UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Teoría de Tomita-Takesaki y Factores de Araki-Woods

Daniel Alejandro Grimaldi

Director: Román Sasyk

24/02/2017

Resumen

Las álgebras de von Neumann fueron introducidas en la teoría de operadores a través de los trabajos de Murray y von Neumann [MN36], [MN37] y [Neu40], con el nombre de anillos de operadores. Surgieron de la necesidad de otras teorías en que von Neumann también participaba activamente, como la teoría de representaciones de grupos, la teoría ergódica y la formalización de la mecánica cuántica, de una generalización de la teoría de operadores acotados en un espacio de Hilbert. La manera exhaustiva y detallada en que estos trabajos fueron presentados, dieron una base fuerte para la ahora conocida como Teoría de Álgebras de von Neumann. Dentro de esta teoría, el concepto de factor juega un rol fundamental, ya que toda álgebra de von Neumann se la puede descomponer en factores. Por lo tanto, los factores se consideran los "bloques Indivisibles" en la teoría.

La primera clasificación de los factores fue presentada en el primero de los trabajos mencionados, separándolas en principio en 3 grandes grupos, las de tipo I, tipo II y tipo III. Pero inmediatamente después se hace una clasificación más fina en tipos I_n con $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y tipos II_1 y II_∞. Más aún, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, existe un único factor de tipo I_n identificado con $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ donde $dim(\mathcal{H}) = n$. Pero esta identificación sólo se pudo hacer para los factores de tipo I, pues la unicidad ya no sucede con los factores de tipo II. Respecto de los de tipo III la situación resultaba peor, pues hasta la existencia de estos factores estuvo puesto en duda y recién fue determinada por von Neumann en el tercero de los trabajos, remarcando la dificulad que había en el estudio de este tipo de factores.

Dado que los factores de tipo I fueron identificados en su totalidad, el siguiente paso de las invesigaciones se enfocó principalmente en los factores de tipo II, dado que los de tipo III fueron considerados esencialmente intratables. Sin embargo, con la aparición de la Teoría de Tomita-Takesaki en [Tak70], dada $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, se logra construir un grupo uniparamétrico en $Aut(\mathcal{M})$ que, si bien para las factores de tipo I y II el grupo es trivial, para los de tipo III resulta ser una construcción interesante. De hecho, combinando esto con el Teorema de Cociclo Unitario de Connes, presentado en [Con73], se logra presentar una clasificación de factores de tipo III usando un parámetro $\lambda \in [0, 1]$. En particular, los factores de Araki-Woods, generados como el Producto Tensorial Infinito de Factores de Tipo I (también conocidos como ITPFI, por sus siglas en inglés), quedaron identificados para el caso $\lambda \in (0, 1)$ con los factores de Powers, el caso más sencillo de factores de Araki-Woods.

El objetivo de esta tesis es hacer una presentación de lo expuesto anteriormente, ordenado de la siguiente manera. En el capítulo 1 se desarrollará la teoría básica de las álgebras de von Neumann, revisando las propiedades esenciales de las mismas y presentando la clasificación dada por Murray y von Neumann en los diferentes tipos. Luego, en el capítulo 2, desarrollaremos la teoría de Tomita-Takesaki para el caso de álgebras de von Neumann separables y presentaremos la teoría general. En el Capítulo 3 presentaremos distintas formas de construir álgebras de von Neumann y utilizaremos la teoría desarrollada en el capítulo anterior en el caso particular de los factores de Araki-Woods. Se agrega además un capítulo introductorio con la intención de delinear los conceptos mínimos necesarios para la lectura de este trabajo.

Índice general

Introducción

Comenzaremos dando una serie de definiciones, notaciones y proposiciones importantes para dar un contexto y una idea de los conocimientos que serán considerados sabidos. Como referencia a estos conocimientos, se sugiere el [Ped89]. En todo momento se entenderá que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo y separable, salvo que se diga lo contrario.

Definiciones y Notaciones Iniciales

Definición 0.1 *Relaciones y subconjuntos en* $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$

$\mathfrak{B}(\mathcal{H}) = \{x : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ / acotado en norma uniforme$\}$ "Operadores Acotados".

$\mathfrak{U}(\mathcal{H}) = \{u \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ / \ u^*u = uu^* = 1\}$ "Operadores Unitarios"

$\mathfrak{K}(\mathcal{H}) = \{x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ / x(\mathsf{B}_1(0))$ es compacto en $\|\cdot\|\}$ "Operadores Compactos".

$\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr} = \{x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ / tr(|x|) < \infty\}$ "Operadores de traza".
Donde $tr(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \langle x\xi_n, \xi_n\rangle$ con $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una b.o.n. cualquiera y $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Al conjunto de operadores autoadjuntos de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ se le puede asignar un orden:

$$A < B \text{ si y sólo si } B - A \text{ es un operador positivo.}$$

Sea $S \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ conjunto:

- S es *autoadjunto* o $*-$*cerrado* si $\forall T \in S$, $T^* \in S$.
- Dado $\mathsf{S} \subset \mathcal{H}$, notamos $[\mathsf{S}]$ al subespacio de $\mathcal{H}$ cerrado y más chico que contiene a S y notamos $S\mathsf{S} = \{T\xi / \ T \in S, \ \xi \in \mathsf{S}\} \subset \mathcal{H}$.
- S es *no-degenerado* si $[S\mathcal{H}] = \mathcal{H}$.
- $S' = \{x' \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) / x'x = xx' \quad \forall x \in S\}$ es el *conmutante* de S.

Notar que si S es autoadjunto, ($[S\mathcal{H}] = \mathcal{H}$) sii ($S\xi = \{0\} \ \Rightarrow \xi = 0$).

Dado $\{e_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ una familia de proyectores, notamos:

$$\bigvee_{i\in I} e_i \ = \ Proy_{\left[\bigcup\limits_{i\in I} Rg(e_i)\right]} \qquad \bigwedge_{i\in I} e_i \ = \ Proy_{\bigcap\limits_{i\in I} Rg(e_i)}$$

Definición 0.2 *Topologías de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$*

En $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es natural considerar la topología definida por la norma. Pero esta topología puede resultar muy restrictiva, pues en el caso en que $dim(\mathcal{H}) = \infty$ no permite por ejemplo que la bola unitaria sea compacta. Es por eso que trabajaremos con topologías más débiles, de las cuales dos definiremos a continuación:

Una red $\{x_i\}_{i\in I} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ converge a x con respecto a la:

- *topología fuerte (sot)* si $\|x_i\xi - x\xi\| \longrightarrow 0 \forall \xi \in \mathcal{H}$, o sea, la topología inducida por la familia de seminormas $\{\rho_\xi \ / \ \xi \in \mathcal{H}\}$ con $\rho_\xi(x) = \|x\xi\|$.
- *topología débil (wot)* si $|\langle x_i\xi, \eta\rangle - \langle x\xi, \eta\rangle| \longrightarrow 0 \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$, o sea, la topología inducida por la familia de seminormas $\{\rho_{\xi,\eta} \ / \ \xi, \eta \in \mathcal{H}\}$ con $\rho_{\xi,\eta}(x) = |\langle x\xi, \eta\rangle|$.

Más adelante, cuando algunos conceptos ya hayan sido analizados, definiremos otra topología que también nos será de utilidad.

Definición 0.3 *Operadores no acotados*

Llamamos operador no acotado a un $N : D \longrightarrow \mathcal{H}$ operador lineal donde D es un subespacio (no necesariamente cerrado) de $\mathcal{H}$ llamado Dominio.

N se dice *densamente definido* si $\overline{Dom(N)} = \mathcal{H}$.

N es *cerrado* si su gráfico lo es en $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$.

N se dice *clausurable* si existe T extensión cerrada de N. A la menor extensión cerrada de N la notamos $\overline{N}$ y vale que $\overline{Graph\,(N)} = Graph\,(\overline{N})$.

Para un N densamente definido existe un único N^* operador adjunto, tal que $Dom(N^*) = \{\eta \in \mathcal{H} / \ \exists \ c \ni \{|\langle N\xi; \eta\rangle| \leq c\|\xi\| \ \forall \xi \in Dom(N)\}\}$ y cumple que $\langle N\xi; \eta\rangle = \langle \xi; N^*\eta\rangle \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$. Como $Graph\,(N^*) = \{(-N\xi, \xi) \,/\, \xi \in Dom\,(N)\}^\perp$, un operador densamente definido N es clausurable si y sólo si N^* es densamente definido. En tal caso, $\overline{N} = N^{**}$.

Definición 0.4 *Operadores Conjugados*

Un operador lineal conjugado C es aquel cumple que $C\,(\lambda\xi + \eta) = \overline{\lambda}C\xi + C\eta$. De existir C^* (pues C puede ser no acotado), se cumple que $\langle C\xi, \eta\rangle = \langle C^*\eta, \xi\rangle \ \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}$.

Definición 0.5 *C^*-Álgebra*

Un *C^*-Álgebra* es un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ asociada a una función $* : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ llamada involución tal que $\forall x, y \in \mathcal{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ cumple que:

a)$(x+y)^* = x^* + y^*$	d)$(x^*)^* = x$
b)$(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$	e)$\|xx^*\| = \|x\|^2$(Identidad C^*)
c)$(xy)^* = y^*x^*$	

Definición 0.6 *$*-$homomorfismo de C^*-Álgebra con unidad*

Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ dos C^*-Álgebra con unidad y sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un homomorfismo algebraico. Decimos que F *es $*-$homomorfismo* si cumple que:

a) $F(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$ b) $F(x^*) = (F(x))^*$

Teoremas Esenciales en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y topologías débiles

Teorema 0.7 *Descomposición Polar*
Sea $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, entonces $\exists!\ U, |T| \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que $T = U|T|$, donde U es una isometría parcial tal que $Ker(U) = Ker(T)$ y $|T|$ es un operador positivo tal que $|T|^2 = T^*T$ y $\|Tx\| = \||T|x\|\ \forall x \in \mathcal{H}$.
La descomposición polar vale para operadores no acotados densamente definidos. Hay una descomposición polar para los operadores lineales conjugados, donde "la parte polar" (U) es una isometría parcial conjugada.

Teorema 0.8 *Teorema Espectral para $T \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ normal y Cálculo Funcional*
Sea $T \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$ normal, entonces $\exists \{\lambda_j\}_{j\in J} \in C_0(\mathbb{C})$ *y* $\{e_j\}_{j\in J}$ b.o.n. de $\mathcal{H}$ tal que:

$$T = \sum_{j\in J} \lambda_j \langle \cdot, e_j \rangle e_j$$

Más aún, $\quad \begin{array}{rcll} \exists\, \Phi_T : C\left(Spec\left(T\right)\right) & \longrightarrow & \mathfrak{B}(\mathcal{H}) & \qquad C^* - \text{isometría} \\ f & \longmapsto & \sum\limits_{j\in J} f(\lambda_j) \langle \cdot, e_j \rangle e_j & \end{array}$

Teorema 0.9 *Teorema Espectral para $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ normal*
Dado $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ normal, para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ hay una medida compleja boreliana $\mu_{\xi,\eta}$ soportada en $Spec(T)$ tal que si f es continua en $Spec(T)$ entonces:

$$\langle f(T)\xi; \eta \rangle = \int\limits_{Spec(T)} f(z) d\mu_{\xi,\eta}$$

Notar que el funcional $\omega_{\xi,\eta} = \langle \cdot\ \xi; \eta \rangle \in C\left(Spec(T)\right)^*$ para cualquier operador normal $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Por lo tanto, $\mu_{\xi,\eta}$ surge por Riesz.
Este teorema también vale para operadores no acotados autoadjuntos.

Teorema 0.10 *Cálculo Funcional para $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ normal*
Dado $T \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ normal $\exists\, \Phi_T : C\left(Spec\left(T\right)\right) \longrightarrow C^*(T)$ C^*-isometría donde $\Phi(1) = Id$ y $\Phi(Id) = T$.

Teorema 0.11 *Teorema de Banach-Alaoglu*
Para un $\mathcal{X}$ un espacio normado la bola unitaria en $\mathcal{X}^*$, $B_{\mathcal{X}^*}$, es $*-$débil compacto.

Teorema 0.12 *Teorema de Krein-Smulian*
Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado y sea $B_{\mathcal{X}^*}$ la bola unitaria en $\mathcal{X}^*$. Entonces, un conjunto convexo C en $\mathcal{X}^*$ es $*-$débil cerrado si $rB^* \cap \mathsf{C}$ es $*-$débil compacto $\forall r > 0$. Más aún, un subespacio $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}^*$ es $*-$débil cerrado si y sólo si $\mathcal{Y} \cap B_{\mathcal{X}^*}$ es $*-$débil cerrado.

Proposición 0.13 La bola unitaria $B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}$ de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es débilmente compacta.

Propiedad 0.14 Propiedades de los operadores de traza
Sea $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

a) Para una b.o.n de $\mathcal{H}$ dada, $tr(x^*x) = tr(xx^*)$.

b) $\forall\, u \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})$ $tr(uxu^*) = tr(x)$. En particular, la traza no depende de la b.o.n.

c) Si $tr(|x|) < \infty$ ó $tr(x^*x) < \infty$, entonces $x \in \mathfrak{K}(\mathcal{H})$.

Proposición 0.15
Dados $x, y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tales que $tr(x^*x) < \infty$ y $tr(y^*y) < \infty$, entonces $xy \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$.

Proposición 0.16
Dado $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ e $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, $|tr(xy)| \leq \|x\| tr(|y|)$ y $tr(xy) = tr(yx)$.

Teorema 0.17 $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$ *es una* $*-$*álgebra de Banach con la norma* $\|\cdot\|_{tr} = tr\left(|\cdot|\right)$.

Teorema 0.18 *Teorema de Stone*
Sea $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset \mathfrak{U}(\mathcal{H})$, una grupo unitario uniparamétrico tal que su representación es fuertemente continua, entonces existe un operador autoadjunto H no necesariamente acotado tal que $u_t = e^{itH}$.

Capítulo 1

Teoría Básica de Álgebras de von Neumann

En este capítulo mostraremos los aspectos fundamentales de la teoría de álgebras de von Neumann. Veremos en primera instancia, las propiedades generales de las álgebras de von Neumann y el rol que tienen las proyecciones en las mismas. A partir de lo hecho con las proyecciones, procederemos a construir la función dimensión que nos permitirá hacer la clasificación de factores de Murray y von Neumann en los diferentes tipos. Por último, enunciaremos teoremas de clasificación que complementarán la que se pretende presentar en este trabajo.

El material presentado está basado en los capitulos 0 y 1 de [Sun87], pero algunas referencias para la profundización de estos temas podrían ser [Dix81], [Bla06], [Sak97], [Jon09] como también el primero de los papers originales de Murray y von Neumann [MN36].

Propiedades Generales de Álgebras de von Neumann

Propiedad 1.1 Propiedades del Conmutante:
Sean S, T conjuntos en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

a) Si $S \subset T \quad \Rightarrow \quad T' \subset S'$.

b) $S \subset S'' = S^{(2n)}$ y $S' = S^{(2n-1)}$ para $n \geq 1$.

c) Si S es autoadjunto $\Rightarrow S'$ es autoadjunto.

d) S' es una subálgebra débilmente cerrada de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y $1 \in S'$.

e) Si S es autoadjunto y $\mathsf{S} \subset \mathcal{H}$ subconjunto, entonces $P = Proy_{[S''\mathsf{S}]} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ está en S' y $P\xi = \xi \ \forall \xi \in \mathsf{S}$.

Demostración.

a) Sea $x \in T'$, entonces x conmuta con todos los elementos de T. En particular, con todos los de S. Entonces $x \in S'$.

b) Por definición, es claro que $S \subset S''$, y por a) resulta que $S''' \subset S'$. Por otro lado, aplicando el doble conmutante a S', tenemos que $S' \subset S'''$. Luego $S' = S'''$ y, usando a), queda el resultado que queremos probar.

c) Sea $x \in S'$, entonces $\forall y \in S$ resulta $xy = yx$. Aplicando la involución, obtenemos que $\forall y^* = z \in S^*$, $zx^* = x^*z$. Como $S^* = S$, resulta que $x^* \in S'$.

d) Claramente S' es subálgebra y $1 \in S'$, pues dados $x, y \in S'$ y $s \in S$:

$$\begin{aligned}
&s = 1s = s1 \; \forall x \in S \\
&s(x+y) = sx + sy = xs + ys = (x+y)s \\
&xy = (sx)y = (xs)y = x(sy) = xys
\end{aligned}$$

Para ver que S' es débilmente cerrada, sea una red $\{x_i\}_{i\in I} \in S'$ que converge a $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ débilmente. Entonces, dado $s \in S$:

$$|\langle x_i s\xi, \eta\rangle - \langle xs\xi, \eta\rangle| = \left|\left\langle x_i \widetilde{\xi}, \eta\right\rangle - \left\langle x\widetilde{\xi}, \eta\right\rangle\right| \longrightarrow 0 \; \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, \text{ donde } \widetilde{\xi} = s\xi$$

$$|\langle sx_i\xi, \eta\rangle - \langle sx\xi, \eta\rangle| = |\langle x_i\xi, \widetilde{\eta}\rangle - \langle x\xi, \widetilde{\eta}\rangle| \longrightarrow 0 \; \forall \xi, \eta \in \mathcal{H}, \text{ donde } \widetilde{\eta} = s^*\eta$$

Luego, $x_i s \xrightarrow{wot} xs$ y $sx_i \xrightarrow{wot} sx$. Como $x_i s = sx_i$, por unicidad del límite $xs = sx$.

e) Claramente $S''[S''\mathsf{S}] \subset [S''\mathsf{S}]$, pues si $\xi \in [S''\mathsf{S}]$ existe $\{s_n\} \subset S''$ y $\{\xi_n\} \subset \mathsf{S}$ tal que $s_n\xi_n \to \xi$. Entonces, dado $s \in S''$ tomamos $t_n\xi_n = ss_n\xi_n$ sucesión en $S''\mathsf{S}$ pues S'' es subálgebra. Luego, $s\xi \in [S''\mathsf{S}]$.

Entonces, tenemos que $PyP = yP \; \forall y \in S''$. Al ser S autoadjunta, vale que $Py^*P = y^*P$, entonces aplicando * queda que $PyP = Py$. Luego $P \in S'$. Por d), sabemos que $1 \in S''$, entonces $\xi = 1\xi = P1\xi = 1P\xi = P\xi$ para cualquier $\xi \in \mathsf{S}$.

□

Definición 1.2 *Álgebra de von Neumann*

Un *álgebra de von Neumann* es un subálgebra $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $*-$cerrada tal que $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$. Por el ítem d) de 1.1 sabemos que además es débilmente cerrada y unital, por lo tanto, toda álgebra de von Neumann es una C^*-álgebra unital.

Teorema 1.3 *Teorema del Doble Conmutante*

Sea $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra no degenerada y autoadjunta. Son equivalentes:

i) $\mathcal{M} = \mathcal{M}''$

ii) $\mathcal{M}$ es cerrado débil en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

iii) $\mathcal{M}$ es cerrado fuerte en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Se deduce del ítem d) de 1.1.

ii) $\Rightarrow$ iii) Es inmediato por la definición de las topologías.

iii) $\Rightarrow$ i) Para esta implicación, basta ver que $\mathcal{M}$ es denso sot en $\mathcal{M}''$, es decir:

Dado $y \in \mathcal{M}'' \quad \forall \varepsilon > 0 \; \forall \xi_1, ..., \xi_n \in \mathcal{H} \quad \exists x \in \mathcal{M} \; / \; \|x\xi_i - y\xi_i\| < \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq n$

Comencemos la demostración por inducción en n. Para el caso $n = 1$, definimos $P : \mathcal{H} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}\xi_1}$ la proyección ortogonal. Por el ítem e) de 1.1 sabemos que $P \in \mathcal{M}'$ y que $P\xi_1 = \xi_1$. Entonces si $y \in \mathcal{M}''$, tenemos que $Py\xi_1 = yP\xi_1 = y\xi_1$, es decir que $y\xi_1 \in \overline{\mathcal{M}\xi_1}$. Luego, dado $\varepsilon > 0 \; \exists x \in \mathcal{M} \; / \; \|y\xi_1 - x\xi_1\| < \varepsilon$

Para el caso general, consideremos $\mathcal{H}^n = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{H}$, $\mathfrak{B}(\mathcal{H}^n) = M_n(\mathfrak{B}(\mathcal{H}))$ y sea:

$$\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow M_n(\mathfrak{B}(\mathcal{H})) \;\text{ donde }\; \Phi(x) = \begin{pmatrix} x & & \\ & \ddots & \\ & & x \end{pmatrix} = \widetilde{x}$$

Sea $\Phi(\mathcal{M}) = \widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}Id_{n\times n}$. Si $\widetilde{x}' \in \widetilde{\mathcal{M}}'$, por definición $\widetilde{x}'\widetilde{x} = \widetilde{x}\widetilde{x}' \; \forall \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}$. Pero:

$$\widetilde{x}'\widetilde{x} = \widetilde{x}\widetilde{x}' \Leftrightarrow (\widetilde{x}'\widetilde{x})_{ij} = (\widetilde{x}\widetilde{x}')_{ij} \Leftrightarrow (\widetilde{x}')_{ij}x = x(\widetilde{x}')_{ij}$$

Luego, $\widetilde{x}' \in \widetilde{\mathcal{M}}' \;\Leftrightarrow\; (\widetilde{x}')_{ij} \in \mathcal{M}'$, es decir $\widetilde{\mathcal{M}}' = \{(x_{ij}) \; / \; x_{ij} \in \mathcal{M}'\}$. Entonces, aplicando el caso $n = 1$ con $\widetilde{y} = yId_{n\times n} \in \widetilde{\mathcal{M}}''$ y $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathcal{H}^n$ a $\widetilde{\mathcal{M}}$, obtenemos un $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ definido por un $x \in \mathcal{M}$ que cumple lo buscado.

□

Corolario 1.4
$\forall S \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto y no-degenerado, S'' es álgebra de von Neumann.

Definición 1.5 *Centro de un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ y definición de factor*
$Z(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} \; / \; xy = yx \; \forall y \in \mathcal{M}\} = \mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ se llama *centro* de $\mathcal{M}$.
$\mathcal{M}$ se lo llama *factor* si $Z(\mathcal{M}) = \{\lambda 1 \; / \; \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}1$.

Predual de un Álgebra de von Neumann

La definición de álgebra de von Neumann está fuertemente vinculada con la existencia de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en donde el álgebra pueda actuar. Pero, así como sucede con las C^*-álgebras, un álgebra de von Neumann puede definirse de manera abstracta. S. Sakai demostró que lo que caracteriza a un álgebra de von Neumann dentro del conjunto de las C^*-álgebras es que son las únicas que tienen predual. El objetivo de esta sección es mostrar la existencia de predual, ya que además nos será de utilidad más adelante para caracterizar cierto tipo de funcionales de un álgebra de von Neumann.

Definición 1.6 *Operadores de rango uno*

Dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, definimos los operadores $\omega_{\xi,\eta} = \langle \cdot, \eta \rangle \xi$.
Cuando $\xi = \eta$, notaremos $\omega_{\xi,\eta} = \omega_\xi$.

Propiedad 1.7 Propiedades de los operadores de rango uno

Sean $\xi, \eta \in \mathcal{H}$:

a) $\|\omega_{\xi,\eta}\| = \|\xi\|\|\eta\|$.

b) $\omega_{\xi,\eta} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$ y $tr(\omega_{\xi,\eta}) = \langle \xi, \eta \rangle$.

c) $(\omega_{\xi,\eta})^* = \omega_{\eta,\xi}$.

d) $(\omega_{\xi,\eta})^* \circ \omega_{\xi,\eta} = \|\eta\|^2 \omega_\xi$.

e) Si $\|\xi\| = 1$, entonces $\omega_\xi \circ \omega_\xi = \omega_\xi$.

