UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sucesiones Básicas y Bases de Schauder de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$

Miguel Berasategui

Director: Daniel Carando

Fecha de Presentación

Agradecimientos.

Quisiera agradecer a Daniel, por sugerirme un tema que me resultó muy interesante para mi tesis, y por tomarse el trabajo de chequear todas las demostraciones y ayudarme con correcciones y mejoras, que me permitieron escribir este trabajo.
También a los profesores que tuve a lo largo de la Licenciatura, en las teóricas y en las prácticas.
Especialmente quisiera agradecer a mamá por apoyarme siempre para que estudiase matemática y siguiera hasta completar la Licenciatura.

Introducción.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar bases de Schauder consistentes en traslaciones de una función en $L_p(\mathbb{R}^d)$, y desarrollar los detalles de algunos de los resultados demostrados en [2] y [6].
Vamos a precisar el concepto de bases de Schauder y sucesiones básicas en el primer Capítulo, pero como primera aproximación podemos decir que una base de Schauder es una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X tal que cualquier elemento del espacio se escribe de manera única como combinanción lineal infinita de los $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Esto es análogo a la escritura única que se tiene en espacios de dimensión finita por medio de bases algebraicas finitas, y en espacios de Hilbert separables por medio de bases ortogonales y ortonormales numerables - las cuales, como veremos, son casos particulares de bases de Schauder.
Si bien no todos los espacios de Banach separables tienen bases de Schauder, sí las tienen casi todos los espacios separables con los que se trabaja habitualmente, incluyendo los espacios de funciones $L_p(\mathbb{R}^d)$ para todo entero positivo d, el espacio $L_p[0,1]$, y en general todo espacio de dimensión infinita $L_p(\nu)$ para algún espacio de medida (Ω, Σ, ν) y para todo $p \in [1, +\infty)$. El uso de bases de Schauder facilita hacer análisis en dichos espacios.
Una sucesión básica en un espacio de Banach X es simplemente una sucesión que es base de Schauder de un subespacio de X.
Un tipo de bases de Schauder que puede resultar particularmente útil en varios contextos son las bases de Schauder incondicionales. Vamos a precisar este concepto en el Capítulo 2, pero hablando intuitivamente, estas son las bases en las que no importa el orden en que se que se escriba la suma de elementos de la base, lo que también es análogo a los casos de espacios de dimensión finita, y de espacios de Hilbert.
Finalmente, las bases de Schauder de traslaciones de una función en $L_p(\mathbb{R}^d)$ son aquellas en las que los elementos de la base son composiciones de una función fija con una sucesión de traslaciones. Las traslaciones de una función aparecen en varios contextos en Análisis Funcional, como los marcos y transformadas de Gabor [2], y el caso particular de bases de Schauder formadas por traslaciones de una función fue estudiado en [2], [5], [6] y [7]. En esta tesis, seguimos las demostraciones de [2] y [6], y probamos los siguientes resultados principales:

- Si $p \in [1, 2]$, toda sucesión básica incondicional de traslaciones de una función f

en $L_p(\mathbb{R}^d)$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

- Si $p \in (2, +\infty)$, toda sucesión básica incondicional de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$ que es base de Schauder de un subespacio complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$, es equivalente a la base canónica de ℓ_p.
- Si $p \in (1, +\infty)$, no existen bases incondicionales de traslaciones para $L_p(\mathbb{R}^d)$.
- No existen bases de traslaciones para $L_1(\mathbb{R}^d)$.

A tal fin, primero damos las definiciones y los resultados teóricos preliminares que se requieren, organizados de la siguiente manera:
En el Capítulo 1 definimos los conceptos de sucesiones básicas y bases de Schauder, como así también otros conceptos elementales que necesitamos - en particular, el concepto de equivalencia de sucesiones básicas -, y demotramos algunos resultados generales que vamos a usar en los capítulos posteriores.
En el Capítulo 2, precisamos los conceptos de convergencia incondicional y sucesiones básicas incondicionales, y demostramos equivalencias que son en general de utilidad en el estudio de la convergencia incondicional. Vamos a usar algunas de esas equivalencias en las demostraciones de los Capítulos 3 y 4.
En el Capítulo 3, definimos los conceptos básicos y demostramos algunos resultados sobre los espacios L_p, que nos permitirán probar los resultados principales de la tesis. En particular, introducimos la sucesión de funciones de Rademacher, y demostramos que para todo $p \geq 1$, dicha sucesión es equivalente a la base canónica de ℓ_2. Vamos a usar ese resultado en las demostraciones del Capítulo 4.
En el Capítulo 4 probamos los resultados principales.

Notación general.

En esta tesis, vamos a usar la siguiente notación:

- A menos que se indique lo contrario, todos los espacios llamados X, Y o Z son espacios de Banach de dimensión infinita, y las funciones entre ellos son operadores lineales continuos. Dichos espacios pueden ser o bien sobre $\mathbb{R}$, o bien sobre $\mathbb{C}$, y a menos que especifiquemos lo contrario, las demostraciones son válidas tanto para espacios sobre $\mathbb{R}$ como para espacios sobre $\mathbb{C}$.

- Si X es un espacio de Banach, llamamos X' a su espacio dual, B_X al conjunto de elementos de X cuya norma es menor o igual que uno, y S_X al conjunto de elementos de X cuya norma es igual a uno.

- A menos que indiquemos una notación distinta en casos particulares, notaremos $||\cdot||_X$ a la norma del espacio X, y si Y es un subespacio de X, llamaremos $||\cdot||_Y$ a la restricción a Y de la norma de X. En caso de que sea claro por el contexto cuál es la norma a la que nos referimos y sea conveniente, la notaremos $||\cdot||$.

- Si $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo, notaremos $||T||$ a la norma del operador.

- Notaremos $|\cdot|$ a la norma euclídea en $\mathbb{R}^d$ o $\mathbb{C}$.

- Decimos que un conjunto $\{f_\phi\}_{\phi\in\Phi}$ en un espacio X es *seminormalizado* si existe una constante $K > 0$ tal que para todo $\phi \in \Phi$, $K^{-1} \leq ||f_\phi||_X \leq K$, y *normalizado* si para todo $\phi \in \Phi$, $||f_\phi||_X = 1$, es decir si es seminormalizado y se puede tomar $K = 1$.

- Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X, decimos que *la serie* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ *converge* si existe $f \in X$ tal que

$$f = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i.$$

- Decimos que una función $T : X \to Z$ es $\omega - \omega$ continua si es continua cuando se considera a X y Z como espacios topológicos con la topología débil.
- Si f es un elemento de X, $\hat{f}$ es el elemento de X'' tal que $\hat{f}(f') = f'(f)$ para todo $f' \in X'$. La *inclusión canónica* de X en su bidual X'' es la isometría $J_X : X \to X''$ dada por $J_X(f) = \hat{f}$.
- Si $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es un subconjunto de X, llamamos $[f_\gamma : \gamma \in \Gamma]$ al subespacio vectorial de X generado por $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$, y $\overline{[f_\gamma : \gamma \in \Gamma]}$ a su clausura.
- Si A es un conjunto, llamamos χ_A a su función característica y $\#(A)$ a su cardinal.
- A menos que especifiquemos lo contrario, cuando integramos lo hacemos con respecto a la medida de Lebesgue, y cuando nos referimos a la medida de algún conjunto, es la medida de Lebesgue en el espacio correspondiente, que especificaremos si no queda claro en el contexto.
- Notamos por $\mu(E)$ a la medida de Lebesgue de un subconjunto medible E de $\mathbb{R}^d$.
- Dados dos subconjuntos A y B de $\mathbb{R}^d$, llamamos $d(A, B)$ a la distancia entre ellos, de acuerdo con la norma euclídea.
- Llamamos *cubo* en $\mathbb{R}^d$ al producto cartesiano de d intervalos acotados de $\mathbb{R}$ de igual longitud no nula, y decimos que un cubo Q tiene lado x si la longitud de cada uno de sus lados es x. También llamamos $l(Q)$ a la longitud de cada lado de Q.
- Dado un subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^d$, y un punto $x \in \mathbb{R}^d$, llamamos $A + x$ al conjunto $\{a + x : a \in A\}$.
- Si f es una función que toma valores reales o complejos y A es un subconjunto de su dominio, notamos
$$f\big|_A(x) = \chi_A(x)f(x)$$
- Si $p \in (1, +\infty)$, llamamos p' al único número que cumple que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $p = 1$, definimos $p' = \infty$.
- Si $p \in [1, +\infty)$, a es un elemento de ℓ_p y b es un elemento de $\ell_{p'}$, notamos $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ y $b = (b_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_{p'}$. También identificamos b con un elemento de $(\ell_p)'$ de la manera usual, de modo que $b(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i$.

Vamos a agregar más notación a lo largo de la tesis, a medida que definamos algunos de los conceptos que usaremos.

Capítulo 1

Bases de Schauder en espacios de Banach.

En un espacio de Banach de dimensión infinita, toda base algebraica - también llamada *base de Hamel* - es no numerable. Por este motivo, las bases de Hamel son de poca utilidad para hacer análisis en tales espacios. En los espacios de Banach separables de dimensión infinita más estudiados, existen *bases de Schauder*, que son siempre contables, y en general más útiles para ese objectivo.
En este capítulo, vamos a definir las bases de Schauder y demostrar algunos de los resultados básicos que usaremos en el resto de la tesis.

Definiciones y resultados elementales.

En esta sección, vamos a definir los conceptos elementales, y demostrar algunos resultados que usaremos en muchas de las demostraciones posteriores.

Definición 1.1.1. *Una* Base de Schauder *de un espacio de Banach X es una sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de X que cumple la siguiente condición: para todo $f \in X$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i.$$

Una sucesión básica *en un espacio de Banach X es una sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en X que es base de Schauder de $\overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$.*

Observemos que la unicidad de escritura en particular implica que las bases de Schauder son conjuntos linealmente independientes.
Ejemplos usuales de bases de Schauder son las bases canónicas $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de los espacios

ℓ_p, con $p \in [1, +\infty)$. Más precisamente, para cada entero positivo i, $e^{(i)}$ es la sucesión $(e_j^{(i)})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $e_j^{(i)} = \delta_{ij}$. El espacio ℓ_∞ no es separable, y por lo tanto no puede tener una base de Schauder, pero la sucesión $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica en ℓ_∞, y es una base de Schauder del espacio c_0 de sucesiones que convergen a cero.
También son ejemplos de bases de Schauder las bases ortonormales de espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, como por ejemplo la Base de Fourier en $L_2[0,1]$, o en $L_2[-\pi,\pi]$.
El primer resultado sobre bases de Schauder que vamos a demostrar establece equivalencias que usaremos posteriormente, y en general que resultan útiles en muchas demostraciones en el contexto de bases de Schauder.

Lema 1.1.2. *Sea X un espacio de Banach con norma $||\cdot||_X$, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*1*) *La sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica.*

(*2*) *Para todo entero positivo i, $f_i \neq 0$, y existe un escalar positivo K y una norma $|||\cdot|||$ en el espacio $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$ tal que $||f||_Y \leq |||f||| \leq K||f||_Y$ para todo $f \in \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, y tal que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y para todo par de enteros positivos $m \geq n$, se tiene que*

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|\right| \leq \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|\right|. \tag{1.1}$$

(*3*) *Para todo entero positivo i, $f_i \neq 0$, y existe una constante positiva K tal que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y para todo par de enteros positivos $m \geq n$, se tiene que*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_X \leq K \left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X. \tag{1.2}$$

Demostración. $(\mathbf{1}) \Longrightarrow (\mathbf{2})$
Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, en particular es un conjunto linealmente independiente, y por ende $f_i \neq 0$ para todo entero positivo i.
Puesto que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, para todo $f \in Y$ existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i,$$

donde la convergencia es con respecto a la norma $||\cdot||_Y$.
Por lo tanto, podemos definir una función $|||\cdot||| : Y \to [0, +\infty)$ por medio de la fórmula

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right|\right|\right| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i f_i\right|\right|_Y\right\}. \tag{1.3}$$

Es claro que si a es un escalar, entonces $|||af||| = |a||||f|||$, y que si f y g son elementos de Y, entonces $|||f+g||| \leq |||f||| + |||g|||$. Luego, $|||\cdot|||$ es una norma en Y.
Si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, y n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, definimos para cada entero positivo i los siguientes escalares:

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq n, \\ 0 & \text{si } n < i. \end{cases}$$

$$c_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq m, \\ 0 & \text{si } m < i. \end{cases}$$

Se sigue de (1.3) y de las definiciones de c_i y b_i para cada entero positivo i que

$$\begin{aligned}\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|\right| &= \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i\right|\right|\right| = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k} b_i f_i\right|\right|_X\right\} = \sup_{1\leq k\leq n} \left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i f_i\right|\right|_X\right\} \\ &\leq \sup_{1\leq k\leq m} \left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k} a_i f_i\right|\right|_X\right\} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k} c_i f_i\right|\right|_X\right\} = \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i f_i\right|\right|\right| \\ &= \left|\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|\right|\end{aligned}$$

El siguiente paso es probar que el espacio Y con la norma $|||\cdot|||$ es un espacio de Banach.
Sea $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ una sucesión de Cauchy con respecto a la norma $|||\cdot|||$.
Puesto que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y con respecto a la norma $||\cdot||_Y$, existe para cada entero positivo j una sucesión de escalares $\{b_i^{(j)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$g_j = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(j)} f_i, \tag{1.4}$$

donde la convergencia de las sumas es con respecto a la norma $||\cdot||_Y$. Dado que $f_i \neq 0$ para todo entero positivo i, deducimos que si m, j_1 y j_2 son enteros positivos, entonces

$$\begin{aligned}\left|b_m^{(j_1)} - b_m^{(j_2)}\right| &= \frac{1}{||f_m||_Y} \left|\left|\left(b_m^{(j_1)} - b_m^{(j_2)}\right) f_m\right|\right|_Y \\ &= \frac{1}{||f_m||_Y} \left|\left|\sum_{i=1}^{m} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i - \sum_{i=1}^{m-1} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i\right|\right|_Y\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{||f_m||_Y}\left(\left|\left|\sum_{i=1}^{m}\left(b_i^{(j_1)}-b_i^{(j_2)}\right)f_i\right|\right|_Y+\left|\left|\sum_{i=1}^{m-1}\left(b_i^{(j_1)}-b_i^{(j_2)}\right)f_i\right|\right|_X\right)\\
&\leq \frac{2}{||f_m||_Y}|||g_{j_1}-g_{j_2}|||.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión de escalares $\left\{b_m^{(j)}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Concluimos que existe una sucesión de escalares $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{j\to+\infty} b_m^{(j)} = b_m \quad \forall m\in\mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Si j, l, m y n son enteros positivos tales que $n\leq m$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i-\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j)} f_i\right|\right|_Y &\leq \left|\left|\sum_{i=n}^{m}\left(b_i-b_i^{(l)}\right)f_i\right|\right|_Y+\left|\left|\sum_{i=n}^{m}\left(b_i^{(l)}-b_i^{(j)}\right)f_i\right|\right|_Y\\
&\leq \sum_{i=n}^{m}\left|b_i-b_i^{(l)}\right| ||f_i||_Y+2\sup_{k\in\mathbb{N}}\left\{\left|\left|\sum_{i=1}^{k}\left(b_i^{(l)}-b_i^{(j)}\right)f_i\right|\right|_Y\right\}\\
&= \sum_{i=n}^{m}\left|b_i-b_i^{(l)}\right| ||f_i||_Y+2|||g_j-g_l|||.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Se infiere de (1.5) y (1.6) que

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i-\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j)} f_i\right|\right|_Y &\leq \limsup_{l\to\infty}\left(\sum_{i=n}^{m}\left|b_i-b_i^{(l)}\right| ||f_i||_Y+2|||g_j-g_l|||\right)\\
&\leq 2\sup_{l\geq j}\{|||g_j-g_l|||\} \quad \forall j\in\mathbb{N}.
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Dado $\epsilon>0$, elegimos enteros positivos j_0 y n_0 tales que si $j_0\leq j\leq l$, entonces $|||g_j-g_l|||\leq 4^{-1}\epsilon$, y si $n_0\leq n\leq m$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right|\right|_Y \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.8}$$

Se deduce de (1.4), (1.5), (1.7) y (1.8) que si $n_0\leq n\leq m$, entonces

$$
\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i\right|\right|_Y &\leq \left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i-\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right|\right|_Y+\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right|\right|_Y\\
&\leq 2\sup_{l\geq j_0}\{|||g_{j_0}-g_l|||\}+\frac{\epsilon}{2}\leq 2\left(\frac{\epsilon}{4}\right)+\frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}
$$

$$=\epsilon.$$

Concluimos que $\sum_{i=n}^{m} b_i f_i$ converge con respecto a la norma $||\cdot||_Y$, es decir que existe $g \in Y$ tal que

$$\left|\left| g - \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i \right|\right|_Y = 0. \tag{1.9}$$

Tomando $n = 1$ y $m = k$ en (1.7) para cada entero positivo k, se sigue de (1.3), (1.4), (1.7) y (1.9) que

$$\begin{aligned} |||g - g_j||| =& \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \left|\left| \sum_{i=1}^{k} b_i f_i - \sum_{i=1}^{k} b_i^{(j)} f_i \right|\right|_Y \right\} \\ \leq& 2 \sup_{l\geq j} \{|||g_j - g_l|||\} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deducimos que $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge a g en la norma $|||\cdot|||$, y que Y es un espacio de Banach con la norma $|||\cdot|||$.
Puesto que $||f||_Y \leq |||f|||$ para todo $f \in Y$, por el Teorema de la Aplicación Abierta se infiere que $Id : (Y, |||f|||) \to (Y, ||\cdot||_Y)$ es abierta y por lo tanto un isomorfismo, lo que implica que existe $K > 0$ tal que $|||f||| \leq K||f||_Y$ para todo $f \in Y$.
(2)⇒**(3)**
Como $||f||_X = ||f||_Y$ para todo $f \in Y$, se deduce que si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right|\right|_X \leq& \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right|\right|\right| \leq \left|\left|\left| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right|\right|\right| \\ \leq& K \left|\left| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right|\right|_X . \end{aligned}$$

(3)⇒**(1)**
Si $g \in Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, existe una sucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subseteq [f_i : i \in \mathbb{N}]$ tal que

$$||g_j - g||_X \leq \frac{1}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.10}$$

Puesto que $g_j \in [f_i : i \in \mathbb{N}]$ para cada $j \in \mathbb{N}$, existe una sucesión de enteros positivos $\{m_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ y escalares $\{b_i^{(j)}\}_{i\in\{1,\ldots,m_j\}}$ tales que

$$g_j = \sum_{i=1}^{m_j} b_i^{(j)} f_i \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Definimos $b_i^{(j)} = 0$ para todo par de enteros positivos i y j tales que $i > m_j$.
Si m, j_1 y j_2 son enteros positivos, de (1.2), (1.10) y (1.11) se sigue que

$$\begin{aligned}
\left|b_m^{(j_1)} - b_m^{(j_2)}\right| =& \frac{1}{||f_m||_X} \left|\left|\left(b_m^{(j_1)} - b_m^{(j_2)}\right) f_m\right|\right|_X \\
=& \frac{1}{||f_m||_X} \left|\left|\sum_{i=1}^{m} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i - \sum_{i=1}^{m-1} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i\right|\right|_X \\
\leq& \frac{1}{||f_m||_X} \left(\left|\left|\sum_{i=1}^{m} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{i=1}^{m-1} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i\right|\right|_X\right) \\
\leq& \frac{2K}{||f_m||_X} \left|\left|\sum_{i=1}^{m+m_{j_1}+m_{j_2}} \left(b_i^{(j_1)} - b_i^{(j_2)}\right) f_i\right|\right|_X = \frac{2K}{||f_m||_X} ||g_{j_1} - g_{j_2}||_X \\
\leq& \frac{2K}{||f_m||_X} \left(\frac{1}{j_1} + \frac{1}{j_2}\right).
\end{aligned}$$

Concluimos que existe una sucesión de escalares $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{j\to+\infty} b_m^{(j)} = b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Si j, l n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i - \sum_{i=n}^{m} b_i^{(j)} f_i\right|\right|_X \leq& \left|\left|\sum_{i=n}^{m} \left(b_i - b_i^{(l)}\right) f_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{i=n}^{m} \left(b_i^{(l)} - b_i^{(j)}\right) f_i\right|\right|_X \\
\leq& \sum_{i=n}^{m} \left|b_i - b_i^{(l)}\right| ||f_i||_X + 2K \left|\left|\sum_{i=1}^{m+m_j+m_l} \left(b_i^{(l)} - b_i^{(j)}\right) f_i\right|\right|_X \\
=& \sum_{i=n}^{m} \left|b_i - b_i^{(l)}\right| ||f_i||_X + 2K||g_j - g_l||.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Tomando límite en (1.13), por (1.10) y (1.12) deducimos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i - \sum_{i=n}^{m} b_i^{(j)} f_i\right|\right|_X \leq& \lim_{l\to+\infty} \left(\sum_{i=n}^{m} \left|b_i - b_i^{(l)}\right| ||f_i||_X + 2K||g_j - g_l||\right) \\
\leq& \frac{2K}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{1.14}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea j_0 un entero positivo tal que $4Kj_0^{-1} \leq \epsilon$, y n_0 un entero positivo tal que si n y m son enteros positivos y $n_0 \leq n \leq m$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right|\right|_X \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{1.15}$$

Se deduce de (1.14) y (1.15) que si $n_0 \leq n \leq m$, entonces

$$\left\|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i\right\|_X \leq \left\|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i - \sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right\|_X + \left\|\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right\|_X \leq \frac{2K}{j_0} + \left\|\sum_{i=n}^{m} b_i^{(j_0)} f_i\right\|_X$$
$$\leq \epsilon.$$

Concluimos que $\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i$ converge en X.
Si elegimos $n = 1$ y tomamos límite en (1.14), inferimos que

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i - g_j\right\|_X = \lim_{m\to+\infty} \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i f_i - \sum_{i=1}^{m} b_i^{(j)} f_i\right\|_X \leq \frac{2K}{j} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Se sigue de (1.10) y (1.16) que

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i.$$

Para completar la demostración de que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y, resta ver que la escritura es única.
Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i$. Se sigue (1.2) que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) f_i\right\|_X \leq K \left\|\sum_{i=1}^{n+l} (a_i - b_i) f_i\right\|_X \quad \forall (n,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}.$$

Tomando límite, resulta que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) f_i\right\|_X \leq \lim_{l\to+\infty} \left(K \left\|\sum_{i=1}^{n+l} (a_i - b_i) f_i\right\|_X\right)$$
$$= K \left\|\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i) f_i\right\|_X = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Dado que $f_1 \neq 0$, si tomamos $n = 1$ en (1.17), deducimos que $a_1 - b_1 = 0$, es decir que $a_1 = b_1$. De manera similar, si tomamos $n = 2$, como $a_1 - b_1 = 0$ y $f_2 \neq 0$, deducimos que $a_2 - b_2 = 0$, es decir que $a_2 = b_2$. Razonando inductivamente, deducimos que $a_i = b_i$ para todo entero positivo i. □

Observación. *Si $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números positivos que converge a un límite K_0, y la desigualdad (1.2) se cumple para todo K_j, entonces también se cumple para K_0. Por lo tanto, para cada sucesión básica existe un mínimo número positivo para el cual se cumple (1.2). Ese número se denomina* constante de la sucesión básica (o de la base). *Tomando $n = m = 1$ y $a_1 = 1$ en (1.2), se infiere inmediatamente que la constante de la base es siempre mayor o igual que uno.*

Si consideramos el espacio $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$ con la norma de la afirmación (**2**) del Lema 1.1.2 - llamada *trinorma* -, resulta que la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de dicho espacio cuya constante es uno. Aunque no vamos a usar ese resultado en las demostraciones de esta tesis, en el contexto general del estudio de bases de Schauder, ese hecho permite simplificar algunas demostraciones asumiendo que la constante de la base es uno.
El siguiente resultado se deduce inmediatamente de la definción de constante de una base o sucesión básica.

Proposición 1.1.3. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X de constante K. Para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y para todo par de enteros positivos n y m, se tiene que*

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \leq (K+1)\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X .$$

Además, si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \leq K||f||_X, \text{ y } \left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \leq 2K||f||_X.$$

Demostración. Para la primera afirmación, tenemos:

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X &= \left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i\right|\right|_X \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i\right|\right|_X \\ &\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X + K\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \\ &=(K+1)\left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X .\end{aligned}$$

Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, para cada par de enteros positivos j y l se tiene que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{j} a_i f_i\right|\right|_X \leq K\left|\left|\sum_{i=1}^{j+l} a_i f_i\right|\right|_X .$$

Si hacemos que l tienda a infinito, concluimos que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{j} a_i f_i\right|\right|_X \leq K||f||_X \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Luego, si $n \leq m$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \leq & \left|\left|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{i=1}^{n-1} a_i f_i\right|\right|_X \leq K||f||_X + K||f||_X \\ \leq & 2K||f||_X.\end{aligned}$$

$\square$

Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X, por definición para cada $f \in X$ existe una sucesión única de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$. Por lo tanto, existe para cada entero positivo j una única función lineal f'_j de X en el cuerpo de escalares tal que

$$f'_j\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right) = a_j.$$

La sucesión $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ se denomina *sucesión de funciones coordenadas* de la base $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Observemos que si $f \in X$, entonces $f = \sum_{i=1}^{\infty} f'_i(f) f_i$. Por lo tanto, la siguiente Observación se sigue inmediatamente de la Proposición 1.1.3.

Observación 1.1.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X, $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas, y K la constante de la base. Si n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, entonces para todo $f \in X$, valen las siguientes desigualdades:*

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=1}^{m} f'_i(f) f_i\right|\right|_X &\leq K||f||_X, \ \ y \\ \left|\left|\sum_{i=n}^{m} f'_i(f) f_i\right|\right|_X &\leq 2K||f||_X.\end{aligned}$$

En particular, se tiene que

$$||f'_i(f) f_i||_X \leq 2K||f||_X \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos de sucesiones de funciones coordenadas son las bases canónicas de ℓ_p, si $p \in (1, +\infty)$. Más precisamente, identificando $(\ell_p)'$ con $\ell_{p'}$ para todo $p \in (1, +\infty)$, la base canónica $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ del espacio ℓ_p es la sucesión de funciones coordenadas de la base canónica $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ del espacio $\ell_{p'}$.
También son ejemplos de sucesiones de funciones coordenadas las bases ortonormales de espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. En estos casos, identificando el espacio con su dual, resulta que $f'_i = f_i$ para todo entero positivo i.

En todos estos ejemplos, las funciones coordenadas son continuas, y más aún, en estos casos la sucesión de funciones coordenadas de una base de Schauder de X es una sucesión básica en X'. Vamos a probar seguidamente que esto vale para toda sucesión de funciones coordenadas de una base de Schauder.

Proposición 1.1.5. *Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X de constante K y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es su sucesión de funciones coordenadas, entonces para todo entero positivo i la función f_i' es continua, y se tiene que*

$$\frac{1}{||f_i||_X} \leq ||f_i'||_{X'} \leq \frac{2K}{||f_i||_X}. \tag{1.18}$$

En particular, si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada.

Demostración. Para cada entero positivo i, como $f_i \neq 0$, por la Observación 1.1.4 se deduce que

$$|f_i'(f)| = \frac{||f_i'(f)f_i||_X}{||f_i||_X} \leq \frac{2K||f||_X}{||f_i||_X}.$$

Por lo tanto, f_i' es continua, y

$$||f_i'||_{X'} \leq \frac{2K}{||f_i||_X}. \tag{1.19}$$

Teniendo en cuenta que $f_i'(f_i) = 1$, inferimos que

$$\frac{1}{||f_i||_X} = \frac{|f_i'(f_i)|}{||f_i||_X} \leq \frac{||f_i'||_{X'}||f_i||_X}{||f_i||_X} = ||f_i'||_{X'}. \tag{1.20}$$

□

Observemos que para cada par de enteros positivos i y j, se tiene que $f_j'(f_i) = \delta_{ij}$, y que si $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X' tal que $g_j'(f_i) = \delta_{ij}$, entonces $g_j' = f_j'$ para todo entero positivo j.

Proposición 1.1.6. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X, y K la constante de la sucesión. La sucesión de funciones coordenadas $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en el espacio dual de $\overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, y su constante es menor o igual que K.*

Demostración. Sea $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$. Por la Proposición 1.1.5, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en Y'.
Sean n y m enteros positivos tales que $n \leq m$, y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares.

