= \sum_k d(N_k^i \omega_k) - \sum_k \omega_{n+k} \wedge \left(\sum_l \Gamma_{kl}^i \omega_l\right)\\ &= \sum_{j,k}\left(\sum_l -N_j^l \frac{\partial N_k^i}{\partial y_l} + \sum_l N_l^i \Gamma_{jk}^l\right)\omega_j \wedge \omega_k - \sum_{j,k}\left(\frac{\partial N_j^i}{\partial y_k} - \Gamma_{kj}^i\right)\omega_j \wedge \omega_{n+k}.\end{aligned}$$

Luego, los coeficientes quedan

$$\begin{aligned}R_{jk}^i &= -\sum_l N_j^l \frac{\partial N_k^i}{\partial y_l} + \sum_l N_k^l \frac{\partial N_j^i}{\partial y_l} + \sum_l N_l^i \Gamma_{jk}^l - \sum_l N_l^i \Gamma_{kj}^l\\ &= -\sum_l N_j^l \frac{\partial N_k^i}{\partial y_l} + \sum_l N_k^l \frac{\partial N_j^i}{\partial y_l} - \sum_l N_l^i \lambda_{jk}^l;\\ P_{jk}^i &= -\left(\frac{\partial N_j^i}{\partial y_k} - \Gamma_{kj}^i\right);\\ Q_{jk}^i &= 0.\end{aligned}$$

Finalmente, los coeficientes de Riemann son

$$R_j^i = \sum_k R_{jk}^i y_k = \sum_k 2G^k \frac{\partial N_j^i}{\partial y_k} - \sum_k N_k^i N_j^k - \sum_{k,l} N_k^i \lambda_{jl}^k y_l + \sum_{k,l} N_j^k \lambda_{kl}^i y_l. \quad (2.19)$$

Hemos calculado entonces todas las cantidades en función de F y las constantes de estructura de G. En los próximos capítulos ampliaremos más sobre el uso de estas identidades.

Capítulo 3

Geodésicas y Transporte Paralelo

En éste capítulo veremos algunos aspectos mas geométricos sobre las métricas de Finsler: el concepto de geodésica y transporte paralelo respecto a la conexión de Chern asociada a F. Empezaremos recordando el concepto de spray definido en el capítulo anterior, a través del cual definiremos geodésica y transporte paralelo. Veremos qué propiedades podemos inferir cuando el spray proviene de una métrica de Finsler.

Para un estudio más extenso del tema, se puede referir a los Capítulos 3 y 4 de [5].

3.1. Geodésicas

Recordemos la definición de spray del capítulo anterior. Dada M una variedad diferenciable, un spray es un campo diferenciable G en TM_0 de la forma

$$G = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i} - 2 \sum_i G^i(x, y) \frac{\partial}{\partial y_i},$$

con G^i funciones positivamente homogéneas de orden 2 en la segunda coordenada, es decir, $G^i(x, \lambda y) = \lambda^2 G^i(x, y)$ para todo λ positivo.

Dada una variedad M y un campo X en M, una curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ se dice curva integral de X si satisface que $X_{\gamma(t)} = \dot{\gamma}(t)$.

Supongamos que $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM_0$ es una curva integral para G. Tomando coordenadas, $\gamma(t) = (x_i(t), y_i(t))$ debe cumplir que

$$\dot{x_i}(t) = y_i(t); \qquad \dot{y_i}(t) + 2G^i(x, y) = 0.$$

Una curva diferenciable $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ se dice geodésica de G si el levantado canónico $\gamma(t) = (\sigma(t), \dot{\sigma}(t))$ es una curva integral de G. Luego, tomando coordenadas, una geodésica debe cumplir que

$$\ddot{\sigma_i}(t) + 2G^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 0.$$

Podemos deducir fácilmente el siguiente lema:

Lema 3.1. *Dada (M, F) una variedad de Finsler, x en M y V en T_xM, existe única curva geodésica σ tal que $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(0) = V$.*

Demostración. Tomando coordenadas en una carta (U, φ), queremos una curva σ que cumpla

$$\begin{aligned}
&\ddot{\sigma}_i(t) + 2G^i(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = 0\\
&\sigma(0) = \varphi(x)\\
&\dot{\sigma}(0) = \varphi_{*,x}V.
\end{aligned}$$

Por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, existe tal curva σ. Para conseguir la geodésica en M, simplemente tomamos $\varphi^{-1}\sigma$. □

Recordemos que toda métrica de Finsler F induce un spray G donde las funciones G^i estan dadas por (2.7), es decir,

$$G^l = \sum_{i,j,k} \frac{1}{4} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) y_i y_j.$$

Las geodésicas de este spray G se denominan geodésicas de F. Veamos qué propiedades cumplen.

Proposición 3.2. *Sean (M, F) una variedad de Finsler y σ una curva diferenciable en M. Si σ es una geodésica, entonces tiene velocidad constante, es decir,*

$$F(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)) = constante.$$

Demostración. Veamos que el cuadrado de la velocidad es constante. Sabemos por (1.4) que $F^2(x, y) = \sum_{i,j} g_{ij}(x, y) y_i y_j$. Componiendo con la curva y derivando,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F^2(\sigma(t), \dot{\sigma}(t))) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j} g_{ij}(\sigma, \dot{\sigma}) \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \right)\\
&= \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \dot{\sigma}_k + \sum_k \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \ddot{\sigma}_k + 2 g_{ij} \dot{\sigma}_i \ddot{\sigma}_j \right).
\end{aligned}$$

Resolvamos cada sumando. Es bastante directo que el segundo sumando es nulo, pues

$$\sum_{i,j,k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \ddot{\sigma}_k = \sum_{i,j,k} 2C_{ijk} \dot{\sigma}_i \dot{\sigma}_j \ddot{\sigma}_k = \sum_{j,k} 2\dot{\sigma}_j \ddot{\sigma}_k \left(\sum_i C_{ijk} y_i \right) (\sigma, \dot{\sigma}) = 0.$$

Reemplazando con (2.4), el primer sumando queda

$$\sum_{i,j,k,m} g_{im}\Gamma^m_{jk}\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j\dot{\sigma}_k + g_{mj}\Gamma^m_{ik}\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j\dot{\sigma}_k + 2C_{ijm}N^m_k\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j\dot{\sigma}_k$$
$$= \sum_{i,j,m} g_{im}N^m_j\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j + g_{mj}N^m_i\dot{\sigma}_i\dot{\sigma}_j = \sum_{i,m} 2g_{im}\dot{\sigma}_iG^m + \sum_{j,m} 2g_{mj}\dot{\sigma}_jG^m.$$

Como las dos sumatorias son iguales salvo un cambio de índices, el primer sumando queda igual a $4\sum_{i,j} g_{ij}\dot{\sigma}_iG^j$.

Como σ es una geodésica, tenemos que $\ddot{\sigma}_i = -2G^i$, por lo que el tercer sumando queda igual a $-4g_{ij}\dot{\sigma}_iG^j$, que es lo opuesto a lo que quedó el primero. Luego, $F^2(\sigma,\dot{\sigma})$ es constante, y como F y σ son continuas, también lo es $F(\sigma,\dot{\sigma})$. □

Una métrica de Finsler F en una variedad M se dice positivamente completa si toda geodésica se puede extender a una geodésica definida en un intervalo de tipo $(a,+\infty)$. Respectivamente, se dice negativamente completa si toda geodésica se puede extender a una geodésica definida en un intervalo de tipo $(-\infty,b)$. Se dice completa si lo es positivamente y negativamente. Siempre supondremos que 0 pertenece a los intervalos de definición de las geodésicas.

Supongamos que (M,F) es una variedad de Finsler positivamente completa. Podemos definir, a partir de las geodésicas, una función natural $exp_x : T_xM \to M$. Dado un vector y en T_xM, notamos a σ_y a la geodésica que pasa por x en 0 y con velocidad y. Por la completitud, podemos suponer que σ_y existe en 1, y definimos $exp_x(y) = \sigma_y(1)$. La función exp_x se denomina la exponencial en x.

Notemos que como las geodésicas son soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, no sólo son C^∞ en la variable t, también lo son en función de los valores iniciales. Por lo tanto, la función exponencial es diferenciable tanto en $x \in M$ como en $y \in T_xM_0$.

