UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Dinámica de los Homeomorfismos en la Bola Unitaria de $\mathbb{R}^n$

Melanie Bondorevsky

Director: Dr. Pablo Amster

Fecha de Presentación: 23 de Marzo de 2016

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi mamá y a mi papá por el apoyo para terminar esta carrera.

A mis hermanos, Joni y Flor, por ser mis pilares y escucharme incluso cuando no sabían de lo que estaba hablando.

A mis hermanos, Diego y Vero. A mis sobrinas Sofi, Isa, Lara y Mora.

A mis amigos, por las infinitas juntadas, momentos y delirios compartidos. Especialmente a Jo, Josi, Dudú, Niki y Gabi.

A los fosters, Kick y Loli.

Al turno noite, por los asados y por salvarme las papas cuando lo necesité. En especial a Manu, Yani, Juan y Tikis.

A todas las personas de esta facultad que transitaron conmigo esto que hoy concluyo. Sobre todo a mi director Pablo. Gracias por leerme, escucharme y responderme con la mejor siempre.

A los jurados, Juan Pablo Pinasco y Pablo De Napoli, por dedicar su tiempo a leer esta tesis.

A los profesores que me mostraron como se pueden hacer las cosas. En particular, a los profesores del IMPA, Enrique Pujals y Luis Hernández Corbato por introducirme en el área de Sistemas Dinámicos.

A mis compañeros de facultad, por todas las maratones de estudio, las meriendas y las juntadas post exámenes. En especial a Mati, Hui, Didi, Gabriel, Bruce, Fran, Luci, Mer, Sofi, Nati, Ariel, Eugenio, Santi y Carlinho.

A Moz, a Luisa y a Ramón.

Por último, le dedico este trabajo a Hernán, por elegirme y apoyarme en esto hasta el último momento.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. Objetivo del trabajo

Fijamos un número natural $n \geq 2$ y un subconjunto X de $\mathbb{R}^n$ compacto con interior no vacío. Denotamos $\mathcal{H}(X)$ al conjunto de todos los homeomorfismos de X a X con la topología de la convergencia uniforme. Es decir, la inducida por la métrica del supremo:

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} ||f(x) - g(x)|| \quad (f, g \in \mathcal{H}(X)),$$

donde $|| \cdot ||$ denota la norma euclidea de $\mathbb{R}^n$.

Como el estudio de sistemas dinámicos puede ser pensado como el estudio de leyes muy generales, en algún sentido es natural considerar los resultados que son ciertos para "casi todas las transformaciones". Claramente, esto se puede hacer en diferentes contextos. Al mismo tiempo, hay diferentes formas de pensar qué debería ser "casi todas las transformaciones".

En este trabajo nos restringimos al estudio de la dinámica de funciones en $\mathcal{H}(X)$. Más precisamente, la expresión "casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen la propiedad P" significa que el conjunto de funciones en $\mathcal{H}(X)$ que no satisfacen la propiedad P es unión de subconjuntos nunca densos en $\mathcal{H}(X)$.

El objetivo de esta tesis es estudiar la dinámica de las funciones en $\mathcal{H}(X)$ desde el siguiente punto de vista: ¿Cuáles son las propiedades que son satisfechas por "casi todas" las funciones en $\mathcal{H}(X)$?

En el primer capítulo, a modo de introducción, relatamos el origen de los sistemas dinámicos, contando un poco de historia y mencionando resultados importantes en el área.

En el siguiente capítulo nos enfocamos en la dinámica en $\mathcal{H}(X)$. Allí, estudiamos la existencia de puntos periódicos y ciclos atractores de las funciones de $\mathcal{H}(X)$. A su vez, a partir de lo anterior investigamos las propiedades del conjunto de puntos periódicos desde el punto de vista topológico y desde la teoría de la medida.

En el último capítulo, nos dedicamos a analizar la sensibilidad a condiciones iniciales en subconjuntos de X con distintas propiedades. Finalmente, mostramos la existencia de (infinitos) atractores uniformes.

1.2. Notación y definiciones

En esta sección desarrollamos un poco el lenguaje y la notación que serán necesarios para los siguientes capítulos. En lo que sigue y hasta nuevo aviso, X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ compacto con interior no vacío.

Denotamos $C(X)$ al espacio de funciones continuas de X a X, $\mathcal{H}(X)$ al espacio de homeomorfismos de X a X y $CO(X)$ al espacio de funciones continuas sobreyectivas de X a X, todos provistos de la topología de la convergencia uniforme.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ entonces $\overline{A}$, $\operatorname{Int} A$, $\operatorname{Bd} A$ y $\operatorname{diam} A$ denotan la clausura, el interior, el borde y el diámetro del conjunto A en $\mathbb{R}^n$, respectivamente.

Si $A, B \subset \mathbb{R}^n$, definimos

$$A - B := \{x \in A : x \notin B\} \quad \text{y} \quad \operatorname{dist}(A, B) := \inf_{a \in A, b \in B} ||a - b||$$

Decimos que A es denso en B si $\overline{A} \supset B$. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$ definimos

$$\begin{aligned} B(x; r) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| < r\}, \\ \overline{B}(x, r) &:= \{y \in \mathbb{R}^n : ||y - x|| \leq r\}. \end{aligned}$$

Similarmente, $B_{\mathcal{H}(X)}(f; r)$ denota la bola abierta en $\mathcal{H}(X)$ con centro $f \in \mathcal{H}(X)$ y radio $r > 0$. Si $A \subset \mathcal{H}(X)$, $\overline{A}$ es la clausura de A en $\mathcal{H}(X)$.

Ahora recordemos algunas definiciones básicas que utilizamos continuamente en el desarrollo de la tesis.

Sea $A \subset X$, decimos que el subconjunto A es nunca denso si el interior de su clausura es vacío. En particular, si X es unión numerable de tales subconjuntos, X se denomina conjunto de primera categoría. Análogamente, X se denomina de segunda categoría si no es de primera categoría.

A partir de esto, la definición del espacio de Baire puede establecerse como sigue:

Un espacio topológico X es llamado espacio de Baire si todo conjunto abierto no vacío es de segunda categoría en X.

A continuación enumeramos varias definiciones indispensables para estudiar la dinámica de $\mathcal{H}(X)$.

Sea $f \in \mathcal{H}(X)$, un punto fijo de f es un punto $x \in X$ tal que $f(x) = x$. Denotamos F_f al conjunto de puntos fijos de f. Similarmente, denotamos F_{f^m} al conjunto de puntos fijos de f^m, para cada $m \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, dada $f \in \mathcal{H}(X)$, un punto periódico de f de período m $(m \in \mathbb{N})$ es un punto $x \in X$ tal que $f^m(x) = x$ y $f^i(x) \neq x$ para todo $1 \leq i \leq m - 1$.

Llamamos $\text{Per}(f,m)$ al conjunto de puntos periódicos de f de período m y $\text{Per}(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f, es decir $\text{Per}(f) = \cup_{m\geq 1} \text{Per}(f,m)$. Por último, llamamos $\text{Per}(f,x) \in \mathbb{N}$ al período de $x \in X$.

Observemos que según la definición anterior, $m = \text{mín}\{j \in \mathbb{N} : f^j(x) = x\}$. Por eso tenemos que $\text{Per}(f,m) \subset F_{f^m}$ pero no necesariamente vale la otra inclusión (si $m \neq 1$). Por ejemplo, si consideramos $x \in F_f$, $x \in F_{f^m} - \text{Per}(f,m)$.

Sea $f \in \mathcal{H}(X)$ y sea $x \in X$, decimos que x es punto no errante de f si para todo U entorno de x, $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$ para infinitos $k \geq 1$. Denotamos Ω_f al conjunto de puntos no errantes de f.

Finalmente, dada $f \in \mathcal{H}(X)$, decimos que x es un punto recurrente de f si es el límite de la sucesión $(f^j(x))_{j\geq 0.}$

1.3. Estructura de la tesis

El trabajo está organizado de la siguiente forma.

El capítulo 2 provee una introducción a los Sistemas Dinámicos. Luego, comentamos resultados de los trabajos de Henri Poincaré y Aleksandr Lyapunov y por último, presentamos una serie de ejemplos importantes en el área. Concluímos la sección recordando teoremas y propiedades conocidos que utilizamos en la tesis y probamos que el espacio $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire.

En el capítulo 3 consideramos el problema de existencia de puntos periódicos y ciclos atractores. En esta dirección, probamos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen no numerables puntos periódicos de período m, para cada $m \geq 1$ (Teorema 3.1.1), pero no tienen ciclos atractores (Teorema 3.1.2). Estos dos resultados se van a deducir del hecho que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos fijos de f^m, es perfecto y el conjunto de puntos periódicos de f con periódo m es denso en el conjunto de puntos fijos de f^m (Teorema 3.1.3).

Además, obtenemos otras propiedades topológicas del conjunto de puntos periódicos.

A su vez, mostramos que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ el conjunto de puntos periódicos de f tiene medida de Lebesgue cero (Teorema 3.3.1).

En el capítulo 4 probamos que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no son sensibles a condiciones iniciales en cualquier subconjunto denso en alguna parte[1] de X (Teorema 4.1.3). Por otra parte, veremos que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ son sensibles a condiciones iniciales en infinitos subconjuntos no numerables de X que son disjuntos dos a dos, conexos e invariantes por f (Teorema 4.1.5).

También, demostramos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen infinitos atractores uniformes disjuntos dos a dos que son conexos y tienen interior no vacío (Teorema 4.2.2). Por último, probamos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ no tienen atractores con órbita densa (Teorema 4.2.3) y en particular, no tienen atractores extraños(Corolario 4.2.4).

Las referencias a este trabajo son principalmente los trabajos de Bernardes [5], [6]

[1]Es decir, $\overline{Y}$ tiene interior no vacío.

y [7]. También, por ejemplo, Halpern [10] que probó el siguiente resultado (que generaliza un resultado previo de Ho [12]):

Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{H}(X)$ el espacio de todos los homeomorfismos de X con la topología compacto-abierta.

Dada una medida de Borel fija μ en X que asigna un valor positivo a cada subconjunto abierto no vacío de X, decimos que una función $f \in \mathcal{H}(X)$ es recurrente (con respecto a μ) si el conjunto de puntos no recurrentes de f tiene μ-medida cero.

El siguiente teorema se demuestra en [12].

Teorema 1.3.1. *Si X es una variedad compacta sin borde, de dimensión mayor que cero y característica de Euler distinta de cero, entonces el conjunto de todos los homeomorfismos recurrentes de X es nunca denso en X.*

Más aún, se puede establecer una conclusión más fuerte que la del Teorema 1.3.1, eliminando las hipótesis de compacidad y de la característica de Euler. A su vez, no es necesario que X sea una variedad sin borde de dimensión n ($n \geq 2$), y alcanza con asumir que existe un subconjunto abierto no vacío de X homeomorfo al espacio euclideo $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$).

Teorema 1.3.2. *Si X es un espacio de Hausdorff y V es un subconjunto abierto de X homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n > 1$, entonces*

$$R := \{f \in \mathcal{H}(X) : \textit{los puntos recurrentes de } f \textit{ son densos en } V\}$$

es nunca denso en $\mathcal{H}(X)$.

Un resultado relacionado puede ser encontrado en Kurth [14].

Así mismo, Sears [20] probó que en cada espacio métrico compacto infinito Y que o bien no es perfecto o bien satisface cierta condición de homogeneidad local, el conjunto de todos los homeomorfismos ergódicos[2] es nunca denso en $\mathcal{H}(Y)$ con la topología de la convergencia uniforme.

Agronsky et al. [1] estudiaron la dinámica de casi todas las funciones en el espacio $C([0,1])$ de las funciones continuas del $[0,1]$ en sí mismo con la topología de la convergencia uniforme. Algunos de sus teoremas están relacionados con los resultados de este trabajo. En realidad, probaron que para casi todas las funciones $f \in C([0,1])$, F_{f^m} es perfecto y nunca denso, y todo entorno de un punto periódico de f contiene puntos periódicos de f con períodos arbitrariamente grandes (comparar estos resultados con el Teorema 3.1.3, la Proposición 3.2.1 y el Corolario 3.2.4). Por otra parte, probaron que para casi todas las funciones $f \in C([0,1])$, el conjunto de puntos eventualmente periódicos de f (o sea, los puntos que son periódicos a partir de algún $m \in \mathbb{N}$) es denso en $[0,1]$. Sin embargo, el Corolario 3.2.4 implica que este conjunto es nunca denso en X, para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$.

[2]Un homeomorfismo $f \in \mathcal{H}(X)$ se dice ergódico si todo $A \subset X$ subconjunto cerrado propio que cumple $f(A) = A$ es nunca denso en X.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Introducción a los Sistemas Dinámicos

En este capítulo introductorio se da un breve esbozo de la teoría de los sistemas dinámicos: su génesis y su contenido. Esto se hace principalmente como un intento de explicar el área y la relación entre Dinámica Topológica con otras partes de la teoría de sistemas dinámicos, en particular la Teoría Ergódica y Dinámica Diferencial. Las referencias a esta introducción son [2], [9] y [16].

2.1.1. Las tres áreas de los Sistemas Dinámicos

Una definición actual de Dinámica Topológica dice que es "el estudio de los grupos de transformaciones en relación con propiedades topológicas cuyo prototipo ocurre en Dinámica Clásica" (ct. W. H. Gottschalk y GA Hedlund [1955], p. iii). Si en esta definición el adjetivo 'topológica' se sustituye por 'medible'[1], entonces se obtiene una descripción de la Teoría Ergódica (ct. P. Walters [1982], p. 1). Del mismo modo, 'diferenciable' (o 'suave') en lugar de 'topológica' da una descripción de Dinámica Diferencial.

Por lo tanto, en cada uno de estos tres campos de investigación matemática se estudian grupos (y también semigrupos) de transformaciones de un espacio que conservan la estructura del espacio (ya sea topológico, medible, o con una estructura diferenciable). Y aunque los tres campos tienen el mismo origen, es decir, el estudio de sistemas dinámicos clásicos, la diferencia en los métodos y técnicas les ha dado completamente diferentes formas, y se han desarrollado en diferentes direcciones.

Sin embargo, parece útil prestar atención a lo que tienen en común: el tipo de propiedades que se producen en Dinámica Clásica. En este contexto, la frase 'propiedades cualitativas' se utiliza muy seguido.

[1] En el sentido de la teoría de la medida.

2.1.2. Sistemas Dinámicos como sistemas físicos ficticios

Un sistema dinámico se puede definir de la siguiente manera. Se compone de un espacio X, llamado espacio de fases, el cual puede ser interpretado como el conjunto de todos los estados posibles de algún sistema físico ficticio; a su vez, hay una “regla de la evolución”, que describe la forma en cualquier estado asumido por nuestro sistema físico ficticio cambia con el tiempo.