Si $f \in B_Y$, se tiene que $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j'(f) f_i$, y por la Observación 1.1.4, resulta que $K^{-1} \sum\limits_{i=1}^{n} f_j'(f) f_j \in B_Y$. Luego,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{m} b_i f_i' \right\|_{Y'} \geq & \left| \sum_{i=1}^{m} b_i f_i' \left(K^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_j'(f) f_j \right) \right| = \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_i f_j'(f) f_i'(f_j) \right| \\
= & \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_i f_j'(f) \delta_{ij} \right| = \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^{n} b_i f_i'(f) \right| = \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} b_i f_j'(f) \delta_{ij} \right| \\
= & \frac{1}{K} \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} b_i f_j'(f) f_i'(f_j) \right| = \frac{1}{K} \left| \left(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i' \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} f_j'(f) f_j \right) \right| \\
= & \frac{1}{K} \left| \left(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i' \right) (f) \right|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i f_i' \right\|_{Y'} = & \sup_{f \in B_Y} \left\{ \left| \left(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i' \right) (f) \right| \right\} \\
\leq & K \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i f_i' \right\|_{Y'}.
\end{aligned}$$

Puesto que $f_i' \neq 0$ para todo entero positivo i porque $f_i'(f_i) = 1$, concluimos por el Lema 1.1.2 que $\{f_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una sucesión básica en Y', y su constante es menor o igual que K. □

En los ejemplos de las bases canónicas de ℓ_p para $p \in (1, +\infty)$, y de bases ortonormales de espacios de Hilbert separables de dimensión infinita, las sucesiones de funciones coordenadas no son solo sucesiones básicas en el espacio dual, sino también bases del mismo. Este resultado vale para todas las bases de Schauder de espacios de Banach reflexivos, como demostraremos seguidamente.

Lema 1.1.7. *Si $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de un espacio de Banach reflexivo X, la sucesión de funciones coordenadas $\{f_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder de X', y la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_i'\}_{i \in \mathbb{N}}$ es la sucesión $\{\hat{f}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, y es una base de Schauder de X''. Por lo tanto, para toda $f' \in X'$, se tiene que*

$$f' = \sum_{i=1}^{\infty} f'(f_i) f_i'. \tag{1.21}$$

Demostración. Por la Proposición 1.1.6, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X'.
Sea $f' \in X'$.
Si $f'' \in X''$, existe $f \in X$ tal que $f'' = J_X(f) = \hat{f}$, es decir que $f''(g') = g'(f)$ para todo $g' \in X'$. Como $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i$, resulta que

$$f'' = J_X\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) J_X(f_i) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f)\hat{f}_i. \tag{1.22}$$

Dado $\epsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{\infty} f_i'(f) f_i\right|\right|_X \leq \frac{\epsilon}{1 + ||f'||_{X'}} \quad \forall n \geq n_0. \tag{1.23}$$

Como $\hat{f}_i\left(f_j'\right) = f_j'(f_i) = \delta_{ij}$ para todo par de enteros positivos i y j, se sigue de (1.22) y (1.23) que si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|f''\left(f' - \sum_{j=1}^{n} f'(f_j) f_j'\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f)\hat{f}_i\left(f' - \sum_{j=1}^{n} f'(f_j) f_j'\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f)\hat{f}_i(f') - \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} f_i'(f) f'(f_j)\hat{f}_i\left(f_j'\right)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f'(f_i) - \sum_{i=1}^{n} f_i'(f) f'(f_i)\right| \\
&= \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i'(f) f'(f_i)\right| = \left|f'\left(\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i'(f) f_i\right)\right| \\
&\leq ||f'||_{X'}\left|\left|\sum_{i=n+1}^{\infty} f_i'(f) f_i\right|\right|_X \leq ||f'||_{X'}\left(\frac{\epsilon}{1 + ||f'||_{X'}}\right) \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Se deduce que la sucesión $\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} f'(f_j) f_j'\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a f'. Como la clausura de $[f_i' : i \in \mathbb{N}]$ con respecto a la topología inducida por la norma coincide con su clausura débil porque $[f_i' : i \in \mathbb{N}]$ es un subespacio, inferimos que $f' \in \overline{[f_i' : i \in \mathbb{N}]}$.
Concluimos que $X' = \overline{[f_i' : i \in \mathbb{N}]}$, lo que implica que $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de X'.
Dado que $\hat{f}_j(f_i) = f_i'(f_j) = \delta_{ij}$ para todo par de enteros positivos i y j, deducimos que $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones coordenadas correspondiente a $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$, y puesto que $f_j''(f') = \hat{f}_j(f') = f'(f_j)$ para todo entero positivo j, la igualdad (1.21) vale.

Puesto que X' es reflexivo y $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base de X', por lo ya probado concluimos que su sucesión de funciones coordenadas $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base de X''. $\square$

Como demostraremos en breve, toda subsucesión de una sucesión básica es también una sucesión básica, y la constante de la subsucesión es menor o igual que la constante de la sucesión original. Un concepto más general que el de subsucesión de una sucesión básica, y que también permite obtener sucesiones básicas a partir de una sucesión original, es el de *base de bloques*, definido de la siguiente manera:

Definición 1.1.8. *Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X, una sucesión $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se denomina* base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *si existe una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y dos sucesiones de enteros positivos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que:*

- *Para todo $k \in \mathbb{N}$, $p_k \le q_k < p_{k+1}$.*
- *Para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$u_k = \sum_{i=p_k}^{q_k} a_i f_i.$$

- *Para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $p_k \le i \le q_k$ tal que $a_i \ne 0$.*

Una subsucesión de una sucesión básica es un caso particular de base de bloques, en la cual cada bloque es un único elemento de la sucesión original.
Seguidamente, vamos a establecer un resultado elemental sobre bases de bloques.

Proposición 1.1.9. *Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en X de constante K, y $\{u_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces $\{u_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, y su constante es menor o igual K.*
En particular, si $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica cuya constante es menor o igual que K.

Demostración. Como $\{u_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, existe una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y dos sucesiones de enteros positivos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que se cumplen las condiciones de la Definición 1.1.8.
Dado que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, es un conjunto linealmente independiente, y como para cada entero positivo k, existe $p_k \le i \le q_k$ tal que $a_i \ne 0$, se sigue que

$$u_k \ne 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Si $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, definimos para cada entero positivo i un escalar c_i por medio de la fórmula

$$c_i = \begin{cases} b_k a_i & \text{si } p_k \leq i \leq q_k, \\ 0 & \text{si } \nexists k : p_k \leq i \leq q_k. \end{cases}$$

Si n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, entonces $q_n \leq q_m$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=1}^{n} b_k u_k\right\|_X &= \left\|\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{i=p_k}^{q_k} a_i f_i\right\|_X = \left\|\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=p_k}^{q_k} b_k a_i f_i\right\|_X = \left\|\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=p_k}^{q_k} c_i f_i\right\|_X \\
&= \left\|\sum_{i=1}^{q_n} c_i f_i\right\|_X \leq K \left\|\sum_{i=1}^{q_m} c_i f_i\right\|_X = K \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=p_k}^{q_k} c_i f_i\right\|_X \\
&= K \left\|\sum_{k=1}^{m} \sum_{i=p_k}^{q_k} b_k a_i f_i\right\|_X = K \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k \sum_{i=p_k}^{q_k} a_i f_i\right\|_X \\
&= K \left\|\sum_{k=1}^{m} b_k u_k\right\|_X .
\end{aligned} \tag{1.25}$$

Por el Lema 1.1.2, se sigue de (1.24) y (1.25) que $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica cuya constante es menor o igual que K. □

Notemos que si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones coordenadas, y $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la sucesión $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es básica por la Proposición 1.1.9, y como $f_{i_k}'\left(f_{i_j}\right) = \delta_{kj}$ para todo par de enteros positivos k y j, resulta que la sucesión de restricciones $\left\{ f_{i_k}'|_{\overline{\left[f_{i_j}: j\in\mathbb{N}\right]}} \right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Equivalencia de sucesiones básicas.

En esta sección, vamos a introducir el concepto de equivalencia de sucesiones básicas, y a demostrar resultados que usaremos en demostraciones posteriores, y en particular para demostrar la equivalencia entre la base canónica de ℓ_p y ciertas sucesiones básicas de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, en las condiciones que especificaremos en el Capítulo 4.

Definición 1.2.1. *Dos sucesiones básicas $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ se dicen* equivalentes *si para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ converge en Y si y solo si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en X.*

Por ejemplo, si Y y X son espacios de Hilbert, y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son conjuntos ortonormales en Y y X respectivamente, entonces $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones

básicas equivalentes, ya que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ converge en Y si y solo si la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^2$ converge en $\mathbb{R}$, y la misma condición es necesaria y suficiente para que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ sea convergente en X.
La siguiente Proposición muestra otros ejemplos de equivalencia de sucesiones básicas, que usaremos luego en la demostración de la proposición 1.2.11.

Proposición 1.2.2. *Si $p \in [1, +\infty)$, y $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques seminormalizada de la base canónica de ℓ_p, entonces $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la base canónica de ℓ_p.*

Demostración. Como $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de una sucesión básica, la Proposición 1.1.9 dice que $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica.
Dado que $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de la base canónica de ℓ_p, existen dos sucesiones de enteros positivos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y una sucesión de escalares $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para todo entero positivo i, se tiene que $p_i \le q_i < p_{i+1}$, y

$$u_i = \sum_{n=p_i}^{q_i} b_n e^{(n)}.$$

Si i_1 e i_2 son enteros positivos tales que $i_1 \le i_2$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión cualquiera de escalares, entonces

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2} a_i u_i\right|\right|_{\ell_p}^p &= \left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2} a_i \left(\sum_{n=p_i}^{q_i} b_n e^{(n)}\right)\right|\right|_{\ell_p}^p = \left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2}\sum_{n=p_i}^{q_i} a_i b_n e^{(n)}\right|\right|_{\ell_p}^p \\ &= \sum_{i=i_1}^{i_2}\sum_{n=p_i}^{q_i} |a_i b_n|^p = \sum_{i=i_1}^{i_2} |a_i|^p \left(\sum_{n=p_i}^{q_i} |b_n|^p\right) \\ &= \sum_{i=i_1}^{i_2} |a_i|^p \, ||u_i||_{\ell_p}^p \,. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Sea K una constante positiva tal que $K^{-1} \le ||u_i||_{\ell_p}^p \le K$ para todo entero positivo i. Deducimos por (1.26) que

$$\frac{1}{K}\left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2} a_i e^{(i)}\right|\right|_{\ell_p}^p = \sum_{i=i_1}^{i_2} |a_i|^p K^{-1} \le \left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2} a_i u_i\right|\right|_{\ell_p}^p \le \sum_{i=i_1}^{i_2} |a_i|^p K = K\left|\left|\sum_{i=i_1}^{i_2} a_i e^{(i)}\right|\right|_{\ell_p}^p .$$

Concluimos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i u_i$ converge si y solo si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge, y como $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones básicas, esto implica que son equivalentes. $\square$

Posteriormente usaremos la Proposición 1.2.2 junto cone el Principio de Selección (Teorema 1.2.8) para demostrar que $L_p(\mathbb{R}^d)$ no es isomorfo a ℓ_p.
También vamos a usar el siguiente resultado elemental:

Proposición 1.2.3. *Si $1 \leq p < q < +\infty$, entonces la base canónica de ℓ_p no es equivalente a la base canónica de ℓ_q.*

Demostración. Para cada $i \in \mathbb{N}$, definimos $a_i = \frac{1}{i^{\frac{2}{p+q}}}$. Puesto que $0 < \frac{2p}{p+q} < 1 < \frac{2q}{p+q}$, se deduce que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_q, pero no en ℓ_p. □

A continuación, demostraremos dos caracterizaciones útiles de equivalencia de sucesiones básicas.

Lema 1.2.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X, y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Z. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe un isomorfismo $T : X \to \overline{[g_i : i \in \mathbb{N}]}$ tal que $T(f_i) = g_i$ para todo entero positivo i.*

2. *Existe una constante positiva M tal que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y para todo entero positivo n, valen las siguientes desigualdades:*

$$\frac{1}{M}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Z \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_X \leq M\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Z. \tag{1.27}$$

3. *La sucesión $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Sea $Y = \overline{[g_i : i \in \mathbb{N}]}$.
Si 1 es verdadera, sea $M = \max\{||T||, ||T^{-1}||\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned}\frac{1}{M}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Z \leq & \frac{1}{||T||}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Z = \frac{1}{||T||}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i T(f_i)\right|\right|_Y \leq \frac{||T||}{||T||}\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_X \\ = & \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_X = \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i T^{-1}(g_i)\right|\right|_X \leq ||T^{-1}|| \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Y \\ \leq & M\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_Z.\end{aligned}$$

Por lo tanto, 1 implica 2.
Supongamos ahora que 2 vale. Si n es un entero positivo, tomando $a_n = 1$ y $a_i = 0$ para todo entero positivo $i \neq n$, se sigue de (1.27) que $||f_n||_X \leq M||g_n||_Z$. Puesto que

$f_n \neq 0$ porque $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica, esto implica que $g_n \neq 0$. Como n es un entero positivo cualquiera, inferimos que

$$g_i \neq 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{1.28}$$

Sea K la constante de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, entonces por (1.27) concluimos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right\|_Z \leq & M \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right\|_X \leq MK \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\right\|_X \\ \leq & M^2 K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i g_i\right\|_Z \end{aligned} \tag{1.29}$$

Por el Lema 1.1.2, se deduce de (1.28) y (1.29) que $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en Z. Veamos ahora que es equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$: Dados enteros positivos n y m tales que $m \geq n$, y una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, definimos para cada entero positivo i un escalar b_i por medio de la fórmula

$$b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } n \leq i \leq m, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Se sigue de (1.27) y la definición de b_i para cada entero positivo i que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i g_i\right\|_Z = & \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i g_i\right\|_Z \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i f_i\right\|_X \\ = & M \left\|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right\|_X . \end{aligned} \tag{1.30}$$

De manera similar, vemos que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right\|_X = & \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i f_i\right\|_X \leq M \left\|\sum_{i=1}^{m} b_i g_i\right\|_Z \\ = & M \left\|\sum_{i=n}^{m} a_i g_i\right\|_Z . \end{aligned} \tag{1.31}$$

Dado que n y m son dos enteros positivos cualesquiera que cumplen la condicion $n \leq m$, deducimos de (1.30) y (1.31) que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ converge. Concluimos que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones básicas equivalentes, es decir que 2 implica 3.

Supongamos que 3 vale, y sean $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ las sucesiones de funciones coordenadas de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ respectivamente.
Dado que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de X, para cada $f \in X$ se tiene que $f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i$. Como para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en X si y solo si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i g_i$ converge en Y, existe un operador lineal $T : X \to Y$ dado por la fórmula

$$T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) g_i,$$

que resulta continuo por el Principio de Acotación Uniforme. Por simetría, inferimos que existe un operador lineal continuo $S : Y \to X$ dado por la fórmula

$$S(g) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i'(g) f_i.$$

Es claro que S es el inverso de T, y por ende T es un isomorfismo de espacios de Banach. Dado que $T(f_j) = g_j$ para todo entero positivo j, concluimos que 3 implica 1. $\square$

Vamos a usar el Lema 1.2.4 en las demostraciones de la siguiente Proposición y su Corolario - que más adelante usaremos para probar uno de los resultados principales de esta tesis, el Teorema 4.5.5 -, y también en la demostración de la Proposición 1.2.7, que usaremos en la demostración del Teorema 1.2.8.

Proposición 1.2.5. *Sean $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ sucesiones básicas, y sean $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ las respectivas sucesiones de funciones coordenadas. Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes, entonces $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes.*

Demostración. Sean $Y_1 = \overline{[g_i : i \in \mathbb{N}]}$, y $X_1 = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$.
Dado que $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son bases de Schauder de Y_1 y X_1 respectivamente, la Proposición 1.1.6) dice que las sucesiones $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones coordenadas son sucesiones básicas en Y_1' y X_1' respectivamente.
Como $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes, por el Lema 1.2.4, existe un isomorfismo $T : X_1 \to Y_1$ tal que $T(f_i) = g_i$ para todo entero positivo i.
Si $T^* : Y_1' \to X_1'$ es su adjunto de Banach, entonces

$$\begin{aligned}(T^*(g_i'))(f_j) =& g_i'(T(f_j)) = g_i'(g_j) \\ =& \delta_{ij} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\end{aligned}$$

lo que implica que $T^*(g_i') = f_i'$ para todo entero positivo i. Puesto que la restricción de T^* a $\overline{[g_i' : i \in \mathbb{N}]}$ es un isomorfismo entre $\overline{[g_i' : i \in \mathbb{N}]}$ y $\overline{[T^*(g_i') : i \in \mathbb{N}]} = \overline{[f_i' : i \in \mathbb{N}]}$, concluimos por el Lema 1.2.4 que $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. $\square$

Corolario 1.2.6. *Sean* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *bases de Schauder de* X *y de* Z *respectivamente, y sean* $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ *las sucesiones de funciones coordenadas. Si* X *y* Z *son reflexivos, entonces* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *son equivalentes si y solo si* $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ *y* $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ *son equivalentes.*

Demostración. Por la Proposición 1.2.5, solo resta demostrar que si $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes, entonces, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes.
Por el Lema 1.1.7, la sucesión $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder X' y su sucesión de funciones coordenadas es $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, mientras que $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Z', y su sucesión de funciones coordenadas es $\{\hat{g}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Por lo tanto, la Proposición 1.2.5 aplicada a las bases $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{g_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$, dice que $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{\hat{g}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Puesto que la inclusión $J_X : X \to X''$ es un isomorfismo tal que $J_X(f_i) = \hat{f}_i$ para todo entero positivo i, se sigue por el Lema 1.2.4 que $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. De manera similar, concluimos que $\{\hat{g}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Como la equivalencia de sucesiones básicas es una relación de equivalencia, se sigue que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. $\square$

En lo que resta de la sección, demostraremos un Principio de Selección, que nos permitirá en particular demostrar que $L_p(\mathbb{R}^d)$ no es isomorfo a ℓ_p si $p \neq 2$.
Para demostrar el Principio de Selección, vamos a usar el siguiente resultado auxiliar:

Proposición 1.2.7. *Sea* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión básica en un espacio de Banach* X, $Y = \overline{[f_i :\in \mathbb{N}]}$, *y* $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Y'$ *la sucesión de funciones coordenadas.*
Si $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ *es una sucesión tal que* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||f_i'||_{Y'}\,||f_i - g_i||_X < 1$, *entonces* $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión básica equivalente a* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea $\delta_0 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} ||f_i'||_{Y'}\,||f_i - g_i||_X$.
Si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y n es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i - \sum_{i=1}^{n} a_i(g_i - f_i)\right|\right|_X \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X + \sum_{i=1}^{n} |a_i|\,||g_i - f_i||_X \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X + \sum_{i=1}^{n} \left| f_i'\left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right)\right| ||f_i - g_i||_X \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X + \sum_{i=1}^{n} \left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right|\right|_Y ||f_i'||_{Y'}\,||f_i - g_i||_X \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right|\right|_Y \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i'||_{Y'}\,||f_i - g_i||_X\right)
\end{aligned}$$

$$\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X + \delta_0 \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y$$

Como $\delta_0 < 1$, esto implica que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y \leq \frac{1}{1-\delta_0} \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X. \tag{1.32}$$

También tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right|\right|_X &= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i - \sum_{i=1}^{n} a_i (f_i - g_i)\right|\right|_X \leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_X + \sum_{i=1}^{n} |a_i| \, ||f_i - g_i||_X \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y + \sum_{i=1}^{n} \left| f_i' \left(\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right)\right| ||f_i - g_i||_X \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y + \sum_{i=1}^{n} \left|\left|\sum_{j=1}^{n} a_j f_j\right|\right|_Y ||f_i'||_{Y'} \, ||f_i - g_i||_X \\
&= \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y + \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y \left(\sum_{i=1}^{n} ||f_i'||_{Y'} \, ||f_i - g_i||_X\right) \\
&\leq (1+\delta_0) \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_Y.
\end{aligned} \tag{1.33}$$

Si $M = \text{máx}\left\{\frac{1}{1-\delta_0}, 1+\delta_0\right\}$, de (1.32) y (1.32) se sigue que vale la afirmación 2 del Lema 1.2.4. Concluimos que $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. □

Teorema 1.2.8 (Principio de Selección de Bessaga-Pelczynski)**.** *[1] Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de X, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada inferiormente en X que cumple la siguiente condición:*

$$\lim_{n\to+\infty} f_i'(g_n) = 0. \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Entonces, existe una subsucesión $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es equivalente a una base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Demostración. Sea K la constante de la base $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y M una constante positiva tal que $M \leq ||g_i||_X$ para todo entero positivo i. Definimos $\epsilon = \frac{1}{4}\,\text{mín}\{M, K^{-1}\}$, y $k_1 = 1$. Como $g_{k_1} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i'(g_{k_1}) f_i$, existe un entero positivo n_1 tal que

$$\left|\left|g_{k_1} - \sum_{i=1}^{n_1} f_i'(g_{k_1}) f_i\right|\right|_X \leq \frac{\epsilon}{10K}.$$

Si $u_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} f_i'(g_{k_1}) f_i$, tenemos que

$$||g_{k_1} - u_1||_X \leq \frac{\epsilon}{10K}.$$

Puesto que $\lim_{n\to+\infty} f_i'(g_n) = 0$ para todo entero positivo i, existe un entero positivo $k_2 > k_1$ tal que

$$\sum_{i=1}^{n_1} |f_i'(g_{k_2})| \, ||f_i||_X \leq \frac{\epsilon}{10^2(2K)}. \tag{1.34}$$

Dado que $g_{k_2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i'(g_{k_2}) f_i$, existe un entero positivo $n_2 > n_1$ tal que

$$\left|\left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty} f_i'(g_{k_2}) f_i\right|\right|_X \leq \frac{\epsilon}{10^2(2K)}. \tag{1.35}$$

Si $u_2 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} f_i'(g_{k_2}) f_i$, se sigue de (1.34) y (1.35) que

$$\begin{aligned} ||g_{k_2} - u_2||_X &= \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} f_i'(g_{k_2}) f_i - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} f_i'(g_{k_2}) f_i\right|\right|_X = \left|\left|\sum_{i=1}^{n_1} f_i'(g_{k_2}) f_i + \sum_{i=n_2+1}^{\infty} f_i'(g_{k_2}) f_i\right|\right|_X \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_1} |f_i'(g_{k_2})| \, ||f_i||_X + \left|\left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty} f_i'(g_{k_2}) f_i\right|\right|_X \leq \frac{\epsilon}{10^2(2K)} + \frac{\epsilon}{10^2(2K)} \\ &= \frac{\epsilon}{10^2 K}. \end{aligned}$$

Razonando inductivamente, deducimos que existe una subsucesión $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y una base de bloques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que

$$||g_{k_n} - u_n||_X \leq \frac{\epsilon}{10^n K} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.36}$$

Dado que $1 \leq K$ y que $4\epsilon \leq M \leq ||g_{k_n}||_X$ para todo entero positivo n, inferimos por (1.36) que

$$\begin{aligned} ||u_n||_X &= ||g_{k_n} - (g_{k_n} - u_n)||_X \geq ||g_{k_n}||_X - ||g_{k_n} - u_n||_X \geq 4\epsilon - \epsilon \\ &= 3\epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Se sigue que

$$\frac{1}{||u_n||_X} \leq \frac{1}{3\epsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.37}$$

Como $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la Proposición 1.1.9 dice que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica cuya constante es menor o igual que K. Por lo tanto, la Proposición 1.1.5 y la desigualdad (1.37) implican que si $Y = \overline{[u_n : n \in \mathbb{N}]}$, entonces

$$\begin{aligned} ||u_n'||_{Y'} \leq & \frac{2K}{||u_n||_Y} = \frac{2K}{||u_n||_X} \leq \frac{2K}{3\epsilon} \\ \leq & \frac{K}{\epsilon} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Se deduce de (1.36) y (1.38) que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ||u_n'||_{Y'} \, ||u_n - g_{k_n}||_X \leq & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K}{\epsilon}\right)\left(\frac{\epsilon}{10^n K}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} \\ = & \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Luego, la Proposición 1.2.7 dice que $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. □

Observación 1.2.9. *Si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada inferiormente y tiende a cero en la topología débil, se cumplen las condiciones del Principio de Selección, y por lo tanto existe una subsucesión $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es equivalente a una base de bloques de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Observación 1.2.10. *Si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, entonces $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Luego, el Lema 1.2.4 implica que la base de bloques $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ equivalente a $\{g_{k_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada.*

Una aplicación del Principio de Selección es la siguiente:

Proposición 1.2.11. *Si $p \in [1, +\infty)$, X es un espacio isomorfo a un subespacio Y de ℓ_p, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ es una sucesión seminormalizada que tiende débilmente a cero, existe una subsucesión $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es una sucesión básica equivalente a la base canónica de ℓ_p.*

Demostración. Sea $T : X \to Y \subseteq \ell_p$ un isomorfismo. Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, $\{T(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada.
Dado que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero en X y T es un operador $\omega - \omega$ continuo por ser continuo como operador lineal entre espacios de Banach, la sucesión $\{T(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero en ℓ_p.
Por las Observaciones 1.2.9 y 1.2.10, existe una subsucesión $\{T(f_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ equivalente a una base de bloques seminormalizada de la base canónica de ℓ_p. Por la Proposición 1.2.2, y dado que la equivalencia de sucesiones básicas es una relación de equivalencia, esto implica que $\{T(f_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.
Como T^{-1} es un isomorfismo entre $\overline{[T(f_{i_k}) : k \in \mathbb{N}]}$ y $\overline{[f_{i_k} : k \in \mathbb{N}]}$, el Lema 1.2.4 dice que $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\{T(f_{i_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$, y por lo tanto equivalente a la base canónica de ℓ_p. □

Corolario 1.2.12. *Si $1 \leq p < q \leq \infty$, ℓ_q no es isomorfo a ningún subespacio de ℓ_p.*

Demostración. El caso $q = \infty$ es claro, ya que ℓ_∞ no es separable, y ℓ_p lo es para todo $p \in (1, +\infty)$.
Para el caso $q \in (1, +\infty)$, supongamos que el enunciado es falso.
Dado que la base canónica $\{e^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ℓ_q es en particular seminormalizada y tiende débilmente a cero en ℓ_q, por la Proposición 1.2.11, existe una subsucesión $\{e^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de la base canónica de ℓ_q equivalente a la base canónica de ℓ_p.
Como $\{e^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una base de bloques seminormalizada de la base canónica de ℓ_q, la Proposición 1.2.2 dice que $\{e^{(n_k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_q.
Puesto que la equivalencia entre sucesiones básicas es una relación de equivalencia, esto implica que la base canónica de ℓ_p es equivalente a la base canónica de ℓ_q, lo que contradice la Proposición 1.2.3. $\square$

Capítulo 2

Convergencia y bases incondicionales.

En la primera sección de este capítulo, vamos a introducir el concepto de convergencia incondicional en espacios de Banach, y demostrar algunos resultados básicos sobre la misma.
En la segunda sección, vamos a definir bases de Schauder y sucesiones básicas incondicionales en espacios de Banach, y a usar algunos de los resultados de la primera sección para demostrar el Lema 2.2.2, que a su vez usaremos en el Capítulo 4, para demostrar los Lemas 4.2.1, 4.2.2, y 4.5.3.

Convergencia incondicional. Resultados generales.

Es un resultado elemental de análisis que si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, entonces la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|$ converge si y solo si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)}$ converge. Dicho resultado se generaliza a espacios de Banach de dimensión finita, pero no a espacios de dimensión infinita. A continuación, vamos a definir ambos conceptos, y luego a demostrar algunos resultados básicos sobre convergencia incondicional en espacios de Banach. Usaremos algunos de esos resultados en la demostración del Lema 2.2.2 en la sección siguiente, y en la demostración del Teorema de Orlicz en el Capítulo 3.

Definición 2.1.1. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Se dice que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$* converge incondicionalmente *si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}$ converge.*

Observemos que una serie que converge incondicionalmente en particular converge.

Definición 2.1.2. *Sea* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Se dice que la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge absolutamente *si la serie de escalares* $\sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_X$ *converge, se decir, si* $\sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_X < +\infty$.