Lema 3.3. *Sea (M,F) una variedad de Finsler positivamente completa y σ_y la geodésica que pasa a tiempo 0 por un punto x de M con velocidad y. Entonces, $\sigma_{sy}(t) = \sigma_y(st)$ para cada s positivo.*

Demostración. Por la homogeneidad de G^i tenemos que

$$[\sigma_i(st)]^{\cdot\cdot} + 2G^i(\sigma(st),[\sigma(st)]^{\cdot}) = s^2\ddot{\sigma}_i(st) + 2G^i(\sigma(st),s\dot{\sigma}(st))$$
$$= s^2\ddot{\sigma}_i(st) + 2s^2G^i(\sigma(st),\dot{\sigma}(st)) = 0.$$

Además, $[\sigma(st)]^{\cdot}(0) = s\dot{\sigma}(0) = sy$. Luego, $\sigma(st)$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria con valores iniciales $\sigma(0) = x$, $\dot{\sigma}(0) = sy$. Por unicidad de soluciones, es la geodésica σ_{sy}. □

Observación 3.4. Por el lema anterior, para cada t positivo,

$$\sigma_y(t) = \sigma_{ty}(1) = exp_x(ty).$$

Notemos que, como la homogeneidad de F sólo vale para valores positivos, y en consecuencia también la de las funciones G^i, esta igualdad no vale en general para t negativo.

Tal como sucedía en métricas riemannianas, la exponencial es un difeomorfismo local en el origen de T_xM.

$$exp_{x_{*0}}(v) = \frac{d}{dt}(exp_x(tv))(0) = \frac{d}{dt}(\sigma_{tv}(1))(0) = \frac{d}{dt}(\sigma_v(t))(0) = \dot{\sigma_v}(0) = v.$$

Como $exp_{x_{*0}}$ es un isomorfismo, exp_x es un difeomorfismo local en el origen. Notemos que la cuenta anterior nos dice que la función exponencial es C^1 en el origen de T_xM.

Veremos ahora que, como sucedía en métricas riemannianas, una curva que minimiza la distancia entre dos puntos, definida en (2.1), debe ser bajo ciertas hipótesis una geodésica. Para ello, definamos la primera variación de la longitud de arco.

Decimos que una curva $\sigma : [a, b] \to M$ es *admisible* si es C^∞ a trozos y para cada t_i donde la curva no es diferenciable, existen

$$\sigma(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \dot{\sigma}(t); \qquad \sigma(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \dot{\sigma}(t).$$

Dada $\sigma : [a, b] \to M$ una curva admisible, una variación C^∞ a trozos de σ con extremos fijos es una función contínua $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$, C^∞ en $(t_i, t_{i+1}) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, donde (t_i, t_{i+1}) son los intervalos de diferenciabilidad de σ, tal que $H(t, 0) = \sigma(t)$, $H(a, s) = \sigma(a)$ y $H(b, s) = \sigma(b)$. Llamamos campo variacional de H a $V(t) = \frac{dH}{ds}(t, 0)$.

Proposición 3.5. *Sean (M, F) una variedad de Finsler, $\sigma : [a, b] \to M$ una curva admisible en M y $V : [a, b] \to TM$ tal que $V(t) \in T_{\sigma(t)}M$, y sólo se anula en los bordes. Existe entonces H una variación C^∞ a trozos de σ con extremos fijos tal que $\frac{\partial H}{\partial s}(t, 0) = V(t)$.*

Demostración. Definamos $H(t, s) = exp_{\sigma(t)}(sV(t))$. Es una función C^∞ en cada $(t_i, t_{i+1}) \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$, C^1 en $s = 0$, por la diferenciabilidad de la función exponencial, y $H(t, 0) = exp_{\sigma(t)}(0) = \sigma(t)$. Además,

$$\frac{dH}{ds}(t, 0) = \frac{d}{ds}(exp_{\sigma(t)}(sV(t)))(t, 0) = exp_{\sigma(t)_{*0}}(V(t)) = V(t).$$

Finalmente, evaluada en los extremos,

$$H(a, s) = exp_{\sigma(a)}(sV(a)) = exp_{\sigma(a)}(0) = \sigma(a),$$

y de forma análoga en b. $\square$

Llamemos σ_s a la curva $H(t, s)$ con s fijo. Con esta notación, definimos la función $L(s) = \int_a^b F(\sigma_s, \dot{\sigma_s})dt$,. Luego, que σ minimice la distancia entre sus extremos implica que $L'(0) = 0$ para toda variación H.

Proposición 3.6. *Sean (M, F) una variedad de Finsler, p y q dos puntos en M y C una curva admisible en M que une los puntos p y q tal que $d(p, q) = L_F(C)$. Entonces, cualquier parametrización con velocidad constante de C es una geodésica.*

Demostración. Tomemos una parametrización $\sigma : [a,b] \to M$ de C con velocidad constante $F(\sigma,\dot\sigma) = \lambda$ positiva. Dada una variación H arbitraria de σ con campo variacional $V(t)$, como minimiza la distancia entre p y q, tenemos que $L'(0) = 0$. Calculemos esta derivada y veamos qué conclusiones podemos sacar. Tenemos que $L(s) = \int_a^b F(\sigma_s, \dot{\sigma_s})dt = \int_a^b F(H(t,s), \frac{dH}{dt}(t,s))dt$. Notemos que $\frac{dH}{dt}(t,s)$ puede no estar bien definido en los puntos donde σ no es diferenciable, pero como es un conjunto de medida cero, esto no presupone un problema.

Como F es positiva, podemos escribir $F = \sqrt{F^2}$. Derivando,

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \frac{1}{2F(\sigma,\dot\sigma)} \frac{d}{ds}\left(F^2(H(t,s), \frac{dH}{dt}(t,s))\right)(t,0)dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_k \frac{\partial F^2}{\partial x_k}V_k + \sum_k \frac{\partial F^2}{\partial y_k}\frac{dV_k}{dt}\right)dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_k \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_k} - \sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial x_l}\dot\sigma_l - \sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_k \partial y_l}\ddot\sigma_l\right)V_k\right)dt \\ &+ \int_a^b \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_k \left(\sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial x_l}\dot\sigma_l + \sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial y_k \partial y_l}\ddot\sigma_l\right)V_k + \sum_k \frac{\partial F^2}{\partial y_k}\frac{dV_k}{dt}\right)dt. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes al segundo sumando en cada intervalo donde σ es diferenciable, queda

$$\begin{aligned} L'(0) &= \int_a^b \left(\frac{1}{2\lambda}\sum_k \left(\frac{\partial F^2}{\partial x_k} - \sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial x_l}\dot\sigma_l - \sum_l \frac{\partial^2 F^2}{\partial x_k \partial y_l}\ddot\sigma_l\right)V_k\right)dt \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{2\lambda}\left(\sum_k \frac{\partial F^2}{\partial y_k}(V_k(t_i^+) - V_k(t_i^-))\right). \end{aligned}$$

Usando (2.8),

$$\begin{aligned} L'(0) &= -\int_a^b \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j,k} g_{jk}(\ddot\sigma_j + 2G^j(\sigma,\dot\sigma))V_k\right) \\ &+ \sum_{i=1}^m \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j,k} g_{jk}(\dot\sigma_j(t_i^+) - \dot\sigma_j(t_i^-))(V_k(t_i^+) - V_k(t_i^-))\right). \end{aligned}$$

Hasta ahora V es un campo variacional arbitrario. Como podemos tomar variaciones que tengan el campo variacional que deseemos, tomemos V adecuado para obtener información sobre σ.

En primer lugar consideremos el campo $V(t) = \sum_k V_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}$ con cada coeficiente $V_k(t) = f(t)(\ddot{\sigma_k} + 2G^k(\sigma,\dot\sigma))$, donde f es una función que se anula en t_i para todo i, y positiva en el resto del intervalo. Reemplazando en la fórmula anterior,

$$\begin{aligned} 0 = L'(0) &= -\int_a^b \frac{1}{\lambda} \sum_{j,k} g_{jk}(\ddot{\sigma_j} + 2G^j(\sigma,\dot{\sigma}))(\ddot{\sigma_k} + 2G^k(\sigma,\dot{\sigma}))dt \\ &= -\int_a^b \frac{1}{\lambda} g_{(\sigma,\dot{\sigma})}((\ddot{\sigma_j} + 2G^j(\sigma,\dot{\sigma})),(\ddot{\sigma_j} + 2G^j(\sigma,\dot{\sigma}))). \end{aligned}$$

Luego, $g_{(\sigma,\dot{\sigma})}((\ddot{\sigma_j}+2G^j(\sigma,\dot{\sigma})),(\ddot{\sigma_j}+2G^j(\sigma,\dot{\sigma}))) = 0$, y como $g_{(\sigma,\dot{\sigma})}$ es un producto interno, $\ddot{\sigma_j} + 2G^j(\sigma,\dot{\sigma}) = 0$.

