UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Conjuntos de Sidon

Melisa Carla Scotti

Director: Daniel Germán Carando

Fecha de Presentación: 30/03

Índice general

Agradecimientos

A mi papá, por regalarme *el hombre que calculaba* y porque lo extraño.

A Dani K., por nuestra hermosa historia de amor. Por enseñarme algo nuevo cada día. Por confiar en mi siempre. Porque no hay nada más lindo en el mundo que llegar a casa y que estén vos y Boo esperándome.

A mi director, el más popular del DM. Por hacerse el tiempo para enseñarme y guiarme. Por su sentido del humor y sus mates. Por nunca perder la calma y, sobre todo, por soportarme. A Jorge por ser más bueno que Dani C. y por lo que vendrá.

A los jurados, por tomarse el trabajo de leer esta tesis. A Pablo, por su entusiasmo por la matemática. A Rela, por los *batatoides* de análisis II y por ser un gran profesor.

A mi mamá, por romperse el lomo laburando para que nunca me falte nada. Porque me dio la posibilidad de dedicarme cien por ciento a hacer esta carrera. A Vale, porque siempre va a ser mi hermanita menor. A Migue, por ser el hombre más bueno y paciente de esta galaxia. Al resto de mi familia, por apoyarme siempre. A mi abuela Kate, por todo su amor.

A mis suegros, por hacerme una más de la familia. A Bibi, por la ayuda infinita y sus riquísimas comidas.

A Juja, mi hermana del alma, por todos los momentos compartidos en estos 18 años. Por su amistad incondicional. A Patri, por ser una mamá más.

A mi familia del otro lado de la montaña, por enseñarme que la vida duele menos si se la toma con humor (aunque a veces sea un poco negro). A María Alicia, por ser mi papá suplente, por cuidarme y escucharme. A Javi por su ritmo y alegría. A Peter por el arte del jugo jugo jugo. A Nacho, mi hermano preferido, por ser de Racing.

A UP, por darme amigos para toda la vida. A Lud, por todo su amor y vocación. Al Uru, Cachetón, y Ale, por hacerme reir tanto.

A la acadé, porque *solo entiende mi locura quien comparte mi pasión.* A Solazo, por estar siempre (aunque siempre impuntual). A la Gro, Agos, Lou y Solcito.

A Jessica Charachaf, la hippie que me escucha y siempre tiene un buen consejo para dar. Sin vos no hubiese llagado hasta acá.

A Nati, porque desde que se fue soy la alumna estrella. Por todos estos años de amistad compartiendo: director, carrera, signo, apellido, etc. Por ser la más morocha de mis amigas. Porque te quiero y extraño mucho.

A Bru, mi fiel compañero de estudio. Por las largas jornadas, siempre con nuestra playlist *tesis de matemática*. Ojalá el resto del mundo valorase a Britney como vos lo hacés. A Adri y Marce, por las picadas, panqueques y buena onda.

A Virchu, la que me hace bullying. Porque me dejó comer dos picantes en vez de tomates cherries. Por todas las veces que nos tentamos, en especial aquella vez que tuviste que salir del aula porque no podías aguantar ver la cartuchera[1].

A Marce, por todas las vueltas de la cancha (siempre amenazando con tirarse al río con el auto). Por su forma de enseñar arrojando proyectiles. A Nico, por las meriendas y la compañía. Porque juntos son la mejor pareja[2] (de docentes) del DM.

A Rafa, mi masajista y cocinero. El que me cuidó cuando era una maldita lisiada. Mi divulgador preferido.

A los chicos del CBC. A Santiago, por romperme el corazón cuando dejó mi secundario en segundo año, por ser el tipo más inteligente que conozco. A Cami linda, por su ternura. A Nacho Perito[3], porque siempre se está riendo.

Este párrafo va dedicado a las amantes de los gatitos. A Jaz, porque si no fuese por ella viviría con los cordones desatados. A Diana, por enseñarme a hacer dibujitos (ver 1.2.8). A Sofi, por hacer que los trámites sean más fáciles, por sus mates y cariño. A Pau, la encargada de cuidar Boo cuando no estemos.

A los groupies del IMPA, por un verano inolvidable.

A todos mis compañeros de la facu que hicieron que este largo camino sea divertido. A Javi, Carlinho, Manu, Santi Duranga, Santi V., Mechiluz, Fede, Mel, Yami B., Tincho, Bortz , y tantos otros. A las chicas de *Habana y segurola*, en especial, a Ana y Romi, dos genias.

A la 2038 y compañía, por dejarme ocupar el lugar de Vescovo cuando lo necesité, por los cafés de la C.A.CAFE.A y las vauquitas de Caro. En espacial a la niña y el niño rata. A Mauro, por las tardes en el Cilindro y su ringtone *"un proyecto de país.."*.

A todos los profesores que tanto me enseñaron durante estos años. A Vendra, Sandra,

[1] La gran cartuchera de cuero y tachas

[2] iiiiiiiiii iiiy ii iii

[3] Vamos la acade! (te lo robé)

Solernó, Dany G.. A Bonder, por las charlas sobre GOT. A Marino y Andrea por ser dos grosos. A mis ayudantes y JTPs. A Charly, porque gracias a él estudio estos temas. A Pablo Z. por el *Teorema de las bolas peludas.* A Javi G., por ser un amargo que me cae bien. A Isa y Xime, por ayudarme siempre.

A los grupos de análisis funcional y análisis armónico por todos los seminarios que compartimos y seguiremos compartiendo.

Por último, pero no menos importante, a la educación pública. A mi primario, el mágico Alva. A la UBA, porque existe esta carrera y por la beca estímulo que me ayudo estos últimos años.

Introducción

Es un hecho conocido que la serie de Fourier de una función integrable definida en el toro $\mathbb{T}$ puede tener propiedades no deseadas. Por ejemplo, una aplicación clásica del Principio de Acotación Uniforme muestra que existe una función continua cuya seria de Fourier diverge en algún punto. Más aun, existen funciones integrables cuya serie de Fourier diverge en todo punto (ver por ejemplo [Kör89, Teoremas 18.1 y 19.2]).

El problema que proponemos abordar en este trabajo es el siguiente: en vez de considerar todas las funciones integrables en $\mathbb{T}$, o todas las funciones continuas, vamos a considerar aquellas cuyo espectro (el conjunto donde sus coeficientes de Fourier no se anulan) está contenido en un subconjunto Λ de $\mathbb{Z}$. Nos concentraremos en cierto conjuntos Λ que cumplen que las series de Fourier de dichas funciones se comportan mejor que en el caso general. Un ejemplo paradigmático son las sucesiones lagunares, el principal objeto de estudio el Capítulo 2. Su nombre se debe a que sus elementos están muy espaciados.

En 1927 Sidon [Sid27] publicó el siguiente resultado: Si $\{\lambda_k\}_k$ es una sucesión lagunar de números naturales (es decir, si existe $A > 1$ tal que $\lambda_{k+1} \geq A\lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$) y si f es una función acotada en el toro con serie de Fourier de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{2\pi i \lambda_k t}, \qquad a_k \in \mathbb{C}, \tag{0.1}$$

entonces $\sum |a_k| < \infty$ y, en consecuencia, f coincide en casi todo punto con una función continua. Este será uno de los teoremas fundamentales del Capítulo 2 (ver Teorema 2.2.4) y muestra que las series de Fourier lagunares se comportan de manera excepcional. Probaremos también que estas series cumplen que sus normas en L^p para $1 \leq p < \infty$ son equivalentes.

Siguiendo esta línea resulta natural la siguiente definición. Dado G es un grupo abeliano compacto, y Γ su grupo dual, un subconjunto Λ de Γ se dice *conjunto de Sidon* si toda función continua cuya transformada de Fourier se anula fuera de Λ tiene una serie de Fourier absolutamente convergente. Este concepto fue introducido por Rudin en [Rud60]. Estos conjuntos gozaron de gran popularidad debido a que su estudio es un punto de encuentro entre el análisis armónico, el análisis funcional, la combinatoria y la probabilidad.

Un avance importante en esta línea fue realizado por Drudry [Dru70] que probó que la unión de dos conjuntos de Sidon es un conjunto de Sidon (ver 3.2.7). Nuevas caracterizaciones de los conjuntos de Sidon fueron presentadas en los años 80 por Bourgain, Milman y Pisier. En estos trabajos se destaca el papel de la geometría de los espacios de Banach para resolver problemas del análisis armónico. Durante este trabajo nos dedicaremos a probar y explicar algunos de estos resultados fundamentales.

La tesis está organizada de la siguiente manera.

En el **Capítulo 1** daremos los contenidos preliminares necesarios para la comprensión del trabajo. En primer lugar, expondremos resultados básicos de análisis armónico. Luego, veremos la definición de conjuntos de Sidon y varias equivalencias que resultarán de utilidad a lo largo de todo el trabajo. En la siguiente sección expondremos algunos conceptos de la teoría de espacios de Banach, por ejemplo, la noción de tipo y cotipo. Discutiremos también la definición de las variables y funciones Rademacher que cumplen un rol fundamental en esta exposición.

En el **Capítulo 2** estudiaremos las series de Fourier lagunares y probaremos que gozan de propiedades especiales mencionadas anteriormente. Como consecuencia deduciremos que las sucesiones lagunares son un conjunto de Sidon.

En el **Capítulo 3** desarrollaremos distintas propiedades de estructura y de índole aritmético de los conjuntos de Sidon. Enunciaremos el Teorema de Rider, que nos da una condición que garantiza que un conjunto sea de Sidon y, como aplicación, probaremos el resultado de Drury 3.2.7. Concluieremos el capítulo con una breve discusión sobre la historia los conjuntos de Sidon y su relación con sus homónimos en combinatoria aditiva.

En el **Capítulo 4** probaremos tres caracterizaciones de los conjuntos de Sidon. Para esto, desarrollaremos brevemente la teoría de operadores p-sumantes. Además, probaremos un resultado de Bourgain-Milman que dice que Λ es un conjunto de Sidon si y solo si el conjunto de funciones continuas con espectro contenido en Λ tiene cotipo finito. Concluiremos con una demostración análoga para el espacio de funciones cuya serie de Fourier es uniformemente convergente.

Por último, en el **Capítulo 5** probaremos un Teorema de Pełczyński [Peł88] que es una generalización de un resultado de Pisier [Pis77] para conjuntos de Sidon. Además, mostraremos que los conjuntos de Sidon se comportan, en cierto sentido, como el sistema de variables Rademacher.

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo primordial de este capítulo es exponer las definiciones, notaciones y resultados necesarios para la comprensión de este trabajo.

1.1 Resultados de análisis armónico

A lo largo de esta sección definiremos conceptos básicos del análisis armónico y enunciaremos algunos resultados clásicos del análisis de Fourier. Vamos a omitir la demostracione, en caso de ser necesario, se pueden consultar los Capítulos 1 y 3 de [Gra08].

Notaremos al toro $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ y dx a la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$.

Definición 1.1.1. Para toda función a valores complejos $f \in L^1(\mathbb{T})$ y para todo $m \in \mathbb{Z}$, definimos el *m-ésimo coeficiente de Fourier de f* como

$$\widehat{f}(m) = \int_{\mathbb{T}} f(x)e^{-2\pi imx}dx.$$

Análogamente,para una medida Boreliana finita μ en $\mathbb{T}$ y para $m \in \mathbb{Z}$ llamaremos *m-ésimo coeficiente de Fourier de μ* a la expresión

$$\widehat{\mu}(m) = \int_{\mathbb{T}} e^{-2\pi imx}d\mu.$$

Además, llamaremos *serie de Fourier de f* en $x \in \mathbb{T}$ a la serie

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{2\pi imx}.$$

Definición 1.1.2. Sea $0 \leq N < \infty$ un entero. El ***núcleo N-ésimo de Dirichlet*** en $\mathbb{T}$ es la función

$$D_N(x) = \sum_{\substack{m\in\mathbb{Z}\\ |m|\leq N}} e^{2\pi imx}. \tag{1.1}$$

Tenemos varias maneras equivalentes de escribir al núcleo de Dirichlet D_N, por ejemplo,

$$D_N(x) = \sum_{|m|\leq N} e^{2\pi imx} = \frac{\sin((2N+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}, \tag{1.2}$$

Definición 1.1.3. Definiremos el ***núcleo de Fejér*** como el promedio de los $N-$ésimos núcleos de Dirichlet:

$$F_N(x) = \frac{1}{N+1}\left(D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_N(x)\right).$$

Proposición 1.1.4. *Para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{T}$ se satisface la siguiente identidad*

$$F_N(x) = \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)e^{2\pi ijx} = \frac{1}{N+1}\left(\frac{\sin(\pi(N+1)x)}{\sin(\pi x)}\right)^2.$$

Luego, $\widehat{F_N}(m) = 1 - \frac{|m|}{N+1}$ si $|m| < N$ y cero en caso contrario.

Para poder enunciar la propiedad más importante de los núcleos de Fejér necesitaremos primero la definición siguiente.

Definición 1.1.5. Sea G un grupo localmente compacto y λ una medida de Haar invariante a izquierda en G. Diremos que una familia de funciones k_ε en $L^1(G)$ es una *aproximación de la identidad* si satisface las siguientes tres propiedades:

(i) Existe una constante $c > 0$ tal que $\|k_\varepsilon\|_{L^1(G)} \leq c$ para todo $\varepsilon > 0$.

(ii) $\int\limits_G k_\varepsilon d\lambda(x) = 1$ para todo $\varepsilon > 0$.

(iii) Para todo entorno V de la identidad e del grupo G, se tiene que

$$\int\limits_{V^c} |k_\varepsilon(x)| d\lambda(x) \to 0$$

cuando $\varepsilon \to 0$.

En cualquier grupo localmente compacto G se pueden contruir aproximaciones de la identidad. Este hecho, cuya demostración puede encontrarse en [HR79], va a ser de utilidad más adelante en este trabajo.

Proposición 1.1.6. *La familia de los núcleos de Fejér $\{F_N\}_{N=0}^{\infty}$ es una aproximación de la identidad en $\mathbb{T}$.*

Las siguientes propiedades sobre las series de Fourier y sus coeficientes serán de utilidad en los próximos capítulos.

Proposición 1.1.7. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ satisface que $\widehat{f}(m) = \widehat{g}(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, luego $f = g$ en casi todo punto.*

Proposición 1.1.8 (Inversión de Fourier)**.** *Supongamos que $f \in L^1(\mathbb{T})$ y que*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(m)| < \infty.$$

Entonces,

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(m)e^{2\pi imx} \qquad c.t.p.,$$

y por lo tanto, f es en casi todo punto igual a una función continua.

Lema 1.1.9. *Dada una sucesión de números reales positivos $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ que tiende a cero cuando $m \to \infty$, existe una sucesión $\{c_m\}_{m=0}^{\infty}$ que satisface*

$$c_m \geq a_m, \qquad c_m \downarrow 0, \quad \textit{and} \quad c_{m+2} + c_m \geq 2c_{m+1} \tag{1.3}$$

para todo m.

Teorema 1.1.10. *Sea $\{d_m\}_{m\in\mathbb{Z}^n}$ una sucesión de enteros positivos con $d_m \to 0$ cuando $|m| \to \infty$. Luego, existe una función $f \in L^1(\mathbb{T}^n)$ que cumple que $\widehat{f}(m) \geq d_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^n$. En otras palabras, dada cualquier grado de decaimiento, existe una función integrable en el toro cuyos coeficientes de Fourier decaen más lento.*

Proposición 1.1.11. *Sea h una función en $\mathbb{T}$ que es continua en un entorno del 0 y tal que $\widehat{h}(m) \geq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Luego $h(0) \geq 0$ y $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{h}(m) = h(0) < \infty$, es decir, las sumas parciales de la serie de Fourier de h convergen en cero.*

1.2 Conjuntos de Sidon

En esta sección expondremos las definiciones y notaciones indispensables para la comprensión del trabajo. Daremos la definición de *conjunto de Sidon* y probaremos varias condiciones equivalentes. Comenzaremos trabajando en el grupo $G = \mathbb{T}$ y su grupo dual $\widehat{G} = \mathbb{Z}$ (el grupo de los morfismos continuos de G en $\mathbb{T}$). Luego extenderemos las definiciones al caso en que G sea un grupo compacto y abeliano.

Notación. Dado un subconjunto E de $\mathbb{Z}$, denotamos $\mathscr{C}_E$ al espacio de funciones continuas en $\mathbb{T}$ tales que $\widehat{f}(m) = 0$ para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus E$

Es fácil ver que $\mathscr{C}_E$ es un subespacio cerrado del espacio de funciones acotadas en el toro con la norma L^∞.

Más en general, sea G un grupo compacto, abeliano y metrizable, y $\Gamma = \widehat{G}$ su grupo dual (numerable). Sea $\mathscr{M}(G)$ el espacio de medidas en G finitas y Borelianas. Para $\mu \in \mathscr{M}(G)$, notaremos por

$$\widehat{\mu}(\gamma) = \int_G \gamma(-x) d\mu(x)$$

a su transformada de Fourier en $\gamma \in \Gamma$.

Para $\mu \in \mathscr{M}(G)$, llamaremos ***espectro*** de μ, al conjunto

$$sp(\mu) = \{\gamma \in \Gamma : \widehat{\mu}(\gamma) \neq 0\}.$$

Si $sp(\mu) \subseteq \Lambda \subseteq \Gamma$, diremos que $\widehat{\mu}$ está soportada en Λ. Sea $X(G)$ un subespacio de $\mathscr{C}(G)$, de $L^p(G)$ para $1 \leq p \leq \infty$, o de $\mathscr{M}$. Para $\Lambda \subseteq \Gamma$, definimos

$$X_\Lambda(G) = \{f \in X(G) : sp(f) \subseteq \Lambda\} = \{f \in X(G) : \widehat{f}(\gamma) = 0, \forall \gamma \notin \Lambda\}.$$

Notaremos $\mathscr{P}(G)$ al conjunto de polinomios trigonométricos, el espacio de combinaciones lineales finitas de caracteres en $\widehat{G}$. Por lo tanto, con la notación anterior, $\mathscr{P}_\Lambda$ será el conjunto de polinomios trigonométricos con espectro en Λ.

Definición 1.2.1. Un conjunto de enteros E se dice ***conjunto de Sidon*** si toda función en $\mathscr{C}_E$ tiene serie de Fourier absolutamente convergente.

El ejemplo más sencillo de conjunto de Sidon son los subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$. En el Capítulo 2 daremos ejemplos no triviales de estos conjuntos.

Veremos ahora varias definiciones equivalentes de conjunto de Sidon que serán de utilidad a lo largo de los capítulos.

Proposición 1.2.2. *Las siguientes afirmaciones sobre un subconjunto E de $\mathbb{Z}$ son equivalentes:*

(1) Existe una constante K tal que para todo polinomio trigonométrico P con $\widehat{P}$ soportado en E se tiene

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{P}(m) \right| \leq K \left\| P \right\|_\infty .$$

(2) Existe una constante K que cumple

$$\|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})} \leq K \left\| f \right\|_{L^\infty(\mathbb{T})},$$

para toda función acotada f en $\mathbb{T}$ tal que $\widehat{f}$ está soportada en E.

(3) *Toda función en $\mathscr{C}_E$ tiene serie de Fourier absolutamente convergente, es decir, E es un conjunto de Sidon.*

(4) *Para toda función acotada b en E existe una medida Borealiana y finita μ en $\mathbb{T}$ que cumple $\widehat{\mu}(m) = b(m)$ para todo $m \in E$.*

(5) *Para toda función b en $\mathbb{Z}$ con $b(m) \to 0$ cuando $m \to \infty$, existe una función $g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{g}(m) = b(m)$ para todo $m \in E$.*

Demostración. Veamos primero que *(1)* implica *(2)*. Dada $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ con $\widehat{f}$ soportada en E, consideremos

$$(f * F_N)(x) = \sum_{m=-N}^{N} \left(1 - \frac{|m|}{N+1}\right) \widehat{f}(m) e^{2\pi i m x},$$

donde F_N es el núcleo de Fejér. Estos son polinomios trigonométricos cuyos coeficientes de Fourier se anulan en $\mathbb{Z} \setminus E$. Aplicando *(1)* obtenemos

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(1 - \frac{|m|}{N+1}\right) \left|\widehat{f}(m)\right| \leq K \left\|f * F_N\right\|_{L^\infty}.$$

Haciendo tender $N \to \infty$ concluimos que vale *(2)*.

Es inmediato que *(2)* implica *(3)* y que *(2)* implica *(1)*.

Veamos ahora que *(3)* implica *(1)*. Se deduce de *(3)* que la asignación $f \to \widehat{f}$ es lineal y biyectiva de $\mathscr{C}_E$ en $\ell^1(E)$. Además, la inversa $\widehat{f} \to f$ es continua, debido a que

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \sup_{t \in [0,1]} \left|\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k t}\right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right| = \|\widehat{f}\|_{\ell^1(\mathbb{Z})}.$$

Se sigue por el Teorema de la función abierta que $f \to \widehat{f}$ es una función continua, lo que prueba la existencia de la constante K en *(2)*.