Más precisamente, consideramos el caso de tiempo continuo (o sea, tiempo real) y supongamos que nuestro sistema físico es autónomo. Es decir, si en un determinado momento el sistema está en el estado x entonces el estado al que llega después de un intervalo de tiempo de longitud t depende sólo de x y t, y no del momento que este intervalo de tiempo comienza (i.e., el momento en el que se supone estado x). Formalmente, si $\pi(t,x)$ es el estado del sistema alcanzado después de un intervalo de tiempo de longitud t cuando se inicia en el estado x ($t \geq 0$, $x \in X$), entonces $\pi(s,\pi(t,x))$ es el estado alcanzado después de un intervalo de tiempo $s+t$ comenzando a partir de x, i.e.,

$$\pi(s,\pi(t,x)) = \pi(s+t,x). \tag{1}$$

Por la definición de π también tenemos

$$\pi(0,x) = x. \tag{2}$$

En lo anterior, permitimos solamente que $s \geq 0$ y $t \geq 0$. Para muchos sistemas se permite el “tiempo inverso”, es decir, $\pi^{-1}(t,x)$ está definida y la condición (1) se cumple también para los valores negativos de s y t. En ese caso tenemos una función $\pi : \mathbb{R} \times X \to X$ tal que (1) y (2) se cumple para todo $s,t \in \mathbb{R}$ y $x \in X$. Dicha asignación se llama acción de (el grupo aditivo) $\mathbb{R}$ sobre X.

Para entender mejor la acción de $\mathbb{R}$ sobre X consideramos la siguiente notación: definimos para cada $t \in \mathbb{R}$, la transformación $\pi^t : X \to X$ dada por:

$$\pi^t(x) = \pi(t,x) \quad (x \in X). \tag{3}$$

De esta manera, π^t asigna a todos los estados el estado que se alcanza después de un intervalo de tiempo de longitud t. Usando esta notación, (1) y (2) se pueden reescribir como

$$\pi^s \circ \pi^t = \pi^{s+t}, \quad \pi^0 = id_X \quad (s,t \in \mathbb{R}) \tag{4}$$

De ello se desprende que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\pi^t \circ \pi^{-t} = \pi^{-t} \circ \pi^t = \pi^0 = id_X$. En consecuencia, $\pi^t : X \to X$ es una biyección con inversa π^{-t}. Así la condición (4) puede ser reformulada de la siguiente manera: la asignación $t \mapsto \pi^t$ es un morfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo de todos las biyecciones de X (con la composición de funciones como operación de grupo).

2.1.3. Sobre los sistemas dinámicos discretos

Motivados por la sección anterior, consideramos una acción $\pi : \mathbb{R} \times X \to X$, donde X es un espacio topológico de Hausdorff y π es continua. Entonces para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $\pi^t : X \to X$ es continua. Ya sabemos que π^t es una biyección con inversa π^{-1} que es también continua. Es decir, que cada π^t es un homeomorfismo de X, y por las identidades establecidas en (4) tenemos que la asignación $t \mapsto \pi^t$ es un morfismo del grupo aditivo $\mathbb{R}$ en el grupo de todos los homeomorfismos del espacio X (con la composición de funciones como la multiplicación del grupo). Esto se resume diciendo que $\{\pi^t : t \in \mathbb{R}\}$ es un grupo uniparamétrico de homeomorfismos de X. Además, el par $\langle X, \pi^t \rangle$ se suele llamar flujo continuo.

En particular, en Dinámica Topológica se trabaja con flujos continuos arbitrarios $\langle X, \pi^t \rangle$ y para aquellos objetos se trata de desarrollar una teoría general de los conceptos que están relacionados con los de Dinámica Clásica.

Por supuesto, los flujos definido por un campo vectorial χ generalmente tienen propiedades adicionales. Por ejemplo, con hipótesis adicionales sobre χ, el grupo uniparamétrico $\{\pi^t : t \in \mathbb{R}\}$ consiste de difeomorfismos. Para distinguir las estructuras que se conservan los adjetivos 'continua', 'diferenciable' (o 'suave') y 'preservación de medida pueden ser utilizados para los flujos.

Por otra parte, se pueden utilizar los grupos paramétricos para el estudio de una sola transformación. En efecto, si $f : X \to X$ es un homeomorfismo, entonces se puede considerar el grupo de homeomorfismos $\{f^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Como es usual, $f^{n+1} := f^n \circ f^1$, $f^1 := f$, $f^0 := id_X$, $f^{-n} := (f^n)^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En este contexto, es posible estudiar para cualquier punto x de X el trayecto u órbita, $\mathrm{Orb}(f, x) := \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$, y cuestiones similares a las de los flujos continuos. Por ejemplo, ¿cuál es el comportamiento posible cerca de los puntos invariantes (es decir, los puntos fijos de f) o cerca de los puntos periódicos?, ¿cuáles son las posibles recurrencias o propiedades asintóticas de las órbitas? De esta manera, el par (X, f) se llama sistema dinámico discreto o un flujo discreto.

Vamos a explicar brevemente por qué el estudio de los flujos discretos puede ser útil. Primero mencionamos una razón metodológica. Hay sistemas físicos para los que es natural que un modelo tenga tiempo discreto. Por ejemplo, ya que las mediciones se pueden hacer solamente en momentos discretos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \ldots$. Así que en la práctica no siempre se conoce la órbita completa en el espacio de fases, sino sólo una secuencia discreta de sus puntos y de las propiedades de estos últimos se deducen conclusiones sobre la órbita completa.

En cuanto a los grupos de transformaciones esto plantea la cuestión de la relación entre las propiedades dinámicas de un grupo uniparamétrico $\{\pi^t : t \in \mathbb{R}\}$ de transformaciones de un espacio y los del grupo $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$ o sea, el flujo discreto definido por la transformación π y sus iteradas. Resulta que para un número de nociones importantes, el comportamiento de puntos en el marco del grupo uniparamétrico completo es el mismo que el comportamiento en el grupo restringido $\{\pi^n : n \in \mathbb{Z}\}$. Las conclusiones acerca de la órbita $\{\pi^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ en el flujo discreto dan información muchas veces suficiente sobre la órbita completa $\{\pi^t(x) : t \in \mathbb{R}\}$.

Una ventaja adicional es que una sola transformación es a menudo más fácil de tratar que un grupo uniparamétrico completo. Así, una vez que cierto problema ha sido resuelto para una sola transformación, las técnicas y conocimientos obtenidos pueden ser útiles para el caso de un grupo uniparamétrico.

Otra razón para la investigación de una única transformación radica en la importancia de las llamadas funciones de Poincaré o funciones de primer retorno. La idea es la siguiente: Consideramos un flujo continuo, es decir, un grupo uniparamétrico $\{\pi^t : t \in \mathbb{R}\}$ actuando continuamente en un espacio X. Sea $Y \subset X$ un subconjunto y asumamos que Y es tal que cada punto $y \in Y$ retorna a Y después de un intervalo de tiempo finito de longitud $t_y > 0$. Concretamente, si $y \in Y$, entonces $\pi(t_y, y) \in Y$, y suponemos que t_y es el primer momento de retorno a Y, es decir, $\pi(t, y) \notin Y$ para $0 < t < t_y$. Ahora, escribimos $f(y) := \pi(t_y, y)$ con $y \in Y$. Entonces f es una función de Y a Y, y el conjunto $\{f^n(y) : n \in \mathbb{Z}^+\}$ es exactamente el conjunto de todas las intersecciones de la semi-órbita positiva $\{\pi(t, y) : t \geq 0, y \in Y\}$. Intuitivamente, es evidente que este conjunto de intersecciones puede revelar una serie de características del flujo continuo original, y a veces una elección inteligente del conjunto Y facilita el estudio de las funciones de primer retorno.

2.1.4. Ecuaciones Diferenciales vs. Sistemas Dinámicos

Podemos ilustrar la diferencia de punto de vista entre las ecuaciones diferenciales y los sistemas dinámicos considerando el siguiente problema de valores iniciales en ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \xi(x) \\ x(0) &= p. \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí x es una variable en el espacio euclideo $X = \mathbb{R}^n$ o en una variedad X, y el punto inicial p pertenece a X. El cambio infinitesimal $\xi(x)$ está pensado como un vector pegado al punto x de manera que ξ es un campo vectorial en X.

La solución asociada es una función φ tal que a medida que el tiempo t varía, $x = \varphi(t, p)$ se mueve en X de acuerdo con la ecuación anterior y con $p = \varphi(0, p)$, de modo que p se asocia con el tiempo inicial $t = 0$. La solución es una curva en el espacio X en la que x se mueve a partir del punto p. Un teorema esencial de ecuaciones diferenciales afirma que la función φ existe y es única, dadas las condiciones de suavidad, como por ejemplo condiciones de Lipschitz.

Como la ecuación es autónoma, i.e. la función φ puede variar en función de x, pero se supone independiente de t, las soluciones satisfacen las siguientes identidades de semigrupo, a veces también llamadas las ecuaciones de Kolmogorov:

$$\varphi(t, \varphi(s, p)) = \varphi(t + s, p). \tag{6}$$

Supongamos que resolvemos la ecuación (5) a partir de p, y después de s unidades de tiempo, llegamos a $q = \varphi(s,p)$. Si volvemos a resolver la ecuación, ahora a partir de q, entonces la identidad (6) dice que seguimos avanzando a lo largo de la curva anterior a la misma velocidad. Por lo tanto, después de t unidades de tiempo estamos dónde hubiésemos estado en la solución anterior (al mismo tiempo), $t+s$ unidades después del tiempo cero.

El punto base de la curva se mantiene constante para cada solución. Cuando queremos enfatizar el papel del punto inicial, la solución que comienza en p también se llama la órbita de p. Se desprende de las identidades de semigrupo que curvas solución diferentes, consideradas como subconjuntos de X, no se intersecan (por unicidad) y así X queda dividida, foliada por estas curvas. Si cambiamos el punto p, nos puede pasar que cambiemos de una curva a otra, pero el movimiento dado por la ecuación diferencial original es en una de estas curvas.

El cambio de punto de vista hacia los sistemas dinámicos se produce cuando invertimos el énfasis entre t y p. En lo anterior, pensábamos a p como un parámetro fijo y a t como variable de tiempo a lo largo de la curva solución. En su lugar, ahora consideramos el punto inicial, x re-etiquetado, como nuestra variable y el tiempo como un parámetro. Para cada valor fijo t, definimos el t-mapa de tiempo $\varphi^t : X \to X$ por $\varphi^t(x) = \varphi(t,x)$. Para cada punto $x \in X$ nos preguntamos hacia donde se ha movido en t unidades de tiempo. La función $\varphi : T \times X \to X$ es el flujo del sistema y las identidades de semigrupo se pueden reescribir:

$$\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}, \text{ para todo } t, s \in T. \tag{7}$$

Esto simplemente dice que la asociación $t \mapsto \varphi^t$ es un morfismo de grupos del grupo aditivo T de los números reales al grupo de automorfismos de X. En particular, observamos que el 0-mapa φ^0 es la aplicación identidad id_X.

Originalmente obtuvimos el flujo φ resolviendo una ecuación diferencial. Esto requiere una cierta estructura diferenciable en el espacio subyacente. Por eso especificamos que X es un espacio euclideo o una variedad. Entonces el grupo de automorfismos es el grupo de difeomorfismos sobre X. Para el área de Dinámica Topológica comenzamos con una función continua φ sujeta a la condición (7). Si sustituimos el grupo de números reales definiendo T como el grupo de números enteros entonces la acción queda completamente determinada por el generador $f := \varphi^1$, el homeomorfismo de tiempo 1 con φ^n obtenido mediante la iteración de la función f n-veces si n es positivo y la iteración de la inversa f^{-1} $|n|$-veces si n es negativo.

Anteriormente, se mencionó el requisito que el campo vectorial ξ sea suave para que la función de flujo φ esté definida. Sin embargo, cabe señalar que en ausencia de algún tipo de condición de acotación, la curva solución podría ir a infinito en un tiempo finito. En tal caso, la función φ no quedaría definida en todo el dominio $T \times X$, sino sólo en un subconjunto abierto que contiene a $\{0\} \times X$. Los problemas relacionados con este tema se manejan en la teoría general asumiendo que el espacio X es compacto. Por supuesto, el espacio euclideo sólo es compacto localmente. En la aplicación de la teoría general a sistemas en un espacio no-compacto por lo general se restringe a algún subconjunto invariante compacto o de lo contrario se compactifica, i.e. se embebe el sistema en un espacio más grande, compacto.

2.1.5. Poincaré y Lyapunov

A fines del siglo XIX se sabía que para muchas ecuaciones importantes (en particular, las de la mecánica celeste, por ejemplo, el problema de N-cuerpos con $N \geq 3$) era extremadamente difícil, si no imposible, encontrar expresiones explícitas para las soluciones.

Sin embargo, una serie de preguntas, como por ejemplo ¿el sistema solar es estable?, ¿los planetas se pueden escapar del sistema solar, debido a la perturbación mutua?, necesitaban aclaración de, al menos, la naturaleza general de las trayectorias. Por esta razón se desarrolló la teoría cualitativa de Ecuaciones Diferenciales. Esta teoría fue iniciada por J.H. Poincaré y, de forma independiente, por A.M. Lyapunov.

Poincaré fue el primero en formular el problema de dar una imagen geométrica a las trayectorias de una ecuación diferencial sin la integración de la misma. Se esperaba que las características geométricas importantes del espacio de fases se corresponderían con los fenómenos físicos significativos en el sistema, determinados por la ecuación.

El Teorema de Poincaré-Bendixson

Un ejemplo de la utilización de métodos topológicos en el estudio de los flujos continuos en $\mathbb{R}^2$ es proporcionada por la prueba del siguiente resultado que se conoce como el teorema de Poincaré-Bendixson (que se basa en el Teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.2.5)). Se establece que un punto x en $\mathbb{R}^2$ con una semi-órbita positiva $\pi_x[\mathbb{R}^+]$, relativamente compacta (es decir, acotada en $\mathbb{R}^2$) es de uno de los siguientes tipos mutuamente excluyentes:

(i) x es un punto periódico en movimiento[2];

(ii) existe un punto periódico en movimiento x_0 tal que $\pi^t(x)$ se aproxima a la órbita de x_0 (que es topológicamente un círculo) cuando $t \to \infty$;

(iii) existe un punto invariante (i.e. punto de equilibrio) x_1 tal que $\pi^{t_n}(x) \to x_1$ para alguna sucesión $t_n \to \infty$.

Una consecuencia inmediata de este teorema es que cada subconjunto positivamente invariante compacto de $\mathbb{R}^2$ (es decir, un subconjunto compacto A tal que $\pi_x[\mathbb{R}^+] \subset A$ para cada $x \in A$), que no contiene puntos invariantes debe incluir una órbita

[2] Un punto $x \in X$ se dice punto invariante o de equilibrio si $\pi(t, x) = x$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Un punto $x \in X$ se llama punto periódico si $\pi(t, x) = x$ para algún $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Claramente, un punto invariante es un punto periódico. Un punto periódico que no es invariante se llama punto periódico en movimiento.

periódica. En efecto, todos los puntos de A satisfacen la hipótesis del teorema de Poincaré-Bendixson, pero (iii) no puede ocurrir.