Demostración.

a) Por un lado, $\|\omega_{\xi,\eta}(\zeta)\| = |\langle \zeta, \eta \rangle| \|\xi\| \leq \|\zeta\|\|\eta\|\|\xi\|$, entonces $\|\omega_{\xi,\eta}\| \leq \|\xi\|\|\eta\|$.
Pero tomando $\eta = \zeta$ se obtiene la igualdad. Por lo tanto, $\|\omega_{\xi,\eta}\| = \|\xi\|\|\eta\|$.

b) Sea $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b.o.n. tal que $\eta_1 = \frac{\eta}{\|\eta\|}$. Entonces:

$$tr(\omega_{\xi,\eta}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle \langle \eta_n, \eta \rangle \xi, \eta_n \rangle = \langle \|\eta\|\xi, \eta_1 \rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

c) $\langle \omega_{\xi,\eta}(\zeta_1), \zeta_2 \rangle = \langle \zeta_1, \eta \rangle \langle \xi, \zeta_2 \rangle = \left\langle \zeta_1, \overline{\langle \xi, \zeta_2 \rangle} \eta \right\rangle = \langle \zeta_1, \omega_{\eta,\xi}(\zeta_2) \rangle \ \forall \zeta_1, \zeta_2 \in \mathcal{H}$
Luego, $(\omega_{\xi,\eta})^* = \omega_{\eta,\xi}$

d) $(\omega_{\xi,\eta})^* \circ \omega_{\xi,\eta}(\zeta) = \langle \omega_{\xi,\eta}(\zeta), \xi \rangle \eta = \langle \langle \zeta, \eta \rangle \xi, \xi \rangle \eta = \|\xi\|^2 \omega_\eta(\zeta)$
En particular, si notamos $\widetilde{\eta} = \frac{\eta}{\|\eta\|}$, tenemos que $|\omega_{\xi,\eta}|^2 = \|\xi\|^2\|\eta\|^2 \omega_{\widetilde{\eta}}$.

e) $\omega_\xi \circ \omega_\xi(\zeta) = \langle \langle \zeta, \xi \rangle \xi, \xi \rangle \xi = \|\xi\|^2 \langle \zeta, \xi \rangle \xi = \omega_\xi(\zeta)$
En particular, en el ítem anterior $|\omega_{\xi,\eta}| = \|\xi\|\|\eta\|\omega_{\widetilde{\eta}}$.

□

Teorema 1.8 *Caracterización del predual de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$*

$$\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \cong \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}^*$$

Demostración. Por 0.16, todo $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ define un operador $\psi_x = tr(x\ \cdot) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}^*$ y que $\|\psi_x\| \leq \|x\|$. Sea ahora un $\psi \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}^*$ y dados $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, consideramos el operador $\omega_{\xi,\eta}$ para definir la forma sesquilineal de B_ψ en $\mathcal{H}$:

$$B_\psi(\xi, \eta) = \psi(\omega_{\xi,\eta})$$

Usando las propiedades vistas en 1.7, notar que:

$$|B_\psi(\xi,\eta)| \leq \|\psi\|\|\Omega_{\xi,\eta}\|_{tr} = \|\psi\| tr\left(|\Omega_{\xi,\eta}|\right) = \|\psi\|\|\xi\| tr\left((\omega_\eta)^{1/2}\right) = \|\psi\|\|\xi\|\|\eta\|$$

Entonces $\|B_\psi\| \leq \|\psi\|$. Por lo tanto, $\exists x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que $B_\psi(\xi,\eta) = \langle x\xi,\eta\rangle$ y tenemos que $\|x\| \leq \|\psi\|$. Por el teorema 0.8, todo operador autoadjunto en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$ es diagonalizable. Entonces, dado $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, existe $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ b.o.n. de $\mathcal{H}$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ autovalores de y tal que $y = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \omega_{\xi_n}$. En particular, $tr(|y|) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|$. Por lo tanto:

$$\psi(y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \psi(\omega_{\xi_n}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \langle x\xi_n,\xi_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle xy\xi_n,\xi_n\rangle = tr(xy)$$

Dado que $\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$ es $*-$cerrada, la fórmula vale para cualquier $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, pues puedo escribir $y = \frac{y+y^*}{2} + i\frac{iy^*-iy}{2}$, es decir una combinación lineal de operadores autoadjuntos. Así, tenemos una isomorfismo isométrico entre $(\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr})^*$ y $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

□

Definición 1.9 *Topología $\sigma-$débil en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$*

Por lo anterior, usando la traza podemos definir la topología $*-$débil en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, que notaremos como σ-débil o $\sigma-$wot. Entonces:

$$x_i \longrightarrow x \text{ converge } \sigma\text{-débil} \Leftrightarrow |tr((x_i - x)y)| \longrightarrow 0 \; \forall y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$$

La topología inducida por la familia de seminormas $\{|tr(\cdot\, y)| \;/\; y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}\}$.

Proposición 1.10

Sea ϕ una funcional en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Son equivalentes:

i) $\exists\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ con $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < \infty$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\eta_n\|^2 < \infty$ tales que:

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x\xi_n,\eta_n\rangle \qquad x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

ii) $\exists\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ conjuntos con elementos mutuamente ortogonales con $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < \infty$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \|\eta_n\|^2 < \infty$ tales que:

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x\xi_n,\eta_n\rangle \qquad x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

iii) Existe $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$ tal que $\phi(x) = tr(xy)\; \forall x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

iv) ϕ es $\sigma-$débil continua.

v) $\phi|_{B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}}$ es débil continua, donde $B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}$ es la bola unitaria de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Demostración. Dado que la topología $\sigma-$débil es la dada por la familia de funcionales $tr(\cdot\, y)$ con $y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, se tiene que iii) $\Leftrightarrow$ iv), y claramente ii) $\Rightarrow$ i). Demostremos entonces i) $\Rightarrow$ iii), iii) $\Rightarrow$ ii) y iv) $\Leftrightarrow$ v).

i) $\Rightarrow$ iii) Sea $\mathcal{H}_0 = \overline{\langle \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle}$ y sea $\{\upsilon_n\}_{n\in I}$ una b.o.n. para $\mathcal{H}_0$.

Si $\#I = d < \infty$ podemos escribir a los ξ_n y η_n como combinación lineal de los υ_n y obtener $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$ con $1 \leq i, j \leq d$ tales que:

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{ij} \langle x\upsilon_i, \upsilon_j\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle xy\upsilon_j, \upsilon_j\rangle = tr(xy)$$

donde y es un operador de rango finito dado por $y\upsilon_j = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{ij}\upsilon_i$ y $y|_{\mathcal{H}_0} = 0$.

Si $I = \mathbb{N}$, definimos $y_1, y_2 \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tales que se anulen en $\mathcal{H}_0$ y que cumplan que $y_1\upsilon_n = \xi_n$ e $y_2\upsilon_n = \eta_n$. Notar que:

$$tr(y_1^* y_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_1\upsilon_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\xi_n\|^2 < \infty \quad tr(y_2^* y_2) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|y_2\upsilon_n\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\eta_n\|^2 < \infty$$

Luego por 0.15, $y = y_1 y_2^* \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, y por 0.16 tenemos que $\forall x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

$$tr(xy) = tr(xy_1y_2^*) = tr(y_2^* x y_1) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle y_2^* x y_1 \upsilon_n, \upsilon_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x\xi_n, \eta_n\rangle = \phi(x)$$

iii) $\Rightarrow$ ii) Sea $y = u|y|$ la descomposición polar de y, entonces $|y|$ es un operador compacto y normal con todos sus autovalores positivos. Usando 0.8, existe una b.o.n. $\{\upsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{H}$ y $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(\mathbb{R}_{\geq 0})$ tal que $|y| = \sum \lambda_n \omega_{\upsilon_n}$. Más aún, dado que $|y| \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, tenemos que $tr(|y|) = \sum \lambda_n < \infty$. Definiendo $\xi_n = \lambda_n^{1/2} u\upsilon_n$ y $\eta_n = \lambda_n^{1/2} u\upsilon_n$, sucesiones de elementos mutuamente ortogonales pues u es una isometría parcial, obtenemos que $\forall x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$:

$$\phi(x) = tr(xy) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle xy\upsilon_n, \upsilon_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x\lambda u\upsilon_n, \upsilon_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle x\xi_n, \eta_n\rangle$$

iv) $\Leftrightarrow$ v) La función identidad $Id : (\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \tau_{\text{wot}}) \longrightarrow \left(\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \tau_{\sigma-\text{wot}}\right)$ es continua pues la topología débil es más débil que la topología $\sigma-$débil (todas las seminormas que definen la topología débil están en la topología $\sigma-$débil). Dado que $B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}$ es débil-compacta, entonces también es $\sigma-$débil compacta y resulta que Id es un homeomorfismo en $B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}$. En particular, si ϕ es $\sigma-$débil continua en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$, también lo es $B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}$, y, por lo tanto, $\phi|_{B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}}$ es débil continua.

Si $\phi|_{B_{\mathfrak{B}(\mathcal{H}),1}}$ es débil continua, ϕ es $\sigma-$débil continua por Krein-Smulian.

$\square$

Proposición 1.11
Si $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es una $*-$álgebra unital e $y \in \mathcal{M}''$, entonces dados $\varepsilon > 0$ y $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\sum \|\xi_n\| < \infty$, existe un $x \in \mathcal{M}$ tal que $\sum \|(y - x)\xi_n\|^2 < \varepsilon^2$.
En particular, $\mathcal{M}''$ es la clausura $\sigma-$débil de $\mathcal{M}$.

Demostración. Reescribiendo la demostración de iii) $\Rightarrow$ i) de 1.3 con $\mathcal{H}^\infty = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{H}$ y $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}^\infty)$ donde $\Phi(x) = xId = \widetilde{x}$, podemos obtener un $x \in \mathcal{M}$ que cumple lo pedido.

Para ver que $\mathcal{M}'' = \overline{\mathcal{M}}$ en el sentido $\sigma-$débil, sea ϕ un funcional $\sigma-$débil continuo. Entonces existen $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $\sum \|\xi_n\|^2 < \infty$ y $\sum \|\eta_n\|^2 < \infty$ tales que $\phi(x) = \sum \langle x\xi_n, \eta_n\rangle$. Por lo anterior, dado $y \in \mathcal{M}''$ y $\varepsilon > 0$, existe $x \in \mathcal{M}$ tal que $\sum \|(y-x)\xi_n\|^2 < \varepsilon^2$. Entonces:

$$\begin{aligned} |\phi(y-x)| &= |\textstyle\sum \langle (y-x)\xi_n, \eta_n\rangle| \leq \left(\sum \|(y-x)\xi_n\|^2\right)^{1/2} \left(\sum \|\eta_n\|^2\right)^{1/2} \\ &< \varepsilon \left(\textstyle\sum \|\eta_n\|^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

Luego, y está en la clausura $\sigma-$débil de $\mathcal{M}$.

$\square$

Corolario 1.12
Toda álgebra de von Neumann es $\sigma-$débil cerrada.

Teorema 1.13 *Toda Álgebra de von Neumann $\mathcal{M} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tiene un predual y la topología $*-$débil de $\mathcal{M}$ coincide con la inducida por la $\sigma-$débil de $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$*

Demostración. Identificando $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ con $(\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr})^*$, consideramos:

$$\mathcal{M}_\perp = \{y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr} \ / \ tr(xy) = 0 \, \forall x \in \mathcal{M}\}$$

Entonces, $\mathcal{M}_\perp$ es un subespacio cerrado en $(\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}, tr(|\cdot|))$ y podemos definir el espacio de Banach $\mathcal{M}_* = {}^{\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}} \big/ {}_{\mathcal{M}_\perp}$.

Sean $I : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ la inclusión y $Q : \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr} \longrightarrow \mathcal{M}_*$ la aplicación cociente, entonces $Q^* : (\mathcal{M}_*)^* \longrightarrow (\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr})$. El objetivo es identificar Q^* con I.

Sea $\phi \in (\mathcal{M}_*)^*$, entonces $\psi = Q^*(\phi) = \phi \circ Q \in (\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr})^*$. Por la identificación hecha en 1.8, $\exists x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ tal que $\psi(y) = tr(xy) \, \forall y \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr}$, y además sabemos que $\psi(y) = 0 \, \forall y \in \mathcal{M}^\perp$. Es decir, $\psi \in \left(\mathcal{M}^\perp\right)^\perp$. Como $\mathcal{M}$ es $\sigma-$cerrado, resulta que $x \in \mathcal{M}$. Sea ahora $x \in \mathcal{M}$, consideremos el operador $tr(x\,\cdot) \in (\mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr})^*$. Dado que $tr(xy) = 0 \, \forall y \in \mathcal{M}_\perp$, resulta que $tr(x\,\cdot)$ define un elemento en $(\mathcal{M}_*)^*$.

Por último, usando la identificación vista en 1.8 y lo anterior, notemos que $\|Q^*(\phi)\| = \|\psi\| = \|x\|$. Luego, Q^* es un isomorfismo isométrico con su imagen. Por lo tanto, $(\mathcal{M}_*)^* \cong \mathcal{M}$ y por cómo fue construida la identificación, la topología $*-$débil inducida en $\mathcal{M}$ coincide con la restricción de $\mathcal{M}$ de la topología $\sigma-$débil. $\square$

Proyecciones en un álgebra de von Neumann

Definición 1.14 *Proyecciones en un Álgebra de von Neumann*
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, se define:

$P(\mathcal{M}) = \{x \in \mathcal{M} \ / \ x \text{ es proyector ortogonal}\}$.

El *soporte* de $x \in \mathcal{M}$ a la proyección $s(x) = Proy_{[Rg(x)]}$.

El *soporte central* de una proyección $e \in P(\mathcal{M})$ a la proyección:

$$c(e) = \bigwedge \{f \in P(\mathcal{M}) \cap Z(\mathcal{M}) \ / \ e \leq f\}$$

Teorema 1.15 *Toda Álgebra de von Neumann está generada por $\mathcal{P}(\mathcal{M})$*

a) Sea $\mathcal{A} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ una C^*-álgebra unital. Entonces, todo elemento de $\mathcal{A}$ se puede expresar como una combinación lineal de 4 operadores unitarios de $\mathcal{A}$.

b) Sea $x \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un Álgebra de von Neumann. Una condición necesaria y suficiente para que $x \in \mathcal{M}$ es que $u'xu'^* = x \ \forall \ u' \in \mathcal{M}'$.

c) Sea $\mathcal{M}$ un Álgebra de von Neumann y $x \in \mathcal{M}$. Entonces, $u, |x| \in \mathcal{M}$ donde $x = u|x|$ es la descomposición polar de x. Más aún, si x normal, entonces $\chi_F(x) \in \mathcal{M}$, $\forall F \subset Spec(x)$ boreliano.

d) $\mathcal{M} = \overline{\langle \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rangle}^{\|\cdot\|}$

Demostración.

a) Ante todo, notar que si $x \in \mathcal{A}$, entonces $C^*(x) \subset \mathcal{A}$. Dado x, podemos reescribirlo como $x = x_1 + ix_2$ donde $x_1 = \frac{x+x^*}{2}$ y $x_2 = i\frac{x^*-x}{2}$ son autoadjuntas y $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Por lo tanto, alcanza con escribir a las autoadjuntas en $\mathcal{A}$ como una combinación lineal de 2 operadores unitarios. Sin pérdida de generalidad, puedo suponer que $\|x\| < 1$. Entonces, puedo reescribir x como:

$$x = \frac{\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right) + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)}{2}$$

un promedio de 2 operadores unitarios que están en $C^*(x)$ y por lo tanto en $\mathcal{A}$.

b) Claramente si $x \in \mathcal{M}$, $u'xu'^* = x$ no sólo para cualquier unitario sino cualquier elemento en $\mathcal{M}'$. Supongamos ahora que x cumple que $u'xu'^* = x \ \forall \ u' \in \mathcal{M}'$, o equivalentemente que $u'x = xu'$. Por el item i), todo $y \in \mathcal{M}'$ puede ser escrito como combinación lineal de unitarios en $\mathcal{M}$, es decir, $y = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + a_4u_4$. Entonces:

$$xy = a_1xu_1 + a_2xu_2 + a_3xu_3 + a_4xu_4 = a_1u_1x + a_2u_2x + a_3u_3x + a_4u_4x = yx$$

Luego, $x \in \mathcal{M}'' = \mathcal{M}$.

c) Por el item b) $u'xu'^* = x \; \forall \; u' \in \mathcal{M}'$, y por la descomposición de x, tenemos que la de $u'xu'^* = u'uu'^*u'|x|u'^*$. Por la unicidad de la descomposición polar, de lo anterior resulta que $u = u'uu'^*$ y $|x| = u'|x|u'^*$, y esto vale para $u' \in \mathcal{M}'$ arbitrario. Luego $u, |x| \in \mathcal{M}$. Para el caso en que x es normal, usando 0.9 y la unicidad de $Spec(x)$, se deduce lo que queremos de manera análoga a lo anterior.

d) Sea $\mathcal{M}_0 = \overline{\langle \mathcal{P}(\mathcal{M}) \rangle}^{\|\cdot\|}$. Claramente $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$. Por el ítem a) y el hecho de que $\mathcal{M}_0$ es $*-$álgebra, basta ver que si $x \in \mathcal{M}$ autoadjunto, entonces $x \in \mathcal{M}_0$.

Sea entonces $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples en $Spec(x)$ tal que $\Phi_n(t) \to t$ uniformemente en $Spec(x)$. Entonces, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n(x) - x\| = 0$, y por el ítem c), $\Phi_n(x) \in \mathcal{M}_0 \, \forall n \in \mathbb{N}$. Luego, $x \in \mathcal{M}_0$.

□

Proposición 1.16
Sea $\mathcal{M}$ un Álgebra de von Neumann y $e, f \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Entonces:

$$exf = 0 \quad \forall \, x \in \mathcal{M} \qquad \Leftrightarrow \qquad c(e)c(f) = 0$$

Por otro lado, Si e, f son no nulas y $\mathcal{M}$ es un factor, $\exists \, u \in \mathcal{M}$ isometría parcial tal que $u^*u \leq e$ y $uu^* \leq f$.

Definición 1.17 *Relaciones en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$*

Decimos que $e \sim f$ $(rel\, \mathcal{M})$ si existe $u \in \mathcal{M}$ isometría parcial tal que $u^*u = e$ y $uu^* = f$. Para precisar u, se puede notar como que $u : e \sim f$.

Decimos que $e \precsim f$ si existe $e_1 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ tal que $e \sim e_1$ y $e_1 \leq f$.

Estas relaciones se las usarán equivalentemente para subespacios de $\mathcal{H}$ que se identificarán con los rangos de las proyecciones de $\mathcal{M}$.

Propiedad 1.18 Propiedades de las relaciones para subespacios de $\mathcal{H}$

a) Si $\mathsf{M}_n \sim \mathsf{N}_n \forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathsf{M}_m \perp \mathsf{M}_n$, $\mathsf{N}_m \perp \mathsf{N}_n$ $\forall n \neq m$, entonces $\bigoplus \mathsf{M}_n \sim \bigoplus \mathsf{N}_n$.

b) Si $\mathsf{M}_0 \sim \mathsf{M}_1$ y existen $\mathsf{N}_i \subset \mathsf{M}_i$ con $i = 0, 1$ tales que $\mathsf{N}_0 \sim \mathsf{N}_1$, entonces $\mathsf{M}_0 \ominus \mathsf{N}_0 \sim \mathsf{M}_1 \ominus \mathsf{N}_1$, donde notamos $\mathsf{M} \ominus \mathsf{N} = \mathsf{M} \cap \mathsf{N}^\perp$.

c) $\mathsf{M} \precsim \mathsf{N}$ y $\mathsf{N} \precsim \mathsf{M}$ implica que $\mathsf{M} \sim \mathsf{N}$.

Definición 1.19 *Afiliaciones de subespacios en $\mathcal{H}$ y operadores cerrados*

Un subespacio D se dice *afiliado* a $\mathcal{M}$, notado $\mathsf{D} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$, si $a'\mathsf{D} \subset \mathsf{D} \; \forall a' \in \mathcal{M}'$. Notar que si D es un subespacio cerrado y P_D es la proyección ortogonal, se deduce del teorema del doble conmutante que $P_\mathsf{D} \in \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathsf{D} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$. La siguiente definición pretende generalizar esta noción.

Un operador cerrado A se dice *afiliado* a $\mathcal{M}$, notado $A \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$, si se tiene que $a'A \subset Aa' \, \forall a' \in \mathcal{M}'$. Es decir, si $\xi \in Dom(A)$ y $a' \in \mathcal{M}$, entonces $a'\xi \in Dom(A)$ y $Aa'\xi = a'A\xi$. Como en el caso anterior, notar que si A es un operador acotado, $A \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M} \Leftrightarrow A \in \mathcal{M}$, por el teorema del doble conmutante.

Lema 1.20
Sea A un operador cerrado y densamente definido. Son equivalentes:

i) $A \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$.

ii) $A^* \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$.

iii) Si $A = uH$ la descomposición polar, $u, \chi_F(H) \in \mathcal{M} \; \forall F \subset [0, \infty)$ boreliano.

Proposición 1.21
Dado $\mathcal{M}$ un factor y $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios de $\mathcal{H}$, entonces $\mathsf{M} \precsim \mathsf{N}$ ó $\mathsf{N} \precsim \mathsf{M}$.

Definición 1.22 *Proyecciones finitas respecto a $\mathcal{M}$*
Una proyección $e \in P(\mathcal{M})$ se dice *finita* si dado un $e_0 \in P(\mathcal{M})$ tal que $e \sim e_0 \leq e$, entonces $e_0 = e$. Como antes, se podrá decir que un subespacio $\mathsf{M} \subset \mathcal{H}$ afiliado a $\mathcal{M}$ es finito si P_{M} proyección lo es.

Proposición 1.23
Sean $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann. Si $\mathsf{M} \precsim \mathsf{N}$ y N finito, entonces M es finito.

Teorema 1.24 *"Algoritmo de División" para subespacios afiliados a un factor*
Dados $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ factor y $\mathsf{N} \neq (0)$, entonces $\exists \, \{\mathsf{N}_i\}_{i \in I}$ familia de subespacios ortogonales 2 a 2 de M y un subespacio R de M tales que:

$$\mathsf{N}_i, \mathsf{R} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M} \quad \mathsf{M} = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathsf{N}_i \right) \oplus \mathsf{R} \quad \mathsf{N}_i \sim \mathsf{N} \, \forall i \in I \text{ y } \mathsf{R} \not\succsim \mathsf{N} \quad \text{Además:}$$

a) Si I es infinito, existe otra descomposición con $\mathsf{R} = (0)$.

b) Si M es finito, entonces I es finito y su cardinal no depende de la descomposición.

Definición 1.25 Sea $\mathcal{M}$ factor. Si $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ finitos y no nulas, definimos $[\mathsf{M}/\mathsf{N}] = \#I$, con I el dado por la descomposición del teorema anterior.

Definición 1.26 Sean $\mathsf{N}_i, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios, con $1 \leq i \leq k$, tales que $\mathsf{N}_i \sim \mathsf{N}$. Notaremos $k\mathsf{N} = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathsf{N}_i$. Así, en el teorema anterior para I finito, $\mathsf{M} = \#I\mathsf{N} \oplus \mathsf{R}$.

Corolario 1.27
Sean $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ con $\mathcal{M}$ factor:

a) M es infinito $\Leftrightarrow \exists \mathsf{B} \,/\, \mathsf{M} = B \oplus (\mathsf{M} \ominus \mathsf{B}) \wedge \mathsf{M} \sim \mathsf{B} \sim (\mathsf{M} \ominus \mathsf{B})$.

b) Si M es infinito $\Rightarrow \mathsf{N} \precsim \mathsf{M}$. Si además N es infinito, entonces $\mathsf{M} \sim \mathsf{N}$.

Lema 1.28
Sean $\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{B} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{M}$ factor. Si $\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$ y $\mathsf{B} \subset \mathsf{M} \oplus \mathsf{N}$, entonces $\exists \mathsf{B}_0, \mathsf{M}_i, \mathsf{N}_i \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios, con $i = 1, 2, 3$, y $A \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ operador cerrado tales que:

$$\mathsf{B}_0 = \{\xi + A\xi \;/\; dom(A)\}$$
$$\begin{array}{ccc} \mathsf{M} = \mathsf{M}_1 \oplus \mathsf{M}_2 \oplus \mathsf{M}_3 & \mathsf{N} = \mathsf{N}_1 \oplus \mathsf{N}_2 \oplus \mathsf{M}_3 & \mathsf{B} = \mathsf{M}_2 \oplus \mathsf{N}_2 \oplus \mathsf{B}_0 \\ \mathsf{M}_2 = \mathsf{M} \cap \mathsf{B} & \mathsf{M}_3 = \mathsf{M} \cap \mathsf{B}^{\perp} & \mathsf{M}_1 = \mathsf{M} \ominus (\mathsf{M}_2 \oplus \mathsf{M}_3) \\ \mathsf{N}_2 = \mathsf{N}_1 \cap \mathsf{B} & \mathsf{N}_3 = \mathsf{N} \cap \mathsf{B}^{\perp} & \mathsf{N}_1 = \mathsf{N} \ominus (\mathsf{N}_2 \oplus \mathsf{N}_3) \\ \overline{Dom(A)} = \mathsf{M}_1 & \overline{Rg(A)} = \mathsf{N}_1 & Ker(A) = (0) \end{array}$$

Más aún: $\mathsf{M}_1 \sim \mathsf{B}_0 \sim \mathsf{N}_1$ y $\mathsf{B} \precsim \mathsf{M} \;\vee\; (\mathsf{M} \oplus \mathsf{N}) \ominus \mathsf{B} \precsim \mathsf{N}$

Proposición 1.29
Sean $\mathsf{M}, \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ con $\mathcal{M}$ factor:

a) Si $\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$ y ambos son finitos $\Rightarrow$ $\mathsf{M} \oplus \mathsf{N}$ es finito.

b) $[\mathsf{M} + \mathsf{N}] \ominus \mathsf{N} \precsim \mathsf{M}$.

c) Si M y N son finitos $\Rightarrow$ $[\mathsf{M} + \mathsf{N}]$ es finito. Más aún, dados $\{e_i\}_{i=1}^{n} \subset P(\mathcal{M})$ finitos, $\sup\limits_{1 \le i \le n} e_i$ es una proyección finita.