Observemos que por lo anterior,

$$L'(0) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{j,k} g_{jk}(\dot{\sigma_j}(t_i^+) - \dot{\sigma_j}(t_i^-))(V_k(t_i^+) - V_k(t_i^-)) \right).$$

Sólo falta comprobar que σ es una curva diferenciable y no a trozos. Tomemos $V(t) = \sum_k V_k(t)\frac{\partial}{\partial x_k}$ tal que $V_k(t_i^+) = \dot{\sigma_k}(t_i^+)$ $V_k(t_i^-) = \dot{\sigma_k}(t_i^-)$ en cada uno de ellos. Así, tenemos que

$$\sum_i g_{(\sigma,\dot{\sigma})}(\dot{\sigma_k}(t_i^+) - \dot{\sigma_k}(t_i^-), \dot{\sigma_k}(t_i^+) - \dot{\sigma_k}(t_i^-)) = 0$$

Como g_σ es un producto interno, esto implica que cada diferencia es nula, por lo que σ es diferenciable. □

Probamos entonces que una curva minimizante es necesariamente una geodésica. Así como en la geometría riemanniana, las geodésicas no serán siempre minimizantes pero sí localmente.

Proposición 3.7. *Cualquier geodésica σ es localmente minimizante. En otras palabras, para cada t_0 en el dominio de σ existe un entorno tal que el camino más corto entre $\sigma(d)$ y $\sigma(e)$ es la misma curva σ para todo e y d en dicho entorno.*

No haremos la demostración aquí ya que es muy larga y no demasiado distinta del caso riemanniano. Para una demostración completa puede consultarse la Sección 3 del Capítulo 6 de [2].

3.2. Transporte Paralelo

El concepto de paralelismo es natural en las métricas de Finsler. Daremos dos nociones distintas de vectores paralelos y veremos qué propiedades podemos deducir de cada una de ellas.

Sea (M,F) una variedad de Finsler, $c(t)$ una curva en M y $U(t) = \sum_i U_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un campo a lo largo de c, definimos la derivada covariante lineal de U a lo largo de c como

$$D_{\dot{c}}U(t) = \sum_i \left(\dot{U}_i(t) + \sum_j U_j(t) N_j^i(c(t),\dot{c}(t)) \right) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{c(t)}.$$

$D_{\dot{c}}U$ es un campo bien definido a lo largo de c, independiente del sistema de coordenadas. Es directo que $D_{\dot{c}}$ es lineal y que además vale la regla de Leibniz, $D_{\dot{c}}(fU) = f'U + fD_{\dot{c}}U$. El nombre derivada covariante lineal viene del hecho que el operador es lineal, mientras que la otra noción de derivada covariante no lo será.

Decimos que un campo a lo largo de c es linealmente paralelo si $D_{\dot{c}}U = 0$, es decir,

$$\dot{U}_i(t) + \sum_j U_j(t) N^i_j(c(t), \dot{c}(t)) = 0.$$

Tomemos el campo $U(t) = (c(t), \dot{c}(t))$, bien definido a lo largo de c. Si es linealmente paralelo, teniendo en cuenta que $\sum_j y_j N^i_j = 2G^i$, tenemos que

$$0 = \ddot{c}_i(t) + \sum_j c_j(t) N^i_j(c(t), \dot{c}(t)) = \ddot{c}_i(t) + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)).$$

Luego, una geodésica es una curva cuyo campo de velocidades es linealmente paralelo a lo largo de la misma.

Recordemos del capítulo anterior la definición de derivada covariante de un tensor en TM_0. Específicamente, si $T = \sum_{i,j} T_{ij} dx_i \otimes dx_j$, notamos

$$dT_{ij} - \sum_k T_{kj}\omega^k_i - \sum_k T_{ik}\omega^k_j = \sum_l T_{ij|l} dx_l + \sum_l T_{ij\cdot k}\delta y_l.$$

Si componemos con el campo de velocidades de una geodésica σ, tenemos que

$$\begin{aligned} T_{ij|k} &= \sum_l \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_l}\dot{\sigma}_l + \sum_l \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_l}\ddot{\sigma}_l - \sum_l T_{lj}N^l_i - \sum_l T_{il}N^l_j \\ &= \sum_l \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_l}\dot{\sigma}_l - \sum_l 2G^l \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_l} - \sum_l T_{lj}N^l_i - \sum_l T_{il}N^l_j. \end{aligned}$$

Sean $U(t)$ y $V(t)$ dos campos paralelos a lo largo de σ geodésica. Si llamamos $T(t)$ a evaluar T en U y V a lo largo de σ, tenemos que

$$T(t) = T_{(\sigma,\dot{\sigma})}(U, V) = \sum_{i,j} T_{ij}(\sigma, \dot{\sigma}) U_i V_j.$$

Derivando esta función,

$$\begin{aligned}
T'(t) &= \sum_{i,j}\left(\sum_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\dot{\sigma}_k U_i V_j\right) + \left(\sum_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k}\ddot{\sigma}_k U_i V_j\right) + T_{ij}\dot{U}_i V_j + T_{ij} U_i \dot{V}_j \\
&= \sum_{i,j}\left(\sum_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\dot{\sigma}_k U_i V_j\right) - \left(\sum_k 2G^k \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k} U_i V_j\right) \\
&\quad - \left(\sum_k T_{ij} N^i_k U_k V_j\right) - \left(\sum_k T_{ij} U_i N^j_k V_k\right) \\
&= \sum_{i,j}\left(\sum_k \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}\dot{\sigma}_k - 2G^k \frac{\partial T_{ij}}{\partial y_k} - T_{kj} N^k_i - T_{ik} N^k_j\right) U_i V_j \\
&= \sum_{i,j,k} T_{ij|k}\dot{\sigma}_k U_i V_j.
\end{aligned}$$

Gracias a la cuenta anterior y a que para cada k tenemos que $g_{ij|k} = 0$, como probamos en el Ejemplo 2.9, tenemos el siguiente lema.

Lema 3.8. *Sea $\sigma(t)$ una geodésica en una variedad de Finsler (M, F), y $U(t)$ y $V(t)$ campos paralelos a lo largo de σ. Tenemos entonces que*

$$g_{\dot{\sigma}(t)}(U(t), V(t)) = \textit{constante}.$$

Luego, el ángulo entre U y V y sus normas con respecto a g se mantienen constantes a lo largo de σ.

Definamos ahora otra noción de paralelismo. Dados c curva y U campo a lo largo de c como antes, definimos la derivada covariante como

$$\nabla_{\dot{c}} U(t) = \sum_i \left(\dot{U}_i(t) + \left(\sum_j \dot{c}_j(t) N^i_j(c(t), U(t))\right)\right) \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{c(t)}.$$

La derivada covariante ∇ está bien definida y no depende del sistema de coordenadas, pero no tiene las propiedades de linealidad que cumplía D.

Decimos que U campo a lo largo de c es paralelo si $\nabla_{\dot{c}} U = 0$. Es decir, si para cada i

$$\dot{U}_i + \sum_j \dot{c}_j(t) N^i_j(c(t), U(t)) = 0. \tag{3.1}$$

Lema 3.9. *Sean c una curva en (M, F) variedad de Finsler y U_0 un vector en $T_{c(0)}M$. Existe entonces un campo paralelo U a lo largo de c tal que $U(0) = U_0$.*

Demostración. Esta demostración es análoga a demostrar que por todo punto pasa una geodésica con velocidad arbitraria, ya que consiste en resolver una ecuación diferencial ordinaria con valores iniciales. $\square$

Si tomamos nuevamente el campo de velocidades de la curva, tenemos que $(c, \dot{c})$ es paralelo a lo largo de c si

$$0 = \ddot{c}_i(t) + \sum_j c_j(t) N_j^i(c(t), \dot{c}(t)) = \ddot{c}_i(t) + 2G^i(c(t), \dot{c}(t)).$$

Por lo tanto, una geodésica es una curva cuyo campo de velocidades es paralelo a lo largo de la misma. Podemos usar entonces tanto la derivada covariante como la derivada covariante lineal para detectar curvas geodésicas.

Aunque los campos paralelos no necesariamente conservan su ángulo, sí conservan su norma.

Lema 3.10. *Sean c una curva en (M, F) una variedad de Finsler y $U = \sum_i U_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ un campo paralelo a lo largo de c. Entonces*

$$F(c(t), U(t)) = \textit{constante}.$$

Demostración. Probemos que $F^2(c(t), U(t)) = \sum_{i,j} g_{ij}(c(t), U(t)) U_i U_j$ es constante, usando que los coeficientes de Cartan contraidos con y_i se anula, y las ecuaciónes (2.4) y (3.1).