Hasta ahora hemos probado la equivalencia de *(1)*, *(2)* y *(3)*.

Mostremos que *(2)* implica *(4)*. Sea b una función acotada en E. Sin perdida de generalidad podemos suponer $\|b\|_{\ell^\infty} \leq 1$, luego la aplicación

$$f \mapsto \sum_{m \in E} \widehat{f}(m) \widehat{b}(m)$$

es un funcional lineal y continuo en $\mathscr{C}_E$ con norma a lo sumo K. En efecto,

$$\left|\sum_{m \in E} \widehat{f}(m) \widehat{b}(m)\right| \leq \sum_{m \in E} |\widehat{f}(m)| \leq K \|f\|_{L^\infty}.$$

Por el Teorema de Hanh-Banach este funcional admite una extensión a $\mathscr{C}(\mathbb{T})$ que mantiene la misma norma. Por lo tanto, existe una medida μ, con variación total $\|\mu\|$ menor o igual a K que cumple

$$\sum_{m \in E} \widehat{f}(m)\widehat{b}(m) = \int_{\mathbb{T}} f(t) d\mu(t).$$

Tomando $f(t) = e^{2\pi imt}$ obtenemos $\widehat{\mu}(m) = b(m)$ para todo $m \in E$.

Asumamos que vale *(4)* y tomemos $b : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ tal que $b(m) \to 0$ cuando $|m| \to \infty$. Usando el Lema 1.1.9, existe una sucesión $c(m)$ tal que $c(m) > 0$, $c(m) \to 0$ cuando $|m| \to \infty$, $c(-m) = c(m)$, y $|b(m)| \leq c(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Por *(4)*, existe una medida Boreliana finita μ que satisface $\widehat{\mu}(m) = b(m)/c(m)$ para todo $m \in E$. El Teorema 1.1.10 nos da la existencia de una función $g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{g}(m) = c(m)$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Luego, $b(m) = \widehat{g}(m)\widehat{\mu}(m)$ para todo $m \in E$. Como $f = g * \mu$ en L^1, se tiene $b(m) = \widehat{f}(m)$ para todo $m \in E$, y por lo tanto, *(4)* implica *(5)*.

Finalmente, si se verifica (5), probaremos que vale (3). Dada $f \in \mathscr{C}_E$, mostraremos que para toda sucesión arbitraria d_m que tiende a cero, se tiene $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(m) d_m\right| < \infty$. Esto implica que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(m)\right| < \infty$, por la dualidad entre c_0 y ℓ^1. Dada una sucesión $d_m \to 0$, por (5) podemos elegir una función $g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{g}(m)\widehat{f}(m) = |\widehat{f}(m)|\,|d_m|$ para todo $m \in E$. Luego, las series

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(m)\widehat{f}(m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \widehat{f * g}(m) \tag{1.4}$$

tienen términos no negativos y la función $f * g$ es continua, por lo que $F_N * (f * g)(0) \to (f * g)(0)$ cuando $N \to \infty$. Se sigue que $D_N * (f * g)(0) \to (f * g)(0)$. Luego las series de (1.4) convergen (ver Proposición 1.1.11) y por lo tanto $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(m) d_m\right| < \infty$. $\square$

Supongamos ahora que G es un grupo compacto y abeliano. Notaremos μ_G (o directamente μ) a la medida de Haar en G normalizada y $\hat{G}$ a su grupo dual. Podemos extender la definición de conjunto de Sidon a un grupo G de la siguiente manera.

Definición 1.2.3. Diremos que $\Lambda \subseteq \Gamma = \widehat{G}$ es ***conjunto de Sidon*** si toda $f \in \mathscr{C}_\Lambda(G)$ tiene serie de Fourier absolutamente convergente, es decir, si

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |\widehat{f}(\gamma)| = \sum_{\gamma \in \Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| < \infty.$$

Notar que podemos pensar a Γ como una sucesión $\{\gamma_n\}_n$ puesto que Γ es numerable. Si Λ es un conjunto de sidon, el principio de acotación uniforme nos garantiza la existencia de una constante $K > 0$ tal que

$$\sum_{\gamma \in \Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| \leq K \|f\|_\infty \tag{1.5}$$

para toda $f \in \mathscr{C}_\Lambda(G)$. Llamaremos *constante de Sidon de* Λ a la constante más chica K que satisface la desigualdad anterior y la notaremos $S(\Lambda)$.

Por otro lado, es claro que si la desigualdad anterior se verifica para toda $f \in \mathscr{C}_\Lambda(G)$, Λ es un conjunto de Sidon. Más aún, es suficiente que se cumpla para todo polinomio $P \in \mathscr{P}_\Lambda$. Al igual que para el caso $G = \mathbb{Z}$, el próximo teorema (análogo a la Proposición 1.2.2) nos dará distintas condiciones equivalentes a ser un conjunto de Sidon.

Teorema 1.2.4. *Las siguientes propiedades sobre un subconjunto Λ del grupo discreto $\Gamma = \widehat{G}$ son equivalentes:*

(1) Existe una constante K tal que para todo polinómio trigonométrico $P \in \mathscr{P}_\Lambda$, se tiene

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{P}(\gamma)| \leq K \|P\|_\infty$$

(2) Existe una constante K tal que para toda función $f \in \mathscr{C}_\Lambda(G)$ se verifica

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)| \leq K \|f\|_\infty .$$

(3) Para toda función $f \in L^\infty_\Lambda(G)$ se tiene que $\sum_{\gamma\in\Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| < \infty$.

(4) Para todo función $f \in \mathscr{C}_\Lambda(G)$ se tiene que $\sum_{\gamma\in\Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| < \infty$.

(5) A toda función acotada φ en Λ le corresponde una medida $\mu \in \mathscr{M}(G)$ tal que $\widehat{\mu}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ para todo $\gamma \in \Lambda$.

(6) A toda función $\varphi \in \mathscr{C}_0(\Lambda)$ le corresponde una función $f \in L^1(G)$ tal que $\widehat{f}(\gamma) = \varphi(\gamma)$ para todo $\gamma \in E$.

La prueba es similar al caso $G = \mathbb{Z}$ y se puede encontrar en [Rud11, Pág. 121].

Observación 1.2.5. El item *(2)* del Teorema anterior nos dice que si Λ es un conjunto de Sidon, la aplicación

$$\mathscr{F} : f \in \mathscr{C}_\Lambda \longmapsto \left(\widehat{f}(\gamma_n)\right)_n \in \ell^1(\Lambda)$$

está bien definida, es biyectiva, continua y, por lo tanto, un isomorfismo. Veremos en el Capítulo 4 que vale el recíproco, es decir, basta que exista un isomorfismo entre $\mathscr{C}_\Lambda$ y ℓ^1 para que Λ sea un conjunto de Sidon.

A continuación introduciremos una sucesión de funciones que aparecerán varias veces a lo largo de esta tesis.

Definición 1.2.6. Llamaremos *sucesión de variables Rademacher* a una sucesión variables aleatorias independientes $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathbb{P})$ que cumplen que

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = \tfrac{1}{2} \text{ para todo } n.$$

Daremos una interpretación diferente de las sucesiones Rademacher: las pensaremos como caracteres de un grupo compacto y abeliano. Para ello, notemos $\mathbb{E}$ al grupo multiplicativo con dos elementos -1 y 1 en $\mathbb{C}$. Consideremos el producto cartesiano $\mathbb{E}^{\infty} = \prod_{j\in\mathbb{N}} \mathbb{E}$, conocido como el *conjunto de Cantor*, y las funciones

$$R_j : \mathbb{E}_{\infty} \to \mathbb{T}, \qquad (j \in \mathbb{N}),$$

que a cualquier sucesión (ε_i) le asigna la coordenada j-ésima ε_j. Llamaremos ***funciones Rademacher*** a las R_j. Observemos que si le damos a $\mathbb{E}_{\infty}$ topología producto, este resulta compacto por el Teorema de Tychonoff. Además, como las funciones Rademacher son las proyecciones resultan continuas y por lo tanto son caracteres de un grupo compacto y abeliano.

El sistema de funciones Rademacher $\mathcal{R} = (R_1, R_2, \ldots)$ es un conjunto de Sidon. Supongamos primero la sucesión $(a_j)_{j=1}^n$ es real,luego eligiendo $\varepsilon = (\mathrm{sgn}(a_1), \ldots, \mathrm{sgn}(a_n), 1, \ldots) \in \mathbb{E}_{\infty}$ obtenemos

$$\sum_{j=1}^n |a_j| = |\sum_{j=1}^n a_j R_j(\varepsilon)| \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j R_j \right\|_{\infty}.$$

Para el caso general escribamos $a_j = c_j + d_j i$ (con c_j la parte real de a_j y d_j la imaginaria). Tomemos el número más grande entre $\sum_{j=1}^n |c_j|$ y $\sum_{j=1}^n |d_j|$, sin perdida de generalidad podemos suponer que es $\sum_{j=1}^n |c_j|$. Luego utilizando la cuenta anterior deducimos que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |a_j| = \sum_{j=1}^n |c_j + d_j i| &\leq \sum_{j=1}^n |c_j| + \sum_{j=1}^n |d_j| \leq 2 \sum_{j=1}^n |c_j| \\ &\leq 2|\sum_{j=1}^n c_j R_j| = 2|\,\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^n a_j R_j)| \leq 2|\sum_{j=1}^n a_j R_j|. \end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que $\sum_{j=1}^n |a_j| \leq 2 \left\| \sum_{j=1}^n a_j R_j \right\|_{\infty}$, es decir, obtenemos $K = 2$ en la definición (1.5). En [Sei97] Seigner probó que se puede mejorar el 2 calculando $S(\mathcal{R})$. Más precisamente, demostró el siguiente resultado:

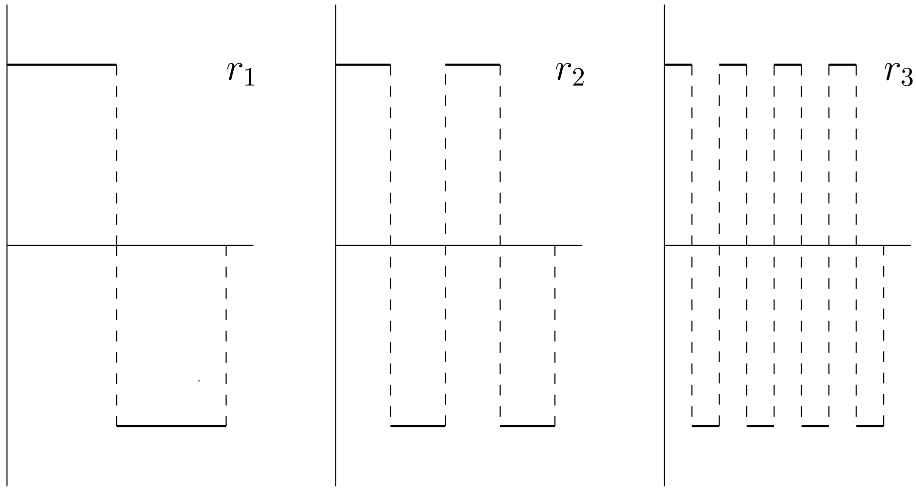
Teorema 1.2.7. *La constante de Sidon de el sistema Rademacher es igual a* $\frac{\pi}{2}$.

Concluiremos con una tercera interpretación del sistema Rademacher, la definición clásica de las funciones Rademacher, que nos servirá para definir los conceptos centrales de la sección siguiente.

Definición 1.2.8. El sistema de *funciones Rademacher* $\{r_n\}$ en $[0,1]$ se definen como

$$r_n(t) = sign \sin 2^n \pi t \qquad (t \in [0,1],\, n \in \mathbb{N})$$

Para comprender mejor las funciones Rademacher, es útil tener en mente el siguiente dibujo.



Es importante destacar que las funciones Rademacher forman una sucesión ortogonal en $L^2([0,1])$ (como podemos deducir de la imagen).

Observación 1.2.9. Estamos haciendo pequeño abuso de notación al llamar funciones Rademacher a funciones en principio diferentes. Sea $r(x)$ la función que es igual a 1 en $(0,1/2]$ y 1 en $(1/2,1]$ y es periódica con periodo uno en todo $\mathbb{R}$. Luego las funciones de Rademacher clásicas (como las definimos más arriba) son $r_n = r(2^{n-1}x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y $n \geq 1$. La expansión diádica de $x \in [0,1)$ nos da la correspondencia entre r_n y R_n.

1.3 Tipo y cotipo de espacio de Banach

Estudiaremos en esta sección la noción de tipo y cotipo de espacios de Banach. Estas definiciones serán indispensables para abordar los temas del Capítulo 4.

Vamos a necesitar las Definiciones 1.2.8 y 1.2.6 para definir los conceptos centrales de esta sección. Primero, notemos que se tiene la siguiente relación entre las definiciones.

Observación 1.3.1. Las funciones Rademacher $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de 1.2.8 son sucesiones Rademacher si consideramos $\Omega = [0,1]$. Luego,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \right\| dt = \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| = \int_\Omega \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(\omega) x_i \right\| d\mathbb{P}.$$

La desigualdad de Khintchine muestra un importante propiedad de este sistema.

Teorema 1.3.2 (Desigualdad de Khintchine)**.** *Existen constantes $A_p, B_p (1 \leq p < \infty)$ tales que para toda sucesión finita de escalares $(a_i)_{i=1}^n$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right\|_{L^p[0,1]} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Consideremos ahora coeficientes en un espacio de Banach X arbitrario en vez de escalares en $\mathbb{C}$, donde la desigualdad de Khinchine no es necesariamente válida. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado de Kahane (ver [Kah85, Capítulo 2]).

Teorema 1.3.3 (Desigualdad de Kahane-Khintchine)**.** *Para todo $1 \leq p < \infty$ existe una constante C_p tal que, para todo espacio de Banach X y para toda sucesión finita $(x_i)_{i=1}^m \in X$, se verifica la siguiente desigualdad:*

$$\mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \right) \leq \left(\mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^p \right) \right)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\| \right).$$

Vamos a obviar estas demostraciones. Una discusión más detallada de estos contenidos se puede encontrar por ejemplo en [AK06].

Definición 1.3.4. Definimos la ***distancia de Banach-Mazur*** entre dos espacios de Banach X e Y isomorfos como

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\| \, \|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ isomorfismo}\}.$$

Por convención diremos que $d(X, Y) = \infty$ si X e Y no son isomorfos.

Si trabajamos en un espacio de Banach X y tomamos un gran número de vectores $x_1, \ldots, x_n$, la desigualdad triangulares $\|\sum_{i=1}^n x_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ se vuelve poco precisa. En cambio, los espacios de Hilbert tiene una estructura mucho más rica, y si los x_i son ortogonales, se tiene exactamente que $\|\sum_{i=1}^n x_i\| = \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2\right)^{1/2}$. Más en general, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3.5 (Identidad del paralelogramo generalizada)**.** *Sea X un espacio de Banach. Entonces, se tiene:*

(1) X es isométricamente isomorfo a un espacio de Hilbert si y solamente si, para todo $x, y \in X$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(2) Siempre vale que

$$\frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) \leq \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) \leq 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

(3) Para todo espacio de Hilbert H, y todo $x_1, \ldots, x_n \in H$, se tiene

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

(2) Si X es isomorfo a un espacio de Hilbert H, y si la distancia de Banach-Mazur $d_X = d(X, H) \leq C$, entonces se tiene

$$\frac{1}{C^2} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \leq \frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n\|^2 \leq C^2 \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 .$$

Para la demostración se puede consultar [LQ04, pág. 161].

Otra forma de escribir $\sum\limits_{\theta_i = \pm 1}$ es utilizar variables aleatorias de Bernoulli independientes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (variables Rademacher). En efecto,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\theta_i = \pm 1} \|\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_n x_n\|^2 = \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^2 = \int_{\Omega} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(\omega) x_i \right\|^2 d\mathbb{P}(\omega).$$

Por lo tanto, la desigualdad (4) se puede reescribir como

$$\frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|_{L^2(\Omega, X)} \leq C \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

De aquí se desprenden dos preguntas naturales:

(a) ¿Qué pasa si consideramos una sola de las desigualdades y los x_i en un espacio de Banach arbitrario?

(b) ¿Qué pasa si cambiamos el exponente 2?

Esto nos lleva a considerar las siguientes desigualdades.

1) $$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^r \right)^{1/r} \leq C \left(\sum_{i=1} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} ;$$

2). $$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \right\|^r \right)^{1/r} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Estas desigualdades nos permitirán, en cierto sentido, medir cuanto dista un espacio de Banach X de ser un espacio de Hilbert.

Algunas observaciones. Primero, el rol de r no es importante ya que podemos cambairlo gracias a la desigualdad de Khintchine-Kahane. La segunda observación es que, si queremos que

(1) y 2) valgan para toda sucesión finita (de cualquier largo n) necesariamente $p \leq 2$ y $q \geq 2$. En efecto, si tomamos $r = 2$ y tomamos un mismo vector x de norma 1 obtendremos de (1) que $\sqrt{n} \leq Cn^{\frac{1}{p}}$, para todo $n \geq 1$. Esto solo es posible si $p \leq 2$. Del mismo modo, (2) exige que $q \geq 2$. Toda esta discusión nos lleva a considerar las siguientes dos definiciones.

Definición 1.3.6. Sea $1 \leq p \leq 2$. Diremos que un espacio de Banach X tiene ***tipo p*** si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n$ de elementos de X se tiene

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_p\right)^{1/p}.$$

A la mejor constante C la llamaremos *constante de tipo* p de X, y la notaremos $T_p(X)$.

Definición 1.3.7. Sea $2 \leq q \leq \infty$. Diremos que un espacio de Banach X tiene ***cotipo q*** si existe una constante $C > 0$ tal que para toda sucesión finita $x_1, \dots, x_n$ de elementos de X se tiene

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|_q\right)^{1/q} \leq C\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right\|^q\right)^{1/q}.$$

A la mejor constante C que verifica la desigualdad anterior la llamaremos *constante de cotipo* q de X, y la notaremos $C_q(X)$.

Observación 1.3.8. 1) Debemos tener en cuenta, que si un espacio tiene tipo p, entonces tiene tipo p' para todo $p' \leq p$. Análogamente, si tiene cotipo q también tiene cotipo q' para todo $q' \geq q$.

2) Todo espacio es trivialmente de tipo 1, esto es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular, y de cotipo $+\infty$ por que $\left\|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|_2 \geq \max_{i \leq n} \|x_i\|$, debido a la simetría de las variables Bernoulli.

Diremos que X tiene *tipo no trivial* (respectivamente *cotipo* no trivial) si tiene tipo p para algún $p > 1$ (respectivamente cotipo q para algún $q < +\infty$).

Capítulo 2

Series lagunares

En este capítulo desarrollaremos distintas propiedades y aplicaciones de las series de Fourier con grandes lagunas de ceros. Estas series gozan de buenas propiedades, una de las cuales es la equivalencia de sus normas en L^p para $1 \leq p < \infty$. Además, las series lagunares son un objeto fundamental para nuestro trabajo, pues nos provee el primer ejemplo no trivial de conjuntos de Sidon.

2.1 Definición y propiedades básicas

Definición 2.1.1. Una sucesión de números enteros positivos $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ se dice ***lagunar*** o ***de Hadamard*** si existe una constante $A > 1$ que cumple que $\lambda_{k+1} \geq A\lambda_k$ para todo $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Los ejemplos más simples son las sucesiones de la forma $\lambda_k = b^k$ con $b \geq 2$ y $b \in \mathbb{N}$. Observemos que las sucesiones lagunares tienden a infinito cuando $k \to \infty$, esto se debe a la relación entre los terminos dado por

$$\lambda_k \geq A\lambda_{k-1} \geq A^2\lambda_{k-2} \geq \ldots \geq A^k\lambda_0.$$

Otra observación importante es la siguiente:

Observación 2.1.2. Para todo $m, k_0 \in \mathbb{Z}$ se tiene que si

$$1 \leq |m - \lambda_{k_0}| < (1 - A^{-1})\lambda_{k_0},$$

entonces $m \notin \Lambda$.

Demostración. Para probar esto notemos primero que dado $\lambda_{k_0} \in \Lambda$, el número más cercano a λ_{k_0} que está en la sucesión tiene que ser λ_{k_0+1} o bien λ_{k_0-1} (si $k_0 > 1$). Entonces, si $j > k_0$

tendremos

$$|\lambda_j - \lambda_{k_0}| \geq \lambda_{k_0+1} - \lambda_{k_0} \geq A\lambda_{k_0} - \lambda_{k_0} = (A-1)\lambda_{k_0} \geq (1 - A^{-1})\lambda_{k_0},$$

similarmente en el caso $j < k_0$

$$|\lambda_j - \lambda_{k_0}| \geq \lambda_{k_0} - \lambda_{k_0-1} \geq \lambda_{k_0} - A^{-1}\lambda_{k_0} = (1 - A^{-1})\lambda_{k_0}.$$

Por lo tanto deducimos que vale 2.1.2. □

Vamos a estudiar distintas propiedades y aplicaciones de las *series de Fourier lagunar*, aquellas de la forma

$$\sum_k a_k e^{2\pi i \lambda_k x} \qquad a_k \in \mathbb{C},$$

donde $\{\lambda_k\}_k$ es una sucesión lagunar. Comenzaremos con una proposición que nos permitirá construir una función de Weierstrass explícita, una función continua en todo punto y que no es diferenciable en ninguno.