Una última consecuencia del teorema de Poincaré-Bendixson que mencionamos es la clasificación completa de los conjuntos minimales de los flujos continuos en subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Un subconjunto de un flujo se llama minimal cuando es no vacío, cerrado, invariante (es decir, que contiene la órbita completa de cada uno de sus puntos) y que no tiene subgrupos invariantes cerrados propios. En otras palabras, los conjuntos minimales son las partes 'irreducibles' de un flujo. Se podría argumentar que las órbitas individuales son las partes irreducibles interesantes, pero el estudio del comportamiento asintótico (que sucede cuando $\pi^t(x)$ cuando $t \to +\infty$ ó $t \to -\infty$) tiene lugar en las clausuras de las órbitas más que en de las propias órbitas. Usando el hecho que los puntos no periódicos en movimiento de un flujo continuo en $\mathbb{R}^2$ no son recurrentes, se puede mostrar que un conjunto minimal en un flujo del plano es de uno de los siguientes tres tipos:

(i) una sola órbita que es un subconjunto cerrado pero no compacto de $\mathbb{R}^2$;

(ii) la órbita de un punto periódico en movimiento;

(iii) un punto invariante.

La Teoría de estabilidad de Lyapunov

Casi simultáneamente con Poincaré, A. M. Lyapunov desarrolló su teoría de estabilidad. La idea era proporcionar un marco teórico para describir conceptos como equilibrio asintóticamente estable y desarrollar métodos para detectar este tipo de objetos en sistemas dados.

Consideramos un sistema dinámico no lineal autónomo:

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$

donde $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene al origen, $x(t) \in \mathcal{D}$ y $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua. Supongamos que f tiene un punto de equilibrio en $\mathcal{D}$. Un punto de equilibrio se dice que es estable según Lyapunov si las soluciones que se encuentran inicialmente suficientemente cerca del punto de equilibrio, entonces permanecen lo suficientemente cerca para siempre. La estabilidad de un punto de equilibrio se dice asintótica, si las soluciones que se inician lo suficientemente cerca, no solo permanecen lo suficientemente cerca, sino que también finalmente convergen al punto de equilibrio. Notemos que la definición de estabilidad de Lyapunov permite que el sistema realice pequeñas oscilaciones persistentes alrededor de un punto de equilibrio.

En su trabajo original de 1892, Lyapunov propuso dos métodos para demostrar estabilidad de un sistema dado. El primer método consiste en escribir la solución como una serie y luego demostrar que se tiene convergencia uniforme en una región determinada.

El segundo método, que se conoce como el criterio de estabilidad de Lyapunov, hace uso de una función de Lyapunov. Concretamente, sea $\dot{x} = f(x)$ un sistema que tiene un punto de equilibrio en $x = 0$. Sea $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que

(i) $V(x) = 0$, si $x = 0$;

(ii) $V(x) > 0$, si $x \neq 0$;

(iii) $\dot{V}(x) = \frac{d}{dt}V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x) \leq 0$ para todo $x \neq 0$

En este caso, $V(x)$ se llama función de Lyapunov y el sistema es estable en el sentido de Lyapunov. Por último, observamos que las propiedades de tales funciones se pueden comprobar sin resolver primero las ecuaciones diferenciales.

A continuación mencionamos una serie de resultados y teoremas conocidos sobre la dinámica de S^1. Además contamos dos ejemplos importantes de Dinámica Caótica. Los detalles de los resultados que presentamos pueden consultarse en [8] y [19].

2.1.6. Dinámica en S^1

Sea $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ la circunferencia unitaria y sea $\pi(x) = x(\text{mód}\,1)$ la proyección canónica. Identificamos S^1 con $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\pi : \mathbb{R} \to S^1$ dada por $\pi(x) = e^{2\pi i x}$ y trabajamos con ambas nociones indistintamente.

Comenzamos notando que si tenemos una función continua $f : S^1 \to S^1$ y tomamos $x_0 \in \mathbb{R}$ e $y_0 \in \pi^{-1}(f(\pi(x_0)))$, existe una única función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $F(x_0) = y_0$ y $\pi \circ F = f \circ \pi$. Llamamos levantamiento de f a la función continua $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifica $\pi \circ F = f \circ \pi$. Observemos que si F_1 y F_2 son dos levantamientos de la misma función f, entonces $F_1(x) = F_2(x) + k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Denotamos $\text{Hom}^+(S^1)$ al conjunto de homeomorfismos de S^1 a S^1 que preservan orientación. El primer resultado que mencionamos (un teorema básico de Poincaré) es dado un homeomorfismo $f \in \text{Hom}^+(S^1)$ y dado F un levantamiento de f, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}$ y es independiente de x.

De esta manera, definimos el número de rotación del levantamiento F como $\rho(F) = \lim_{n\to+\infty} \frac{F^n(x)}{n}$ y el número de rotación de f como $\rho(f) = \rho(F)(\text{mód}\,1)$.

Número de rotación racional

Para el caso de número de rotación racional tenemos el siguiente resultado principal:

Dada $f \in \text{Hom}^+(S^1)$, $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ si y solo si f tiene puntos periódicos. En ese caso, si $\rho(f) = \frac{p}{q}$, con $\text{mcd}(p, q) = 1$, todos los puntos periódicos tienen período q.

Además, si $f \in \text{Hom}^+(S^1)$ con $\rho(f) = \frac{p}{q}$ e $\text{mcd}(p, q) = 1$ y tenemos que $\pi(x)$ un punto periódico de f, entonces el orden de $\{\pi(x), f(\pi(x)), ..., f^{q-1}(\pi(x))\}$ en S^1

es el mismo que una órbita según la función rotación $R_{\frac{p}{q}}$, i.e., es el mismo que $\{0, \frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, ..., \frac{(q-1)p}{q}\}$.

Por último notamos que si el número de rotación de una función $f \in \mathrm{Hom}^+(S^1)$ es racional, tenemos que el conjunto de puntos periódicos de f es igual al conjunto de puntos no errantes de f, o sea $\mathrm{Per}(f) = \Omega(f)$.

Número de rotación irracional

Por otra parte, para el caso de número de rotación irracional tenemos:

Si $f \in \mathrm{Hom}^+(S^1)$ con $\rho(f) \notin \mathbb{Q}$, entonces $\Omega(f)$ es un conjunto minimal.

En consecuencia, resulta que $\Omega(f) = S^1$ ó $\Omega(f)$ es un conjunto perfecto con interior vacío (es decir, $\Omega(f)$ es un conjunto de Cantor).

Dadas $f, g \in \mathrm{Hom}^+(S^1)$, decimos que f es semiconjugada a g si existe $h : S^1 \to S^1$ continua y sobreyectiva tal que $h \circ f = g \circ h$. Análogamente, decimos que f es conjugada a g si $g = h^{-1} \circ f \circ h$, para cierta $h \in \mathrm{Hom}(S^1)$. Recordamos que una función f es transitiva si $\mathrm{Orb}(f, x)$ es densa en S^1 para algún $x \in S^1$. Concluimos esta sección con el siguiente teorema:

Si $f \in \mathrm{Hom}^+(S^1)$ con $\rho(f) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, entonces la función f es semiconjugada a la función rotacion R_α. Mas aún, si f es transitiva entonces f es conjugada a R_α.

2.1.7. Ejemplos de Dinámica Caótica

Contrario al significado que la palabra caos carga, un sistema dinámico caótico no se comporta de manera arbitraria, aleatoria o ni carece de una soluciones exactas. La noción matemática del caos está relacionada con la incapacidad de predecir, mediante el uso de métodos numéricos, las soluciones de una ecuación diferencial, o su contraparte discreta, una ecuación en diferencias, con la coexistencia de infinitas órbitas periódicas de diferente período y con la existencia de órbitas que se aproximan a cualquier estado posible del sistema.

Los siguientes ejemplos ilustran qué tipo de situaciones se pueden presentar en Dinámica Caótica.

Shift de Bernoulli

Dada $f \in \mathcal{H}(X)$, decimos que f es expansiva si existe $\alpha > 0$ tal que si $d(f^n(x), f^n(y)) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $x = y$. La constante α es llamada constante de expansividad. Decimos que f es topológicamente mixing[3] si dados U, V abiertos cualesquiera, existe $m > 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \varnothing$ para todo $n \geq m$.

Veamos un ejemplo que, entre otras propiedades, es expansivo y topológicamente mixing.

---

[3]La traducción literal es combinación. La noción surge para describir procesos de mezcla irreversibles.

Sea $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. En $\{0,1\}$ colocamos la topología discreta y dotamos a X la topología producto. Por el Teorema de Tychonoff, X es compacto.

Si definimos

$$d(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{|x_n - y_n|}{2^{|n|}},$$

obtenemos una métrica en X compatible con la topología producto.

Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X$ y sea $N \in \mathbb{N}$, definimos el N-entorno de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ como

$$N(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : y_n = x_n \text{ si } |n| \leq N\}.$$

Se verifica que $N(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ constituye una base de entornos de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Definimos el shift a la izquierda o shift de Bernoulli (de dos símbolos) al homeomorfismo $\sigma : X \to X$ tal que $\sigma(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ donde $y_n = x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Tenemos el siguiente resultado:

Si $\sigma : X \to X$ es el shift de Bernoulli, entonces σ es expansiva, transitiva y topológicamente mixing. Además, $\mathrm{Per}(\sigma) = X$.

A su vez, para cualquier $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X$, su conjunto estable

$$W^s(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : d(\sigma_j(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}), \sigma_j(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}})) \to 0 \text{ cuando } j \to +\infty\}$$

e inestable

$$W^u(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}) := \{\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in X : d(\sigma_j(\{y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}), \sigma_j(\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}})) \to 0 \text{ cuando } j \to -\infty\}$$

son ambos densos en X.

El teorema de Sharkovsky

Los matemáticos Tien-Yien Li y J.A. Yorke, en 1975, encontraron una propiedad importante: si una función continua, definida en un intervalo de la recta real, tiene una órbita de período tres, entonces esta órbita debe coexistir con órbitas periódicas de todos los períodos.

Por otro lado, más de diez años antes, en 1964, O.M. Sharkovsky, propuso un orden de todos los números naturales de manera que la existencia de una órbita periódica de período k implica la existencia de óribitas de todos los períodos posteriores a k, según este orden.

El orden propuesto por Sharkovsky es:

$$\begin{array}{cccccccc}
3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \dots & (2n+1)\cdot 2^0 & \dots \\
3\cdot 2 & 5\cdot 2 & 7\cdot 2 & 9\cdot 2 & 11\cdot 2 & \dots & (2n+1)\cdot 2^1 & \dots \\
3\cdot 2^2 & 5\cdot 2^2 & 7\cdot 2^2 & 9\cdot 2^2 & 11\cdot 2^2 & \dots & (2n+1)\cdot 2^2 & \dots \\
3\cdot 2^3 & 5\cdot 2^3 & 7\cdot 2^3 & 9\cdot 2^3 & 11\cdot 2^3 & \dots & (2n+1)\cdot 2^3 & \dots \\
 & \vdots & & & & & & \\
\dots & 2^n & \dots & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1
\end{array}$$

Es decir,

(1º) Los números impares en orden creciente;

(2º) 2 veces los números impares en orden creciente;

(3º) 4 veces los números impares en orden creciente;

(4º) 8 veces los números impares en orden creciente; y así sucesivamente.

(5º) Al final ponemos las potencias de dos en orden decreciente.

El teorema de Sharkovsky establece lo siguiente:

Teorema 2.1.1 (Teorema de Sharkovsky)**.** *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to I$ una función continua. Si f tiene un punto periódico de período m y m precede a n en el ordenamiento anterior, entonces f tiene también un punto periódico de período n.*

Como consecuencia, notamos que si una función continua sólo tiene un número finito de puntos periódicos, entonces todos deben tener períodos que son potencias de dos. Además, si hay un punto periódico de período tres, entonces hay puntos periódicos de todos los otros períodos.

2.2. Resultados generales

Aquí enunciamos teoremas y proposiciones fundamentales que utilizaremos durante todo el trabajo. Los teoremas son conocidos y las demostraciones de los mismos pueden encontrarse en [15] y en [18], por ejemplo. Las proposiciones que recordamos también son hechos probablemente conocidos, pero con el fin de introducirnos en el tema damos sus demostraciones. Finalmente, en esta sección también incluimos una prueba que $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire.

Recordamos que X es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ compacto con interior no vacío.

Teorema 2.2.1. *El espacio de funciones continuas C(X) es completo.*

Teorema 2.2.2 (Teorema de Baire)**.** *Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Corolario 2.2.3. *Todo espacio métrico completo sin puntos aislados es no numerable.*

Demostración. Si X es un espacio métrico completo numerable sin puntos aislados, cada conjunto unipuntual $\{x\}$ es cerrado y nunca denso, y por lo tanto $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es de primera categoría. □

Teorema 2.2.4 (Teorema del punto fijo de Brouwer)**.** *Toda función $f \in C(X)$ admite un punto fijo.*

Teorema 2.2.5 (Teorema de la curva de Jordan)**.** *Toda curva C del plano, simple y cerrada divide al plano en dos componentes conexas disjuntas. Una de estas componentes está acotada (el interior de la curva) y la otra es no acotada (el exterior) y la curva C es el borde común de cada componente.*

Proposición 2.2.6. *Toda función $f \in C(X)$ biyectiva, es un homeomorfismo.*

Demostración. Para probar que f es un homeomorfismo, nos alcanza mostrar que f es una función cerrada. Tomamos un subconjunto $F \subset X$ cerrado en X. Como X es compacto, F es compacto y, por continuidad, $f(F)$ es compacto. Entonces, $f(F)$ es un conjunto cerrado en X. Es decir, la función f es cerrada. $\square$

Recordamos que la topología de la convergencia uniforme es la topología inducida por la métrica del supremo. La topología compacto-abierta es la topología que tiene como sub-base a todos los conjuntos $S(K,U) := \{f \in C(X) : f(K) \subset U\}$, donde $K \subset X$ es un conjunto compacto y $U \subset X$ es un conjunto abierto.

En siguiente resultado nos va permitir trabajar indistintamente con cualquiera de estas dos topologías. Como X es un espacio compacto, tenemos:

Proposición 2.2.7. *La topología de la convergencia uniforme es equivalente a la topología compacto-abierta.*

Demostración. Sea $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset C(X)$ una red que converge a una función $f \in C(X)$ con la topología compacto-abierta. Veamos que también converge a f con la topología uniforme.