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(F^2(c, U)) &= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j} g_{ij}(c(t), U(t)) U_i U_j\right) \\
&= \sum_{i,j}\left(\sum_m \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m}\dot{c}_m U_i U_j + \sum_m \frac{\partial g_{ij}}{\partial y_m}\dot{U}_m U_i U_j\right) + 2\sum_{i,k} g_{ik} U_i \dot{U}_k \\
&= \sum_{i,j,k,m} 2 g_{ik}\Gamma^k_{jm}\dot{c}_m U_i U_j + \sum_{i,j,m} 2 C_{ijm}\dot{U}_m U_i U_j - 2\sum_{i,m,k} g_{ik} U_i N^k_m \dot{c}_m \\
&= \sum_{i,k,m} 2 g_{ik} N^k_m \dot{c}_m U_i - \sum_{i,k,m} 2 g_{ik} N^k_m \dot{c}_m U_i = 0.
\end{aligned}$$

Luego, $F(c(t), U(t))$ es constante. □

Podemos definir ahora el transporte paralelo a lo largo de una curva, usando la noción de paralelismo que hemos visto. Gracias a la noción de campos paralelos podremos transportar un vector de un tangente a otro. Es más, cuando nos movamos a lo largo de geodésicas, el ángulo entre el vector y la curva se mantendrá, y como la conexión de Chern es libre de torsión el vector no girará.

Sea $c : [a, b] \to M$ una curva con $c(a) = p$ y $c(b) = q$. Definimos el transporte paralelo a lo largo de c, $P_c : T_pM \to T_qM$ como $P_c(U_0) = U(b)$, donde U es un campo paralelo a lo largo de c con $U(0) = U_0$.

Por el Lema 3.10, el transporte paralelo es un difeomorfismo de T_pM a T_qM. Es más, es positivamente homogéneo, es decir, $P_c(\lambda u) = \lambda P_c(u)$ para todo λ positivo. Sin embargo, no es necesariamente lineal, en el caso que usemos la conexión no lineal.

Capítulo 4

Distorsión, S-Curvatura y el Tensor de Riemann

En este capítulo discutiremos los conceptos de distorsión y S-curvatura, y profundizaremos en el tensor de Riemann definido en el segundo capítulo. La distorsión medirá, para un espacio de Minkowski, qué tan lejos de una métrica euclidiana se encuentra. Para una variedad de Finsler, la S-curvatura nos dará una noción de cómo varía esta distorsión a lo largo de las geodésicas. Por último, haremos algunos cálculos e introduciremos algunos conceptos para el caso particular de los grupos de Lie.

4.1. Distorsión y S-Curvatura

Como ya vimos, en la Observación 1.18, una norma de Minkowski $F = F(y)$ en un espacio vectorial V está caracterizada por su indicatriz. Podemos pensar a la indicatriz como un color, donde el espacio euclídeo está representado por el color blanco. Luego, si tomamos una métrica de Finsler $F = F(x, y)$ en una variedad M, $F_{|T_xM}$ puede pensarse como un patrón infinitesimal de colores. Luego, si por ejemplo todos los espacios tangentes son isométricos entre sí, la variedad está pintada de un sólo color. En particular, como sabemos que todos los espacios vectoriales de una misma dimensión son isométricos entre sí, una variedad riemanniana está pintada completamente de blanco.

Restrinjámonos por un momento a un espacio de Minkowski (V, F), es decir, un espacio vectorial V n-dimensional dotado de una norma de Minkowski F. Recordemos que en el capítulo 2 definimos una forma de volúmen dV_F. Dada una base $\{e_i\}$ de V definimos

$$\sigma_F(V) = \frac{Vol(B^n(1))}{Vol(\{(y_i) \in \mathbb{R}^n / F(\sum y_i e_i) < 1\})}.$$

También introducimos la forma de volumen $dV_F = \sigma_F d\theta_1 \wedge \cdots \wedge d\theta_n$, donde $\{\theta_i\}$ era la base dual a $\{e_i\}$.

Definimos entonces la distorsión como

$$\tau(y) = \ln \frac{\sqrt{det(g_{ij}(y))}}{\sigma_F}.$$

Claramente la distorsión no depende de la base elegida pues $\sqrt{det(g_{ij})}$ y σ_F se transforman de la misma manera, por lo que la distorsión está bien definida.

Si F fuera una norma euclídea,

$$Vol(\{(y_i) \in \mathbb{R}^n / F(\sum y_i e_i) < 1\}) = \frac{Vol(B^n(1))}{\sqrt{\det(g_{ij})}},$$

por lo que $\sigma_F = \sqrt{\det(g_{ij})}$. Luego, en el caso no euclidiano, se puede ver que la distorsión mide cuánto nos alejamos del caso euclidiano. Es más, para una métrica euclidiana, la distorsión es nula.

Como las funciones g_{ij} son invariantes por reescalas positivas, también lo será la distorsión, es decir,

$$\tau(\lambda y) = \tau(y)$$

para todo y no nulo y λ positivo.

Veamos cómo se comportan las derivadas de la distorsión. Como debemos computar las derivadas del determinante, usaremos el siguiente lema del álgebra lineal.

Lema 4.1. *Dada $A = (a_{ij})$ matriz, la función $\det(A)$ es diferenciable en función de sus coeficientes y vale que $\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = C_{ij}$, donde C_{ij} es el cofactor ij. En particular, si $A = A(t)$, vale que*

$$\frac{d}{dt}(\det(A(t))) = \det(A(t)) tr\left(A^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right).$$

Demostración. El determinante es una función polinómica en los coeficientes, por lo que es diferenciable en función de los mismos. Además, el valor de la derivada del mismo en función de los coeficientes es obvio si desarrollamos al determinante por cofactores, entrando por la fila i. Veamos que vale la última igualdad.

$$\begin{aligned}
\det(A(t)) tr\left(A^{-1}\frac{d}{dt}A(t)\right) &= \det(A(t)) tr\left(\frac{Adj(A(t))}{\det(A(t))}\frac{d}{dt}A(t)\right) \\
&= \sum_{i,j} C_{ij}\dot{a_{ij}} = \sum_{i,j}\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}}\dot{a_{ij}} \\
&= \frac{d}{dt}(\det(A(t))).
\end{aligned}$$

□

Teniendo el lema en cuenta,

$$\frac{\partial \tau}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\ln \sqrt{\det(g_{kj})}\right) = \frac{1}{2\det(g_{kj})}\frac{\partial \det(g_{ij})}{\partial y_i} = \frac{1}{2}\sum_{j,k} g^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y_i} = \sum_{j,k} g^{jk}C_{ijk}.$$

Si recordamos el tensor medio de Cartan $I = \sum_i I_i dx_i$ con $I_i = \sum_{j,k} g^{jk}C_{ijk}$, tenemos que

$$\frac{\partial \tau}{\partial y_i} = I_i.$$

Gracias al Teorema 1.22 tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.2. *Dado (V, F) espacio de Minkowski, son equivalentes*

- *F es euclidiana.*
- *τ es constante.*
- *$\tau = 0$.*

Consideremos ahora una métrica de Finsler F en M una variedad n-dimensional. La distorsión está definida en cada espacio tangente $(T_xM, F_{|T_xM})$, por lo que podemos definir la distorsión de F como $\tau : TM_0 \to \mathbb{R}$, $\tau(x, y) = \tau_{T_xM}(y)$.

Por la proposición anterior podemos ver que F proviene de una métrica riemanniana sí y sólo sí $\tau = 0$, por lo que la distorsión caracteriza a las métricas riemannianas entre las métricas de Finsler.

Para estudiar cómo varía la distorsión a lo largo de las geodésicas introduciremos la noción de S-curvatura. Para cada vector $y \in T_xM$ no nulo, sea σ la geodésica que pasa por x a tiempo cero y con velocidad y. Definimos la S-curvatura como

$$S(x, y) = \frac{d}{dt}(\tau(\sigma, \dot{\sigma}))_{|t=0}.$$

La S-curvatura es positivamente homogénea de orden 1 en su segunda coordenada, es decir, $S(x, \lambda y) = \lambda S(x, y)$ para todo λ positivo. Para probarlo, aplicamos la regla de la cadena dos veces:

$$\begin{aligned}
S(x, \lambda y) &= \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_{\lambda y}(t), \dot{\sigma_{\lambda y}}(t)))_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y(\lambda t), \dot{\sigma_y(\lambda t)}))_{|t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y(\lambda t), \lambda\dot{\sigma_y}(\lambda t)))_{|t=0} = \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y(\lambda t), \dot{\sigma_y}(\lambda t)))_{|t=0} \\
&= \lambda\frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y, \dot{\sigma_y}))_{|t=0} = \lambda S(x, y).
\end{aligned}$$

Calculemos más en detalle la S-curvatura. Teniendo en cuenta que σ es geodésica, es decir, $\ddot{\sigma_i} = -2G^i(\sigma, \dot{\sigma})$,

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \frac{d}{dt}(\tau(\sigma,\dot{\sigma}))_{|t=0} = \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\dot{\sigma}_i(0) + \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial y_i}\ddot{\sigma_i}(0) = \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i} y_i - \sum_i 2G^i \frac{\partial \tau}{\partial y_i} \\ &= \sum_i \frac{1}{2\det(g_{kj})}\frac{\partial \det(g_{kj})}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln \sigma_F(x)) - 2\sum_i G^i \frac{\partial \tau}{\partial y_i} \\ &= \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} g^{kl}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} y_i - 2\sum_i G^i I_i - \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(\sigma_F(x)). \end{aligned}$$

Una parte de la expresión es la suma de algunos de los coeficientes de la conexión de F que obtuvimos en (2.6).