Clasificación de factores

El interés en clasificar factores surge de la Teoría de Reducción de von Neumann que concluye que toda Álgebra de von Neumann se puede representar usando sólo factores (más precisamente, como una intergral directa de factores). La teoría puede encontrarse desarrollada en [Dix81] o [Sak97], como en los trabajos originales de Murray y von Neumann ([MN36]). Lamentablemente, desarrollar esto escapa a los objetivos de esta presentación. No obstante, el resultado permite motivar estos objetivos, pues nuestra intención es construir álgebras de cierto tipo, y para ello necesitamos entender los diferentes tipos de factores.

Definición 1.30 *Subespacio* $\mathsf{M} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ *minimal*
$\mathsf{M} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ se dice *minimal* si es no nulo y $\forall \mathsf{N} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ tal que $\mathsf{N} \subset \mathsf{M} \Rightarrow \mathsf{N} = (0) \vee \mathsf{N} = \mathsf{M}$. Equivalentemente, se dice que una proyección es minimal si su rango lo es.

Notar que en el caso en que $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, los subespacios minimales son aquellos que tienen dimensión 1. Nuestro objetivo en esta sección va a ser construir una función dimensión que generalice la noción que ya conocemos para $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$.

Definición 1.31 *Tipos para* $\mathcal{M}$ *factor*
Un factor $\mathcal{M}$ se dice de tipo:

I si contiene proyecciones minimales.

II si no contiene proyecciones minimales pero sí finitas y no nulas.

III si no contiene proyecciones finitas y no nulas.

Lema 1.32
Sean $\mathcal{M}$ factor y $\mathsf{M}, \mathsf{N}, \mathsf{B} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios finitos y no nulos.

a) $\left[\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{M}}\right]\left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}\right] \leq \left[\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{N}}\right] \leq \left(\left[\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{M}}\right]+1\right)\left(\left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}\right]+1\right)$

b) Si $\mathsf{M} \perp \mathsf{B}$ entonces, $\left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}\right]+\left[\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{N}}\right] \leq \left[\frac{\mathsf{M} \oplus \mathsf{B}}{\mathsf{N}}\right] \leq \left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}}\right]+\left[\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{N}}\right]+2$

Proposición 1.33 Sucesión Fundamental de un factor $\mathcal{M}$ de tipo II
$\exists$ $\{\mathsf{N}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sucesión de subespacios finitos y no nulos tales que $\mathsf{N}_i \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}\, \forall i \in \mathbb{N}$ y $[\mathsf{N}_{i+1}/\mathsf{N}_i] \geq 2$. Tal sucesión la llamaremos sucesión fundamental para $\mathcal{M}$.

Propiedad 1.34 Propiedades de una Sucesión Fundamental
Sea $\mathsf{S} = \{\mathsf{N}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión fundamental para $\mathcal{M}$ factor de tipo II y sean $\mathsf{M}, \mathsf{B} \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ subespacios finitos y no nulos.

a) Para un i suficientemente grande, $\left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}_i}\right] \neq 0$. De hecho, $\left[\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{N}_i}\right] \nearrow \infty$.

b) $\exists \lim\limits_{i\longrightarrow\infty} \frac{[\mathsf{M}/\mathsf{N}_i]}{[\mathsf{B}/\mathsf{N}_i]}$ y es un numero positivo que notaremos $\left(\frac{\mathsf{M}}{\mathsf{B}}\right)_{\mathsf{S}}$

Teorema 1.35 *Existencia de Función Dimensión*
Sea $\mathcal{M}$ un factor, entonces $\exists\, \mathcal{D}:\ P(\mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty]$ tal que:

a) $\mathsf{M} \sim \mathsf{N} \ \Leftrightarrow\ \mathcal{D}(\mathsf{M}) = \mathcal{D}(\mathtt{N})$.

b) Si $\mathsf{M} \perp \mathsf{N} \ \Rightarrow\ \mathcal{D}(\mathsf{M} \oplus \mathtt{N}) = \mathcal{D}(\mathsf{M}) + \mathcal{D}(\mathtt{N})$.

c) M es finito $\Leftrightarrow \mathcal{D}(\mathsf{M}) < \infty$.

Más aún, tal función $\mathcal{D}$ está unívocamente determinada salvo por la multiplicación de una constante positiva, y la llamaremos función dimensión de $\mathcal{M}$.

Propiedad 1.36
Sea $\mathcal{M}$ factor y $\mathcal{D}:\ P(\mathcal{M}) \longrightarrow [0, +\infty]$ como en el teorema anterior:

a) $\mathsf{M} \precsim \mathsf{N} \ \Leftrightarrow\ \mathcal{D}(\mathsf{M}) \leq \mathcal{D}(\mathtt{N})$.

b) Si $\mathsf{M} = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathsf{M}_n$ con $\mathsf{M}_n \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{D}(\mathsf{M}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}(\mathsf{M}_n)$.

Lema 1.37
Sea $\mathcal{D}$ la función dimensión de $\mathcal{M}$ y sea $\gamma = \mathcal{D}(\mathcal{H})$. Entonces:

a) $Im(\mathcal{D}) \subset [0, \gamma]$.

b) Si $\alpha < \beta \in Im(\mathcal{D}) \ \Rightarrow\ \beta - \alpha \in Im(\mathcal{D})$.

c) Si $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Im(\mathcal{D})$ y $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \leq \gamma \ \Rightarrow\ \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \in Im(\mathcal{D})$.

d) La $Im\,(\mathcal{D})$ es uno y sólo uno de los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{rl} (\mathrm{I}_n) & \{\delta j \ / \ j = 0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{con} \quad 0 < \delta < \infty \\ (\mathrm{I}_\infty) & \{\delta j \ / \ j \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{con} \quad 0 < \delta < \infty \\ (\mathrm{II}_1) & [0, \gamma] \quad \text{con} \quad 0 < \gamma < \infty \\ (\mathrm{II}_\infty) & [0, \infty] \\ (\mathrm{III}) & \{0, \infty\} \end{array}$$

Definición 1.38 *Clasificación de los tipos de factores*
Un factor $\mathcal{M}$ se dice de tipo I_n, I_∞, II_1, II_∞ o III según como sea la $Im\,(\mathcal{D})$.
A los factores de tipo I_n y II_1 se los llama finitos y al resto infinitos. En el caso de los factores finitos, la función $\mathcal{D}$ se la suele redefinir de forma tal que $Im\,(\mathcal{D}) \subset [0, 1]$.

Concluimos esta sección enunciando el teorema que caracteriza a los factores finitos y que fue uno de los ejes centrales de la materia Álgebras de von Neumann [Sas]. El desarrollo para demostrar este teorema puede encontrarse en [Jon09] ó [Bla06].

Teorema 1.39 *Existencia y unicidad de traza en factores finitos*
Sea $\mathcal{M}$ un factor. Son equivalentes:

i) $\mathcal{M}$ es finita.

ii) $\exists!\, \mathcal{T} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C}$ funcional tal que:

- $\mathcal{T}(Id) = 1$,
- $\mathcal{T}(xy) = \mathcal{T}(yx)\ \forall x, y \in \mathcal{M}$,
- $\mathcal{T}|_{P(\mathcal{M})} = \mathcal{D}$.

Relaciones de Equivalencia entre Álgebras de von Neumann

Con el objetivo de hacer una clasificación, debemos primero definir cuándo dos álgebras de von Neumann son esencialmente la misma. En este sentido los factores de tipo I están bien identificados, pero existe un trabajo activo desde los comienzos de la teoría en construir e identificar diferentes factores de tipo II y tipo III. El estudio de factores de tipo II, que hace hincapié principalmente en los de tipo II_1, es bastante distinto a los de tipo III. Así que, con la simple intención de complementar el trabajo que continuaremos, enunciaremos algunos teoremas que dejan el camino abierto hacia el estudio de los factores de tipo II_1, o bien de los de tipo III.

Definición 1.40 *Relaciones de Equivalencia entre Álgebras de von Neumann*
Dos álgebras de von Neumann $\mathcal{M}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1)$ y $\mathcal{M}_2 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)$ se dicen:

espacialmente isomorfas si $\exists\, U : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ unitario tal que $U\mathcal{M}_1U^* = \mathcal{M}_2$.

algebraicamente isomorfas, si existe un $*-$isomorfismo de $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$.
En tal caso, lo notaremos $\mathcal{M}_1 \cong \mathcal{M}_2$.

Claramente, dos álgebras espacialmente isomorfas son algebraicamente isomorfas. Diremos que dos álgebras son isomorfas si son algebraicamente isomorfas.

Dada $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, notaremos $Aut(\mathcal{M})$ al grupo de automorfismos.

Proposición 1.41
Todo factor $\mathcal{M}$ de tipo I_n, con $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ es isomorfo a $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ con $dim(\mathcal{H}) = n$.

Teorema 1.42 *Caracterización de los factores de tipo II_∞*
Sea $\mathcal{M}$ factor, entonces:

$$\mathcal{M} \text{ es de tipo } \mathrm{II}_\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathcal{M} \cong \widetilde{\mathcal{M}} \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H})$$

donde $\widetilde{\mathcal{M}}$ es un factor de tipo II_1 y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert infinito separable.

Teorema 1.43 Dadas $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{N} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{K})$ y $\Phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ un isomorfismo de álgebras de von Neumann, $\exists \mathcal{W}$ espacio de Hilbert y $u : \mathcal{H} \otimes \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{K} \otimes \mathcal{W}$ tal que $\Phi(x) \otimes 1 = u(x \otimes 1)u^* \, \forall x \in \mathcal{M}$.

Corolario 1.44
Dos álgebras de tipo III isomorfas son espacialmente isomorfas.

Idea. Se deduce del hecho de que si $\mathcal{M}$ es de tipo III, entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{M} \otimes \mathfrak{B}(K)$ con K un espacio de Hilbert. $\square$

Capítulo 2

Teoría de Tomita-Takesaki

En el trabajo de hacer una clasificación más fina de los factores, los de tipo III estuvieron fuera del alcance por mucho tiempo. Principalmente porque la noción de traza es importante para la clasificación de los otros tipos, pero en los factores de tipo III esta noción no tiene sentido. Es por eso que en este capítulo desarrollaremos la teoría de Tomita-Takesaki. Esta teoría nació principalmente con la idea de demostrar que dadas $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ álgebras de von Neumann , entonces $(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)' = \mathcal{M}_1' \otimes \mathcal{M}_2'$, una conjetura que permanecía abierta desde los primeros trabajos en álgebras de von Neumann. Pero fue Connes, al darse a conocer esta teoría, que la aplicó para hacer una clasificación de las álgebras de tipo III. El objetivo entonces es desarrolar una herramienta poderosa para el posterior estudio de factores de tipo III.

Cabe destacar que la teoría no está limitada a la condición de que las álgebras de von Neumann sean separables, es decir, contenidas en un $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$ con $\mathcal{H}$ separable. Es por eso que si bien las primeras secciones sí estarán dedicadas a este caso particular, en la última sección se presentará la versión general de esta teoría.

Este capítulo fue confeccionado basándose en el capítulo 2 de [Sun87] y la tercera parte de [Haa88], pero para su profundización se puede usar [Tak70].

Construcción de Gelfand-Naimark-Segal para $\mathcal{M}$ con funcionales positivas, normales y fieles

Definición 2.1 *Funcionales de un álgebra de von Neumann*
Dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, definimos:

$\mathcal{M}^+ = \{x \in \mathcal{M} \,/\, x$ es un operador positivo$\}$.

$\mathcal{M}_+^* = \{\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C} \,/\, \phi$ es una funcional lineal positiva: $\phi(x^*x) \geq 0 \,\forall x \in \mathcal{M}\}$.
Equivalentemente, $\phi \in \mathcal{M}_+^* \Leftrightarrow \phi(\mathcal{M}^+) \subset \mathbb{R}_+$. Decimos que $\phi \in \mathcal{M}_+^*$ es:

- un *estado* si $\phi(1) = 1$.
- *fiel* si dado $x \in \mathcal{M}^+$ no nulo, entonces $\phi(x) > 0$.

- *normal* si $\phi(x) = \sup_{i\in I} \phi(x_i)$ donde $\{x_i\}_{i\in I} \in \mathcal{M}^+$ es una red monótona creciente que converge débilmente a $x = \sup_{i\in I} x_i$.
  Al conjunto de funcionales normales lo notaremos $\mathcal{M}_{*,+}$.
- *de traza* si $\phi(x^*x) = \phi(xx^*)\ \forall x \in \mathcal{M}$.

Propiedad 2.2
Sea $\phi \in \mathcal{M}^*_+$ y sea $[x, y] = \phi(y^*x)$. Entonces:

a) $[\cdot,\cdot]$ es una forma sesquilineal.

b) $4\,[z_1, z_2] = \sum_{k=0}^{3} i^k \left[z_1 + i^k z_2, z_1 + i^k z_2\right]$ (Identidad de Polarización).

c) Si ϕ es fiel, $[\cdot,\cdot]$ es un producto interno.

d) $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$ (Desigualdad de Cauchy-Schwartz).

Proposición 2.3
Dado $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ existe un $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ estado fiel.

Demostración. Sea $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Definimos:

$$\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{donde} \quad \phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \langle x\xi_n, \xi_n\rangle$$

Claramente $|\phi(x)| \leq \|x\|$, es positivo y fiel. Además, $\phi(1) = 1$, por lo tanto es estado. Más aún $\|\phi\| = 1$. Para ver que es normal, sea $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}^+$ una red monótona creciente y $x = \sup_{i\in I} x_i$. Veamos que $\sup_{i\in I} \phi(x_i) = \phi(x)$:

$$\text{si } i < j \quad \phi(x_j) - \phi(x_i) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \langle (x_j - x_i)\,\xi_n, \xi_n\rangle > 0$$
$$|\phi(x_i) - \phi(x)| = \left|\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \left(\langle x_i\xi_n, \xi_n\rangle - \langle x\xi_n, \xi_n\rangle\right)\right| \leq |\langle x_i\xi_n, \xi_n\rangle - \langle x\xi_n, \xi_n\rangle| \longrightarrow 0$$

Luego, $\phi(x_i)$ es creciente y converge a $\phi(x)$. $\square$

Propiedad 2.4
Sea $\phi \in \mathcal{M}^*_+$. Son equivalentes:

i) ϕ es de traza.

ii) $\phi(xy) = \phi(yx)\ \forall\, x, y \in \mathcal{M}$.

iii) $\phi(uxu^*) = \phi(x)\ \forall\, x, u \in \mathcal{M}$ con u unitario.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Que ϕ sea de traza significa que $\phi(x^*x) = \phi(xx^*)\,\forall x \in \mathcal{M}$. Usando el ítem b) de 2.2, desarrollemos $\phi(xy) = [y, x^*]$ y $\phi(yx) = [x, y^*]$ usando el hecho de que ϕ es de traza. Para simplificar, notemos $w_k = y + i^k x^*$ y $v_k = x + i^k y^* = i^k w_k^*$.

$$4\phi(xy) = \sum_{k=0}^{3} i^k\,[w_k, w_k] = \sum_{k=0}^{3} i^k\phi(w_k^* w_k) = \sum_{k=0}^{3} i^k\phi(w_k w_k^*)$$
$$4\phi(yx) = \sum_{k=0}^{3} i^k\,[v_k, v_k] = \sum_{k=0}^{3} i^k\phi(v_k^* v_k) = \sum_{k=0}^{3} i^k\phi((-i)^k w_k i^k w_k^*) = \sum_{k=0}^{3} i^k\phi(w_k w_k^*)$$

Luego, vale que $\phi(xy) = \phi(yx)$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Dados $z, u \in \mathcal{M}$, u unitario, $\phi(uzu^*) = \phi((uz)u^*) = \phi(u^*(uz)) = \phi(z)$

iii) $\Rightarrow$ i) Dado $x \in \mathcal{M}$ podemos usar la descomposición polar de 1.15 y entonces $x = u|x|$ con $u \in \mathcal{M}$ unitario. Entonces $\phi(x^*x) = \phi(|x|^2) = \phi(u|x|^2u^*) = \phi(xx^*)$.

$\square$

Proposición 2.5
Sea $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra de von Neumann y $\phi \in \mathcal{M}_+^*$. Son equivalentes:

i) ϕ es normal.

ii) $\phi(\sum p_i) = \sum \phi(p_i)\,\forall\,\{p_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mutuamente ortogonales.

iii) ϕ es $\sigma-$débil continua.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Dado $\{p_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(\mathcal{M})$ mutuamente ortogonales, sea $q_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$. Entonces $\{q_i\}_{i\in I}$ es un red monótona creciente en $\mathcal{M}^+$ y $\sum_{i\in I} p_i = \sup_{i\in I} q_i$. Como ϕ es normal:

$$\phi\left(\sum_{i\in I} p_i\right) = \phi\left(\sup_{i\in I} q_i\right) = \sup_{i\in I}\phi\left(q_i\right) = \sup_{i\in I}\sum_{j=1}^{i}\phi(p_j) = \sum \phi(p_i)$$

ii) $\Rightarrow$ iii) Dado $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\|\xi\|^2 = \phi(1)$, consideremos $\omega_\xi = \langle\cdot\,\xi, \xi\rangle \in \mathcal{M}_+^*$. Sea $\widetilde{p} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, entonces:

$$\omega_\xi(\widetilde{p}) < \phi(\widetilde{p}) \text{ ó } \omega_\xi(1-\widetilde{p}) < \phi(1-\widetilde{p}) \text{ ó } \omega_\xi(\widetilde{p}) = \phi(\widetilde{p})$$

Si $\omega_\xi(\widetilde{p}) = \phi(\widetilde{p})\,\forall \widetilde{p} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, por la densidad de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ vista en 1.15, resulta que $\omega_\xi = \phi$ y, por lo tanto, $\sigma-$débil por 1.10. Si no, consideremos $\{q_i\}_{i\in I}$ familia maximal de proyecciones mutuamente ortogonales tal que $\omega_\xi(q_i) < \phi(q_i)$. Notar que ω_ξ tiene las misma propiedad que ϕ tiene por hipótesis y que $\omega_\xi(1) = \|\xi\|^2 = \phi(1)$. Entonces, si $q = \sum q_i$, tendremos que $\omega_\xi(q) < \phi(q)$ y que $q \neq 1$. Por lo tanto, tomando

$p = 1 - q$, tendremos que $\forall r \leq p$ con $r \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $\phi(r) \leq \omega_\xi(r)$. Luego, usando 1.15 en $p\mathcal{M}p$, se concluye que $\forall x \in (p\mathcal{M}p)^+$, $\phi(x) \leq \omega_\xi(x)$.

Habiendo hecho lo anterior, consideremos el conjunto:

$$\mathfrak{F} = \left\{ \{p_i\}_{i\in I} \Big/ \begin{array}{l} \exists\{\xi_i\} \subset \mathcal{H} \text{ donde } \|\xi_i\| = \phi(1) \text{ y } \phi(x) \leq \omega_{\xi_i}(x)\, \forall x \in (p_i\mathcal{M}p_i)^+ \\ \{p_i\}_{i\in I} \text{ es una familia de proyecciones mutuamente ortogonales} \end{array} \right\}$$

con el orden definido por:

$$\{p_i\}_{i\in I} \leq \{q_j\}_{j\in J} \quad \Leftrightarrow \quad Rg\left(\sum p_i\right) \subset Rg\left(\sum q_i\right)$$

Por el lema de Zorn, podemos tomar $\{p_i\}_{i\in I}$ familia maximal. Si $q = 1 - \sum p_i \neq 0$, podemos aplicar la construcción anterior en $q\mathcal{M}q$ y $q\mathcal{H}$ y obtener una familia más grande, contradiciendo la maximalidad. Luego $1 = \sum p_i$, y dado $x \in \mathcal{M}$:

$$\phi(p_i x^* x p_i) \leq \langle p_i x^* x p_i \xi_i, \xi_i\rangle = \|xp_i\xi_i\|^2 \quad \forall i \in I$$

Sea $q_F = \sum\limits_{i\in F} p_i$ con $F \subset I$, definimos $\psi_F(x) = \phi(xq_i)$. Notemos que:

$$\forall \varepsilon > 0\ ,\ \exists F \subset I \ / \ \phi(1 - q_F) < \frac{\epsilon^2}{\|\phi\|}$$

Entonces, usando la desigualdad de 2.2, obtenemos que:

$$|\phi(x) - \psi_F(x)|^2 = |\phi\left(x(1 - q_F)\right)|^2 \leq \phi(xx^*)\phi(1 - q_F) < \|x\|^2\varepsilon^2$$

Luego, $\psi_F \xrightarrow{\|\cdot\|} \phi$. Como el predual de $\mathcal{M}$ es $\|\cdot\|-$cerrado, basta ver que ψ_F es $\sigma-$débil con F finito. Sea entonces $\{x_j\}_{j\in J} \subset \mathcal{M}$ una red que converge $\sigma-$débil a $x \in \mathcal{M}$. Como en $\mathcal{M}$ las topologías fuerte, débil y $\sigma-$débil coinciden, resulta que $x_j \xrightarrow{sot} x$. Entonces, fijado un $F \subset I$:

$$\begin{aligned} |\psi_F(x_j - x)|^2 &\leq \sum_{i\in F} |\phi\left(1(x_j - x)p_i\right)|^2 \leq \sum_{i\in F} \phi(1)\phi\left(p_i(x_j - x)^*(x_j - x)p_i\right) \\ &\leq \phi(1)\sum_{i\in F} \|(x_j - x)p_i\xi_i\|^2 \leq \|x_j - x\|^2\phi(1)\sum_{i\in F}\|p_i\xi_i\|^2 \to 0 \end{aligned}$$

iii) $\Rightarrow$ i) Como en $\mathcal{M}$ una sucesión débil convergente también es $\sigma-$débil convergente, en particular un red monótona creciente débilmente convergente también es $\sigma-$débil convergente. Luego ϕ es normal.

□

Corolario 2.6
El predual de $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann es $\mathcal{M}_{*,+}$.

Proposición 2.7
Sean $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra de von Neumann, $\widetilde{\mathcal{H}}$ Hilbert y $\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)$ un $*-$morfismo. Si π es inyectivo, entonces π es una isometría. Si además es normal, entonces π es un homeomorfismo $\sigma-$débil con su imagen, $\pi(\mathcal{M})$ es un álgebra de von Neumann, y, por lo tanto, $\mathcal{M} \cong \pi(\mathcal{M})$.

En particular, todo $\alpha \in Aut(\mathcal{M})$ es $\sigma-$débil homeomorfismo e isometría.

Demostración. Veamos que π es una isometría. Primero, notemos que dado $x \in \mathcal{M}$ y usando la C^*-identidad:

$$\|\pi(x)\|^2 = \|x\|^2 \Leftrightarrow \|\pi(x)^{\tilde{*}}\pi(x)\| = \|x^*x\| \Leftrightarrow \|\pi(x^*x)\| = \|x^*x\|$$

Entonces, alcanza con ver que $\|\pi(x)\| = \|x\|$ para $x \in \mathcal{M}$ autoadjuntos. En este caso, sabemos que la norma es igual a su radio espectral. Veamos entonces algo más fuerte que es que $Spec(\pi(x)) = Spec(x)$.