Proposición 2.1.3. *Sea $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión lagunar y sea f una función integrable en el toro $\mathbb{T}$ que es diferenciable en un punto y cuyos coeficientes de Fourier son*

$$\hat{f}(m) = \begin{cases} a_m & si\ m = \lambda_k; \\ 0 & si\ m \neq \lambda_k. \end{cases} \tag{2.1}$$

Entonces,

$$\lim_{k\to\infty} \hat{f}(\lambda_k)\lambda_k = 0.$$

Demostración. Mediante traslaciones podemos asumir que el punto donde f es diferenciable es el cero. Podemos reemplazar f por la función de período uno

$$g(t) = f(t) - f(0)\cos(2\pi t) - f'(0)\frac{\sin(2\pi t)}{2\pi}$$

para que $f(0) = f'(0) = 0$. Notar que por más que cambiamos la función los coeficientes de Fourier de f y g coinciden para $|m| \geq 2$ y por lo tanto la conclusión de la proposición es equivalente. Gracias a la Observación 2.1.2 y (2.1.3) obtenemos que para todo $m \in \mathbb{Z}$

$$1 \leq |m - \lambda_k| < (1 - A^{-1})\lambda_k \implies \hat{f}(m) = 0. \tag{2.2}$$

Notaremos $[t]$ a la parte entera de t. Dado $\varepsilon > 0$, elijamos un entero positivo k_0 tal que si $[(1 - A^{-1})\lambda_{k_0}] = 2N_0$, entonces $N_0^{-2} < \varepsilon$, y

$$\sup_{|x|<N_0^{-\frac{1}{4}}} \left|\frac{f(x)}{x}\right| < \varepsilon. \tag{2.3}$$

La expresión (2.3) puede hacerse arbitrariamente chica, debido a que f es diferenciable en el origen. Tomemos ahora un entero k con $k \geq k_0$ y $2N = [\min(A-1, 1-A^{-1})\lambda_k]$, es claro que es mayor o igual a $2N$. Usando (2.2), obtenemos que para todo polinomio trigonométrico K_N de grado $2N$ con $\widehat{K}_N(0) = 1$, se tiene

$$\widehat{f}(\lambda_k) = \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{2}} f(x)K_N(x)e^{-2\pi\lambda_k x}dx. \tag{2.4}$$

Tomemos $K_N = (F_N/\|F_N\|_{L^2})^2$, donde F_N es el núcleo de Fejér. Usando (1.1.4) obtenemos primero la identidad

$$\|F_N\|_{L^2}^2 = \sum_{j=-N}^{N}\left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right)^2 = 1 + \frac{1}{3}\frac{N(2N+1)}{N+1} > \frac{N}{3} \tag{2.5}$$

y también la estimación

$$F_N(x)^2 \leq \left(\frac{1}{N+1}\frac{1}{4x^2}\right)^2, \tag{2.6}$$

que es válida para $|x| \leq 1/2$. Juntando (2.5) y (2.6), obtenemos

$$K_N(x) \leq \frac{3}{16}\frac{1}{N^3}\frac{1}{x^4}. \tag{2.7}$$

Usemos ahora (2.4) para obtener

$$\lambda_k\widehat{f}(\lambda_k) = \lambda_k \int\limits_{|x|\leq\frac{1}{2}} f(x)K_N(x)e^{-2\pi i\lambda_k x}dx = I_k^1 + I_k^2 + I_k^3,$$

donde

$$I_k^1 = \lambda_k \int\limits_{|x|\leq N^{-1}} f(x)K_N(x)e^{-2\pi i\lambda_k x}dx,$$

$$I_k^2 = \lambda_k \int\limits_{N^{-1}<|x|\leq N^{-\frac{1}{4}}} f(x)K_N(x)e^{-2\pi i\lambda_k x}dx,$$

$$I_k^3 = \lambda_k \int\limits_{N^{-\frac{1}{4}}<|x|\leq\frac{1}{2}} f(x)K_N(x)e^{-2\pi i\lambda_k x}dx,$$

Dado que $\|K_N\|_{L^1} = 1$, se sigue que

$$|I_k^1| \leq \frac{\lambda_k}{N}\sup_{|x|<N^{-1}}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leq \frac{(2N+1)\varepsilon}{\min(A-1, 1-A^{-1})N},$$

puede hacerse arbitrariamente chico si tomamos el ε suficientemente pequeño. Además, por (2.7) obtenemos

$$|I_k^2| \leq \frac{3\lambda_k}{16N^3}\sup_{|x|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \int\limits_{N^{-1}<|x|\leq N^{-\frac{1}{4}}} \frac{dx}{|x|^3} \leq \frac{3\lambda_k}{16N}\sup_{|x|<N^{-\frac{1}{4}}}\left|\frac{f(x)}{x}\right|,$$

que, como ya observamos, está acotada por una constante multiplicada por ε. Finalmente, si usamos nuevamente (2.7), nos queda

$$|I_k^3| \leq \frac{3}{16N^3} N\lambda_k \int\limits_{N^{-\frac{1}{4}}<|x|\leq\frac{1}{2}} |f(x)|dx \leq \frac{3}{16N^2} \|f\|_{L^1} < \frac{3\varepsilon}{16} \|f\|_{L^1} .$$

Deducimos entonces que para todo $k \geq k_0$ se verifica

$$|\lambda_k \widehat{f}(\lambda_k)| \leq |I_k^1| + |I_k^2| + |I_k^3| \leq C(f)\varepsilon,$$

para una constante $C(f)$ fija. De esta manera concluimos la demostración del Teorema. $\square$

Corolario 2.1.4 (Weierstrass)**.** *Existe una función continua en el toro que es no diferenciable en todo punto.*

Demostración. Consideremos la función de período uno

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} e^{2\pi i 3^k t}.$$

La serie converge absoluta y uniformemente y por lo tanto f es continua, pues cada termino lo es. Si f fuese diferenciable en algún punto, por la proposición anterior 2.1.3 tendríamos que $3^k \hat{f}(3^k)$ tiende a cero cuando $k \to \infty$. Sin embargo, como $\hat{f}(3^k) = 2^{-k}$ $(k \geq 0)$, nos queda que $3^k 2^{-k}$ tiende a infinito lo que contradice que f sea diferenciable en el algún punto. En consecuencia, f es no diferenciable en todo punto. $\square$

2.2 Equivalencia de normas L^p para series lagunares

En esta sección probaremos una propiedad muy importante de las series lagunares, la equivalencia de sus normas en $L_p(\mathbb{T})$. Las series de Fourier lagunares tienen normas L^p comparables para $1 \leq p < \infty$, es decir, vale el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ una sucesión lagunar con constante $A > 1$. Luego, para todo $1 \leq p < \infty$, existe una constante $C_p(A)$ que cumple que para toda función $f \in L^1_\Lambda(\mathbb{T})$ ($f \in L^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(k) = 0$, cuando $k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$) se tiene*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p(A) \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} . \tag{2.8}$$

Como la otra desigualdad vale siempre, puesto que $\mathbb{T}$ tiene medida finita y $1 \leq p$, concluimos que todas las normas L^p de series de Fourier lagunares son equivalentes para $1 \leq p < \infty$.

Demostración. Supongamos que $f \in L^2(\mathbb{T})$ y f no es la función cero (en cuyo caso se cumple trivialmente). Consideremos la serie de Fourier de f truncada hasta el lugar N

$$f_N(x) = \sum_{j=1}^{N} \hat{f}(\lambda_j) e^{2\pi i \lambda_j x}. \tag{2.9}$$

Dado $2 \leq p < \infty$, elijamos un entero m que cumpla que $2m > p$ y un entero r tal que $A^r > m$. Escribamos a f_N como la suma de r funciones φ_s con $s = 1, 2, \ldots, r$, donde las φ_s tienen coeficientes de Fourier cero salvo tal vez en el conjunto lagunar

$$\Lambda_s = \{\lambda_{kr+s} : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} = \{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots\}.$$

Es decir, estamos partiendo nuestra función f_N en r sumandos según la congruencia de los índices de sus coeficientes de Fourier módulo r. Es claro de la definición que Λ_s es una sucesión lagunar con constante A^r para todo $s = 1, \ldots, r$.

Afirmamos que las φ_s satisfacen

$$\int_0^1 |\varphi_s(x)|^{2m} \, dx = \sum_{\substack{1 \leq j_1, \ldots, j_m, k_1, \ldots, k_m \leq N \\ \mu_{j_1} + \cdots + \mu_{j_m} = \mu_{k_1} + \cdots + \mu_{k_m}}} \hat{\varphi}_s(\mu_{j_1}) \ldots \hat{\varphi}_s(\mu_{j_m}) \overline{\hat{\varphi}_s(\mu_{k_1})} \ldots \overline{\hat{\varphi}_s(\mu_{k_m})}. \tag{2.10}$$

Para ver esto, notemos que, la función φ_s coincide con su serie de Fourier y los coeficientes fuera de los lugares μ_j son cero. Llamemos N_s al lugar hasta donde suma cada φ_s, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_s^m(x) &= \left(\sum_{j \leq N_s} \hat{\varphi}_s(\mu_j) e^{2\pi i \mu_j x} \right)^m \\
&= \sum_{1 \leq j_1, \ldots, j_m \leq N_s} \hat{\varphi}_s(\mu_{j_1}) \ldots \hat{\varphi}_s(\mu_{j_m}) e^{2\pi i \left(\mu_{j_1} + \cdots + \mu_{j_m}\right) x}.
\end{aligned}$$

Para calcular el módulo al cuadrado podemos multiplicar por la misma expresión conjugada, así obtenemos que $|\varphi_s^m|^2$ es igual a

$$\sum_{\substack{1 \leq j_1, \ldots, j_m, \\ k_1, \ldots, k_m \leq N_s}} \hat{\varphi}_s(\mu_{j_1}) \ldots \hat{\varphi}_s(\mu_{j_m}) \overline{\hat{\varphi}_s}(\mu_{k_1}) \ldots \overline{\hat{\varphi}_s}(\mu_{k_m}) e^{2\pi i \left((\mu_{j_1} + \cdots + \mu_{j_m}) - (\mu_{k_1} + \cdots + \mu_{k_m}) \right) x}.$$

Para concluir la afirmación (2.10) solo tenemos que integrar y utilizar la ortogonalidad de las exponenciales.

Veamos ahora que si $\mu_{j_1} + \ldots + \mu_{j_m} = \mu_{k_1} + \ldots + \mu_{k_m}$, entonces

$$\max(\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}) = \max(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m}).$$

Supongamos que $\max(\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}) > \max(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m})$, luego

$$\begin{aligned}
\max(\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}) &\leq \mu_{j_1} + \cdots + \mu_{j_m} \\
&= \mu_{k_1} + \cdots + \mu_{k_m} \\
&\leq m \max(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m}).
\end{aligned}$$

Pero como $\{\mu_k\}$ es una sucesión lagunar de constante A^r vale que

$$A^r \max(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m}) \leq \max(\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}),$$

tendríamos entonces que $A^r \leq m$, lo que contradice la forma en la que elegimos el r. De forma análoga se elimina el caso contrario, en el que $\max(\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}) < \max(\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m})$. Concluimos entonces que los números deben coincidir. Podemos ahora continuar con este razonamiento y por inducción obtener que si $\mu_{j_1} + \ldots + \mu_{j_m} = \mu_{k_1} + \ldots + \mu_{k_m}$, entonces

$$\{\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_m}\} = \{\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_m}\}.$$

Usando esto en la suma múltiple (2.10) obtenemos

$$\int_0^1 |\varphi_s(x)|^{2m} dx = \sum_{j_1=1}^{N_s} \ldots \sum_{j_m=1}^{N_s} |\hat{\varphi}_s(\mu_{j_1})|^2 \ldots |\hat{\varphi}_s(\mu_{j_m})|^2 = \left(\|\varphi_s\|_{L^2}^2\right)^m,$$

lo que implica que $\|\varphi_s\|_{L^{2m}} = \|\varphi_s\|_{L^2}$ para todo $s \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Entonces,

$$\|f_N\|_{L^p} \leq \|f_N\|_{L^{2m}} \overset{(a)}{\leq} \sqrt{r} \left(\sum_{s=1}^{r} \|\varphi_s\|_{L^{2m}}^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(b)}{=} \sqrt{r} \left(\sum_{s=1}^{r} \|\varphi_s\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(c)}{=} \sqrt{r}\, \|f_N\|_{L^2},$$

donde en (a) usamos la desigualdad de Hölder, en (b) la igualdad obtenida anteriormente y en (c) la ortogonalidad de las φ_s en L^2 (son polinomios de exponenciales disjuntas). Podemos tomar $r = [\log_A m] + 1$ y $m = [\frac{p}{2} + 1]$, y por lo tanto deducimos la desigualdad

$$\|f_N\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c_p(A)\, \|f_N\|_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad p \geq 2, \tag{2.11}$$

con $c_p(A) = \sqrt{1 + [\log_A([\frac{p}{2}] + 1)]}$ para toda $f \in L^2(\mathbb{T})$.

El paso siguiente es cambiar f_N por f en (2.11).Recordemos que estamos asumiendo que f está en L^2. Notar que en estas condiciones $f_N \to f$ en L^2 y por lo tanto existe una subsucesión f_{N_j} que tiende a f c.t.p.. Luego, por el lema de Fatou y la desigualdad (2.11) que tenemos para las f_N, obtenemos para $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(x)|^p dx &= \int_0^1 \liminf_{j\to\infty} |f_{N_j}(x)|^p dx \\
&\leq \liminf_{j\to\infty} \int_0^1 |f_{N_j}(x)|^p dx \\
&\leq c_p(A)^p \liminf_{j\to\infty} \left\|f_{N_j}\right\|_{L^2}^p \\
&= c_p(A)^p \|f\|_{L^2}^p.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq c_p(A) \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad p \geq 2. \tag{2.12}$$

Recordemos que este teorema pretende comparar la norma L^p con la norma en L^1, recién pudimos, bajo ciertas hipótesis, encontrar una desigualdad entre la norma en L^p (con $p \geq 2$) y en L^2, por lo tanto si conseguimos una desigualdad que relacione la norma en L^2 con la norma en L^1 podremos deducir el resultado (seguimos suponiendo $f \in L^2(\mathbb{T})$). Aplicando la desigualdad de Hölder con $p = 3$ y $q = \frac{3}{2}$ en $|f|^2 = |f|^{\frac{4}{3}}|f|^{\frac{2}{3}}$ obtenemos

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f|^2 dx = \int_0^1 |f|^{\frac{4}{3}}|f|^{\frac{2}{3}} dx = \left(\int_0^1 |f|^4 dx\right)^{\frac{4}{3}} \left(\int_0^1 |f| dx\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Tomando raíz cuadrada en la expresión anterior nos queda

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^4}^{\frac{2}{3}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{3}}.$$

Uniendo los resultados obtenemos

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^4}^{\frac{2}{3}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{3}} \leq ([\log_A 3 + 1])^{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}} \|f\|_{L^2}^{\frac{2}{3}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{3}}.$$

Como estamos suponiendo $0 < \|f\|_{L^2} < \infty$, de la desigualdad anterior se deduce que

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq ([\log_A 3 + 1]) \|f\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{2.13}$$

Por otro lado, por la desigualad de Hölder sabemos que

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}, \qquad 1 \leq p < 2. \tag{2.14}$$

Combinando (2.12) y (2.13) con (2.14) obtenemos que vale el teorema con

$$C_p(A) = c_p(A) ([\log_A 3] + 1)$$

para todo $1 \leq p < \infty$ siempre que $\hat{f}(k) = 0$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$ y que $f \in L^2$.

El paso siguiente es extender este resultado para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$ con $\hat{f}(k) = 0$ para $k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$, consideremos las funciones $f * F_M$, donde F_M es el núcleo de Fejér y $M \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Luego $f * F_M$ está en L^2 y $f * F_M$ converge a f en L^1 y en L^p. Además, tenemos que $\widehat{f * F_M}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z} \setminus \Lambda$. Luego, podemos aplicar lo visto a $f * F_M$, obteniendo

$$\|f * F_M\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq C_p(A) \|f * F_M\|_{L^1(\mathbb{T})}. \tag{2.15}$$

Tomando límite de $M \to \infty$ deducimos el Teorema 2.8. $\square$

El teorema anterior describe la equivalencia entre las normas L^p de las series de Fourier lagunares para $p < \infty$. El paso siguiente es preguntarse qué podemos decir para el caso L^∞ de series de Fourier lagunares. Para atacar este problema vamos a necesitar de una herramienta llamada productos de Riesz que desarrollaremos a continuación.

Definición 2.2.2. Un ***producto de Riesz*** es una función de la forma

$$P_N(x) = \prod_{j=1}^{N} (1 + a_j \cos(2\pi\lambda_j x + 2\pi\gamma_j)), \tag{2.16}$$

donde N es un entero positivo, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_N$ es una sucesión lagunar de enteros positivos, $a_j \in [-1, 1]$, y $\gamma_j \in [0, 1]$.

Nuestro objetivo será calcular los coeficientes de Fourier de cualquier producto de Riesz, para ello el siguiente lema será de utilidad.

Lema 2.2.3. *Sea $\{\lambda_j\}$ es una sucesión lagunar con constante A. Entonces,*

(1) Si $A \geq 2$ se tiene que para $j \geq N + 1$ no puede escribirse una combinación lineal de la forma

$$\lambda_j = \varepsilon_1\lambda_1 + \cdots + \varepsilon_N\lambda_N,$$

donde $\varepsilon_j \in \{-1, 1, 0\}$.

(2) Si $A \geq 3$ para cada entero m tiene a lo sumo una escritura de la forma

$$m = \varepsilon_1\lambda_1 + \cdots + \varepsilon_N\lambda_N, \tag{2.17}$$

donde $\varepsilon_j \in \{-1, 1, 0\}$.

Demostración. Para probar *(1)* vamos a razonar por el absurdo. Supongamos que existe una combinación lineal

$$\lambda_j = \varepsilon_1\lambda_1 + \cdots + \varepsilon_N\lambda_N. \tag{2.18}$$

Como los λ_k son positivos tomando módulo y usando la desigualdad triangular obtendremos

$$\lambda_j \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_N.$$

Recordemos que por la definición de sucesión lagunar se tiene que $\lambda_j \geq A^{j-k}\lambda_k$ para todo $1 \leq k \leq N$, equivalentemente $\lambda_k \leq A^{k-j}\lambda_j$. Por lo tanto,

$$\lambda_j = \lambda_1 + \ldots + \lambda_N \leq \sum_{k=1}^{N} A^{k-j}\lambda_j = \frac{\lambda_j}{A^j}\sum_{k=1}^{N} A^k = \lambda_j \frac{A^{-j}(A^{N+1} - A)}{A - 1}. \tag{2.19}$$

Utilizando que $A \geq 2$, tenemos:

$$\frac{A^{-j}(A^{N+1}-A)}{A-1} \leq A^{-(j-1)}\left(A^N-1\right) < 1. \tag{2.20}$$

Combinando esto con (2.19) llegamos a un absurdo.