Una relación elemental entre convergencia absoluta e incondicional es la siguiente:

Proposición 2.1.3. *Sea* $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en un espacio de Banach* X*. Si la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ *converge absolutamente, entonces converge incondicionalmente.*

Demostración. Como $\{||f_i||_X\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $\sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_X < +\infty$, dada una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||f_{\pi(i)}||_X = \sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||_X < +\infty. \tag{2.1}$$

Si n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} f_{\pi(i)}\right|\right|_X \leq \sum_{i=n}^{m} ||f_{\pi(i)}||_X. \tag{2.2}$$

Se deduce inmediatamente de (2.1) y (2.2) que $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}$ converge. □

Hay series que convergen incondicionalmente pero no absolutamente, como muestra el siguiente ejemplo: Sea $p \in (1, +\infty)$, y $f_i = i^{-1}e^{(i)}$ para cada entero positivo i. La serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ no converge absolutamente en ℓ_p ya que $||f_i||_{\ell_p} = i^{-1}$ para todo i, pero sí converge incondicionalmente, porque si $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} f_{\pi(i)}\right|\right|_{\ell_p}^p = \left|\left|\sum_{i=n}^{m} \frac{1}{(\pi(i))^p} e^{(\pi(i))}\right|\right|_{\ell_p}^p = \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{(\pi(i))^p},$$

y la serie de escalares $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi(i))^p}$ converge porque $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p}$ converge absolutamente.
Se puede demostrar que en todo espacio de Banach de dimensión infinita, hay series que convergen incondicionalmente pero no absolutamente.
Una propiedad importante de las series que convergen incondicionalmente es la siguiente:

Proposición 2.1.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X.*
Si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ converge incondicionalmente, entonces para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}$ converge al mismo límite, es decir que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}.$$

Demostración. Sea $f' \in X'$. Si $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$f'\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f'\left(f_{\pi(i)}\right). \tag{2.3}$$

Esto implica que serie $\sum_{i=1}^{\infty} f'(f_i)$ converge incondicionalmente en el cuerpo de escalares, y por lo tanto, converge absolutamente. Luego, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} f'\left(f_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f'(f_i). \tag{2.4}$$

Se infiere de (2.3) y (2.4) que si $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$f'\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)} - \sum_{i=1}^{\infty} f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} f'\left(f_{\pi(i)}\right) - \sum_{i=1}^{\infty} f'(f_i) = 0. \tag{2.5}$$

Puesto que (2.5) vale para toda funcional $f' \in X'$, esto implica que $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$. □

A continuación, vamos a probar un Lema que da varias equivalencias de convergencia incondicional, y que usaremos en la sección siguiente para demostrar el Lema 2.2.2, y en el capítulo siguiente, en la demostración del Teorema de Orlicz.
Si bien no vamos a usar todas las equivalencias en demostraciones posteriores, algunas de ellas son útiles para demostrar otras que sí vamos a usar, y otras son útiles para entender más claramente la convergencia incondicional en espacios de Banach.

Lema 2.1.5. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(***1***) *Para toda sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $a_i \in \{0,1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge.*

(*2*) *La serie* $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ *converge incondicionalmente.*

(*3*) *Para toda biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}$ *converge incondicionalmente.*

(*4*) *Para toda biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, y para toda sucesión* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *con* $a_i \in \{0, 1\}$ *para todo* $i \in \mathbb{N}$*, la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}$ *converge.*

(*5*) *Para toda biyección* $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, todo conjunto finito de escalares* B*, y toda sucesión* $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* B*, la serie* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}$ *converge.*

(*6*) *Existe un operador lineal continuo* $T : \ell_\infty \to X$ *tal que si* $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$*, entonces*

$$T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i.$$

(*7*) *Existe un operador lineal compacto* $T : \ell_\infty \to X$ *tal que si* $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$*, entonces*

$$T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i.$$

(*8*) *Existe un operador lineal compacto* $T : \mathsf{c}_0 \to X$ *tal que si* $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathsf{c}_0$*, entonces*

$$T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i.$$

Demostración. (**1**) $\Longrightarrow$ (**2**)
Si (**2**) es falsa, existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, un número positivo ϵ_0, y dos sucesiones de enteros positivos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que para todo entero positivo i, $p_i \le q_i < p_{i+1}$, y

$$\left\| \sum_{n=p_i}^{q_i} f_{\pi(n)} \right\|_X \ge \epsilon_0. \tag{2.6}$$

Para cada entero positivo i, sea $M(i)$ el máximo del conjunto $\{\pi(n) : n \le q_i\}$. Como $\pi(n)$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito, existe una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos $\{i_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ tal que para todo par de enteros positivos n y k,

si $n \geq p_{i_k}$ entonces $\pi(n) > M(i_{k-1})$.
Definimos para cada entero positivo j un escalar c_j del siguiente modo:

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{si existen } k \in \mathbb{N} \text{ y } p_{i_k} \leq n \leq q_{i_k} \text{ tales que } \pi(n) = j, \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Deducimos por (2.6) y la elección de escalares que

$$\left\| \sum_{j=M(i_{k-1})+1}^{M(i_k)} c_j f_j \right\|_X = \left\| \sum_{n=p_{i_k}}^{q_{i_k}} f_{\pi(n)} \right\|_X \geq \epsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $\sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j$ no converge, lo que contradice (**1**).
(**2**) $\Longrightarrow$ (**3**)
Fijemos una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
Si $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, para cada entero positivo i se tiene que $f_{\pi(\rho(i))} = f_{\pi\circ\rho(i)}$, y como $\pi \circ \rho$ es una biyección, se sigue por (**2**) que $\sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(\rho(i))}$ converge.
(**3**) $\Longrightarrow$ (**4**).
Si (**4**) es falsa, existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $a_i \in \{0, 1\}$ para todo entero positivo i, tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}$ no converge. Por lo tanto, existe un número positivo ϵ_0 y dos sucesiones de enteros positivos $\{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que para todo entero positivo i, se tiene que $p_i \leq q_i < p_{i+1}$, y

$$\left\| \sum_{n=p_i}^{q_i} a_n f_{\pi(n)} \right\|_X \geq \epsilon_0. \tag{2.7}$$

Para cada entero positivo i, sea m_i el cardinal del conjunto $\{n \in \{p_i, \ldots, q_i\} : a_n = 1\}$, y sea y $\rho_i : \{p_i, \ldots, q_i\} \to \{\pi(p_i), \ldots, \pi(q_i)\}$ una biyección con la siguiente propiedad: si n y m son elementos de $\{p_i, \ldots, q_i\}$ tales que $a_n = 1$ y $a_m = 0$, entonces $\rho_i(n) < \rho_i(m)$.
Definimos una biyección $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de la siguiente manera:

$$\rho(n) = \begin{cases} \rho_i(n) & \text{si } p_i \leq n \leq q_i, \\ \pi(n) & \text{si } \nexists i : p_i \leq n \leq q_i. \end{cases}$$

Se sigue de (2.7) y la elección de ρ_i que

$$\left\| \sum_{n=p_i}^{p_i+m_i-1} f_{\rho(n)} \right\|_X = \left\| \sum_{n=p_i}^{p_i+m_i-1} f_{\rho_i(n)} \right\|_X = \left\| \sum_{n=p_i}^{q_i} a_n f_{\pi(n)} \right\|_X \geq \epsilon_0. \tag{2.8}$$

Esto implica que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{\rho(i)}$ no converge.

(4) $\Longrightarrow$ **(5)**

Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección, $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ un conjunto de escalares de cardinal k, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de B.

Elegimos k sucesiones $\{c_i^{(j)}\}_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ 1\le j\le k}}$, definiendo para cada entero positivo i y para cada $1 \le j \le k$ el escalar $c_i^{(j)}$ de la siguiente manera:

$$c_i^{(j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i = b_j, \\ 0 & \text{si } a_i \neq b_j. \end{cases}$$

Como para cada $1 \le j \le k$, se tiene que $c_i^{(j)} \in \{0, 1\}$, se sigue por **(4)** que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} f_{\pi(i)}$.

Por lo tanto, dado $\epsilon > 0$, existe en entero positivo n_0 tal que para todo par de enteros positivos $n_0 \le n \le m$, y para todo $1 \le j \le k$, tenemos:

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} c_i^{(j)} f_{\pi(i)} \right\|_X \le \frac{\epsilon}{kb},$$

donde b es el máximo del conjunto $\{|b_1|, \ldots, |b_k|, 1\}$.

Se deduce que si $n_0 \le n \le m$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=n}^{m} a_i f_{\pi(i)} \right\|_X &= \left\| \sum_{i=n}^{m} \sum_{\substack{1\le j\le k\\ a_i=b_j}} b_j f_{\pi(i)} \right\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{k} \sum_{\substack{n\le i\le m\\ a_i=b_j}} b_j f_{\pi(i)} \right\|_X \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{\substack{n\le i\le m\\ a_i=b_j}} f_{\pi(i)} \right\|_X = \left\| \sum_{j=1}^{k} b_j \sum_{i=n}^{m} c_i^{(j)} f_{\pi(i)} \right\|_X \\ &\le \sum_{j=1}^{k} |b_j| \left\| \sum_{i=n}^{m} c_i^{(j)} f_{\pi(i)} \right\|_X \le \sum_{j=1}^{k} |b_j| \left(\frac{\epsilon}{kb} \right) \le \sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon}{k} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(5) $\Longrightarrow$ **(6)**

Sea $f' \in X'$. Para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que $f'\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f'\left(f_{\pi(i)}\right)$, lo que implica que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f'\left(f_{\pi(i)}\right)$ converge. Por lo tanto, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f'(f_i)$ converge incondicionalmente en el cuerpo de escalares, lo que implica que converge absolutamente. Luego, existe un operador lineal $L : X' \to \ell_1$ dado por la fórmula

$$L(f') = (f'(f_i))_{i\in\mathbb{N}}\,, \tag{2.9}$$

que resulta continuo por el Principio de Acotación Uniforme.
Si n y m son enteros positivos tales que $n \le m$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $f' \in B_{X'}$, entonces

$$\begin{aligned}\left|f'\left(\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right)\right| = \left|\sum_{i=n}^{m} a_i f'(f_i)\right| &\le \sum_{i=n}^{m} |a_i f'(f_i)| \le \left(\max_{n\le i\le m} \{|a_i|\}\right) \sum_{i=1}^{\infty} |f'(f_i)| \\ &= \left(\max_{n\le i\le m} \{|a_i|\}\right) ||L(f')||_{\ell_1} \\ &\le ||L|| \left(\max_{n\le i\le m} \{|a_i|\}\right).\end{aligned}$$

Puesto que esto vale para toda $f' \in B_{X'}$, se sigue que

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X \le ||L|| \left(\max_{n\le i\le m} \{|a_i|\}\right). \tag{2.10}$$

Sea $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$.
Dado $\epsilon > 0$, sean B y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un conjunto finito de escalares y una sucesión de elementos de B respectivamente, tales que $|b_i - a_i| \le \epsilon(2||L|| + 1)^{-1}$ para todo entero positivo i. Como B es finito, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i f_i$ converge. Por lo tanto, existe un entero positivo n_0 tal que para todo par de enteros positivos $n_0 \le n \le m$, se tiene que

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i\right|\right|_X \le 2^{-1}\epsilon. \tag{2.11}$$

Dado que $|b_i - a_i| \le \epsilon(2||L|| + 1)^{-1}$ para todo i, inferimos de (2.10) y (2.11 que si $n_0 \le n \le m$, entonces

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_X &\le \left|\left|\sum_{i=n}^{m} (a_i - b_i) f_i\right|\right|_X + \left|\left|\sum_{i=n}^{m} b_i f_i\right|\right|_X \le ||L|| \left(\max_{n\le i\le m} \{|a_i - b_i|\}\right) + \frac{\epsilon}{2} \\ &\le \epsilon.\end{aligned}$$

Deducimos que la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, lo que prueba que el operador lineal de la afirmación (**6**) está bien definido, y se infiere de (2.10) que es continuo.

(**6**)$\Longrightarrow$(**7**).
Para cada entero positivo n, sea T_n el operador lineal dado por la fórmula

$$T_n(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \quad \forall a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty.$$

Como T_n es de rango finito, es compacto, y es claro por las definiciones que

$$\lim_{n\to+\infty} T_n(a) = T(a) \quad \forall a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty. \tag{2.12}$$

Ahora vamos a probar que $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy con respecto a la norma de los operadores, asumiendo lo contrario y llegando a una contradicción.
Si $\{T_n\}$ no es de Cauchy, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ y sucesiones de enteros positivos $\{p_k\}$ y $\{q_k\}$ tales que para cada entero positivo k, se tiene que $p_k < q_k < p_{k+1}$, y $||T_{p_k} - T_{q_k}|| > \epsilon_0$.
Para cada entero positivo k, sea $b^{(k)} \in B_{\ell_\infty}$ tal que

$$\left|\left|(T_{p_k} - T_{q_k})\left(b^{(k)}\right)\right|\right|_X > \epsilon_0.$$

Si $b^{(k)} = (b_i^{(k)})_{i\in\mathbb{N}}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\epsilon_0 < \left|\left|(T_{p_k} - T_{q_k})\left(b^{(k)}\right)\right|\right|_X = \left|\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} b_i^{(k)} f_i\right|\right|_X \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.13}$$

Como $b^{(k)} \in B_{\ell_\infty}$ para cada entero positivo k, si definimos para cada entero positivo i un escalar b_i por medio de la fórmula

$$b_i = \begin{cases} b_i^{(k)} & \text{si } p_k \le i \le q_k, \\ 0 & \text{si } \nexists k \in \mathbb{N} : p_k \le i \le q_k, \end{cases}$$

se tiene que $b \in B_{\ell_\infty}$, y se infiere de (2.13) que

$$\epsilon_0 \le \left|\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} b_i f_i\right|\right|_X \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo que es absurdo porque $T(b) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i f_i$.
(**7**)$\Longrightarrow$ (**8**)
La restricción de T a c_0 es también un operador compacto.
(**8**)$\Longrightarrow$ (**1**)
Supongamos que (**8**) es cierta, pero (**1**) no lo es. Elegimos $\epsilon_0 > 0$, una sucesión $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$

con $a_i \in \{0,1\}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y dos sucesiónes de enteros positivos $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y $\{q_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que $p_k \leq q_k < p_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, que cumplen que

$$\left|\left|\sum_{i=p_k}^{q_k} a_i f_i\right|\right|_X \geq \epsilon_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.14}$$

Definimos para cada para de enteros positivos k e i un escalar $b_i^{(k)}$ del siguiente modo:

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} a_i \text{ si } p_k \leq i \leq q_k, \\ 0 \text{ en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Para cada entero positivo k, definimos $b^{(k)} = \left(b_i^{(k)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$. Puesto que $a_i \in \{0,1\}$ para todo entero positivo i, se tiene que $b^{(k)} \in B_{\mathsf{c}_0}$. Luego, como T es compacto, existe $g_0 \in X$ y una subsucesión $\{b^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $\{b^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{j\to+\infty} T\left(b^{(k_j)}\right) = g_0. \tag{2.15}$$

Se deduce de la elección de $b_i^{(k)}$ para cada par $(k,i) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ que

$$T\left(b^{(k_j)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(k_j)} f_i = \sum_{i=p_{k_j}}^{q_{k_j}} a_i f_i \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Inferimos por (2.14), (2.15) y 2.16 que

$$||g_0||_X \geq \epsilon_0. \tag{2.17}$$

Veamos ahora que $\{b^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero: Identificando $(\mathsf{c}_0)'$ con ℓ_1 de la manera usual, tenemos que si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, entonces

$$\begin{aligned} \left|c\left(b^{(k)}\right)\right| &= \left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{(k)} c_i\right| = \left|\sum_{i=p_k}^{q_k} a_i c_i\right| \leq \sum_{i=p_k}^{q_k} |a_i c_i| \\ &\leq \sum_{i=p_k}^{\infty} |c_i| \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Se infiere que $\{b^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero, y por ende que $\{b^{(k_j)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero. Como T es $\omega - \omega$ continuo, se deduce que $\left\{T\left(b^{(k_j)}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero. Puesto que (2.15) implica que $\left\{T\left(b^{(k_j)}\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a g_0, se sigue que $g_0 = 0$, lo que contradice (2.17). $\square$

El Lema 2.1.5 puede usarse para demostrar en algunos casos que una serie convergente no es incondicionalmente convergente, como muestra el siguiente ejemplo:
Sea $p \in [1, +\infty)$, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión en ℓ_p dada por las fórmulas

$$\begin{aligned} f_{2i} =& \frac{1}{i^{\frac{1}{p}}} e^{(i)} \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ y} \\ f_{2i-1} =& -\frac{1}{i^{\frac{1}{p}}} e^{(i)} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

La serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ converge en ℓ_p porque $\left\|\sum\limits_{i=n}^{m} f_i\right\|_{\ell_p}^p \leq n^{-1} + m^{-1} \leq 2n^{-1}$ para todo par de enteros positivos $m \geq n$.
Para ver que esta serie no converge incondicionalmente, definimos para cada entero positivo j, un escalar c_j del siguiente modo:
$c_j = \begin{cases} 1 \text{ si j es par,} \\ 0 \text{ si j es impar.} \end{cases}$
Puesto que $c_{2i} f_{2i} = i^{\frac{1}{p}} e^{(i)}$ y $c_{2i-1} f_{2i-1} = 0$ para cada entero positivo i, resulta que si n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, entonces

$$\left\|\sum_{i=2n}^{2m} c_i f_i\right\|_{\ell_p}^p = \left\|\sum_{i=n}^{m} \frac{1}{i^{\frac{1}{p}}} e^{(i)}\right\|_{\ell_p}^p = \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{i}.$$

Esto implica que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i f_i$ no converge, y por el Lema 2.1.5, deducimos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ no converge incondicionalmente.

Bases y sucesiónes básicas incondicionales.

En esta sección, vamos a estudiar la convergencia incondicional en el contexto de bases de Schauder y sucesiones básicas. Los conceptos centrales son los de bases de Schauder y sucesiones básicas incondicionales, definidos del siguiente modo:

Definición 2.2.1. *Una sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder incondional de un espacio de Banach X si es una base de Schauder de X, y para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge si y solo si converge incondicionalmente.*
Una sucesión $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X es una sucesión básica incondicional si es una base de Schauder incondicional de $\overline{[g_i : i \in \mathbb{N}]}$.

Observemos que se deduce inmediatamente de la Defineción 2.2.1 y la Definición 1.2.1 de equivalencia de sucesiones básicas que si dos sucesiones básicas son equivalentes y

una de ellas es incondicional, la otra también lo es.
Ejemplos de bases de Schauder incondicionales son las bases canónicas de los espacios ℓ_p, si $p \in [1, +\infty)$. Otros ejemplos de sucesiones básicas incondicionales son los conjuntos ortonormales infinitos contables en espacios de Hilbert.
A continuación, vamos a probar un Lema que establece varias equivalencias, y es el resultado más importante de esta sección. Luego vamos a usar dicho Lema en la demostración de la Proposición 2.2.3, y después en las demostraciones de los Lemas 4.2.1, 4.2.2, y 4.5.3 en el Capítulo 4.

Lema 2.2.2. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio de Banach X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional.*

2. *Para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica.*

3. *Para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional.*

4. *Las tres condiciones siguientes valen:*

   a) *Para todo entero positivo i, $f_i \neq 0$.*
   b) *Para todo $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, entonces la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge incondicionalmente.*
   c) *Existe una constante positiva K tal que si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, y $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, entonces*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}\right|\right|_X \leq K||f||_X||c||_{\ell_\infty}. \tag{2.18}$$

5. *Las tres condiciones siguientes valen:*

   a) *Para todo entero positivo i, $f_i \neq 0$.*

   b) *Para todo $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, si la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge y $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} a_{i_k} f_{i_k}$ converge.*

c) *Existe una constante positiva K tal que si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, y $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, entonces*

$$\left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} a_{i_k} f_{i_k}\right|\right|_X \leq K||f||_X||c||_{\ell_\infty}.$$

6. *Para todo entero positivo i, $f_i \neq 0$, y existe una constante positiva K tal que para todo par de conjuntos finitos de enteros positivos A y B y para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que*

$$\left|\left|\sum_{i\in A} a_i f_i\right|\right|_X \leq K \left|\left|\sum_{i\in A\cup B} a_i f_i\right|\right|_X.$$

7. *Toda subsucesión $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional.*

Demostración. 1. $\Longrightarrow$ 2.
Sea $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$. Observemos que para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tiene que $Y = \overline{\left[f_{\pi(i)} : i \in \mathbb{N}\right]}$.
Sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección.
Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y, si $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es su sucesión de funciones coordenadas, entonces

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i \quad \forall f \in Y. \tag{2.19}$$

Puesto que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional, la convergencia en (2.19) es incondicional, y por la Proposición 2.1.4 se tiene que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} f_{\pi(i)}'(f) f_{\pi(i)} \quad \forall f \in Y. \tag{2.20}$$

Dado que $\overline{\left[f_{\pi(i)} : i \in \mathbb{N}\right]} = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]} = Y$, para completar la demostración de que $\{f_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y, resta demostrar que la escritura dada por (2.20) es única.
Si $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son sucesiones de escalares tales que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i f_{\pi(i)} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}$, entonces

$$a_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(j)}' \left(f_{\pi(i)}\right) = f_{\pi(j)}' \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= f'_{\pi(j)}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f'_{\pi(j)}\left(f_{\pi(i)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta_{ij} \\
&= b_j \quad \forall j \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Se sigue de (2.20), (2.21) que para todo $f \in Y$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\pi(i)}$, y por ende, que $\{f_{\pi(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y.

2. $\Longrightarrow$ **3.**.

Sea $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección.

Puesto que para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la composición $\rho \circ \pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ también es una biyección, se sigue por **2.** que la sucesión $\{f_{\rho(\pi(i))}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, y por lo tanto, es una base de Schauder de Y.

Supongamos ahora que $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\rho(i)}$ converge, y sea $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección. Si definimos $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\rho(i)}$, se tiene que $g \in Y$. Como $\{f_{\rho(\pi(i))}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y, existe una única sucesión de escalares $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f_{\rho(\pi(i))}. \tag{2.22}$$

Sea $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Se deduce de (2.22) que

$$\begin{aligned}
b_j &= \sum_{i=1}^{\infty} b_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} b_i f'_{\rho(\pi(j))}\left(f_{\rho(\pi(i))}\right) = f'_{\rho(\pi(j))}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_{\rho(\pi(i))}\right) = f'_{\rho(\pi(j))}(g) \\
&= f'_{\rho(\pi(j))}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\rho(i)}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f'_{\rho(\pi(j))}\left(f_{\rho(i)}\right) \\
&= a_{\pi(j)}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Se sigue de (2.22)y (2.23) que $g = \sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} f_{\rho(\pi(i))}$, y en particular, que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} f_{\rho(\pi(i))}$ converge. Como esto vale para cualquier biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, concluimos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\rho(i)}$ converge incondicionalmente. Por lo tanto, $\{f_{\rho(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional.

3. $\Longrightarrow$ **4.**a.

Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica, el Lema 1.1.2 dice que $f_i \neq 0$ para todo entero positivo i.

3. $\Longrightarrow$ **4.**b.

Si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, entonces converge incondicionalmente. Por el Lema 2.1.5, para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge incondicionalmente. Nuevamente por el Lema 2.1.5, deducimos que para todo $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge. Más aún, si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, y $\{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares tal que $b_i \in \{0, 1\}$ para todo entero positivo i, entonces $(b_i c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ también es un elemento de ℓ_∞, y por lo tanto, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} b_i c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge. Concluimos por el Lema 2.1.5 que $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge incondicionalmente.

3. $\Longrightarrow$ **4.**c.

Como $\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i f_i$ converge para todo $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ y para todo $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \in Y$, queda definido un operador lineal $L : \ell_\infty \times Y \to X$ dado por

$$L\left((c_i)_{i\in\mathbb{N}}, \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_i f_i, \tag{2.24}$$

que resulta continuo por el Principio de Acotación Uniforme. Notar que como vale **4.**b, la convergencia en (2.24) es incondicional. Por lo tanto, la Proposición 2.1.4 dice que si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}} \in S_{\ell_\infty}$, $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \in S_Y$ y $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección, entonces

$$L\left(\left(c_{\pi^{-1}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, f\right) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\pi^{-1}(i)} a_i f_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)},$$

lo que implica que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}\right|\right|_X &= \left|\left|L\left(\left(c_{\pi^{-1}(i)}\right)_{i\in\mathbb{N}}, f\right)\right|\right|_X \\
&\leq ||L|| \left(||c||_{\ell_\infty} + ||f||_Y\right) = 2||L|| \\
&= (2||L||)\, ||c||_{\ell_\infty} ||f||_X,
\end{aligned}$$

y por lo tanto la desigualdad (2.18) vale con $K = 2||L||$ si $||c||_{\ell_\infty} = ||f||_X = 1$. De este caso particular se deduce el caso general dividiendo f y c por sus normas si ambos son no nulos, mientras que si al menos uno es nulo, la desigualdad es trivial.

4.$\Longrightarrow$ **5.**

Si $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es un elemento de ℓ_∞, y $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, definimos $d = (d_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$ por medio de la fórmula

$d_j = \begin{cases} c_{i_k} & \text{si existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } j = i_k, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} d_j a_j f_j = \sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} a_{i_k} f_{i_k},$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} b_{i_k} f_{i_k}\right|\right|_X &= \left|\left|\sum_{j=1}^{\infty} d_j a_j f_j\right|\right|_X \leq K||f||_X||d||_{\ell_\infty} \\ &\leq K||f||_X||c||_{\ell_\infty}. \end{aligned}$$

5.$\Longrightarrow$6.
Si A y B son conjuntos finitos de enteros positivos, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, para cada entero positivo i definimos escalares c_i y b_i del siguiente modo:

$c_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in A, \\ 0 & \text{si } i \notin A. \end{cases}$

$b_i = \begin{cases} a_i & \text{si } i \in A \cup B, \\ 0 & \text{si } i \notin (A \cup B)\,. \end{cases}$

Dado que $\sum\limits_{i\in A\cup B} a_i f_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i f_i$, y que $\sum\limits_{i\in A} a_i f_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i b_i f_i$, y como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de sí misma, por **5.** tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{i\in A} a_i f_i\right|\right|_X &= \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i f_i\right|\right|_X \leq K||(c_i)_{i\in\mathbb{N}}||_{\ell_\infty} \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i\right|\right|_X \leq K \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i\right|\right|_X \\ &= K \left|\left|\sum_{i\in A\cup B} a_i f_i\right|\right|_X . \end{aligned}$$

6.$\Longrightarrow$ 7..
Sean $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una biyección.
Si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, y n y m son enteros positivos tales que $n \leq m$, definimos los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \left\{j_{\rho(i)} : 1 \leq i \leq n\right\}, \text{ y} \\ B &= \left\{j_{\rho(i)} : 1 \leq i \leq m\right\}. \end{aligned}$$

También definimos para cada entero positivo k un escalar b_k de la siguiente manera:
$b_k = \begin{cases} a_i & \text{si } k = j_{\rho(i)} \\ 0 & \text{si } \nexists i \in \mathbb{N} : k = j_{\rho(i)}. \end{cases}$
Con estas definiciones, resulta que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_{j_{\rho(i)}} \right\|_X &= \left\| \sum_{i=1}^{n} b_{j_{\rho(i)}} f_{j_{\rho(i)}} \right\|_X = \left\| \sum_{k \in A} b_k f_k \right\|_X \leq K \left\| \sum_{k \in A \cup B} b_k f_k \right\|_X \\ &= K \left\| \sum_{k \in B} b_k f_k \right\|_X = K \left\| \sum_{i=1}^{m} b_{j_{\rho(i)}} f_{j_{\rho(i)}} \right\|_X \\ &= K \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_{j_{\rho(i)}} \right\|_X . \end{aligned} \tag{2.25}$$

Como (2.25) vale para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y para cualquier par de enteros positivos $m \geq n$, y puesto que $f_{j_{\rho(i)}} \neq 0$ para todo entero positivo i, el Lema 1.1.2 dice que $\{f_{j_{\rho(i)}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica.
Dado que $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ es una biyección cualquiera, se sigue que para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la sucesión $\{f_{j_{\pi(i)}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica, y como **2.** $\Longrightarrow$ **3.**, se sigue que $\{f_{j_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional. □

Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional, la menor constante K que cumple la condición **4.**c se denomina *constante incondicional de la sucesión básica (o de la base)*. Como puede verse en la demostración, si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional y una constante cumple la condición **4.**c, también cumple la condición **5.**c, y si cumple **5.**c, también cumple **6.**. Por lo tanto, la constante incondicional de la sucesión básica cumple las condiciones **4.**c, **5.**c, y **6.**.
Notemos también que dados dos enteros positivos $m \geq n$ y una sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, si definimos $f = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$, $c_i = 1$ para todo entero positivo $i \leq n$ y $c_i = 0$ para todo $i > n$, y $\pi = Id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ en la desigualdad (2.18), resulta que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right\|_X \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right\|_X ,$$

lo que implica que la constante incondicional de la sucesión básica es mayor o igual que la constante de la sucesión básica.
Se puede probar fácilmente usando el Lema 2.2.2 que si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional en X y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones coordenadas, podemos definir

una norma en $\overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$ por medio de la fórmula

$$||||f|||| = \sup_{\substack{k\in\mathbb{N} \\ (c_i)_{i\in\mathbb{N}}\in B_{\ell_\infty} \\ \pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}:\ \pi \text{ es biyectiva}}} \left|\left|\sum_{i=1}^{k} c_i f'_{\pi(i)}(f) f_{\pi(i)}\right|\right|_X \qquad \forall f \in \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]},$$

que dicha norma resulta equivalente a la restricción de la norma $||\cdot||_X$ al espacio $\overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, y que la constante incondicional de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con respecto a la norma $||||\cdot||||$ es uno. Este resultado - que no usaremos en esta tesis - puede facilitar algunas demostraciones en el contexto de bases de Schauder incondicionales.
La siguiente Proposición dice que la incondicionalidad de una sucesión básica implica la de su sucesión de funciones coordenadas. La usaremos en el Capítulo 4 para demostrar le Lema 4.5.1.