Si $\lambda \notin Spec(x)$, entonces $x - \lambda 1_{\mathcal{M}}$ es inversible. Por el ítem iv) de 1.1, tenemos que $(x - \lambda 1_{\mathcal{M}})^{-1} \in \mathcal{M}$. Entonces $\pi(x) - \lambda 1_{\mathcal{M}}$ es inversible con inversa $\pi\left((x - \lambda 1_{\mathcal{M}})^{-1}\right)$. Por lo tanto $\lambda \notin Spec(\pi(x))$, es decir que $Spec(\pi(x)) \subset Spec(x)$. Supongamos que la inclusión es estricta, entonces existe una función real, no nula y continua en $Spec(x)$ que se anula en $Spec(\pi(x))$. Por el teorema espectral 0.9 $f(x) \neq 0$ y $f(\pi(x)) = 0$. Usando el hecho de que f es continua y aproximándola por polinomios, se puede ver que $f(x) \in \mathcal{M}$ y que $\pi(f(x)) = f(\pi(x))$ (usando con los polinomios que π es un $*-$morfismo). Luego, por la inyectividad de π, resulta que $f(x) = 0$, llegando a una contradicción. Concluyendo así que π es una isometría.

Para ver que π es $\sigma-$débil continuo, notemos que $\forall \phi \in \mathfrak{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right)_{*,+}$ tenemos que $\phi \circ \pi \in \mathcal{M}_{*,+}$. Por 2.5, sabemos que $\forall \phi$, $\phi \circ \pi$ es $\sigma-$débil continua y, por lo tanto, π también es $\sigma-$débil continua.

Como π es $\sigma-$débil continua e isometría, y $\mathcal{M}_1 = \{x \in \mathcal{M} \ / \ \|x\| \leq 1\}$ la bola de $\mathcal{M}$ $\sigma-$débil compacta por Banach-Alaoglu, se deduce que $\pi(\mathcal{M}_1) = \pi(\mathcal{M})_1$ es $\sigma-$débil compacta. Por el teorema de Krein-Schmulian, $\pi(\mathcal{M})$ es $\sigma-$débil cerrada y por lo tanto, un álgebra de von Neumann.

Si tenemos $\alpha \in Aut(\mathcal{M})$, por ser inyectivo es una isometría. Pero como además preserva el orden en el conjunto de los autoadjuntos, también es normal.

□

Definición 2.8 *Subconjunto de $\mathcal{H}$ cíclico y separador para $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$*

Dada un álgebra de von Neumann $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, un conjunto $\mathsf{S} \subset \mathcal{H}$ se dice:

cíclico para $\mathcal{M}$ si $[\mathcal{M}\mathsf{S}] = \mathcal{H}$.

separador para $\mathcal{M}$ si para un $x \in \mathcal{M}$ tal que $x\mathsf{S} = \{0\}$, entonces $x = 0$.

Lema 2.9
Sean $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra de von Neumann, y $\mathsf{S} \subset \mathcal{H}$. Entonces:

$$\mathsf{S} \text{ es cíclico para } \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathsf{S} \text{ es separador para } \mathcal{M}'$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $y \in \mathcal{M}'$ tal que $y\mathsf{S} = 0$. Entonces, $\forall x \in \mathcal{M}$, $0 = xy\mathsf{S} = yx\mathsf{S}$. Por ser S cíclico para $\mathcal{M}$, resulta que $x\mathcal{H} = 0$. Luego $x = 0$.

$\Leftarrow$) Sea $P : \mathcal{H} \longrightarrow [\mathcal{M}\mathsf{S}]$ la proyección ortogonal de $[\mathcal{M}\mathsf{S}]$. Por el ítem v) de 1.1, sabemos que $P \in \mathcal{M}'$ y $Ps = s \; \forall s \in \mathsf{S}$, es decir que $(Id - P)\mathsf{S} = 0$. Como S es separador para $\mathcal{M}'$, tenemos que $P = Id$.

□

Teorema 2.10 *Construcción de Gelfand-Naimark-Segal para $\mathcal{M}$ con $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel*
Sea $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra de von Neumann y $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel. Entonces existe una $3-$upla $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \Omega_\phi)$ tal que:

a) $\mathcal{H}_\phi$ es un espacio de Hilbert y $\pi_\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$ es un $*-$morfismo.

b) $\Omega_\phi \in \mathcal{H}_\phi$ y $\mathcal{H}_\phi = \overline{\pi_\phi(\mathcal{M})\,\Omega_\phi}$.

c) $\phi(x) = \langle \pi_\phi(x)\,\Omega_\phi; \Omega_\phi \rangle_\phi$

Esta $3-$upla es única salvo operador unitario. Es decir, si existe otra $3-$upla $(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\pi}, \widetilde{\Omega})$ con estas propiedades, entonces existe un operador unitario $u : \mathcal{H}_\phi \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $u\Omega_\phi = \widetilde{\Omega}$ y $\widetilde{\pi}(x) = u\pi_\phi(x)u^* \; \forall x \in \mathcal{M}$.

Además, π_ϕ es inyectiva y normal. Entonces, por 2.7, π_ϕ es una isometría y $\mathcal{M} \cong \pi_\phi(\mathcal{M})$. Respecto a Ω_ϕ, es cíclico y separador para $\mathcal{M}$ con la identificación anterior y $\|\Omega_\phi\|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi$ es un estado.

Demostración. Definimos $\langle x, y \rangle_\phi = \phi(y^*x)$. Por 2.2 y el hecho de que ϕ es fiel hace que $\left(\mathcal{M}, \langle , \rangle_\phi\right)$ sea un espacio pre-Hilbert. Sea entonces $\mathcal{H}_\phi = \overline{\mathcal{M}}^{\langle,\rangle_\phi}$ y consideremos $\mathfrak{i} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}_\phi$ la inclusión. Definimos entonces $\mathfrak{i}(1_\mathcal{M}) = \Omega_\phi$. Claramente, $\|\Omega_\phi\|^2 = \phi(1_\mathcal{M})$, es por eso que $\|\Omega_\phi\|_\phi = 1 \Leftrightarrow \phi$ es un estado.

Notemos por otro lado que, fijado $x \in \mathcal{M}$, la aplicación multiplicar a izquierda por x define, por densidad de $\mathcal{M}$, un operador que está en $\mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$. Para demostrarlo, veamos que dado $y \in \mathcal{M}$, $\|xy\|_\phi^2 = \phi((xy)^*xy) \leq \|x\|^2\phi(y^*y) = \|x\|^2\|y\|_\phi^2$. Por la positividad de ϕ, alcanza con ver que $y^*x^*xy = (xy)^*xy \leq \|x\|^2(y^*y)$:

$$\begin{aligned} (xy)^*xy \leq \|x\|^2 y^*y \;&\Leftrightarrow\; 0 \leq y^*(\|x\|^2 1_\mathcal{M} - x^*x)y \\ &\Leftrightarrow\; \langle (\|x\|^2 1_\mathcal{M} - x^*x)\, y\xi, y\xi \rangle \geq 0 \; \forall \xi \in \mathcal{H} \\ &\Leftrightarrow\; \langle \|x\|^2 \xi, \xi \rangle \geq \langle x^*x\xi, \xi \rangle \;\; \forall \xi \in Im(y) \\ &\Leftrightarrow\; \|x\|^2\|\xi\|^2 \geq \|x\xi\|^2 \; \forall \xi \in Im(y) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Definimos entonces $\pi_\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$ el operador que manda $x \in \mathcal{M}$ al operador multiplicar a izquierda por x, que lo notaremos $\pi_\phi(x)$. Claramente π_ϕ es morfismo de álgebras unital. Veamos que preserva la involución. Dados $x, y, z \in \mathcal{M}$:

$$\langle \pi_\phi(x)y, z \rangle_\phi = \langle xy, z \rangle_\phi = \phi(z^*xy) = \phi((x^*z)^*y) = \langle y, x^*z \rangle_\phi = \langle y, \pi_\phi(x^*)z \rangle_\phi$$

Por la densidad de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{H}_\phi$, se deduce que $(\pi_\phi(x))^* = \pi_\phi(x^*)$. Además, notar que $\langle \pi_\phi(x)\,\Omega_\phi; \Omega_\phi \rangle_\phi = \langle x1_\mathcal{M}; 1_\mathcal{M} \rangle_\phi = \phi(1_\mathcal{M} x 1_\mathcal{M}) = \phi(x)$ y que $\pi_\phi(\mathcal{M})\,\Omega_\phi = \mathcal{M}$. Así se concluyen los 3 primeros incisos.

Supongamos ahora que existe otra 3−upla $(\widetilde{\mathcal{H}}, \widetilde{\pi}, \widetilde{\Omega})$ que cumple con lo anterior. Entonces tenemos que $\overline{\pi_\phi(\mathcal{M})\,\Omega_\phi} = \mathcal{H}_\phi$ y $\overline{\widetilde{\pi}(\mathcal{M})\,\widetilde{\Omega}} = \widetilde{\mathcal{H}}$. Definimos el operador $u : \mathcal{H}_\phi \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$ tal que $u\pi_\phi(x)\,\Omega_\phi = \widetilde{\pi}(x)\,\widetilde{\Omega}$. Por otro lado, dados $x, y \in \mathcal{M}$:

$$\left\langle \widetilde{\pi}(x)\,\widetilde{\Omega}; \widetilde{\pi}(y)\,\widetilde{\Omega} \right\rangle_\sim = \left\langle \widetilde{\pi}(y^*x)\,\widetilde{\Omega}; \widetilde{\Omega} \right\rangle_\sim = \phi(y^*x) = \langle \pi_\phi(x)\,\Omega_\phi; \pi_\phi(y)\,\Omega_\phi \rangle_\phi$$

Entonces u es unitario y $u \circ \pi_\phi(x) = \widetilde{\pi} \circ u(x)$. Además, resulta que $u(\Omega_\phi) = \widetilde{\Omega}$.

Veamos que π_ϕ es normal, es decir, dada $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}^+$ una red monótona creciente que converge débilmente a x, entonces $\pi_\phi(x_i) \to \pi_\phi(x)$ débilmente. Si $x_i \nearrow x$ entonces $y^*x_iy \nearrow y^*xy \ \forall y \in \mathcal{M}$. Dado que ϕ es normal:

$$\langle \pi_\phi(x_i)y, y \rangle_\phi = \phi(y^*x_iy) \nearrow \phi(y^*xy) = \langle \pi_\phi(x)y, y \rangle_\phi \quad \forall y \in \mathcal{M}$$

Por (2.1), $\|\pi_\phi(x)\| \le \|x\| \ \forall x \in \mathcal{M}$. Por lo tanto $\{x_i\}_{i\in I}$ está uniformemente acotada, y entonces $\{\pi_\phi(x_i)\}_{i\in I}$ también lo está. Luego $\pi_\phi(x_i) \to \pi_\phi(x)$ débilmente.

Para ver que π_ϕ es inyectiva, sea $x \in \mathcal{M}$ tal que $\pi_\phi(x) = 0$. Entonces, tomando norma, $0 = \|\pi_\phi(x)\Omega_\phi\|_\phi^2 = \phi(x^*x)$. Como ϕ es fiel, $x^*x = 0$, entonces $x = 0$.

Por el ítem b) ya vimos que Ω_ϕ es cíclico para $\pi_\phi(\mathcal{M})$. Veamos ahora que es separador. Sea $y \in \pi_\phi(\mathcal{M})$ tal que $y\Omega_\phi = 0$. Como π_ϕ es inyectivo, $\exists!\, x \in \mathcal{M}$ tal que $\pi_\phi(x) = y$. Y por definición, $\Omega_\phi = \pi_\phi(1_\mathcal{M})$. Luego $0 = y\Omega_\phi = \pi_\phi(x1_\mathcal{M}) = \pi_\phi(x)$, que por la inyectividad de π_ϕ queda que $x = 0$ y por lo tanto $y = 0$.

□

Teoría de Tomita-Takesaki para funcionales positivas, normales y fieles

Proposición 2.11

Sea $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann actuando en $\mathcal{H}$ donde $\Omega \in \mathcal{H}$ es un vector separador y cíclico de $\mathcal{M}$ (como sería el caso de la construcción GNS).

a) Consideramos los siguientes operadores lineales conjugados:

$$\begin{array}{rcl} S_0 : \mathcal{M}\Omega \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x\Omega & \longmapsto & x^*\Omega \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} F_0 : \mathcal{M}'\Omega \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ x'\Omega & \longmapsto & x'^*\Omega \end{array}$$

Entonces, S_0 y F_0 son operadores densamente definidos y clausurables. A sus clausuras las notaremos S y F, y cumplen que $S = F^* = F_0^*$ y $F = S^* = S_0^*$.

b) Sea $S = J\Delta^{1/2}$ la descomposición polar de S. Entonces:

i) Δ es positivo e inversible.

ii) $J^2 = Id$ y es una isometría conjugada.

Demostración.

a) Como Ω es cíclico y separador para $\mathcal{M}$, por 2.9, también lo es para $\mathcal{M}'$. Por lo tanto, S_0 y F_0 son densamente definidos. Notar que si $x \in \mathcal{M}$ y $x' \in \mathcal{M}'$:

$$\langle F_0(x'\Omega), x\Omega\rangle = \langle x'^*\Omega, x\Omega\rangle = \langle \Omega, x'x\Omega\rangle = \langle \Omega, xx'\Omega\rangle = \langle x^*\Omega, x'\Omega\rangle = \langle S_0(x\Omega), x'\Omega\rangle$$

Por la definición de la adjunta de un operador conjugado, $F_0^*|_{\mathcal{M}\Omega} = S_0$, es decir $S_0 \subset F_0^*$. Entonces, F_0^* es densamente definido y, por lo tanto, F_0 es clausurable, notando $F = \overline{F_0}$. Como $F^* = F_0^* \subset S_0$, resulta que S_0 es clausurable. Si $S = \overline{S_0}$, tenemos que $S \subset F^*$. Y viendo que $F^* \subset S$, obtenemos $F^* = S$ y $F = F^{**} = S^*$.

Sea $\xi \in Dom(F^*)$ y $\eta = F^*(\xi)$, queremos ver que $(\xi, \eta) \in Graph(S)$. Tenemos que $\langle \xi, F\sigma\rangle = \overline{\langle \eta, \sigma\rangle}$ $\forall \sigma \in Dom(F)$ por la definición de F. En particular:

$$\langle \xi, (x')^*\Omega\rangle = \overline{\langle \eta, x'\Omega\rangle} \ \forall x' \in \mathcal{M}' \tag{2.2}$$

Definimos entonces:

$$\begin{array}{rccl} a: & \mathcal{M}'\Omega & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & x'\Omega & \longmapsto & x'\xi \quad x' \in \mathcal{M}' \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} b: & \mathcal{M}'\Omega & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & y'\Omega & \longmapsto & y'\eta \quad y' \in \mathcal{M}' \end{array}$$

En particular, $a\Omega = \xi$ y $b\Omega = \eta$. Entonces, usando (2.2):

$$\begin{aligned} \langle a(x'\Omega), y'\omega\rangle &= \langle x'\xi, y'\Omega\rangle = \langle \xi, (x')^*y'\Omega\rangle \\ &= \overline{\langle \eta, ((x')^*y')^*\Omega\rangle} = \langle (y')^*x'\Omega, \eta\rangle = \langle x'\Omega, y'\eta\rangle \\ &= \langle x'\Omega, b(y'\Omega)\rangle \end{aligned}$$

Por lo tanto, $b \subset a^*$ y $a \subset b^*$. En particular, a^* y b^* son densamente definidos, y así a y b son clausurables. Si $c = \overline{a}$, entonces $c^* = a^* \supset \overline{b}$, $c\Omega = a\Omega = \xi$ y $c^*\Omega = b\Omega = \eta$.

Por otro lado, notemos que $x'a(z'\Omega) = x'z'\xi = a(x'z'\Omega)$ $\forall x', z' \in \mathcal{M}'$, es decir $x'a \subset ax'$ $\forall x' \in \mathcal{M}'$. Entonces $x'c \subset cx'$ $\forall x' \in \mathcal{M}'$, o sea que $c \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$. Por 1.20 sabemos que $c^* \mathrel{\widehat{\in}} \mathcal{M}$ y, siendo $c = u|c|$ la descomposición polar, $u \in \mathcal{M}$ y todas las proyecciones de $|c|$ y $|c^*|$ están en $\mathcal{M}$. Sea $c_n = u|c|\chi_{[0,n]}(|c|) \in \mathcal{M}$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|\xi - c_n\Omega\| &= \|(c - c_n)\Omega\| = \|u\left(|c| - |c|\chi_{[0,n]}(|c|)\right)\Omega\| \\ &= \|\left(Id - \chi_{[0,n]}(|c|)\right)|c|\Omega\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \end{aligned}$$

Análogamente se obtiene que $\|\eta - c_n^*\Omega\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Entonces, si consideramos $S_0(c_n\Omega) = c_n^*\Omega = \eta\chi_{[0,n]}(|c^*|)$, es decir, $(\xi, \eta) \in \overline{Graph(S_0)} = Graph(S)$.

b) i) Por definición, $S_0 = S_0^{-1}$ y $F_0 = F_0^{-1}$. Por lo tanto, vale que $S = S^{-1}$ y $F = F^{-1}$. Entonces $\Delta = S^*S = FS$ es positiva e inversible con $\Delta^{-1} = SF$.

b) ii) Notemos que como $S = S^{-1} = \Delta^{-1/2}J^{-1}$, entonces $J = \Delta^{1/2}S = S\Delta^{-1/2}$. Entonces, dado $\xi \in Dom(S)$:

$$J^2\xi = \left(S\Delta^{-1/2}\right)\left(\Delta^{1/2}S\right)\xi = S^2\xi = \xi$$

Como $Dom(S) = \mathcal{H}$, resulta que $J^2 = Id$. En particular, J es inversible, que al ser isometría parcial, podemos concluir que J es una isometría conjugada.

□

Teorema 2.12 *Variante del Teorema de Radon-Nikodym lineal de Sakai*
Sean $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ estado, $\lambda \in (0,\infty)$ y $\psi \in \mathcal{M}_*$ tales que:

$$|\psi(y^*x)| \leq (\phi(x^*x))^{1/2}(\phi(y^*y))^{1/2} \qquad \forall x,y \in \mathcal{M}$$

Entonces $\exists\, a \in \mathcal{M}$ que depende de λ con $\|a\| \leq 1$ tal que:

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{2}\phi(ax) + \frac{1}{2\lambda}\phi(xa) \qquad \forall x \in \mathcal{M}$$

Demostración. Fijado λ, sean:

$$\omega_a(x) := \frac{\lambda}{2}\phi(ax) + \frac{1}{2\lambda}\phi(xa) \qquad E := \{\omega_a \ / \ a \in \mathcal{M}, \|a\| \leq 1\}$$

Como ϕ es normal, entonces la aplicación $a \mapsto \omega_a$ es $\sigma-$débil-débil continua, y dado que $\{a \in \mathcal{M} \ / \ \|a\| \leq 1\}$ es $\sigma-$débil compacto, entonces E es débil compacto. Además, por la linealidad de ϕ, E es convexo.

Supongamos entonces que $\psi \notin E$. Entonces, por el teorema de Hahn-Banach existe $h \in (\mathcal{M}_*)^* = \mathcal{M}$, tal que:

$$Re(\psi(h)) > \sup_{\omega \in E} Re(\omega(h)) = \sup_{a \in \mathcal{M}, \|a\| \leq 1} Re(\omega_a(h))$$

Sea entonces la descomposición polar de $h = u|h| = |h^*|u$. Notemos que $u \in \mathcal{M}$ y $\|u\| \leq 1$ y que $u^*h = |h|$ y $hu^* = |h^*|$, entonces:

$$\omega_{u^*}(h) = \frac{\lambda}{2}\phi(u^*h) + \frac{1}{2\lambda}\phi(hu^*) = \frac{\lambda}{2}\phi(|h|) + \frac{1}{2\lambda}\phi(|h^*|)$$

Uniendo las dos expresiones tenemos que:

$$Re(\psi(h)) > Re\left(\frac{\lambda}{2}\phi(|h|) + \frac{1}{2\lambda}\phi(|h^*|)\right) \geq \phi(|h|)^{1/2}\phi(|h^*|)^{1/2}$$

La última desigualdad proviene de que: $\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}\phi(|h|)} - \sqrt{\frac{1}{2\lambda}\phi(|h^*|)}\right)^2 \geq 0$.

Por otro lado, $Re(\psi(h) \leq |\psi(h)| = |\psi\left(u|h|^{1/2}|h|^{1/2}\right)$, y usando la hipótesis:

$$Re(\psi(h)) \leq \phi(|h|)^{1/2}\phi(u|h|^{1/2}|h|^{1/2}u^*) = \phi(|h|)^{1/2}\phi(|h^*|)^{1/2}$$

¡Contradicción!

□

Lema 2.13
Sea f una función continua y acotada en $A := \{z \in \mathbb{C} \ / \ -1/2 \leq Re(z) \leq 1/2\}$, y analítica en A°. Entonces:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f\left(\frac{1}{2}+it\right) + f\left(-\frac{1}{2}+it\right)}{2cosh(\pi t)}dt$$

Proposición 2.14
Con lo establecido en la proposición 2.11:

a) $\forall a' \in \mathcal{M}', \lambda > 0, \; \exists\, a \in \mathcal{M}$ tal que $a\Omega \in Dom(F)$ y $\frac{1}{2}\left(\lambda S + \lambda^{-1} F\right) a\Omega = a'\Omega$

b) Si $\xi \in Dom(\Delta^{1/2}) \cap Dom(\Delta^{-1/2})$, entonces $\exists\, \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}\Omega \cap Dom(\Delta^{-1/2})$ tal que: $\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi \quad \Delta^{1/2}\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \Delta^{1/2}\xi \quad \Delta^{-1/2}\xi_n \xrightarrow{n\to\infty} \Delta^{-1/2}\xi$

c) Además, $\frac{\lambda}{2}\overline{\langle aS\xi, F\eta\rangle} + \frac{1}{2\lambda}\overline{\langle aF\xi, S\eta\rangle} = \langle a'\xi, \eta\rangle \;\; \forall \xi, \eta \in Dom(S) \cap Dom(F)$

d) $a = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2it} \frac{\Delta^{it} J a' J \Delta^{-it}}{2cosh(\pi t)} dt$

Demostración.

a) Sin perder generalidad, podemos suponer que $\|a'\| \leq 1$. Sea $\phi(x) := \langle x\Omega, \Omega\rangle$ un estado normal y fiel en $\mathcal{M}$ y sea $\psi := \langle x\Omega, a'\Omega\rangle$. Entonces $\psi \in \mathcal{M}_*$. Sean $x, y \in \mathcal{M}$:

$$|\psi(y^*)| = |\,\langle y^* x\Omega, a'\Omega\rangle\,| = |\,\langle x\Omega, a'y\Omega\rangle\,| \leq \|x\Omega\|\|y\Omega\| = \phi(x^*x)^2\phi(y^*y)^2$$

Estamos en las hipótesis de 2.12. Entonces, existe $a \in \mathcal{M}$ con $\|a\| \leq 1$ tal que:

$$\psi(x) = \frac{\lambda}{2}\phi(ax) + \frac{1}{2\lambda}\phi(xa)$$

Por lo tanto:

$$\langle x\Omega, a'\Omega\rangle = \frac{\lambda}{2}\langle ax\Omega, \Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle xa\xi, \Omega\rangle = \frac{\lambda}{2}\langle x\Omega, a^*\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle a\Omega, x^*\Omega\rangle$$

Con la intención de despejar $x\Omega$ obtenemos que:

$$2\lambda \left\langle x\Omega, a'\Omega - \frac{\lambda}{2}a^*\Omega \right\rangle = \langle a\Omega, S(x\Omega)\rangle$$

Dado que $S^* = F$ y recordando que $\langle F(x'\Omega), x\Omega\rangle = \langle S(x\Omega), x'\Omega\rangle$, tenemos que $a\Omega \in Dom(F)$ y además:

$$F(a\Omega) = 2\lambda\left(a'\omega - \frac{\lambda}{2}a^*\Omega\right) = 2\lambda\left(a'\omega - \frac{\lambda}{2}S(a\Omega)\right)$$

Despejando $a'\Omega$ obtenemos la igualdad buscada.