Resta probar *(2)*.Supongamos que existen dos $N-$uplas $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N)$ que satisfacen (2.17) y tomemos el k más grande tal que los coeficientes de λ_k sean diferentes. Luego restando ambas expresiones obtenemos

$$0 = \nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_{k-1}\lambda_{k-1} + \nu_k\lambda_k,$$

donde ahora los ν_j toman valores en $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y $\nu_k \neq 0$. Si despejamos λ_k vamos a estar en una situación muy similar a (1). En efecto,

$$-\nu_k\lambda_k = \nu_1\lambda_1 + \cdots + \nu_{k-1}\lambda_{k-1}.$$

Tomando módulo, aplicando desigualdad triangular y usando que los λ_k son positivo obtenemos

$$|\nu_k|\lambda \leq |\nu_1|\lambda_1 + \cdots + |\nu_{k-1}|\lambda_{k-1} \leq 2\left(\lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1}.\right)$$

La definición de sucesión lagunar nos permite comparar λ_j con λ_k para todo $j < k$ y así se tiene

$$\lambda_k \leq |\nu_k|\lambda_k \leq 2\sum_{i=1}^{k-1} A^{i-k}\lambda_k = \frac{2\lambda_k}{A^k}\sum_{i=1}^{k-1} A^i = 2\lambda_k\frac{A^{-k}(A^k-A)}{A-1}.$$

Imitando la cuenta hecha en (2.19) y usando ahora que $A \geq 3$ obtenemos que esto es un absurdo, de esta manera se concluye que de existir hay una única combinación lineal. $\square$

Veamos algunas propiedades de los productos de Riesz. Si escribimos $P_N = \prod_{j=1}^N P_{N,j}$ con $P_{N,j} = (1 + a_j\cos(2\pi\lambda_j x + 2\pi\gamma_j))$ y calculamos los coeficientes de Fourier de $P_{N,j}$ obtenemos

$$\widehat{P_{N,j}}(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0; \\ \frac{1}{2}a_j e^{2\pi i\gamma_j} & \text{si } m = \lambda_j; \\ \frac{1}{2}a_j e^{-2\pi i\gamma_j} & \text{si } m = -\lambda_j; \\ 0 & \text{si } m \notin \{0\} \cup_{j=1}^\infty \{\lambda_j, -\lambda_j\}. \end{cases} \tag{2.21}$$

Calculemos los coeficientes de Fourier del producto de Riesz P_N. Para cada entero fijo b, notaremos δ_b la sucesión de enteros que es igual a 1 en b y cero en el resto de los lugares. Usando esta notación podemos reescribir 2.21 para obtener

$$\widehat{P_{N,j}} = \delta_0 + \frac{1}{2}a_j e^{2\pi i\gamma_j}\delta_{\lambda_j} + \frac{1}{2}a_j e^{-2\pi i\gamma_j}\delta_{-\lambda_j}.$$

Luego $\widehat{P_N}$ es la convolución de estas funciones. Usando que $\delta_a * \delta_b = \delta_{a+b}$, nos queda

$$\widehat{P_N}(m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0; \\ \prod_{j=1}^{N} \frac{1}{2} a_j e^{2\pi i \varepsilon_j \gamma_j} & \text{si } m = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \lambda_j \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{N} |\varepsilon_j| > 0; \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Por lo tanto, si asumimos $A \geq 3$, combinando el cálculo de los coeficientes de fourier con el Lema 2.2.3 deducimos que $\widehat{P_N}(\lambda_j) = 0$ cuando $j \geq N+1$. Por otro lado, se tiene que $\widehat{P_N}(\lambda_k) = \frac{1}{2} a_j e^{2\pi i \gamma_k}$ si $1 \leq k \leq N$, dado que cada λ_k puede escribirse como $0.\lambda_1 + \ldots + 0.\lambda_{k-1} + 1.\lambda_k$.

A continuación daremos otra propiedad importante de los productos de Riesz. Supongamos que para un $m \in \mathbb{Z}$ se tiene que $\widehat{P_N}(m) \neq 0$. Escribamos $m = \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j \lambda_j$ de manera única con $\varepsilon_j \in \{-1, 1, 0\}$. Sea k el entero más grande y menor que N que cumple que $\varepsilon_k \neq 0$. Entonces, se verifica

$$||m| - \lambda_k| \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{k-1} \leq \frac{\lambda_k}{A^{k-1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{A^k} \leq \frac{\lambda_k}{A} \frac{1}{1 - \frac{1}{A}} = \frac{\lambda_k}{A - 1}. \tag{2.23}$$

Una última propiedad de los productos de Riesz que nos va a ser útil más adelante es que la norma en L^1 es igual a 1. Se deduce fácilmente de que $P_N \geq 0$ y del cálculo de los coeficientes de Fourier,

$$\|P_N\|_{L^1} = \int_{\mathbb{T}} P_N(t) dt = \widehat{P_N}(0) = 1. \tag{2.24}$$

Notaremos $A(\mathbb{T})$ al espacio de funciones con serie de Fouerier absolutamente convergente dotado con la norma dada por la norma ℓ^1 de sus coeficientes.

Estamos en condiciones de enunciar el teorema más importante de está sección del cual deduciremos que las sucesiones lagunares son conjuntos de Sidon.

Teorema 2.2.4. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ una sucesión lagunar de enteros con constante $A > 1$. Luego existe una constante $C(A)$ tal que para toda $f \in L^\infty_\Lambda(\mathbb{T})$ se verifica*

$$\|f\|_{A(\mathbb{T})} = \sum_{k \in \Lambda} |\hat{f}(k)| \leq C(A) \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T})} . \tag{2.25}$$

Demostración. Veamos primero el caso en el que $A \geq 3$. Fijemos $f \in L^\infty(\mathbb{T})$.Consideremos el siguiente producto de Riesz

$$P_N(x) = \prod_{j=1}^{N} (1 + \cos(2\pi\lambda_j x + 2\pi\gamma_j)) ,$$

donde los γ_j están tomados para que se cumpla la identidad $|\widehat{f}(\lambda_j)| = e^{2\pi i \gamma_j}\overline{\widehat{f}(\lambda_j)}$. Gracias a la desigualdad de Parseval y usando que $\|P_N\|_{L^1} = 1$ obtenemos

$$\left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{P_N}(m)\overline{\widehat{f}(m)}\right| = \left|\int_0^1 P_N(x)\overline{f(x)}dx\right| \leq \|f\|_{L^\infty}. \tag{2.26}$$

Notar que esta suma es finita por que vimos anteriormente que los coeficientes $\widehat{P_N}(m)$ forman una sucesión finitamente soportada (ver (2.22) y los comentarios subsiguientes). Sabemos que $\hat{f}(m) = 0$ para $m \notin \Lambda$, mientras que $\widehat{P_N}(\lambda_j) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\gamma_j}$ para $1 \leq j \leq N$ (debido a que $A \geq 3$), y además, $\widehat{P_N}(\lambda_j) = 0$ para $j \geq N+1$. Por lo tanto, (2.26) se reduce a

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left|\hat{f}(\lambda_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}e^{2\pi i\gamma_j}\overline{\hat{f}(\lambda_j}\right| \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Haciendo tender N a infinito deducimos que $\sum_{j=1}^{\infty}\left|\hat{f}(\lambda_j)\right| \leq 2\|f\|_{L^\infty}$, lo que prueba el Teorema cuando $A \geq 3$.

Consideremos ahora el caso $1 < A < 3$ y elijamos r un entero positivo que cumpla

$$A^r > 3 \qquad y \qquad \frac{1}{A^r - 1} < 1 - \frac{1}{A}. \tag{2.27}$$

Esto se puede hacer ya que $\lim_{r\to\infty}(A^r-1)^{-1} = 0$. Una vez más usaremos la idea de dividir la sucesión en los terminos que sean congruentes a s módulo r, es decir, para cada $s \in \{1,\ldots,r\}$, definimos $\lambda_k^s = \lambda_{s+(k-1)r}$ indexada por $k = 1,2,\ldots$. Observemos que $\lambda_{k+1}^s \geq A^r\lambda_k^s$ para todo k, es decir, la sucesión λ_k^s es lagunar con constante A^r. Consideremos el producto de Riesz

$$P_N^s(x) = \prod_{k=1}^{N}\left(1+\cos(2\pi\lambda_k^s x + 2\pi\gamma_k^s)\right),$$

donde, como antes, los γ_k^s los elegimos para que satisfagan $\left|\hat{f}(\lambda_k^s)\right| = e^{2\pi\gamma_k^s}\overline{\hat{f}(\lambda_k^s)}$. Usando (2.23) obtenemos que, si $m \in \mathbb{Z}$ cumple que $\widehat{P_N^s}(m) \neq 0$, existe un $k \in \{1,2,\ldots,N\}$ tal que

$$||m| - \lambda_k^s| < \frac{\lambda_k^s}{A^r - 1}.$$

Combinando esto con la forma en el que elegimos el r en (2.27) se satisface

$$||m| - \lambda_k^s| < \left(1 - \frac{1}{A}\right)\lambda_k^s.$$

Usando la Oservación 2.1.2 obtenemos que $m = \pm\lambda_k^s$ o $|m| \notin \Lambda$. Por lo tanto,

$$\{m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} : \widehat{P_N^s}(m) \neq 0\} \subseteq \{\lambda_1^s,\ldots,\lambda_N^s\} \cup \Lambda^c.$$

Por la observación anterior, el hecho de que $\widehat{f}$ está soportada en Λ y la igualdad de Parseval se verifica

$$\left|\sum_{k=1}^{N} \widehat{P_N^s}(\lambda_k^s)\overline{\widehat{f}(\lambda_k^s)}\right| = \left|\sum_{m\in\mathbb{Z}} \widehat{P_N^s}(m)\overline{\widehat{f}(m)}\right| = \left|\int_0^1 P_N^s(x)\overline{f(x)}dx\right| \leq \|f\|_{L^\infty}. \tag{2.28}$$

Dado que $\widehat{P_N}(\lambda_k^s) = \frac{1}{2}e^{2\pi i\gamma_k^s}$ para $1 \leq k \leq N$, (2.28) queda

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left|\widehat{f}(\lambda_k^s)\right| \leq \|f\|_{L^\infty}.$$

Haciendo N tender a infinito obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\widehat{f}(\lambda_k^s)\right| \leq 2\|f\|_{L^\infty}.$$

Por último, sumando sobre s obtenemos lo que queríamos con $C(A) = 2r$. □

Corolario 2.2.5. *Sea $\Lambda = \{\lambda_k : k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ una sucesión lagunar y sea f una función acotada en el toro que satisface $\widehat{f}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}\setminus\Lambda$. Luego, f es en casi todo punto igual a su serie de Fourier, que converge absoluta y uniformemente:*

$$f(x) = \sum_{k\in\Lambda}\widehat{f}(k)e^{2\pi ikx} \qquad a.e. \tag{2.29}$$

Por lo tanto, es en casi todo punto igual a una función continua.

Demostración. Se deduce del Teorema 2.2.4 que si $\widehat{f}(k) = 0$ cuando $k \in \mathbb{Z}\setminus\Lambda$, luego $f \in A(\mathbb{T})$.Aplicando el resultado de inversión de la Proposición 1.1.8 obtenemos que en casi todo punto es igual a una función continua y que se satisface (2.29) para casi todo $x \in \mathbb{T}$ □

Observación 2.2.6. Toda sucesión lagunar es un conjunto de Sidon. Sea E una sucesión lagunar con constante A. Si f es una función continua en $\mathbb{T}$ que cumple

$$m \in \mathbb{Z}\setminus E \implies \widehat{f}(m) = 0,$$

entonces por el Teorema 2.2.4 se tiene que

$$\sum_{m\in\Lambda}\left|\widehat{f}(m)\right| \leq C(A)\|f\|_{L^\infty} < \infty,$$

y, por lo tanto, la serie de Fourier de f es absolutamente convergente.

Es sencillo converse que uno puede construir una sucesión lagunar a partir de un subconjunto infinito de $\mathbb{Z}$ y por lo tanto tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.7. *Todo subconjunto infinito de $\mathbb{Z}$ contiene un conjunto de Sidon infinito.*

Capítulo 3

Propiedades de los conjuntos de Sidon

Comenzaremos este capítulo estudiando propiedades de estructura y tamaño de los conjuntos de Sidon, más precisamente, veremos que tienen densidad pequeña. Además, probaremos que la unión de dos conjuntos de Sidon es también un conjunto de Sidon, para lo cual utilizaremos el Teorema de Rider.

Finalizaremos con una discusión informal sobre la historia de dichos conjuntos y su relación con la combinatoria aditiva y la teoría de números.

3.1 Propiedades de estructura y tamaño

A lo largo de esta sección nos limitaremos a los conjuntos de Sidon en $\mathbb{Z}$.

Para la próxima proposición necesitaremos el siguiente lema de Lefèvre [Lef99] que es interesante por si mismo.

Recordemos primero algunas definiciones. Para $g \in \mathscr{C}(\mathbb{T})$ llamamos espectro de g al conjunto

$$sp(g) = \{k \in \mathbb{Z} : \widehat{g}(k) \neq 0\}.$$

Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$. Notamos

$$\mathscr{C}_\Lambda = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{T}) : sp(f) \subseteq \Lambda\} = \{f \in \mathscr{C}(\mathbb{T}) : \widehat{f}(k) = 0, \forall k \notin \Lambda\}.$$

Lema 3.1.1. *Si Λ es un conjunto de Sidon de $\mathbb{Z}$ y si $A+B \subseteq \Lambda$ con B infinito, entonces para todo $g_1, \dots, g_n \in \mathscr{C}_A$ se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} \|\widehat{g}_j\|_{\ell^1(\Lambda)} \leq S(\Lambda) \sup_{t\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} |g_j(t)|. \tag{3.1}$$

Demostración. Sean $g_1, \dots, g_n \in \mathscr{C}_A$. Por densidad de los polinomios trigonométricos, podemos suponer que $g_1, \dots, g_n \in \mathscr{P}_A$. Como B es infinito, existen $b_1, \dots, b_n \in B$ tales que los espectros trasladados $sp(g_1)+b_1, \dots, sp(g_n)+b_n$ son disjuntos dos a dos. Entonces, si llamamos $e_{b_j}(t) = e^{ib_jt}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \|\widehat{g}_j\|_{\ell^1(\Lambda)} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l\in sp(g_j)} |\widehat{g}_j(l)| = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in sp(g_j)+b_j} |\widehat{g}_j(\lambda - b_j)| \\ &= \sum_{j=1} \sum_{\lambda\in sp(g_j)+b_j} |\widehat{e_{b_j} g_j}(\lambda)| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \widehat{e_{b_j} g_j} \right\|_{\ell^1(\Lambda)}. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que los espectros trasladados son disjuntos. Entonces, usando que Λ es un conjunto de Sidon obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \|\widehat{g}_j\|_{\ell^1(\Lambda)} &\leq S(\Lambda) \left\| \sum_{j=1}^{n} e_{b_j} g_j \right\|_{\infty} \quad (\textit{ya que } sp(g_j)+b_j \subseteq A+B \subseteq \Lambda) \\ &\leq S(\Lambda) \sup_{t\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} |e^{ib_jt} g_j(t)| = S(\Lambda) \sup_{t\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{n} |g_j(t)|. \end{aligned}$$

□

Proposición 3.1.2. *Si Λ es un conjunto de Sidon de $\mathbb{Z}$, no puede pasar que $A+B \subseteq \Lambda$, para A y B infinitos*

Demostración. Supongamos que B es infinito y veamos que A no puede serlo. Tomemos N elementos distintos $a_1, \dots, a_N$ de A, y consideremos el polinomio trigonométrico

$$f_j(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} e^{ia_kt},$$

cuyo espectro está en A. Para todo j, $\|\widehat{f}_j\|_{\ell^1} = \frac{1}{\sqrt{N}} N = \sqrt{N}$ y, por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{N} \|\widehat{f}_j\|_{\ell^1} = N^{3/2}.$$

Por otro lado, consideremos la matriz de Walsh

$$W = \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \right)_{j,k\leq N}$$

que es unitaria. Por lo tanto, si $\xi_1, \dots, \xi_N$ son números complejos de módulo 1, y si definimos

$$z_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} e^{\frac{2\pi ijk}{N}} \xi_j$$

(o, en notación matricial, $z = W\xi$), se tiene que $\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2 = \sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in\mathbb{T}} \sum_{j=1}^{N} |f_j(t)| &= \sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{\xi_j\in\mathbb{U}} \left| \sum_{j=1}^{N} \xi_j f_j(t) \right| = \sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{\xi_j\in\mathbb{U}} \left| \sum_{j=1}^{N} z_k e^{ia_k t} \right| \\
&\leq \sup_{t\in\mathbb{T}} \sup_{\xi_j\in\mathbb{U}} \left(\sum_{k=1}^{N} |z_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |e^{ia_k t}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \sup_{\xi_j\in\mathbb{U}} \left(\sum_{j=1}^{N} |\xi_j|^2 \right)^{1/2} \sqrt{N} = \sqrt{N}\sqrt{N} = N.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.1.1 para $g_1 = f_1, \dots, g_N = f_N$, obtenemos $N^{3/2} \leq S(\Lambda)N$. Como esto vale cada vez que podemos tomar N elementos distintos de A, se deduce que $|A| \leq S(\Lambda)^2$, y por lo tanto el conjunto A debe ser finito. $\square$

A continuación enunciaremos otra propiedad de estructura de los conjuntos de Sidon.

Proposición 3.1.3. *Si Λ es un conjunto de Sidon de $\mathbb{Z}$, entonces Λ no puede contener una progresión aritmética arbitrariamente grande.*

Lo que vamos a utilizar para probar esta proposición son unos polinomios especiales, llamados polinomios de tipo Rudin-Shapiro, cuyos primeros ejemplos fueron presentados por H. Shapiro en su tesis en 1951, y que fueron redescubiertos por Rudin en [Rud59]. La propiedad fundamental de estos polinomios es que en $\mathbb{U}$, el conjunto de números complejos de módulo 1, la norma uniforme $\| \quad \|_\infty$ es del mismo orden que la norma cuadrática $\| \quad \|_2$.

Lema 3.1.4. *Existen polinomios P_j, $j \in \mathbb{N}$, tales que:*

a) $P_j(z) = \sum_{m=0}^{2^j-1} \delta_m z^m$, *con* $\delta_0 = 1$, $\delta_{2n} = \delta_n$ *y* $\delta_{2n+1} = (-1)^n \delta_n$.

b) $|P_j(z)|^2 + |P_j(-z)|^2 = 2^{j+1}$ *para* $|z| = 1$

Demostración. Comencemos con $P_0(z) = 1$, y definamos

$$P_{j+1}(z) = P_j(z^2) + zP_j(-z^2). \tag{3.2}$$

Se tiene $P_1(z) = 1 + z$ y $P_2(z) = 1 + z + z^2 - z^3$. Que estos polinomios se escriben como en *a)* se deduce fácilmente de la recurrencia, calculando los coeficientes. La condición *b)* se prueba por inducción en j utilizando la construcción (3.2) y la identidad del paralelogramo en $\mathbb{C}$:

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right), \quad u, v \in \mathbb{C}. \qquad \square$$

Demostración de la Proposición 3.1.3 . Definamos $R_j(t) = P_j(e^{it})$. Utilizando *a)* del Lema 3.1.4 se tiene que

$$2^{j+1} = \left|P_j\left(e^{it}\right)\right|^2 + \left|P_j\left(-e^{it}\right)\right|^2 \geq \left|P_j\left(e^{it}\right)\right|^2,$$

de modo que $\|R_j\|_\infty \leq 2^{\frac{j+1}{2}}$. De la misma manera, podemos calcular $\|R_j\|_2 = \sqrt{2}2^{\frac{j+1}{2}}$, es decir, $\|R_j\|_\infty \leq \sqrt{2}\,\|R_j\|_2$. Supongamos ahora que para ciertos $a, b \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$a, a+b, a+2b, \ldots, a+Nb \in \Lambda.$$

Reemplazando Λ por $\Lambda - a$, y cambiando Λ por $-\Lambda$ de ser necesario, podemos suponer $a = 0$ y $b \geq 1$. Tomemos j tal que $2^j \leq N \leq 2^{j+1}$. Si $Q_j(t) = R_j(bt)$, se tiene entonces que $Q_j \in \mathscr{P}_\Lambda$.Por *a)* del Lema 3.1.4 los coeficientes de Fourier de Q_j tiene módulo 1. Además, como Λ es un conjunto de Sidon, se verifica

$$2^j = \sum_{n\in\Lambda} |\widehat{Q}_j(n)| \leq S(\Lambda)\,\|Q_j\|_\infty = S(\Lambda)\,\|R_j\|_\infty \leq S(\Lambda)\sqrt{2}\sqrt{2^j},$$

de donde $2^j \leq 2S(\Lambda)^2$, y entonces $N \leq 4S(\Lambda)^2$. Esto dice que Λ no contiene progresiones aritméticas de largo mayor a $4S(\Lambda)^2$. $\square$

Notación. Para $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$, notaremos $\alpha_\Lambda(N)$ al número máximo de elementos de Λ que están contenidos en una progresión aritmética de longitud N.

En otras palabras,

$$\alpha_\Lambda(N) = \max\{|\Lambda \cap \{a+b, a+2b, \ldots, a+Nb\} : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Entonces tenemos el siguiente resultado, una condición denominada *malla.*

Teorema 3.1.5. *Si $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ es un conjunto de Sidon, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\alpha_\Lambda(N) \leq C \log N. \tag{3.3}$$

En particular, $|\Lambda \cap [1, N]| \leq C \log N$ y, por lo tanto, el conjunto tiene densidad pequeña. Tengamos en cuenta que esto es lo mejor podemos hacer, ya que para $\Lambda = \{2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\}$, se tiene $|\Lambda \cap [1, 2^n]| = n = \frac{\log(2^n)}{\log 2}$.

La demostración de este Teorema se puede hacer utilizando polinomios de Shapiro (ver [Kah70] páginas 34-35). En este caso, vamos a utilizar métodos probabilísticos. Para ello vamos a utilizar el siguiente Teorema cuya demostración se puede encontrar en [LQ04].