Proposición 2.2.3. *Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional en X y $Z = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, la sucesión de funciones coordenadas $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional.*

Demostración. Sea K la constante incondicional de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.
Si A y B son conjuntos finitos de enteros positivos, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, sea $c = (c_i) \in B_{\ell_\infty}$ tal que $c_i = 0$ si $i \notin A$, y $c_i = 1$ si $i \in A$.
Como para todo $f \in B_Z$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{K}\left|\left|\sum_{j\in A} f'_j(f) f_j\right|\right|_Z &= \frac{1}{K}\left|\left|\sum_{j=1}^{\infty} c_j f'_j(f) f_j\right|\right|_Z \leq \frac{1}{K}\left(K||c||_{\ell_\infty}||f||_Z\right) \\ &\leq 1,\end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i\in A\cup B} a_i f'_i\right|\right|_{Z'} &\geq \left|\sum_{i\in A\cup B} a_i f'_i\left(\frac{1}{K}\sum_{j\in A} f'_j(f) f_j\right)\right| = \frac{1}{K}\left|\sum_{i\in A\cup B}\sum_{j\in A} a_i f'_j(f) f'_i(f_j)\right| \\ &= \frac{1}{K}\left|\left(\sum_{i\in A} a_i f'_i\right)(f)\right|.\end{aligned}$$

Puesto que esto vale para todo $f \in B_Z$, se deduce que

$$\left|\left|\sum_{i\in A} a_i f'_i\right|\right|_{Z'} \leq K\left|\left|\sum_{i\in A\cup B} a_i f'_i\right|\right|_{Z'}.$$

Como $f'_i \neq 0$ para todo entero positivo i, el Lema 2.2.2 dice que $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica incondicional.

$\square$

En el caso de espacios reflexivos, vale la recíproca de la Proposición 2.2.3, como probaremos seguidamente.

Corolario 2.2.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en X, y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas. Si X es reflexivo, entonces $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional si y solo si $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional.*

Demostración. Por la Proposición 2.2.3, basta probar que si $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional, entonces $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional.
Sea $Y = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$. Dado que X es reflexivo, Y es reflexivo. Luego, como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y, el Lema 1.1.7 dice que $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder de Y', y la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Puesto que $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder incondicional de Y', la Proposición 2.2.3 dice que $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. es una sucesión básica incondicional en Y''.
Como la inclusión $J_Y : Y \to Y''$ es un isomorfismo y $J_Y(f_j) = \hat{f}_j$ para todo entero positivo j, se sigue por el Lema 1.2.4 que las sucesiones básicas $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes, y como $\{\hat{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional, se deduce que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional. $\square$

Otra aplicación del Lema 2.2.2 es la Proposición 2.2.6, que usaremos en el Capítulo 4 para demostrar la Proposición 4.5.4. Antes de demostrarla, vamos a probar el siguiente resultado general sobre subespacios complementados, que también usaremos en la demostración de la Proposición 4.5.4.

Proposición 2.2.5. *Si Z es un subespacio complementado de un espacio de Banach X, y $P : X \to Z$ es un proyector continuo, el operador adjunto $P^* : Z' \to X'$ es un isomorfismo entre Z' y su imágen $P^*(Z') \subseteq X'$.*

Demostración. Si $g' \in Z'$, entonces

$$\begin{aligned} ||g'||_{Z'} &= \sup_{g\in B_Z} \{|g'(g)|\} = \sup_{g\in B_Z} \{|g'\left(P(g)\right)|\} \\ &= \sup_{g\in B_Z} \{|\left(P^*(g')\right)(g)|\} \leq \sup_{g\in B_X} \{|\left(P^*(g')\right)(g)|\} \\ &= ||P^*(g')||_{X'} . \end{aligned}$$

Se sigue que P^* es un operador acotado inferiormente, y como es continuo, concluimos que es un isomorfismo entre Z' y su imágen $P^*(Z')$. $\square$

Proposición 2.2.6. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base incondicional de Schauder de X, y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ la sucesión de funciones coordenadas.*
Si $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, el subespacio $Z = \overline{[f_{i_k} : k \in \mathbb{N}]}$ está complementado en X, y si $\left\{g_{i_k}'\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq Z'$ es la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_{i_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, entonces $\left\{g_{i_k}'\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\left\{f_{i_k}'\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X'$.

Demostración. Si $f \in X$, entonces $f = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i'(f) f_i$, y por el Lema 2.2.2, se sigue que $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f) f_{i_k}$ converge, y que

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f) f_{i_k} \right\|_Z = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f) f_{i_k} \right\|_X \leq K ||f||_X.$$

Luego, existe un operador lineal continuo $P : X \to Z$ dado por la fórmula

$$P(f) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f) f_{i_k} \quad \forall f \in X. \tag{2.26}$$

Como $\{f_{i_k}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una base de Z y $\left\{g_{i_k}'\right\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq Z'$ es su sucesión de funciones coordenadas, si $g \in Z$, entonces

$$\begin{aligned} f_{i_k}'(g) =& f_{i_k}' \left(\sum_{j=1}^{\infty} g_{i_j}'(g) f_{i_j} \right) = \sum_{j=1}^{\infty} g_{i_j}'(g) f_{i_k}' \left(f_{i_j} \right) \\ =& g_{i_k}'(g). \quad \forall k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $g = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(g) f_{i_k}$. Por (2.26), se infiere que $P(g) = g$. Concluimos P es un proyector, lo que implica que Z está complementado en X.
Si $P^* : Z' \to X'$ es el adjunto de Banach de P, para cada para de enteros positivos n y j, se tiene que

$$\begin{aligned} P^* \left(g_{i_n}' \right) (f_j) =& g_{i_n}' \left(P \left(f_j \right) \right) = g_{i_n}' \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f_j) f_{i_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_{i_k}'(f_j) g_{i_n}' \left(f_{i_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{i_k j} \delta_{nk} \\ =& \delta_{i_n j}. \end{aligned}$$

Deducimos que

$$P^* \left(g_{i_n}' \right) = f_{i_n}' \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Se sigue de (2.27) y la Proposición 2.2.5 que P^* es un isomorfismo entre $\overline{\left[g_{i_k}' : k \in \mathbb{N} \right]}$ y $\overline{\left[f_{i_k}' : k \in \mathbb{N} \right]}$. Por lo tanto, el Lema 1.2.4 dice que $\left\{ g_{i_k}' \right\}_{k \in \mathbb{N}}$ es equivalente a $\left\{ f_{i_k}' \right\}_{k \in \mathbb{N}}$. $\square$

Capítulo 3

Los espacios L_p.

En este capítulo, vamos a estudiar algunos resultados sobre sucesiones básicas y convergencia incondicional en espacios L_p, y luego en el capítulo siguiente usaremos algunos de ellos en la demostración de los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.5.3, y el Corolario 4.2.5.
Recordemos que si $p \in [1, +\infty)$ y (Ω, Σ, ν) es un espacio de medida, el espacio $L_p(\nu)$ es el espacio de funciones medibles de Ω en $\mathbb{R}$ o de Ω en $\mathbb{C}$ cuyo módulo elevado a la potencia p es integrable, es decir que

$$L_p(\nu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} : f \text{ es medible, y } \int_\Omega |f(\omega)|^p d\nu(\omega) < +\infty \right\}, \tag{3.1}$$

donde $\mathbb{K}$ es o bien $\mathbb{R}$, o bien $\mathbb{C}$.
El espacio $L_p(\nu)$ es un espacio de Banach con la norma

$$||f||_{L_p(\nu)} = \left(\int_\Omega |f(\omega)|^p d\nu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in L_p(\nu).$$

En el caso $p = \infty$, el espacio $L_\infty(\nu)$ se define como el conjunto dado por la fórmula

$$L_\infty(\nu) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \text{ medible} : \sup_{\delta \in \mathbb{R}_{>0}} \{\delta : \nu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}\right) > 0\} < +\infty \right\},$$

con la norma dada por

$$||f||_{L_\infty(\nu)} = \sup_{\delta \in \mathbb{R}_{>0}} \{\delta : \nu\left(\{x \in \Omega : |f(x)| > \delta\}\right) > 0\} \quad \forall f \in L_\infty(\nu).$$

Notemos que los espacios ℓ_p que hemos considerado hasta aquí son casos particulares de espacios L_p. En estos caso, Ω es $\mathbb{N}$, Σ es el conjunto de partes de $\mathbb{N}$, y la medida de un conjunto es su cardinal.
Vamos a usar la siguiente notación: Si $f \in L_p(\nu)$ y $g \in L_{p'}(\nu)$, definimos

$$\langle g, f \rangle_\Omega = \int_\Omega g(\omega) f(\omega) d\nu(\omega).$$

Observemos que si $p = 2$, $\langle ., . \rangle_\Omega$ coincide con el producto interno de $L_2(\nu)$ sobre $\mathbb{R}$, pero no con el producto interno de $L_2(\nu)$ sobre $\mathbb{C}$.
En el caso de los espacios L_p en que la medida sea la medida de Lebesgue en algún subconjunto medible E de $\mathbb{R}^d$ para algún entero positivo d, llamaremos $L_p(E)$ al espacio definido por (3.1), así que en particular, se tiene que

$$||f||_{L_p(E)} = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in L_p(E), \text{ y}$$
$$\langle f, g \rangle_E = \int_E f(x) g(x) dx \qquad \forall f \in L_p(E)\ \forall g \in L_{p'}(E).$$

Recordemos que como indicamos en la notación general, cuando no especificamos en una integral con respecto a qué medida estamos integrando, la medida es la medida de Lebesgue.
En caso de que el conjunto E sea todo $\mathbb{R}^d$, notaremos

$$\langle g, f \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx \qquad \forall f \in L_p(\mathbb{R}^d)\ \forall g \in L_{p'}(\mathbb{R}^d).$$

También en el caso en que $E = \mathbb{R}^d$, cuando sea conveniente, para simplificar la notación escribiremos la norma de una función f en $L_p(\mathbb{R}^d)$ simplemente como $||f||_p$, es decir que

$$||f||_p = ||f||_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall f \in L_p(\mathbb{R}^d).$$

Para cada conjunto medible E de $\mathbb{R}^d$, vamos a identificar $(L_p(E))'$ con $L_{p'}(E)$ de la manera usual. Más precisamente, a cada funcional $\phi \in (L_p(E))'$ lo identificamos con la única función $f_\phi \in L_{p'}(E)$ tal que

$$\phi(g) = \langle f_\phi, g \rangle_E = \int_E f_\Phi(x) g(x) dx \quad \forall g \in L_p(E),$$

y si $f \in L_p(E)$ y $g \in L_{p'}(E)$, notamos $g(f) = \langle g, f \rangle_E$.
También vamos a usar resultados básicos sobre espacios L_p, en particular la desigualdad de Hölder, la desigualdad integral de Minkowski, y que para todo $p \in [1, +\infty)$, las combinaciones lineales finitas de cubos diádicos son un conjunto denso en $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Las funciones de Rademacher.

En esta sección, vamos a definir las funciones de Rademacher, que tienen aplicaciones importantes en el análisis funcional en espacios L_p, y a demostrar resultados que usaremos en la demostración del Teorema de Orlicz en la sección siguiente, y en la demostración

de los Lemas 4.2.1, 4.2.2 y 4.5.3 y del Corolario 4.2.5 en el Capítulo 4.
El resultado más importante de esta sección es la desigualdad de Kinchin, pero antes de demostrarla vamos a demostrar algunos resultados previos.

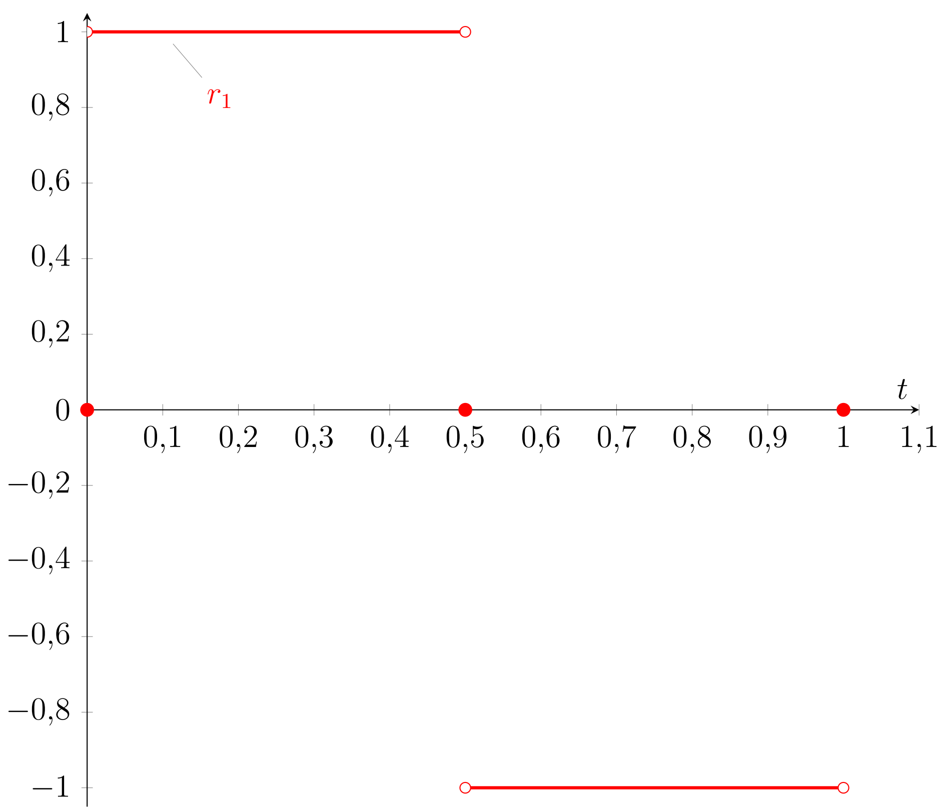
Definición 3.1.1. *La sucesión de funciones de Rademacher* $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es la sucesión de funciones del intervalo* $[0,1]$ *en* $\mathbb{R}$ *dadas por las fórmulas*

$$r_i(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^i\pi t)) \quad \forall t \in [0,1] \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Notemos que $r_i(t)$ es un elemento del conjunto $\{-1,0,1\}$ para todo entero positivo i, y para todo $t \in [0,1]$.
Para tener una idea intuitiva de cómo son las funciones de Rademacher, vamos a graficar las primeras dos de ellas, observando que las demás tienen un comportamiento similar.
Como la función r_1 está dada por la fórmula $r_1(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2\pi t))$, y puesto que la función seno toma valores positivos en el intervalo $(0,\pi)$, negativos en el intervalo $(\pi,2\pi)$, y vale cero en los extremos de dichos intervalos, se infiere inmediatamente que

$$r_1(t) = \begin{cases} 1 & si\ 0 < t < \frac{1}{2}, \\ -1 & si\ \frac{1}{2} < t < 1, \text{ y} \\ 0 & si\ t \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}. \end{cases}$$

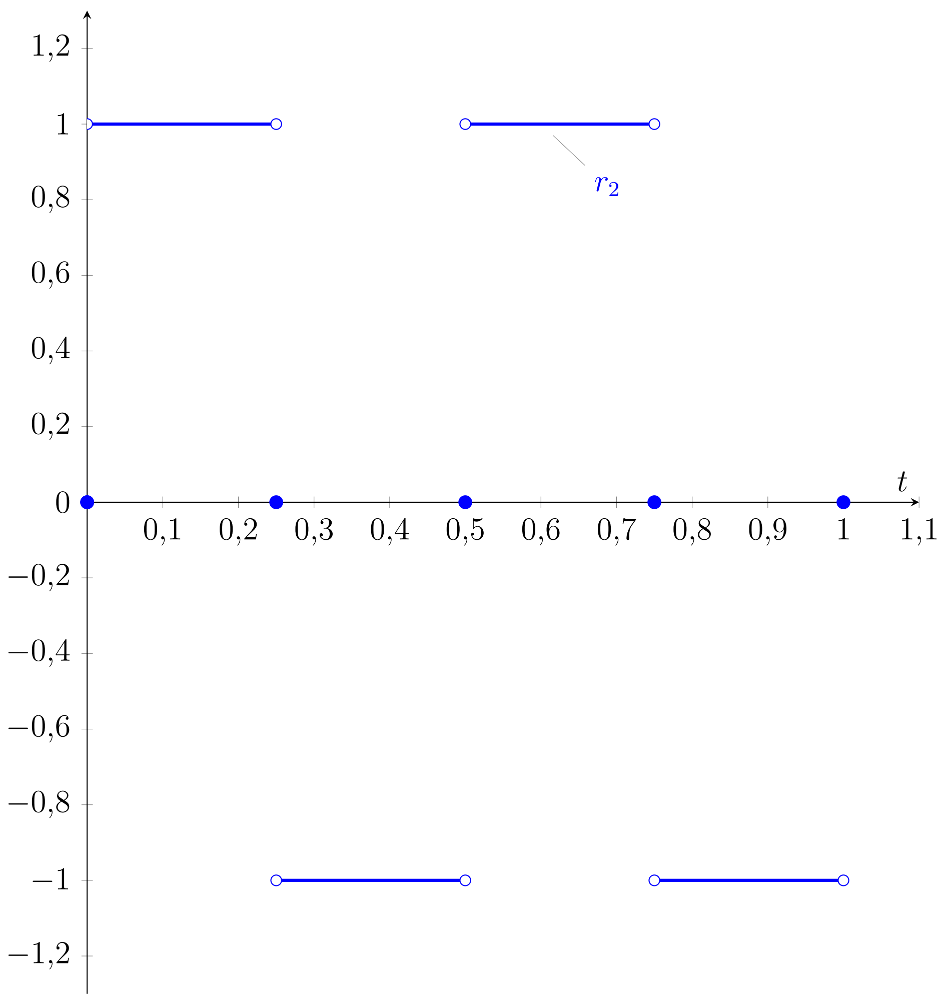
Por lo tanto, el gráfico de r_1 es el siguiente:



La función r_2 está dada por la fórmula $r_2(t) = \operatorname{sgn}(\sin(4\pi t))$. Como la función seno es positiva en los intervalos $(0, \pi)$ y $(2\pi, 3\pi)$, negativa en $(\pi, 2\pi)$ y $(3\pi, 4\pi)$, y cero en los extremos de dichos intervalos, se sigue que

$$r_2(t) = \begin{cases} 1 & si\ t \in \left(0, \frac{1}{4}\right) \sqcup \left(\frac{1}{2}, 1\right), \\ -1 & si\ t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \sqcup \left(\frac{3}{4}, 1\right), \text{ y} \\ 0 & si\ t \in \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\}. \end{cases}$$

Luego, el gráfico de r_2 es el siguiente:



En general, considerando que la función seno toma valores positivos en los intervalos abiertos de la forma $(2n\pi, (2n+1)\pi)$ para todo entero n, valores negativos en los intervalos abiertos de la forma $((2n-1)\pi, 2n\pi)$ para todo entero n, y cero en los extremos de dichos intervalos, se puede inferir que para todo entero positivo i, la función de Rademacher r_i es una función escalonada que toma los valores 1 y -1 en intervalos abiertos de igual longitud del intervalo $(0,1)$, y vale cero en los extremos de cada uno dichos intervalos. Más aún, en el primero de esos intervalos abiertos contados desde la izquierda sobre la recta real, la función vale 1, en el segundo vale -1, en el siguiente nuevamente 1, y de ese modo, la función toma valores distintos en intervalos abiertos sucesivos. Como vale -1 en el último de ellos, el número de intervalos en los que la función r_i toma el valor 1 es igual al número de intervalos en los que toma el valor -1. Precisaremos y demostraremos estas consideraciones, como asimimismo un resultado más fuerte, en el siguiente Lema.

Lema 3.1.2. *Si i_0, i_1 y j_0 son enteros no negativos tales que $i_0 < i_1$ y $j_0 < 2^{i_0}$, entonces*

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = 1\right\} = \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right), \text{ y} \tag{3.3}$$

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = -1\right\} = \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left(\frac{2n+1}{2^{i_1}}, \frac{2n+2}{2^{i_1}}\right). \tag{3.4}$$

En consecuencia, si i es un entero positivo, entonces

$$\{t \in [0,1] : r_i(t) = 1\} = \bigsqcup_{n=0}^{2^{i-1}-1} \left(\frac{2n}{2^i}, \frac{2n+1}{2^i}\right), \tag{3.5}$$

$$\{t \in [0,1] : r_i(t) = -1\} = \bigsqcup_{n=0}^{2^{i-1}-1} \left(\frac{2n+1}{2^i}, \frac{2n+2}{2^i}\right), \text{ y} \tag{3.6}$$

$$\{t \in [0,1] : r_i(t) = 0\} = \left\{\frac{n}{2^i} : n \in \left\{0, \dots, 2^i\right\}\right\}. \tag{3.7}$$

Demostración. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por la fórmula

$$g(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2^{i_1}\pi t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Dado que el seno toma valores positivos en los intervalos de la forma $(2n\pi, 2n\pi + \pi)$ para todo entero n, y solo en dichos intervalos, se infiere inmediatamente de (3.8) que $g(t) = 1$ si y solo si existe un entero m tal que $2^{i_1}\pi t \in (2n\pi, 2n\pi + \pi)$, o equivalentemente, si y solo si existe un entero m tal que $t \in \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right)$. Luego, se tiene que

$$\{t \in \mathbb{R} : g(t) = 1\} = \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right)$$

Dado que r_{i_1} es la restricción de g al intervalo $[0,1]$, y puesto que $\left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right]$ está contenido en $[0,1]$, esto implica que

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = 1\right\} = \left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : g(t) = 1\right\}$$

$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right) \cap \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right]$$
$$= \bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_1}}\right) \cap \left[\frac{2^{i_1-i_0}j_0}{2^{i_1}}, \frac{2^{i_1-i_0}(j_0+1)}{2^{i_1}}\right]$$
$$= \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n}{2^{i_1}} + \frac{1}{2^{i_1}}\right).$$

Luego, la igualdad (3.3) es cierta. La igualdad (3.4) se demuestra de manera análoga.

Tomando $i_1 = i$, y $j_0 = i_0 = 0$ en (3.3) y (3.4), se infiere inmediatamente que (3.5) y (3.6) valen.
Dado que el seno se anula en múltiplos enteros de π, tenemos:

$$\{t \in [0,1] : r_i(t) = 0\} = \left\{t \in [0,1] : t = \frac{n}{2^i} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$$
$$= \left\{\frac{n}{2^i} : 0 \leq n \leq 2^i\right\}.$$

$\square$

Observación 3.1.3. *Dado que $|r_i(t)| \in \{0,1\}$ para todo entero positivo i y para todo $t \in [0,1]$, se sigue inmediatamente de la igualdad (3.7) del Lema 3.1.2 que si D_0 es el conjunto de los números diádicos en el intervalo $[0,1]$, entonces $|r_i(t)| = 1$ para todo entero positivo i y para todo $t \in [0,1] \setminus D_0$. En particular, esto dice que salvo por un conjunto de medida cero, el módulo de $r_i(t)$ es uno.*

Corolario 3.1.4. *Si $p \in [1,+\infty]$, entonces $||r_i||_{L_p[0,1]} = 1$ para todo entero positivo i.*

Demostración. Sea D_0 es el conjunto de números diádicos en el intervalo $[0,1]$.
Si $p \in [1,+\infty)$, por la Observación 3.1.3 se deduce que

$$||r_i||_{L_p[0,1]} = \left(\int_0^1 |r_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{[0,1]\setminus D_0} |r_i(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= \left(\int_{[0,1]\setminus D_0} 1^p dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^1 dt\right)^{\frac{1}{p}} = 1.$$

Puesto que $|r_i(t)| = 1$ para casi todo $t \in [0,1]$, se infiere inmediatamente que

$$||r_i||_{L_\infty[0,1]} = 1.$$

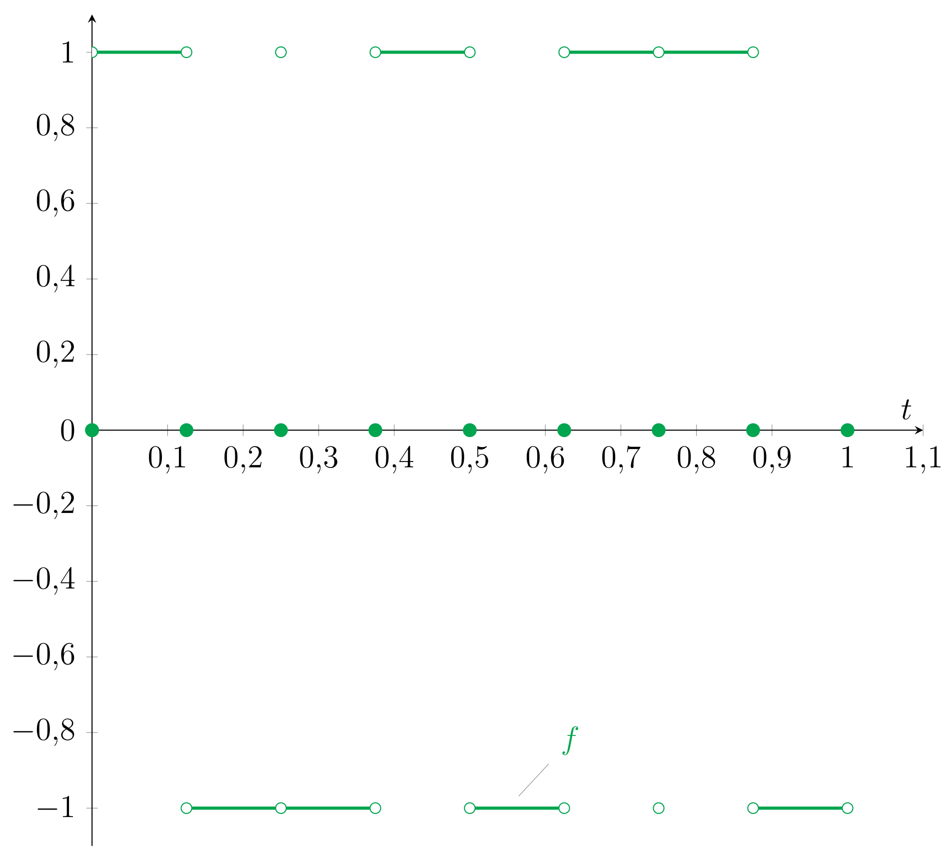
$\square$

Vamos a estudiar a continuación los productos finitos funciones de Rademacher distintas, y veremos que tienen algunas propiedades importantes similares a los de cada

una de dichas funciones. Por ejemplo, cada uno de dichos productos tiene finitos ceros, y más aún, su conjunto de ceros es el conjunto de ceros de uno de sus factores. También, al igual que cada función de Rademacher, cada producto finito de funciones de Rademacher distintas vale 1 en un subconjunto del intervalo $[0,1]$ de medida $\frac{1}{2}$, y vale -1 en un subconjunto de igual medida. Esto implica en particular que la integral de cada uno de tales productos es cero. Combinando este resultado con el Corolario 3.1.4, se infiere que las funciones de Rademacher son un conjunto ortonormal en $L_2[0,1]$.
Antes de dar las demostraciones de estos y otros resultados, y para tener una idea intuitiva del comportamiento de los productos que estamos considerando, vamos a ver un ejemplo gráfico: Sea f_1 el producto de r_1, r_2, y r_3. Se sigue de la Definición 3.2 que f_1 está dada por la fórmula

$$f_1(t) = \operatorname{sgn}(\sin(2\pi t))\operatorname{sgn}(\sin(4\pi t))\operatorname{sgn}(\sin(8\pi t)) = \operatorname{sgn}(\sin(2\pi t)\sin(4\pi t)\sin(8\pi t)).$$

Se puede demostrar fácilmente que el gráfico de f_1 es el siguiente:



Como se puede ver en el gráfico, los ceros de f_1 son los ceros de r_3. Este resultado se generaliza a todos los productos finitos de una o más funciones de Rademacher distintas, como demostramos a continuación.