Como X es compacto y f es continua, $f(X)$ es compacto. Entonces, dado $\epsilon > 0$, existen $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tales que las bolas abiertas de radio $\frac{\epsilon}{4}$ y centros $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ cubren $f(X)$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, sea el conjunto compacto $K_i = X \cap f^{-1}(\overline{B}(f(x_i); \frac{\epsilon}{4}))$. A su vez, sea $U_i = B(f(x_i); \frac{\epsilon}{4})$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Claramente, $f(K_i) \subset U_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Luego, $f \in \cap_{i=1}^{n} S(K_i, U_i)$ que es un abierto en la topología compacto-abierta.

Como $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge a f con esta topología, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$, $f_\lambda \in \cap_{i=1}^{n} S(K_i, U_i)$. Para todo $x \in X$, $x \in K_i$ para algún $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, así que

$$d(f(x_i), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

A su vez, tenemos que $f_\lambda \in S(K_i, U_i)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y por lo tanto

$$d(f_\lambda(x), f(x_i)) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Es decir,

$$d(f_\lambda(x), f(x)) < \epsilon.$$

Como se cumple para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y para todo $x \in X$, la red $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a f en X.

Recíprocamente, supongamos que $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ converge uniformemente a f en X. Para ver que converge en la topología compacto-abierta, es suficiente probar la condición de convergencia para los abiertos sub-básicos que contienen a f. Sea $S(K,U)$ un entorno abierto de f en esta topología. Es decir, $f(K)$ es compacto y disjunto de $X - U$. Si $X - U \neq \varnothing$, llamamos $\epsilon := \mathrm{dist}(K, X - U) > 0$.

Como $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge uniformemente a f, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ y $x \in K$,

$$d(f_\lambda(x), f(x)) < \epsilon.$$

Esto implica que $f_\lambda(x) \in U$. Luego, $f_\lambda(K) \subset U$, o sea que $f_\lambda \in S(K,U)$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. En conclusión, $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ converge a f en la topología compacto-abierta. $\square$

A lo largo de la tesis vamos a utilizar una propiedad que facilitará muchas veces las cuentas. Para ello precisamos la siguiente definición:

Definición 2.2.8. *Sea $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CA}, \circ)$ el espacio de homeomorfismos en X provisto de la topología compacto-abierta y con la operación composición. Decimos que $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CA}, \circ)$ es un grupo topológico si:*

(i) $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CA})$ *es un espacio topológico.*

(ii) $(\mathcal{H}(X), \circ)$ *es un grupo.*

(iii) La función $\circ : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ *que asigna* $(f,g) \mapsto f \circ g$ *es continua.*

(iv) La función $(\ )^{-1} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ *que asigna* $f \mapsto f^{-1}$ *es continua.*

Proposición 2.2.9. *El espacio $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CA}, \circ)$ es un grupo topológico.*

Demostración. Es claro que $(\mathcal{H}(X), \mathcal{T}_{CA}, \circ)$ es un espacio topológico y tiene estructura de grupo. Veamos que se verifican las condiciones de (iii) y (iv) de la definición.
Sea $\circ : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ la composición. Dadas $f, g \in \mathcal{H}(X)$, sea $S(K,U)$ un abierto tal que $f \circ g \in S(K,U)$. Tomamos $V \subset X$ un entorno abierto de $g(K)$ tal que $f(\overline{V}) \subset U$. Afirmamos que $S(f(\overline{V}), U) \times S(K, f(V))$ verifica lo buscado. En efecto, si $h_1(K) \subset f(V)$ y $h_2(f(\overline{V})) \subset U$, entonces resulta que $h_2 \circ h_1(K) \subset U$.
Por otra parte, sea $(\ )^{-1} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ la función invertir. Sea $S(K,U)$ un abierto sub-basico, entonces:

$$\begin{aligned} h \in S(K,U) &\iff h(K) \subset U \\ &\iff X - U \subset X - h(K) = h(X-K) \\ &\iff h^{-1}(X-U) \subset X - K \\ &\iff h^{-1} \in S(X-U, X-K) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\ )^{-1}(S(K,U)) = S(X-U, X-K)$, lo que significa que invertir es una aplicación continua. $\square$

Proposición 2.2.10. *Sea $x_0 \in B(0;1) \subset \mathbb{R}^n$, entonces existe un homemorfismo del $B(0;1)$ tal que $f(0) = x_0 \in B(0;1)$ y $f(x) = x$ para todo $x \in \operatorname{Bd} B(0;1)$.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $x_0 = (0, 0, ..., 0, r)$ con $r > 0$, rotando $B(0; 1)$ si hace falta. Luego, basta definir cualquier función continua del $B(0; 1) \subset \mathbb{R}^{n-1}$ en $\mathbb{R}$ cuyo gráfico caiga en $B(0; 1)$ y que en 0 valga r. Entonces alcanza con estirar lo que queda por debajo del grafico y y achicar lo que queda por arriba. $\square$

Lema 2.2.11. *Sea Y un subconjunto compacto y convexo de R^n con interior no vacío. Dados $a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_k, c_1, ..., c_s \in \operatorname{Int} Y$ todos distintos, existe $\varphi \in \mathcal{H}(X)$ tal que*

$$\varphi(a_1) = b_1, ..., \varphi(a_k) = b_k \quad y \quad \varphi(x) = x \textit{ para todo } x \in \operatorname{Bd}(Y) \cup \{c_1, ..., c_s\}.$$

Demostración. Comenzamos tomando $\alpha_i : [0, 1] \to Y$ curvas simples de a_i a b_i, $1 \leq i \leq k$, tal que los conjuntos

$$\alpha_1([0, 1]), ..., \alpha_k([0, 1]), \{c_1\}, ..., \{c_s\}, \operatorname{Bd} Y$$

son disjuntos dos a dos. Sea $\delta > 0$ la menor distancia entre dos de estos conjuntos cualesquiera. Fijamos $1 \leq i \leq k$ y eligimos una partición $0 = t_0 < t_1 < ... < t_r = 1$ del $[0, 1]$ tal que

$$\operatorname{diam} \alpha_i([t_j, t_{j+1}]) < \frac{\delta}{4} \text{ para cada } 0 \leq j \leq r - 1.$$

Ahora, consideramos las bolas cerradas

$$B_j := \overline{B}\left(\alpha_i(t_j); \frac{\delta}{4}\right) \quad (0 \leq j \leq r - 1).$$

Como $\alpha_i(t_j)$ y $\alpha_i(t_{j+1})$ pertenecen al $\operatorname{Int} B_j$, por la proposición anterior (Proposición 2.2.10), existe un homeomorfismo $\phi_j : B_j \to B_j$ tal que

$$\phi_j(\alpha_i(t_j)) = \alpha_i(t_{j+1}) \text{ y } \phi_j(x) = x \text{ para todo } x \in \operatorname{Bd} B_j.$$

Extendemos ϕ_j a un homeomorfismo de Y a Y poniendo $\phi_j(x) = x$ para todo $x \in Y - B_j$. Por lo tanto, definiendo

$$\varphi_i := \phi_{r-1} \circ \cdots \circ \phi_0$$

se tiene que $\varphi_i \in \mathcal{H}(Y)$, $\varphi_i(a_i) = b_i$ y $\varphi_i(x) = x$ para todo $x \in Y - (B_0 \cup \cdots \cup B_{r-1})$. Así, el homeomorfismo

$$\varphi := \varphi_k \circ \cdots \circ \varphi_1$$

tiene las propiedades deseadas. $\square$

En esta última sección del capítulo probamos $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire. La demostración es esencialmente la prueba usual del teorema de Baire (Teorema 2.2.2) con una condición en cada paso que garantizará que la función obtenida en la intersección al final es un homeomorfismo.

Proposición 2.2.12. *El espacio $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $(A_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de conjuntos abiertos y densos en $\mathcal{H}(X)$. Tenemos que ver que $A := \cap_{k=1}^{\infty} A_k$ es un conjunto denso en $\mathcal{H}(X)$. Para esto, fijamos $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Sea I un subconjunto numerable denso de X y sea $\{(a_m, r_m, s_m)\}_{m\geq 1}$ una enumeración del conjunto

$$\{(a, r, s) : a \in I, r \in \mathbb{Q}, s \in \mathbb{Q}, 0 < r < s,\ X - B(a, s) \neq \varnothing\}$$

Como $f(\overline{B}(a_1; r_1) \cap X) \cap f(X - B(a_1; s_1)) = \varnothing$, existen $\epsilon_1 > 0$ y V_0 entorno abierto de f en $\mathcal{H}(X)$ tal que $\overline{V_0} \subset B_{\mathcal{H}(X)}(f; \epsilon)$ y

$$\text{dist}(g(\overline{B}(a_1; r_1) \cap X), g(X - B(a_1; s_1))) > \epsilon_1 \text{ para todo } g \in V_0.$$

Sea $h_1 \in A_1 \cap V_0$. Como $h_1(\overline{B}(a_2; r_2) \cap X) \cap h_1(X - B(a_2; s_2)) = \varnothing$, existen $\epsilon_2 > 0$ y V_1 entorno abierto de h_1 en $\mathcal{H}(X)$ tal que $\overline{V_1} \subset A_1 \cap V_0 \cap B_{\mathcal{H}(X)}(h_1; 1/2)$ y

$$\text{dist}(g(\overline{B}(a_2; r_2) \cap X), g(X - B(a_2; s_2))) > \epsilon_2 \text{ para todo } g \in V_1.$$

Sea $h_2 \in A_2 \cap V_1$. Continuando como antes, obtenemos una sucesión $(h_m)_{m\geq 1}$ en $\mathcal{H}(X)$ tal que $d(h_{m+1}, h_m) < \frac{1}{2^m}$. Como $\mathcal{H}(X) \subset C(X)$, existe una función continua $h \in C(X)$ tal que $h_m \to h$ uniformemente en X. Afirmamos que $h \in \mathcal{H}(X)$. Para ello, basta ver que h es una función biyectiva. Ahora bien, como $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico y $(h_m)_{m\geq 1}$ es una sucesión de Cauchy, $(h_m^{-1})_{m\geq 1}$ también es de Cauchy. Igual que antes, existe una función $g \in C(X)$ tal que $h_m^{-1} \to g$ uniformemente en X. Claramente, $g = h^{-1}$. A su vez, como

$$h_m \in V_k \text{ para todo } m \geq k+1 \ (k \geq 0), \text{ se tiene que } h \in \overline{V}_k \subset A_k \text{ para todo } k \geq 1.$$

Por lo tanto, $h \in \overline{V_0} \subset B_{\mathcal{H}(X)}(f; \epsilon)$. Esto prueba que A es denso en $\mathcal{H}(X)$. □

Capítulo 3

Dinámica en $\mathcal{H}(X)$

El objetivo de este capítulo es estudiar la dinámica en $\mathcal{H}(X)$. Para ello, comenzamos analizando la existencia de puntos periódicos y ciclos atractores de las funciones de $\mathcal{H}(X)$. A su vez, a partir de lo anterior investigamos las propiedades del conjunto de puntos periódicos desde el punto de vista topológico y desde la teoría de la medida. Recordemos que la expresión "casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen la propiedad P" significa que el conjunto de funciones en $\mathcal{H}(X)$ que no satisfacen la propiedad P es de primera categoría en $\mathcal{H}(X)$.

3.1. Existencia de puntos periódicos y ciclos atractores

Para empezar, consideremos los siguientes problemas básicos: la existencia de puntos periódicos y la existencia de ciclos atractores. Estos problemas fueron considerados por varios matemáticos en diferentes contextos. Por ejemplo, Baker [3] probó que si una función racional R de grado $d \geq 2$ (en la esfera de Riemann) no tiene puntos periódicos de período m, entonces (d, m) es uno de los pares $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$ o $(4, 2)$. Por otra parte, Jakobson [13] probó que para la familia de funciones de un parámetro

$$f_a : [-1, 1] \to [-1, 1], \quad f_a(x) = 1 - ax^2 \quad (a \in (0, 2)),$$

existe un conjunto $A \subset (0, 2)$ de medida de Lebesgue positiva tal que para cada f_a, $a \in A$, no existen ciclos atractores (también ver Benedicks y Carleson [4]).

En nuestro contexto, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.1.1. *Casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen no numerables puntos periódicos de período m, para cada $m \geq 1$.*

Teorema 3.1.2. *Para casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ no existen ciclos atractores.*

Como veremos más adelante, tanto el Teorema 3.1.1 como el Teorema 3.1.2 se deducen de un resultado más general que establecemos en el Teorema 3.1.3.

Recordemos que un conjunto $A \subset X$ se dice perfecto si es un conjunto cerrado no vacío tal que todos sus puntos son puntos de acumulación.

A su vez, remarcamos que estamos adopatando la siguiente definición de punto fijo atractor y ciclo atractor: Dada $f \in \mathcal{H}(X)$, un punto fijo atractor de f es un punto fijo x_0 de f para el cual existe algún entorno U_0 de x_0 tal que para todo $x \in U_0$, $f^j(x) \to x_0$.

Similarmente, un ciclo de f, $\{x_1, f(x_1), ..., f^{m-1}(x_1)\}$ se dice atractor si cada uno de sus elementos es un punto fijo atractor de f^m. En otras palabras, $\{x_1, f(x_1), ..., f^{m-1}(x_1)\}$ es un ciclo atractor si x_1 es punto fijo atractor de f^m.

Teorema 3.1.3. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, F_{f^m} es un conjunto perfecto y* $\mathrm{Per}(f, m)$ *es denso en F_{f^m}, para cada $m \geq 1$.*

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos $A_{m,k}$ el conjunto de las funciones en $\mathcal{H}(X)$ para las cuales existen finitas bolas cerradas disjuntas $B_1, \ldots, B_r \subset \mathrm{Int}\, X$, $r \geq 2$, con las siguientes propiedades:

(i) Para cada $1 \leq j \leq r$, $B_j, f(B_j), \ldots, f^{m-1}(B_j)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(B_j) \subset \mathrm{Int}\, B_j$;

(ii) Para cada $x \in F_{f^m}$ existe un entorno abierto U_x de x, con $\mathrm{diam}(U_x) < \frac{1}{k}$, que contiene al menos dos B_j distintos.

Veamos que $A_{m,k}$ es un conjunto abierto y denso en $\mathcal{H}(X)$ y que toda función $f \in \cap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$ tiene las propiedades deseadas. En ese caso, como $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire, tenemos el resultado buscado.