Teorema 3.1.6. *Sea $a_{j,k} \in \mathbb{C}$, para $1 \leq j \leq N$ y $1 \leq k \leq n$ y sea $(X_j)_{j \leq N}$ el proceso Bernoulli asociado:*

$$X_j = \sum_{k=1}^{n} a_{j,k} \varepsilon_k,$$

con $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ variables Bernoulli independientes. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mathbb{E}\left(\sup_{j \leq N} |X_j|\right) \leq C \sup_{j \leq N} \|X_j\|_2 \sqrt{\log N}. \tag{3.4}$$

Para poder utilizar esto vamos a necesitar la desigualdad clásica siguiente.

Lema 3.1.7 (Desigualdad de Bernstein)**.** *Para todo polinomio trigonométrico $P = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$ de grado menor o igual a N, se tiene*

$$\|P'\|_\infty \leq N \|P\|_\infty .$$

En realidad vamos a probar una versión ligeramente más general de esta desigualdad válida para funciones casi periódicas.

Proposición 3.1.8. *Sean $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ números reales. Para toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forma $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k t}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$, se tiene:*

$$\|f'\|_\infty \leq \delta \|f\|_\infty ,$$

donde $\delta = \sup\limits_{1 \leq k \leq n} |\lambda_k|$.

Notar que el Lema 3.1.7 se deduce de la Proposición 3.1.8 ya que si calculamos δ para $P = \sum\limits_{k=-N}^{N} c_k e^{ikt}$ obtenemos que $\delta = N$.

Demostración de la Proposición 3.1.8. La idea es escribir $f'(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} i\lambda_k c_k e^{i\lambda_k t}$ de la forma

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} i\psi(\lambda_k) c_k e^{i\lambda_k t},$$

donde $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función periódica que interpola a los λ_k. Para eso, consideremos la función $4\delta-$periódica en $\mathbb{R}$ $\psi_0 = 2\delta - |x|$, para $|x| \leq 2\delta$. Entonces $\psi(x) = \psi_0(x - \delta) - \delta$ es igual a $\delta - |x - \delta|$ para $-\delta \leq x \leq 3\delta$. En particular, $\psi(x) = x$ para $|x| \leq \delta$, y por lo tanto cumple $\psi(\lambda_k) = \lambda_k$. El punto clave es que, salvo un constante positiva, la función ψ_0 , definida en $\mathbb{R}/4\delta\mathbb{Z}$, es igual a la convolución de la característica $\chi_{[-\delta,\delta]}$ consigo misma. Por lo tanto, los coeficientes de Fourier son positivos:

$$\widehat{\psi}_0(l) = \frac{1}{4\delta}\int_{-2\delta}^{2\delta} \psi_0(x)e^{-\frac{il\pi}{2\delta}x}\,dx \geq 0$$

para todo $l \in \mathbb{Z}$. Como $\sum\limits_{l\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}_0(l) = \psi_0(0) = 2\delta$ y $\widehat{\psi}_0(0) = \delta$, obtenemos

$$\psi(x) = \psi_0(x-\delta) - \delta = \sum_{l\neq 0} \widehat{\psi_0}(l)e^{\frac{il\pi}{2\delta}(x-\delta)}.$$

De esta forma, podemos escribir

$$i\psi(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{\frac{il\pi}{2\delta}x},$$

con $a_l = ie^{-il\pi/2}\widehat{\psi}_0(l)$ si $l \neq 0$ y $a_0 = 0$. En consecuencia,

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l e^{\frac{il\pi}{2\delta}\lambda_k}\right) e^{i\lambda_k t} = \sum_{l\in\mathbb{Z}} a_l f\left(t + \frac{l\pi}{2\delta}\right),$$

y así,

$$\|f'\|_\infty \leq \sum_{l\in\mathbb{Z}} |a_l|\,\|f\|_\infty = \sum_{l\neq 0} \widehat{\psi}_0(l)\,\|f\|_\infty = (2\delta-\delta)\,\|f\|_\infty = \delta\,\|f\|_\infty. \qquad \square$$

Observación 3.1.9. La Desigualdad de Bernstein es optima. Eso se ve si tomamos $P(t) = e^{iNt}$.

Corolario 3.1.10. *Si P es un polinomio trigonométrico de grado menor o igual a N, entonces*

$$\|P\|_\infty \leq 5 \sup_{t\in F_N} |P(t)|,$$

donde $F_N = \{\frac{j\pi}{2N} : 0 \leq j \leq 4N-1\}$ es conjunto de raíces $4N$-ésimas de la unidad (mediante la identificación con $\mathbb{T}$).

Demostración. Sean $t_0 \in \mathbb{T}$ tal que $|p(t_0)| = \|P\|_\infty$. Existe un $t_1 \in F_N$ tal que $|t_1 - t_0| \leq \frac{\pi}{4N}$. Por lo tanto,

$$\|P\|_\infty \leq |P(t_0) - P(t_1)| + |P(t_1)| \leq |t_0 - t_1|\,\|P'\|_\infty + |P(t_1)| \leq \frac{\pi}{4N}N\,\|P\|_\infty + \sup_{t\in F_N}|P(t)|.$$

Así obtenemos

$$\|P\|_\infty \leq \frac{1}{1-\frac{\pi}{4}} \sup_{t\in F_N}|P(t)| \leq 5 \sup_{t\in F_N}|P(t)|. \qquad \square$$

Ya estamos en condiciones de probar el resultado principal de está sección.

Demostración del Teorema 3.1.5. Sea $a+b, a+2b, \ldots, a+Nb$ una progresión aritmética de longitud N, y consideremos $\Lambda \cap \{a+b, a+2b, \ldots, a+Nb\}$. Como vimos antes, podemos suponer $a=0$. Escribamos

$$\Lambda \cap \{b, 2b, \ldots, Nb\} = \{\lambda_1 b, \ldots, \lambda_n b\}.$$

Sea

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k t}.$$

Agreguemos a P variables Bernoulli independientes $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ para formar el polinomio aleatorio

$$P_\omega(t) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(\omega) e^{i\lambda_k t}.$$

Consideremos ahora

$$Q_\omega(t) = P_\omega(bt),$$

es claro que $Q_\omega \in \mathscr{P}_\Lambda$. Como $\widehat{Q}_\omega(\lambda_k b) = \varepsilon_k(\omega)$, tenemos:

$$n = \sum_{k=1}^{n} |\widehat{Q}_\omega(\lambda_k b)| \leq S(\Lambda) \left\| Q_\omega \right\|_\infty = S(\Lambda) \left\| P_\omega \right\|_\infty,$$

integrando obtenemos

$$n \leq S(\Lambda) \mathbb{E}_\omega \left\| P_\omega \right\|_\infty.$$

Por otro lado, como P_ω es un polinomio trigonométrico de grado menor igual a N, por el corolario de la desigualdad de Bernstein 3.1.10 tenemos

$$\left\| P_\omega \right\|_\infty \leq 5 \sup_{t \in F_N} |P_\omega(t)|. \tag{3.5}$$

Llamemos, para cada $t \in F_N$,

$$X_t(\omega) = P_\omega(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{i\lambda_k t} \varepsilon_k(\omega).$$

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema 3.1.6:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t \in F_N} |P_\omega(t)| \right) \leq C \sup_{t \in F_N} \left\| P_\omega(t) \right\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\log |F_N|} = C\sqrt{n}\sqrt{\log(4N)}. \tag{3.6}$$

Combinando (3.5) con (3.6) obtenemos

$$n \leq 5CS(\Lambda)\sqrt{n}\sqrt{\log(4N)}.$$

Elevando al cuadrado y despejando, concluimos

$$n \leq 25C^2 S(\Lambda)^2 \log(4N),$$

lo que prueba el Teorema 3.1.5. $\square$

3.2 El Teorema de Rider y aplicaciones

El objetivo de esta sección es enunciar el Teorema de Rider (que usaremos más adelante en resultado fundamental del Capítulo 4) y probar dos aplicaciones. La más importante es que la unión dos conjuntos de Sidon es un conjunto de Sidon.

Como hicimos en la demostración del Teorema 3.1.5, para enunciar el resultado principal de esta sección, vamos a considerar polinomios aleatorios. Está vez vamos a trabajar en un grupo abeliano compacto G y su grupo dual $\widehat{G}$.

Sean $\{r_n\}$ las funciones Rademacher en $\mathbb{T}$ y sea $\Gamma = \{\gamma_n : n \geq 1\} \subseteq \widehat{G}$. Tomemos un polinomio trigonométrico arbitrario $P(t) = \sum_{n=1}^{N} a_n\gamma_n(t)$ definido en G. Para $\omega \in \mathbb{T}$, definimos

$$P_\omega(t) = \sum_{n=1}^{N} r_n(\omega)a_n\gamma_n(t) \quad y \quad \|P\|_R = \mathbb{E}\left(\|P_\omega\|_\infty\right) = \int_{\mathbb{T}} \sup_{t\in G} |P_\omega(t)|dm(\omega). \tag{3.7}$$

Observación 3.2.1. Definida así, $\|P\|_R$ es claramente una norma en el conjunto de polinomios trigonométricos y cumple que $\|P\|_R \geq \|P\|_2$. En efecto, para todo $\omega \in \Omega$,

$$\|P_\omega\|_\infty \geq \|P_\omega\|_2 = \left(\sum_{n\geq 1} |r_n(\omega)\widehat{P}(\gamma_n)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n\geq 1} |\widehat{P}(\gamma_n)^2|\right)^{1/2} = \|P\|_2 .$$

Observación 3.2.2. Para toda elección de signos $\theta_n = \pm 1$, se tiene que

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \theta_n a_n\gamma_n\right\|_R = \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n\gamma_n\right\|_R . \tag{3.8}$$

Esto se debe a que r_n y $\theta_n r_n$ tiene la misma distribución y, por ende,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \theta_n a_n\gamma_n\right\|_R = \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} \theta_n a_n\gamma_n\right\|_\infty\right) = \mathbb{E}\left(\left\|\sum_{n=1}^{N} a_n\gamma_n\right\|_\infty\right) = \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n\gamma_n\right\|_R .$$

Gracias a esta observación podemos deducir el siguiente corolario, que va a ser de utilidad cuando probemos las aplicaciones del Teorema de Rider.

Corolario 3.2.3. *Sean $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ un subconjunto de $\widehat{G}$. Entonces,*

$$\left\|\sum_{\Lambda_1} \widehat{P}(\gamma)\gamma\right\|_R \leq \left\|\sum_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \widehat{P}(\gamma)\gamma\right\|_R ,$$

para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$.

Demostración. Elijamos $\theta_\gamma = -1$ si $\gamma \in \Lambda_2$ y $\theta_\gamma = 1$ si $\gamma \in \Lambda_1$, de esta manera

$$\sum_{\gamma\in\Lambda_1} \widehat{P}(\gamma)\gamma = \frac{1}{2}\left(\sum_{\gamma\in\Lambda} \widehat{P}(\gamma)\gamma + \sum_{\gamma\in\Lambda} \theta_\gamma\widehat{P}(\gamma)\gamma\right)$$

Tomando norma $\| \quad \|_R$ y utilizando la Observación 3.2.2 nos queda

$$\left\| \sum_{\gamma\in\Lambda_1} \widehat{P}(\gamma)\gamma \right\|_R \leq \left\| \sum_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \widehat{P}(\gamma)\gamma \right\|_R = \|P\|_R. \qquad \square$$

Proposición 3.2.4. *Si $\Lambda \subseteq \Gamma$ es un conjunto de Sidon entonces para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$ vale*

$$\|P\|_\infty \leq S(\Lambda)\, \|P\|_R.$$

Demostración. Observemos que para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$ y para todo ω se tiene que $P_\omega \in \mathscr{P}_\Lambda$. Como Λ es un conjunto de Sidon se verifica que

$$\|P\|_\infty \leq \sum |\hat{P}(\gamma_n)| = \sum |r_n(\omega)\hat{P}(\gamma_n)| = \sum |\hat{P_\omega}(\gamma_n)| \leq S(\Lambda)\, \|P_w\|_\infty.$$

Luego, tomando esperanza concluimos que $\|P\|_\infty \leq S(\Lambda)\, \|P\|_R$. $\square$

Notar que de hecho probamos que si Λ es un conjunto de Sidon, entonces

$$\sum |\hat{P}(\gamma_n)| \leq S(\Lambda)\, \|P\|_R$$

para todo polinomio en $\mathscr{P}_\Lambda$. Rider en [R+] demostró que la recíproca también es cierta y, por ende, Λ es Sidon si y solo si existe una constante $C > 0$ tal que $\sum |\hat{P}(\gamma_n)| \leq C\, \|P\|_R$ para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$.

Teorema 3.2.5 (Teorema de Rider)**.** *Si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{n\geq 1} |\hat{P}(\gamma_n)| \leq C\, \|P\|_R \tag{3.9}$$

para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$, entonces Λ es un conjunto de Sidon con $S(\Lambda) \leq KC^3$.

Demostración. La prueba es extensa y se puede encontra en el artículo original [R+], ya mencionado, o tambíen en el libro [LQ04]. $\square$

Veremos ahora dos consecuencias importantes del Teorema de Rider. La primera es el recíproco de la Proposición 3.2.4.

Corolario 3.2.6. *Si $\|P\|_\infty \leq C\, \|P\|_R$ para todo $P \in \mathscr{P}_\Lambda$, entonces Λ es un conjunto de Sidon.*

Demostración. Escribamos $\Lambda = \{\lambda_n : n \geq 1\}$, y sea $P = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n\lambda_n$. Supongamos primero que $a_n \in \mathbb{R}, n = 1, \ldots, N$. Para el caso general, basta tomar parte real e imaginaria y notar que

$\sum\limits_{n=1}^{N}(Re\, a_n)\lambda_n(t) = \frac{P(t)+\overline{P(-t)}}{2}$ y $\sum\limits_{n=1}^{N}(Im\, a_n)\lambda_n(t) = \frac{P(t)-\overline{P(-t)}}{2i}$. Entonces, si $\theta_n = sign(a_n)$, con $\theta_n = 1$ si $a_n = 0$, se tiene

$$\sum_{n=1}^{N}|a_n| = \left\|\sum_{n=1}^{N}\theta_n a_n \lambda_n\right\|_\infty \leq C\left\|\sum_{n=1}^{N}\theta_n a_n \lambda_n\right\|_R = C\left\|\sum_{n=1}^{N}a_n \lambda_n\right\|_R = C\,\|P\|_R .$$

Aquí utilizamos la Observación 3.2.2. Luego, por el Teorema de Rider concluimos que Λ es un conjunto de Sidon. □

Teorema 3.2.7 (Teorema de Drury)**.** *La unión de dos conjuntos de Sidon es también un conjunto de Sidon.*

Demostración. Sean Λ_1 y Λ_2 dos conjuntos de Sidon, podemos suponerlos disjuntos. Entonces, para todo $P \in \mathscr{P}_{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$ se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{\gamma\in\Lambda_1\cup\Lambda_2}|\widehat{P}(\gamma)| &= \sum_{\Lambda_1}|\widehat{P}(\gamma)| + \sum_{\Lambda_2}|\widehat{P}(\gamma)| \\ &\leq S(\Lambda_1)\left\|\sum_{\gamma\in\Lambda_1}\widehat{P}(\gamma)\gamma\right\|_R + S(\Lambda_2)\left\|\sum_{\gamma\in\Lambda_2}\widehat{P}(\gamma)\gamma\right\|_R \\ &\leq S(\Lambda_1)\,\|P\|_R + S(\Lambda_2)\,\|P\|_R = (S(\Lambda_1)+S(\Lambda_2))\,\|P\|_R .\end{aligned}$$

Para última desigualdad utilizamos el Corolario 3.2.3. Luego, por el Teorema de Rider $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ es un conjutno de Sidon, y $S(\Lambda) \leq \alpha\,(S(\Lambda_1)+S(\Lambda_2))^3$. □

3.3 Conjuntos de Sidon en otro escenario

A lo largo de esta sección haremos una discusión informal sobre los (también llamados) *conjuntos de Sidon* en combinatoria y teoría de números y mostraremos la relación con los conjuntos de Sidon estudiados en este trabajo.

3.3.1 Los origenes

El nombre *conjunto de Sidon* proviene de Simon Sidon, un analista húngaro que fue el primero en preguntarse por el crecimiento de sucesiones de enteros positivos con la propiedad de que todas las sumas de dos elementos de la sucesión son distintos (ver Definición 3.3.1). Fue él quien compartió con Paul Erdös el problema, el último quedó fascinado ya que combinaba teoría de números y combinatoria, las dos áres fundamentales de su trabajo.

Si bien la pregunta surgió en la investigación sobre Series de Fourier [Sid27] se convirtió en un tema recurrente en combinatoria. Fue Erdös quien introdujo el nombre *"sucesiónes de Sidon"* y, junto con Paul Turan, publicó en 1934 el artículo *On a problem of Sidon in additive number theory* [ET41], el primer estudio sistemático de este tema.

3.3.2 Conjuntos de Sidon combinatorios

Definición 3.3.1. Sea G un grupo conmutativo. Un conjunto $A \subset G$ es un *conjunto de Sidon combinatorio, o conjunto* B_2, si

$$a + b = c + d \implies \{a, b\} = \{c, d\}$$

para todo $a, b, c, d \in A$.

En otras palabras, A es un conjunto de Sidon combinatorio si todas las sumas de dos elementos de A son distintas salvo por el orden de los sumandos.

Como $a + b = c + d$ si y solo si $a - c = d - b$, los conjuntos de Sidon combinatorios también se pueden definir como aquellos conjuntos con la propiedad de que todas las diferencias no nulas de sus elementos son distintas. Utilizaremos el término ***conjunto*** B_2 cuando queramos evitar confusiones con los conjuntos de Sidon del análisis.

En este contexto, se suele llamar conjuntos de Sidon cuando el conjunto es finito y ***sucesión de Sidon*** en caso que el conjunto sea infinito. Si bien la definición de ambos conjuntos es la misma, el enfoque de los problemas es distinto. En esta sección hablaremos de el caso infinito ya que es el que tiene relación con los conjuntos de Sidon en análisis, que es el tema principal de esta tesis.

Son muchos los problemas que nos podemos plantear acerca de los conjuntos de Sidon. La mayoría tienen que ver con el tamaño máximo que pueden llegar a tener estos conjuntos en un intervalo o grupo finito dado. En el caso de las sucesiones infinitas, se estudia cómo construir sucesiones infinitas de Sidon cuya función contadora $A(x) = |A \cap [1, x]|$ sea tan grande como sea posible.

Recordemos que la notación $f(x) \ll g(x)$ significa que existe una constante positiva C tal que $f(x) < Cg(x)$ para x suficientemente grande.

Por otra parte, la notación $f(x) = o\,(g(x))$ indica que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Por ejemplo, $o(1)$ significa que es un termino que tiende a cero cuando x tiende a infinito.

3.3.3 Sucesiones de Sidon infinitas

Dada A sucesión infinita de enteros positivos, definimos su función contadora como

$$A(x) = |A \cap [1, x]|.$$

La llamamos función contadora ya que cuenta el número de términos de la sucesión menores o iguales a x. La pregunta de Erdös es cuán grande puede ser está función cuando A es una sucesión de Sidon (B_2). El objetivo, entonces, es construir conjuntos de Sidon cuya función contadora sea lo más grande posible.

Por ejemplo, las potencias de 2 forman una sucesión de Sidon ya que, gracias a la escritura única en base 2, toda suma de dichos números es distintas. Como observamos en 3.1.5 esta sucesión crece demasiado rápido y por lo tanto es muy poco densa. La función contadora es $A(x) \sim \log_2 x$.

Una construcción de un conjunto de Sidon (B_2) con una función contadora más interesante es la generada por el *algoritmo greedy*. Consiste en comenzar con $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, una vez construidos $a_1, \ldots, a_{n-1}$, definir como a_n al menor entero positivo que no contradiga la condición de ser Sidon, es decir, el primer entero que no sea de la forma $a_i - a_j + a_k$, $1 \leq i, j, k \leq n-1$. Esta sucesión fue introducida por Erdös, aunque es conocida como al sucesión de Mian-Chowla. Los primero términos son

$$1, 2, 4, 8, 13, 21, 31, 45, 66, 81, 97, 123, 148, \ldots.$$

Se desconoce como crece realmente esta sucesión. Sin embargo, como sabemos que a lo sumo hay $(n-1)^3$ enteros prohibidos de la forma

$$a_i - a_j + a_k, 1 \leq i, k, j \leq n-1,$$

deducimos que $a_n \leq (n-1)^3+1$, lo que nos permite construir un conjunto de Sidon en $\{1, \ldots, m\}$ con al menos $m^{1/3}$.Por lo tanto, la función contadora del algoritmo greedy verifica

$$A(x) \gg x^{1/3}. \tag{3.10}$$

Pasaron 50 años hasta que Ajtai, Komlós y Szemerédi mejoraron (3.10). Probaron en [AKS81] que es posible encontrar un sucesión de Sidon tal que

$$A(x) \gg (x \log x)^{1/3}.$$

Este resultado fue mejorado considerablemente por Ruzsa [Ruz98], quien demostró la existencia de una sucesión infinita de Sidon con

$$A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}.$$

La demostración de Ruzsa es ingeniosa. El punto de partida de la demostración de Rusza se basa en que los primos forman una sucesión de Sidon multiplicativa, por la escritura única como producto de primos, y por lo tanto la sucesión $\{\log p\}$ es una sucesión de Sidon de números reales.