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{\partial G^j}{\partial y_j} &= \sum_j N_j^j = \sum_{j,i,k} \frac{1}{2} g^{jk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) y_i - \sum_{j,k,h} 2g^{jk} C_{jkh} G^h \\ &= \sum_{j,i,k} \frac{1}{2} g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} y_i - \sum_h 2 I_h G^h. \end{aligned}$$

Notar que dos de las derivadas parciales de los coeficientes de la forma fundamental se cancelan al sumar en j. Reemplazando en la S-curvatura,

$$\begin{aligned} S(x,y) &= \sum_{i,j,k} \frac{1}{2} g^{kl}\frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} y_i - 2\sum_i G^i I_i - \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(\sigma_F(x)) \\ &= \sum_i \frac{\partial G^i}{\partial y_i} - \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\ln(\sigma_F(x))). \end{aligned}$$

4.2. Tensor de Riemann

Tomemos $\{e_i\}$ marco de $\pi^* TM_0$ y $\{\omega_i\}$ marco dual de $\Pi^* T^* M_0$. En el segundo capítulo habíamos definido el tensor de Riemann $\mathcal{R} = \sum_{i,k} R_k^i e_i \otimes \omega_k$, con R_k^i definido en (2.16). Ya vimos en el Ejemplo 1.8 que el fibrados de los $(1,1)$-tensores es isomorfo al fibrado de endomorfismos del espacio. Podemos entonces pensar al tensor de Riemann como una familia de transformaciones lineales $R_y : T_x M \to T_x M$ definidas como:

$$R_y(v) = \sum_i \left(\sum_k R_k^i(x,y) v_k\right) e_i. \tag{4.1}$$

Llamamos a esta sección la curvatura de Riemann.

Es fácil comprobar que $R_y(y) = 0$, pues como $R_{kl}^i = -R_{lk}^i$, tenemos que

$$\sum_k R_k^i y_k = \sum_{k,l} R_{kl}^i y_k y_l = 0.$$

Además, R es positivamente homogénea de orden 2. Esto se ve al tomar la fórmula obtenida para los R^i_k en (2.16): todos los sumandos son homogéneos de orden 2, aplicando la Proposición 1.12.

Podemos probar también que R_y es autoadjunta con respecto a g_y, es decir, $g_y(R_y(u), v) = g_y(u, R_y(v))$. Daremos por sentado que $\sum_m g_{im}R^m_j = \sum_m g_{jm}R^m_i$. La cuenta para probar esto último surge de diferenciar la condición de casi compatibilidad con la métrica y usar las simetrías obtenidas en el segundo capítulo para los coeficientes del tensor de Riemann. Sin embargo, la cuenta es larga y tediosa, por lo que no la haremos aquí. Podemos encontrar la cuenta resuelta en la Sección 4 del Capítulo 2 de [2].

Asumiendo lo anterior,

$$\begin{aligned}
g_y(R_y(u), v)) &= \sum_{i,j} g_{ij} \left(\sum_k R^i_k u_k \right) v_j = \sum_{j,k} \left(\sum_i g_{ij} R^i_k \right) u_k v_j \\
&= \sum_{j,k} \left(\sum_i g_{ik} R^i_j \right) u_k v_j = \sum_{i,k} g_{ik} u_k \left(\sum_j R^i_j v_j \right) \\
&= g_y(u, R_y(v)).
\end{aligned}$$

Estas tres son las ecuaciones básicas de la curvatura de Riemann.

Vamos a definir, a partir del tensor de Riemann, la curvatura de bandera, análoga a la curvatura seccional en la geometría riemanniana. La diferencia fundamental entre estas dos es que mientras que se aplica la curvatura seccional a una sección planar del espacio tangente, en la curvatura de bandera necesitamos también resaltar un vector particular del mismo. Llamamos una bandera a un par (P, y), donde P es un subespacio de dimensión 2 de T_xM e y es un elemento no nulo de P, y denominamos a y el mástil de la bandera. Con esta notación, definimos la curvatura de bandera:

$$K(P, y) = \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2},$$

donde u es un vector de P linealmente independiente con y.

Veamos que la curvatura de bandera no depende de la elección de u. Dado v otro vector de P linealmente independiente con y, escribimos a $u = \alpha y + \beta v$. Luego,

$$\begin{aligned}
K(P, y) &= \frac{g_y(R_y(u), u)}{g_y(y, y)g_y(u, u) - g_y(y, u)^2} \\
&= \frac{g_y(\alpha R_y(y) + \beta R_y(v), \alpha y + \beta v)}{g_y(y, y)(\alpha^2 g_y(y, y) + \beta^2 g_y(v, v) + 2\alpha\beta g_y(y, v)) - (\alpha g_y(y, y) + \beta g_y(y, v))^2} \\
&= \frac{\alpha\beta g_y(R_y(v), y) + \beta^2 g_y(R_y(v), v)}{\beta^2 g_y(y, y)g_y(v, v) - \beta^2 g_y(y, v)^2} = \frac{\alpha\beta g_y(v, R_y(y)) + \beta^2 g_y(R_y(v), v)}{\beta^2 g_y(y, y)g_y(v, v) - \beta^2 g_y(y, v)^2} \\
&= \frac{\beta^2 g_y(R_y(v), v)}{\beta^2 g_y(y, y)g_y(v, v) - \beta^2 g_y(y, v)^2} = \frac{g_y(R_y(v), v)}{g_y(y, y)g_y(v, v) - g_y(y, v)^2}.
\end{aligned}$$

En una variedad de Finsler de dimensión 2, $P = T_xM$ es todo el espacio tangente, por lo que $K = K(x, y)$ es una función escalar en TM_0 llamada la curvatura de Gauss.

Definimos la curvatura de Ricci como la traza de la curvatura de Riemann, es decir, $Ric(y) = tr(R_y)$. En un sistema de coordenadas local, tenemos por (4.1) que

$$Ric(y) = \sum_i R^i_i(x, y).$$

Podemos describir a la curvatura de Ricci a partir de la curvatura de bandera.

Proposición 4.3. *Dado y en T_xM, sean $v_1, \cdots, v_{n-1}$ tales que $\{y, v_1, \cdots, v_{n-1}\}$ es una base g_y ortogonal de T_xM. Entonces,*

$$\frac{Ric(y)}{F^2(y)} = \sum_{i=1}^{n-1} K(y \wedge v_i).$$

Demostración. Podemos suponer que v_i son ortonormales, pues sino

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} K(y \wedge v_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_y(R_y(v_i), v_i)}{g_y(y, y)g_y(v_i, v_i) - g_y(y, v_i)^2} \\ &= \frac{1}{F^2(y)} \sum_{i=1}^{n-1} g_y(R_y(\frac{v_i}{\sqrt{g_y(v_i, v_i)}}), \frac{v_i}{\sqrt{g_y(v_i, v_i)}}).\end{aligned}$$

Luego, si llamamos $v_n = y$, teniendo en cuenta entonces que $R_y(v_n) = 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} K(y \wedge v_i) &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_y(R_y(v_i), v_i)}{g_y(y, y)g_y(v_i, v_i) - g_y(y, v_i)^2} \\ &= \frac{1}{F^2(y)} \sum_{i=1}^{n-1} g_y(R_y(v_i), v_i) = \frac{1}{F^2(y)} \sum_{i=1}^{n} g_y(R_y(v_i), v_i) \\ &= \frac{1}{F^2(y)} tr(R_y).\end{aligned}$$

□

La proposición anterior nos dice que la curvatura de Ricci en un vector tangente y es la suma de todas las curvaturas de bandera que tienen como mástil a y, eligiendo la tela de la bandera de forma que queden planos ortogonales entre sí.

Definición 4.4. *Decimos que F es de curvatura escalar de bandera si $K(P, y)$ es una función escalar en TM_0. Una variedad de Finsler (M, F) se dice variedad de Einstein-Finsler si existe una función escalar $K(x)$ en M tal que $Ric = (n-1)KF^2$.*

4.3. La Curvatura en un Grupo de Lie

Sea (M, F) una variedad de Finsler, y supongamos, como en el Capítulo 2 que M es un grupo de Lie G, y que la métrica F es invariante a izquierda, como definimos en (2.17). Recordemos que por la invarianza, la forma fundamental y las cantidades definidas en los capítulos anteriores no dependían del punto del grupo, por lo que podíamos calcularlas en el álgebra de Lie de G.