Supongamos en principio que $A_{m,k}$ es no vacío. Sea $f \in A_{m,k}$, por definición, existen bolas cerradas disjuntas $B_1, \ldots, B_r \subset \mathrm{Int}\, X$ con las propiedades (i) y (ii). Como $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico, para cada $s \in \mathbb{N}$, la asignación $g \in \mathcal{H}(X) \mapsto g^s \in \mathcal{H}(X)$ es continua. Por lo tanto, si $g \in \mathcal{H}(X)$ está suficientemente cerca de f entonces (i) se verifica para g en el lugar de f. Por compacidad, existe $\delta > 0$ para el cual

$$||x - f^m(x)|| \geq \delta \quad \text{para todo } x \in X - \bigcup_{x \in F_{f^m}} U_x.$$

Por consiguiente, si $g \in \mathcal{H}(X)$ está suficientemente cerca de f, entonces cada punto $y \in F_{g^m}$ cae en algún U_x y por lo tanto (ii) se verifica para g en el lugar de f. Esto prueba que $A_{m,k}$ es abierto.

Ahora bien, es inmediato de la definición de $A_{m,k}$ y del teorema del punto fijo de Brouwer (Teorema 2.2.4) que cada

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$$

tiene las propiedades deseadas. Efectivamente, $F_{f^m} \neq \varnothing$ debido al teorema del punto fijo de Brouwer. Como F_{f^m} es cerrado, para ver que es un conjunto perfecto basta ver que F_{f^m} no tiene puntos aislados. Sean $x_0 \in F_{f^m}$ y $r > 0$. Por la condición (ii), sabemos que U_{x_0} contiene al menos dos B_j distintos. Trabajando con bolas suficientemente pequeñas, podemos suponer que $U_{x_0} \subset B(x_0, r)$. Por la condición (i), tenemos que $f^m(B_j) \subset B_j$ para los dos B_j distintos. Así, aplicando nuevamente el teorema del punto fijo , existe $y_0 \in U_{x_0}$, $y_0 \neq x_0$, $y_0 \in F_{f^m}$. Es decir, x_0 es un punto de acumulación. Como esto vale para todo $x_0 \in F_{f^m}$, F_{f^m} es un conjunto perfecto.

Por otro lado, como para cada $x \in F_{f^m}$, U_x contiene al menos dos B_j, si $y \in B_j$ entonces $\mathrm{Per}(f, y) = m$ ya que $B_j, f(B_j), \ldots, f^{m-1}(B_j)$ son disjuntos dos a dos y $f^m(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j$.

Por último, veamos que cada $A_{m,k}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$. Para esto, fijamos $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Tenemos que encontrar una función $h \in A_{m,k}$ tal que

$$d(h, f) < \epsilon.$$

Como F_{f^m} es compacto, podemos tomar finitas bolas abiertas $U_1, \ldots, U_s$ con $\operatorname{diam}(U_i) < \frac{1}{k}$, $1 \leq i \leq s$, tal que

$$F_{f^m} \subset U := U_1 \cup \cdots \cup U_s. \tag{1}$$

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada U_j es esencial para la validez de (1), en el sentido que $F_{f^m} \not\subset \cup_{i \neq j} U_i$ para cada $1 \leq j \leq s$. Por cada $1 \leq j \leq s$ elegimos un

$$x_j \in F_{f^m} \cap U_j.$$

Nuevamente, podemos asumir que $x_1, \ldots, x_s$ son todos distintos. Sea $k_j \geq 1$ el mínimo entero tal que

$$f^{k_j}(x_j) = x_j \quad (1 \leq j \leq s).$$

Obviamente, cada k_j divide a m.

Afirmamos que existe $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que $d(f, g) < \frac{\epsilon}{2}$, $F_{f^m} \subset U$ y que se verifica la siguiente propiedad:

(iii) Existen $a_j, b_j \in \operatorname{Int} X \cap U_j$ puntos periódicos de g de período m $(1 \leq j \leq s)$, de manera tal que los conjuntos $\mathrm{Orb}(g, a_1)$, $\mathrm{Orb}(g, b_1)$, $\ldots$, $\mathrm{Orb}(g, a_s)$, $\mathrm{Orb}(g, b_s)$ son disjuntos dos a dos.

A partir de esto, vamos a obtener la función $h \in A_{m,k}$ buscada.

Veamos la afirmación. Para ello, fijamos $\eta > 0$ y elegimos $0 < r_0 < \cdots < r_m < \frac{\eta}{2}$ de forma tal que si tomamos

$$V_i := \overline{B}(f^i(x_1); r_i) \cap X \quad (0 \leq i \leq m),$$

tenemos que $V_m \subset U_1$, $V_{m-k_1+1}, \ldots, V_m$ son disjuntos dos a dos, $V_0 \cup \cdots \cup V_m$ no interseca $\mathrm{Orb}(f, x_j)$ para cada j tal que $\mathrm{Orb}(f, x_j) \neq \mathrm{Orb}(f, x_1)$,

$$f(V_i) \subset V_{i+1} \quad (0 \leq i \leq m-1) \quad \text{y} \quad f(V_m) \subset B\left(f(x_1); \frac{\eta}{2}\right).$$

Para cada $0 \leq i \leq m-1$, elegimos $y_i \in V_i$ tal que

$$z_i := f(y_i) \in \operatorname{Int} V_{i+1} - \{f^{i+1}(x_1)\}.$$

Es claro que podemos elegirlos de manera que $y_0, \ldots, y_{m-1}, z_0, \ldots, z_{m-1}$ sean todos distintos. Por el Lema 2.2.11, existe una función $\varphi \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) = x \ \text{ si } x \in (X - (V_{m-k_1+1} \cup \cdots \cup V_m)) \cup \operatorname{Orb}(f, x_1),\\
&\varphi\left(z_{m-1}\right) = y_0 \ \text{ y } \ \varphi(z_{i-1}) = y_i \ \text{ para } 1 \leq i \leq m-1.
\end{aligned}$$

Sea $g_1 := f \circ \varphi$, entonces $g_1 \in \mathcal{H}(X)$, $d(f, g_1) < \eta$ y $g_1^i(x_j) = f^i(x_j)$ para $1 \leq j \leq s$, $0 \leq i \leq m$. Además, z_{m-1} es un punto periódico de g_1 de período m.

Escribimos $a_1 := z_{m-1} \in \operatorname{Int} X \cap U_1$. Repitiendo el argumento anterior con g_1 en el lugar de f, obtenemos una función $g_2 \in \mathcal{H}(X)$ tal que $d(g_2, g_1) < \eta$, $g_2^i(x_j) = f^i(x_j)$ para $1 \leq j \leq s y para 0 \leq i \leq m$. A su vez, g_2 tiene un punto periódico b_1 con período m más cerca de x_1 que de a_1. Más precisamente, si elegimos bolas suficientemente pequeñas alrededor de $x_1, g_1(x_1), \ldots, g_1^m(x_1)$ podemos garantizar que g_2 coincide con g_1 en $\operatorname{Orb}(g_1, a_1)$. Por lo tanto, a_1 y a b_1 son puntos periódicos de g_2 de período m en $\operatorname{Int} X \cap U_1$.

Ahora, continuamos con este procedimiento con x_2 en el lugar de x_1 y así sucesivamente. Luego, si tomamos bolas suficientemente pequeñas en cada paso, podemos asegurar que los puntos periódicos que construimos no son reemplazados. De esta manera, terminamos con una función $g := g_{2s}$ que satisface la propiedad (iii) y tal que $d(g, f) < 2s\eta$.

En consecuencia, si elegimos $\eta > 0$ suficientemente pequeño también podemos garantizar que $d(g, f) < \frac{\epsilon}{2}$ y que $F_{g^m} \subset U$. Esto prueba nuestra afirmación.

Por (iii), podemos elegir $t > 0$ tal que

$$\overline{B}(a_j; 2t), \overline{B}(b_j; 2t) \subset \operatorname{Int} X \cap U_j, \ \text{para } 1 \leq j \leq s$$

y los conjuntos

$$g^i(\overline{B}(a_j; 2t)), g^i(\overline{B}(b_j; 2t)), \ 0 \leq i \leq m-1 \ , 1 \leq j \leq s,$$

son disjuntos dos a dos.

Sea $\gamma \in (0, t)$ tal que

$$g^m(\overline{B}(a_j; \gamma)) \subset B(a_j, t) \ \text{ y } \ g^m(\overline{B}(b_j; \gamma)) \subset B(b_j, t) \ \text{ para } 1 \leq j \leq s.$$

Sea ϕ un homeomorfismo creciente del $[0, 1]$ tal que $\phi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\gamma}{t}$ y definimos

$$\psi(x) = \phi\left(\frac{||x-w||}{2t}\right)(x-w)+w, \ \text{si } x \in \overline{B}(w; 2t) \text{ para algún } w \in \{a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s\}.$$

Como antes, extendemos ψ a X poniendo $\psi(x) = x$ en los x restantes. Es inmediato comprobar que ψ es un homeomorfismo en X y que

$$\psi(\overline{B}(w; 2t)) = \overline{B}(w; 2t) \ \text{ y } \ \psi(\overline{B}(w; t)) \subset \overline{B}(w; \gamma) \quad (w \in \{a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s\}).$$

Definimos $h := g \circ \psi$. Entonces, tenemos que la función $h \in \mathcal{H}(X)$ y para cada $w \in \{a_1, b_1, \ldots, a_s, b_s\}$,

$$\overline{B}(w;t), h(\overline{B}(w;t)), \ldots, h^{m-1}(\overline{B}(w;t)) \text{ son disjuntos dos a dos}$$

y

$$h^m(\overline{B}(w;t)) = h^{m-1}(g(\psi(\overline{B}(w;t)))) \subset g^m(\overline{B}(w;\gamma)) \subset B(w;t).$$

Además, tomando $t > 0$ suficientemente chico también podemos asegurar que $d(h,g) < \frac{\epsilon}{2}$ y que $F_{h^m} \subset U$. Esto implica que $h \in A_{m,k}$ y $d(h,f) < \epsilon$, como queríamos probar. □

Observación 3.1.4. *El Teorema 3.1.3 también es válido si cambiamos $\mathcal{H}(X)$ por el espacio $C(X)$ (respectivamente $CO(X)$). El único problema es que no podemos asegurar que exista $y_i \in V_i$ tal que $f(y_i) \in \operatorname{Int} V_{i+1} - \{f^{i+1}(x_1)\}$. Sin embargo, podemos resolverlo de la siguiente manera: Si existe tal y_i, ponemos*

$$p(x) := f(x), \quad x \in V_i.$$

Si no es el caso, se tiene $f(\operatorname{Int} V_i) \subset \operatorname{Bd}(V_{i+1}) \cup \{f^{i+1}(x_1)\}$ (y por lo tanto $f(X - \operatorname{Int} V_i) = X$ si f es sobreyectiva). Sean $y_i \in \operatorname{Int}(V_i) - \{f^i(x_1)\}$ y $z_i \in \operatorname{Int}(V_{i+1}) - \{f^{i+1}(x_1)\}$, con $z_0 \neq y_0$ si $k_1 = 0$, ponemos

$$p(y_i) := z_i,\ p(f^i(x_1)) := f^{i+1}(x_1) \text{ y } p(x) := f(x) \text{ si } x \in \operatorname{Bd} V_i,$$

y, como antes, utilizamos la Proposición 2.2.10 para extender continuamente p, a una función de V_i a V_{i+1}.

Si hacemos esto para cada $0 \leq i \leq k_1 - 1$ y luego extendemos p a X poniendo

$$p(x) := f(x) \text{ si } x \in X - (V_0 \cup \cdots \cup V_{k_1 - 1}),$$

obtenemos que $p \in C(X)$ (respectivamente $p \in CO(X)$), $p = f$ en $(X - (V_0 \cup \cdots \cup V_{k_1-1})) \cup \operatorname{Orb}(f, x_1)$, $p(V_i) \subset V_{i+1}$ para $0 \leq i \leq m-1$ y $p(V_m) \subset B\left(f(x_1); \frac{\eta}{2}\right)$.

Ahora, es suficiente trabajar con p en lugar de f.

Ahora sí podemos demostrar los teoremas 3.1.1 y 3.1.2:

Demostración del Teorema 3.1.1. Por el teorema 3.1.3 sabemos que F_{f^m} es un conjunto perfecto y compacto. A su vez,

$$\operatorname{Per}(f,m) = F_{f^m} \cap V, \text{ donde } V := \bigcap_{j|m, j\neq m} X - F_{f^j}.$$

Como V es abierto, dado $x \in \operatorname{Per}(f,m)$, existe $r > 0$ tal que $\overline{B}(x;r) \subset V$.

Sea $W := \overline{B}(x;r) \cap F_{f^m}$. Afirmamos que W es no numerable. Si suponemos que no lo es, existe $r_0 > 0$ tal que $\operatorname{Bd} B(x;r_0) \cap F_{f^m} = \varnothing$. En ese caso, sea $W_0 := \overline{B}(x;r_0) \cap F_{f^m}$. Veamos que W_0 es un conjunto perfecto. Es claro que W_0 es no vacío y cerrado. Dado $y \in W_0$, como F_{f^m} es perfecto, existe una sucesión $(y_n)_{n\geq 1} \subset F_{f^m}$ tal que

$y_n \to y$, cuando $n \to +\infty$. Como $y \in B(x;r)$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $(y_n)_{n \geq n_0} \subset W$. Es decir, y es un punto de acumulación. Por lo tanto, W_0 es un conjunto perfecto y, por el Corolario 2.2.3, es no numerable. Como $W_0 \subset W$, lo anterior es imposible.

O sea, W es no numerable y así concluimos que el conjunto $\mathrm{Per}(f,m)$ es no numerable.

□

Demostración del Teorema 3.1.2. Supongamos por el contrario, que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ tienen algún ciclo atractor.

Por el Teorema 3.1.3, sabemos que $\cap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$ es un conjunto denso en $\mathcal{H}(X)$. Sea $f \in \cap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$ para la cual existe un ciclo atractor $\{x_1, f(x_1), \ldots, f^{m-1}(x_1)\}$. Entonces para cada $x_i := f^i(x_1)$, $0 \leq i \leq m-1$, existe un entorno U_0^i tal que $(f^{mj}(x))_{j \geq 1}$ converge a x_i, para todo $x \in U_0$.

Ahora bien, por el Teorema 3.1.3, también sabemos que los puntos periódicos de f de período m son densos en F_{f^m}. Así que dado $x_i \in F_{f^m}$ y dado el entorno U_0^i, existe $y_i \in \mathrm{Per}(f,m) \cap U_0^i$, $y_i \neq x_i$. Por definición tenemos que $f^{mj}(y_i) = y_i$ para todo $j \geq 1$ y en consecuencia, la sucesión $(f^{mj}(y_i))_{j \geq 1}$ no converge a x_i contradiciendo la condición de punto fijo atractor. Esta contradicción demuestra el teorema.