Erdös ofreció 1000 dólares por la resolución de la siguiente conjetura, que sigue abierta.

Conjetura 3.3.2 (Erdös)**.** *Para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión infinita de Sidon con*

$$A(x) \gg x^{1/2-\varepsilon}.$$

Erdös probó que la conjetura no es cierta para $\varepsilon = 0$. Tanto las construcciones de Ruzsa como la de Ajtai, Komlós y Szemerédi son construcciones probabilísticas y no son explícitas. Recientemente, Cilleruelo [Cil14b] presentó una construcción explícita de una sucesión infinita de Sidon con función contadora parecida a la de Ruzsa. Más precisamente se tiene el siguiente Teorema.

Teorema 3.3.3 (Cilleruelo [Cil14b])**.** *Existe una construcción explícita de una sucesión de Sidon infinita con función contadora*

$$A(x) = x^{\sqrt{2}-1+o(1)}.$$

Para más información sobre estos temas se puede consultar tanto los artículos citados anteriormente como el libro de Javier Cilleruelo llamado *Conjuntos de Sidon* [Cil14a].

A continuación discutiremos sobre la relación entre los conjuntos de Sidon combinatorios y los analíticos. Primero vemos el siguiente ejemplo.

Ejemplos 3.3.4. Las sucesiones lagunares con $A > 3$ que estudiamos en el capítulo anterior son conjuntos de Sidon combinatorios, como indica la escritura única vista en la Proposición 2.2.3. También son conjuntos de Sidon analíticos gracias al Teorema 2.2.4.

Sin embargo, es claramente falso que todo conjunto de Sidon (del análisis) sea un conjunto B_2 (conjunto de Sidon combinatorio). Si Λ es un conjunto de Sidon analítico, es inmediato de la definición que al cambiar en un número finito de elementos el conjunto sigue siendo de Sidon.Por lo tanto, podemos agregar elementos para contradecir la definición de conjunto B_2.

Nos preguntamos ahora si es cierto el reciproco, ¿todo conjunto B_2 será un conjunto de Sidon analítico? para responder esto, vamos a usar el Teorema 3.1.5 que dice que los conjuntos de Sidon son conjuntos pequeños. Consideremos A el conjunto B_2 dado por el algoritmo greedy. Vimos en (3.10) que la función contadora satisface que

$$A(x) \gg x^{1/3}, \tag{3.11}$$

contradiciendo entonces que $\alpha_A(N) \leq C \log N$. Entonces, A es un conjunto B_2 que no es un conjunto de Sidon analítico.

Capítulo 4

Algunas caracterizaciones de los conjuntos de Sidon

En este capítulo presentaremos tres caracterizaciones de los conjuntos de Sidon. En primer lugar probaremos que un conjunto $\Lambda \subseteq \widehat{G}$ es de Sidon si y solo si $\mathscr{C}_\Lambda(G)$ es isomorfo a ℓ^1. Para lograr esto, introduciremos la teoría de operadores $p-$sumantes. Los teoremas principales serán el Teorema de Pietsch y el Teorema de Grothendieck.

Luego demostraremos el Teorema de Bourgain-Milman, que dice que Λ es un conjunto de Sidon si y solo si $\mathscr{C}_\Lambda(G)$ tiene cotipo finito. Para poder demostrar este teorema vamos a utilizar varios conceptos de teoría de espacios de Banach.

Por último, probaremos una caracterización análoga a la que nos provee el Teorema de Bourgan-Milman. Definiremos $U_\Lambda(G)$, el espacio de funciones continuas cuya serie de Fourier es uniformemente convergente, y mostraremos que Λ es de Sidon si y solo si tiene cotipo finito.

4.1 Operadores p-sumantes

Los operadores sumantes, introducidos por Grothendiek en [Gro53] y [Gro52], son una herramienta fundamental en la teoría moderna de espacios de Banach (ver, por ejemplo, [DJT95]). En esta sección haremos una breve introducción a estos operadores y enunciaremos algunas propiedades fundamentales que utilizaremos para nuestro estudio de conjuntos de Sidon, entre ellas dos versiones del Teorema de Grothendieck.

Definición 4.1.1. Sean X e Y dos espacios de banach, y sea $T : X \to Y$. Diremos que T es ***p-sumante*** ($1 \leq p < \infty$) si existe una constante $C > 0$ tal que, para toda familia finita de vectores $x_1, \ldots, x_N$ en X, se tiene

$$\left(\sum_{n=1}^{N} \|T(x_n)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in X^* \|\xi\|=1} \left(\sum_{n=1}^{N} |\xi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1}$$

Denotamos $\pi_p(T)$ a la menor constante C que verifica la propiedad anterior.

Notaremos $\Pi_p(X, Y)$ al espacio de operadores $p-$sumantes de X en Y. Es fácil chequear que $\Pi_p(X, Y)$ es un subespacio lineal de $\mathscr{L}(X, Y)$, el espacio de operadores lineales y acotados de X a Y. Además, se tiene que π_p es una norma en $\Pi(X, Y)$ y satisface

$$\|u\| \leq \pi_p(u)$$

para todo $u \in \Pi_p(X, Y)$. Para ver esto, tomemos un solo vector x en la definición de operador $p-$sumante, es decir,

$$\|Tx\| \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} |\xi(x)| = C \|x\|.$$

Esta definición usa solo finitos vectores de X a la vez, por lo que sólo depende de los subespacios de dimensión finita.

Proposición 4.1.2. *Sea $T : X \to Y$ un operador $p-$sumante. Entonces*

1) *Dados $U : W \to X$ y $V : Y \to Z$ operadores lineales, la composición $VTU : X \to Z$ es $p-$sumante, y $\pi_p(VTU) \leq \|U\| \pi_p(T) \|U\|$ (propiedad de ideal).*

2) *si $X_1 \subseteq X$ y $Y_1 \subseteq Y$ son dos subespacios cerrados tales que $T(X_1) \subseteq Y_1$, se tiene que el operador restringido $\widetilde{T} : X_1 \to Y_1$ es $p-$sumante, y $\pi_p(\widetilde{T}) \leq \pi_p(T)$.*

Definición 4.1.3. Diremos que un operador $u : X \to Y$ se *factoriza a través de un espacio de Hilbert* si existe un espacio de Hilbert H y dos operadores $w : X \to H$ y $v : H \to Y$ tal que $u = vw$.

Para un operar u que se factoriza a través de un espacio de Hilbert definimos

$$\gamma_2(u) = \inf\{\|v\| \|w\| : u = vw, \, con \, w : X \to H, v : H \to Y, H \, Hilbert\}.$$

Notaremos $\Gamma_2(X, Y)$ al espacio de operadores factorizables a través e un espacio de Hilbert. Es fácil ver que γ_2 es un norma y que hace de $\Gamma_2(X, Y)$ un espacio de Banach.

Veremos más adelante que el Teorema de factorización de Pietsch que dice que todo operador $2-$sumante se factoriza a través de un espacio de Hilbert.

Notación. Si X e Y son espacios de Banach, notaremos $d(X,Y)$ a la distancia de Banach-Mazur. Es claro que si X es isomorfo a un espacio de Hilbert H (es decir $d(X,H) < \infty$, entonces, para todo espacio de Hilbert H' al que X sea isomorfo, se tiene $d(X,H') = d(X,H)$. Notaremos a este valor común d_X.

La siguiente proposición presenta el ejemplo típico de operador $p-$sumante.

Proposición 4.1.4. *Sea K un espacio compacto, y sea μ una medida de probabilidad regular en K. Entonces, la inclusión natural*

$$j_p : \mathscr{C}(K) \to L^p(K,\mu)$$

es un operador $p-$sumante, y $\pi_p(k_p) = 1$.

Demostración. Sean $f_1, \ldots, f_N \in \mathscr{C}(K)$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \|j_p(f_n)\|_p^p = \sum_{n=1}^{N} \int_K |f_n(t)|^p \, d\mu(t) &= \int_K \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n(t)|^p \, d\mu(t) \right) \\
&\leq \sup_{t \in K} \sum_{n=1}^{N} |f_n(t)|^p = \sup_{t \in K} \sum_{n=1}^{N} |\delta_t\,(f_n)|^p \\
&\leq \sup_{\nu \in B_{\mathscr{M}(K)}} \sum_{n=1}^{N} |\nu\,(f_n)|^p \,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, j_p es $p-$sumante y $\pi_p(j_p) \leq 1$. Como $\|j_p\| = 1$ y $\pi_p(j_p) \geq \|j_p\|$, se deduce que $\pi_p(j_p) = 1$. $\square$

Observación 4.1.5. Resulta de *2)* de la Proposición 4.1.2 que si Z es un subespacio cerrado de $\mathscr{C}(K)$, y si notamos Z_p a la clausura de $j_p(Z)$ en $L^p(K,\mu)$, entonces la restricción $\widetilde{j_p} : Z \to Z_p$ es un operador $p-$sumante.

Corolario 4.1.6. *Sea $T : X \to Y$ un operador entre espacios de Banach X e Y. Si existe una medida de probabilidad μ en la bola B_{X^*} de X^*(con la topología débil estrella), tal que*

$$\|Tx\| \leq C \, \|\widetilde{x}\|_{L^p(\mu)}$$

para todo $x \in X$, con $\widetilde{x}(\xi) = \xi(x)$ para $\xi \in B_{X^*}$. Entonces, T es $p-$sumante y

$$\pi_p(T) \leq C.$$

La aplicación $i : x \in X \to i(x) = \widetilde{x} \in \mathscr{C}\,(B_{X^*})$ es una isometría. Basta usar la Proposición 4.1.4 y *2)* de la Proposición 4.1.2 para deducir el corolario.

El resultado siguiente, fundamental para los operadores $p-$sumantes, y la observación posterior dicen que el ejemplo dimos en el corolario anterior es, en cierto sentido, universal.

Teorema 4.1.7 (Teorema de factorización de Pietsch)**.** *Un operador $T : X \to Y$ es $p-$sumante $(1 \leq p < \infty)$ si y solo si existe μ una medida de probabilidad regular en $K = (B_{X^*}, w^*)$, la bola unidad de X^* con la topología débil estrella, tal que*

$$\|Tx\| \leq \pi_p(T) \left(\int_K |\xi(x)|^p d\mu(\xi) \right)^{1/p}. \tag{4.2}$$

para todo $x \in X$.

Observación 4.1.8. Vamos a interpretar al Teorema 4.1.7 como un teorema de factorización. Sabemos que X es isometricamente isomorfo a un subespacio de $\mathscr{C}(K)$, el isomorfismo viene dado por la aplicaciones

$$i : X \longrightarrow \mathscr{C}(K)$$

$$x \longmapsto \widetilde{x}$$

donde $\widetilde{x}(\xi) = \xi(x)$ para todo $\xi \in K$. La desigualdad del teorema nos dice que, si

$$j_p : \mathscr{C}(K) \longrightarrow L^p(K, \mu)$$

es la inclusión canónica, entonces T define un operador continuo de $j_p(iX)$ en Y, cuya norma es menor o igual a $\pi_p(T)$, por lo tanto tiene una única extensión $\tilde{T} : X_p = \overline{j_p(iX)} \to Y$, de manera que tenemos el siguiente diagrama de factorización:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "j_p"] \arrow[d, "i"] \arrow[rr, bend left, "T"] & X_p \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d] & Y. \\ \mathscr{C}(B_{X^*}) \arrow[r, "j_p"] & L_p(B_{X^*}, \mu) & \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

El caso $p = 2$ es especial. Supongamos $T : X \to Y$ es $2-$sumante. Luego, como hay una proyección ortogonal P de $L_2(B_{X^*}, \mu)$ en el subespacio $X_2 = \overline{j_2(iX)}$, podemos factorizar T de la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & Y \\ \mathscr{C}(B_{X^*}) \arrow[r, "j_2"] & L_2(B_{X^*}, \mu) \arrow[u, "\tilde{\tilde{T}}"] \end{tikzcd} \tag{4.4}$$

donde $\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T} \circ P$. Como consecuencia tenemos el teorema subsiguiente.

Teorema 4.1.9. *Si $T : X \to Y$ es un operador $2-$sumante, entonces se factoriza a través de un espacio de Hilbert y*

$$\gamma_2(T) \leq \pi_2(T).$$

A continuación enunciaremos dos versiones del Teorema de Grothendieck, el cual nos servirá para probar el resultado fundamental de la sección siguiente. Este resultado fue probablemente la contribución más importante de Grothendieck a la teoría de espacios de Banach. Tuvo, y sigue teniendo, numerosas aplicaciones no sólo en análisis, sino también temas tan diversos como información cuántica o complejidad computacional [DJT95, Gro53, Gro52].

Teorema 4.1.10 (Teorema de Grothendieck)**.** *Todo operador* $u : \ell^1 \to \ell^2$ *es* $1-$*sumante, y además,*

$$\pi_1(u) \leq K_G \|u\| .$$

Teorema 4.1.11 (Forma dual del Teorema de Grothendieck)**.** *Sean* $(S, \mathscr{L}, \mu)$ *y* $(T, \mathscr{T}, \nu)$ *dos espacios de medida. Entonces todo operador* $u : L^\infty(\nu) \to L^1(\mu)$ *es* $2-$*sumante y*

$$\pi_2(u) \leq K_G \|u\| .$$

Tanto la demostración del Teorema de Pietsch como el Teorema de Grothendieck pueden consultarse en [DJT95] y en [LQ04].

4.2 Una caracterización de los conjuntos de Sidon

En la Observación 1.2.5 del Capítulo 1 notamos que si Λ es un conjunto de Sidon, entonces la aplicación $\mathscr{F} : f \longmapsto \left(\widehat{f}(\gamma)\right)_{\gamma\in\Lambda}$ es isomorfismo entre $\mathscr{C}_\Lambda$ y $\ell^1(\Lambda)$. Utilizando la teoría de operador $p-$sumantes probaremos que la existencia de un isomorfismo entre $\mathscr{C}_\Lambda$ y $\ell^1(\Lambda)$ (no necesariamente dado por $\mathscr{F}$) nos garantiza que Λ es un conjunto de Sidon. Por lo tanto, el objetivo central de esta sección es probar que Λ es un conjunto de Sidon si y solo si $\mathscr{C}_\Lambda$ es isomorfo a $\ell^1(\Lambda)$.

En esta sección por simplicidad, y dado que trabajamos con un grupo G fijo, vamos a notar $\mathscr{C} = \mathscr{C}(G)$, $\mathscr{M} = \mathscr{M}(G)$, etc.

Teorema 4.2.1. *Si el espacio* $\mathscr{C}_\Lambda$ *es isomorfo a* ℓ^1, Λ *es un conjunto de Sidon.*

Demostración. Sea $f \in \mathscr{C}_\Lambda$. Consideramos los operadores de convolución:

$$C_f : \mu \in \mathscr{M} \mapsto f * \mu \in \mathscr{C}_\Lambda.$$

Notar que el hecho de que f tenga su espectro incluido en Λ hace que $\mathscr{C}_f$ defina un operador

$$U : \mathscr{M}/\mathscr{M}_{\Lambda^c} \to \mathscr{C}_\Lambda.$$

Por lo tanto, se tiene la factorización

$$C_f : \mathscr{M} \xrightarrow{q} \mathscr{M}/\mathscr{M}_{\Lambda^c} \xrightarrow{U} \mathscr{C}_\Lambda,$$

donde g es la proyección al cociente. Como $\mathscr{C}_\Lambda$ es, por hipótesis, isomorfo a ℓ^1, y como

$$\mathscr{M}/\mathscr{M}_{\Lambda^c} = \mathscr{C}^*/\mathscr{C}_\Lambda^\perp = \mathscr{C}_\Lambda^* \cong (\ell^1)^* = \ell^\infty,$$

la forma dual del Teorema de Grothendieck nos dice que U es $2-$sumante. Por lo tanto, U se factoriza a través de un espacio de Hilbert. Solo queda por demostrar la proposición siguiente para completar la prueba.

Proposición 4.2.2. *Sea $f : G \to \mathbb{C}$ una función continua. El operador de convolución C_f : $\mu \in \mathscr{M} \mapsto f * \mu \in \mathscr{C}$ se factoriza a través de un espacio de Hilbert si y solo si $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)| < \infty$. Además, se tiene que $\gamma_2(C_f) = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)|$.*

Demostración. Supongamos $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)| < \infty$. Sean a_γ números complejos tales que $a_\gamma^2 = \widehat{f}(\gamma)$, por lo que que $\sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma|^2 < \infty$. Entonces, $h = \sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma \gamma$ está en $L^2(G)$ y $f = h * h$. Se tiene entonces la siguiente factorización:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[rr, "C_f"] \arrow[dr, "C_h"'] & & \mathscr{C}. \\ & L^2(G) \arrow[ur, "C_h"'] & \end{tikzcd}$$

Para estimar $\gamma_2(C_f)$ vamos a necesitar acotar la norma de los operador $C_h : \mathscr{M} \to L^2(G)$ y $C_h : L^2 \to \mathscr{C}$. Utilizando la desigualdad de Young para medidas (consultar [HR12, pág 292]), obtenemos:

$$\|C_h(\nu)\|_{L^2(G)} = \|h * \nu\|_{L^2(G)} \leq \|h\|_{L^2} \|\nu\|_{\mathscr{M}}$$
$$\|C_h(g)\|_\infty = \|h * g\|_{L^2(G)} \leq \|h\|_{L^2} \|g\|_{L^2(G)} .$$

Por lo tanto, usando que $\|h\|_{L^2(G)} = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma^2|\right)^{1/2}$ concluimos que

$$\gamma_2(C_f) \leq \sum_{\gamma\in\Gamma} |\widehat{f}(\gamma)|.$$

Recíprocamente, supongamos que C_f se factoriza a través de un espacio de Hilbert H, es decir, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathscr{M} \arrow[rr, "C_f"] \arrow[dr, "B"'] & & \mathscr{C}. \\ & H \arrow[ur, "A"'] & \end{tikzcd}$$

Llamemos $h_\gamma = B(\gamma) \in H$ (recordar que identificamos a γ con la medida $\gamma \cdot m$). Entonces, se tiene que para todo polinomio trigonométrico $P = \sum\limits_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma$ vale que

$$\|C_f(P)\|_\infty = \left\| C_f \left(\sum_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma \right) \right\|_\infty \leq \|A\| \left\| \sum_\gamma \widehat{P}(\gamma) h_\gamma \right\|_H \leq \|A\| \, \|B\| \, \|P\|_{\mathscr{M}} .$$

Si ahora escribimos estas desigualdades con el polinomio trasladado P_{-t} en lugar de P, gracias a que $\widehat{P_{-t}}(\gamma) = \widehat{P}(\gamma)\gamma(t)$, obtendremos

$$\frac{1}{\|A\|} \|C_f(P)\|_\infty \leq \left\| \sum_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma(t) h_\gamma \right\|_H \leq \|B\| \, \|P\|_{\mathscr{M}} .$$

de modo que

$$\frac{1}{\|A\|} \|C_f(P)\|_\infty \leq \left(\int_G \left\| \sum_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma(t) h_\gamma \right\|_H^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|B\| \, \|P\|_{\mathscr{M}} .$$

Además,

$$\begin{aligned} \int_G \left\| \sum_\gamma \widehat{P}(\gamma)\gamma(t) h_\gamma \right\|_H^2 dt &= \sum_{\gamma,\gamma'} \widehat{P}(\gamma)\overline{\widehat{P}(\gamma')} \left[\int_G \gamma(t)\overline{\gamma'(t)} dt \right] (h_\gamma, h_{\gamma'}) \\ &= \sum_\gamma |\widehat{P}(\gamma)|^2 \, \|h_\gamma\|_H^2 . \end{aligned}$$

Así obtenemos

$$\left(\sum_\gamma |\widehat{P}(\gamma)|^2 \, \|h_\gamma\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|B\| \, \|P\|_{\mathscr{M}}$$

para todo polinomio trigonométrico P. Tomando como P a una aproximación de la identidad K_n obtenemos

$$\left(\sum_{\gamma\in\Lambda} \|h_\gamma\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|B\| . \tag{4.5}$$

Por otro lado, también se satisface

$$\frac{1}{\|A\|} \|C_f(P)\|_\infty \leq \left(\sum_\gamma |\widehat{P}(\gamma)|^2 \, \|h_\gamma\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo polinomio trigonométrico P. Para todo subconjunto finito F de $sp(f)$, reemplazamos $P = P_F = \sum\limits_\gamma \frac{\overline{\widehat{f}(\gamma)}}{|\widehat{f}(\gamma)|}\gamma$, obteniendo así

$$\frac{1}{\|A\|} \sum_{\gamma\in\Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| \leq \left(\sum_{\gamma\in\Lambda} \|h_\gamma\|_H^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) se deduce que

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| \leq \|A\| \, \|B\| \, ,$$

y en consecuencia $\sum_{\gamma\in\Lambda} |\widehat{f}(\gamma)| \leq \gamma_2(C_f)$.