Proposición 3.1.5. *Sea* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *un conjunto no vacío estrictamente creciente de enteros positivos, y* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función dada por la fórmula*

$$f(t) = \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t).$$

Se tiene que

$$\{t \in [0,1] : f(t) = 0\} = \left\{ \frac{n}{2^{i_k}} : 0 \leq n \leq 2^{i_k} \right\}.$$

Demostración. Teniendo en cuenta que $i_j \leq i_k$ si $1 \leq j \leq k$ y el Lema 3.1.2, deducimos que

$$\begin{aligned}
\{t \in [0,1] : f(t) = 0\} &= \left\{ t \in [0,1] : \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t) = 0 \right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ t \in [0,1] : r_{i_j}(t) = 0 \right\} \\
&= \bigcup_{j=1}^{k} \left\{ \frac{n}{2^{i_j}} : 0 \leq n \leq 2^{i_j} \right\} \\
&= \left\{ \frac{n}{2^{i_k}} : 0 \leq n \leq 2^{i_k} \right\}.
\end{aligned}$$

□

También se puede observar en el gráfico de la función f_1 que en cada uno de los intervalos abiertos de longitud 2^{-3} entre dos raíces consecutivas, f_1 es constante, y toma o bien el valor 1, o el valor -1. Más aún, hay cuatro intervalos abiertos disjuntos dos a dos de longitud 2^{-3} cada uno en los que f_1 vale 1, y cuatro intervalos abiertos disjuntos dos a dos de longitud 2^{-3} en los que f_1 vale -1. Todos los productos finitos de una o más funciones de Rademacher distintas tienen una propiedad similar, aunque no vamos a probar este resultado, que no usaremos ese resultado para las demostraciones de la tesis. Una consecuencia de la propiedad mencionada es que tanto el conjunto en el que f_1 vale 1 como el conjunto en el cual vale -1 tiene medida $\frac{1}{2}$. A continuación, vamos a demostrar este resultado en el caso general.

Lema 3.1.6. *Sea* $\{i_1, \ldots, i_k\}$ *un conjunto no vacío creciente de enteros positivos, y* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función dada por la fórmula*

$$f(t) = \prod_{j=1}^{k} r_{i_j}(t).$$

Si i_0 y j_0 son enteros no negativos tales que $i_0 < i_1$ y $j_0 < 2^{i_0}$. Entonces,

$$\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = 1\right\}\right) = \frac{1}{2^{i_0+1}}, \text{ y} \tag{3.9}$$

$$\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = -1\right\}\right) = \frac{1}{2^{i_0+1}}. \tag{3.10}$$

En particular, esto implica que

$$\mu\left(\{t \in [0,1] : f(t) = 1\}\right) = \frac{1}{2}, \text{ y} \tag{3.11}$$

$$\mu\left(\{t \in [0,1] : f(t) = -1\}\right) = \frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

Demostración. Dado que las igualdades (3.11) y (3.12) se deducen inmediatamente de (3.9) y (3.10) respectivamente, y dado que estas dos últimas son análogas, es suficiente demostrar (3.9). Vamos a demostrarla por inducción en k.
Si $k = 1$, entonces $f(t) = r_{i_1}(t)$. Luego, por el Lema 3.1.2,

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = 1\right\} = \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = 1\right\}\right) &= \sum_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \mu\left(\left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right)\right) \\ &= \sum_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \frac{1}{2^{i_1}} = 2^{i_1-i_0-1}\left(\frac{1}{2^{i_1}}\right) \\ &= \frac{1}{2^{i_0+1}}.\end{aligned}$$

Luego, (3.9) es cierta en el caso $k = 1$.
Supongamos ahora que k_0 es un entero positivo, y que para todo $1 \leq k \leq k_0$, la igualdad (3.9) vale.
Si $k = k_0 + 1$, se tiene que

$$f(t) = \prod_{j=1}^{k_0+1} r_{i_j} = r_{i_1(t)}\left(\prod_{j=2}^{k_0+1} r_{i_j}(t)\right).$$

Definimos una función $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por medio de la fórmula

$$g(t) = \prod_{j=2}^{k_0+1} r_{i_j}(t).$$

Dado que $f = r_{i_1} g$, concluimos que

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = 1\right\} = \bigsqcup_{l \in \{-1,1\}} \left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = l \text{ y } g(t) = l\right\} \tag{3.13}$$

Dado que $i_0 < i_1$ y $j_0 < 2^{i_0}$, el Lema 3.1.2 dice que

$$\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = 1\right\} = \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right). \tag{3.14}$$

Se infiere inmediatamente de (3.14) que

$$\begin{aligned} &\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = 1 \text{ y } g(t) = 1\right\} = \\ &= \bigsqcup_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \left\{t \in \left(\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right) : g(t) = 1\right\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Puesto que para todos los índices n de la unión en la igualdad (3.15), se tiene que $2n < 2^{i_1}$, y como además $i_1 < i_2$, podemos aplicar la hipótesis inductiva a todos los conjuntos de tal unión y a la función g. Inferimos que para cada uno de dichos índices n, vale que

$$\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{2n}{2^{i_1}}, \frac{2n+1}{2^{i_1}}\right] : g(t) = 1\right\}\right) = \frac{1}{2^{i_1+1}}. \tag{3.16}$$

Se sigue de (3.15) y (3.16) que

$$\begin{aligned} \mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = 1 \text{ y } g(t) = 1\right\}\right) &= \sum_{n=2^{i_1-i_0-1}j_0}^{2^{i_1-i_0-1}(j_0+1)-1} \frac{1}{2^{i_1+1}} = \frac{2^{i_1-i_0-1}}{2^{i_1+1}} \\ &= \frac{1}{2^{i_0+2}}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

De manera similar, tenemos que

$$\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : r_{i_1}(t) = -1 \text{ y } g(t) = -1\right\}\right) = \frac{1}{2^{i_0+2}}. \tag{3.18}$$

Deducimos de (3.13), (3.17) y (3.18) que

$$\mu\left(\left\{t \in \left[\frac{j_0}{2^{i_0}}, \frac{j_0+1}{2^{i_0}}\right] : f(t) = 1\right\}\right) = \frac{1}{2^{i_0+2}} + \frac{1}{2^{i_0+2}} = \frac{1}{2^{i_0+1}}.$$

Se sigue que (3.9) es cierta para $k = k_0 + 1$, lo que completa el paso inductivo. $\square$

Seguidamente, vamos a usar el Lema 3.1.6 para demostrar un Lema que será útil en varias demostraciones posteriores, y en particular nos permitirá dar un paso clave en la demostración de la desigualdad de Kinchin, más precisamente en la demostración del Lema 3.1.11.

Lema 3.1.7. *Si m es un entero positivo, $\{i_j\}_{1\leq j\leq m}$ es un conjunto de enteros positivos tales que $i_j < i_l$ si $j < l$, y $\{k_j\}_{1\leq j\leq m}$ es un conjunto de enteros positivos, entonces*

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^m r_{i_j}(t)^{k_j}dt = \begin{cases} 0 & \text{si } \exists j : 1 \leq j \leq m \ \textit{tal que } k_j \text{ es impar;} \\ 1 & \text{si } \forall j \in \{1, \ldots, m\},\ k_j \text{ es par.} \end{cases}$$

En particular, para todo par de enteros positivos i y j, se tiene que

$$\int_0^1 r_i r_j = \delta_{ij}.$$

Demostración. Sea D_0 el conjunto de números diádicos en el intervalo $[0, 1]$. Por la Observación 3.1.3, para todo $t \in [0, 1] \setminus D_0$, y para todo entero positivo l, $|r_l(t)| = 1$, y por lo tanto, $r_l(t)^k = 1$ para todo entero par k. Se infiere que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \prod_{j=1}^m (r_{i_j}(t))^{k_j}dt &= \int_{[0,1]\setminus D_0} \prod_{j=1}^m (r_{i_j}(t))^{k_j}dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus D_0} \left(\prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es par}}} (r_{i_j}(t))^{k_j} \right) \left(\prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es impar}}} (r_{i_j}(t))^{k_j} \right) dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus D_0} \left(\prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es par}}} 1 \right) \left(\prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es impar}}} (r_{i_j}(t))^{k_j} \right) dt \\
&= \int_{[0,1]\setminus D_0} \prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es impar}}} (r_{i_j}(t))^{k_j}dt \\
&= \int_0^1 \prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es impar}}} (r_{i_j}(t))^{k_j}dt. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Es inmediato que si k es un entero positivo impar y l es cualquier entero positivo, entonces $r_l(t)^k = r_l(t)$ para todo $t \in [0,1]$. Luego, de (3.19) deducimos que

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^{m} (r_{i_j}(t))^{k_j} dt = \int_0^1 \prod_{\substack{1\leq j\leq m \\ k_j \text{es impar}}} r_{i_j}(t) dt. \tag{3.20}$$

Si k_j es par para todo $1 \leq j \leq m$, se sigue inmediatamente de (3.20) que

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^{m} (r_{i_j}(t))^{k_j} dt = \int_0^1 dt = 1.$$

Si existe $1 \leq j \leq m$ tal que k_j es impar, la integral es cero como consecuencia del Lema 3.1.6. □

Corolario 3.1.8. *La sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones de Rademacher es un conjunto ortonormal en $L_2[0,1]$.*

Demostración. El Corolario 3.1.4 dice que

$$||r_i||_{L_2[0,1]} = 1 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Si i y j son enteros positivos tales que $i \neq j$, el Lema 3.1.7 establece que

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0.$$

Como las funciones de Rademacher siempre toman valores reales, esto prueba que son un conjunto ortonormal tanto en el espacio de Hilbert $L_2[0,1]$ sobre $\mathbb{R}$, como en el espacio $L_2[0,1]$ sobre $\mathbb{C}$. □

Observación 3.1.9. *Puesto que $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es un conjunto ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2[0,1]$, para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y para todo entero positivo n, se tiene que*

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right|\right|_{L_2[0,1]} = \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i e^{(i)}\right|\right|_{\ell_2} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

En lo que resta de esta sección, vamos a usar los resultados demostrados hasta aquí para probar cotas de las normas de combinaciones lineales de funciones de Rademacher en espacios $L_p[0,1]$, hasta completar la demostración de la desigualdad de Kinchin (Teorema 3.1.13), y luego basándonos en dicha desigualdad vamos a demostrar resultados que a su vez usaremos en el Capítulo 4, más precisamente en las demostraciones del Corolario 4.2.5 y el Lema 4.5.3.

Proposición 3.1.10. *Si n es un entero positivo, $p \in [1,2]$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares, entonces*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_{p'}[0,1]} . \tag{3.21}$$

Demostración. Como $p \leq 2 \leq p'$, se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_2[0,1]} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} .$$

Por la Observación 3.1.9, deducimos que (3.21) vale. □

El siguiente Lema es uno de los pasos centrales en la demostración de la desigualdad de Kinchin. Para demostrar dicho Lema, vamos a tener en cuenta que para todo conjunto de escalares $\{c_1, \ldots, c_n\}$ y para todo entero positivo m, se tiene que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{n} c_j \right)^m &= \sum_{k_1+\cdots+k_n=m} \left(\binom{m}{k_1} \binom{m-k_1}{k_2} \cdots \binom{m-(k_1+\cdots+k_{n-1})}{k_n} \right) \prod_{j=1}^{n} c_j^{k_j} \\ &= \sum_{k_1+\cdots+k_n=m} \frac{m!}{k_1! \ldots k_n!} \prod_{j=1}^{n} c_j^{k_j} .\end{aligned}$$

Lema 3.1.11. *Si n y m son enteros positivos, y $\{a_j\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, entonces*

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \right\|_{L_{2m}[0,1]} \leq \sqrt{2m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración. Si $m = 1$, la desigualdad del enunciado se deduce inmediatamente de la Observación 3.1.9.
Supongamos que $m > 1$. Dado que para todo $t \in [0,1]$, y para todo entero positivo j, el producto $a_j r_j(t)$ es un número real, y puesto que $2m$ es un entero positivo par, deducimos que

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j \right\|_{L_{2m}}^{2m} &= \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^{n} a_j r_j(t) \right|^{2m} dt = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{n} a_j r_j(t) \right)^{2m} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k_1+\cdots+k_n=2m} \frac{2m!}{k_1! \ldots k_n!} \prod_{j=1}^{n} a_j^{k_j} r_j(t)^{k_j} dt\end{aligned}$$

$$= \sum_{k_1+\cdots+k_n=2m} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \int_0^1 \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} r_j(t)^{k_j} dt. \tag{3.22}$$

Teniendo en cuenta que por el Lema 3.1.7, si existe $1 \le j \le n$ tal que k_j es impar, entonces

$$\int_0^1 \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} r_j(t)^{k_j} dt = 0,$$

se sigue de (3.22) que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^n a_j r_j\right\|_{L_{2m}}^{2m} &= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2m \\ k_i \text{ es par } \forall i:1\le i\le n}} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \int_0^1 \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} r_j(t)^{k_j} dt \\
&= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2m \\ k_i \text{ es par } \forall i:1\le i\le n}} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \int_0^1 \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} |r_j(t)|^{k_j} dt \\
&= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2m \\ k_i \text{ es par } \forall i:1\le i\le n}} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \int_0^1 \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} dt \\
&= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2m \\ k_i \text{ es par } \forall i:1\le i\le n}} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \prod_{j=1}^n a_j^{k_j}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Llamamos $2l_j$ a cada índice k_j en la suma de (3.23), y deducimos que

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^n a_j r_j\right\|_{L_{2m}}^{2m} &= \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=2m \\ k_i \text{ es par } \forall i:1\le i\le n}} \frac{2m!}{k_1!\dots k_n!} \prod_{j=1}^n a_j^{k_j} \\
&= \sum_{2l_1+\cdots+2l_n=2m} \frac{2m!}{(2l_1)!\dots(2l_n)!} \prod_{j=1}^n a_j^{2l_j} \\
&= \sum_{l_1+\cdots+l_n=m} \frac{2m!}{(2l_1)!\dots(2l_n)!} \prod_{j=1}^n \left(a_j^2\right)^{l_j} \\
&\le \sum_{l_1+\cdots+l_n=m} \frac{2m!}{l_1!\dots l_n!} \prod_{j=1}^n \left(a_j^2\right)^{l_j}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l_1+\cdots+l_n=m} \frac{m!}{l_1!\dots l_n!} \left(\prod_{d=1}^{m}(m+d)\right)\left(\prod_{j=1}^{n}\left(a_j^2\right)^{l_j}\right) \\
&\leq \sum_{l_1+\cdots+l_n=m} \frac{m!}{l_1!\dots l_n!}(2m)^m \prod_{j=1}^{n}\left(a_j^2\right)^{l_j} \\
&=(2m)^m \sum_{l_1+\cdots+l_n=m} \frac{m!}{l_1!\dots l_n!} \prod_{j=1}^{n}\left(a_j^2\right)^{l_j} \\
&=(2m)^m \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^m . \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

Se sigue de (3.24) que

$$
\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right\|_{L_{2m}} \leq \left((2m)^m \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^m\right)^{\frac{1}{2m}} = \sqrt{2m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

□

Corolario 3.1.12. *Si $p \in (2,+\infty)$, m es un entero positivo mayor o igual que $\frac{p}{2}$, n es cualquier entero positivo, y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de números reales, entonces*

$$
\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right\|_{L_p[0,1]} \leq \sqrt{2m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (3.25)
$$

Demostración. Como $p \leq 2m$, por el Lema 3.1.11 resulta que

$$
\left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right\|_{L_p[0,1]} \leq \left\|\sum_{j=1}^{n} a_j r_j\right\|_{L_{2m}[0,1]} \leq \sqrt{2m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)^{\frac{1}{2}} .
$$

□

Teorema 3.1.13 (Desigualdad de Kinchin)**.** *Sea $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones de Rademacher. Para todo $p \in [1,+\infty)$ existen constantes positivas A_p y B_p tales que para todo entero positivo n y para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, valen las siguientes desigualdades:*

$$
A_p^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} a_i r_i\right\|_{L_p[0,1]} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \qquad (3.26)
$$

Si $p \in [1,2]$, se puede elegir $B_p = 1$, y si $p \in [2,+\infty)$, se puede elegir $A_p = 1$.

Demostración. Por la relación entre las normas en $L_p[0,1]$ y la Observacíon 3.1.9, la primera desigualdad es inmediata para $p \geq 2$ y la segunda es inmediata para $1 \leq p \leq 2$, con constante 1 en ambos casos.
Si $p \in (2, +\infty)$, sea m el menor entero positivo mayor que $\frac{p}{2}$, es decir que $m = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1$.
En el caso del espacio $L_p[0,1]$ sobre $\mathbb{R}$, la desigualdad de la derecha de (3.26) se sigue del Corolario 3.1.12, tomando $B_p = \sqrt{2m}$.
En el caso del espacio $L_p[0,1]$ sobre $\mathbb{C}$, se deduce del Corolario 3.1.12 que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} &\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Re}(a_i) r_i \right\|_{L_p[0,1]} + \left\| \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Im}(a_i) r_i \right\|_{L_p[0,1]} \\
&\leq \sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Re}(a_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} (\operatorname{Im}(a_i))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2\sqrt{2m} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad de la derecha de (3.26) vale para $p \in (2, +\infty)$, y se puede tomar $B_p = 2\sqrt{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 2}$.
Veamos ahora el caso $p = 1$. Podemos suponer sin perder generalidad que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$, dado que en caso contrario (3.26) vale trivialmente para cualquier par de escalares positivos A_p y B_p.
Por la Observación 3.1.9, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_2[0,1]}^2 = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^2 dt = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{2}{3}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{4}{3}} dt. \tag{3.27}$$

Definimos $\delta = \frac{3}{2}$, lo que implica que $\delta' = 3$. Como δ es mayor que uno, y puesto que ya probamos que existe la constante B_4 del enunciado, por la desigualdad de Hölder deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{2}{3}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{4}{3}} dt &\leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{2\delta}{3}} \right)^{\frac{1}{\delta}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^{\frac{4\delta'}{3}} dt \right)^{\frac{1}{\delta'}} \\
&= \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right| \right)^{\frac{2}{3}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t) \right|^4 \right)^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_1[0,1]}^{\frac{2}{3}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_4[0,1]}^{\frac{4}{3}} \\
&\leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_1[0,1]}^{\frac{2}{3}} B_4^{\frac{4}{3}} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{2}{3}} . \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Se sigue de (3.27) y (3.28) que

$$
\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{1-\frac{2}{3}} \leq B_4^{\frac{4}{3}} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_1[0,1]}^{\frac{2}{3}} . \qquad (3.29)
$$

Por lo tanto,

$$
B_4^{-2} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_1[0,1]} . \qquad (3.30)
$$

Se sigue de (3.30) que la desigualdad de la izquierda de (3.26) vale si $p = 1$, y se puede tomar $A_1 = B_4^2$. Por la relación entre las normas, esto implica que dicha desigualdad también vale si $p \in (1, 2)$. □

Una consecuencia importante de la desigualdad de Kinchin es el siguiente Corolario:

Corolario 3.1.14. *Si $p \in [1, +\infty)$, la sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones de Rademacher es una sucesión básica en $L_p[0,1]$ equivalente a la base canónica de ℓ_2.*

Demostración. Se deduce inmediatamente de la desigualdad de Kinchin que si $M = \text{máx}\{A_p, B_p\}$, entonces para todo entero positivo n, y para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{M} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} &\leq \frac{B_p}{M} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e^{(i)} \right\|_{\ell_2} \leq A_p \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} \\
&\leq M \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right\|_{L_p[0,1]} \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Por el Lema 1.2.4, se infiere de (3.31) que $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en $L_p[0,1]$ equivalente a la base canónica $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ℓ_2. □

El Corolario 3.1.14 en particular implica que existe una sucesión básica en $L_p[0,1]$ equivalente a la base canónica de ℓ_2. Este resultado también es válido para $L_p(\mathbb{R}^d)$, como probaremos luego de demostrar una Proposición auxiliar.

Proposición 3.1.15. *Sea $p \in [1, +\infty)$, A un subconjunto medible de R^d, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica en $L_p(A)$. Si l es un entero no negativo, existe una sucesión básica $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $L_p(\mathbb{R}^{d+l})$ que es equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Para cada entero positivo i, definimos una función $g_i \in L_p(\mathbb{R}^d)$ del siguiente modo:

$$g_i(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Se deduce inmediatamente de la defínción que para toda sucesión de escalares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y para todo entero positivo n, se tiene que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right\|_{L_p(A)}^p &= \int_A \left|\sum_{i=1}^n a_i f_i(x)\right|^p dx = \int_A \left|\sum_{i=1}^n a_i g_i(x)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{i=1}^n a_i g_i(x)\right|^p dx \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n a_i g_i\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Por el Lema 1.2.4 y (3.32), deducimos que $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en $L_p(\mathbb{R}^d)$ equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si $l = 0$, esto completa la demostración.
Si $l > 0$, definimos para cada entero positivo i una función F_i por medio de la fórmula

$$F_i(x_1, \ldots, x_{d+l}) = g_i(x_1, \ldots, x_d)\chi_{[0,1]}(x_{d+1}) \ldots \chi_{[0,1]}(x_{d+l}).$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{i=1}^n a_i F_i\right\|_{L_p(\mathbb{R}^{d+l})}^p &= \int_{\mathbb{R}^{d+l}} \left|\sum_{i=1}^n a_i F_i(x)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}^{d+l}} \left|\sum_{i=1}^n a_i F_i(x_1, \ldots, x_{d+l})\right|^p dx_1 \ldots d_{x_{d+l}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d+l}} \left|\sum_{i=1}^n a_i g_i(x_1, \ldots, x_d)\chi_{[0,1]}(x_{d+1}) \ldots \chi_{[0,1]}(x_{d+l})\right|^p dx_1 \ldots d_{x_{d+l}} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times [0,1]^l} \left|\sum_{i=1}^n a_i g_i(x_1, \ldots, x_d)\right|^p dx_1 \ldots d_{x_{d+l}} \\ &= \int_{[0,1]^l} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left|\sum_{i=1}^n a_i g_i(x_1, \ldots, x_d)\right|^p dx_1 \ldots d_{x_d} \right) dx_{d+1} \ldots dx_{d+l} \\ &= \int_{[0,1]^l} \left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i g_i\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \right) dx_{d+1} \ldots dx_{d+l} \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n a_i g_i\right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p \int_{[0,1]^l} dx_{d+1} \ldots dx_{d+l} \end{aligned}$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \right\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p . \tag{3.33}$$

Se infiere de (3.33) y el Lema 1.2.4 que $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y como $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se sigue que $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son equivalentes. $\square$

La Proposición 3.1.15 es útil para demostrar que ℓ_2 está contenido en $L_p(\mathbb{R}^d)$, en el sentido de la siguiente Proposición:

Proposición 3.1.16. *Si $p \in [1, +\infty)$ y d es un entero positivo, existe una sucesión básica $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ que es equivalente a la base canónica $\{e^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de ℓ_2.*

Demostración. Por la el Corolario 3.1.14, la sucesión de funciones de Rademacher $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en $L_p([0,1])$ equivalente a la base canónica de ℓ_2. Dado que $[0,1]$ es un subconjunto medible de $\mathbb{R}$, la Proposición 3.1.15 dice que para todo entero positivo d, existe una sucesión básica $\{F_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $L_p(\mathbb{R}^d)$ equivalente a la sucesión $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ en $L_p[0,1]$, y por ende, equivalente a la base canónica de ℓ_2. $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar un resultado que en el capítulo siguiente usaremos para demostrar que si $p \in [1,2) \cup (2, +\infty)$, no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Lema 3.1.17. *Si $p \in [1,2) \cup (2, +\infty)$, entonces ℓ_p no es isomorfo a $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.16, $L_p(\mathbb{R}^d)$ tiene un subespacio isomorfo a ℓ_2.
Veamos que ℓ_p no tiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_2.
Supongamos que $T : \ell_2 \to X \subseteq \ell_p$ es un isomorfismo.
Puesto que $\left\{e^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, $\left\{T\left(e^{(i)}\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, y como la base canónica tiende débilmente a cero en ℓ_2 y T es un operador $\omega - \omega-$continuo por ser continuo, se sigue que $\left\{T\left(e^{(i)}\right)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ tiende débilmente a cero en ℓ_p. Luego, por la Proposición 1.2.11, existe una subsucesión $\left\{T\left(e^{(i_k)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ que es básica y equivalente a la base canónica de ℓ_p.
Como la restricción de T a $\overline{[e^{(i_k)} : k \in \mathbb{N}]}$ es un isomorfismo entre $\overline{[e^{(i_k)} : k \in \mathbb{N}]}$ y $\overline{[T\left(e^{(i_k)}\right) \in \mathbb{N}]}$, se sigue por el Lema 1.2.4 que $\left\{T\left(e^{(i_k)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\left\{e^{(i_k)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$, lo que implica que es equivalente a la base canónica de ℓ_2.
Dado que $\left\{T\left(e^{(i_k)}\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_2 y también es equivalente a la base canónica de ℓ_p, y puesto que la equivalencia de sucesiones básicas es una relación de equivalencia, se infiere que la base canónica de ℓ_2 es equivalente a la base canónica de ℓ_p, lo que contradice la Proposición 1.2.3. $\square$

El Teorema de Orlicz.

En esta sección, daremos una demostración de un teorema probado por Orlicz, que tiene varias aplicaciones en el contexto de convergencia incondicional en espacios L_p. Como ejemplo de aplicación, probaremos un teorema sobre sucesiones básicas incondicionales en espacios de Hilbert (aunque no vamos a usar el Teorema de Orlicz para demostrar los resultados principales de la tesis, es un resultado importante en el contexto de convergencia incondicional en espacios L_p, y puede ser útil para entender más claramente dicha convergencia).

Teorema 3.2.1 (Teorema de Orlicz). *Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L_p(\nu)$, y q el máximo entre 2 y p.*
Si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ converge incondicionalmente, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} ||f_i||^q_{L_p(\nu)} < +\infty.$$

Demostración. Como $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ converge incondicionalmente en $L_p(\nu)$, por el Lema 2.1.5, existe un operador lineal continuo $T : \ell_\infty \to L_p(\nu)$ tal que si $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, entonces

$$T(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i. \tag{3.34}$$

Sea $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones de Rademacher. Para cada entero positivo n definimos una función $R^{(n)} : [0,1] \to \ell_\infty$ como

$$R^{(n)}(t) = \left(R_i^{(n)}(t)\right)_{i\in\mathbb{N}},$$

donde

$$R_i^{(n)}(t) = \begin{cases} r_i(t) & \text{si } i \leq n, \\ 0 & \text{si } n < i. \end{cases}$$

Dado que $|r_i(t)| \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$ y para todo entero positivo i, se infiere inmediatamente de (3.34) que para todo entero positivo n, tenemos que

$$\begin{aligned} \left|\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) f_i\right|\right|^p_{L_p(\nu)} &= \left|\left|T(R^{(n)}(t))\right|\right|^p_{L_p(\nu)} \leq ||T||^p ||R^{(n)}(t)||^p_{\ell_\infty} \\ &\leq ||T||^p \quad \forall t \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Por el Teorema de Fubini y la desigualdad de Kinchin (Teorema 3.1.13), se sigue de (3.35) que

$$\begin{aligned}
||T||^p &= \int_0^1 ||T||^p dt \geq \int_0^1 \left|\left|\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega)\right|^p d\nu(\omega) \right) dt \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n r_i(t) f_i(\omega)\right|^p dt \right) d\nu(\omega) = \int_\Omega \left|\left|\sum_{i=1}^n f_i(\omega) r_i\right|\right|_{L_p[0,1]}^p d\nu(\omega) \\
&\geq A_p^{-p} \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\nu(\omega). \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Por (3.36) y puesto que $\frac{2}{q} \leq 1$, deducimos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\nu(\omega) &= \int_\Omega \left(\left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{2}{q}} \right)^{\frac{p}{2}} d\nu(\omega) \\
&\leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^{q\left(\frac{2}{q}\right)} \right)^{\frac{p}{2}} d\nu(\omega) = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\nu(\omega) \\
&\leq (A_p ||T||)^p. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Dado que una suma es una integral con respecto a la medida cardinal sobre los subconjuntos de $\mathbb{N}$, por la desigualdad integral de Minkowski tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^n ||f_i||_{L_p(\nu)}^q \right)^{\frac{p}{q}} &= \left(\sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |f_i(\omega)|^p \, d\nu(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{p}{q}} \leq \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^{p\left(\frac{q}{p}\right)} \right)^{\frac{p}{q}} d\nu(\omega) \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |f_i(\omega)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\nu(\omega). \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

De (3.37) y (3.38) inferimos que

$$\left(\sum_{i=1}^n ||f_i||_{L_p(\nu)}^q \right)^{\frac{p}{q}} \leq (A_p ||T||)^p.$$

Como n es un entero positivo arbitrario, se sigue que

$$\sum_{i=1}^\infty ||f_i||_{L_p(\nu)}^q \leq (A_p ||T||)^q < +\infty. \qquad \square$$

El Teorema de Orlicz tiene muchas aplicaciones en el contexto de convergencia incondicional en espacios de Banach. Como ejemplo, vamos a demostrar el siguiente Teorema, que da una caracterización de las bases de Riesz como las bases incondicionales de Schauder seminormalizadas de $L_2(\nu)$.