□

Observación 3.1.5. *Un observación importante es notar que el Teorema 3.1.3 muestra que para casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ (respectivamente en $C(X)$ y en $CO(X)$) tenemos una conclusión más fuerte que la dada por el teorema del punto fijo de Brouwer (Teorema 2.2.4). En efecto, el Teorema 3.1.3 implica que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ (respectivamente en $C(X)$, en $CO(X)$) no sólo tienen un punto fijo sino un conjunto perfecto de puntos fijos (y en consecuencia son no numerables).*

Observación 3.1.6. *Si bien para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no existen ciclos atractores, el conjunto de funciones en $\mathcal{H}(X)$ que tienen un punto fijo atractor es denso en $\mathcal{H}(X)$. Para ello, fijamos $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Se deduce de la demostración del Teorema 3.1.3 que el conjunto de funciones que tienen puntos fijos en* $\mathrm{Int}\, X$ *es denso en $\mathcal{H}(X)$. Por lo tanto, existe una función $g \in \mathcal{H}(X)$ que tiene un punto fijo $x_0 \in \mathrm{Int}\, X$ y que satisface $d(g,f) < \frac{\epsilon}{2}$. Como X es localmente contráctil en x_0 (por ser convexo), existe una función $h \in \mathcal{H}(X)$ con $d(h,g) < \frac{\epsilon}{2}$, para la cual x_0 es un punto fijo atractor ([9], página 138). Esto prueba la afirmación.*

3.2. Propiedades topológicas del conjunto de puntos periódicos

El objetivo de esta sección es mostrar algunas propiedades topológicas del conjunto de puntos periódicos. Veremos que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f tiene infinitas componentes conexas, es un conjunto nunca denso y nunca cerrado, y es denso en el conjunto de puntos no errantes de f. En particular, vamos a a obtener que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, toda órbita $\{f^j(x); j \in \mathbb{Z}\}$ $(x \in X)$ es nunca densa en X.

Proposición 3.2.1. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ tienen la propiedad que el conjunto de puntos periódicos de f con período m es denso en el conjunto de todos los puntos periódicos de f con período q, para todo q que divida a m.*

Demostración. Fijamos $m \geq 1$ y consideramos $A_{m,k}$ $(m, k \in \mathbb{N})$ definido como en la demostración del Teorema 3.1.3.

Afirmamos que cada $f \in \cap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$ verifica la propiedad. En efecto, como $\mathrm{Per}(f, q) \subset F_{f^q} \subset F_{f^m}$, si q divide a m, $\mathrm{Per}(f, m)$ es denso en $\mathrm{Per}(f, q)$ como consecuencia del Teorema 3.1.3. □

Proposición 3.2.2. *(a) Sea $m \in \mathbb{N}$. Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f con período m tiene infinitas componentes conexas.*

(b) Para casi todas funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f tiene infinitas componentes conexas.

Demostración. La demostración se deduce esencialmente de la prueba del Teorema 3.1.3. Si $f \in \cap_{k=1}^{\infty} A_{m,k}$, para cada $k \geq 1$ tenemos $B_1, B_2, \ldots, B_r$ bolas cerradas y disjuntas tales que

$$B_j, f(B_j), \ldots, f^{m-1}(B_j) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^m(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j \ (1 \leq j \leq r).$$

Como para todo $x \in F_{f^m}$, existe un entorno abierto U_x con $\operatorname{diam} U_x < \frac{1}{k}$, que contiene al menos dos B_j distintos, tenemos que $r := r(k)$ y por lo tanto $r \to +\infty$ cuando $k \to +\infty$. De esta manera, encontramos una sucesión de bolas cerradas disjuntas dos a dos $B_1, B_2, \ldots \subset \operatorname{Int} X$ de manera que

$$B_j, f(B_j), \ldots, f^{m-1}(B_j) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^m(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j, \text{ para todo } j \geq 1.$$

Esto implica (a).

Obviamente, (b) se deduce de (a). De hecho, para cada $m \in \mathbb{N}$ fijo, las bolas cerradas $B_1, B_2, \ldots, B_r$ contienen únicamente puntos periódicos de f de período m. □

En el siguiente teorema, usaremos el resultado de Halpern [10] establecido en la introducción (Teorema 1.3.2).

Teorema 3.2.3. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos no errantes de f es nunca denso en X.*

Demostración. Para cada función $f \in \mathcal{H}(X)$, consideramos Ω_f, el conjunto de puntos no errantes de f.

Sea $(B_k)_{k \geq 1}$ una base numerable para la topologia de $\operatorname{Int} X$ que consiste de bolas abiertas. Para cada $k \geq 1$, sea $R_k := \{f \in \mathcal{H}(X) : \Omega_f \supset B_k\}$.

Por el resultado de Halpern [10], cada R_k es nunca denso. Luego, $A := \cup_{k=1}^{\infty} \overline{R_k}$ es de primera categoría. Más precisamente, para cada función $f \in \mathcal{H}(X) - A$,

$$B_k \nsubseteq \Omega_f \text{ para todo } k \geq 1,$$

y por lo tanto Ω_f es nunca denso. □

Dada $f \in \mathcal{H}(X)$, recordemos que la órbita de un punto $x \in X$ respecto de f es $\mathrm{Orb}(f,x) := \{f^j(x) : j \in \mathbb{Z}\}$. Por lo tanto, $\mathrm{Orb}(f,x) \subset \Omega_f$. También, claramente tenemos que $Per(f) \subset \Omega_f$

Así obtenemos los siguientes resultados:

Corolario 3.2.4. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f es nunca denso en X.*

Corolario 3.2.5. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, toda órbita $\mathrm{Orb}(f,x)$ $(x \in X)$ es nunca densa en X.*

Definición 3.2.6. *Sea $Y \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que Y es cerrado en alguna parte si $Y = \varnothing$ o si existe un abierto $V \subset \mathbb{R}^n$ tal que $Y \cap V$ es cerrado y no vacío en V.*

Así mismo, decimos que Y es nunca cerrado si no es cerrado en alguna parte.

Notemos que Y es nunca cerrado si y sólo sí $Y \neq \varnothing$ y $\overline{Y} - Y$ es denso en Y.

Teorema 3.2.7. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f es nunca cerrado.*

Demostración. Sea $A_{m,k}$ $(m, k \in \mathbb{N})$ definido como en la demostración del Teorema 3.1.3. En esta demostración aplicamos técnicas similares a las utilizadas anteriormente para construir una sucesión de puntos periódicos con un punto de acumulación no periódico.

Comenzamos fijando

$$f \in \bigcap_{m,k} A_{m,k}$$

y sean $a_0 \in \mathrm{Per}(f)$ y $\epsilon > 0$. Tenemos que encontrar un $w \in \overline{\mathrm{Per}(f)} - \mathrm{Per}(f)$ tal que $||w - a_0|| < \epsilon$. Para este propósito, sea q el período de a_0. Por definición del conjunto $A_{m,k}$, existe una bola cerrada $D_1 \subset \mathrm{Int}(X) \cap B(a_0; \epsilon)$ tal que

$$D_1, f(D_1), \ldots, f^{2q-1}(D_1) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^{2q}(D_1) \subset \mathrm{Int}(D_1).$$

Sea $d_1 > 0$ la distancia mínima entre los conjuntos $D_1, f(D_1), \ldots, f^{2q-1}(D_1)$. Elegimos un punto periódico de f, $a_1 \in \mathrm{Int}\, D_1$, de período $2q$.

Como antes, existe una bola cerrada $D_2 \subset \mathrm{Int}\, D_1$ tal que

$$D_2, f(D_2), \ldots, f^{2^2q-1}(D_2) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^{2^2q}(D_2) \subset \mathrm{Int}(D_2).$$

Análogamente, sea $d_2 > 0$ la distancia mínima entre los conjuntos

$$D_2, f(D_2), \ldots, f^{2^2q-1}(D_2).$$

Elegimos un punto periódico de f, $a_2 \in \operatorname{Int} D_2$, de período $2^2 q$ y sea $D_3 \subset \operatorname{Int} D_2$ una bola cerrada tal que

$$D_3, f(D_3), \ldots, f^{2^3q-1}(D_3) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^{2^3q}(D_3) \subset \operatorname{Int}(D_3),$$

y así continuamos con este proceso.

La sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ así construida tiene un punto de acumulación $w \in D_1 \subset B(a_0; \epsilon)$. Afirmamos que w no es un punto periódico de f. En efecto, supongamos que este no es el caso. Sea m el período de w y tomamos $t \in \mathbb{N}$ tal que $m \leq 2^t q - 1$. Sea $0 < r < \frac{d_t}{2}$ tal que

$$f^m(B(w; r)) \subset B\left(w; \frac{d_t}{2}\right).$$

Como w es un punto de acumulación de la sucesión $(a_n)_{n \geq 1}$, existe $s \geq t$ tal que $a_s \in B(w; r)$. O sea,

$$||a_s - f^m(a_s)|| < d_t.$$

Por otra parte, como $a_s \in D_s \subset D_t$ y $m \leq 2^t q - 1$, se deduce de la definición de d_t que

$$||a_s - f^m(a_s)|| \geq d_t.$$

Con esta contradicción el teorema queda demostrado. □

Observación 3.2.8. *Sea $m \geq 2$. Se deduce de la Proposición 3.2.1 que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f de período m es cerrado en alguna parte pero no es cerrado.*

De hecho, si tomamos el conjunto abierto $V := \bigcap_{j|m, j \neq m} X - F_{f^j}$ como en la demostración del Teorema 3.1.1, es inmediato que $V \cap \operatorname{Per}(f, m) = V \cap F_{f^m}$ es cerrado en V. Es decir, $Per(f, m)$ es cerrado en alguna parte.

Sin embargo, $\operatorname{Per}(f, m)$ no puede ser cerrado. Si lo fuera, por la Proposición 3.2.1, tendríamos que $\operatorname{Per}(f, q) \subset \operatorname{Per}(f, m)$ para todo q que divide a m, lo cual es imposible.

Teorema 3.2.9. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjuntos de puntos periódicos de f es denso en el conjunto de puntos no errantes de f.*

Demostración. Para toda función $f \in \mathcal{H}(X)$ ya sabemos que $\operatorname{Per}(f) \subset \Omega_f$. Veamos que para casi todas la funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ se verifica $\overline{\operatorname{Per}(f)} \supset \Omega_f$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, decimos que una función $f \in \mathcal{H}(X)$ tiene la propiedad P_k si existen finitas bolas cerradas disjuntas $B_1, \ldots, B_r \subset \operatorname{Int} X$ y si existen números naturales $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tales que:

(i) Para cada $1 \leq j \leq r$, $f^{m_j}(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j$;

(ii) Para cada $1 \leq j \leq r$, $\operatorname{diam} B_j < \frac{1}{4k}$;

(iii) Para cada $x \in \Omega_f$, existe $1 \leq j_x \leq r$ tal que $\operatorname{dist}(\{x\}, B_{j_x}) < \frac{1}{k}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea

$$A_k := \{f \in \mathcal{H}(X) : \exists\, U_f \text{ entorno abierto de } f \text{ tal que si } g \in U_f,\ g \text{ satisface } P_k\}.$$

Mostraremos que los conjuntos A_k son abiertos y densos en $\mathcal{H}(X)$. A partir de alli, el resultado es inmediato ya que $\mathcal{H}(X)$ es un espacio de Baire. A diferencia de las demostraciones anteriores, acá probamos la densidad por reducción al absurdo.

Obviamente, cada A_k es abierto.

Además, el conjunto de puntos periódicos de cada

$$f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

es denso en el conjunto de puntos no errantes de f.

Para probarlo, sea $x \in \Omega_f - \operatorname{Per}(f)$ y sea $U \subset X$ un entorno abierto de x. Como $f \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$, f satisface la propiedad P_k para todo $k \geq 1$. Es decir, existen bolas cerradas disjuntas $B_1, \ldots, B_r \subset \operatorname{Int} X$ y existen números naturales $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}$ tales que se cumplen (i), (ii) y (iii). Como $x \in \Omega_f$, existe $1 \leq j_x \leq r$, tal que $\operatorname{dist}(\{x\}, B_{j_x}) < \frac{1}{k}$ y $\operatorname{diam} B_{j_x} < \frac{1}{4k}$. Entonces, tomando k suficientemente grande, podemos asegurar que $B_{j_x} \subset U$. A su vez, por el teorema del punto fijo de Brouwer (Teorema 2.2.4), sabemos que existe $x_0 \in B_{j_x}$ tal que $f^{m_{j_x}}(x_0) = x_0$. Por lo tanto, $x_0 \in \operatorname{Per}(f) \cap U$, como queriamos ver.

Nos queda ver que cada A_k es denso en $\mathcal{H}(X)$. Fijemos $k \geq 1$ y supongamos que A_k no es denso en $\mathcal{H}(X)$. O sea, existe un abierto no vacío D de $\mathcal{H}(X)$ con $D \cap A_k = \varnothing$. Afirmamos que existen bolas cerradas $B_1, B_2, \ldots \subset \operatorname{Int} X$, funciones $f_1, f_2, \ldots \in D$ y números naturales $m_1, m_2, \ldots \in \mathbb{N}$ tales que:

(a) $\operatorname{diam} B_j < \frac{1}{4k}$ $(j \geq 1)$;

(b) $\operatorname{dist}(B_i, B_j) > \frac{1}{2k}$ si $1 \leq i \leq j-1$ $(j \geq 1)$;

(c) $f_j^{m_i}(B_i) \subset \operatorname{Int} B_i$ si $1 \leq i \leq j$ $(j \geq 1)$.

Procedemos por inducción en j. Sea $g \in D$ y sea $a \in X$ un punto fijo de g. Sea $t > 0$ y sea $b \in B(a;t) \cap \operatorname{Int} X$ de forma tal que $g(b) \in B(a;t)$. Tomamos $\phi \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\phi(g(b)) = b \text{ y } \phi(x) = x \text{ para todo } x \in X - (B(a;t) \cap \operatorname{Int} X).$$

Así, $h := \phi \circ g \in \mathcal{H}(X)$ y como $h(b) = \phi(g(b)) = b$, b es un punto fijo de h que pertenece al interior de X. Así mismo, si tomamos $t > 0$ suficientemente pequeño también tenemos que $h \in D$.