b) Sea $\eta = (S + F)\xi = J(\Delta^{1/2} + \Delta^{-1/2})\xi$. Consideremos $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}'\Omega$ tal que $\eta_n \longrightarrow \eta$. Entonces, existe $\{a'_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}'$ tal que $\eta_n = a'_n\Omega$. Por otro lado, notemos que $\Delta^{1/2} + \Delta^{-1/2}$ tiene inversa acotada, pues $\min\limits_{t>0}\left(t^{1/2} + t^{-1/2}\right) = 2$. Por lo tanto, podemos definir:

$$\xi_n := \left(\Delta^{1/2} + \Delta^{-1/2}\right)^{-1} J\eta_n$$

Entonces, $(S + F)\xi_n = \eta_n = a'_n\Omega$. Tomando $\lambda = 1$, podemos usar el ítem a) para obtener $a_n \in \mathcal{M}$ tales que $\frac{1}{2}\left(S + F\right) a_n\Omega = a'_n\Omega$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Como $S+F = J(\Delta^{1/2}+\Delta^{-1/2})$ es inversible, tenemos que:

$$\xi_n = \frac{1}{2}a_n\Omega \in \mathcal{M}\Omega \cap Dom(F) = \mathcal{M}\Omega \cap Dom(\Delta^{-1/2})$$

Luego:

$$\begin{array}{rcll}
\xi_n & = & \left(\Delta^{1/2}+\Delta^{-1/2}\right)^{-1} J\eta_n & \xrightarrow{n\to\infty} \xi \\
\Delta^{1/2}\xi_n & = & \underbrace{\Delta^{1/2}\left(\Delta^{1/2}+\Delta^{-1/2}\right)^{-1}}_{\text{acotado por teoría espectral}} J\eta_n & \xrightarrow{n\to\infty} \Delta^{1/2}\xi \\
\Delta^{-1/2}\xi_n & = & \underbrace{\Delta^{-1/2}\left(\Delta^{1/2}+\Delta^{-1/2}\right)^{-1}}_{\text{acotado por teoría espectral}} J\eta_n & \xrightarrow{n\to\infty} \Delta^{-1/2}\xi
\end{array}$$

c) Usando que $Dom(S) = Dom(\Delta^{1/2})$ y $Dom(F) = Dom(\Delta^{-1/2})$ junto con el ítem b), alcanza con ver lo que queremos para $\xi, \eta \in \mathcal{M}\Omega \cap Dom(\Delta^{-1/2})$ dados. En ese caso, $\xi = x_1\Omega$ y $\eta = x_2\Omega$. Entonces, usando el ítem a):

$$\begin{array}{rcl}
\langle a'\xi, \eta\rangle & = & \langle a'\Omega, x_1^*x_2\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\langle Sa\Omega, x_1^*x_2\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle Fa\Omega, x_1^*x_2\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\langle a^*\Omega, x_1^*x_2\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle Sx_1^*x_2\Omega, a\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\langle x_1a^*\Omega, x_2\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle x_2^*x_1\Omega, a\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\langle Sax_1^*\Omega, x_2\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle x_1\Omega, x_2a\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\langle SaSx_1\Omega, x_2\Omega\rangle + \frac{1}{2\lambda}\langle x_1\Omega, Sa^*Sx_2\Omega\rangle \\
& = & \frac{\lambda}{2}\overline{\langle aSx_1\Omega, Fx_2\Omega\rangle} + \frac{1}{2\lambda}\overline{\langle aFx_1\Omega, Sx_2\Omega\rangle} \\
& = & \frac{\lambda}{2}\overline{\langle aS\xi, F\eta\rangle} + \frac{1}{2\lambda}\overline{\langle aF\xi, S\eta\rangle}
\end{array}$$

d) Por el ítem c), tenemos que $\forall \xi, \eta \in Dom(s) \cap Dom(F)$:

$$\langle a'\xi, \eta\rangle = \frac{\lambda}{2}\overline{\langle a\Delta^{-1/2}J\xi, \Delta^{1/2}J\eta\rangle} + \frac{1}{2\lambda}\overline{\langle a\Delta^{1/2}J\xi, \Delta^{-1/2}J\eta\rangle}$$

Usando que J es una isometría conjugada, nos queda que $\forall \xi, \eta \in Dom(S) \cap Dom(F)$:

$$\langle Ja'J\xi, \eta\rangle = \frac{\lambda}{2}\left\langle a\Delta^{-1/2}J\xi, \Delta^{1/2}J\eta\right\rangle + \frac{1}{2\lambda}\left\langle a\Delta^{1/2}J\xi, \Delta^{-1/2}J\eta\right\rangle \tag{2.3}$$

Consideremos:

$$\mathcal{H}_0 := \left\{\xi \in \mathcal{H} \ / \ \xi \in Rg\left(\chi_{[1/n,n]}(\Delta)\right) \ \text{ para algún } \ n \in \mathbb{N}\right\}$$

Entonces $\mathcal{H}_0$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$, y $\mathcal{H}_0 \subset Dom(\Delta^z)$ $\forall z \in \mathbb{C}$.

Sean, $\xi, \eta \in \mathcal{H}_0$ y definimos $f(z) := \langle \lambda^{2z}a\Delta^{-z}\xi, \Delta^{\overline{z}}\eta\rangle$ con $z \in \mathbb{C}$. Entonces f es analítica en todo $\mathbb{C}$ y acotada en $A := \{z \in \mathbb{C} \ / \ -1/2 \le Re(z) \le 1/2\}$ y estamos en las hipótesis de 2.13, por lo tanto:

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left\langle a\Delta^{-1/2}\Delta^{-it}\xi, \Delta^{1/2}\Delta^{-it}\eta\right\rangle \lambda^{2it+1}}{2cosh(\pi t)} + \frac{\left\langle a\Delta^{1/2}\Delta^{-it}\xi, \Delta^{-1/2}\Delta^{-it}\eta\right\rangle \lambda^{2it-1}}{2cosh(\pi t)} dt$$

Aplicando 2.3, nos queda que:

$$\langle a\xi, \eta\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2it} \frac{\langle Ja'J\Delta^{-it}\xi, \Delta^{-it}\eta\rangle}{2cosh(\pi t)} dt$$

Luego,

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^{2it} \frac{\Delta^{it} Ja'J\Delta^{-it}}{2cosh(\pi t)} dt$$

□

Teorema 2.15 *Teorema de Tomita Takesaki*
Con lo establecido en la proposición 2.11:

a) $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$

b) $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Demostración. Comencemos probando que $\Delta^{it}J\mathcal{M}'J\Delta^{-it} \subset \mathcal{M}$. Recordemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\perp} &= \{\omega \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{*} \ / \ \omega|_{\mathcal{M}} = 0\} \\ &= \{tr(\cdot\, y) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{*} \ / \ y \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})_{tr} \ \text{ y } \ tr(xy) = 0\, \forall x \in \mathcal{M}\} \end{aligned}$$

Entonces, $\mathcal{M} = \left\{a \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ / \ \omega(a) = 0, \ \forall \omega \in \mathcal{M}^{\perp}\right\}$.

Por otro lado, usando 1.10, sabemos que para cualquier $\omega \in \mathcal{M}^{\perp}$ existen $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{\eta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}$ con $\sum \|\xi_n\|^2 < \infty$ y $\sum \|\eta_n\|^2 < \infty$ tales que $\omega(x) = \sum \langle x\xi_n, \eta_n\rangle$. Sean $a' \in \mathcal{M}'$ y $\omega \in \mathcal{M}^{\perp}$. Consideremos $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por:

$$f(t) := \frac{\omega\left(\Delta^{it}Ja'J\Delta^{-it}\right)}{2cosh(\pi t)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Entonces $f \in L^1(\mathbb{R})$. Sea $\widehat{f}$ la transformada de Fourier de f. Por el ítem d) de 2.14:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \omega\left(\left(e^{s/2}\right)^{2it} \tfrac{\Delta^{it}Ja'J\Delta^{-it}}{2cosh(\pi t)}\right) dt \\ &= \sum \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \left(\left(e^{s/2}\right)^{2it} \tfrac{\Delta^{it}Ja'J\Delta^{-it}}{2cosh(\pi t)}\right) \xi_n, \eta_n \right\rangle dt \\ &= \sum \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \left(\left(e^{s/2}\right)^{2it} \tfrac{\Delta^{it}Ja'J\Delta^{-it}}{2cosh(\pi t)}\right) \xi_n, \eta_n \right\rangle dt \\ &= \sum \langle a\xi_n, \eta_n\rangle = \omega(a) = 0 \end{aligned}$$

Luego, como $\widehat{f}(s) = 0\, \forall s \in \mathbb{R}$, resulta que $f = 0$. Es decir $\Delta^{it}Ja'J\Delta^{-it} \in \mathcal{M}$ para cualquier $a' \in \mathcal{M}'$ y $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto:

$$\Delta^{it}J\mathcal{M}'J\Delta^{-it} \subset \mathcal{M} \quad \forall t \in \mathbb{R} \tag{2.4}$$

En particular, cuando $t = 0$, $J\mathcal{M}'J \subset \mathcal{M}$

Notar que como $S^* = F$, si hacemos la construcción de todo lo anterior con $\mathcal{M}'$, en vez de trabajar con S, Δ y J, lo haríamos con F, Δ^{-1} y J. Por lo tanto, lo anterior también demuestra que $J\mathcal{M}J \subset \mathcal{M}'$. Luego:

$$\mathcal{M} = J\mathcal{M}'J \qquad \text{y} \qquad \mathcal{M}' = J\mathcal{M}J$$

Aplicando esto a (2.4), tenemos que $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} \subset \mathcal{M}$, y entonces también tenemos $\mathcal{M} \subset \Delta^{-it}\mathcal{M}\Delta^{it}$. Luego, $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}\ \forall t \in \mathbb{R}$

□

Condición de borde de Kubo-Martin-Schwinger

Definición 2.16 *Definiciones surgidas a partir del Teorema de Tomita-Takesaki*
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y la construcción GNS $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \Omega_\phi)$ asociada. En esta situación, aplicando la construcción de 2.11, notaremos a los operadores asociados al par $(\mathcal{M}, \phi)$ como S_ϕ y F_ϕ y llamaremos:

Δ_ϕ el *operador modular*,

J_ϕ la *conjugación modular*,

$\sigma_t^\phi(x) = \pi_\phi^{-1}\left(\Delta_\phi^{it}\pi_\phi(x)\Delta_\phi^{-it}\right)$ al *grupo modular* de $*-$automorfismos de $\mathcal{M}$

Notar que por 2.7, los σ_t^ϕ son $\sigma-$débil homeomorfismos e isometrías, y que la acción $t \longmapsto \sigma_t^\phi$ es puntualmente fuertemente continua, pues dado $x \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\|\sigma_t^\phi(x) - \sigma_s^\phi(x)\| &= \|\Delta_\phi^{it}\pi_\phi(x)\Delta_\phi^{-it} - \Delta_\phi^{is}\pi_\phi(x)\Delta_\phi^{-is}\| \\
&= \|\Delta_\phi^{it}\pi_\phi(x)\left(\Delta_\phi^{-it} - \Delta_\phi^{-is}\right) + \left(\Delta_\phi^{it} - \Delta_\phi^{is}\right)\pi_\phi(x)\Delta^{-is}\| \\
&\leq \|\sigma_t^\phi(x)\|\|Id - \Delta^{i(t-s)}\| + \|\Delta^{i(t-s)} - Id\|\|\sigma_s^\phi(x)\| \\
&\leq 2\|\Delta_\phi^{i(t-s)} - Id\|
\end{aligned}$$

Y $\|\Delta_\phi^{i(t-s)} - Id\| \xrightarrow{s\to t} 0$ por cálculo funcional, dado que Δ es autoadjunta.
Para simplificar la notación, supondremos que $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$ y cuando ϕ esté determinado obviaremos el subíndice.

Definición 2.17 *Flujo en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann*
Un *flujo* en $\mathcal{M}$ es un grupo uniparamétrico $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset Aut(\mathcal{M})$ tal que la aplicación $t \longmapsto \alpha_t$ es puntualmente fuertemente continua. En particular, dada $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel, $\left\{\sigma_t^\phi\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un flujo en $\mathcal{M}$.

Definición 2.18 *Condición de borde de Kubo-Martin-Schwinger*
Decimos que $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel cumple la *condición KMS respecto* $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}} \subset Aut(\mathcal{M})$ *flujo*, si dados $x, y \in \mathcal{M}$, existe $F : D = \{\lambda \in \mathbb{C} \;/\; Im(\lambda) \in [0,1]\} \longrightarrow \mathbb{C}$ función analítica en D° y continua y acotada en D tal que:

$$F(t+i) = \phi(y\alpha_t(x)) \quad \wedge \quad F(t) = \phi(\alpha_t(x)y) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Para un x_0, y_0 determinados, se dirá que "F es KMS-admisible para x_0 e y_0".

Lema 2.19
Si $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ satisface la condición KMS respecto de $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, entonces $\phi \circ \alpha_t = \phi$.

Demostración. Tomando $y = 1$, tenemos que $F(t) = F(t+i) = \phi(\alpha_t(x))\ \forall t \in \mathbb{R}$, por lo tanto F se puede extender a una función entera y cíclica. Pero por ser F acotada, usando Liouville, se deduce que es constante. Luego $\phi(\alpha_t(x)) = F(t) = F(0) = \phi(x)$. □

Definición 2.20 *Core de un operador cerrado densamente definido en $\mathcal{H}$*
Sea A un operador cerrado densamente definido en $\mathcal{H}$ con dominio D. Un subespacio $D_0 \subset D$ se lo llama *Core* para A si $\overline{Graph\,(A|_{D_0})}^{\|\cdot\|\times\|\cdot\|} = Graph\,(A)$.

Lema 2.21
Sea $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un flujo en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann tal que $\phi \circ \alpha_t = \phi\ \forall t \in \mathbb{R}$. Usando la construcción GNS tenemos que:

a) $\exists! u_t \in \mathfrak{U}(\mathcal{H})$ flujo en $\mathcal{M}$ tal que $u_t(x\Omega) = \alpha_t(x)\Omega$ y $\exists! H$ operador autoadjunto no necesariamente acotada tal que $u_t = e^{itH}$.

b) Si $B_H = span\,(f(H)x\Omega\ /\ f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\,,\, x \in \mathcal{M})$, entonces B_H es un Core para $g(H)$ con g toda función continua en $\mathbb{R}$ y $B_H \subset \mathcal{M}\Omega$.

Demostración.

a) Como $\phi \circ \alpha_t = \phi$ sucede que:

$$\|\alpha_t(x)\Omega\|^2 = \langle \alpha_t(x^*x)\Omega, \Omega\rangle = \phi\left(\alpha_t(x^*x)\right) = \phi(x^*x) = \langle x^*x\Omega, \Omega\rangle = \|x\Omega\|^2$$

Por lo tanto, $\exists! u_t : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ unitario tal que $u_t(x\Omega) = \alpha_t(x)\Omega$. Además, por ser α_t un flujo, u_t también lo es y estamos en las hipótesis de 0.18, entonces $\exists! H$ operador autoadjunto no necesariamente acotada tal que $u_t = e^{itH}$.

b) Notar que $g(H)\chi_K(H) \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})\,,\ \forall K \subset \mathbb{R}$ compacto. Entonces tenemos que $B_H \subset Dom(g(H))$. Por otro lado, como H es autoadjunta, por 0.9 es claro que:

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(Rg\left(\chi_{[-n,n]}(H)\right)\right) \quad \text{es un Core } \ \forall g(H) \text{ con } g \in C\left(Spec(H)\right)$$

En particular, esto vale para toda función g continua en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, basta ver que dado $K \subset \mathbb{R}$ compacto y $\xi \in \mathcal{H}$ tal que $\xi = \chi_K(H)\xi$, existe $\{\xi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_H$ tal que $\xi_n \to \xi$ y $g(H)\xi_n \to g(H)\xi$ en norma. Para ver esto, consideremos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n\Omega \to \xi$ en $\mathcal{H}$ y $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $f(t) = 1\ \forall t \in K$. Con esta elección, consideramos $\xi_n = f(H)x_n\Omega \in B_H$. Notemos entonces que $\xi_n \to f(H)\xi = \xi$, pues $f(H)$ es acotado, y $g(H)\xi_n \to g(H)f(H)\xi = g(H)\xi$ pues $g(H)f(H)$ es acotado. Luego B_H es Core para $g(H)$.

Veamos ahora que $B_H \subset \mathcal{M}\Omega$. Sea $\xi = f(H)x\Omega \in B_H$ con $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ y $x \in \mathcal{M}$. En particular, $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces podemos aplicar el teorema de inversión de la transformada de Fourier:

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t)e^{it\lambda}dt$$

Entonces, usando a) tenemos que:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) e^{itH} x\Omega dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(t) \alpha_t(x) \Omega dt \in \mathcal{M}\Omega$$

□

Teorema 2.22 *Caracterización de σ_t^ϕ vía KMS*
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y un flujo $\{\alpha_t\}$ en $\mathcal{M}$. Entonces:

a) ϕ satisface la condición KMS respecto a σ_t^ϕ.

b) Si ϕ satisface la condición KMS respecto a α_t, entonces $\alpha_t = \sigma_t^\phi$.

Demostración.

a) Por un lado, como $\Delta\Omega = S^* S\Omega = \Omega$, tenemos que dados $x, y \in \mathcal{M}$:

$$\begin{array}{rcl} \phi\left(\sigma_t^\phi(x) y\right) & = & \left\langle \sigma_t^\phi(x) y\Omega, \Omega \right\rangle = \langle y\Omega, \Delta^{it} x^* \Delta^{-it} \Omega \rangle = \langle \Delta^{-it} y\Omega, x^*\Omega \rangle \\ \phi\left(y\sigma_t^\phi(x)\right) & = & \left\langle \sigma_t^\phi(x)\Omega, y^*\Omega \right\rangle = \left\langle S\sigma_t^\phi(x^*)\Omega, Sy\Omega \right\rangle \\ & = & \left\langle J\Delta^{1/2+it} x^* \Delta^{-it}\Omega, J\Delta^{1/2} y\Omega \right\rangle = \left\langle J\Delta^{1/2+it} x^*\Omega, J\Delta^{1/2} y\Omega \right\rangle \\ & = & \left\langle \Delta^{1/2} y\Omega, \Delta^{1/2+it} x^*\Omega \right\rangle = \langle \Delta^{1-it} y\Omega, x^*\Omega \rangle \end{array}$$

Sean $\xi = y\Omega$ y $\eta = x^*\Omega$, entonces $\phi(\sigma_t^\phi(x)y) = \langle \Delta^{-it}\xi, \eta \rangle$ y $\phi(y\sigma_t^\phi(x)) = \langle \Delta^{1-it}\xi, \eta \rangle$.

Por otro lado, consideremos p_n la proyección espectral de Δ correspondiente al intervalo $\left[\frac{1}{n}, n\right]$ con $n \in \mathbb{N}$. Si restringimos Δ y Δ^{-1} a la imagen de p_n serán acotados, podemos usar 0.9 para definir una función F_n entera vía:

$$F_n(z) = \left\langle \Delta^{-iz} p_n \xi, \eta \right\rangle \qquad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$$

Notar que si $t \in \mathbb{R}$, tenemos que $F_n(t) = \langle \Delta^{-it} p_n \xi, \eta \rangle$ y $F_n(t+i) = \langle \Delta^{1-it} p_n \xi, \eta \rangle$. Entonces, tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \left| F_n(t) - \sigma_t^\phi(x) y \right| & \leq & \| \Delta^{-it} (p_n - Id)\, \xi \| \|\eta\| \\ \left| F_n(t+i) - y\sigma_t^\phi(x) \right| & \leq & \| \Delta^{1/2-it} (p_n - Id)\, \xi \| \|\Delta^{1/2}\eta\| \end{array}$$

Por lo tanto, si $S := \{z \in \mathbb{C} \ / \ 0 \leq Im(z) \leq 1\}$, entonces los F_n son acotadas en S y convergen uniformemente en el borde. Usando una generalización del principio del máximo (el teorema de Phragmén-Lindelöf), se puede ver que F_n son uniformemente de Cauchy en S. Entonces $\exists F$ tal que $F_n \xrightarrow{unif.} F$ en S y es continua, acotada y analítica en S°. Y además:

$$F(t) = \phi\left(\sigma_t^\phi(x) y\right) \qquad F(t+i) = \phi\left(y\sigma_t^\phi(x)\right)$$

Luego, ϕ satisface la condición KMS respecto a σ_t^ϕ.

b) Como ϕ satisface la condición KMS respecto a α_t, entonces por 2.19 tenemos que $\phi \circ \alpha_t = \phi$. Por lo tanto, podemos usar lo hecho en 2.21. Sean $\xi = x\Omega \in B_H$ y $y \in \mathcal{M}$, y definamos la función entera $G(z) = \left\langle e^{-izH}x\Omega, y^*\Omega \right\rangle$. Notar que si $t \in \mathbb{R}$:

$$G(t) = \left\langle e^{-itH}x\Omega, y^*\Omega \right\rangle = \left\langle x\Omega, e^{itH}y^*\Omega \right\rangle = \langle x\Omega, \alpha_t(y^*)\Omega \rangle = \phi(\alpha_t(y)x)$$

Entonces, considerando F KMS-admisible para x e y relativa a α_t, tenemos que $F \equiv G$ en $\mathbb{R}$. Por el principio de Identidad resulta que $F \equiv G$. En particular:

$$\begin{aligned} \langle \alpha_t(y)\Omega, x^*\Omega \rangle &= \phi(x\alpha_t(y)) = G(t+i) \\ &= \left\langle e^{(1-it)H}x\Omega, y^*\Omega \right\rangle = \left\langle e^{H}x\Omega, e^{itH}y^*\Omega \right\rangle \\ &= \left\langle e^{H}x\Omega, \alpha_t(y^*)\Omega \right\rangle = \left\langle e^{H}x\Omega, S\alpha_t(y)\Omega \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_t(y)\Omega, Fe^{H}x\Omega \right\rangle \end{aligned}$$

Dado que α_t es un automorfismo, resulta que $Fe^H x\Omega = Sx\Omega$, es decir que $Fe^H = S$ en B_H. Usando que $F = F^{-1}$ y $FS = \Delta$, tenemos que $e^H = \Delta$ en B_H. Al ser Δ autoadjunto, es cerrado, y como B_H es Core para e^H y también autoadjunto, resulta que $e^H = \Delta$. En conclusión, usando la igualdad en 2.21 y lo visto en a) que $\Delta\Omega = \Omega$:

$$\alpha_t(x)\Omega = e^{itH}x\Omega = \Delta^{it}x\Delta{-}it\Omega = \sigma_t^{\phi}(x)\Omega$$

Como Ω es separador para $\mathcal{M}$, obtenemos que $\alpha_t = \sigma_t^{\phi}$.

□

Definición 2.23 *Álgebra de Punto Fijo de un flujo*
Dado $\alpha = \{\alpha_t\}$ un flujo en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann, el *Álgebra de Punto Fijo del flujo* es el conjunto de $\mathcal{M}$ dado por:

$$\mathcal{M}^{\alpha} = \{x \in \mathcal{M} \;/\; \alpha_t(x) = x \,\forall t\}$$

De la definición se deduce que $\mathcal{M}^{\alpha}$ es $\sigma-$débil cerrada, y por lo tanto, un álgebra de von Neumann.
Si $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel, notamos $\mathcal{M}^{\phi} = \mathcal{M}^{\sigma^{\phi}}$.

Proposición 2.24
Dado $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y $x \in \mathcal{M}$, $x \in \mathcal{M}^{\phi}$ si y sólo si $\phi(xy) = \phi(yx)$ $\forall y \in \mathcal{M}$. En particular, ϕ es de traza si y sólo si $\sigma_t^{\phi} = Id$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Si $x \in \mathcal{M}^{\phi}$ e $y \in \mathcal{M}$, sea F la KMS-admisible para x e y. Entonces:

$$F(t) = \phi(\sigma_t(x)y) = \phi(xy) \qquad F(t+i) = \phi(y\sigma_t(x)) = \phi(yx)$$

Como F es constante en la recta real, usando el principio de Identidad resulta que F es constante. Luego $\phi(xy) = \phi(yx)$.

$\Leftarrow$) Si $\phi(xy) = \phi(yx)\ \forall y \in \mathcal{M}$, fijemos un $y_0 \in \mathcal{M}$ y consideremos la función F KMS-admisible para x e y_0. Entonces, $F(t) = \phi(\sigma_t^\phi(y_0)x) = \phi(x\sigma_t^\phi(y_0)) = F(t+i)$ y, por lo tanto, con el mismo argumento usado en 2.19,F es constante. Con esto en mente y usando 2.19:

$$\phi(y_0 x) = F(0) = F(-t) = \phi(\sigma_{-t}^\phi(y_0)x = \phi(y_0\sigma_t^\phi(x))$$

Entonces, $\phi\left(y_0\left(x - \sigma_t^\phi(x)\right)\right) = 0$. Como y_0 fue una elección arbitraria, resulta que esa igualdad vale $\forall y \in \mathcal{M}$, en particular para $y = \left(x - \sigma_t^\phi(x)\right)^*$. Por último, usando que ϕ es fiel, resulta que $x = \sigma_t^\phi(x)$.