Teorema 3.2.2. *Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida. Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional seminormalizada en $L_2(\nu)$, entonces es equivalente a la base canónica de ℓ_2.*

Demostración. Supongamos primero que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de $L_2(\nu)$. Identificamos $(L_2(\nu))'$ con $L_2(\nu)$ de la manera usual, es decir, asociando a cada funcional ϕ en $(L_2(\nu))'$ una función $f_\phi \in L_2(\nu)$ tal que

$$\phi(g) = \langle f_\phi, g\rangle = \int_\Omega f_\Phi(\omega) g(\omega) d\nu(\omega) \quad \forall g \in L_2(\nu).$$

Si $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones cooordenadas de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i', f\rangle f_i \quad \forall f \in L_2(\nu). \tag{3.39}$$

Sea $M > 0$ tal que

$$M^{-1} \leq \text{máx}\{||f_i||\} \leq M \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{3.40}$$

Dado que la convergencia en (3.39) es incondicional, por el Teorema de Orlicz y la desigualdad (3.40) se deduce que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i', f\rangle|^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i', f\rangle|^2 \frac{||f_i||^2_{L_2(\nu)}}{M^2} = \frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^{\infty} ||\langle f_i', f\rangle f_i||^2_{L_2(\nu)} < +\infty \quad \forall f \in L_2(\nu).$$

Esto muestra que podemos definir un operador lineal $T : L_2(\nu) \to \ell_2$ como

$$T(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i', f\rangle e^{(i)} = (\langle f_i', f\rangle)_{i\in\mathbb{N}} \quad \forall f \in L_2(\nu), \tag{3.41}$$

que resulta continuo por el Principio de Acotación Uniforme. En particular, se sigue que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, $T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$, y por ende, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge.

Para completar la demostración de que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_2, resta mostrar que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge. A tal fin, consideramos la base dada por las funciones coordenadas: Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional seminormalizada de $L_2(\nu)$, las Proposiciones 1.1.5 y 2.2.3 y el Lema 1.1.7 establecen que $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional seminormalizada de $L_2(\nu)$, y que

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, f\rangle f_i' \quad \forall f \in L_2(\nu). \tag{3.42}$$

Por simetría con el caso de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, deducimos que existe un operador lineal continuo $S : L_2(\nu) \to \ell_2$ dado por

$$S(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i, f\rangle e^{(i)} = (\langle f_i, f\rangle)_{i\in\mathbb{N}} \quad \forall f \in L_2(\nu).$$

Se sigue que si $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$ y $n \le m$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_{L_2(\nu)} &= \sup_{g\in B_{L_2(\nu)}} \left\{\left|\sum_{i=n}^{m} a_i \langle f_i, g\rangle\right|\right\} \\
&\le \sup_{g\in B_{L_2(\nu)}} \left\{\left(\sum_{i=n}^{m} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=n}^{m} |\langle f_i, g\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\le \left(\sum_{i=n}^{m} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \sup_{g\in B_{L_2(\nu)}} \left\{\left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i, g\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \\
&\le ||S|| \left(\sum_{i=n}^{m} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

lo que implica que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge. Esto completa la demostración del caso en que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es base de $L_2(\nu)$. Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional seminormalizada, sea $X = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$. Como X es un espacio de Hilbert separable, es isomorfo todo espacio de Hilbert separable. En particular, existe un isomorfismo $T : X \to L_2(\mathbb{R})$, y se sigue por el Lema 1.2.4 que $\{T(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base de $L_2(\mathbb{R})$, equivalente a $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como $\{T(f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ es también equivalente a la base canónica de ℓ_2, concluimos que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_2. □

Como toda base de $L_2(\nu)$ equivalente a la base canónica de ℓ_2 es en particular incondicional y seminormalizada, se sigue por el Teorema 3.2.2 que las bases Riesz son las bases de Schauder incondicionales seminormalizadas de $L_2(\nu)$.
En el Capítulo siguiente, probaremos el Lema 4.2.2, el cual permite dar una demostración más corta del Teorema 3.2.2: si $p = 2$, es inmediato que el operador L del enunciado de dicho Lema es el operador S^* de la demostración del Teorema 3.2.2 recién dada, y por lo tanto, T tiene inverso continuo.

Capítulo 4

Los resultados principales.

En este capítulo, vamos demostrar los resultados centrales de la tesis, que son los Teoremas 4.2.4 y 4.5.5 sobre equivalencia de sucesiones básicas incondicionales de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$ y la base canónica de ℓ_p, sus respectivos Corolarios 4.2.5 y 4.5.6, el Teorema 4.3.7 que dice que no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$ en el caso $p \in (1, 2]$, y el Teorema 4.4.1, que dice que no existen bases de traslaciones de $L_1(\mathbb{R}^d)$.
Todos estos resultados fueron demostrados en [6] y [2] para los espacios $L_p(\mathbb{R})$. Vamos a desarrollar los detalles de las demostraciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, siguiendo en general las demostraciones dadas en los artículos mencionados, con algunas modificaciones.
Un concepto central en todas estas demostraciones es el de traslación de una función, que definimos del siguiente modo:

Definición. *Sean V y W son espacios vectoriales, $f : V \to W$ una función. Una* traslación *de f es una función $f_{(\lambda)} : V \to W$ dada por*

$$f_{(\lambda)}(x) = f(x - \lambda),$$

donde λ es un elemento fijo de V.

Observación. *Notemos que si $\lambda \in \mathbb{R}^d$ y $f_{(\lambda)}$ es una traslación de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, entonces $\left|\left|f_{(\lambda)}\right|\right|_p = ||f||_p$, lo que en particular implica que toda sucesión de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ es seminormalizada.*

En este capítulo, usamos la siguiente notación:

- En el contexto de la definición de traslaciones de una función, llamamos T_λ a la función de V en V dada por la fórmula $T_\lambda(x) = x - \lambda$. Con esta notación, tenemos que $f \circ T_\lambda = f_{(\lambda)}$. Podemos observar que T_λ es en particular una traslación de la identidad de V.

- Notamos una sucesión en $\mathbb{R}^d$ como $\left\{\lambda^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, donde $\lambda^{(i)} = \left(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_d^{(i)}\right)$. Con esta notación, una sucesión de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ se nota $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$.
- Si f es una función en $L_p(\mathbb{R}^d)$ y Λ es un subconjunto de $\mathbb{R}^d$, llamamos $X_p(f,\Lambda)$ a la clausura del subespacio generado por la colección $\left\{f_{(\lambda)}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$, es decir que $X_p(f,\Lambda) = \overline{\left[f_{(\lambda)} : \lambda \in \Lambda\right]}$.

Antes de demostrar los resultados de este capítulo, veamos dos ejemplos de sucesiones básicas de traslaciones, comenzando por un ejemplo sencillo de una sucesión de traslaciones que es básica incondicional en $L_p(\mathbb{R})$ para todo $p \in [1,+\infty)$.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función característica del intervalo $(0,1)$, $\lambda^{(i)} = i-1$ para todo entero positivo i, y $\Lambda = \left\{\lambda^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Con estas definiciones, se tiene que

$$f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x) = \chi_{(0,1))}(x-(i-1)) = \chi_{(i-1,i)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\ \forall i \in \mathbb{N}, \tag{4.1}$$

es decir que $f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}$ es la función característica del intervalo $(i-1,i)$ para cada entero positivo i. Por lo tanto, si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y $p \in [1,+\infty)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^n a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\sum_{i=1}^n a_i \chi_{(i-1,i)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \left|\sum_{i=1}^n a_i \chi_{(i-1,i)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} |a_j|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left\|\sum_{i=1}^n a_i e^{(i)}\right\|_{\ell_p}.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Por el Lema 1.2.4 y (4.2), se infiere que para todo $p \in [1,+\infty)$, la sucesión $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}$ es una sucesión básica equivalente a la base canónica de ℓ_p, lo que en particular implica que es una sucesión básica incondicional. Vamos a probar en la Sección 4.2 que si $p \in [1,2]$ y d es un entero positivo, toda sucesión básica incondicional de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, mientras que si $p \in (2,+\infty)$, probaremos en la Sección 4.5 que esto vale cuando $X_p(f,\Lambda)$ está complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$.
Podemos mencionar también que en el caso particular de la sucesión de traslaciones de nuestro ejemplo, se deduce de (4.2) que existe un isomorfismo isométrico U entre $X_p(f,\Lambda)$ y ℓ_p tal que $U\left(f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right) = e^{(i)}$ para todo entero positivo i. Si $p \in (1,+\infty)$, como $(\ell_p)'$ se identifica con $\ell_{p'}$, estas isometrías permiten identificar naturalmente $(X_p(f,\Lambda))'$ con $X_{p'}(f,\Lambda) \subseteq L_{p'}(\mathbb{R})$, y resulta que la sucesión en $L_{p'}(\mathbb{R})$ que se identifica con las funciones

coordenadas de $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}$ es también $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}$, puesto que si i y j son enteros positivos, se sigue de (4.1) que $f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}f_{\left(\lambda^{(j)}\right)} = \delta_{ij}\chi_{(i-1,i)}$, lo que implica que $\left\langle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}, f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right\rangle = \delta_{ij}$. Si $p = 2$, de la igualdad (4.2) también se infiere que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}$ es un conjunto ortonormal en $L_2(\mathbb{R})$.

El segundo ejemplo que vamos a ver es un ejemplo dado en [6] de una sucesión de traslaciones que es básica no incondicional en $L_1(\mathbb{R})$, y no es básica en $L_p(\mathbb{R})$ para todo $p \in (1, +\infty)$. Posteriormente, en la sección 4.4, demostraremos que para todo entero positivo d, no existe ninguna base de Schauder de $L_1(\mathbb{R}^d)$ consistente en traslaciones de una función.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por la fórmula

$$f(x) = \chi_{(0,1)}(x) - \chi_{(1,2)}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Definimos $\Lambda = \left\{\lambda^{(i)}\right\}$ de la siguiente manera:

$$\lambda^{(2i)} = i \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ y} \tag{4.4}$$

$$\lambda^{(2i-1)} = 1 - i \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

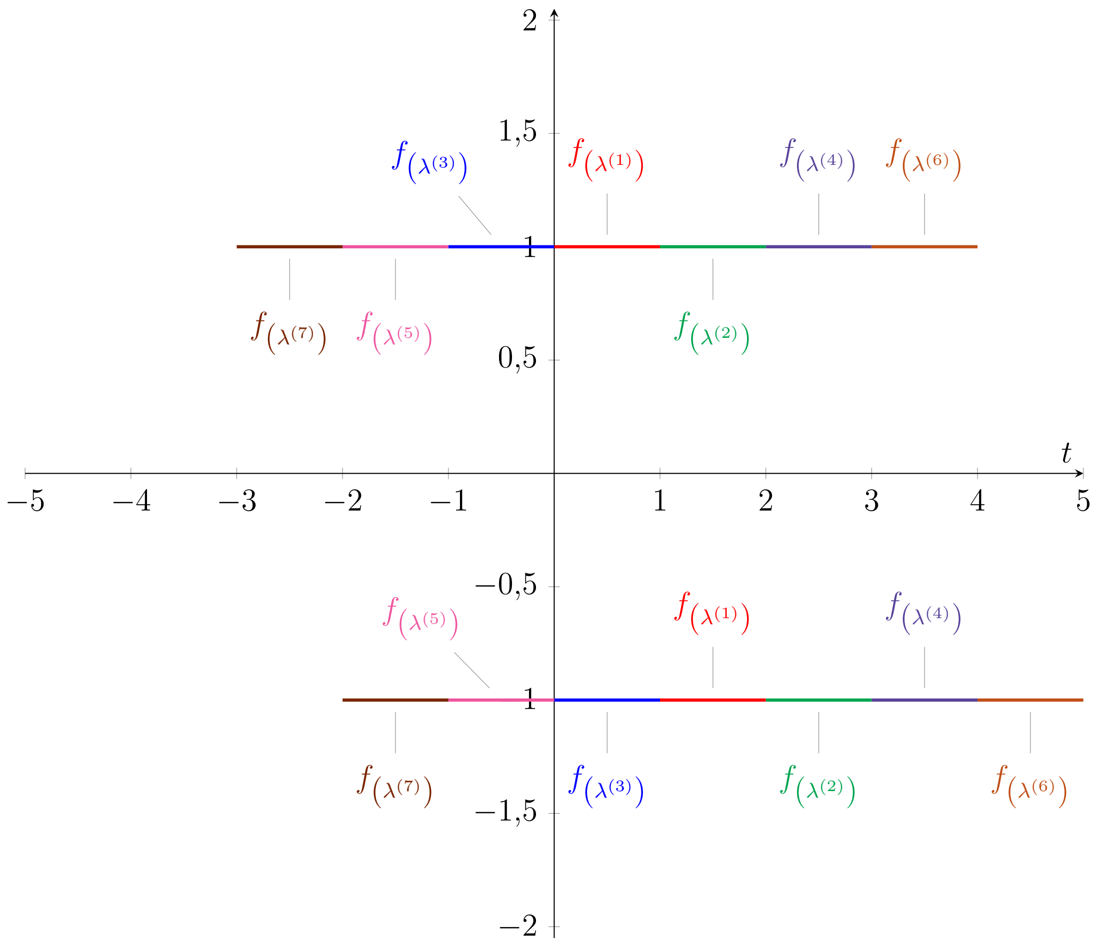
Se sigue de las definiciones que

$$f_{\left(\lambda^{(2i)}\right)} = \chi_{(i,i+1)} - \chi_{(i+1,i+2)} \qquad \forall i \in \mathbb{N}, \text{ y} \tag{4.6}$$

$$f_{\left(\lambda^{(2i-1)}\right)} = \chi_{(1-i,2-i)} - \chi_{(2-i,3-i)} \qquad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Para ver que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica no incondicional en $L_1(\mathbb{R})$ y no es básica en $L_p(\mathbb{R})$ si $p \in (1, +\infty)$, primero vamos a escribir las sumas de las combinaciones lineales de número par y de un número impar de elementos de la sucesión y sus normas de una manera conveniente. Luego vamos a usar esas fórmulas para demostrar que si $p = 1$, entonces existe una constante que cumple con la condición (1.2) del Lema 1.1.2 estableciendo que la sucesión de traslaciones es básica en $L_1(\mathbb{R})$. Como siguiente paso, vamos a elegir dos sucesiones de escalares para poder demostrar por medio del Lema 2.2.2 que la sucesión de traslaciones no es incondicional en $L_1(\mathbb{R})$. Finalmente, eligiendo escalares como se indica en [6], vamos a usar las fórmulas de las normas de las sumas impares para ver que no puede existir una sucesión de funciones coordenadas en $L_p(\mathbb{R})$ si p es mayor que uno, y por lo tanto, en esos espacios la sucesión $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ no es básica.

Antes de comenzar, veamos cómo es el gráfico de la parte no nula de algunas de las traslaciones de f, para darnos una idea más intuitiva de cómo es la sucesión de traslaciones:



Si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares y n es un entero positivo, resulta que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} &= \sum_{i=1}^{n} a_{2i} f_{\left(\lambda^{(2i)}\right)} + \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} f_{\left(\lambda^{(2i-1)}\right)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \left(\chi_{(i,i+1)} - \chi_{(i+1,i+2)}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} \left(\chi_{(1-i,2-i)} - \chi_{(2-i,3-i)}\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n} \left(a_{2i} - a_{2i-2}\right) \chi_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{2i-1} - a_{2i+1}\right) \chi_{(1-i,2-i)} + \left(a_2 - a_1\right) \chi_{(1,2)} + \\
&+ a_{2n-1}\chi_{(1-n,2-n)} - a_{2n}\chi(n+1,n+2).
\end{aligned}$$

Definimos $a_0 = a_1$ para simplificar algo la notación, y escribimos

$$\sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{2i} - a_{2i-2}\right) \chi_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(a_{2i-1} - a_{2i+1}\right) \chi_{(1-i,2-i)} +$$

$$+a_{2n-1}\chi_{(1-n,2-n)} - a_{2n}\chi(n+1,n+2). \tag{4.8}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |a_{2i} - a_{2i-2}|^p + \sum_{i=1}^{n-1} |a_{2i+1} - a_{2i-1}|^p + |a_{2n-1}|^p + |a_{2n}|^p \\ &= \sum_{i=2}^{2n} |a_i - a_{i-2}|^p + |a_{2n-1}|^p + |a_{2n}|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

De manera similar, deducimos de (4.7) y (4.8) que si n es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} &= \sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} + a_{2n+1} f_{\left(\lambda^{(2n+1)}\right)} \\ &= \sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} + a_{2n+1}\chi_{(-n,1-n)} - a_{2n+1}\chi_{(1-n,2-n)} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(a_{2i} - a_{2i-2}\right)\chi_{(i,i+1)} + \sum_{i=1}^{n} \left(a_{2i-1} - a_{2i+1}\right)\chi_{(1-i,2-i)} + \\ &\quad + a_{2n+1}\chi_{(-n,1-n)} - a_{2n}\chi(n+1,n+2). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Luego,

$$\left\|\sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p = \sum_{i=2}^{2n+1} |a_i - a_{i-2}|^p + |a_{2n+1}|^p + |a_{2n}|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.11}$$

Se sigue de (4.9) y (4.11) que

$$\left\|\sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p = \left\|\sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p + |a_{2n+1} - a_{2n-1}|^p + |a_{2n+1}|^p - |a_{2n-1}|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ y} \tag{4.12}$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{2n+2} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p = \left\|\sum_{i=1}^{2n+1} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p + |a_{2n+2} - a_{2n}|^p + |a_{2n+2}|^p - |a_{2n}|^p \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Como $|y-x| + |y| - |x|$ es mayor o igual que cero para todo par de escalares y y x, se infiere de (4.12) y (4.13) que si $p = 1$, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_1 \leq \left\|\sum_{i=1}^{n+1} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_1 \quad \forall n \geq 2. \tag{4.14}$$

Puesto que

$$\begin{aligned}
||a_1 f_{\lambda^{(1)}}||_1 =& \int_{\mathbb{R}} \left| a_1 \left(\chi_{(0,1)}(x) - \chi_{(1,2)}(x) \right) \right| dx = 2|a_1|, \text{ y} \\
||a_1 f_{\lambda^{(1)}} + a_2 f_{\lambda^{(2)}}||_1 =& \int_{\mathbb{R}} \left| a_1 \left(\chi_{(0,1)}(x) - \chi_{(1,2)}(x) \right) + a_2 \left(\chi_{(1,2)}(x) - \chi_{(2,3)}(x) \right) \right| dx \\
=& |a_1| + |a_2| + |a_2 - a_1|,
\end{aligned}$$

se infiere que (4.14) vale también si $n = 1$. Deducimos que para todo par de enteros positivos tales que $n \leq m$, se tiene que

$$\left| \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right| \right|_1 \leq \left| \left| \sum_{i=1}^{m} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right| \right|_1 .$$

Concluimos por el Lema 1.1.2 que $\left\{ f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\}$ es una sucesión básica en $L_1(\mathbb{R})$, y su constante es uno. Para ver que no es incondicional, definimos para cada entero positivo i los siguientes escalares:

$$\begin{aligned}
a_{2i} =& \frac{1}{i}, \qquad (4.15) \\
a_{2i-1} =& 0, \qquad (4.16) \\
b_{4i} =& 1, \text{ y} \qquad (4.17) \\
b_{4i-k} =& 0 \text{ si } k \in \{1, 2, 3\}. \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que tomamos $a_0 = a_1 = 0$ para poder usar las fórmulas para las sumas dadas anteriormente, y puesto que los coeficientes de índice impar son todos nulos, se sigue de (4.8), (4.15) y (4.16) que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} =& \sum_{i=1}^{n} \left(a_{2i} - a_{2i-2} \right) \chi_{(i,i+1)} - a_{2n} \chi_{(n+1,n+2)} \\
=& \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i-1} \right) \chi_{(i,i+1)} + \chi_{(1,2)} - \frac{1}{n} \chi_{(n+1,n+2)} \\
=& - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i(i-1)} \chi_{(i,i+1)} + \chi_{(1,2)} - \frac{1}{n} \chi_{(n+1,n+2)}.
\end{aligned}$$

Deducimos que si $1 < n < m$, entonces

$$\left| \left| \sum_{i=1}^{2n} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - \sum_{i=1}^{2m} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right| \right|_1 = \left| \left| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i(i-1)} \chi_{(i,i+1)} + \frac{1}{m} \chi_{(m+1,m+2)} - \frac{1}{n} \chi_{(n+1,n+2)} \right| \right|_1$$

$$\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i(i-1)} + \frac{2}{n}. \tag{4.19}$$

Como $a_i = 0$ para todo entero positivo impar i, inferimos de (4.19) que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}$ converge, pero como (4.9), (4.17) y (4.18) implican que

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{4n} b_i a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_1 &\geq \sum_{i=1}^{n} |a_{4i}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},\end{aligned}$$

la serie $\sum_{i=1}^{\infty} b_i a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}$ no converge, y por lo tanto el Lema 2.2.2 dice que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}$ no es una sucesión básica incondicional en $L_1(\mathbb{R})$.

Para ver que si $p \in (1, +\infty)$, la sucesión de traslaciones no es básica, tomamos $b_1^{(n)} = 1$ para todo entero positivo n, y para cada par de enteros positivos i y n, definimos

$$b_{2i}^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{i}{n} & \text{si } i < n, \\ 0 & \text{si } n \leq i. \end{cases}$$

$$b_{2i+1}^{(n)} = \begin{cases} 1 - \frac{i}{n} & \text{si } i < n, \\ 0 & \text{si } n \leq i. \end{cases}$$

Con estas definiciones, y teniendo en cuenta que también tomamos $b_0^{(n)} = b_1^{(n)}$ para todo entero positivo n para poder usar las fórmulas para las sumas parciales dadas anteriormente, deducimos por (4.11) que si $n > 2$, entonces

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{2n+1} b_i^{(n)} f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\|_p^p &= \sum_{i=2}^{2n+1} \left|b_i^{(n)} - b_{i-2}^{(n)}\right|^p + \left|b_{2n+1}^{(n)}\right|^p + \left|b_{2n}^{(n)}\right|^p\\ &= \sum_{i=4}^{2n+1} \left|b_i^{(n)} - b_{i-2}^{(n)}\right|^p + \left|b_3^{(n)} - b_1^{(n)}\right|^p + \left|b_2^{(n)} - b_0^{(n)}\right|^p\\ &= \sum_{i=4}^{2n+1} \left|b_i^{(n)} - b_{i-2}^{(n)}\right|^p + \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right|^p + \left|1 - \frac{1}{n} - 1\right|^p\\ &= \sum_{i=4}^{2n+1} \left|b_i^{(n)} - b_{i-2}^{(n)}\right|^p + \frac{2}{n^p}\\ &= \sum_{i=2}^{n} \left|b_{2i+1}^{(n)} - b_{2i-1}^{(n)}\right|^p + \sum_{i=1}^{n-1} \left|b_{2i+2}^{(n)} - b_{2i}^{(n)}\right|^p + \frac{2}{n^p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=2}^{n-1} \left| b_{2i+1}^{(n)} - b_{2i-1}^{(n)} \right|^p + \left| b_{2n-1}^{n} \right|^p + \sum_{i=1}^{n-2} \left| b_{2i+2}^{(n)} - b_{2i}^{(n)} \right|^p + \left| b_{2n-2}^{n} \right|^p + \frac{2}{n^p} \\
&= \sum_{i=2}^{n-1} \left| b_{2i+1}^{(n)} - b_{2i-1}^{(n)} \right|^p + \sum_{i=1}^{n-2} \left| b_{2i+2}^{(n)} - b_{2i}^{(n)} \right|^p + \frac{4}{n^p} \\
&= \sum_{i=2}^{n-1} \left| 1 - \frac{i}{n} - 1 + \frac{i-1}{n} \right|^p + \sum_{i=1}^{n-2} \left| 1 - \frac{i+1}{n} - 1 + \frac{i}{n} \right|^p + \frac{4}{n^p} \\
&= \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n^p} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{1}{n^p} + \frac{4}{n^p} = \frac{2n}{n^p} \\
&= \frac{2}{n^{p-1}}.
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

Dado que $b_1^{(n)} = 1$ para todo entero positivo n, se sigue de (4.20) que

$$
\lim_{n \to +\infty} \left\| f_{\left(\lambda^{(1)}\right)} + \sum_{i=2}^{2n+1} b_i^{(n)} f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\|_p = 0.
$$

Por lo tanto, no existe una función $f_1' \in (X_p(f, \Lambda))'$ tal que $f_1' \left(f_{\left(\lambda^{(j)}\right)} \right) = \delta_{1j}$ para todo entero positivo j, lo que implica que si $p > 1$, la sucesión $\left\{ f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\}$ no es básica en $L_p(\mathbb{R})$, puesto que no puede haber una sucesión de funciones coordenadas continuas.

Resultados generales.

En esta sección, vamos a probar primero dos Proposiciones generales sobre sucesiones de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, válidas para todo $p \in [1, +\infty)$. Usaremos la segunda de ellas en la sección siguiente, cuando demostremos el Teorema 4.2.4.
También vamos a demostrar en esta sección un Corolario de esas Proposiciones, que usaremos luego en las demostraciones del Teorema 4.3.7 y la Proposición 4.3.5 en la sección 4.3.
Para las demostraciones de esta sección, necesitamos el concepto de conjunto *uniformemente discreto*, que vamos a definir a continuación.

Definición 4.1.1. *Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un conjunto $\Lambda \subseteq E$ es* uniformemente discreto *si existe un número real $\delta > 0$ tal que para todo par $(\lambda, \lambda') \in \Lambda \times \Lambda$ tales que $\lambda \neq \lambda'$, se tiene que $d(\lambda, \lambda') \geq \delta$.*

En esta tesis, nos interesan los subconjuntos uniformemente discretos de $\mathbb{R}^d$, con la métrica inducida por la norma euclídea. Notemos que en tal contexto, todo conjunto uniformemente discreto es contable.