Ahora, tomamos $\eta > 0$ tal que $\overline{B}(b; 2\eta) \subset \operatorname{Int} X$ y sea $\gamma \in (0, \eta)$ tal que

$$h(\overline{B}(b; \gamma)) \subset B(b; \eta).$$

Sea φ un homeomorfismo creciente del $[0, 1]$ tal que $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\gamma}{\eta}$ y definimos

$$\psi(x) := \varphi\left(\frac{||x - b||}{2\eta}\right)(x - b) + b \text{ para } x \in \overline{B}(b; 2\eta).$$

Como siempre, extendemos ψ a X escribiendo $\psi(x) = x$ para todo $x \in X - \overline{B}(b; 2\eta)$.
En consecuencia, si llamamos $f_1 := h \circ \psi$, $m_1 := 1$ y $B_1 := \overline{B}(b; \eta)$, se sigue que

$$f_1^{m_1}(B_1) = h(\psi(\overline{B}(b; \eta))) \subset h(\overline{B}(b; \gamma)) \subset B(b; \eta) = \operatorname{Int} B_1.$$

En particular, si elegimos $\eta > 0$ suficientemente pequeño, podemos garantizar que $f_1 \in D$, ya que $\psi = id_x$ en $X - \overline{B}(b; 2\eta)$; y $\operatorname{diam} B_1 < \frac{1}{4k}$.
Luego, (a), (b) y (c) se verifican para $j = 1$.
Ahora supongamos que las bolas cerradas $B_1, \ldots, B_{j_0}$, las funciones $f_1, \ldots, f_{j_0}$ y los números naturales $m_1, \ldots, m_{j_0}$ ya fueron definidos de manera tal que (a), (b) y (c) se cumplen para $1 \leq j \leq j_0$ y encontremos B_{j_0+1}, f_{j_0+1} y m_{j_0+1}.
Como $f_{j_0} \in D \subset \mathcal{H}(X) - A_k$, existe una función $g \in \mathcal{H}(X)$ que no cumple la propiedad P_k y que está tan cerca de f_{j_0} de manera que $g \in D$ y

$$g^{m_i}(B_i) \subset \operatorname{Int} B_i \text{ para } 1 \leq i \leq j_0 \tag{2}$$

Entonces, (i) y (ii) se verifican con $r = j_0$ y $f = g$. Como g no tiene la propiedad P_k, existe $a \in \Omega_g$ tal que

$$\operatorname{dist}(B_i, \{a\}) \geq \frac{1}{k} \text{ para } 1 \leq i \leq j_0. \tag{3}$$

Fijamos $t > 0$ y sea $s \geq 1$ y sea $b \in B(a; t) \cap \operatorname{Int} X$ tal que $g^s(b) \in B(a; t)$.
Sea $m_{j_0+1} \geq 1$ el menor número natural tal que

$$g^{m_{j_0+1}}(b) \in B(a; t).$$

Igual que antes, tomamos $\phi \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\phi(g^{m_{j_0+1}}(b)) = b \text{ y } \phi(x) = x \text{ para todo } x \in X - (B(a; t) \cap \operatorname{Int} X).$$

Entonces, $h := \phi \circ g \in \mathcal{H}(X)$ y $b \in \operatorname{Int} X$ es un punto periódico de h con período m_{j_0+1}.
A su vez, si tomamos $t > 0$ suficientemente pequeño también tenemos que $||b - a|| < \frac{1}{4k}$, $h \in D$ y h satisface (2) en lugar de g.
Ahora, si cambiamos h en una bola $B(b; 2\eta)$ con $\eta > 0$ suficientemente pequeño (de forma similar a la usada en la construcción de f_1), podemos conseguir una función $f_{j_0+1} \in \mathcal{H}(X)$ muy cerca de h y una bola B_{j_0+1} centrada en b de manera tal que

$$f_{j_0+1}^{m_{j_0+1}}(B_{j_0+1}) \subset \operatorname{Int} B_{j_0+1}.$$

Si elegimos $\eta > 0$ suficientemente pequeño también podemos garantizar que $\operatorname{diam} B_{j_0+1} < \frac{1}{4k}$, $f_{j_0+1} \in D$ y f_{j_0+1} satisfrace (2) en lugar de g. Como $||b - a|| < \frac{1}{4k}$, (3) implica que

$$\operatorname{dist}(B_i, B_{j_0+1}) > \frac{1}{2k} \text{ para } 1 \leq i \leq j_0.$$

En conclusión, (a), (b) y (c) se cumplen para $1 \leq j \leq j_0 + 1$. Esto prueba nuestra afirmación.

Por último, por la condición (b), existen infinitas bolas cerradas contenidas en X cuyas distancias entre sí siempre es mayor a $\frac{1}{2k}$. Esto es imposible y por lo tanto, el teorema queda demostrado.

□

Corolario 3.2.10. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ el conjunto de puntos recurrentes de f y el conjunto de puntos no errantes de f no tienen puntos aislados.*

Demostración. El resultado es inmediato para el caso de Ω_f, por el Teorema 3.2.9. Por otro lado, si $f^j(x) = x$ para algún $j \geq 1$, entonces se tiene el resultado por el Teorema 3.1.3. En otro caso, directamente tomamos la sucesión $(f^j(x))_{j\geq 1}$. □

3.3. Puntos periódicos y medida de Lebesgue

Como última sección de este capítulo mostramos que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ el conjunto de puntos periódicos de f tiene medida de Lebesgue cero. En lo que sigue, μ denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Dada $f \in \mathcal{H}(X)$, $m \in \mathbb{N}$ e $Y \subset X$, denotamos $P(f, m, Y)$ al conjunto de puntos periódicos de f de período m que están en Y.

A pesar de que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ tienen no numerables puntos periódicos de período m, para cada $m \geq 1$, el Teorema 3.3.1 muestra para que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f es muy pequeño en el sentido de la medida.

Teorema 3.3.1. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, el conjunto de puntos periódicos de f tiene medida de Lebesgue cero.*

Para poder probar este teorema, vamos a precisar el siguiente resultado:

Lema 3.3.2. *Para cada subconjunto abierto no vacío $W \subset \operatorname{Int} X$ y para cada $\epsilon > 0$, existe un subconjunto medible $Z \subset W$ tal que $\mu(Z) < \epsilon$, $W - Z$ es abierto y se cumple la siguiente propiedad:*

(*) Existe una familia Φ no numerable de homeomorfismos $\varphi : X \to X$ tal que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in (X - W) \cup Z$, que verifican

$$\varphi(x) \neq \psi(x) \text{ para todo } x \in W - Z, \text{ siempre que } \varphi, \psi \in \Phi \text{ y } \varphi \neq \psi.$$

Demostración. Sean $C_1, \ldots, C_r$ n-cubos abiertos disjuntos contenidos en W de forma tal que

$$\mu(W - (C_1 \cup \cdots \cup C_r)) < \epsilon.$$

Fijamos un homeomorfismo $\phi_j : \overline{C_j} \to \overline{B}(0;1)$ $(1 \leq j \leq r)$. Para cada $t \in (0,1)$, sea $\psi_t : \overline{B}(0;1) \to \overline{B}(0;1)$ el homeomorfismo dado por

$$\psi_t(x) = \begin{cases} 2tx, & \text{si } 0 \leq ||x|| \leq \frac{1}{2}; \\ \left(\frac{2t-1}{||x||} - 2t + 2\right) x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq ||x|| \leq 1. \end{cases}$$

Definimos $\varphi_t \in \mathcal{H}(X)$:

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} \phi_j^{-1}(\psi_t(\phi_j(x))), & \text{si } x \in C_j \text{ para algún } 1 \leq j \leq r; \\ x, & \text{si } x \in X - (C_1 \cup \cdots \cup C_r). \end{cases}$$

Es inmediato verificar que el conjunto

$$Z = (W - (C_1 \cup \cdots \cup C_r)) \cup \{\phi_1^{-1}(0), \ldots, \phi_r^{-1}(0)\}$$

y la familia

$$\Phi = \{\varphi_t : t \in (0,1)\}$$

tiene las propiedades buscadas. □

Demostración (del Teorema 3.3.1). Comenzamos considerando para cada $m, k \in \mathbb{N}$,

$$A_{m,k} := \left\{ f \in \mathcal{H}(X) : \mu(F_f \cup F_{f^2} \cup \cdots \cup F_{f^m}) < \frac{1}{k} \right\}.$$

La idea de esta demostración es probar que los conjuntos $A_{m,k}$ son abiertos y densos. Para ello, utilizando el Lema 3.3.2, conseguiremos una sucesión finita de funciones y de conjuntos que preservan la medida de los conjuntos de puntos periódicos y de puntos fijos.

Supongamos que $A_{m,k}$ es no vacío. Dada $f \in A_{m,k}$, podemos encontrar un conjunto abierto U tal que $F_f \cup F_{f^2} \cup \cdots \cup F_{f^m} \subset U$ y $\mu(U) < \frac{1}{k}$. Como $X - U$ es compracto, existe $c > 0$ tal que

$$||f^j(x) - x|| \geq c \text{ para todo } x \in X - U \text{ y para todo } 1 \leq j \leq m.$$

Entonces, si $g \in \mathcal{H}(X)$ está suficientemente cerca de f, $F_g \cup F_{g^2} \cup \cdots \cup F_{g^m} \subset U$ y por lo tanto $g \in A_{m,k}$. Esto prueba que $A_{m,k}$ es abierto.

Claramente, el conjunto de puntos periódicos de cada

$$f \in \bigcap_{m,k} A_{m,k}$$

tiene medida cero. De hecho, como $\mu(F_f \cup F_{f^2} \cup \cdots \cup F_{f^m}) < \frac{1}{k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, se sigue que $\mu(\mathrm{Per}(f, m)) = 0$. Por lo tanto,

$$\mu(\mathrm{Per}(f)) = \mu(\bigcup_{m \geq 1} \mathrm{Per}(f, m)) \leq \sum_{m \geq 1} \mu(\mathrm{Per}(f, m)) = 0.$$

Nos resta ver que cada $A_{m,k}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$. Esto lo veremos por inducción en $m \in \mathbb{N}$. Comenzamos primero asumiendo que ya tenemos el resultado para $m = 1$ o bien para $m \geq 2$ y que $A_{m-1,k}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$ para todo $k \geq 1$. Tenemos que probar que $A_{m,k}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$ para todo $k \geq 1$.

Para esto, fijamos $k \geq 1$, $f \in \mathcal{H}(X)$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis inductiva, existe una función $g \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$d(g, f) < \frac{\epsilon}{2} \text{ y } \mu(F_g \cup F_{g^2} \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}) < \frac{1}{k}$$

(si $m = 1$, simplemente tomamos $g := f$).

Sea $\eta := \frac{1}{k} - \mu(F_g \cup F_{g^2} \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}) > 0$ y sea $\delta > 0$ tal que

$$\operatorname{diam} g(\overline{B}(x; \delta) \cap X) < \frac{\epsilon}{2} \text{ para cada } x \in X. \tag{4}$$

Escribimos $B := P(g; m; \operatorname{Int} X)$. Para cada $y \in B$, sea V_y una bola abierta centrada en y, de radio menor a δ tal que $V_y \subset X$ y, para cada $0 \leq i \leq m-1$, los conjuntos

$$g^{-i}(V_y), g^{-i+1}(V_y), \ldots, g^{-i+m-1}(V_y)$$

son disjuntos dos a dos.

Como $(V_y)_{y \in B}$ es un cubrimiento por abiertos de B, podemos extrer un subcubrimiento numerable; digamos

$$B \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} V_{y_s}.$$

Llamamos

$$U_1 := V_{y_1} \text{ y } U_j := V_{y_j} - (\overline{V_{y_1}} \cup \cdots \cup \overline{V_{y_{j-1}}}) \quad (j \geq 2).$$

Entonces los conjuntos U_j son abiertos, disjuntos y

$$\mu\left(B - \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j\right) = 0.$$

Elegimos $t \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(B - (U_1 \cup \cdots \cup U_t)) < \frac{\eta}{2}$.

Achicando los conjuntos U_j si hace falta, podemos encontrar conjuntos abiertos $W_1, \ldots, W_t$ tales que $\overline{W_j} \subset U_j$ $(1 \leq j \leq t)$ y

$$\mu(B - (W_1 \cup \cdots \cup W_t)) < \frac{\eta}{2}.$$

Como $\overline{W_j} \subset V_{y_j}$, se deduce que los conjuntos

$$g^{-i}(\overline{W_j}), g^{-i+1}(\overline{W_j}), \ldots, g^{-i+m-1}(\overline{W_j})$$

son disjuntos dos a dos, para cada $0 \leq i \leq m-1$.

Ahora tomamos $W_1' := W_1$. Por el Lema 3.3.2, existe un conjuntos medible $Z_1 \subset W_1'$ tal que $\mu(Z_1) < \frac{\eta}{2t}$, $W_1' - Z_1$ es abierto y existe una familia no numerable Φ_1 de $\mathcal{H}(X)$ con las propiedades enunciadas en $(*)$.

Escribimos

$$H_1 := (W_1' - Z_1) \cup g^{-1}(W_1' - Z_1) \cup \cdots \cup (g^{-1})^{m-1}(W_1' - Z_1).$$

Claramente, para cada $\varphi \in \Phi_1$,

$$F_{g\circ\varphi} \cup \cdots \cup F_{(g\circ\varphi)^{m-1}} = F_g \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}$$

ya que $\varphi(x) = x$ para todo $x \in (X - W_1') \cup Z_1$ y g^i no tiene puntos fijos en W_1' para $0 \leq i \leq m-1$. De hecho, g^i no tiene puntos fijos en V_{y_1} para $0 \leq i \leq m-1$.

Por la misma razón tenemos que

$$P(g \circ \varphi; m; \operatorname{Int} X - H_1) = P(g; m; \operatorname{Int} X - H_1).$$

Además, como

$$P(g \circ \varphi; m; H_1) \cap P(g \circ \psi; m; H_1) = \varnothing \text{ si } \varphi, \psi \in \Phi_1 \text{ y } \varphi \neq \psi,$$

existe $\varphi_1 \in \Phi_1$ tal que

$$\mu(P(g \circ \varphi_1; m; H_1)) = 0.$$

Definimos $h_1 := g \circ \varphi_1 \in \mathcal{H}(X)$, como antes tenemos que

$$F_{h_1} \cup \cdots \cup F_{(h_1)^{m-1}} = F_g \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}$$

y

$$\begin{aligned} P(h_1; m; \operatorname{Int} X) &= P(g; m; \operatorname{Int} X - H_1) \cup P(h_1; m; H_1) \\ &\subset (B - W_1) \cup Z_1 \cup R_1, \end{aligned}$$

donde $R_1 := P(h_1; m; H_1)$ tiene medida cero.

Ponemos

$$F_1 := H_1 \cup g(W_1' - Z_1) \cup \cdots \cup g^{m-1}(W_1' - Z_1).$$

Así, los conjuntos

$$h_1^{-i}(\overline{W_2} - F_1), h_1^{-i+1}(\overline{W_2} - F_1), \ldots, h_1^{-i+m-1}(\overline{W_2} - F_1)$$

son disjuntos dos a dos, para cada $0 \leq i \leq m-1$.