□

Generalización de la teoría para pesos fieles, normales y semifinitos

No toda álgebra de von Neumann tiene una funcional positiva, normal y fiel, como lo vimos en 2.3. No es que lo que hayamos demostrado sea falso, sino que lo que usamos fuertemente para verlo es que $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ es separable, es decir, que $\mathcal{H}$ es separable como espacio. Sin embargo, si debilitamos las condiciones de las funcionales que las que trabajamos, la teoría de Tomita-Takesaki puede extenderse a cualquier álgebra de von Neumann. En esta sección, presentaremos la versión general de la teoría. Sin embargo, obviaremos las demostraciones por el hecho de que, salvo excepciones en honor a la generalidad de los trabajos que se hicieron, no la necesitaremos para el desarrollo de los siguientes capítulos. El desarrollo de esta teoría puede encontrarse en [Tak70].

Definición 2.25 *Pesos en $\mathcal{M}$ y Álgebras de Hilbert generalizadas*
Un *peso* en $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann es una $\phi : \mathcal{M}^+ \longrightarrow [0,\infty]$ tal que $\phi(\lambda x + y) = \lambda\phi(x) + \phi(y)\ \forall x, y \in \mathcal{M}^+\ ,\ \lambda \in [0,\infty)$. A estos pesos se los llama:

fiel si $\forall x \in \mathcal{M}^+$ no nulo $\phi(x) > 0$.

normal si $\phi\left(\sup\limits_{i\in I} x_i\right) = \sup\limits_{i\in I} \phi(x_i)$ con $\{x_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{M}^+$ una red monótona creciente.

de traza si $\phi(x^*x) = \phi(xx^*)\ \forall x \in \mathcal{M}$.

finito si $\phi(x) < \infty\ \forall x \in \mathcal{M}^+$.

Dado ϕ peso en $\mathcal{M}$, se definen los subespacios:

$$D_\phi = \{x \in \mathcal{M}^+ \ /\ \phi(x) < \infty\} \quad N_\phi = \{x \in \mathcal{M} \ /\ \phi(x^*x) < \infty\} \quad M_\phi = N_\phi^* N_\phi$$

Proposición 2.26
Sea ϕ peso en $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann y sean D_ϕ, N_ϕ, M_ϕ:

a) Si $x, y \in D_\phi$ y $\lambda \in [0, \infty)$, entonces $\lambda x + y \in D_\phi$.
Si $x \in D_\phi$ y $z \leq x \in \mathcal{M}^+$, entonces $z \in D_\phi$.

b) N_ϕ es un ideal a izquierda de $\mathcal{M}$.

c) M_ϕ es una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{M}$.

d) $D_\phi = \mathcal{M}_{\phi,+} = M_\phi \cap \mathcal{M}^+$ y todo elemento de M_ϕ se puede escribir como combinación lineal de 4 elementos de D_ϕ.

e) Si $x, z \in N_\phi$ e $y \in \mathcal{M}$ entonces $x^* y z \in M_\phi$.

f) $\exists!\ \dot{\phi} : M_\phi \longrightarrow \mathbb{C}$ funcional lineal tal que $\dot{\phi}|_{D_\phi} = \phi$.

Definición 2.27 *ϕ peso en $\mathcal{M}$ semifinito*
Un peso ϕ en $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann se dice *semifinito* si M_ϕ es $\sigma-$débil denso en $\mathcal{M}$. En caso de que ϕ sea fiel, normal y semifinito lo notaremos "fns".

Propiedad 2.28 Equivalencias de un peso semifinito
Sea ϕ un peso en $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann. Son equivalentes:

i) ϕ es semifinito.

ii) $1 = \bigvee_{\phi(e)<\infty} e$ con $e \in P(\mathcal{M})$.

iii) Existe una red $\{x_i\}_{i\in I} \subset D_\phi$ tal que $\|x_i\| < 1 \, \forall i \in I$ y $x_i \nearrow 1$.

Proposición 2.29
Dada $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, existe ϕ peso fiel normal y semifinito.

Teorema 2.30 *Construcción GNS para $\mathcal{M}$ con un ϕ peso fiel, normal y semifinito*
Sea ϕ un peso fns y $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, entonces $\exists!\ (\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \eta_\phi)$ donde:

a) $\mathcal{H}_\phi$ es un espacio de Hilbert.

b) $\pi_\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\phi)$ es un morfismo de $*-$álgebras.

c) $\eta_\phi : N_\phi \longrightarrow \mathcal{H}_\phi$ lineal tal que dados $x, y \in N_\phi$, $z \in \mathcal{M}$:

$\phi(y^* x) = \langle \eta_\phi(x); \eta_\phi(y) \rangle$.
$\pi_\phi(z)\eta_\phi(x) = \eta_\phi(zx)$.
$\eta_\phi(N_\phi)$ es denso en $\mathcal{H}_\phi$.

Definición 2.31 *$\mathcal{U}$ Álgebra Generalizada de Hilbert*
Sea $(\mathcal{U}, \#)$ álgebra asociativa involutiva con además un producto interno tal que:

a) $\langle \zeta\eta, \xi\rangle = \langle \zeta, \eta^{\#}\xi\rangle \quad \forall \zeta, \eta, \xi \in \mathcal{U}$ y multiplicar a izquierda es un operador lineal y continuo respecto del producto interno.

b) $\mathcal{U}^2$ es denso en $\mathcal{U}$.

c) El operador conjugado $S_0 : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$, $S_0(\zeta) = \zeta^{\#}$ es clausurable en la completación de $\mathcal{U}$ respecto del producto interno y $\overline{S_0} = S$.

Tal $\mathcal{U}$ se la conoce como un *Álgebra Generalizada de Hilbert*. S es el operador *"Sharp"*, mientras que a $F = S^*$ se lo conoce como *"Flat"*. Además notaremos:

$$Dom(S) = D^{\#} \qquad Dom(F) = D^{b}$$

Notar que para ser un Álgebra de Hilbert se debe pedir además que S_0 sea una isometría, es decir $\|\zeta^{\#}\| = \|\zeta\|$.

Dada $\overline{\mathcal{U}}$ el espacio de Hilbert que resulta de la completación de $\mathcal{U}$, existe $\pi : \mathcal{U} \longrightarrow \overline{\mathcal{U}}$ tal que $\pi(\zeta)\eta = \zeta\eta \ \forall \zeta, \eta \in \mathcal{U}$. Más aún, $\pi(\zeta)\pi(\eta) = \pi(\zeta\eta) \ \forall \zeta, \eta \in \overline{\mathcal{U}}$ y $\pi(\zeta^{\#}) = \pi(\zeta)^*$. Además, como $\mathcal{U}^2$ es denso en $\mathcal{U}$ resulta que π es autoadjunta.

Notaremos además:

$$\mathcal{U}' = \left\{\eta \in D^{b} \ / \ \exists\, c > 0 \text{ donde } \|\pi(\zeta)\eta\| \leq c\|\zeta\| \ \forall \zeta \in \mathcal{U}\right\}$$

Asi, cada $\eta \in \mathcal{U}$ define un operador acotado $\pi'(\eta)$ tal que $\pi'(\eta)\zeta = \pi(\zeta)\eta \ \forall \zeta \in \mathcal{U}$. Entonces definimos:

$$\mathcal{U}'' = \left\{\zeta \in D^{\#} \ / \ \exists\, c > 0 \text{ donde } \|\pi'(\eta)\zeta\| \leq c\|\eta\| \ \forall \eta \in \mathcal{U}\right\}$$

Un álgebra generalizada de Hilbert $\mathcal{U}$ se dice *realizada* si $\mathcal{U} = \mathcal{U}''$. El *álgebra de von Neumann a izquierda de* $\mathcal{U}$ es $\pi(\mathcal{U})'' = \mathfrak{B}(\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}$ no es realizada, se usa que $\mathcal{U}''$ sí es álgebra generalizada de Hilbert realizada, y como $\pi'(\mathcal{U}')' = \pi(\mathcal{U})'' = \pi(\mathcal{U}'')''$, entonces $\mathcal{U}$ como $\mathcal{U}''$ tienen la misma álgebra de von Neumann a izquierda.

Proposición 2.32 $\eta_\phi\left(N_\phi \cap N_\phi^*\right)$ es Álgebra Generalizada de Hilbert realizada
Dado ϕ peso fns en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann y usando la notación de la construcción GNS, $\mathcal{U}_\phi = \eta_\phi\left(N_\phi \cap N_\phi^*\right)$ es un álgebra generalizada de Hilbert realizada y su álgebra de von Neumann a izquierda $\mathfrak{B}(\mathcal{U}_\phi)$ es $\pi_\phi(\mathcal{M})$. Más aún:

$$\mathcal{U}_\phi \text{ es Álgebra de Hilbert} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \phi \text{ es de traza}$$

Además, vale la recíproca:
Dada un álgebra generalizada de Hilbert $\mathcal{U}$, existe $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(\mathcal{U})$ y ϕ fns tales que $\mathcal{U} = \eta_\phi(N_\phi \cap N_\phi^*)$, donde ϕ está definida como:

$$\phi(x) = \begin{cases} \|\xi\|^2 & \text{si} \quad x = \pi(\xi^{\#}\xi) \text{ con } \xi \in \mathcal{U} \\ \infty & \text{si} \quad \text{estamos en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Teorema 2.33 *Teorema General de Tomita-Takesaki*
Sea $\mathcal{U}$ un álgebra generalizada de Hilbert y $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(\mathcal{U})$ su álgebra de von Neumann a izquierda. Sea $\mathcal{H}$ la completación de $\mathcal{U}$. Entonces, $\exists J$ operador antiunitario y autoadjunto y Δ operador positivo, inversible y autoadjunto tales que:

a) $S = J\Delta^{1/2}$ y $F = J\Delta^{-1/2}$, la descomposición polar de "Sharp" y "Flat".

b) $J\Delta J = \Delta^{-1}$. Más aún, $Jf(\Delta)J = f(\Delta^{-1})\ \forall f$ función medible en $[0, \infty)$.

c) $\Delta^{it}\mathcal{M}\Delta^{-it} = \mathcal{M}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $J\mathcal{M}J = \mathcal{M}'$.

Con este teorema, notar que por a) $D^{\#} = Dom(\Delta^{1/2})$ y $D^{b} = Dom(\Delta^{-1/2})$ y, como antes, podemos construir el grupo modular pero ahora con un peso ϕ fns.

Definición 2.34 *Condición de borde de Kubo-Martin-Schwinger para pesos fns*
Un peso ϕ fns en $\mathcal{M}$ satisface *KMS respecto a un flujo* $\{\alpha_t\}$ *en* $\mathcal{M}$ si:

a) $\phi \circ \alpha_t = \phi$ en $\mathcal{M}^+\ \forall t \in \mathbb{R}$.

b) $\forall x, y \in N_\phi \cap N_\phi^*\ \exists F : \{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ Im(\lambda) \in [0, 1]\} \longrightarrow \mathbb{C}$ función $C^\infty(0, 1)$, continua y acotada tal que:

$$F(t + i) = \phi(x\alpha_t(y)) \quad \wedge \quad F(t) = \phi(\alpha_t(y)x) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Teorema 2.35 *Caracterización de σ_t^ϕ vía KMS para ϕ peso fns*
Sean ϕ peso fns y $\{\alpha_t\}$ flujo en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann. Entonces:

$$\alpha_t = \sigma_t^\phi\ \forall t \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \phi \text{ satisface la condición KMS respecto a } \{\alpha_t\}$$

Proposición 2.36
Sean ϕ peso fns en $\mathcal{M}$ Álgebra de von Neumann y $x \in \mathcal{M}$. Entonces:

$$x \in \mathcal{M}^\phi \quad \Longleftrightarrow \quad xM_\phi \subset M_\phi\ \wedge\ M_\phi x \subset M_\phi\ \wedge\ \phi(xy) = \phi(yx)\ \forall y \in M_\phi$$

En particular, ϕ es de traza si y sólo si $\sigma_t^\phi = Id$.

Capítulo 3

Clasificación de Factores ITPFI de tipo III

En este capítulo presentamos primero las formas clásicas de construir un álgebra de von Neumann para llegar a la construcción vía producto tensorial. Haremos hincapié principalmente en el producto tensorial infinito de factores de tipo I (ITPFI por sus siglas en inglés), también conocidos como factores de Araki-Woods, por el trabajo que éstos realizaron estudiando este tipo de factores.

Luego pasaremos a desarrollar la teoría de invariantes de Connes, basada en la teoría de Tomita-Takesaki. Presentaremos su teorema de Cociclos Unitarios, punto inicial y clave para mejorar y simplificar lo que Araki y Woods hicieron. Con la aplicación de esta teoría, los factores de Araki-Woods quedan casi todos clasificados, identificándolos con un caso particular de los mismos: los factores de Powers.

El capítulo está basado principalmente en los surveys de [Woo82], [Con76] y [LR87], junto con lo cursado en la materia "Álgebras de von Neumann" ([Sas])

Construcciones de Álgebras de von Neumann

Definición 3.1 *El Álgebra grupo de von Neumann de un grupo discreto y contable*

Dado el grupo G, construimos el espacio de Hilbert:

$$\ell^2(G) = \left\{ \xi : G \longrightarrow \mathbb{C} \;/\; \sum_{t\in G} |\xi(t)|^2 < \infty \right\} \quad \text{con b.o.n.} \quad \xi_t(s) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{array} \right.$$

Dado $t \in G$, consideramos $\lambda_t \in \mathfrak{U}(\ell^2(G))$ tal que $\lambda_t \xi_s = \xi_{ts}$, la traslación a izquierda por t. La aplicación $\lambda : G \longrightarrow \mathfrak{U}(\ell^2(G))$ tal que $\lambda(t) = \lambda_t$ se la llama representación regular a izquierda de G. Definimos al *Álgebra grupo de von Neumann* de G a:

$$W^*(G) = \{\lambda_t \;/\; t \in G\}'' = \overline{\left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \lambda_t^i \;/\; n \in \mathbb{N}\ a_i \in \mathbb{C},\ t \in G \right\}}^{sot}$$

Notando $\varepsilon \in G$ al elemento neutro, ξ_ε cumple que $\lambda_t \xi_\varepsilon = \xi_t$. Entonces ξ_ε es cíclico tanto para $W^*(G)$ como para $W^*(G)'$. Luego es cíclico y separador para $W^*(G)$.

Definición 3.2 *Construcción Grupo-Espacio de Medida de Murray-von Neumann*
Sea (X, β, μ) un espacio de probabilidad de Borel, sea G un grupo discreto y una acción σ de G actuando en (X, β, μ) tal que preserva la medida, es decir:

$$\forall B \in \beta \; \mu\left(\sigma_g(B)\right) = \mu\left(B\right)$$

Si extendemos la acción de G a $L^2(X, \mu)$, tendremos que $\forall g \in G, \; \sigma_g \in \mathfrak{U}\left(L^2(X, \mu)\right)$ porque σ preserva la medida. Además, $\sigma_g(f)(x) = f(g^{-1}x)$. Si consideramos la notación $\mathcal{A} = L^\infty(X, \mu)$, tenemos que $\sigma : G \longrightarrow Aut(\mathcal{A})$ es un morfismo de grupos.

Notando $\lambda_g \in \mathfrak{U}\left(l^2(G)\right)$ los unitarios de la representación regular a izquierda, dados $g, h \in G$ y $a_g, a_h \in \mathcal{A}$, definimos:

$$a_g\lambda_g \cdot a_h\lambda_h = a_g\sigma_g(a_h)\lambda_g\lambda_h = a_g\sigma_g(a_h)\lambda_{gh}$$

En particular, $\lambda_g a_h \lambda_g^* = \sigma_g(a_h)$. Tenemos entonces un producto en:

$$\mathcal{P}(\mathcal{A}, G) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} a_{g_j}\lambda_{g_j} \;/\; n \in \mathbb{N}, a_{g_j} \in \mathcal{A}, \lambda_{g_j} \in \mathfrak{U}\left(l^2(G)\right) \right\}$$

Además, $(a_g\lambda_g)^* = \lambda_g^* a_g^* = \lambda_{g^{-1}}\overline{a_g} = \sigma_{g^{-1}}\left(\overline{a_g}\right)\lambda_{g^{-1}} = \sigma_{g^{-1}}\left(\overline{a_g}\right)\lambda_g^*$ de donde se deduce que $\mathcal{P}(\mathcal{A}, G)$ es una $*-$álgebra no-degenerada. Por lo tanto, definimos:

$$\mathcal{A} \rtimes_\sigma G := \mathcal{P}(\mathcal{A}, G)'' = \overline{\mathcal{P}(\mathcal{A}, G)}^{sot}$$

Notar que tenemos una $*-$representación fiel de $\mathcal{A}$ y una representación unitaria de G en $\mathcal{H}$. A esta construcción también se la suele notar $W^*\left(X, G\right)$.

Cabe destacar de esta construcción que la misma depende esencialmente de la información en la clase de las órbitas de la acción. Es decir, dados H actuando en $(Y, \widetilde{\beta}, \nu)$ a través de $\widetilde{\sigma}$, si existe una biyección de Borel $\theta : X \to Y$ que manda las órbitas de G a H a.e. y $\theta\left(\nu\right)$ es equivalente a μ, entonces se tiene que $W^*\left(X, G\right) \cong W^*\left(Y, H\right)$.

Definición 3.3 *Grupos ergódicos y que actúan libremente de $Aut(X)$*
Sea (X, β, μ) un espacio de probabilidad de Borel y $G \subset Aut(X)$ grupo.

G se dice *ergódico* si $\forall A \in \beta$ de medida positiva $\mu\left(X \setminus \bigcup_g gA\right) = 0$.

G *actúa libremente* si $\mu\left(\{x \;/\; gx = x\rangle\right) = 0 \; \forall g \in G \setminus \{\varepsilon\}$.

Proposición 3.4
Sea un álgebra de von Neumann $\mathcal{M} = W^*\left(X, G\right)$ con G actuando libremente y ergódico, entonces $\mathcal{M}$ es un factor.

Definición 3.5 *Factor de Krieger*
Llamaremos *factor de Krieger* al álgebra de von Neumann $W^*\left(X, G\right)$ definida por (X, β, μ) un espacio de probabilidad de Borel y $G \subset Aut(X)$ un grupo cíclico generado por un automorfismo ergódico T, es decir $G = \{T^n \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$. A estos factores los notaremos $W^*\left(X, T\right)$.

Teorema 3.6 *Clasificación de $W^*(X,G)$ en tipos según el grupo G*
Sea (X,β,μ) un espacio de probabilidad de Borel, sea $G \subset Aut(X)$ grupo ergódico y actuando libremente y sea $\mathcal{M} = W^*(X,G)$ el álgebra de von Neumann asociada.

a) Si (X,β,μ) es un espacio discreto, $\mathcal{M}$ es un factor de tipo I_n con $n = |G|$.

b) Si (X,β,μ) no es discreto y existe una medida $\sigma-$finita ν equivalente a μ e invariante respecto de G, entonces $\mathcal{M}$ es de tipo II. Más aún, si ν es finita, es de tipo II_1 y si es infinita es de tipo II_∞.

c) Si (X,β,μ) no es discreto y no existe una medida ν como en el caso anterior, entonces $\mathcal{M}$ es de tipo III.

Definición 3.7 *Álgebras de von Neumann Hiperfinitas*
Un álgebra de von Neumann $\mathcal{M}$ se dice *hiperfinita* si es de la forma:

$$\mathcal{M} = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}_n\right)''$$

donde $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y todos las $\mathcal{M}_n$ son de tipo I finitas.

Producto Tensorial de Álgebras de von Neumann

Definición 3.8 *Producto Tensorial de dos Álgebras de von Neumann*
Sean $\mathcal{M}_1 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1)$ y $\mathcal{M}_2 \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)$ álgebras de von Neumann. Se define el producto tensorial de las álgebras de von Neumann $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ al álgebra de von Neumann dada por $\{x_1 \otimes x_2 \ / \ x_1 \in \mathcal{M}_1 \, , \, x_2 \in \mathcal{M}_2\}'' \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$.

Dados $W^*(X,G)$ y $W^*(Y,H)$ dos construcciones Grupo-Espacio de Medida de Murray von Neumann, se tiene que $W^*(X,G) \otimes W^*(Y,H) \cong W^*(X \times Y, G \oplus H)$.

Teorema 3.9 *Teorema del Conmutante para Producto Tensorial*
Dadas $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ álgebras de von Neumann, entonces $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N})' = \mathcal{M}' \otimes \mathcal{N}'$.

Demostración. Por 2.3, existen $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ y $\psi \in \mathcal{N}_{*,+}$ estados fieles, por lo tanto, vía GNS y la teoría de Tomita-Takesaki obtenemos los operadores S_ϕ, Δ_ϕ, J_ϕ y S_ψ, Δ_ψ, J_ψ. Por otro lado, en $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ podemos definir el funcional $\theta(x_1 \otimes x_2) = \phi(x_1)\psi(x_2)$ que heredará las propiedades de positivo, normal estado y fiel de ϕ y ψ, entonces también obtendremos F_θ, S_θ, Δ_θ, J_θ. Dado que:

$$J_\phi \mathcal{M}' J_\phi = \mathcal{M} \quad J_\psi \mathcal{N}' J_\psi = \mathcal{N} \quad J_\theta \left(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}\right)' J_\theta = \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$$

Entonces para concluir la demostración, alcanza con ver que $J_\phi \otimes J_\psi = J_\theta$. Para ello, recordemos que $J = \Delta^{1/2} S = (S^*S)^{1/2} S$. Luego, alcanza con ver que $S_\phi \otimes S_\psi = S_\theta$. Para ver esta igualdad, por densidad de los tensores elementales de $\mathcal{H}_\theta = \mathcal{H}_\phi \otimes \mathcal{H}_\psi$ (esta igualdad se deduce por la definición del producto interno para $\mathcal{H}_\theta$) y que

$\mathcal{H}_\phi = \overline{\mathcal{M}\Omega_\phi}$ y $\mathcal{H}_\psi = \overline{\mathcal{N}\Omega_\psi}$, basta ver que los operadores coinciden en los elementos de la forma $x_1\Omega_\phi \otimes x_2\Omega_\psi$ con $x_1 \in \mathcal{M}$ y $x_2 \in \mathcal{N}$:

$$(S_\phi \otimes S_\psi)(x_1\Omega_\phi \otimes x_2\Omega_\psi) = (x_1^*\Omega_\phi \otimes x_2^*\Omega_\psi) = (x_1 \otimes x_2)^*\,\Omega_\theta = S_\theta\,(x_1 \otimes x_2)\,\Omega_\theta$$

□

Corolario 3.10
Dadas $\mathcal{M}_i, \mathcal{N}_i \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_i)$ álgebras de von Neumann con $i = 1, 2$:

$$(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \cap (\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2) = (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1) \otimes (\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}_2)$$

Más aún, es equivalente al Teorema del Conmutante para Producto Tensorial.

Demostración.

$$\begin{aligned}
[(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2) \cap (\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2)]' &= \left[(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)' \cup (\mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{N}_2)'\right]'' \\
&= [(\mathcal{M}_1' \otimes \mathcal{M}_2') \cup (\mathcal{N}_1' \otimes \mathcal{N}_2')]'' \\
&= (\mathcal{M}_1' \otimes I_2 \cup \mathcal{N}_1' \otimes I_2 \cup I_1 \otimes \mathcal{M}_2' \cup I_1 \otimes \mathcal{N}_2')'' \\
&= [(\mathcal{M}_1' \cup \mathcal{N}_1' \otimes I_2) \cup (I_1 \otimes \mathcal{M}_2' \cup \mathcal{N}_2')]'' \\
&= \left(\left[(\mathcal{M}_1' \cup \mathcal{N}_1')'' \otimes I_2\right] \cup \left[I_1 \otimes (\mathcal{M}_2' \cup \mathcal{N}_2')''\right]\right)'' \\
&= (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1)' \otimes (\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}_2)' \\
&= (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}_2)'
\end{aligned}$$

La equivalencia resulta del siguiente hecho que se deduce de 1.1:

$$(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2)' = [\mathcal{M}_1' \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)] \cap [\mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathcal{M}_2]$$

□

Corolario 3.11
Sean $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ álgebras de von Neumann, entonces $Z(\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) = Z(\mathcal{M}) \otimes Z(\mathcal{N})$. En particular, si $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ son factores, $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ es factor.