Proposición 4.1.2. *Sea* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ *un conjunto uniformemente discreto, y* f *una función en* $L_p(\mathbb{R}^d)$*. Para todo cubo* $Q \subseteq \mathbb{R}^d$*, la suma* $\sum_{\lambda\in\Lambda} ||f_{(\lambda)}\big|_Q||_p^p$ *es finita.*

Demostración. Sea $\delta = \inf_{\substack{(\lambda,\lambda')\in\Lambda\times\Lambda \\ \lambda\neq\lambda'}} \{|\lambda-\lambda'|\}$.
Supongamos primero que Q es un cubo cuyo diámetro es menor que δ.
Si λ y λ' son elementos de Λ y existen x, $x' \in Q$ tales que $x-\lambda = x'-\lambda'$, se sigue que $|\lambda-\lambda'| = |x-x'| < \delta$, lo que implica que $\lambda = \lambda'$.
Por lo tanto, siempre que $\lambda \neq \lambda'$, los cubos trasladados $Q-\lambda$ y $Q-\lambda'$ son disjuntos.
Dado que la función T_λ es un difeomorfismo cuyo determinante jacobiano es uno, se sigue que

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda} ||f_{(\lambda)}\big|_Q||_p^p =& \sum_{\lambda\in\Lambda}\int_Q |f(x-\lambda)|^p dx = \sum_{\lambda\in\Lambda}\int_Q |f(T_\lambda(x))|^p dx \\ =& \sum_{\lambda\in\Lambda}\int_{T_\lambda(Q)} |f(x)|^p dx = \sum_{\lambda\in\Lambda}\int_{Q-\lambda} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \\ \leq& ||f||_p^p. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Esto prueba el resultado en el caso en que el diámetro de Q es menor que δ.
Dado un cubo cualquiera Q de lado x_0, sea k_0 el menor entero positivo mayor que $2d\delta^{-1}$, k_1 el menor entero positivo mayor x_0, y J el conjunto $\{1,\ldots,(k_0k_1)^d\}$.
Elegimos un cubo Q' de lado k_1 que contiene a Q. Podemos escribir Q' como una unión disjunta de una colección finita de cubos $\{Q_j\}_{j\in J}$ tales que para todo $j \in J$, el lado de Q_j tiene longitud k_0^{-1}.
Dado que el diámetro de Q_j es menor que δ para todo $j \in J$, se sigue de (4.21) que

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\left|f_{(\lambda)}\big|_Q\right|\right|_p^p \leq& \sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\left|f_{(\lambda)}\big|_{Q'}\right|\right|_p^p = \sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\left|f_{(\lambda)}\big|_{\bigsqcup_{j\in J} Q_j}\right|\right|_p^p = \sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{j\in J} \left|\left|f_{(\lambda)}\big|_{Q_j}\right|\right|_p^p \\ =& \sum_{j\in J}\sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\left|f_{(\lambda)}\big|_{Q_j}\right|\right|_p^p \leq \sum_{j\in J} ||f||_p^p = \#(J)\, ||f||_p^p = (k_0k_1)^d ||f||_p^p \\ \leq& ((1+2d\delta^{-1})(1+l(Q))^d ||f||_p^p < +\infty. \end{aligned}$$

□

Proposición 4.1.3. *Sea* $\left\{\lambda^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathbb{R}^d$*. Si existe una función* $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ *tal que la sucesión* $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es básica, el conjunto* $\Lambda = \{\lambda^{(i)} : i \in \mathbb{N}\}$ *es uniformemente discreto.*

Demostración. Como $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de traslaciones, es seminormalizada. Por la Proposición 1.1.5, la sucesión de funciones coordenadas $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ también es

seminormalizada, y por lo tanto existe una constante $c>0$ tales que $c^{-1} \leq ||f_i'|| \leq c$ para todo entero positivo i.
Puesto que $f_i'\left(f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right) = \delta_{ij}$ para todo par $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, se sigue que si $i \neq j$, entonces

$$\left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p \geq \frac{||f_i'||}{c}\left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p \geq \left|\frac{f_i'}{c}\left(f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right)\right| = \frac{1}{c}. \quad (4.22)$$

Dado que las combinaciones lineales de funciones características de cubos diádicos son densas en $L_p(\mathbb{R}^d)$, existe un entero positivo n_0, escalares $\{a_k\}_{1\leq k\leq n_0}$, y cubos diádicos $\{Q_k\}_{1\leq k\leq n_0}$ tales que

$$\left|\left|\sum_{i=k}^{n_0} a_k\chi_{Q_k} - f\right|\right|_p \leq \frac{1}{4c}. \quad (4.23)$$

Sea $g = \sum\limits_{k=1}^{n_0} a_k\chi_{Q_k}$. Se sigue de (4.23) que para todo entero positivo i, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right|\right|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(x-\lambda^{(i)}\right) - g\left(x-\lambda^{(i)}\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(x\right) - g\left(x\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = ||f-g||_p \\ &\leq \frac{1}{4c}. \quad (4.24)\end{aligned}$$

Se infiere de (4.22) y (4.24) que si i y j son enteros positivos tales que $i \neq j$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} &\leq \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p = \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} + g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)} + g_{\left(\lambda^{(j)}\right)} - f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p \\ &\leq \left|\left|g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p + \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right|\right|_p + \left|\left|f_{\left(\lambda^{(j)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p \\ &\leq \left|\left|g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p + \frac{1}{4c} + \frac{1}{4c} \\ &= \left|\left|g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p + \frac{1}{2c}. \quad (4.25)\end{aligned}$$

Deducimos de (4.25) que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2c} &\leq \left|\left|g_{\left(\lambda^{(i)}\right)} - g_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right|\right|_p = \left|\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(i)}} - \sum_{k=1}^{n_0} a_k\chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(j)}}\right|\right|_p \\ &= \left|\left|\sum_{k=1}^{n_0} a_k\left(\chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(i)}} - \chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(j)}}\right)\right|\right|_p \leq \sum_{k=1}^{n_0}|a_k|\,||\chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(i)}} - \chi_{Q_k}\circ T_{\lambda^{(j)}}||_p\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \chi_{Q_k} \left(x - \lambda^{(i)} \right) - \chi_{Q_k} \left(x - \lambda^{(j)} \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| \chi_{Q_k} (x) - \chi_{Q_k} \left(x + \lambda^{(i)} - \lambda^{(j)} \right) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{n_0} |a_k| \left(\mu \left(Q_k \setminus \left(Q_k + \lambda^{(j)} - \lambda^{(i)} \right) \right) + \mu \left(\left(Q_k + \lambda^{(j)} - \lambda^{(i)} \right) \setminus Q_k \right) \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

Si hubiera una sucesión de pares $(i_m, j_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tales que $|\lambda^{(i_m)} - \lambda^{(j_m)}|$ tendiese a cero cuando m tiende a infinito, entonces para cada $1 \leq k \leq n_0$, las medidas de los conjuntos $\left(Q_k + \lambda^{(j_m)} - \lambda^{(i_m)}\right) \setminus Q_k$ y $Q_k \setminus \left(Q_k + \lambda^{(j_m)} - \lambda^{(i_m)}\right)$ también tenderían a cero, contradiciendo la desigualdad (4.26). Por ende, no hay tal sucesión, lo que implica que existe $\delta > 0$ tal que para todo par $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con $i \neq j$, se tiene que

$$\left|\lambda^{(j)} - \lambda^{(i)}\right| \geq \delta.$$

Concluimos que Λ es un conjunto uniformemente discreto. □

De las Proposiciones 4.1.2 y 4.1.3 se sigue inmediatamente el siguiente corolario:

Corolario 4.1.4. *Sea $\{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^d$, y $\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$. Para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, la suma $\sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\left| f_{(\lambda)}\big|_Q \right|\right|_p^p$ es finita.*

Sucesiones incondicionales de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in [1, 2]$.

En esta sección, vamos a demostrar que si $p \in [1, 2]$, toda sucesión básica incondicional de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. Notemos que dado que toda sucesión de traslaciones es en particular seminormalizada, en el caso $p = 2$ la equivalencia vale por el Teorema 3.2.2.
Las demostraciones que vamos a dar siguen en general las dadas en [6, 2], con algunas modificaciones, y desarrollándolas con más detalle. En la demostración del siguiente Lema, seguimos casi enteramente la demostración dada en [3] de un resultado similar.

Lema 4.2.1. *Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional en $L_p(\nu)$. Supongamos que existe un número positivo ϵ_0 y una sucesión de subconjuntos de Ω medibles y disjuntos dos a dos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que cumplen que para todo $i \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\left(\int_{A_i} |f_i(\omega)|^p d\nu(\omega) \right)^{\frac{1}{p}} \geq \epsilon_0.$$

Entonces, existe un operador lineal continuo $T : \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]} \to \ell_p$ *dado por la fórmula*

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i\right) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}\,. \tag{4.27}$$

En particular, si $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de escalares y* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ *converge, entonces* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ *converge.*

Demostración. Si $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones de Rademacher, definimos una función $r : [0,1] \to \ell_\infty$ por medio de la fórmula

$$r(t) = (r_i(t))_{i\in\mathbb{N}} \quad \forall t \in [0,1].$$

Sea K_0 la constante incondicional de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (Lema 2.2.2). Como $||r(t)||_{\ell_\infty} \leq 1$ para todo $t \in [0,1]$, se sigue que

$$\left|\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p \leq K_0^p ||r(t)||_{\ell_\infty}^p \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu))}^p \leq K_0^p \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu))}^p .$$

Integrando, obtenemos

$$\int_0^1 \left|\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt \leq \int_0^1 K_0^p \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt = K_0^p \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p .$$

Por el Teorema de Fubini, se sigue que

$$\begin{aligned}
K_0^p \left|\left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p &\geq \int_0^1 \left|\left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i(\omega)\right|^p d\nu(\omega)\right) dt \\
&= \int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i(\omega)\right|^p dt\right) d\nu(\omega) \\
&\geq \int_{\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) a_i f_i(\omega)\right|^p dt\right) d\nu(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) r_i(t)\right|^p dt\right) d\nu(\omega)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) r_i \right|\right|_{L_p[0,1]}^{p} d\nu(\omega).$$

Teniendo en cuenta que de acuerdo con el Corolario 3.1.4, $||r_i||_{L_{p'}[0,1]} = 1$ para todo entero positivo i, y que el Lema 3.1.7 dice que $\langle r_i, r_j \rangle_{[0,1]} = \delta_{ij}$ para todo par de enteros positivos i y j, tenemos que

$$\begin{aligned}
K_0^p \left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right|\right|_{L_p(\nu)}^{p} &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left(\left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) r_i \right|\right|_{L_p[0,1]} ||r_j||_{L_{p'}[0,1]} \right)^p d\nu(\omega) \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left| \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) r_i(t) r_j(t) dt \right|^p d\nu(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt \right|^p d\nu(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(\omega) \delta_{ij} \right|^p d\nu(\omega) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{A_j} |a_j f_j(\omega)|^p \, d\nu(\omega) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \int_{A_i} |f_i(\omega)|^p \, d\nu(\omega) \\
&\geq {\epsilon_0}^p \sum_{i=1}^{n} |a_i|^p. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Se deduce de (4.28) que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{K_0}{\epsilon_0} \right) \left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \right|\right|_{L_p(\nu)}. \qquad (4.29)$$

Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, tomando límite en (4.29) concluimos que

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{K_0}{\epsilon_0} \right) ||f||_{L_p(\nu)}.$$

Dado que para toda $f \in \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$, existe una única sucesión de escalares $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $f = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$, se sigue que el operador lineal T del enunciado está bien definido y es continuo. En particular, esto implica que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ converge. $\square$

Si bien solo vamos a usar el resultado del Lema 4.2.1 para el caso en que $p \in [1,2]$, $\Omega = \mathbb{R}^d$, la medida es la medida de Lebesgue, y la sucesión básica es seminormalizada, asumir eso no simplificaría la demostración.
Podemos observar que para el caso en que $p \in [2,+\infty)$, un resultado más general es cierto:
Si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional acotada inferiormente en $L_p(\nu)$, entonces existe un operador lineal continuo $T : \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]} :\to \ell_p$ dado por la fórmula (4.27).
Esto es así porque como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional en $L_p(\nu)$, si $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, entonces converge incondicionalmente, lo que implica por el Teorema de Orlicz (Teorema 3.2.1) que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} ||a_i f_i||_{L_p(\nu)}^p$ converge. Por ende, si K es una constante positiva tal que $K \leq ||f_i||_{L_p(\nu)}$ para todo entero positivo i, entonces

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \, ||f_i||_{L_p(\nu)}^p \, K^{-p} = K^{-p} \sum_{i=1}^{\infty} ||a_i f_i||_{L_p(\nu)}^p < +\infty.$$

Un argumento de acotación uniforme permite completar la demostración.
El siguiente Lema es un recíproco parcial del Lema 4.2.1, y lo usaremos después para demostrar el Lema 4.2.3. Asimismo, puede usarse para demostrar el Teorema 3.2.2, como explicamos en el capítulo anterior.

Lema 4.2.2. *Sea (Ω, Σ, ν) un espacio de medida, $p \in [1,2]$, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional acotada superiormente en $L_p(\nu)$. Entonces, existe un operador lineal continuo $L : \ell_p :\to L_p(\nu)$ dado por la fórmula*

$$L(a) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \quad \forall a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_p.$$

Demostración. Sea K_0 la constante incondicional de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ (Lema 2.2.2), y $M_0 > 0$ tal que

$$||f_i||_{L_p(\nu)} \leq M_0 \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.30}$$

Si $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de funciones de Rademacher, definimos $r : [0,1] \to \ell_\infty$ por medio de la fórmula

$$r(t) = (r_i(t))_{i\in\mathbb{N}}.$$

Sean n y m enteros positivos tales que $n \leq m$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares.
Dado $t \in [0,1]$, definimos $c_i = r_i(t)$ y $b_i = r_i(t)a_i$ para cada $n \leq i \leq m$, y $c_i = b_i = 0$ si

$i < n$ o $i > m$.
Si $c = (c_i)_{i\in\mathbb{N}}$, resulta que $||c||_{\ell_\infty} \leq ||r(t)||_{\ell_\infty} \leq 1$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p &= \left|\left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t)^2 a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p = \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} c_i b_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p \leq K_0^p \left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} b_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p ||c||_{\ell_\infty}\\ &\leq K_0^p \left|\left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p.\end{aligned}$$

Integrando, obtenemos

$$\int_0^1 \left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt \leq K_0^p \int_0^1 \left|\left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt.$$

Por lo tanto,

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p \leq K_0^p \int_0^1 \left|\left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt.$$

Por aplicación del Teorema de Fubini, se sigue que

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p &\leq K_0^p \int_0^1 \left|\left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t) a_i f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}^p dt\\ &= K_0^p \int_0^1 \left(\int_\Omega \left|\sum_{i=n}^{m} r_i(t) a_i f_i(\omega)\right|^p d\nu(\omega)\right) dt\\ &= K_0^p \int_\Omega \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=n}^{m} a_i f_i(\omega) r_i(t)\right|^p dt\right) d\nu(\omega)\\ &= K_0^p \int_\Omega \left|\left|\sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i\right|\right|_{L_p[0,1]}^p d\nu(\omega).\end{aligned} \tag{4.31}$$

Sea $q = \frac{2}{p}$. Dado que que la sucesión de funciones de Rademacher es un conjunto ortonormal en $L_2[0,1]$ (Corolario 3.1.8) y $q \geq 1$, aplicando la Desigualdad de Hölder obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\left|\sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i\right|\right|_{L_p[0,1]}^p &= \int_0^1 \left|\sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i(t)\right|^p dt\\ &\leq \left(\int_0^1 \left(\left|\sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i(t)\right|^p\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} ||1||_{L_{q'}[0,1]}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i(t) \right|^{pq} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega)) r_i(t) \right|^{2} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\left|\left| \sum_{i=n}^{m} (a_i f_i(\omega))\, r_i \right|\right|^{2}_{L_2[0,1]} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \left(\sum_{i=n}^{m} |a_i|^2 |f_i(\omega)|^2 \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=n}^{m} |a_i|^{\frac{2}{q}} |f_i(\omega)|^{\frac{2}{q}} \\
&= \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p |f_i(\omega)|^p \quad \forall \omega \in \Omega.
\end{aligned} \tag{4.32}
$$

De (4.30), (4.31) y (4.32) deducimos que

$$
\begin{aligned}
\left|\left| \sum_{i=n}^{m} a_i f_i \right|\right|^{p}_{L_p(\nu)} &\leq K_0^p \int_\Omega \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p |f_i(\omega)|^p d\nu(\omega) = K_0^p \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p \int_\Omega |f_i(\omega)|^p d\nu(\omega) \\
&= K_0^p \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p ||f_i||^p_{L_p(\nu)} \leq K_0^p \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p M_0^p \\
&= (K_0 M_0)^p \sum_{i=n}^{m} |a_i|^p.
\end{aligned} \tag{4.33}
$$

Dado que n y m son enteros positivos cualesquiera tales que $n \leq m$, y $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión arbitraria de escalares, deducimos de (4.33) que si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < +\infty$, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge, por lo que el operador L del enunciado está bien definido. Si elegimos $n = 1$ en (4.33) y hacemos que m tienda a infinito, obtenemos

$$
\begin{aligned}
||L\left((a_i)_{i\in\mathbb{N}}\right)||^p_{L_p(\nu)} = \left|\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i \right|\right|^{p}_{L_p(\nu)} &= \lim_{m\to+\infty} \left|\left| \sum_{i=1}^{m} a_i f_i \right|\right|^{p}_{L_p(\nu)} \leq \lim_{m\to+\infty} (K_0 M_0)^p \sum_{i=1}^{m} |a_i|^p \\
&= (K_0 M_0)^p \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p.
\end{aligned}
$$

Se sigue que L es continuo, y $||L|| \leq K_0 M_0$. □

Combinando los Lemas 4.2.1 y 4.2.2, obtenemos el siguiente resultado:

Lema 4.2.3. *Sea $p \in [1,2]$, (Ω, Σ, ν) un espacio de medida, y $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional acotada superiormente en $L_p(\nu)$.*
Si existe $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de Ω medibles y disjuntos dos a dos que cumplen que para todo entero positivo i, se tiene que

$$\left(\int_{A_i} |f_i(\omega)|^p d\nu(\omega)\right)^{\frac{1}{p}} \geq \epsilon_0,$$

entonces la sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Demostración. Supongamos que $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ converge. Dado que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es acotada superiormente, el Lema 4.2.2 dice que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en $L_p(\nu)$.
Recíprocamente, si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en $L_p(\nu)$, por el Lema 4.2.1 concluimos que la serie $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ converge. Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ converge si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en $L_p(\nu)$.
Dado que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_p si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p$ converge, concluimos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_p si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en $L_p(\nu)$. Esto implica que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. $\square$

Seguidamente, vamos a probar los dos resultados principales de esta sección:

Teorema 4.2.4. *[6, 2] Sea $p \in [1,2]$, f una función en $L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de f. Entonces $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.*

Demostración. Como $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de traslaciones, es seminormalizada, y en particular es acotada superiormente. Luego, por el Lema 4.2.3, para demostrar que es equivalente a la base canónica de ℓ_p, es suficiente demostrar que existen $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión de cubos disjuntos dos a dos $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ que cumplen que

$$\left(\int_{Q_i} \left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \epsilon_0 \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Dado que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica de traslaciones, por la Proposición 4.1.3 existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo par $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$, si $i \neq j$ entonces

$$|\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}| \geq 2d\delta_0. \tag{4.34}$$

Puesto que existe un cubrimiento numerable de $\mathbb{R}^d$ que consiste en cubos cuyo lado tiene longitud menor que δ_0, y como f es no nula, se sigue que existen $\epsilon_0 > 0$ y un cubo Q de lado menor que δ_0 tales que

$$\left(\int_Q |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \geq \epsilon_0. \tag{4.35}$$

Para cada entero positivo i, consideremos la traslación $T_{\lambda^{(i)}}$, y el cubo $Q_i = T^{-1}_{\lambda^{(i)}}(Q) = Q + \lambda^{(i)}$.
Dado que la medida de Lebesgue es invariante por traslaciones, de (4.35) deducimos que

$$\left(\int_{Q_i} \left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{T^{-1}_{\lambda^{(i)}}(Q)} |f\left(T_{\lambda^{(i)}}(x)\right)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_Q |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geq \epsilon_0.$$

Resta ver que los cubos $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos. Supongamos que $x \in Q_i \cap Q_j$. Entonces existen elementos de Q, digamos q y q', tales que

$$x = q + \lambda^{(i)} = q' + \lambda^{(j)}. \tag{4.36}$$

Dado que $l(Q) < \delta_0$, se sigue de (4.36) que

$$\delta_0 d > l(Q)d \geq |q' - q| = |\lambda^{(i)} - \lambda^{(j)}|. \tag{4.37}$$

Las desigualdades (4.34) y (4.37) implican que $i = j$. Por lo tanto, los cubos $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, lo que completa la demostración. $\square$

Corolario 4.2.5. *Si $p \in [1, 2)$, no existe una base incondicional de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Sea $p \in [1, 2)$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por el Teorema 4.2.4, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, lo que implica que $X_p(f, \Lambda)$ es isomorfo a ℓ_p. Se sigue por el Lema 3.1.17 que $X_p(f, \Lambda) \neq L_p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Dado que $L_2(\mathbb{R}^d)$ es isomorfo a ℓ_2, para demostrar que no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_2(\mathbb{R}^d)$, en la sección siguiente vamos a utilizar una estrategia diferente. Esta estrategia también nos da una demostración alternativa de que no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$ en el caso $p \in (1, 2)$, que no usa que si $p \neq 2$, ℓ_p no es isomorfo a $L_p(\mathbb{R}^d)$, y además permite demostrar que no hay bases de traslaciones de $L_1(\mathbb{R}^d)$, lo que haremos en la Sección 4.4.

No existencia de bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in (1, 2]$.

En esta sección, veremos que no hay bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$ si $p \in [1, 2]$, extendiendo el resultado del Corolario 4.2.5 al caso $p = 2$. Primero vamos a demostrar una Proposición auxiliar, que usaremos luego para probar que el operador restricción - que definiremos seguidamente - es compacto cuando su dominio es un subespacio de $L_p(\mathbb{R}^d)$ que tiene una base incondicional de traslaciones si $p \in (1, 2]$. Esta Proposición también la usaremos en la sección siguiente.

Proposición 4.3.1. *Sea $p \in [1, +\infty)$, (Ω, Σ, ν) un espacio de medida, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de un subespacio X de $L_p(\nu)$, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas, y A un subconjunto medible de Ω tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo m_0 que cumple la siguiente condición:*

$$\left|\left|\sum_{i=m_0}^{m} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \leq \epsilon ||f||_{L_p(\nu)} \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall f \in X.$$

Entonces, el operador restricción $R_A : X \to L_p(\nu)$ dado por la fórmula $R_A(f) = f\big|_A$ es compacto.

Demostración. Para cada entero positivo n, sea $T_n : X \to L_p(\nu)$ el operador dado por la fórmula

$$T_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(f) f_i\big|_A. \tag{4.38}$$

Veamos que la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy: Dado $\epsilon > 0$, sea m_0 tal que

$$\left|\left|\sum_{i=m_0}^{m} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \leq \frac{\epsilon}{2} ||f||_{L_p(\nu)} \quad \forall m \geq m_0 \quad \forall f \in X.$$

Se deduce que si n y m son enteros positivos tales que $m_0 \leq n < m$, y $f \in B_X$, entonces

$$\begin{aligned}
||(T_n - T_m)(f)||_{L_p(\nu)} &= \left|\left|\sum_{i=1}^{m} f_i'(f) f_i\big|_A - \sum_{i=1}^{n} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \\
&= \left|\left|\sum_{i=m_0}^{m} f_i'(f) f_i\big|_A - \sum_{i=m_0}^{n} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \\
&\leq \left|\left|\sum_{i=m_0}^{m} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} + \left|\left|\sum_{i=m_0}^{n} f_i'(f) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

$=\epsilon.$

Como esto vale para toda $f \in B_X$, se sigue que $||T_n - T_m|| \leq \epsilon$, lo que demuestra que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Concluimos que existe un operador T tal que $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a T en norma.
Veamos que $T = R_A$: Si $g \in X$, tomando límite en (4.38) resulta que

$$T(g) = \lim_{n\to\infty} T_n(g) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i'(g) f_i\big|_A. \tag{4.39}$$

Como $g = \sum_{i=1}^{n} f_i'(g) f_i$ y

$$\begin{aligned} \left|\left|g\big|_A - T_n(g)\right|\right|_{L_p(\nu)} &= \left|\left|g\big|_A - \sum_{i=1}^{n} f_i'(g) f_i\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} = \left|\left|\left(g - \sum_{i=1}^{n} f_i'(g) f_i\right)\big|_A\right|\right|_{L_p(\nu)} \\ &\leq \left|\left|g - \sum_{i=1}^{n} f_i'(g) f_i\right|\right|_{L_p(\nu)}, \end{aligned}$$

concluimos que

$$g\big|_A = \lim_{n\to\infty} T_n(g) \quad \forall g \in X. \tag{4.40}$$

Se deduce de (4.39) y (4.40) que $T(g) = g\big|_A$, por lo que $T = R\big|_A$.
Como T_n es de rango finito para todo entero positivo n y la sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende en norma a R_A, concluimos que R_A es compacto. □

Como siguiente paso, vamos a ver que en los subespacios de $L_p(\mathbb{R}^d)$ invariantes por restricciones, el operador restricción definido en la Proposición 4.3.1 no es compacto cuando no es nulo.

Proposición 4.3.2. *Sea X es un subespacio de $L_p(\mathbb{R}^d)$ con $p \in [1, +\infty)$ tal que para toda función $f \in X$ y para todo conjunto medible $A \subset \mathbb{R}^d$, la restricción $f\big|_A$ es un elemento de X.*
Entonces, si A es un conjunto medible y existe $f \in X$ tal que $\left|\left|f\big|_A\right|\right|_p > 0$, el operador restricción $R_A : X \to L_p(\mathbb{R}^d)$ dado por la fórmula $R_A(f) = f\big|_A$ no es compacto.

Demostración. Si $f \in X$ y $\left|\left|f\big|_A\right|\right|_p > 0$, existe un conjunto medible $B \subseteq A$ de medida finita no nula y un número $\epsilon > 0$ que para todo $x \in B$, $|f(x)| \geq \epsilon$.
Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una partición de B en numerables conjuntos de medida no nula.
Para cada entero positivo n, dado que $f \in X$, se sigue de la hipótesis del enunciado que

$f\big|_{B_n} \in X$. Como $B_n \subseteq B$, se tiene que $|f(x)| \geq \epsilon > 0$ para todo $x \in B_n$, y puesto que B_n tiene medida no nula, podemos definir la función

$$f_n = \frac{f\big|_{B_n}}{\left|\left|f\big|_{B_n}\right|\right|_p}.$$

Dado que $B_n \subseteq A$, se tiene que $R_A(f_n) = f_n$.
La sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene una subsucesión convergente en $L_p(\mathbb{R}^d)$, puesto que si $n \neq m$, entonces

$$\begin{aligned}
||f_n - f_m||_p^p =& \int_{B_n \sqcup B_m} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \\
=& \int_{B_n} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx + \int_{B_m} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \\
=& \int_{B_n} |f_n(x)|^p dx + \int_{B_m} |f_m(x)|^p dx = ||f_n||_p^p + ||f_m||_p^p \\
=& 2.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que R_A no es un operador compacto. □

El siguiente corolario se sigue inmediatamente:

Corolario 4.3.3. *Si $p \in [1, +\infty)$ y $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto medible de medida no nula, el operador $R_A : L_p(\mathbb{R}^d) \to L_p(\mathbb{R}^d)$ definido en la Proposición 4.3.2 no es compacto.*

Demostración. Tomamos $f = \chi_A$, $X = L_p(\mathbb{R}^d)$, y aplicamos la Proposición 4.3.2. □

Ahora vamos a enfocarnos en el caso $p \in (1, 2]$, y a usar los resultados dados previamente en la sección para demostrar que no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$.

Observación 4.3.4. *Sea $p \in (1, 2]$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Existe un operador lineal continuo $S : X_p(f, \Lambda) \to \ell_{p'}$ dado por la fórmula:*

$$S\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Demostración. Dado que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una base incondicional de $X_p(f, \Lambda) \subseteq L_p(\mathbb{R}^d)$ y $p \in (1, 2]$, el Teorema 4.2.4 establece que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. Esto implica en particular que hay un operador lineal continuo $\widetilde{S} : X_p(f,\Lambda) \to \ell_p$ dado por la fórmula

$$\widetilde{S}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right) = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Como la inclusión $J : \ell_p \to \ell_{p'}$ es continua, se sigue que $J \circ \widetilde{S} : X_p(f,\Lambda) \to \ell_{p'}$ es un operador lineal continuo, y es inmediato que $S = J \circ \widetilde{S}$. □

Proposición 4.3.5. *Sea $p \in (1,2]$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.*
Si Q es un cubo de $\mathbb{R}^d$, para todo $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m} \langle f_i', g\rangle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p \le \epsilon ||g||_p \quad \forall m \ge n \quad \forall g \in X_p(f,\Lambda).$$

Demostración. Si $S : X_p(f,\Lambda) \to \ell_{p'}$ es el operador lineal continuo definido en la Observación 4.3.4, se tiene que

$$S\left(\sum_{i=1}^{\infty} \langle f_i', g\rangle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right) = (\langle f_i', g\rangle)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Dado que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional de traslaciones de f, por el Corolario 4.1.4 existe un entero positivo n_0 tal que

$$\left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\epsilon}{1+||S||}.$$

Por lo tanto, si m es un entero positivo mayor o igual que n_0, y g es un elemento de $X_p(f,\Lambda)$, entonces

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n_0}^{m} \langle f_i', g\rangle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p &\le \sum_{i=n_0}^{m} |\langle f_i', g\rangle| \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p \le \sum_{i=n_0}^{\infty} |\langle f_i', g\rangle| \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p \\
&\le \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} |\langle f_i', g\rangle|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f_i', g\rangle|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{i=n_0}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$=||S(g)||_{\ell_{p'}}\left(\sum_{i=n_0}^{\infty}\left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\Big|_Q\right|\right|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq ||g||_p||S||\left(\frac{\epsilon}{1+||S||}\right)$$
$$\leq \epsilon||g||_p. \qquad \square$$

Corolario 4.3.6. *Sea $p \in (1,2]$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$.*
Si Q es un cubo de $\mathbb{R}^d$, el operador restricción $R_Q : X_p(f,\Lambda) :\to L_p(\mathbb{R}^d)$ dado por la fórmula $R_Q(f) = f\big|_Q$ es un operador compacto.