□

Veamos que de la prueba anterior se obtiene

$$S(\Lambda) \leq K_G \left[d(\mathscr{C}_\Lambda, \ell^1) \right]^2 . \tag{4.7}$$

Usando el Teorema 4.1.9, el Teorema de Grothendieck 4.1.10 y la propiedad de ideal de los operadores $p-$sumantes deducimos

$$\|\widehat{f}\|_1 = \gamma_2(C_f) \leq \gamma_2(U) \leq \pi_2(U) \leq K_G \, \|U\| \left[d(\mathscr{C}_\Lambda, \ell^1) \right]^2 \leq K_G \left[d(\mathscr{C}_\Lambda, \ell^1) \right]^2 \|f\|_\infty .$$

Notar que el término $d(\mathscr{C}_\Lambda, \ell^1)$ aparece porque, para utilizar el Teorema de Grothendieck primero debemos componer con los isomorfismos entre $\mathscr{M}/\mathscr{M}_{\Lambda^c}$ y ℓ^∞ y, entre $\mathscr{C}_\Lambda$ y ℓ^1. Además, Por la propiedad $d(X, Y) = d(X^*, Y^*)$, las dos distancias coinciden y nos queda el término $d(\mathscr{C}_\Lambda, \ell^1)^2$.

□

4.3 Teorema de Bourgain-Milman

G. Pisier probó en 1978 que si $C_\Lambda(G)$ tiene cotipo 2, entonces Λ es un conjunto de Sidon. Esto fue mejorado por J. Bourgain y V. Milman, quienes en 1985 [BM85] demostraron que si C_Λ tiene cotipo finito, entonces Λ es un conjunto de Sidon. El objetivo de esta sección es probar el Teorema de Bourgain-Milman. Más adelante probaremos un resultado análogo para el espacio $U_\Lambda(\mathbb{T})$ (el conjunto de funciones continuas con espectro en Λ, cuya serie de Fourier es uniformemente convergente), es decir, mostraremos que $U_\Lambda(\mathbb{T})$ tiene cotipo finito si y solo si Λ es un conjunto de Sidon.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Bourgain-Milman)**.** *Sea G un grupo abeliano compacto (metrizable). Si el espacio de Banach $\mathscr{C}_\Lambda$ tiene cotipo finito, entonces Λ es un conjunto de Sidon.*

Comenzaremos enunciando el Teorema de Dvoretzky, una herramienta que nos servirá para deducir el Teorema de Bourgain-Milman. En la teoría de espacios de Banach, el teorema de estructura de Dvoretzky es un resultado sumamente importante demostrado por Aryeh Dvoretzky a principios de 1960 [Dvo61], como respuesta a una conjetura de Grothendieck de 1956. Este fue uno de los puntos de partida para el desarrollo de la "teoría local de los espacios de Banach".

Teorema 4.3.2 (Teorema de Dvoretzky)**.** *(consultar* [LQ04, Cap. 8)]

1) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo espacio de Banach E de dimensión n, existe un subespacio F de E de dimensión finita que satisface*
$$\dim F = k \geq \delta \log n$$
y tal que
$$d_F \leq 1 + \varepsilon.$$
De forma equivalente, podemos hallar $w_1, \dots, w_k \in E$ tales que
$$(1+\varepsilon)^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j w_j \right\| \leq (1+\varepsilon)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2}$$
para todo $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

2) *Si $d \dim E = \infty$, entonces, para todo $k \geq 1$ y todo $\varepsilon > 0$, E contiene un subespacio F de dimensión k tal que $d_F \leq 1 + \varepsilon$.*

A continuación enunciaremos un Corolario que será necesario para la prueba del Teorema de Bourgain-Milman. Nos dirá que si la constante de cotipo q de E está bien controlada, es decir, si $C_q(E) \leq C_q$ con C_q una constante que no dependa de $n = \dim E$, entonces obtendremos una estimación mucho mejor que en el caso general. Se puede encontrar en [LQ04] pág. 347.

Corolario 4.3.3. *Si la constante de cotipo $q\,(2 \leq q \leq \infty)$ de E cumple que $C_q(E) \leq C_q$, con C_q una constante que no dependa de $n = \dim E$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon, q) > 0$ y un subespacio $F \subseteq E$ tal que*
$$\dim F = k \geq \delta n^{2/q} \quad y \quad d_F \leq 1 + \varepsilon.$$

Necesitaremos también algunas definiciones y propiedades antes de probar el teorema principal de esta sección.

Definición 4.3.4. Sea E un espacio de Banach de dimensión n. Llamamos ***diámetro de Banach*** de E, y notamos $n(E)$, al entero más chico m tal que existen $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in B_{E^*}$ que cumplen
$$\|x\| \leq 2 \sup_{1 \leq k \leq m} |\varphi_k(x)|,$$
para todo $x \in E$.

De manera equivalente, $n(E)$ es el entero más chico m tal que E es $2-$isomorfo a un subespacio de ℓ_m^∞, donde $2-$ismorfo quiere decir que existe un isomorfismos $T : E \to F \subseteq \ell_m^\infty$ que satisface $\|T\|\,\|T^{-1}\| \leq 2.$. El isomorfismo en tal caso viene dado por $x \mapsto (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))$.

Definición 4.3.5. Sea G un grupo abeliano y compacto (metrizable), y sea A un subconjunto finito de $\Gamma = \widehat{G}$. Llamaremos ***diámetro aritmético*** de A al número $m = N_A(\varepsilon)$, el mínimo número de d_A-bolas de radio ε que se necesitan para cubrir G, donde d_A es la pseudo-métrica $d_A(s,t) = \sup\limits_{\substack{f \in C_A(G) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} |f(s) - f(t)|$, con $s,t \in G$.

Por la definición de diámetro aritmético, si $m = N(1/2)$ existen $t_1, \ldots .t_m \in G$ tales que

$$\|f\|_\infty \leq 2 \sup_{1 \leq k \leq m} |f(t_k)| \tag{4.8}$$

para toda $f \in \mathscr{C}_A(G)$. En efecto, sean $f \in \mathscr{C}_A$, y $t_1, \ldots, t_n \in G$ tales que

$$G = \cup_{j=1}^{m} \overline{B}(t_j, 1/2).$$

Para todo $t \in G$, se puede encontrar un $j \leq m$ tal que $d_A(t,t_j) \leq 1/2$, entonces se tiene que $|f(t) - f(t_j)| \leq \|f\|_\infty /2$ (normalizando la f y por definición de d_A). Luego, usando esto obtenemos

$$|f(t)| \leq |f(t) - f(t_j)| + |f(t_j)| \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty + \sup_{1 \leq k \leq m} |f(t_k)|,$$

por lo tanto, $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f\|_\infty + \sup\limits_{1 \leq k \leq m} |f(t_k)|$, esto concluye la prueba de la desigualdad (4.8).

El resultado anterior nos permite relacionar el diámetro aritmético y el de Banach de la siguiente forma. Consideremos los funcionales lineales $\delta_{t_1}, \ldots, \delta_{t_n}$, dadas por la evaluación en $t_1, \ldots, t_n$. Luego, por la desigualdad (4.8), deducimos que

$$n\left(\mathscr{C}_A\right) \leq N_A\left(\frac{1}{2}\right). \tag{4.9}$$

Con estas definiciones, los dos pasos principales para la prueba del Teorema de Bourgain-Milman son:

Paso 1: Si $\mathscr{C}_\Lambda$ tiene cotipo finito, entonces $\mathscr{C}_\Lambda$ tiene diámetro de banach grande y, en consecuencia, diámetro aritmético grande para todo subconjunto finito A de Λ.

Paso 2: Si todo subconjunto finito de Λ tiene diámetro aritmético grande, entonces Λ es un conjunto de Sidon.

Para seguir estos pasos van a ser fundamentales los próximos teoremas.

Teorema 4.3.6 (Maurey)**.** *Sea E un espacio de Banach de dimensión finita mayor o igual a 2 y sea $1 \leq q < \infty$. Entonces, existe una constante $\beta = \beta\left(q, C_q(E)\right) = \delta_q / \left(C_q(E)\right)^q$, donde $\delta_q > 0$, tal que*

$$\log\left(n(E)\right) \geq \beta \sup_{F \subseteq E} \frac{\dim F}{\left(\log(1 + d_F)\right)^q},$$

con F es un subespacio de E, y d_F la distancia de Banach-Mazur de F a $\ell^2_{\dim F}$.

Teorema 4.3.7 (Pisier)**.** *Sea G un grupo abeliano y compacto (metrizable), y Λ un subconjunto de $\Gamma = \widehat{G}$. Si existe $\varepsilon > 0$ tal que $N_A(\varepsilon) \geq e^{\varepsilon|A|}$ para todo subconjunto $A \subseteq \Lambda$, entonces se tiene la desigualdad*

$$S(\Lambda) \leq a \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^b .$$

donde $S(\Lambda)$ es la constante de Sidon de Λ, $a, b > 0$ son dos dos constante.

El Teorema 4.3.6 se debe a Maurey (ver el artículo de Pisier [Pis80]), y el Teorema 4.3.7 es esencialmente de Pisier, quien lo probó para una pseudo-métrica $\overline{d}_A$ más pequeña que d_A. Independientemente, en 1987, Bourgain [Bou87] y Rodríguez-Piazza [RP87] notaron que $d_A \leq \pi\overline{d}_A$. La prueba de estos Teoremas es extensa y vamos a omitirla en esta tesis. Nos enfocaremos ahora en ver cómo Bourgain y Milman dedujeron el Teorema 4.3.1.

Demostración del Teorema de Bourgain-Milman. Observemos primero que para probar que Λ es un conjunto de Sidon basta ver que la constante de Sidon de todo subconjunto finito de Λ está uniformemente acotada. Supongamos entonces que $A \subseteq \Lambda$ es finito y probemos que su constante de Sidon está mayorada por una constante que no depende de A. Más precisamente, vamos a ver que depende de $C_p = C_p(\mathscr{C}_\Lambda)$ (la constante de cotipo de $\mathscr{C}_\Lambda$) y de q.

Recordemos que $\beta = \delta_q / \left(C_q(E)\right)^q$. Como $C_q(\mathscr{C}_A) \leq C_q(\mathscr{C}_\Lambda)$ para todo subconjunto $A \subseteq \Lambda$ (por definición de cotipo), se tiene que

$$\beta\left(q, C_q(\mathscr{C}_A)\right) \geq \beta\left(q, C_q(\mathscr{C}_\Lambda)\right).$$

Además, observamos en (4.9) que

$$N_A\left(\frac{1}{2}\right) \geq n(\mathscr{C}_A).$$

Por lo tanto, combinando estas dos observaciones, el Teorema 4.3.6 nos dice que

$$\log N_A\left(\frac{1}{2}\right) \geq \beta(q, C_q) \sup_{F \subseteq \mathscr{C}_A} \left(\frac{\dim F}{(\log(1 + d_F))^q}\right). \tag{4.10}$$

Para aprovechar esta desigualdad debemos encontrar un subespacio F de $\mathscr{C}_A$ para el cual $\dim F$ sea grande y d_G sea pequeño. Consideremos, para eso, el isomorfismo de Fourier $\phi : \mathscr{C}_A \to \ell^1_{|A|}$, definido por $\phi(f) = \left(\widehat{f}(\gamma)\right)_{\gamma \in A}$, para el cual sabemos que $\|\phi\| = S(A)$ y $\|\phi^{-1}\| = 1$.

Como ℓ^1 tiene cotipo 2, el Teorema de Dvoretzky para espacios de cotipo 2 (ver Corolario 4.3.3) nos proporciona un subespacio G de $\ell^1_{|A|}$ tal que $d_G \leq 2$ y $\dim G \geq \alpha|A|$, donde $\alpha > 0$ es una constante. Entonces, tomando $F = \phi^{-1}(G)$, se tiene que $\dim F = \dim G \geq \alpha|A|$ y, además,

$$d_F \leq d_G\, d(F, G) \leq 2\, \|\phi\|\, \|\phi^{-1}\| \leq 2S(A) \leq 2S(\Lambda).$$

Por lo tanto, de (4.10) se deduce que

$$\log N_A\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\beta(q, C_q)\alpha}{(\log(1+2S(\Lambda)))^q}|A|. \tag{4.11}$$

Definamos

$$\varepsilon = \frac{\beta(q, C_q)\alpha}{(\log(1+2S(\Lambda))^q}.$$

Entonces, es conveniente separar en dos casos:

Caso 1: $\varepsilon \geq 1/2$. Entonces, claramente, $S(\Lambda) \leq \varphi_1(q, C_q)$, donde φ_1 es una función que depende solamente de q y de $C_q = C_q(\mathscr{C}_\Lambda)$.

Caso 2: $\varepsilon < 1/2$. Para este caso, de (4.11) se deduce que $\log N_A(\varepsilon) \geq \log N_A(1/2) \geq \varepsilon|A|$, y el Teorema 4.3.7 nos asegura que

$$S(\Lambda) \leq a\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^b = a\left(\frac{(\log(1+2S(\Lambda))^q}{\beta(q, C_q)\alpha}\right)^b,$$

de esta desigualdad se deduce fácilmente la existencia de una función φ_2, la cual depende solo de q y C_q y cumple que $S(\Lambda) \leq \varphi_2(q, C_q)$.

Finalmente, tenemos

$$S(\Lambda) \leq \max(\varphi_1, \varphi_2)(q, C_q)$$

da un acotación uniforme para la constante de Sidon, y por lo tanto Λ es un conjunto de Sidon. □

4.4 Funciones con serie de Fourier uniformemente convergente

Llamaremos $U(\mathbb{T})$ al subespacio de $C(\mathbb{T})$ de funciones cuya serie de Fourier es uniformemente convergente, equipado con la norma

$$\|f\|_U = \sup_{n\geq 1} \|S_n(f)\|_\infty,$$

donde $S_n(f)$ son las sumas parciales de la serie de Fourier de f:

$$S_n(f) = \sum_{|k|\leq n} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikt}.$$

En esta sección probaremos el resultado de Bourgain-Milman para el espacio $U_\Lambda(\mathbb{T})$: si tiene cotipo finito entonces Λ es un conjunto de Sidon. El teorema fue probado por P. Lefevre, D. Li, H. Queffélec, y L. Rodríguez-Piazza en [LLQRP02].

Primero necesitaremos algunas definiciones y notaciones. Sea A un subconjunto no vacío y finito de Λ. Notaremos $\sigma(A)$ a la constante

$$\sigma(A) = \inf\{C : \|\hat{f}\|_1 \leq C \|f\|_U, \forall f \in \mathscr{P}_A\} \tag{4.12}$$

Es importante destacar que, como veremos, $\sigma(A)$ está relacionada con la constante de Sidon $S(A)$. El siguiente teorema de probabilidad nos servirá para probar dicha relación. El teorema se puede encontrar en [Kah93] (Lema 1 pág.14).

Teorema 4.4.1 (Desigualdad de Levy)**.** *Para todo serie casi seguramente convergente $\sum_{i=1}^{\infty} X_i$ de variables aleatorias simétricas con valores en un espacio de Banach X y $u > o$ se tiene*

$$\mathbb{P}\left(\max_N \left\|\sum_{i=1}^{N} X_i(\omega)\right\| > u\right) \leq 2\mathbb{P}\left(\left\|\sum_i X_i(\omega)\right\| > u\right). \tag{4.13}$$

La relación que mencionamos anteriormente está dada de la siguiente forma.

Lema 4.4.2. *Sea A un subconjunto no vacío y finito de $\Lambda \subseteq \widehat{G}$. Entonces, se verifica que*

$$\sigma(A) \leq S(A) \leq K\sigma(A)^3,$$

donde K es una constante que no depende de A.

Demostración. Para deducir la primer desigualdad notemos que A es finito y por lo tanto si $f \in \mathscr{P}_A$ tendremos que $\sup_N \|S_N(f)\|_\infty \geq \|f\|_\infty$ (pues existe un N tal que $S_N(f) = f$). Entonces, se desprende de las definiciones que $\sigma(A) \leq S(A)$. Para probar la otra desigualdad escribamos $A = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ con $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_m$. Consideremos ahora el polinomio trigonométrico $f = \sum_{j=1}^{m} a_j e^{2\pi i\lambda_j}$ y el polinomio aleatorio $f_\omega = \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j(\omega) a_j e^{2\pi i\lambda_j}$, donde (ε_j) es una sucesión de variables aleatorias Bernoulli independientes.

Por definición, se tiene

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq \sigma(A) \|f_\omega\|_U = \sigma(A) \sup_{1\leq N\leq\lambda_m} \|S_N(f_\omega)\|_\infty.$$

Ahora, calculando la esperanza y usado la desigualdad de Levy 4.4.1 para $X_i = \varepsilon_j(\omega) a_j e^{2\pi i\lambda_j}$ (con la norma $\| \quad \|_\infty$) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sup_{1\leq N\leq\lambda_m} \|S_N(f_\omega)\|_\infty\right) &= \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\sup_N \left\|\sum_{i=1}^{N} X_i(\omega)\right\| > u\right) du \\ &\leq 2\int_0^\infty \mathbb{P}\left(\left\|\sum_i X_i(\omega)\right\| > u\right) du \\ &= 2\mathbb{E}\left(\|f_\omega\|_\infty\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{m} |a_j| \leq 2\sigma(A)\mathbb{E}\left(\|f_\omega\|_\infty\right) = 2\sigma(A)\,\|f\|_R\,. \tag{4.14}$$

Usando el Teorema 3.2.5 deducimos que $S(A) \leq C\,(2\sigma(A))^3$, concluyendo así la prueba del lema. □

Para probar el resultado principal de esta sección, la idea es adaptar al demostración de Bourgain-Milman para el espacio $U(\mathbb{T})$. Recordemos primero algunas definiciones. Por un lado, el diámetro de Banach de $U_A(\mathbb{T})$ está dado por

$$n\left(U_A(\mathbb{T})\right) = \inf_m\{m \geq 1 : U_A(\mathbb{T}) \text{ es 2-isomorfo a un subespacio de } \ell_m^\infty\}.$$

Por otro lado, como definimos en 4.3.5, llamaremos $N_A(\varepsilon)$, con $\varepsilon > 0$, al mínimo número de d_A-bolas de radio ε que se necesitan para cubrir $\mathbb{T}$. Siguiendo los pasos de sección anterior, nos interesa relacionar $n\left(U_A(\mathbb{T})\right)$ con $N_A(1/2)$.

Lema 4.4.3. *Sea $A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \subseteq \Lambda$ finito y sea $t_1, t_2, \ldots, t_N$ una $\frac{1}{2}-$red en $\mathbb{T}$ asociada a d_A . Entonces, para toda $f \in C_A(\mathbb{T})$, se tiene*

$$\|f\|_U \leq 2 \sup_{\substack{1\leq n\leq m\\ 1\leq j\leq N}} |S_{\lambda_n}(f)(t_j)|. \tag{4.15}$$

Demostración. Veamos primero que para toda función $g \in C_A(\mathbb{T})$ se tiene

$$\|g\|_\infty \leq 2 \sup_{1\leq j\leq N} |g(t_j)|.$$

En efecto, para cada $t \in \mathbb{T}$ tomemos j tal que $d_A(t, tj) \leq \frac{1}{2}$ (existe por definición de t_j). Luego, para toda función $g \in C_A(\mathbb{T})$ con $\|g\|_\infty = 1$, por definición, $|g(t) - g(t_j)| \leq d_A(t, t_j) \leq \frac{1}{2}$. Por lo tanto,

$$1 = \|g\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t)| \leq \sup_{1\leq j\leq N} |g(t_j)| + \frac{1}{2}. \tag{4.16}$$

Concluimos $1 = \|g\|_\infty \leq 2 \sup\limits_{1\leq j\leq N} |g(t_j)|$.

Notar que para toda $f \in C_A(\mathbb{T})$ y todo $1 \leq n \leq \lambda_m$, $S_n(f) \in C_A(\mathbb{T})$. Observemos que para f con espectro contenido en Λ se tiene que $S_k(f) = S_{\lambda_n}(f)$ para todo $k \in [\lambda_n, \lambda_{n+1})$. A continuación, aplicaremos la afirmación (4.16) a cada $S_{\lambda_n}(f)$ para obtener

$$\|f\|_U = \sup_{1\leq n\leq \lambda_m} \|S_n(f)\|_\infty = \sup_{1\leq n\leq m} \|S_{\lambda_n}(f)\|_\infty \leq 2 \sup_{\substack{1\leq n\leq m\\ 1\leq j\leq N}} |S_{\lambda_n}(f)(t_j)|. \tag{4.17}$$

Esto concluye la prueba de 4.4.3. □

Considerando la aplicación

$$U_A(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty_{m\times N} \tag{4.18}$$

$$f \longmapsto (S_{\lambda_n}(f)(t_j))_{\substack{1\leq n\leq m\\ 1\leq j\leq N}} \tag{4.19}$$

y el Lema 4.4.3, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4.4. *Sea A como antes. Entonces, se tiene la siguiente relación*

$$n\left(U_A(\mathbb{T})\right) \leq |A|.N_A\left(\frac{1}{2}\right). \tag{4.20}$$

Ahora sí, podemos demostrar el teorema central de esta sección.