Ya obtuvimos los coeficientes del tensor de Riemann en (2.19), donde vimos que

$$R^i_j = \sum_k 2G^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y_k} - \sum_k N^i_k N^k_j - \sum_{k,l} N^i_k \lambda^k_{jl} y_l + \sum_{k,l} N^k_j \lambda^i_{kl} y_l.$$

Veamos cómo se comporta la curvatura de Ricci en este caso particular.

$$\begin{aligned} Ric = \sum_i R^i_i &= \sum_i \left(\sum_k 2G^k \frac{\partial N^i_i}{\partial y_k} - \sum_k N^i_k N^k_i - \sum_{k,l} N^i_k \lambda^k_{il} y_l + \sum_{k,l} N^k_i \lambda^i_{kl} y_l \right) \\ &= \sum_{i,k} \left(2G^k \frac{\partial N^i_i}{\partial y_k} - N^i_k N^i_i \right). \end{aligned}$$

Podemos entonces escribir a la curvatura de Ricci en función de F y las constantes de estructura. Sin embargo, esta escritura depende de la base de $\mathcal{G}$ que hayamos elegido, por lo que introduciremos algunas definiciones para poder describir estos elementos independientemente de la base.

Proposición 4.5. *Dado un mástil de bandera y, existe un único vector $\eta \in \mathcal{G}$ tal que*

$$g_y(\eta, v) = g_y(y, [v, y])$$

para todo v elemento de $\mathcal{G}$. Llamamos a η el vector del spray asociado a y.

Demostración. Escribimos a $v = \sum_i v_i e_i$, $y = \sum_i y_i e_i$. Luego,

$$[v, y] = \sum_{i,j,k} \lambda^k_{ij} v_i y_j e_k.$$

Siguiendo, η debe cumplir que

$$g_y(\eta, v) = \sum_{i,j,k,l} g_{kl} y_l \lambda^k_{ij} v_i y_j.$$

El vector del spray queda unívocamente determinado, por el teorema de representación de Riesz. Una cuenta directa demuestra que $\eta = 2\sum_i G^i e_i$:

$$\begin{aligned} g_y(\eta, v) &= g_y(2\sum_i G^i e_i, v) = g_y(\sum_{i,k,j,l,h} g_{lk} g^{hi} \lambda^k_{ij} y_l y_j e_h, v) \\ &= \sum_{i,m,k,j,l,h} g_{hm} g_{lk} g^{hi} \lambda^k_{ij} y_l y_j v_m = \sum_{i,k,j,l} g_{lk} \lambda^k_{ij} y_l y_j v_i. \end{aligned}$$

□

Si pensamos a $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ como una variedad diferenciable e identificamos el espacio tangente en y con $\mathcal{G}$, tenemos que $\eta=\eta(y)$ es un campo vectorial.

El vector del spray está caracterizado tambien por la siguiente propiedad, que no demostraremos. El resultado es un Corolario directo del Teorema 3.1 de [11].

Proposición 4.6. *El vector del spray η se anula para un mástil $y\in\mathcal{G}$ si y sólo si la geodésica que pasa por la identidad a tiempo cero con velocidad y está dada por $\sigma(t)=\exp(ty)$, con $t\in\mathbb{R}$.*

Como ya vimos en la Observación 3.4, para t positivo la igualdad siempre vale. Intuitivamente, el vector del spray mide el desvío de la geodésica con respecto a la curva exponencial $\sigma(t)=\exp(ty)$ para t negativo.

Proposición 4.7. *Dado un mástil $y\in\mathcal{G}$, existe un único operador lineal N en $\mathcal{G}$ tal que*

$$2g_y(N(v),u)=g_y([u,v],y)+g_y([v,y],u)+g_y([u,y],v)-2C_y(u,v,\eta).$$

Llamamos a N el operador de la conexión en y.

Demostración. Como en el caso del vector del spray, el operador queda unívocamente determinado por el teorema de representación de Riesz. Propongamos $N(v)=\sum_{i,k}N^i_k v_k e_i$ y veamos que verifica lo pedido.

$$\begin{aligned}
2g_y(N(v),u)&=2\sum_{i,j,k}g_{ij}N^i_k v_k u_j\\
&=\sum_{i,j,k}g_{ij}\left(\sum_l\lambda^i_{kl}y_l+\sum_{r,l,h}g_{kl}g^{ih}\lambda^l_{hr}y_r+\sum_{r,l,h}g_{rl}g^{ih}\lambda^l_{hk}y_r-\sum_{h,l}4g^{ih}C_{ilk}G^l\right)v_k u_j\\
&=\sum_{i,j,kl}g_{ij}\lambda^i_{kl}y_l v_k u_j+\sum_{j,k,r,l}g_{kl}\lambda^l_{jr}y_r v_k u_j+\sum_{j,k,r,l}g_{rl}\lambda^l_{jk}y_r v_k u_j-4\sum_{j,k,l}C_{jlk}G^l v_k u_j\\
&=\sum_{i,j,k,l}(g_{kl}\lambda^k_{ij}u_i v_j y_l+g_{kl}\lambda^k_{ij}v_i y_j u_l+g_{kl}\lambda^k_{ij}u_i y_j v_l)-4\sum_{i,j,k}C_{ijk}u_i v_j G^k\\
&=g_y([u,v],y)+g_y([v,y],u)+g_y([u,y],v)-2C_y(u,v,\eta),
\end{aligned}$$

donde, en la anteúltima ecuación, cambiamos los índices para que quedara más ordenado, tomando en cuenta la simetría de g_{ij} y C_{ijk}. □

Pensemos nuevamente a $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ como una variedad diferenciable e identificamos el espacio tangente en y con $\mathcal{G}$. Como N está definido para cada $y\in\mathcal{G}\setminus\{0\}$, tenemos que N es una sección del fibrado $End(T(\mathcal{G}\setminus\{0\}))$. Más aún, si tomamos la identificación del espacio de endomorfismos de $\mathcal{G}$ con el producto tensorial $\mathcal{G}\otimes\mathcal{G}^*$ del Ejemplo 1.8, podemos pensar a N como un $(1,1)$-tensor.

Podemos definir una conexión lineal D en $\mathcal{G}\setminus\{0\}$ cuya acción es simplemente derivar direccionalmente. Entonces, $D_\eta N$ es un $(1,1)$-tensor definido por

$$D_\eta N=\sum_{i,j}\left(\sum_k 2G^k\frac{\partial N^i_j}{\partial y_k}\right)e_i\otimes\omega_j.$$

Tomando nuevamente la identificación anterior, pensamos a $D_\eta N$ como un operador lineal en $\mathcal{G}$, que se anula si $\eta = 0$. De esta forma,

$$D_\eta N(v) = \sum_i \left(\sum_{j,k} 2G^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y_k} v_j \right) e_i.$$

Con estas definiciones, podemos expresar las formulas del tensor de Riemann y de la curvatura de Ricci en función del vector del spray y del operador de la conexión.

Proposición 4.8. *Sea F una métrica de Finsler invariante a izquierda en un grupo de Lie G. Sean $y \in \mathcal{G}$ un mástil, η el vector del spray, N el operador de la conexión asociados a y. Entonces, podemos expresar al tensor de Riemann y a la curvatura de Ricci de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} R_y &= D_\eta N - N^2 + [N, ad(y)], \\ Ric(y) &= D_\eta(tr(N)) - tr(N^2). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Demostración. Veamos la primera igualdad. Para ello, veamos que ambos operadores se comportan de la misma manera sobre una base $\{e_i\}$ de $\mathcal{G}$. Teniendo en cuenta que:

$$ad(y)(e_j) = [y, e_j] = \sum_i y_i [e_i, e_j] = \sum_k \left(\sum_i y_i \lambda^k_{ij} \right) e_k,$$

verificamos la primera igualdad:

$$\begin{aligned}
(D_\eta N - N^2 + [N, ad(y)])(e_j) &= D_\eta N(e_j) - N^2(e_j) + N(ad(y)(e_j)) - ad(y)(N(e_j)) \\
&= \sum_i \left(\sum_k 2G^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y_k} \right) e_i - N \left(\sum_k N^k_j e_k \right) \\
&\quad + N \left(\sum_k \left(\sum_l y_l \lambda^k_{lj} \right) e_k \right) - ad(y) \left(\sum_k N^k_j e_k \right) \\
&= \sum_i \left(\sum_k 2G^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y_k} \right) e_i - \sum_i \left(\sum_k N^k_j N^i_k \right) e_i \\
&\quad + \sum_i \left(\sum_{l,k} y_l \lambda^k_{lj} N^i_k \right) e_i - \sum_i \left(\sum_{k,l} N^k_j y_l \lambda^i_{lk} \right) e_i \\
&= \sum_i \left(\sum_k 2G^k \frac{\partial N^i_j}{\partial y_k} - \sum_k N^k_j N^i_k + \sum_{l,k} y_l \lambda^k_{lj} N^i_k - \sum_{k,l} N^k_j y_l \lambda^i_{lk} \right) e_i \\
&= R_y(e_j).
\end{aligned}$$