Demostración. Basta con aplicar 3.10 con $\mathcal{N}_i = \mathcal{M}_i'$. □

Definición 3.12 *Producto Tensorial Infinito de Álgebras de von Neumann*
Sean $\mathcal{M}_n \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_n)$ álgebras de von Neumann y vectores unitarios $\Omega_n \in \mathcal{H}_n$. Se define $\mathcal{H} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}_n, \Omega_n)$ como la completación lineal generada por el conjunto de vectores de la forma $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ donde $\xi_n \in \mathcal{H}_n$ y $\xi_n = \Omega_n$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, con la completación respecto del producto interno $\left\langle \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \xi_n, \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \xi_n' \right\rangle = \prod_{n\in\mathbb{N}} \langle \xi_n, \xi_n' \rangle$. Dados $x_n \in \mathcal{M}_n$ con $x_n = Id_{\mathcal{H}_n}$ para casi todo $n \in \mathbb{N}$, están los operadores $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} x_n \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$, que actúan en $\mathcal{H}$. Con estos operadores, definimos $\mathcal{M} = \left\{ \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} x_n \right\}''$ el producto tensorial infinito de $\mathcal{M}_n$ que lo notaremos $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_n, \Omega_n)$ o bien $\bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_n, \phi_n)$ donde $\phi_n(x) = \langle x\Omega_n, \Omega_n \rangle$ es un funcional positivo, normal, fiel y estado.

Notar además que $\Omega = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ es cíclico y separador de $\mathcal{M}$ y que $\phi = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} \phi_n$ es tal que dado $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \cdots \in \mathcal{M}$:

$$\phi\left(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \ldots\right) = \phi_1(x_1)\phi_2(x_2)\phi_3(x_3)...\phi_n(x_n)$$

Proposición 3.13
Si $\mathcal{M}_n$ son factores, entonces $\mathcal{M} = \bigotimes_{n\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_n, \Omega_n)$ es factor.

Demostración. Sea $x \in Z(\mathcal{M})$ y sean $\mathcal{N}_k = \bigotimes_{1\leq n\leq k} (\mathcal{M}_n, \Omega_n)$, entonces x conmuta con todos los elementos de la inclusión de $\mathcal{N}_k$ en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. Por 3.11, podemos decir que $\exists w_k \in \bigotimes_{k<n} (\mathcal{M}_n, \Omega_n)$ y un $\lambda_k \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda_k 1_{\mathcal{N}_k} \otimes w_k \, \forall k \in \mathbb{N}$. Por propiedades de los tensores elementales, podemos redefinir w_k para que $\lambda_k = \lambda$ cualquier valor de k. Entonces, por paso al límite, resulta que $x = \lambda 1_{\mathcal{M}}$. Luego $\mathcal{M}$ es factor. $\square$

Definición 3.14 *Factores de Araki-Woods*
Sean $\mathcal{M}_\nu \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\nu)$, $\nu \in \mathbb{N}$ factores de tipo I_{n_ν} con $2 \leq n_\nu < \infty$. Decimos entonces que $\mathcal{M} = \bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_\nu, \phi_\nu)$ es un factor ITPFI (por las siglas en inglés de Producto Tensorial Infinito de Factores de tipo I) o bien un *factor de Araki-Woods.* Cuando $n_\nu = n \, \forall \nu \in \mathbb{N}$, se suele decir que $\mathcal{M}$ es un factor ITPFI_n.

Al ser $\mathcal{M}_\nu$ un factor de tipo I finito, $\phi_\nu(x) = tr(\rho_\nu x)$ con ρ_ν la matriz densidad del estado ϕ_ν y tr la traza normalizada en $\mathcal{M}_\nu$ dada en 1.39. Notaremos $Spec\,(\phi_\nu|\mathcal{M}_\nu) = \{\lambda_{\nu,1}, ..., \lambda_{\nu,n_\nu}\}$ al conjunto de los autovalores de ρ_ν, donde cumplen que $\lambda_{\nu,i} \geq \lambda_{\nu,i+1} \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,i} = 1$. Llamaremos lista de autovalores de $\mathcal{M}$ a la sucesión de los conjuntos $\{Spec\,(\phi_\nu|\mathcal{M}_\nu)\}_{\nu\in\mathbb{N}}$. Recíprocamente, toda lista de autovalores define un único factor de Araki-Woods.

Notar que los factores de Araki-Woods son factores hiperfinitos, pues identificando $\mathcal{N}_\nu = \bigotimes_{1\leq j\leq \nu} (\mathcal{M}_j, \Omega_j)$ con sus inclusiones en $\mathfrak{B}\left(\bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} (\mathcal{H}_\nu, \Omega_\nu)\right)$, tenemos que:

$$\mathcal{M} = \left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_\nu\right)''$$

Definición 3.15 *Factores de Powers*
Un *factor de Powers* es un factor ITPFI_2 con un parámetro $\lambda \in (0, 1]$ fijo que determina su lista de autovalores:

$$Spec\,(\phi_\nu|\mathcal{M}_\nu) = \left\{\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}\right\} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}$$

A estos factores se los nota R_λ. Los factores de Powers tienen un rol importante en la clasificación de los factores de tipo III. En 1967, Powers logra por primera vez, desde los trabajos de Murray y von Neumann en [Pow67], demostrar que esta lista continua de factores, que hoy llevan su nombre, son todos no isomorfos entre sí. Este trabajo es el que motivó el posterior estudio de los factores ITPFI por Araki y Woods y su clasificación.

Proposición 3.16
Todo factor de Araki-Woods es un factor de Krieger.

Demostración. Dado $\mathcal{M} = \bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} (\mathcal{M}_\nu, \phi_\nu)$ factor de Araki-Woods con la lista de autovalores $\{\{\lambda_{\nu,0}, ..., \lambda_{\nu,n_\nu-1}\}\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, consideramos el espacio de medida (X, μ) dado por el producto directo de (X_ν, μ_ν) donde $X_\nu = \{0, 1, \ldots, n_\nu - 1\}$ y las medidas μ_ν cumplen que $\mu_\nu(j) = \lambda_{\nu,j}$. Por otro lado, consideremos $G_\nu = {}^{\mathbb{Z}} \big/ {}_{n_\nu\mathbb{Z}}$ y $G = \bigoplus_{\nu\in\mathbb{N}} G_\nu$, donde $G_\nu \curvearrowright Aut\,(X_\nu)$ por traslación. Entonces los grupos son ergódicos y actúan de manera libre. Por lo tanto, usando la construcción Grupo-Espacio de Medida de Murray-von Neumann y 3.4, tenemos que los $\mathcal{N}_\nu = W^*\,(X_\nu, G_\nu)$ son factores.

Por otro lado, los $W^*\,(X_\nu, G_\nu)$ son de tipo I_{n_ν} y si consideramos el operador $\psi_n u$ dado por:

$$\psi_\nu(\sum_{g\in G} a_g\lambda_g) = \int_{X_\nu} a_\varepsilon d\mu_\nu = \sum_{j=0}^{n_\nu-1} a_\varepsilon(j)\lambda_{\nu,j}$$

Podemos identificar los espacios $(\mathcal{M}_\nu, \phi_\nu)$ con los $(\mathcal{N}_\nu, \psi_\nu)$. Luego, $\mathcal{M} \cong W^*\,(X, G)$.

Sea ahora $S \in Aut(X)$ el automorfismo odómetro, donde dado $x = \{x_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$:

Si $x_\nu = n_\nu - 1\,\forall\nu \in \mathbb{N}$, entonces $(Sx)_\nu = 0\,\forall\nu \in \mathbb{N}$.

Si $x_1 < n_1 - 1$, entonces $(Sx)_1 = x_1 + 1$ y $(Sx)_\nu = x_\nu\,\forall\nu > 1$.

Si $x_1 = n_1 - 1$, sea $k \in \mathbb{N}$ el máximo valor tal que $x_j = n_j - 1\,\forall 1 \leq j \leq k$. Entonces $(Sx)_j = 0$ con $j = 1, \ldots, k$, $(Sx)_{k+1} = x_{k+1} + 1$ y $(Sx)_\nu = x_\nu\,\forall\nu > k + 1$.

Notar que S es ergódico y que las trayectorias $\{S^n x \;/\; n \in \mathbb{Z}\}$ coinciden con las trayectorias $Gx = \{gx \;/\; g \in G\}$ para casi todo $x \in X$. Entonces $W^*\,(X, G)$ y $W^*\,(X, S)$ son isomorfas. Luego, $\mathcal{M}$ es un factor de Krieger. $\square$

El Invariante T de Connes

Basándose en los trabajos de Powers, Araki y Woods lograron construir invariantes para los factores ITPFI en [AW69] y con ellos logran una clasificación casi completa de los mismos. Pero aún la idea de una posible clasificación general de factores de tipo III parecía bastante lejana. Sin embargo, el aporte hecho por Connes extendió estos invariantes a cualquier álgebra de von Neumann, logrando así una clasificación de factores de tipo III. Estos invariantes, al ser definidos de manera intrínseca, simplificaron en gran medida la demostración de la clasificación hecha por Araki y Woods, pero además mostraron el verdadero significado de los invariantes que éstos habían construido. En las próximas secciones estaremos desarrollando estas ideas.

Definición 3.17 *Operadores Unitarios en $\mathcal{M}$*
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, notaremos con $\mathfrak{U}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ al grupo de operadores unitarios en $\mathcal{M}$.

Proposición 3.18
Las topologías sot y wot coinciden en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$

Demostración. Sea $\{u_i\}_{i\in I} \subset \mathfrak{U}(\mathcal{M})$ una red y $u \in \mathfrak{U}(\mathcal{M})$. Claramente, si $u_i \xrightarrow{sot} u$, entonces $u_i \xrightarrow{wot} u$. Pero si $u_i \xrightarrow{wot} u$, tomando $\xi \in \mathcal{H}$, tenemos que:

$$\|(u_i - u)\xi\|^2 = 2\|\xi\|^2 - 2Re\left(\langle u_i\xi, u\xi\rangle\right) \longrightarrow 2\|\xi\|^2 - 2\|\xi\|^2 = 0$$

□

Proposición 3.19
Sea $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ un álgebra de von Neumann, $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y sea $h \in \left(\mathcal{M}^{\phi}\right)^+$. Si $\psi(x) = \phi(hx)$, entonces $\psi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y $\sigma_t^{\psi} = h^{it}\sigma_t^{\phi}h^{-it}$.

Demostración. Sea $\alpha_t(x) = h^{it}\sigma_t^{\phi}h^{-it}$, que claramente es un flujo. Por otro lado, como h es positiva y $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ es fiel, se deduce que $\psi \in \mathcal{M}_{*,+}$ y fiel. Entonces, usando 2.22, veamos que ψ cumple la condición KMS para α_t.

Como $h \in \mathcal{M}^{\phi}$ un álgebra de von Neumann, entonces $h^{it} \in \mathcal{M}^{\phi}\, \forall t \in \mathbb{R}$. Luego, por 2.24 $\phi(h^{it}y) = \phi(yh^{it})\, \forall y \in \mathcal{M}$. Tomando $y = hh^{it}\sigma_t^{\phi}(x)$ para un $x \in \mathcal{M}$ y usando que $\Delta^{-it} \in \mathcal{M}^{\phi}$:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\alpha_t(x)\right) &= \phi\left(hh^{it}\sigma_t^{\phi}(x)h^{-it}\right) = \phi\left(h\sigma_t^{\phi}(x)\right) = \phi\left(h\Delta^{it}x\Delta^{-it}\right) \\
&= \phi\left(\Delta^{-it}h\Delta^{it}x\right) = \phi(\sigma_{-t}^{\phi}(h)x) = \phi(hx) = \psi(x)
\end{aligned}$$

Entonces, ψ es α_t-invariante. Por otro lado, considerando la construcción GNS de $\mathcal{M}$ para ϕ, los operadores S y F, y recordando sus propiedades, dados $x, y \in \mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}
\psi\left(\alpha_t(x)y\right) &= \phi\left(h^{1+it}\sigma_t^{\phi}(x)h^{-it}y\right) = \left\langle h^{1+it}\sigma_t^{\phi}(x)h^{-it}y\Omega, \Omega\right\rangle \\
&= \left\langle h^{-it}y\Omega, \sigma_t^{\phi}(x^*)h^{1-it}\Omega\right\rangle = \left\langle h^{-it}y\Omega, S\left(h^{1+it}\sigma_t^{\phi}(x)\Omega\right)\right\rangle \\
&= \left\langle h^{1+it}\sigma_t^{\phi}(x)\Omega, Fh^{-it}y\Omega\right\rangle = \left\langle h^{1+it}\Delta^{it}x\Delta^{-it}\Omega, \Delta^{1/2}Jh^{-it}y\Omega\right\rangle \\
&= \left\langle \Delta h^{1+it}\Delta^{it}x\Omega, \Delta^{-1/2}Jh^{-it}y\Omega\right\rangle = F(t)
\end{aligned}$$

Con F analítica en $\{\lambda \in \mathbb{C}\ /\ 0 < Im(\lambda) < 1\}$ y continua y acotada en el borde. Veamos cuánto vale $F(t+i)$:

$$\begin{aligned}
F(t+i) &= \left\langle \Delta h^{it}\Delta^{it-1}x\Omega, \Delta^{-1/2}Jh^{1-it}y\Omega\right\rangle = \left\langle \Delta h^{it}\Delta^{-1}\sigma_t^{\phi}(x)\Omega, Sh^{1-it}y\Omega\right\rangle \\
&= \left\langle h^{it}\sigma_t^{\phi}(x)\Omega, y^*h^{1+it}\Omega\right\rangle = \phi\left(h^{1-it}yh^{it}\sigma_t^{\phi}(x)\right) \\
&= \phi\left(hyh^{it}\sigma_t^{\phi}(x)h^{-it}\right) = \psi\left(y\alpha_t(x)\right)
\end{aligned}$$

Luego por 2.22 tenemos que $\sigma_t^{\psi} = h^{it}\sigma_t^{\phi}h^{-it}$.

□

Teorema 3.20 *Teorema del Cociclo Unitario de Connes*
Sean ϕ y ψ pesos fns en $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ álgebra de von Neumann. Entonces, existe una aplicación fuertemente continua $t \longmapsto u_t$ de $\mathbb{R}$ hacia $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ tal que:

a) $\sigma_t^{\psi}(x) = u_t \sigma_t^{\phi}(x) u_t^* \quad \forall x \in \mathcal{M}, t \in \mathbb{R}$

b) $u_{t+s} = u_t \sigma_t^{\phi}(u_s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

Demostración. Sea $\widetilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$. Un operador en $\widetilde{\mathcal{H}}$ esta dado por una matriz de 2×2 con coeficientes en $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$. De hecho, hay una identificación natural:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{B}\left(\widetilde{\mathcal{H}}\right) & \longrightarrow & \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \otimes M_2(\mathbb{C}) \\ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} & \longrightarrow & \sum\limits_{i,j=1}^{2} x_{ij} \otimes e_{ij} \end{array}$$

De manera análoga a lo hecho en 1.3, se ve que $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \otimes M_2(\mathbb{C})$ es un álgebra de von Neumann. Por otro lado, notar que dado $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}$ y $\xi = \xi_1 \oplus \xi_2 \in \widetilde{\mathcal{H}}$:

$$\langle \widetilde{x}\xi, \xi \rangle = \langle x_{11}\xi_1, \xi_1 \rangle + \langle x_{12}\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle x_{21}\xi_2, \xi_1 \rangle + \langle x_{22}\xi_2, \xi_2 \rangle = \langle x_{11}\xi_1, \xi_1 \rangle + \langle x_{22}\xi_2, \xi_2 \rangle$$

Por lo tanto, $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{M}}^+$ si y sólo si $x_{11}, x_{22} \in \mathcal{M}^+$. Definimos entonces:

$$\theta(\widetilde{x}) = \phi(x_{11}) + \psi(x_{22}) \quad \forall \widetilde{x} \in \mathcal{M}$$

θ está bien definido y claramente es un peso fiel y normal, propiedades heredadas de ϕ y ψ. Pero además hereda la propiedad de ser semifinito, pues usando 2.28, sabemos que existen redes $\{x_i\}_{i \in I} \subset D_\phi$ y $\{y_j\}_{j \in J} \subset D_\psi$ tales que $x_i \nearrow 1$ y $y_j \nearrow 1$. Consideremos entonces la red $\{x_i \oplus y_j\}_{(i,j) \in K}$, donde $K = I \times J$ con el orden $(i_1, j_1) \leq (i_2, j_2) \Leftrightarrow i_1 \leq i_2$ y $j_1 \leq j_2$. Por cómo definimos θ, es claro que $\{x_i \oplus y_j\}_{(i,j) \in K}$ es monótona y está en D_θ y por su construcción $\nearrow 1_{\widetilde{\mathcal{H}}}$.

Como $(\widetilde{x}^* \widetilde{x})_{jj} = x_{1j}^* x_{1j} + x_{2j}^* x_{2j}$, resulta que $\widetilde{x} \in N_\theta$ si y sólo si $x_{11}, x_{21} \in N_\phi$ y $x_{12}, x_{22} \in N_\psi$. Además, notar que si $\widetilde{x} \in N_\theta$, entonces $x_{ij} \otimes e_{ij} \in N_\theta$. En particular, $N_\theta(1 \otimes e_{11}) \subset N_\theta$ y, por lo tanto, $M_\theta(1 \otimes e_{11}) \subset M_\theta$. Como M_θ es $*-$cerrada y $1 \otimes e_{11}$ es autoadjunta, vale que $(1 \otimes e_{11}) M_\theta \subset M_\theta$. Y también vale que, dados $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in N_\theta$:

$$\theta((1 \otimes e_{11})\widetilde{x}^* \widetilde{y}) = \phi(x_{11}^* y_{11} + x_{21}^* y_{21}) + 0 = \theta(\widetilde{x}^* \widetilde{y}(1 \otimes e_{11}))$$

Entonces, por 2.36, tenemos que $1 \otimes e_{11} \in \widetilde{\mathcal{M}}^\theta$. Por lo tanto, dado $x \in \mathcal{M}$ y $t \in \mathbb{R}$:

$$\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \sigma_t^\theta((1 \otimes e_{11})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{11})) = (1 \otimes e_{11}) \sigma_t^\theta(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{11})$$

Es decir que existe α_t grupo uniparamétrico tal que $\sigma_t^\theta(x \otimes e_{11}) = \alpha_t(x) \otimes e_{11}$, y como σ_t^θ es un flujo, resulta que α_t también lo es. Veamos que además cumple la condición KMS:

$$\phi(\alpha_t(x)) = \theta(\alpha_t(x) \otimes e_{11}) = \theta(\sigma_t(x \otimes e_{11})) = \theta(x \otimes e_{11}) = \phi(x) \; \forall x \in \mathcal{M}^+$$

Y si consideramos $x, y \in N_\phi \cap N_\phi^*$, notar que $x \otimes e_{11}, y \otimes e_{11} \in N_\theta \cap N_\theta^*$ y que:

$$\theta\left(\left(\sigma_t^\theta(y \otimes e_{11})\right)(x \otimes e_{11})\right) = \phi\left(\alpha_t(y)x\right) \quad \theta\left((x \otimes e_{11})\left(\sigma_t^\theta(y \otimes e_{11})\right)\right) = \phi\left(x\alpha_t(y)\right)$$

Entonces, si F es KMS-admisible para $x \otimes e_{11}$ e $y \otimes e_{11}$ respecto a σ^θ, también lo es para x e y respecto a α. Luego, por 2.35 tenemos que $\alpha_t = \sigma_t^\phi$. Análogamente, podemos obtener que $1 \otimes e_{22} \in \widetilde{\mathcal{M}}^\theta$ y que $\sigma_t^\theta(x \otimes e_{22}) = \sigma_t^\psi(x) \otimes e_{22}$.

Por otro lado, como $e_{21} = e_{22}e_{21}e_{11}$, se concluye que:

$$\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = (1 \otimes e_{22})\left(\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21})\right)(1 \otimes e_{11})$$

Y entonces $\exists\, u_t \in \mathcal{M}$ tal que $\sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21}) = u_t \otimes e_{21}$. Notar por otro lado que $(1 \otimes e_{21})^* = 1 \otimes e_{12}$ y, por lo tanto:

$$(1 \otimes e_{21})^*(1 \otimes e_{21}) = 1 \otimes e_{11} \qquad (1 \otimes e_{21})(1 \otimes e_{21})^* = (1 \otimes e_{22})$$

Que, aplicando σ_t^θ, queda que:

$$(u_t^* \otimes e_{12})(u_t \otimes e_{21}) = 1 \otimes e_{11} \qquad (u_t \otimes e_{21})(u_t^* \otimes e_{12}) = (1 \otimes e_{22})$$

Luego, $u_t^* u_t = u_t u_t^* = 1$, es decir, $u_t \in \mathfrak{U}(\mathcal{M})$. Usando que $t \mapsto \sigma_t^\theta(1 \otimes e_{21})$ es fuertemente continua por ser el grupo uniparamétrico de θ, se deduce que $t \mapsto u_t$ también lo es. Por último, si aplicamos σ_t^θ a:

$$(x \otimes e_{22}) = (1 \otimes e_{21})(x \otimes e_{11})(1 \otimes e_{12})$$

Obtenemos que:

$$\left(\sigma_t^\psi(x) \otimes e_{22}\right) = (u_t \otimes e_{21})\left(\sigma_t^\phi(x) \otimes e_{11}\right)(u_t^* \otimes e_{12})$$

Y dados $s, t \in \mathbb{R}$, resulta que:

$$\begin{aligned} u_{t+s} \otimes e_{21} &= \sigma_t^\theta \circ \sigma_s^\theta(1 \otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta(u_s \otimes e_{21}) \\ &= \sigma_t^\theta(u_s \otimes e_{21}) = \sigma_t^\theta\left((1 \otimes e_{21})(u_s \otimes e_{11})\right) \\ &= (u_t \otimes e_{21})\left(\sigma_t^\phi(u_s) \otimes e_{11}\right) = u_t\sigma_t^\phi(u_s) \otimes e_{21} \end{aligned}$$

Luego, $u_{t+s} = u_t\sigma_t^\phi(u_s)$. □

Definición 3.21 *Equivalencia entre flujos de pesos*

Un $\alpha \in Aut(\mathcal{M})$ es llamado *interno* si $\exists u \in \mathfrak{U}(\mathcal{M})$ tal que $\alpha(x) = uxu^*\ \forall x \in \mathcal{M}$. Al grupo generado por los automorfismos internos se lo notará $Int(\mathcal{M})$ y al cociente ${}^{Aut(\mathcal{M})}\big/_{Int(\mathcal{M})} = Out(\mathcal{M})$.

Dos flujos $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ y $\{\beta_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se dicen *externamente equivalentes*, notado $\alpha \overset{\circ}{\sim} \beta$, si existe una aplicación fuertemente continua $t \longmapsto u_t$ desde $\mathbb{R}$ hacia $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ tal que $\forall s, t \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathcal{M}$, $u_{t+s} = u_t\alpha_t(u_s)$ y $\beta_t(x) = u_t\alpha_t(x)u_t^*$.

Un flujo $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ se dice *interno* si es externamente equivalente al flujo trivial, o, equivalentemente, si $\alpha_t(x) = u_t x u_t^*$ donde $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico fuertemente continuo en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$.

Teorema 3.22 *Álgebras de von Neumann semifinitas*
Dado $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann. Son equivalentes:

i) $\mathcal{M}$ admite un ϕ peso fns de traza.

ii) El flujo $\left\{\sigma_t^\phi\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ es interno para algún ϕ peso fns.

iii) El flujo $\left\{\sigma_t^\phi\right\}_{t\in\mathbb{R}}$ es interno para todo ϕ peso fns.

Un álgebra de von Neumann que cumpla con alguna de estas propiedades, y por lo tanto todas, se la llama semifinita, y caracteriza a las álgebras de tipo I y II.