Demostración. Sea $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ la sucesión de funciones coordenadas, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por la Proposición 4.3.5, para todo $\epsilon > 0$ existe un entero positivo n tal que

$$\left|\left|\sum_{i=n}^{m}\langle f_i', g\rangle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\Big|_Q\right|\right|_p \leq \epsilon||g||_p \quad \forall m \geq n \quad \forall g \in X_p(f,\Lambda).$$

Como $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de traslaciones, es seminormalizada. Se sigue de la Proposición 4.3.1 que R_Q es compacto. $\square$

Seguidamente, vamos a probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.7. *[2, 5, 6] Sea $p \in (1,2]$, y $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Se tiene que*

$$X_p(f,\Lambda) \neq L_p(\mathbb{R}^d).$$

Demostración. Sea Q un cubo cualquiera. Por el Corolario 4.3.6, el operador restricción $R_Q : X_p(f,\Lambda) :\to L_p(\mathbb{R}^d)$ dado por la fórmula $R_Q(f) = f\big|_Q$ es un operador compacto. Por lo tanto, el Corolario 4.3.3 dice que $X_p(f,\Lambda) \neq L_p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Si $p \in (1,2]$ - y más generalmente, si $p \in (1,+\infty)$ -, no se sabe si existen bases no incondicionales de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$. En el caso de $L_1(\mathbb{R}^d)$, la respuesta es negativa, como demostraremos en la sección siguiente.

No existencia de bases incondicionales de traslaciones de $L_1(\mathbb{R}^d)$.

En la sección 4.2, demostramos en particular que no existen bases incondicionales de traslaciones de $L_1(\mathbb{R}^d)$ (Corolario 4.2.5, con $p = 1$). Este resultado también se sigue del siguiente resultado más general, que no probaremos: si $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional en $L_1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]} \neq L_1(\mathbb{R}^d)$, es decir que $L_1(\mathbb{R}^d)$ no tiene bases de Schauder incondicionales. En esta sección vamos a demostrar que no hay bases de traslaciones de $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Teorema 4.4.1. *[6][2] Sea $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica de traslaciones de una función $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Entonces, $X_1(f,\Lambda) \neq L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Puesto que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de traslaciones, es seminormalizada. Por la Proposición 1.1.5, la sucesión $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones coordenadas también es seminormalizada.
Sea $c > 0$ tal que $||f_i'|| \leq c$ para todo entero positivo i. Por el Corolario 4.1.4, para todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$, la suma $\sum_{i=1}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1$ es finita. Por lo tanto, dados $\epsilon > 0$ y un cubo Q, existe n_0 tal que

$$\sum_{i=n_0}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1 \leq \frac{\epsilon}{c}.$$

Se sigue que si m es un entero positivo mayor o igual que n_0, entonces para toda función $g \in X_1(f,\Lambda)$, resulta que

$$\begin{aligned}
\left|\left|\sum_{i=n_0}^{m} \langle f_i', g\rangle f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1 &\leq \sum_{i=n_0}^{m} |\langle f_i', g\rangle| \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1 \\
&\leq \sum_{i=n_0}^{m} ||f_i'|| ||g||_1 \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1 \\
&\leq c||g||_1 \sum_{i=n_0}^{\infty} \left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_Q\right|\right|_1 \\
&\leq c||g||_1 \left(\frac{\epsilon}{c}\right) \\
&= \epsilon||g||.
\end{aligned}$$

Dado que ϵ es un número positivo arbitrario y m es cualquier entero positivo mayor o igual que n_0, se sigue por la Proposición 4.3.1 que para todo cubo Q, el operador $R_Q : X_1(f,\Lambda) \to L_1(\mathbb{R})^d$ dado por la fórmula $R_Q(g) = g\big|_Q$, es compacto. Tomando $p = 1$ en el Corolario 4.3.3, concluimos que $X_1(f,\Lambda) \neq L_1(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Sucesiones incondicionales de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, con $p \in (2, +\infty)$.

En esta sección, vamos a ver que si $p \in (2, +\infty)$, toda sucesión básica incondicional de traslaciones que es base de Schauder de un subespacio X complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$, es equivalente a la base canónica de ℓ_p, lo que en particular implica que tal sucesión no es una base de $L_p(\mathbb{R}^d)$.
Notemos que en el caso $p \in (2, +\infty)$, se pide que el espacio esté complementado, lo que no ocurre si $p \in [1, 2]$. Esa condición nos permitirá pensar las sucesiones de funciones coordenadas de las subsucesiones de la base de traslaciones como sucesiones en $L_{p'}(\mathbb{R}^d)$ - en un sentido que precisaremos en las demostraciones -, que cumplen las condiciones del Lema 4.2.3.
Primero vamos a probar la equivalencia de una sucesión incondicional de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$ y la base canónica de ℓ_p en un caso particular en que no pedimos que el espacio del cual la sucesión es base esté complementado, pero pedimos otras condiciones que facilitan la prueba. Más adelante, usaremos este resultado en la demostrarción del Teorema 4.5.5, eligiendo subsucesiones convenientes que cumplen las condiciones del caso particular.

Lema 4.5.1. *Sean $p \in (2, +\infty)$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L_{p'}(\mathbb{R}^d)$ tal que se cumplen las siguientes condiciones:*

I. *La sucesión $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la sucesión $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones coordenadas de $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, y $\left\langle F_i, f_{\left(\lambda^{(j)}\right)}\right\rangle = \delta_{ij}$ para todo par de enteros positivos i y j.*

II. *Existe un cubo Q en $\mathbb{R}^d$ tal que los cubos trasladados $\{Q + \lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, y*

$$\left|\left|f|_{\mathbb{R}^d\setminus Q}\right|\right|_p \leq \frac{1}{2\left|\left|F_j'\right|\right|_{p'} + 1} \quad \forall j \in \mathbb{N}. \tag{4.41}$$

Entonces, la sucesión $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Demostración. Para cada entero positivo i, sea Q_i el cubo trasladado $Q + \lambda^{(i)}$.
Dado que $T_{\lambda^{(i)}}$ preserva medidas, y como para cada entero positivo i, se tiene que $Q_i = Q + \lambda^{(i)} = T^{-1}_{\lambda^{(i)}}(Q)$, por (4.41) deducimos que

$$\left|\left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}|_{\mathbb{R}^d\setminus Q_i}\right|\right|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus Q_i} \left|f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d\setminus T^{-1}_{\lambda^{(i)}}(Q)} \left|f\left(T_{\lambda^{(i)}}(x)\right)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\int_{T^{-1}_{\lambda^{(i)}}\left(\mathbb{R}^d \setminus Q\right)} \left| f\left(T_{\lambda^{(i)}}(x)\right)\right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^d \setminus Q} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left|\left| f\big|_{\mathbb{R}^d \setminus Q} \right|\right|_p \\
&\leq \frac{1}{2\left|\left|F'_j\right|\right|_{p'} + 1} \quad \forall (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

De la condición **I.** y (4.42) se infiere que para todo entero positivo i, se tiene que

$$
\begin{aligned}
1 &= \left\langle F'_i, f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\rangle = \int F'_i(x) f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)dx \\
&= \int_{Q_i} F'_i(x) f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus Q_i} F'_i(x) f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)dx \\
&\leq \left| \int_{Q_i} F'_i(x) f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)dx \right| + ||F'_i||_{p'} \left|\left| f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\big|_{\mathbb{R}^d \setminus Q_i} \right|\right|_p \\
&\leq \left| \int_{Q_i} F'_i(x) f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}(x)dx \right| + ||F'_i||_{p'} \left(\frac{1}{2\left|\left|F'_i\right|\right|_{p'} + 1} \right) \\
&\leq \left|\left| F'_i\big|_{Q_i} \right|\right|_{p'} \left|\left| f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right|\right|_p + \frac{1}{2} \\
&= \left(\int_{Q_i} |F'_i(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} ||f||_p + \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Se sigue que

$$
\left(\int_{Q_i} |F'_i(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \geq \frac{1}{2||f||_p} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.43}
$$

Dado que $\left\{ f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de traslaciones, es seminormalizada, lo que implica por la Proposición 1.1.5 que $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada. Como $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, el Lema 1.2.4 implica que $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada.
Puesto que $\left\{ f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional, la Proposición 2.2.3 dice que $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional. Como $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se deduce que $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional.
Por lo tanto, y dado que los cubos $\{Q_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos, por (4.43) y el Lema 4.2.3 se sigue que la sucesión $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_{p'}$.
Puesto que $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{F'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, concluimos que $\{f'_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de $\ell_{p'}$.
Como la base canónica de $\ell_{p'}$ es la sucesión de funciones coordenadas correspondiente

a la base canónica de ℓ_p, y puesto que ℓ_p y $\overline{\left[f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} : i \in \mathbb{N}\right]}$ son espacios reflexivos, el Corolario 1.2.6 dice que $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. $\square$

El siguiente Lema dice que todo subconjunto infinito y uniformemente discreto de $\mathbb{R}^d$ puede escribirse como una unión de un conjunto finito y una cantidad finita de conjuntos infinitos cada uno de los cuales tiene sus elementos tan separados como se quiera, en el sentido que precisaremos a continuación. Esto nos permitirá en la demostración del Teorema 4.5.5 separar una sucesión básica incondicional de traslaciones en subsucesiones que cumplen con las condiciones del Lema 4.5.1, salvo tal vez por finitos elementos.

Lema 4.5.2. *Si $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ es conjunto infinito y uniformemente discreto, dado $M > 0$ existe un entero positivo m, una colección de conjuntos infinitos $\{\Lambda_l\}_{1\leq l\leq m}$ y un conjunto finito F tales que se cumplen las siguientes condiciones:*

I.

$$\Lambda = \left(\bigsqcup_{l=1}^{m} \Lambda_l\right) \sqcup F.$$

II. *Para cada $1 \leq l \leq m$, si λ y λ' son elementos distintos de Λ_l, entonces*

$$|\lambda - \lambda'| > M.$$

Demostración. Sea n_1 un entero positivo tal que

$$\frac{2d}{n_1} \leq \text{ínf}\left\{|\lambda - \lambda'| : (\lambda, \lambda') \in \Lambda^2 \text{ y } \lambda \neq \lambda'\right\}. \tag{4.44}$$

Notemos que todo cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^d$ de lado $\frac{1}{n_1}$ tiene diámetro $\frac{\sqrt{d}}{n_1} \leq \frac{d}{n_1}$.
Elegimos un entero positivo n_0 mayor que $M + 1$, y definimos una colección de cubos del siguiente modo:

$$Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} = \left[k_1 n_0 + \frac{i_1}{n_1}, k_1 n_0 + \frac{i_1 + 1}{n_1}\right) \times \cdots \times \left[k_d n_0 + \frac{i_1}{n_1}, k_d n_0 + \frac{i_1 + 1}{n_1}\right)$$
$$\forall \mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d \quad \forall \mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \{0, \ldots, n_0 n_1 - 1\}^d. \tag{4.45}$$

Como para cada $t \in \mathbb{R}$, existen $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq i \leq n_0 n_1 - 1$ tales que $kn_0 + \frac{i}{n_1} \leq t < kn_0 + \frac{i+1}{n_1}$, se deduce que la colección dada por (4.45) cubre $\mathbb{R}^d$. Observemos que si $k < k'$, entonces para todo $0 \leq i \leq n_0 n_1 - 1$, se tiene que $kn_0 + \frac{i+1}{n_1} \leq k' n_0$, y por lo tanto,

$$Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} \cap Q_{\mathbf{k}',\mathbf{i}'} = \emptyset \quad \forall (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \;\; \forall (\mathbf{i}, \mathbf{i}') \in \left(\{0, \ldots, n_0 n_1 - 1\}^d\right)^2,$$

mientras que si $0 \leq i < i' \leq n_0n_1 - 1$, entonces $kn_0 + \frac{i+1}{n_1} \leq kn_0 + \frac{i'}{n_1}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, por lo que

$$Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} \cap Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}'} = \emptyset \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \quad \forall (\mathbf{i}, \mathbf{i}') \in \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d \times \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d : \mathbf{i} \neq \mathbf{i}'.$$

Concluimos que los cubos son disjuntos dos a dos, y como cubren $\mathbb{R}^d$, se deduce que

$$\mathbb{R}^d = \bigsqcup_{\substack{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \\ \mathbf{i} \in \{0,\ldots,n_0n_1-1\}^d}} Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}}. \tag{4.46}$$

Ahora vamos a separar la colección (4.45) en $(n_0n_1)^d$ subcolecciones disjuntas dos a dos, y de manera que si Q y Q' son dos cubos en una de dichas colecciones, entonces la distancia entre ellos es mayor que M. Definimos:

$$\pi_{\mathbf{i}} = \left\{ Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} : \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d \right\} \quad \forall \mathbf{i} \in \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d. \tag{4.47}$$

Fijemos $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_d) \in \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d$. Si $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'$, existe $0 \leq j \leq n_0n_1 - 1$ tal que $k_j \neq k_j'$, lo que implica que la distancia entre los intervalos $\left[k_jn_0 + \frac{i_1}{n_1}, k_jn_0 + \frac{i_1+1}{n_1}\right)$ y $\left[k_j'n_0 + \frac{i_1}{n_1}, k_j'n_0 + \frac{i_1+1}{n_1}\right)$ es mayor o igual que $n_0 - 1$, y por lo tanto, mayor que M. Se sigue de la definición (4.45) que la distancia entre $Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}}$ y $Q_{\mathbf{k}',\mathbf{i}}$ también es mayor que M. Como para cada $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d$, el cubo $Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}}$ tiene diámetro menor o igual que $\frac{d}{n_1}$, resulta que $\#\left(Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} \cap \Delta\right) \leq 1$. Luego, si definimos

$$A_{\mathbf{i}} = \bigsqcup_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \left(Q_{\mathbf{k},\mathbf{i}} \cap \Lambda\right) \quad \forall \mathbf{i} \in \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d,$$

tenemos que

$$|\lambda - \lambda'| > M \quad \forall (\lambda, \lambda') \in A_{\mathbf{i}}^2 : \lambda \neq \lambda' \quad \forall \mathbf{i} \in \{0, \ldots, n_0n_1 - 1\}^d,$$

y se deduce por (4.46) que

$$\Lambda = \bigsqcup_{\mathbf{i} \in \{0,\ldots,n_0n_1-1\}^d} A_{\mathbf{i}}. \tag{4.48}$$

Observemos que como Λ es infinito, al menos uno de los conjuntos $A_{\mathbf{i}}$ en la igualdad (4.48) es infinito. Renombrando los conjuntos para simplificar la notación, tenemos que

$$\Lambda = \left(\bigsqcup_{i=1}^{m_2} \Lambda_i \right) \sqcup F,$$

donde $m_2 \in \mathbb{N}$, Λ_i es un conjunto infinito para todo $1 \leq i \leq m_2$, y F es un conjunto finito (que puede ser vacío o no vacío). $\square$

Podemos mencionar que se puede eliminar el conjunto finito F en la condición **I.** del Lema 4.5.2, aunque no es necesario demostrarlo para los fines de esta tesis.
El siguiente Lema dice que si una sucesión básica incondicional que puede escribirse como una unión disjunta de finitos elementos y finitas sucesiones básicas cada una de las cuales es equivalente a la base canónica de ℓ_p, entonces es equivalente a la base canónica de ℓ_p. Lo usaremos en la demostración del Teorema 4.5.5, para poder aplicar el Lema 4.5.1 a subsucesiones elegidas convenientemente.

Lema 4.5.3. *Sea $p \in [1, +\infty)$, $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional en un espacio de Banach X, m_0 un entero positivo, y $\left\{f_{k_{(j,i)}}\right\}_{\substack{1\leq j\leq m_0\\ i\in\mathbb{N}}}$ subsucesiones de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tales que el conjunto*

$$\mathbb{N} \setminus \left(\bigsqcup_{\substack{1\leq j\leq m_0\\ i\in\mathbb{N}}} \{k_{(j,i)}\} \right)$$

es finito.
Si para todo $1 \leq j \leq m_0$, la sucesión $\left\{f_{k_{(j,i)}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, entonces $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Demostración. Sea

$$m_1 = 1 + \max \left(\mathbb{N}_0 \setminus \left(\bigsqcup_{\substack{1\leq j\leq m_0\\ i\in\mathbb{N}}} \{k_{(j,i)}\} \right) \right). \tag{4.49}$$

Supongamos que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en X, y sea $1 \leq j \leq m_0$.
Por el Lema 2.2.2, la serie $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k_{(j,i)}} f_{k_{(j,i)}}$ converge en X. Puesto que $\{f_{k_{(j,i)}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, esto implica que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{k_{(j,i)}} e^{(i)}$ converge en ℓ_p, o equivalentemente, que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{k_{(j,i)}} \right|^p < +\infty. \tag{4.50}$$

Dado que esto vale para cada $1 \leq j \leq m_0$, se sigue de (4.49) y (4.50) que

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p \leq \sum_{i=1}^{m_1} |a_i|^p + \sum_{j=1}^{m_0} \sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{k_{(j,i)}} \right|^p < +\infty.$$

Esto prueba que si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en X, entonces $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_p.
Supongamos ahora que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_p.
Para todo $1 \leq j \leq m_0$, se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| a_{k_{(j,i)}} \right|^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < +\infty.$$

Por lo tanto, $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_{(j,i)}} e^{(i)}$ converge en ℓ_p. Dado que $\{f_{k_{(j,i)}}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, se deduce que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{k_{(j,i)}} f_{k_{(j,i)}}$ converge. Esto implica que en el orden adecuado, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ es la suma de una cantidad finita de series convergentes, salvo tal vez por finitos escalares. Por ende, existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} a_{\pi(i)} f_{\pi(i)}$ converge. Dado que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es incondicional, se deduce que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge. Concluimos que $\sum_{i=1}^{\infty} a_i f_i$ converge en X si y solo si $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e^{(i)}$ converge en ℓ_p. Como $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es básica, es equivalente a la base canónica de ℓ_p. □

Observemos que si una sucesión $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p, cada una de sus subsucesiones también lo es, lo que se puede demostrar teniendo en cuenta que toda subsucesión de la base canónica de ℓ_p es equivalente a la base canónica de ℓ_p (Proposición 1.2.2). Esto puede usarse para probar que la condición de que la unión sea disjunta en el enunciado del Lema 4.5.3 no es necesaria, aunque no necesitamos ese resultado.
Antes de demostrar los dos resultados principales de esta sección, vamos a probar una Proposición auxiliar sobre bases incondicionales de Schauder de espacios complementados.

Proposición 4.5.4. *Sea $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X$ una sucesión básica incondicional, $Z = \overline{[f_i : i \in \mathbb{N}]}$* [redacted] *y $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Z'$ la sucesión de funciones coordenadas. Si Z está complementado en X, existe una sucesión básica en $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq X'$ tal que valen las siguientes afirmaciones:*

1. *Para todo $g \in Z$, se tiene que $F_i'(g) = f_i'(g)$. En particular, resulta que $F_i'(f_j) = f_i'(f_j) = \delta_{ij}$ para todo par de enteros positivos i y j.*

2. *Para toda subsucesión $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, la sucesión de funciones coordenadas $\left\{g_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{F_{k_i}'\}_{i\in\mathbb{N}}$.*

Demostración. Puesto que Z está complementado en X, existe un operador lineal continuo $P : X \to Z$ tal que $P(g) = g$ para todo $g \in Z$.
Sea $P^* : Z' \to X'$ el adjunto de Banach. Como para todo $g \in Z$ y todo entero positivo i, se tiene que

$$P^* (f_i') (g) = f_i' (P (g)) = f_i'(g),$$

si definimos $F_i' = P^* (f_i')$ para todo entero positivo i, la afirmación 1 del enunciado se cumple.
Sea $\{f_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ una subsucesión de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Por la Proposición 2.2.3, $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional, y por el Lema 2.2.2, resulta que $\{f_{k_i}'\}_{i\in\mathbb{N}}$ también es básica incondicional.
La Proposición 2.2.5 dice que P^* es un isomorfismo entre Z' y su imágen $P^*(Z') \subseteq X'$. Por lo tanto, la restricción de P^* al subespacio $\overline{[f_{k_i}' : i \in \mathbb{N}]}$ es un isomorfismo entre $\overline{[f_{k_i}' : i \in \mathbb{N}]}$ y $\overline{[P^* (f_{k_i}') = F_{k_i}' : i \in \mathbb{N}]}$. Por el Lema 1.2.4, se sigue que $\left\{F_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a $\left\{f_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Como la Proposición 2.2.6 dice que $\left\{f_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\left\{g_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, se sigue que $\left\{F_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\left\{g_{k_i}'\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. □

Ahora estamos en condiciones de probar los dos resultados principales de esta sección, que son el Teorema siguiente y su Corolario.

Teorema 4.5.5. *Sea $p \in (2, +\infty)$, $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$, y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$. Si $X_p(f, \Lambda)$ está complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$, entonces $\left\{f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.*

Demostración. Notamos $f_i = f_{\left(\lambda^{(i)}\right)}$ para todo entero positivo i, y $Z = X_p(f, \Lambda)$.
Sea $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq Z'$ la sucesión de funciones coordenadas de $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, y sea $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}} \subseteq L_{p'}(\mathbb{R}^d)$ la sucesión dada en la Proposición 4.5.4.
Puesto que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada por ser una sucesión de traslaciones en $L_p(\mathbb{R}^d)$, la Proposición 1.1.5 dice que $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada, y dado que $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a $\{f_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$, el Lema 1.2.4 implica que $\{F_i'\}_{i\in\mathbb{N}}$ es seminormalizada. Por lo tanto, existe $M > 0$ tal que

$$||F_i'||_{p'} \leq M \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.51}$$

Elegimos un cubo Q para el cual

$$\left|\left| f\big|_{\mathbb{R}^d\setminus Q} \right|\right|_p \leq \frac{1}{2M+1}. \tag{4.52}$$

Se sigue de (4.51) y (4.52) que

$$\left|\left| f\big|_{\mathbb{R}^d\setminus Q} \right|\right|_p \leq \frac{1}{2||F_i'||_{p'}+1} \quad \forall i \in \mathbb{N}. \tag{4.53}$$

Para poder aplicar el Lema 4.5.1, vamos a separar la sucesión $\{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}}$ en subsucesiones cuyos elementos estén lo suficientemente separados, de la siguiente manera:
Por el Lema 4.5.2, existe un entero positivo m_0, una colección de m_0 conjuntos infinitos $\{\Lambda_i\}_{1\leq i\leq m_0}$ y un conjunto finito F tales que se cumplen las siguientes condiciones:

I.

$$\Lambda = \left(\bigsqcup_{j=1}^{m_0} \Lambda_j\right) \sqcup F. \tag{4.54}$$

II. Para cada $1 \leq j \leq m_0$, si λ y λ' son elementos distintos de Λ_j, entonces

$$|\lambda - \lambda'| > l(Q)d.$$

Fijemos ahora $j \in \{1, \ldots, m_0\}$. Dado que Λ_j es un subconjunto infinito de $\Lambda = \left\{\lambda^{(i)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, Λ_j puede escribirse como una subsucesión, que notamos

$$\Lambda_j = \left\{\lambda^{\left(k_{(j,i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}. \tag{4.55}$$

Puesto que $\{f_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional, el Lema 2.2.2 dice que la subsucesión $\left\{f_{\left(k_{(j,i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica incondicional.
Además, la condición **II.** implica que si λ y λ' son elementos distintos de Λ_j, entonces los cubos trasladados $Q + \lambda$ y $Q + \lambda'$ son disjuntos, ya que si x y z son elementos de Q, entonces

$$|(x + \lambda) - (z + \lambda')| = |\lambda - \lambda' - (z - x)| \geq |\lambda - \lambda'| - |z - x| > l(Q)d - l(Q)d = 0.$$

Por lo tanto, los cubos $\left\{Q + \lambda^{\left(k_{(j,i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos.
Por las condiciones 1 y 2 de la Proposición 4.5.4, se tiene que $\left\{F'_{k_{(j,i)}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica equivalente a la sucesión $\left\{g'_{k_{(j,i)}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ de funciones coordenadas de $\left\{f_{k_{(j,i)}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$, y que $\left\langle F'_{k_{(j,i)}}, f_{k_{(j,l)}}\right\rangle = \delta_{il}$ para todo par de enteros positivos i y l.
Teniendo en cuenta (4.53), concluimos por el Lema 4.5.1 que $\left\{f_{k_{(j,i)}}\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p.

Puesto que (4.55) vale para cada $1 \leq j \leq m_0$, y como $\lambda^{(i)} \neq \lambda^{(j)}$ si $i \neq j$, se deduce por (4.54) que

$$F = \{\lambda^{(i)}\}_{i\in\mathbb{N}} \setminus \left(\bigsqcup_{\substack{1\leq j\leq m_0\\ i\in\mathbb{N}}} \left\{\lambda^{\left(k_{(j,i)}\right)}\right\}_{i\in\mathbb{N}}\right),$$

lo que implica que el conjunto

$$\mathbb{N} \setminus \left(\bigsqcup_{\substack{1 \leq j \leq m_0 \\ i \in \mathbb{N}}} \{k_{(j,i)}\} \right)$$

es finito. Concluimos por el Lema 4.5.3 dice que $\left\{ f_{\left(\lambda^{(i)}\right)} \right\}_{i \in \mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. $\square$

Corolario 4.5.6. *Si $p \in (2, +\infty)$, no existe una base incondicional de traslaciones de $L_p(\mathbb{R}^d)$.*

Demostración. Sea $\{f_{(\lambda^{(i)})}\}_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión básica incondicional de traslaciones de una función $f \in L_p(\mathbb{R}^d)$ y $\Lambda = \{\lambda^{(i)}\}_{i \in \mathbb{N}}$.
Si $X_p(f, \Lambda)$ no está complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$, entonces claramente $X_p(f, \Lambda) \neq L_p(\mathbb{R}^d)$. Si $X_p(f, \Lambda)$ está complementado en $L_p(\mathbb{R}^d)$, entonces por el Teorema 4.5.5, $\{f_{(\lambda^{(i)})}\}_{i \in \mathbb{N}}$ es equivalente a la base canónica de ℓ_p. Esto implica que $X_p(f, \Lambda)$ es isomorfo a ℓ_p. Se sigue por el Lema 3.1.17 que $X_p(f, \Lambda) \neq L_p(\mathbb{R}^d)$. $\square$

Bibliografía

[1] C. Bessaga, A. Pelczynski,*On Bases and Unconditional Convergence of Series in Banach Spaces*, Studia Mathematica Volume: 17, Issue 2 (1958), 151-164.

[2] D. Freeman, E. Odell, Th. Schulumprecht, A. Zsák *Unconditional Structures of Systems of Translates for $L_p(\mathbb{R}^d)$*, Israel Journal of Mathematics **203** (2014), DOI: 10.1007*s11856-014-1084-1.

[3] W. B. Johnson, E. Odell, *Subspaces of L_p which embed into ℓ_p*, Compositio Mathematica 28.1 (1974), 37-49.

[4] E. Hernández, H. Šikić, G. Weiss y E. Wilso, *On the Properties of the Integer Translates of a Square Integrable Function in $L_2(\mathbb{R})$*, Contemporary Mathematics 505 (2010), 233-249.

[5] Bei Liu, Rui Liu, *Upper Beurling Density of Systems Formed by Translates of Finte Sets of Elements*, Banach J.Math. Anal. 6 (2012) 86-97.

[6] E. Odell, B. Sari, Th. Schulumprecht, B. Zheng, *Systems Formed by Translates of One Element in $L_P(\mathbb{R})$*, Transactions of the American Mathematical Society **363** (2011), 6505-6529.

[7] T.E. Olson, R. A. Zalik, *Nonexistence of a Riesz basis of translates*, *Approximation Theory*, Lecture Notes in Pure and Applied Math., **138**, Dekker, New York (1992) 401408. MR1174120.

[8] N. Wiener, *The Fourier Integral and Certain of Its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge (1933) reprint: Dover, New York (1958), MR0100201, 20-6634.