Para verificar la segunda igualdad, simplemente tenemos que aplicar la traza al operador R_y. Luego,

$$Ric(y) = tr(R_y) = tr(D_\eta N) - tr(N^2) + tr([N, ad(y)]).$$

Calculemos $tr(D_\eta N)$.

$$tr(D_\eta N) = \sum_{i,k} 2G^k \frac{\partial N_i^i}{\partial y_k} = D_\eta \left(\sum_i N_i^i \right) = D_\eta(tr(N)).$$

Sabemos de álgebra lineal que $tr(AB) = tr(BA)$ para cada par A, B de operadores, por lo que la traza se anula en el conmutador. Es más, el conmutador es exactamente el núcleo de la traza, pero no lo probaremos aquí. Con esto, podemos verificar que

$$Ric(y) = tr(R_y) = tr(D_\eta N) - tr(N^2) + tr([N, ad(y)]) = D_\eta(tr(N)) - tr(N^2).$$

□

Podemos también relacionar estos dos elementos con la distorsión y la S-curvatura.

Proposición 4.9. *Sea F una métrica de Finsler invariante a izquierda en un grupo de Lie G. Dado $y \in \mathcal{G}$ no nulo, la S-curvatura de F está dada por*

$$S(y) = tr(N) + tr(ad(y)).$$

Demostración. Como la métrica F es invariante a izquierda, tenemos que los difeomorfismos L_g definidos por $L_g(h) = gh$ son también una isometría entre los espacios tangentes, es decir, el diferencial $(L_g)_{*,e}$ es una isometría entre los espacios T_eG y T_gG para cada elemento g del grupo. Por lo tanto, todos los espacios tangentes son espacios de Minkowski isométricos entre sí. Mas aún, si tomamos el marco global dado por $\{e_i\}$ una base de $\mathcal{G}$ el álgebra de Lie del grupo, tenemos que la función $\sigma_F(x) = Vol\{(y_i) \in \mathbb{R}^n : F(\sum_i y_i e_i) < 1\}$ y los coeficientes de la forma fundamental g_{ij}, son constantes en función del punto de G, gracias a la invarianza a izquierda de los campos e_i y de F.

Recordemos que la distorsión estaba definida como

$$\tau(x, y) = \ln \left(\frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma_F(x)} \right).$$

Luego, la distorsión tampoco depende del punto de G. La S-curvatura es el cambio de la distorsión a lo largo de las geodésicas, es decir,

$$S(x, y) = \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y, \dot{\sigma_y}))|_{t=0},$$

donde σ_y es la geodésica que pasa por x a velocidad y en tiempo 0.

Teniendo en cuenta que la distorsión no depende del punto de G, calculemos la S-curvatura:

$$S(x,y) = \frac{d}{dt}(\tau(\sigma_y, \dot{\sigma_y}))|_{t=0} = \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial x_i}\dot{\sigma}(0) + \sum_i \frac{\partial \tau}{\partial y_i}\ddot{\sigma}(0) = -2\sum_i G^i I_i.$$

La traza del operador $ad(y)$ es fácil de calcular. Tenemos que

$$tr(ad(y)) = \sum_{i,j} y_j \lambda^i_{ji} = -\sum_{i,j} y_j \lambda^i_{ij}.$$

Finalmente, calculemos la traza de N:

$$\begin{aligned} tr(N) &= \sum_i N^i_i \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} y_j \lambda^i_{ij} + \sum_{i,j,l,h} g_{il} g^{ih} \lambda^l_{hj} y_j + \sum_{i,j,l,h} g_{jl} g^{ih} \lambda^l_{hi} y_j - \sum_{i,j,h} 4 g^{ih} C_{hji} G^j\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j} \lambda^i_{ij} y_j + \sum_{j,l} \lambda^l_{lj} y_j + \sum_{j,l}\left(\sum_{i,h} g^{ih}\lambda^l_{ih}\right) g_{jl} y_j - 4\sum_j I_j G^j\right) \\ &= \sum_{i,j} \lambda^i_{ij} y_j - 2\sum_j I_j G^j, \end{aligned}$$

donde $\sum_{i,h} g^{ih}\lambda^l_{ih} = 0$ por la conmutatividad de g^{ij} y la anticonmutatividad de λ^k_{ij} en sus supraíndices y subíndices respectivamente. Juntando los resultados,

$$tr(N) + tr(ad(y)) = \sum_{i,j} \lambda^i_{ij} y_j - 2\sum_j I_j G^j - \sum_{i,j} y_j \lambda^i_{ij} = -2\sum_j I_j G^j = S(x,y).$$

$\square$

Capítulo 5

Curvatura de Ricci en Métricas de Finsler Invariantes a Izquierda

En este último capítulo pasaremos a demostrar los principales lemas y teoremas de la tesis. Los mismos se basan en el paper por Libing Huang [8].

Durante el capítulo supondremos que (G, F) es un grupo de Lie dotado de F una métrica de Finsler invariante a izquierda.

El resultado principal que queremos demostrar es que no existen grupos de Lie nilpotentes y no conmutativos, dotados de una métrica de Finsler invariante a izquierda de Einstein-Finsler. Recordemos que una métrica se dice de Einstein-Finsler si existe una función escalar K tal que $Ric = (n-1)KF^2$. Luego, basta con probar que existen dos direcciones en $\mathcal{G}$ con curvatura de Ricci de distinto signo. Encontraremos estas dos direcciones a partir del conmutador y del centro de $\mathcal{G}$, usando que como el grupo es no conmutativo $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ es distinto del espacio nulo.

5.1. Resultados Principales

Encontraremos una de las dos direcciones que necesitamos dentro del centro de $\mathcal{G}$. Recordemos que, por la anticonmutatividad del corchete, el centro de un álgebra de Lie $\mathcal{A}$ son los elementos u tales que $[u, v] = 0$ para todo v en $\mathcal{A}$, o lo que es equivalente, son los elementos u en $\mathcal{A}$ tales que el operador $ad(u)$ es el operador nulo. Probemos primero un lema sobre cómo se comporta el operador de la conexión en dicho centro.

Lema 5.1. *Sean G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Si un mástil $y \in \mathcal{G}$ pertenece al centro de $\mathcal{G}$, entonces el operador de la conexión N es antisimétrico con respecto a g_y, y se cumple la igualdad*

$$g_y(R_y(v), v) = g_y(N(v), N(v))$$

para cada $v \in \mathcal{G}$.

Demostración. Como y pertenece al centro de $\mathcal{G}$, tenemos que $[y,v]=0$ para todo v. Luego, por definición del vector del spray, para cada v

$$g_y(\eta, v) = g_y(y,[v,y]) = g_y(y,0) = 0.$$

Por lo tanto, el vector del spray en la dirección y es nulo. Si ponemos esta información en la definición del operador de la conexión, el mismo está determinado por

$$2g_y(N(v),u) = g_y([u,v],y)+g_y([v,y],u)+g_y([u,y],v)-2C_y(u,v,\eta) = g_y([u,v],y).$$

Permutando u y v en esta igualdad y dividiendo por dos, obtenemos que

$$g_y(N(u),v) = g_y([v,u],y) = -g_y([u,v],y) = -g_y(N(v),u) = g_y(u,-N(v)).$$

Es decir, N es antisimétrico. Además, como $\eta = 0$, tenemos que $D_\eta N = 0$, y como y pertenece al centro de $\mathcal{G}$, $[N, ad(y)] = 0$. Por lo tanto, reemplazando en (4.2), obtenemos que $R_y = -N^2$. Luego,

$$g_y(R_y(v),v) = g_y(-N^2(v),v) = g_y(N(v),N(v)),$$

terminando de probar el lema. □

Con este lema podemos probar un corolario que nos dará nuetra primera dirección.