Teorema 4.4.5. *Sea $\Lambda \subset \mathbb{Z}$. El espacio $U_\Lambda(\mathbb{T})$ tiene cotipo finito si y solo si Λ es un conjunto de Sidon.*

Demostración. Si Λ es un conjunto de Sidon, la serie de Fourier de toda $f \in \mathscr{C}_\Lambda(\mathbb{T})$ es absoluta y uniformemente convergente. Luego, tiene que $U_\Lambda(\mathbb{T}) = C_\Lambda(\mathbb{T})$, el cual es isomorfo a ℓ^1, que tiene cotipo 2.

Supongamos ahora que $U_\Lambda(\mathbb{T})$ tiene cotipo finito $q \geq 2$. Es suficiente probar el caso $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Supongamos que Λ es finito y probemos que su constante de Sidon está uniformemente acotada. Sea A un subconjunto no vacío de Λ, s $A = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, con $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ para todo n.

La prueba del teorema sigue como la de Bourgain y Milman para C_Λ. El resultado de Maurey 4.3.6 nos dice que, para todo $q \geq 2$,

$$\log(\nu_A) \geq \delta_q \left[C_q\left(U_A(\mathbb{T})\right)\right]^{-q} \sup_{F\subset U_A(\mathbb{T})} \frac{dim(F)}{(\log(1+d_F))^q},$$

donde d_F denota la distancia de Banach-Mazur entre F y $\ell^2_{dim(F)}$, C_q denota la constante de cotipo del espacio y δ_q es una constante que depende solo de q. Sabemos que $C_q\left(U_A(\mathbb{T})\right) \leq C_q\left(U_\Lambda(\mathbb{T})\right)$, por lo que reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$\log\left(n\left(U_A(\mathbb{T})\right)\right) \geq \delta \sup_{F\subset U_A(\mathbb{T})} \frac{\dim(F)}{(\log(1+d_F))^q} \tag{4.21}$$

donde $\delta = \delta_p\left[C_q\left(U_\Lambda(\mathbb{T})\right)\right]^{-q}$ no depende de A.

Por el Teorema de Dvoretzky aplicado a ℓ^1, existe un subespacio G de $\ell^1_{|A|}$ tal que $d_G \leq 2$ y $\dim(G) \geq \alpha|A|$.

Notemos que, por definición, la distancia de Banach-Mazur entre $U_A(\mathbb{T})$ y $\ell^1_{|A|}$ es menor o igual a $\sigma(A)$. Por lo tanto, existe un subespacio F de $U_A(\mathbb{T})$ (isomorfo a G con distancia de Banach-Mazur menor a $\sigma(A)$) tal que $\dim(F) = \dim(G) \geq \alpha|A|$ y $d_F \leq \sigma(A)d_G \leq 2\sigma(A)$.

El Lema 4.4.2 y la relación (4.21) nos permiten deducir

$$\log(n\,(U_A(\mathbb{T}))) \geq \frac{\delta\alpha|A|}{[\log(1+2S(A))]^q},$$

por lo que cambiando la constante y utilizando (4.20) obtenemos

$$\log N_A\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{\delta|A|}{[\log(1+S(A))]^q} - \log(|A|).$$

Como $S(A) \leq |A|$, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\log N_A\left(\frac{1}{2}\right) \geq \frac{c|A|}{[\log(1+S(A))]^q},$$

para todo $A \subset \Lambda$ finito. A partir de aquí, la demostración concluye como la del Teorema 4.3.1, usando el Teorema de Maurey 4.3.6 y separando en casos. $\square$

Capítulo 5

Sucesiones conmensurables de caracteres

Probaremos en este capítulo que si (a_j) y (b_j) son dos sucesiones de caracteres de grupos compactos y abelianos S y T respectivamente, tales que para toda sucesión de escalares (α_n) se que cumple que $\|\sum \alpha_j a_j\|_\infty \asymp \left\|\sum_j \alpha_j b_j\right\|_\infty$, entonces para todo $1 \leq p < \infty$ y toda sucesión (x_n) de elementos de un espacio de Banach arbitrario X, se tiene que

$$\int_S \left\|\sum x_j a_j\right\|^p dx \asymp \int_S \left\|\sum x_j b_j\right\|^p dx$$

(Aquí, la notación $f \asymp g$ significa que existe una constante $C \geq 1$ tal que

$$\frac{1}{C} f(t) \leq g(t) \leq C f(t),$$

para todo t). Este resultado generaliza el siguiente Teorema de Pisier [Pis77] para conjuntos de Sidon:

Teorema 5.0.1. *Sea G un grupo abeliano y compacto, con grupo dual Γ. Sea $\Lambda = \{\gamma_i : i \in \mathbb{N}\} \subseteq \Gamma$ un conjunto de Sidon. Para toda sucesión finita $(x_1, \ldots, x_n)$ de un espacio de Banach arbitrario X y $1 \leq p < \infty$, se tiene:*

$$\frac{1}{(2S(\Lambda))^p} \int \left\|\sum_{i=1}^n r_i(\omega) x_i\right\|^p d\mathbb{P}(\omega) \leq \int \left\|\sum_{i=1}^n \gamma_i(g) x_i\right\|^p d\mu \leq (2S(\Lambda))^p \int \left\|\sum_{i=1}^n r_i(\omega) x_i\right\|^p d\mathbb{P}(\omega), \tag{5.1}$$

donde r_i denotan las variables Rademacher.

De este teorema se deduce que si $\Lambda_1 = (f_j)_j$ y $\Lambda_2 = (g_j)_j$ son dos conjuntos de Sidon de grupos S y T respectivamente, entonces tomando $d = 4S(\Lambda_1)S(\Lambda_2)$ tenemos que para todo $1 \leq p < \infty$ y toda sucesión finita $(x_j)_{j=1}^n$ de un espacio de Banach X, se verifica

$$d^{-p}\int\left\|\sum f_j x_j\right\|^p d\mu \leq \int\left\|\sum g_j x_j\right\|^p d\nu \leq d^p\int\left\|\sum f_j x_j\right\|^p d\mu.$$

Esto motiva la siguiente definición.

Definición 5.0.2. Sean (f_j) y (g_j) sucesiones de funciones que toman valores escalares, y pertenecen a $L^\infty(\mu)$ y $L^\infty(\nu)$ (con μ y ν medidas de probabilidad) y sea $d \geq 1$. Diremos que (f_j) y (g_j) son $d-$***conmensurables*** si para todo espacio de Banach X, para todo $p \in [1,\infty)$ y toda sucesión $(x_j) \subset X$, se tiene

$$d^{-p}\int\left\|\sum f_j x_j\right\|^p d\mu \leq \int\left\|\sum g_j x_j\right\|^p d\nu \leq d^p\int\left\|\sum f_j x_j\right\|^p d\mu,$$

o con la notación anterior,

$$\int\limits_S\left\|\sum f_j x_j\right\|^p dx \asymp \int\limits_S\left\|\sum g_j x_j\right\|^p dx.$$

Con esta definición, el Teorema 5.0.1 nos dice que si (f_j) y (g_j) son conjuntos de Sidon de caracteres de grupos compactos y abelianos, luego son conmensurables.

Observación 5.0.3. Sean $\Lambda_1 = \{f_j\}$ y $\Lambda_2 = \{g_j\}$ conjuntos de Sidon de caracteres de grupos compactos y abelianos. Entonces, para toda sucesión de escalares α_j se satisfacen las siguientes dos desigualdades:

$$\left\|\sum_j \alpha_j g_j\right\|_\infty \leq \sum_j |\alpha_j| \leq S(\Lambda_1)\left\|\sum_j \alpha_j f_j\right\|_\infty. \tag{5.2}$$

$$\left\|\sum_j \alpha_j f_j\right\|_\infty \leq \sum_j |\alpha_j| \leq S(\Lambda_2)\left\|\sum_j \alpha_j g_j\right\|_\infty. \tag{5.3}$$

Entonces, se tiene que para toda sucesión de escalares

$$\left\|\sum_j \alpha_j g_j\right\|_\infty \asymp \left\|\sum_j \alpha_j f_j\right\|_\infty.$$

Por lo tanto, el siguiente Teorema generaliza el Teorema 5.0.1.

Teorema 5.0.4. *Sean $A = \cup_j \{a_j\}$ y $B = \cup_j \{b_j\}$ conjuntos de caracteres de grupos compactos y abealianos S y T respectivamente. Supongamos que la correspondencia $a_j \to b_j$ se extiende a un isomorfismo lineal U, entre $\mathscr{C}_A(S)$ y $\mathscr{C}_B(T)$ y que además cumple que $\|U\|\,\|U^{-1}\| = d$. Entonces, las sucesiones $\{a_j\}$ y $\{b_j\}$ son d-conmensurables.*

Recordemos que por $\mathscr{C}_\Lambda(G)$ notamos a el subespacio de funciones continuas a valores complejos que salen de un grupo compacto y abeliano G generado por los caracteres de un subconjunto Λ de su grupo dual $\hat{G}$.

Demostración. Fijemos $t \in T$ y consideremos la distribución δ_t (la masa puntual en t). Sea ϕ_t^* la restricción de δ_t a $\mathscr{C}_B(T)$. Notemos que ϕ_t^* es un funcional lineal que sale de $\mathscr{C}_B(T)$ y $\|\phi_t^*\| \leq 1$. Además, para cada $b_j \in B$ tenemos

$$b_j(t) = \phi_t^*(b_j) = \phi_t^*(U(a_j)) = (U^*\phi_t^*)(a_j)$$

donde U^* denota el operador adjunto de U.

Por el teorema de Hahn-Banach podemos extender el funcional $U^*\phi_t^*$, definido en el subespacio $\mathscr{C}_A(S)$, a todo $C(S)$. Llamemos μ_t a la medida de Borel que le corresponde a dicha extensión vía el Teorema de Representación de Riesz. Ahora, definamos las siguientes medidas:

$$\nu_t(V) = \mu_t(-V); \quad \bar{\nu}_t(V) = \overline{\mu_t(-V)} \qquad \textit{para todo boreliano } V \subseteq S.$$

Gracias a esta definición, si miramos los coeficientes de ν_t en los puntos de A, obtendremos

$$\hat{\nu}_t(a_j) = \int\limits_S a_j(-s) d\nu_t(s) = \int\limits_S a_j(s) d\mu_t(s) = b_j(t).$$

Tenemos también que la variación total de ν_t satisface

$$\|\bar{\nu}_t\| = \|\nu_t\| = \|\mu_t\| \leq \|U^*\| = \|U\|.$$

Fijemos una sucesión (x_j) finita de elementos de un espacio de Banach X y definamos las siguientes funciones que toman valores en X

$$f = \sum_j x_j a_j; \qquad f_t = \sum_j x_j b_j(t) a_j.$$

Notemos $f * \nu$ a la convolución en S de la medida escalar ν con la función f, es decir,

$$(f * \nu)(s) = \int\limits_S f(s - \sigma) d\nu(\sigma) \qquad \textit{para} \quad s \in S.$$

Si comparamos los coeficientes de Fourier obtenemos

$$f * \nu_t = f_t; \qquad f_t * \bar{\nu}_t = f.$$

Entonces, utilizando la desigualdad de Young vectorial, tenemos

$$\|f_t\|_p \leq \|f\|_p \|\nu_t\| \leq \|U\| \|f\|_p; \quad \|f\|_p \leq \|f\|_p \|\nu_t\| \leq \|U\| \|f_t\|_p$$

Elevando a la p, integrando respecto a la medidas de Haar dt de T y usando el teorema de Fubini (Como las (x_j) finitas y las funciones a_j y b_j son continuas no tenemos ningún problema con la medibilidad o integrabilidad de las funciones). Obtenemos entonces

$$\|U\|^{-1} \|f\|_p \leq \left(\int\limits_S \int\limits_T \left\| \sum_j a_j(s) b_j(t) x_j \right\|^p ds\, dt \right)^{1/p} \leq \|U\| \|f\|_p.$$

Intercambiando el rol de A y B para $g = \sum x_j b_j$ tenemos también

$$\|U^{-1}\|^{-1} \|g\|_p \leq \left(\int_S \int_T \left\| \sum_j a_j(s) b_j(t) x_j \right\|^p ds\, dt \right)^{1/p} \leq \|U^{-1}\| \, \|f\|_p \, .$$

Por lo tanto,

$$\left(\|U\| \, \|U^{-1}\| \right)^{-1} \|f\|_p \leq \|g\|_p \leq \left(\|U\| \, \|U^{-1}\| \right) \|f\|_p \, . \qquad \square$$

Observación 5.0.5. Sea $\{f_j\}$ un conjunto de caracteres conmensurables con las la familia $\mathcal{R}$ de funciones Rademacher. Como la norma L^∞ es el límite de las normas L^p, de la definición de conmensurabilidad se deduce que

$$\left\| \sum_j \alpha_j r_j \right\|_\infty \asymp \left\| \sum_j \alpha_j f_j \right\|_\infty .$$

Veamos que $\{f_j\}$ es un conjunto de Sidon. Tomemos una sucesión de escalares α_j arbitraria. Sabemos que $\mathcal{R}$ es un conjunto de Sidon, combinando esto con la relación anterior, se tiene

$$\sum_j |\alpha_j| \leq S(\mathcal{R}) \left\| \sum_j \alpha_j r_j \right\|_\infty \leq S(\mathcal{R}) d \left\| \sum_j \alpha_j f_j \right\|_\infty .$$

Concluimos entonces que las sucesiones de caracteres que son conmensurables con las Rademacher forman un conjunto de Sidon. Combinando la observación anterior con el Teorema 5.0.4 deducimos el siguiente teorema:

Teorema 5.0.6. *Sea $\Lambda = (\gamma)_j$ un conjunto de caracteres de G. Luego, $(\gamma_j)_{j=1}^\infty$ es conmensurable con el sistema Rademacher $\mathcal{R} = (r_j)_{j=1}^\infty$ si y solo si $(\gamma_j)_{j=1}^\infty$ es un conjunto de Sidon.*

Por último daremos una aplicaciones del Teorema 5.0.4. Primero vamos a necesitar algunas definiciones. Se definen las variables Steinhaus como variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el toro $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Una definición equivalente es considerarlas como caracteres en el grupo $\mathbb{T}^\infty$. Llamaremos sistema de variables Steinhaus a la sucesión $(\psi_j)_j$, donde $\psi_j : \mathbb{T}^\infty \to \mathbb{T}$ es la proyección a la j-ésima coordenada. Es importante destacar que estas sucesiones son un ejemplo de conjunto de Sidon. En efecto, sea $(a_j)_{j=1}^n$ una sucesión finita. Para cada numero complejo a distinto de cero, existe un único numero complejo w de módulo 1 tal que $aw = |a|$, más precisamente $w = e^{-\arg(a)i}$. Luego si tomamos $\varepsilon = (w_1, \ldots, w_n, \ldots) \in \mathbb{T}^\infty$ (tomando $w = 1$ en caso que a sea cero), entonces deducimos que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j \psi_j \right\|_\infty = \sum_{j=1}^n |a_j|,$$

y por lo tanto, $(\psi_j)_j$ es un conjunto de Sidon.

Es un resultado conocido (ver [PW98, Capítulo 4]) que los promedios Rademacher

$$\Big(\int_0^1 \Big\|\sum_{k=1}^N r_k(t)x_k\Big\|^p dt\Big)^{1/p}$$

son equivalentes a los promedios Steinhaus:

$$\Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big\|\sum_{k=1}^N x_k\psi_k\Big\|^p dz\Big)^{1/p}.$$

En otras palabras, los sitemas de Rademacher y Steinhaus son conmensurables.

Podemos deducir este resultado como aplicación de los contenidos de este capítulo, más precisamente vamos a deducirlo del Teorema 5.0.4. Tanto las variables Rademacher como las variables Steinhaus son conjuntos de Sidon por lo que cumplen la condición $\|\sum \alpha_j r_j\|_\infty \asymp \left\|\sum_j \alpha_j\psi_j\right\|_\infty$ para toda sucesión de escalares (α_j), entonces aplicando el teorema se deduce que $(r_j)_j$ y $(\psi_j)_j$ son conmensurables.

Bibliografía

[AK06] F. Albiac and N. J Kalton, *Topics in banach space theory*, Vol. 233, Springer Science & Business Media, 2006.

[AKS81] M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi, *A dense infinite sidon sequence*, European Journal of Combinatorics **2** (1981), no. 1, 1–11.

[BM85] J. Bourgain and V. Milman, *Dichotomie du cotype pour les espaces invariants*, CR Acad. Sci. Paris **300** (1985), 263–266.

[Bou87] J Bourgain, *A remark on entropy of abelian groups and the invariant uniform approximation property*, Studia Mathematica **86** (1987), no. 1, 79–84.

[Cil14a] J. Cilleruelo, *Conjuntos de sidon*, Vol. 1, 2014.

[Cil14b] J. Cilleruelo, *Infinite sidon sequences*, Advances in Mathematics **255** (2014), 474–486.

[DJT95] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Vol. 43, Cambridge University Press, 1995.

[Dru70] S. W. Drury, *Sur les ensembles de sidon*, CR Acad. Sci. Paris **271** (1970), 162–163.

[Dvo61] A. Dvoredsky, *Some results on convex bodies and banach spaces* (1961).

[ET41] P. Erdös and P. Turán, *On a problem of sidon in additive number theory, and on some related problems*, Journal of the London Mathematical Society **1** (1941), no. 4, 212–215.

[Gra08] L. Grafakos, *Classical fourier analysis*, Vol. 2, Springer, 2008.

[Gro52] A. Grothendieck, *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **4** (1952), 73–112 (1954). MR0061754

[Gro53] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. São Paulo **8** (1953), 1–79. MR0094682

[HR12] E. Hewitt and K. A Ross, *Abstract harmonic analysis: Volume 1: Structure of topological groups integration theory group representations*, Vol. 115, Springer Science & Business Media, 2012.

[HR79] E. Hewitt and K. A Ross, *Abstract harmonic analysis. vol. i, volume 115 of grundlehren der mathematischen wissenschaften [fundamental principles of mathematical sciences]*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[Kah70] J.-P. Kahane, *Series de fourier absolument convergentes.* (1970).

[Kah85] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Second, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Kah93] J.-P. Kahane, *Some random series of functions*, Vol. 5, Cambridge University Press, 1993.

[Kör89] T. W. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge university press, 1989.

[Lef99] P. Lefèvre, *Measures and lacunary sets*, Studia Math **133** (1999), no. 2, 145–161.

[LLQRP02] P Lefevre, D Li, H Queffélec, and L Rodríguez-Piazza, *Lacunary sets and function spaces with finite cotype*, Journal of Functional Analysis **188** (2002), no. 1, 272–291.

[LQ04] D. Li and H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de banach: analyse et probabilités*, Vol. 12, SMF, 2004.

[Peł88] A Pełczyński, *Commensurate sequences of characters*, Proceedings of the American Mathematical Society **104** (1988), no. 2, 525–531.

[Pis77] G Pisier, *Les inégalités de khintchine-kahane (d'aprês c. borel), sém*, Géométrie desespaces de Banach **1978** (1977).

[Pis80] G. Pisier, *Remarques sur un résultat non publié de b. maurey*, Séminaire Analyse fonctionnelle (dit (1980), 1–12.

[PW98] A. Pietsch and J. Wenzel, *Orthonormal systems and banach space geometry*, Vol. 70, Cambridge University Press, 1998.

[RP87] L. Rodríguez-Piazza, *Caractérisation des ensembles p-sidon ps*, CR Acad. Sci., Paris, Sér. I **305** (1987), 237–240.

[R$^+$] D. Rider et al., *Randomly continuous functions and sidon sets.*

[Rud11] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, John Wiley & Sons, 2011.

[Rud59] W. Rudin, *Some theorems on fourier coefficients*, Proceedings of the American Mathematical Society **10** (1959), no. 6, 855–859.

[Rud60] W. Rudin, *T rzgonometric series with gaps*, Journal of Mathematics and Mechanics **9** (1960), no. 2.

[Ruz98] I. Z Ruzsa, *An infinite sidon sequence*, Journal of Number Theory **68** (1998), no. 1, 63–71.

[Sei97] J. Seigner, *Rademacher variables in connection with complex scalars*, Acta Math. Univ. Comenianae **66** (1997), no. 2, 329–336.

[Sid27] S. Sidon, *Ein satz über die absolute konvergenz von fourierreihen, in denen sehr viele glieder fehlen*, Mathematische Annalen **96** (1927), no. 1, 418–419.