Demostración.

i) $\Rightarrow$ ii) Por 2.36, el flujo asociado a un peso fns ϕ de traza es trivial, luego es interno.

ii) $\Rightarrow$ iii) Sean ϕ y ψ pesos fns y supongamos que σ^ϕ es interno. Entonces, $\sigma_t^\phi(x) = v_t x v_t^*$ con $\{v_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico fuertemente continuo en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$. Y por el teorema 3.20, existe $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ grupo uniparamétrico fuertemente continuo en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$ tal que $\sigma_t^\psi(x) = u_t\sigma_t^\phi(x)u_t^*$. Luego, $\sigma_t^\psi(x) = u_t v_t x v_t^* u_t^*$, es decir, ψ es interno con grupo uniparamétrico unitario $u_t v_t$.

iii) $\Rightarrow$ i) Fijemos un ϕ peso fns y trabajemos en el marco de la construcción GNS. Por hipótesis, $\sigma_t^\phi(x) = u_t x u_t^*$ donde $\{u_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es un grupo uniparamétrico fuertemente continuo en $\mathfrak{U}(\mathcal{M})$. Como $\sigma_t^\phi(x) = \Delta^{it}x\Delta^{-it}$, si tomamos $x = u_s$ con $s\in\mathbb{R}$, tenemos que $\Delta^{it}u_s = u_s\Delta^{it}\,\forall s,t\in\mathbb{R}$, es decir $u_s\in\mathcal{M}^\phi$. Por otro lado, si llamamos $u_t' = u_t^*\Delta^{it}$, claramente es un flujo unitario en $\mathcal{H}$ y además $u_t' x u_t'^* = x\,\forall x\in\mathcal{M}$. Por lo tanto, $u_t'\in\mathcal{M}'\,\forall t\in\mathbb{R}$.

Por 0.18, existen h y h' operadores autoadjuntos no necesariamente acotados tales que $u_t = e^{ith}$ y $u_t' = e^{ith'}$. Para que esta demostración no resulte muy técnica, supondremos que los operadores h y h' son operadores acotados y que $\phi\in\mathcal{M}_{*,+}$. Notar que h y h' conmutan entre sí pues $h\in\mathcal{M}^\phi$ y $h'\in\mathcal{M}'$ y además $\Delta^{it} = u_t u_t' = e^{ith}e^{ith'}$. Entonces, resulta que $\Delta = e^{h+h'}$. Por otro lado, como $e^{-h}\in\mathcal{M}^\phi$ es un operador positivo e inversible, podemos definir $\tau = \phi\left(e^{-h}\,\cdot\right)\in\mathcal{M}_{*,+}$, como lo hicimos en 3.19. Recordar que $\phi(x) = \langle x\Omega,\Omega\rangle$, entonces, usando que $e^{-h}\in\mathcal{M}^\phi$ junto con 2.24:

$$\tau(x) = \phi\left(e^{-h}x\right) = \phi\left(e^{-h/2}xe^{-h/2}\right) = \left\langle xe^{-h/2}\Omega, e^{-h/2}\Omega\right\rangle$$

Con esta expresión, veamos que τ es de traza. Sean $x,y\in\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned}\tau(xy^*) &= \left\langle y^*e^{-h/2}\Omega, x^*e^{-h/2}\Omega\right\rangle = \left\langle J\Delta^{1/2}\left(e^{-h/2}y\right)\Omega, J\Delta^{1/2}\left(e^{-h/2}x\right)\Omega\right\rangle \\ &= \left\langle \Delta^{1/2}e^{-h/2}x\Omega, \Delta^{1/2}e^{-h/2}y\Omega\right\rangle = \left\langle e^{h'/2}x\Omega, e^{h'/2}y\Omega\right\rangle = \left\langle e^{h'}x\Omega, y\Omega\right\rangle\end{aligned}$$

Entonces, usando que $h'\in\mathcal{M}'$:

$$\tau(xy) = \tau\left((xy)1^*\right) = \left\langle e^{h'}xy\Omega,\Omega\right\rangle = \left\langle e^{h'}y\Omega, x^*\Omega\right\rangle = \tau(yx)$$

$\square$

Definición 3.23 *Morfismo Modular e Invariante T*
Definimos $\delta : \mathbb{R} \longrightarrow Out(\mathcal{M})$ al morfismo de grupos definido como $\delta(t) = \epsilon(\sigma_t^\phi)$, con $\epsilon : Aut(\mathcal{M}) \longrightarrow Out(\mathcal{M})$ el morfismo cociente y ϕ un peso fns. Por el teorema del Cociclo Unitario, δ está bien definido, y lo llamaremos *Morfismo Modular*. Al subgrupo $Ker(\delta) \subset \mathbb{R}$ lo llamaremos *invariante* T *de* $\mathcal{M}$ y lo notaremos $T(\mathcal{M})$.

Teorema 3.24 *Teorema del invariante T*
Sean $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, $\phi \in \mathcal{M}_{*,+}$ fiel y $T_0 \in \mathbb{R}$. Son equivalentes:

i) $T_0 \in T(\mathcal{M})$

ii) $\sigma_{T_0}^\phi \in Int(\mathcal{M})$

iii) $\exists u \in Z\left(\mathcal{M}^\phi\right)$ unitario tal que $uxu^* = \sigma_{T_0}^\phi(x)$

iv) $\exists h \in \left(Z\left(\mathcal{M}^\phi\right)\right)^+$ inversible y acotado tal que $\psi = \phi(h\cdot)$ es periódica con un período que divide a T_0, es decir $\sigma_{T_0}^\psi = Id$.

Demostración.
i) $\Rightarrow$ ii) Por definición $\epsilon\left(\sigma_{T_0}^\phi\right) = \delta(T_0) = \epsilon\left(Id\right)$, es decir, $\sigma_{T_0}^\phi \in Int(\mathcal{M})$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Claramente, $u \in \mathfrak{U}(\mathcal{M})$ es la dada por el hecho de que $\sigma_{T_0}^\phi \in Int(\mathcal{M})$, entonces $uxu^* = \sigma_{T_0}^\phi(x)$. Sea $y \in \mathcal{M}^\phi$, entonces $uyu^* = y$ y, por lo tanto, $uy = yu$, es decir $u \in Z\left(\mathcal{M}^\phi\right)$.

iii) $\Rightarrow$ iv) Usando 0.10 para u^*, consideramos $h = (u^*)^{-iT_0}$. Notar que por ser u unitario, h es positivo, inversible y acotada. Como además $u \in Z\left(\mathcal{M}^\phi\right)$, resulta que $h \in \left(Z\left(\mathcal{M}^\phi\right)\right)^+$. Sea entonces, $\psi = \phi(h\,\cdot)$, estamos en las hipótesis de 3.19. Por lo tanto, $\sigma_t^\psi = h^{it}\sigma_t^\phi h^{-it}$. Tomando $t = T_0$ nos queda que:

$$\sigma_{T_0}^\psi(x) = u^*\left(uxu^*\right)u = x$$

iv) $\Rightarrow$ i) $\delta(T_0) = \epsilon(\sigma_{T_0}^\phi) = \epsilon(\sigma_{T_0}^\psi) = \epsilon(Id)$.

□

Corolario 3.25
$T(\mathcal{M}) = \left\{T_0 \in \mathbb{R} \;/\; \exists \phi \in \mathcal{M}_{*,+} \text{ fiel, tal que } \sigma_{T_0}^\phi = Id\right\}$

Corolario 3.26
$\mathcal{M}$ es semifinita $\Leftrightarrow$ $T(\mathcal{M}) = \mathbb{R}$

Corolario 3.27
$T\left(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2\right) = T\left(\mathcal{M}_1\right) \cap \left(\mathcal{M}_2\right)$

Demostración. De manera análoga a como se trabajó en 3.20, resulta que dados dos pesos fns ϕ en $\mathcal{M}_1$ y ψ en $\mathcal{M}_2$, podemos construir un peso fns θ en $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ tal que $\theta = \phi \otimes \psi$ y entonces $\sigma_t^\theta = \sigma_t^\phi \otimes \sigma_t^\psi$. Luego, θ es interno si y sólo si ϕ y ψ son internos, y de ahí se deduce la igualdad. □

Teorema 3.28 *Invariante T para factores de Araki-Woods*
Sea $\mathcal{M}$ un factor de Araki-Woods donde $Spec\,(\phi_\nu|\mathcal{M}_\nu) = \{\lambda_{\nu,1}, ..., \lambda_{\nu,n_\nu}\}$ tales que $\sum_{i=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,i} = 1$ es su lista de autovalores. Entonces:

$$T_0 \in T(\mathcal{M}) \Leftrightarrow \sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left(1 - \left|\sum_{j=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,j}^{1+iT_0}\right|\right) < \infty$$

Demostración. Por ser factores de Araki-Woods tenemos que $\phi_\nu(x) = tr(h_\nu x)$, con $\{\lambda_{\nu,1}, ..., \lambda_{\nu,n_\nu}\}$ los autovalores de h_ν. Por 3.19 y 2.24, tenemos que el grupo uniparamétrico de ϕ_ν es $\sigma_t^{\phi_\nu}(x) = h_\nu^{it} x h_\nu^{-it}$.

Notar que para cada $t \in \mathbb{R}$ el automorfismo $\bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_t^{\phi_\nu}$ del producto tensorial infinito algebraico de las $\mathcal{M}_\nu$ preserva $\phi = \bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} \phi_\nu$. Por lo tanto, se lo puede extender a $\mathcal{M}$. Más aún, $\sigma_t^\phi = \bigotimes_{\nu\in\mathbb{N}} \sigma_t^{\phi_\nu}$ pues cumple la condición de borde KMS por su construcción. Entonces:

$$\sigma_t^\phi\,(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \dots) = \sigma_t^{\phi_1}(x_1) \otimes \sigma_t^{\phi_2}(x_2) \otimes \sigma_t^{\phi_3}(x_3) \otimes ... \otimes \sigma_t^{\phi_n}(x_n) \otimes 1 \dots$$

Supongamos que:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}} \left(1 - \left|\sum_{j=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,j}^{1+iT_0}\right|\right) < \infty$$

Como $\phi_\nu\,(z_\nu h_\nu^{it}) = tr\,(z_\nu h_\nu^{1+it}) = z_\nu \sum_{j=1}^{n_\nu} \lambda_{\nu,j}^{1+it}$ para cualquier $z_\nu \in \mathbb{C}$, podemos tomar aquel unitario que hace $\phi_\nu\,(z_\nu h_\nu^{it}) = |\phi_\nu(h_\nu^{it})|$. Entonces, de la hipótesis resulta que:

$$\prod_{\nu\in\mathbb{N}} \left\langle z_\nu h_\nu^{iT_0}\Omega, \Omega\right\rangle < \infty$$

Por lo tanto, $v_\nu = h_1^{iT_0} \otimes h_2^{iT_0} \otimes \cdots \otimes h_\nu^{iT_0} \otimes 1 \cdots \in \mathfrak{U}\,(\mathcal{M})$ converge fuertemente en $\mathcal{H}$, es decir, $\exists v \in \mathfrak{U}\,(\mathcal{M})$ tal que $vxv^* = \sigma_{T_0}^\phi$. Luego $T_0 \in T\,(\mathcal{M})$.

Ahora consideremos $T_0 \in T\,(\mathcal{M})$, entonces $\exists v \in \mathfrak{U}\,(\mathcal{M})$ tal que $vxv^* = \sigma_{T_0}^\phi$. Para cada ν consideramos una vez más los $v_\nu = h_1^{iT_0} \otimes h_2^{iT_0} \otimes \cdots \otimes h_\nu^{iT_0} \otimes 1 \cdots$ para notar que $v_\nu^* v \in \mathfrak{U}\,(\mathcal{M})$ y definen el automorfismo identidad restringido a $\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{M}_\nu \otimes 1 \cdots$. Por lo tanto, $\exists w_\nu \in \bigotimes_{j\in\mathbb{N}_{>\nu}} (\mathcal{M}_j, \phi_j)$ tal que $v = v_\nu \otimes w_\nu$. Como $v\Omega \neq 0$, existe $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1$ con $x_j \in \mathcal{M}_j$ tal que $\langle v\Omega, x\Omega\rangle \neq 0$. Considerando $\nu > n$, notemos que:

$$|\langle v\Omega, x\Omega\rangle| = \prod_{j=1}^{n} \left|\left\langle h_j^{iT_0}\Omega, x_j\Omega\right\rangle\right| \prod_{j=n+1}^{\nu} \left|\left\langle h_j^{iT_0}\Omega, \Omega\right\rangle\right| \prod_{j>\nu} |\langle w_j\Omega, \Omega\rangle|$$

Como $\prod_{j>\nu} |\langle w_j\Omega, \Omega\rangle| < 1$, si llamamos $K = \prod_{j=1}^{n} \left|\left\langle h_j^{iT_0}\Omega, x_j\Omega\right\rangle\right|$, obtenemos:

$$\prod_{j=n+1}^{\nu} \left|\left\langle h_j^{iT_0}\Omega, \Omega\right\rangle\right| > K^{-1} |\langle v\Omega, x\Omega\rangle|$$

Luego el producto infinito de los $\left|\left\langle h_j^{iT_0}\Omega,\Omega\right\rangle\right|$ es convergente y por las equivalencias que hicimos antes obtenemos que:

$$\sum_{\nu\in\mathbb{N}}\left(1-\left|\sum_{j=1}^{n_\nu}\lambda_{\nu,j}^{1+iT_0}\right|\right)<\infty$$

□

Corolario 3.29 Clasificación de los factores de Powers con $\lambda\in(0,1]$
Si $\lambda\in(0,1)$, los factores de Powers R_λ son de tipo III y no isomorfos entre sí. Por otro lado, R_1 es un factor semifinito.

Demostración. Por construcción de los R_λ sabemos que $n_\nu=2$, $\lambda_{\nu,1}=1/(1+\lambda)$ y $\lambda_{\nu,2}=\lambda/(1+\lambda)$. Entonces:

$$\left|(\lambda_{\nu,1})^{1+iT_0}+(\lambda_{\nu,2})^{1+iT_0}\right|=\left|\frac{1+\lambda^{1+iT_0}}{(1+\lambda)^{1+iT_0}}\right|=\left|\lambda_{\nu,1}+\lambda^{iT_0}\lambda_{\nu,2}\right|$$

Luego, la sumatoria en 3.28 sólo converge cuando $\left|\lambda_{\nu,1}+\lambda^{iT_0}\lambda_{\nu,2}\right|=1$, esta igualdad vale cuando $\lambda^{iT_0}=1$. Si $\lambda\in(0,1)$, entonces R_λ es de tipo III y $T(R_\lambda)=T(R_\gamma)$ si y sólo si $\lambda=\gamma$. Si $\lambda=1$, $T(R_1)=\mathbb{R}$. □

El Invariante S de Connes

El Espectro Modular o Invariante S es el segundo de los invariante de Connes, fundamental para la clasificación de factores de tipo III. Su definición depende de los conceptos planteados en la versión más general de la teoría de Tomita-Takesaki y se extiende a todas las álgebras de von Neumann de descomposición contable (es decir que toda familia de proyecciones mutuamente ortogonales es contable), en particular las separables. Dado que esta generalidad excede los objetivos de este trabajo, obviaremos las demostraciones. Las mismas pueden encontrarse en [Con73].

Proposición 3.30
Sea $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, ϕ un peso fns, la construcción GNS $(\mathcal{H}_\phi,\pi_\phi,\omega_\phi)$ y Δ_ϕ el operador modular. Por otro lado, sea $F\subset\mathbb{R}_{>0}$ subconjunto cerrado y, para cada μ medida finita en $\mathbb{R}$, sea $\sigma(\mu)=\int_{\mathbb{R}}\sigma_t^\phi d\mu(t)\in\mathfrak{B}(\mathcal{M})$. Son equivalentes:

i) $\chi_F(\Delta_\phi)x\omega_\phi=x\omega_\phi$

ii) $\hat{\mu}(\gamma)=\int\gamma^\mu d\mu(t)=0\ \forall\gamma\in F\Rightarrow\sigma(\mu)x=0$ para cualquier μ.

iii) $\hat{f}(\gamma)=0\ \forall\gamma\in F\Rightarrow\sigma(f)x=0\ \forall f\in L^1(\mathbb{R})$

Estas condiciones definen un subespacio de $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}(\sigma^\phi,F)$ débilmente cerrado.

Teorema 3.31 Sea $\mathcal{M}$ álgebra de von Neumann, ϕ un peso fns, la construcción GNS $(\mathcal{H}_\phi, \pi_\phi, \omega_\phi)$, Δ_ϕ el operador modular, $F \subset \mathbb{R}_{>0}$ subconjunto cerrado, μ medida finita en $\mathbb{R}$ y $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Son equivalentes:

i) $\lambda \in Spec(\Delta_\phi)$

ii) $\sigma(\mu) = 0 \Rightarrow \hat{\mu}(\gamma) = 0$ para cualquier μ.

iii) $\sigma(f) = 0 \Rightarrow \hat{f}(\gamma) = 0 \; \forall f \in L^1(\mathbb{R})$

iv) $\mathcal{M}(\sigma^\phi, F) \neq \{0\}$ para cualquier entorno F de λ

v) $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}$, $\|x_n\| = 1$ tal que $\|\gamma_t^\phi(x_n) - \lambda^{it} x_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$

vi) $|\hat{\mu}(\lambda)| < \|\sigma(\mu)\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{M})} \; \forall \mu$

Corolario 3.32
En las condiciones del teorema anterior, dado $T_0 \in \mathbb{R}$, el espectro de $\sigma^\phi_{T_0} \in \mathfrak{B}(\mathcal{M})$ es la clausura de $\left\{\lambda^{iT_0}, \lambda \in Spec(\Delta_\phi)\right\}$

Definición 3.33 *Espectro Modular*
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann, se define el *espectro modular*:

$$S(\mathcal{M}) = \bigcap_{\phi \in \{\text{peso fns}\}} Spec\,(\Delta_\phi)$$

donde Δ_ϕ el operador modular que surge del teorema de Tomita-Takesaki para el par $(\mathcal{M}, \phi)$. Notar que dadas dos álgebras de von Neumann $\mathcal{M}_1$ y $\mathcal{M}_2$ y su suma directa $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$, se tiene que $S(\mathcal{M}) = S(\mathcal{M}_1) \cup S(\mathcal{M}_2)$.

Propiedad 3.34 Propiedades del Espectro Modular
Sea $\mathcal{M}$ un álgebra de von Neumann y $S(\mathcal{M})$ su espectro modular. Entonces:

a) $S(\mathcal{M})$ es un subconjunto cerrado de $[0, \infty]$ invariante por el morfismo $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$.

b) $\forall \lambda \in S(\mathcal{M})$ no nulo y $\forall T_0 \in T(\mathcal{M})$, se tiene que $\lambda^{iT_0} = 1$.

c) $\mathcal{M}$ es semifinito $\Leftrightarrow$ se tiene que $S(\mathcal{M}) = \{1\}$.

Teorema 3.35 *Propiedad de grupo del Espectro Modular*
Sea $\mathcal{M}$ un factor, entonces:

a) $S(\mathcal{M}) \cap R_{>0}$ es un subgrupo de $(R_{>0}, \cdot)$.

b) Dado $\lambda \in S(\mathcal{M}) \cap R_{>0}$, $\forall \phi$ peso fns en $\mathcal{M}$ se tiene que $\lambda Spec\,(\Delta_\phi) = Spec\,(\Delta_\phi)$.

Corolario 3.36
A cada factor de tipo III le corresponde un único $\lambda \in [0,1]$ tal que:

$$\begin{array}{rcllr} S(\mathcal{M}) & = & \{0,1\} & \text{si} & \lambda = 0 \\ S(\mathcal{M}) & = & \overline{\{\lambda^n \ / \ n \in \mathbb{Z}\}} & \text{si} & \lambda \in (0,1) \\ S(\mathcal{M}) & = & [0,\infty) & \text{si} & \lambda = 1 \end{array}$$

De esta forma, podemos decir que un factor $\mathcal{M}$ es de tipo III_λ.

Teorema 3.37 Sea $\mathcal{M}$ un factor de tipo III. Entonces:

a) La familia de subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}_{>0}$ de la forma $KSpec(\Delta_\phi)$ con K entorno compacto del 1 y ϕ peso fns en $\mathcal{M}$ forman un filtro intersecando con $S(\mathcal{M})$.

b) $S(\mathcal{M}) = \displaystyle\bigcap_{\phi \in \{\text{peso fns}\}} Spec(\Delta_{\phi_e})$ donde $e \in Z(\mathcal{M}^\phi)$ y $\phi_e = \phi|_{eMe}$.

Corolario 3.38
Sea $\mathcal{M}$ un factor de tipo III_λ con $\lambda \in (0,1)$, entonces:

$$T(\mathcal{M}) = \{nT_0 \ / \ n \in \mathbb{Z}\} \quad \text{donde} \quad T_0 = \frac{-2\pi}{ln(\lambda)}$$

Corolario 3.39
El factor de Powers R_λ con $\lambda \in (0,1)$ es de tipo III_λ.

Teorema 3.40 (Araki y Woods)
Sean $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ factores de Araki-Woods de tipo III_λ con $\lambda \in (0,1)$, entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.

Corolario 3.41
Todo factor de Araki-Woods de tipo III_λ con $\lambda \in (0,1)$ es isomorfo a R_λ.

Teorema 3.42 Existe un único factor de Araki-Woods de tipo III_1, pero infinitos de tipo III_0.

Bibliografía

[AW69] Huzihiro Araki y E. J. Woods. “A classification of factors”. En: *Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A* 4 (1968/1969), págs. 51-130. ISSN: 0034-5318.

[Bla06] B. Blackadar. *Operator algebras.* Vol. 122. Encyclopaedia of Mathematical Sciences. Springer-Verlag, Berlin, 2006, págs. xx+517. ISBN: 978-3-540-28486-4; 3-540-28486-9.

[Con76] A. Connes. “The Tomita-Takesaki theory and classification of type-III factors”. En: *C^*-algebras and their applications to statistical mechanics and quantum field theory (Proc. Internat. School of Physics “Enrico Fermi”, Course LX, Varenna, 1973).* North-Holland, Amsterdam, 1976, págs. 29-46.

[Con73] Alain Connes. “Une classification des facteurs de type III”. En: *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* 6 (1973), págs. 133-252. ISSN: 0012-9593.

[Dix81] Jacques Dixmier. *von Neumann algebras.* Vol. 27. North-Holland Mathematical Library. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1981, págs. xxxviii+437. ISBN: 0-444-86308-7.

[Haa88] Offe Haagerup. *Tomita-Takesaki for pedestrians.* Lecture. 1988.

[Jon09] Vaughan F.R. Jones. *Von Neumann Algebras.* 2009. URL: `https://math.berkeley.edu/~vfr/VonNeumann2009.pdf`.

[LR87] A.A. Lodkin y B.A Rubshtein. “Structure and classification of factors”. En: *Journal of Soviet Mathematics* 38.2 (1987), págs. 1773-1798. ISSN: 0090-4104.

[MN36] F. J. Murray y J. von Neumann. “On rings of operators”. En: *Ann. of Math. (2)* 37.1 (1936), págs. 116-229. ISSN: 0003-486X.

[MN37] F. J. Murray y J. von Neumann. “On rings of operators. II”. En: *Trans. Amer. Math. Soc.* 41.2 (1937), págs. 208-248. ISSN: 0002-9947.

[Neu40] J. v. Neumann. “On Rings of Operators. III”. En: *Annals of Mathematics* 41.1 (1940), págs. 94-161. ISSN: 0003486X.

[Ped89] Gert K. Pedersen. *Analysis now.* Vol. 118. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1989, págs. xiv+277. ISBN: 0-387-96788-5.

[Pow67] Robert T. Powers. “Representations of Uniformly Hyperfinite Algebras and Their Associated von Neumann Rings”. En: *Annals of Mathematics* 86.1 (1967), págs. 138-171. ISSN: 0003486X.

[Sak97] Shoichiro Sakai. *C*-Algebras and W*-Algebras (Classics in Mathematics)*. Classics in Mathematics/Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 60. Springer, 1997. ISBN: 3540636331,9783540636335.

[Sas] Román Sasyk. *Álgebras de von Neuman*. Curso dictado en el Segundo Cuatrimestre de 2016.

[Sun87] V. S. Sunder. *An invitation to von Neumann algebras*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1987, págs. xiv+171. ISBN: 0-387-96356-1.

[Tak70] M. Takesaki. *Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 128. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, págs. ii+123. ISBN: 978-3-540-04917-3.

[Woo82] E. J. Woods. "ITPFI factors—a survey". En: *Operator algebras and applications, Part 2 (Kingston, Ont., 1980)*. Vol. 38. Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982, págs. 25-41. ISBN: 0-8218-1444-3.