Corolario 5.2. *Sean G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Si un mástil $y \in \mathcal{G}$ pertenece al centro de $\mathcal{G}$, entonces para cualquier métrica invariante a izquierda F, la curvatura de Ricci en la dirección y es no negativa, y es nula sí y sólo sí y es g_y-ortogonal a $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$ el conmutador de $\mathcal{G}$.*

Demostración. Ya vimos en el lema anterior que si y pertenece al centro de $\mathcal{G}$ tenemos que $2g_y(N(v),u) = g_y([u,v],y)$ y $g_y(R_y(v),v) = g_y(N(v),N(v))$ para todo $u,v \in \mathcal{G}$. Calculemos la curvatura de Ricci en la dirección y, tomando $\{v_i\}$ una base g_y-ortonormal:

$$Ric(y) = tr(R_y) = \sum_i g_y(R_y(v_i),v_i) = \sum_i g_y(N(v_i),N(v_i)) \geq 0,$$

pues g_y es un producto interno. Es más, la curvatura de Ricci es nula sí y sólo sí $N(v_i) = 0$ para todo i, es decir, si N es el operador nulo. Esto es equivalente a que $g_y(N(v),u) = 0$ para todo u, v, y esto sucede si y sólo si

$$g_y([u,v],y) = 2g_y(N(v),u) = 0.$$

Por lo tanto, equivale a pedir que y sea g_y-ortogonal a $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$. □

La segunda dirección la encontraremos en un complemento ortogonal del conmutador, como se prueba en el siguiente lema.

Lema 5.3. *Sean G un grupo de Lie y $\mathcal{G}$ su álgebra de Lie. Si un mástil $y \in \mathcal{G}$ es g_y-ortogonal al conmutador $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, entonces el vector del spray η es nulo y el operador de la conexión N es autoadjunto. Mas aún, la curvatura de Ricci en la dirección y es no positiva, donde la nulidad se alcanza sí y sólo sí el operador $ad(y)$ es antisimétrico con respecto a g_y.*

Demostración. Como y es g_y-ortogonal al conmutador, tenemos que

$$g_y(\eta, v) = g_y(y, [v, y]) = 0.$$

Luego, el vector del spray es nulo. Tenemos entonces que N satisface:

$$\begin{aligned} 2g_y(N(v), u) &= g_y([u, v], y) + g_y([v, y], u) + g_y([u, y], v) - 2C_y(u, v, \eta) \\ &= g_y([v, y], u) + g_y([u, y], v). \end{aligned}$$

Permutando u y v y dividiendo por dos,

$$g_y(N(u), v) = g_y([u, y], v) + g_y([v, y], u) = g_y(N(v), u) = g_y(u, N(v)).$$

Por lo tanto, N es autoadjunto. En particular, N es diagonalizable. Sea A la matriz del operador N, y $A = CDC^{-1}$ la diagonalización de A. Elevando al cuadrado, $A^2 = CD^2C^{-1}$, y como D es diagonal, D^2 también lo será (con los elementos de D en la diagonal elevados al cuadrado), por lo que es la diagonalización de A^2. En particular, la traza de N^2, que es igual a la traza de A^2, es la suma de los autovalores de la misma, que por lo anterior son no negativos. En particular, la traza de N^2 es nula si y sólo si todos los autovalores de N son nulos, si y sólo si N es nulo, al ser diagonalizable.

Ahora, como $\eta = 0$, $D_\eta N = 0$, y $Ric(y) = tr(-N^2)$, que por lo anterior es no positiva y se anula sí y sólo si $N = 0$. En dicho caso, tenemos que

$$g_y(ad(y)(u), v) = -g_y([u, y], v) = g_y([v, y], u) = g_y(u, -ad(y)(v)),$$

probando que $ad(y)$ es antisimétrico. Inversamente, si $ad(y)$ es antisimétrico,

$$g_y(N(u), v) = g_y([u, y], v) + g_y([v, y], u) = 0,$$

por lo que $N = 0$. □

Pasemos a probar el resultado principal de la tesis. Decimos que un grupo de Lie G es nilpotente si su álgebra de Lie $\mathcal{G}$ lo es, es decir, si algún término de la serie

$$\mathcal{G} \supset [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \supset [\mathcal{G}, [\mathcal{G}, \mathcal{G}]] \supset \cdots \tag{5.1}$$

se anula.

Recordemos también que un grupo de Lie G conexo es conmutativo si y sólo si tiene un álgebra de Lie conmutativa, es decir G conmutativo si y sólo si $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = 0$, ver el Corolario 2.13.3 de libro [14] para una demostración.

Teorema 5.4. *Supongamos que G es un grupo de Lie nilpotente pero no conmutativo. Entonces, para cualquier métrica invariante a izquierda en G hay una dirección con curvatura de Ricci positiva y una dirección con curvatura de Ricci negativa. En particular, G no admite ninguna métrica de Einstein-Finsler invariante a izquierda.*

Demostración. Como G es nilpotente, algún término de la serie (5.1) debe anularse. Sea u un vector distinto de cero del último término no nulo de dicha serie. Tenemos entonces que u pertenece al centro de $\mathcal{G}$, que notaremos $\mathcal{Z}$. Además, como G es no conmutativo, este último término no es $\mathcal{G}$, por lo que u está también contenido en $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$. En particular, no es g_y-ortogonal a $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$. Luego, por el Corolario 5.2, $Ric(u) > 0$. Encontramos entonces una dirección con curvatura de Ricci positiva.

Probemos que $[\mathcal{G},\mathcal{G}] + \mathcal{Z}$ es un subespacio propio de $\mathcal{G}$. En caso contrario, si $\mathcal{G} = [\mathcal{G},\mathcal{G}] + \mathcal{Z}$, tendríamos que

$$[\mathcal{G},\mathcal{G}] = [\mathcal{G},[\mathcal{G},\mathcal{G}] + \mathcal{Z}] = [\mathcal{G},[\mathcal{G},\mathcal{G}]] + [\mathcal{G},\mathcal{Z}] = [\mathcal{G},[\mathcal{G},\mathcal{G}]].$$

Luego, como algún término de la serie (5.1) debe anularse, tenemos que $[\mathcal{G},\mathcal{G}] = 0$, lo que es absurdo pues G no es conmutativo.

Existe entonces, por el Corolario 1.21, un vector no nulo y tal que y es g_y-ortogonal a $[\mathcal{G},\mathcal{G}] + \mathcal{Z}$.

Tenemos entonces que, como $[\mathcal{G},\mathcal{G}] \subset [\mathcal{G},\mathcal{G}]+\mathcal{Z}$, y es g_y-ortogonal a $[\mathcal{G},\mathcal{G}]$. Luego, por el Lema 5.3, $Ric(y) \geq 0$, y es nulo sí y sólo si $ad(y)$ es antisimétrico. Además, y no pertenece al centro de $\mathcal{G}$, por lo que $ad(y) \neq 0$, pero como G es nilpotente, el operador $ad(y)$ también lo es, y sus autovalores son nulos. Luego, si $ad(y)$ fuera un operador antisimétrico, sería el operador nulo, lo que es un absurdo. Finalmente, $Ric(y) < 0$.

En particular, si G admitiera alguna métrica de Einstein-Finsler invariante a izquierda, $Ric(y) = (n-1)KF^2$, que no cambia de signo, lo cual es absurdo. □

Bibliografía

[1] Arnold, V. I. *Mathematical methods of classical mechanics.* Translated from the Russian by K. Vogtmann and A. Weinstein. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 60. Springer-Verlag, New York, 1989.

[2] Bao, D.; Chern, S.-S.; Shen, Z. *An introduction to Riemann-Finsler geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000.

[3] Chern, S. S.; Chen, W. H.; Lam, K. S. *Lectures on differential geometry.* Series on University Mathematics, 1. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

[4] Chern, Shiing-shen. *On the Euclidean connections in a Finsler space.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 29, 1943.

[5] Chern, Shiing-Shen; Shen, Zhongmin. *Riemann-Finsler geometry.* Nankai Tracts in Mathematics, 6. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2005.

[6] do Carmo, Manfredo Perdigão. *Geometria riemanniana.* Projeto Euclides, 10. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

[7] Finsler, P. Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. (German) Verlag Birkhäuser, Basel, 1951.

[8] Huang, Libing. *Ricci curvatures of left invariant Finsler metrics on Lie groups.* Israel J. Math. 207, 2015.

[9] Ingarden, R. S.; Tamássy, L. *The point Finsler spaces and their physical applications in electron optics and thermodynamics. Lagrange geometry, Finsler spaces and noise applied in biology and physics.* Math. Comput. Modelling 20, 1994.

[10] Lang, Serge. *Fundamentals of differential geometry.* Graduate Texts in Mathematics, 191. Springer-Verlag, New York, 1999.

[11] Latifi, Dariush. *Homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces.* J. Geom. Phys. 57, 2007.

[12] Milnor, John W.; Stasheff, James D. *Characteristic classes.* Annals of Mathematics Studies, No. 76. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[13] Riemann, Bernhard. *On the hypotheses which lie at the bases of geometry.* Edited and with commentary by Jürgen Jost. Expanded English translation of the German original.

[14] Varadarajan, V. S. *Lie groups, Lie algebras, and their representations.* Reprint of the 1974 edition. Graduate Texts in Mathematics, 102. Springer-Verlag, New York, 1984.

[15] Whitney, Hassler. *On the theory of sphere-bundles.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 1940.