Luego, existe un conjunto abierto $W_2' \supset \overline{W_2} - F_1$ tal que

$$\overline{W_2'} \subset V_{y_2},\ \overline{W_2'} \cap W_1' = \varnothing,\ W_2' \cap \overline{W_j} = \varnothing \text{ para } 3 \leq j \leq t$$

y para cada $0 \leq i \leq m-1$, los conjuntos

$$h_1^{-i}(\overline{W_2'}), h_1^{-i+1}(\overline{W_2'}), \ldots, h_1^{-i+m-1}(\overline{W_2'}) \text{ son disjuntos dos a dos.}$$

Argumentando como antes, existe un conjunto medible $Z_2 \subset W_2'$ tal que $\mu(Z_2) < \frac{\eta}{2t}$, $W_2' - Z_2$ es abierto, y existe una función $\varphi_2 \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\varphi_2(x) = x \text{ para todo } x \in (X - W_2') \cup Z_2$$

y

$$\mu(P(h_1 \circ \varphi_2; m; H_2)) = 0,$$

donde

$$H_2 := (W_2' - Z_2) \cup h_1^{-1}(W_2' - Z_2) \cup \cdots \cup (h_1^{-1})^{m-1}(W_2' - Z_2).$$

Ahora tomamos $h_2 := h_1 \circ \varphi_2 \in \mathcal{H}(X)$. Luego,

$$F_{h_2} \cup \cdots \cup F_{h_2^{m-1}} = F_{h_1} \cup \cdots \cup F_{h_1^{m-1}}$$

y

$$\begin{aligned} P(h_2; m; \operatorname{Int} X) &= P(h_1; m; \operatorname{Int} X - H_2) \cup P(h_2; m; H_2) \\ &\subset (B - (W_1 \cup W_2)) \cup Z_1 \cup Z_2 \cup R_1 \cup R_2, \end{aligned}$$

donde $R_2 := P(h_2; m; H_2)$ tiene medida cero.

De esta manera, si escribimos

$$F_2 := H_2 \cup h_1(W_2' - Z_2) \cup \cdots \cup h_1^{m-1}(W_2' - Z_2),$$

y consideramos un conjunto abierto $W_3' \supset \overline{W_3} - (F_1 \cup F_2)$ tal que

$$\overline{W_3'} \subset V_{y_3}, W_3' \cap \overline{W_j'} = \varnothing \text{ para } j \in \{1, 2\}, W_3' \cap \overline{W_j} = \varnothing \text{ para } 4 \leq j \leq t$$

y para cada $0 \leq i \leq m-1$, los conjuntos

$$h_2^{-i}(\overline{W_3'}), h_2^{-i+1}(\overline{W_3'}), \ldots, h_2^{-i+m-1}(\overline{W_3'}) \text{ son disjuntos dos a dos.}$$

Continuando con este proceso inductivamente obtenemos una función $h := h_t \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$F_h \cup \cdots \cup F_{(h)^{m-1}} = F_g \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}$$

y

$$P(h; m; \operatorname{Int} X) \subset (B - (W_1 \cup \cdots \cup W_t)) \cup Z_1 \cup \cdots \cup Z_t \cup R_1 \cup \cdots \cup R_t,$$

donde $\mu(Z_j) < \frac{\eta}{2t}$ y $\mu(R_j) = 0$ para todo $1 \leq j \leq t$. Entonces,

$$\mu(F_h \cup \cdots \cup F_{h^m}) = \mu(F_g \cup \cdots \cup F_{g^{m-1}}) + \mu(P(h; m; \operatorname{Int} X)) < (\frac{1}{k} - \eta) + \eta = \frac{1}{k},$$

y en consecuencia, $h \in A_{m,k}$.

Además, como

$$\begin{aligned} &h(x) = g(x) \text{ para todo } x \in X - (W_1' \cup \cdots \cup W_t'), \\ &h(W_j') = g(W_j') \text{ y } W_j' \subset V_{y_j} \quad (1 \leq j \leq t), \end{aligned}$$

se sigue de (4) que $d(h, g) < \frac{\epsilon}{2}$.

Por lo tanto, $d(h, f) < \epsilon$, lo que completa la demostración. □

Capítulo 4

Condiciones Iniciales y Atractores

El objetivo de este capítulo es estudiar la sensibilidad a condiciones iniciales en subconjuntos de X con distintas propiedades. Al mismo tiempo, analizamos la existencia de atractores uniformes y atractores extraños.

4.1. Sensibilidad a Condiciones Iniciales

En esta primera parte, probamos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ no son sensibles a condiciones iniciales en cualquier subconjunto denso en alguna parte de X. Por otra parte, veremos que casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ son sensibles a condiciones iniciales en infinitos subconjuntos no numerables de X que son disjuntos dos a dos, conexos e invariantes por f. Adicionalmente, obtendremos que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, la familia $\{f^k : k \geq 1\}$ es equicontinua en un subconjunto denso G_δ de X.

Definición 4.1.1. *Sea $f \in \mathcal{H}(X)$ y sea $Y \subset X$, decimos que f es sensible a condiciones iniciales en Y si existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in Y$ y $\epsilon > 0$, existe $x \in X$ con $||x - y|| < \epsilon$ y existe $k \geq 1$ de manera tal que*

$$||f^k(x) - f^k(y)|| \geq \delta.$$

Definición 4.1.2. *Decimos que un subconjunto Y de $\mathbb{R}^n$ es denso en alguna parte si $\overline{Y}$ tiene interior no vacío.*

Teorema 4.1.3. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no son sensibles a condiciones inciales en cualquier subconjunto de X que sea cerrado en alguna parte.*

Demostración. Sea $z_1, z_2, \ldots,$ una sucesión densa en $\operatorname{Int} X$. Para cada $r, k \in \mathbb{N}$, sea $A_{r,k}$ el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ para las cuales existe una bola cerrada $B \in \operatorname{Int} X$ y existen números enteros $q \geq 0$ y $m \geq 1$ tales que

(i) $f^q(z_k) \in \operatorname{Int} B$;

(ii) $f^m(B) \subset \operatorname{Int} B$;

(iii) $\operatorname{diam} f^i(B) < \frac{1}{r}$ para $0 \le i \le m-1$.

Supongamos que cada $A_{r,k}$ es no vacío. Fijamos $r, k \in \mathbb{N}$ y tomamos $f \in A_{r,k}$. Como $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico, si $g \in \mathcal{H}(X)$ está suficientemente cerca de f, se verifican las condiciones (i), (ii) y (iii) para g en el lugar de f. Por lo tanto, $A_{r,k}$ es abierto.

Sea $f \in \bigcap_{r,k} A_{r,k}$ una función sensible a condiciones iniciales en un subconjunto $Y \subset X$ denso en alguna parte.

Fijamos $k \ge 1$ tal que $z_k \in \overline{Y}$. Para cada $r \ge 1$, como $f \in A_{r,k}$, existe una bola cerrada $B_r \subset \operatorname{Int} X$ y existen números enteros $q_r \ge 0$ y $m_r \ge 1$ tales que (i), (ii) y (iii) se cumplen con B_r, q_r y m_r en lugar de B, q y m, respectivamente.

Sea $\epsilon_r > 0$ tal que

$$B(z_k;\epsilon_r) \subset X,\ f^{q_r}(B(z_k;\epsilon_r)) \subset B_r \text{ y } \operatorname{diam} f^i(B(z_k;\epsilon_r)) < \frac{1}{r} \text{ para } 0 \le i \le q_r - 1.$$

Entonces,

$$\operatorname{diam} f^i(B(z_k;\epsilon_r)) < \frac{1}{r} \text{ para todo } i \ge 1.$$

Esto contradice el hecho que f es sensible a condiciones iniciales en $\overline{Y}$.

Por último, veamos que cada $A_{r,k}$ es denso en $\mathcal{H}(X)$.

Para probarlo, fijamos $r, k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{H}(X)$, $\epsilon > 0$ y elegimos $0 < \alpha < \frac{1}{r}$. Sea a un punto de acumulación de la sucesión $(f^j(z_k))_{j \ge 0}$ y sea $p \ge 1$ tal que

$$f^p(z_k) \in B(a;\alpha).$$

Eligimos $\gamma > 0$ tal que

$$\overline{B}(f^p(z_k); 2\gamma) \subset B(a;\alpha) \cap \operatorname{Int} X$$

y tomamos un punto $b \in B(f^p(z_k);\gamma) - \operatorname{Orb}(f, z_k)$ tal que $f^s(b) \in B(a;\alpha)$ para algún $s \ge 1$.

Sea $m \ge 1$ el menor número entero tal que

$$f^m(b) \in B(a;\alpha).$$

Sea $\phi \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\phi(f^m(b)) = b$$

y

$$\phi(x) = x \text{ para todo } x \in (X - B(a;\alpha) \cap \operatorname{Int} X) \cup \{z_k, \dots, f^p(z_k)\}.$$

Definimos $g := \phi \circ f \in \mathcal{H}(X)$. Entonces,

$$g(x) = f(x) \text{ si } x \in (X - B(a;\alpha) \cap \operatorname{Int} X) \cup \{z_k, \dots, f^p(z_k)\}$$

y $b \in \operatorname{Per}(g, m)$. Sea $q \ge 0$ el menor número entero tal que

$$g^q(z_k) \in B(b;\gamma).$$

Notar que $q \leq p$. Elegimos una bola B centrada en b de manera que

$$g^q(z_k) \in \operatorname{Int} B \text{ y } B \subset B(b;\gamma).$$

Como $g(b), \ldots, g^{m-1}(b) \notin \overline{B}(b;\gamma)$, existe $\beta > 0$ tal que

$$\overline{B}(b;\gamma), g(\overline{B}(b;\beta)), \ldots, g^{m-1}(\overline{B}(b;\beta)) \text{ son disjuntos dos a dos, } g^m(\overline{B}(b;\beta)) \subset \operatorname{Int} B$$

y

$$\operatorname{diam} g^i(\overline{B}(b;\beta)) < \frac{1}{r} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1.$$

Ahora, sea $\varphi \in \mathcal{H}(X)$ tal que

$$\varphi(B) \subset \overline{B}(b;\beta) \quad \text{y} \quad \varphi(x) = x \text{ para todo } x \in (X - B(b;\gamma)) \cup \{b\}.$$

Entonces, si escribimos $h := g \circ \varphi \in \mathcal{H}(X)$, tenemos que

$$\begin{aligned} &h^q(z_k) = g^q(z_k) \in B, \\ &h^m(B) = h^{m-1}(g(\varphi(B))) \subset g^m(\overline{B}(b;\beta)) \subset \operatorname{Int} B \end{aligned}$$

y

$$\operatorname{diam} h^i(B) \leq \operatorname{diam} g^i(\overline{B}(b;\beta)) < \frac{1}{r} \quad \text{para } 1 \leq i \leq m-1.$$

Además, por construcción $\operatorname{diam} B < \frac{1}{r}$. Así concluímos que $h \in A_{r,k}$.
Si elegimos $\alpha > 0$ es suficientemente pequeño podemos garantizar $d(h,f) < \epsilon$. Esto completa la demostración.

□

Notar que la demostración del Teorema 4.1.3 en realidad establece el siguiente resultado:

Teorema 4.1.4. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$, la familia $\{f^j : j \geq 1\}$ es equicontinua en un subconjunto G_δ denso de X.*

Recordamos que un conjunto G_δ en X es una intersección numerable de conjuntos abiertos en X. La condición de equicontinuidad en nuestro caso se puede enunciar de la siguiente manera:
Para todo $x \in G_\delta$ y para todo $r > 0$ existe un entorno $U_{r,x}$ de x tal que $f^j(U_{r,x}) \subset B(f^j(x);r)$ para todo $j \geq 1$.

Demostración. Sea $f \in \bigcap_{r,k} A_{r,k}$ y sea $\{z_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión densa en $\operatorname{Int} X$ y veamos que $\{f^j : j \geq 1\}$ es una familia equicontinua en un subconjunto G_δ denso de X. Primero verificamos la condición de equicontinuidad en el conjunto $\{z_k\}_{k\geq 1}$ denso en X.
Para cada $r,k \in \mathbb{N}$, sabemos que existe una bola cerrada $B \subset \operatorname{Int} X$ y existen números enteros $q \geq 0$ y $m \geq 1$ tales que

(i) $f^q(z_k) \in \operatorname{Int} B$;

(ii) $f^m(B) \subset \operatorname{Int} B$;

(iii) $\operatorname{diam} f^i(B) < \frac{1}{r}$ para $0 \leq i \leq m-1$.

Fijamos $r, k \in \mathbb{N}$ y tomamos $U_k \subset B$ entorno abierto de z_k.
Al igual que en la demostración anterior, tenemos que

$$\operatorname{diam} f^i(U_k) < \frac{1}{r} \quad \text{si } 0 \leq i \leq m.$$

Como $f^{m+i}(U_k) \subset f^i(B)$ para $0 \leq i \leq m-1$, también obtenemos que

$$\operatorname{diam} f^{m+i}(U_k) < \frac{1}{r} \quad \text{si } 0 \leq i \leq m-1.$$

De esta manera, resulta que $\operatorname{diam} f^i(U_k) < \frac{1}{r}$ para todo $i \geq 0$.
Como $f \in \bigcap_{r,k} A_{r,k}$, este argumento lo podemos repetir para todo $r \geq 1$. Es decir, la familia $\{f^j : j \geq 1\}$ es equicontinua en el conjunto $\{z_k\}_{k \geq 1}$.
Para concluir, consideramos el conjunto abierto

$$B_{r,k} := \{x \in X : \exists\, U_k \text{ entorno abierto de } x \text{ tal que } \operatorname{diam} f^i(U_k) < \frac{1}{r}\, \forall\, i \geq 0\}.$$

Llamamos

$$B := \bigcap_{r \geq 1} \bigcup_{k \geq 1} B_{r,k}.$$

Claramente, B es un conjunto G_δ y como el conjunto $\{z_k\}_{k \geq 1}$ está contenido en B, B es denso en X.

$\square$

Recordemos que un subconjunto Y de X se dice invariante por una función $f \in \mathcal{H}(X)$ si $f(Y) = Y$.
En contraste con el Teorema 4.1.3, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 4.1.5. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ son sensibles a condiciones iniciales en infinitos subconjuntos de $\operatorname{Int} X$ disjuntos dos a dos, los cuales son no numerables, conexos, cerrados e invariantes por f.*

Demostración. Para comenzar, a partir de la demostración de la Proposición 3.2.2 sabemos que para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ existe una sucesión de bolas cerradas disjuntas $B_1, B_2, \ldots \subset X$ tales que

$$f(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Entonces, como la asignación $f \in \mathcal{H}(X) \mapsto f^{-1} \in \mathcal{H}(X)$ es un homeomorfismo, para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ existe una sucesión de bolas cerradas disjuntas $B_1, B_2, \ldots \subset X$ tales que

$$f^{-1}(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Fijamos $f \in \mathcal{H}(X)$ y $j \geq 1$. Por el teorema 3.1.3, podemos asumir que F_f no tiene puntos aislados.

Escribimos

$$F_j := B_j - f^{-1}(\operatorname{Int} B_j) \text{ e } I_j := \bigcap_{r_1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k \geq r} f^{-k}(F_j)}.$$

Claramente, I_j es no vacío, cerrado e invariante por f.

El teorema de la curva de Jordan (Teorema 2.2.5), implica que F_j es conexo.

Como $f^{-1}(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j$,

$$f^{-k}(F_j) \cap f^{-k-1}(F_j) \neq \varnothing \quad \text{para todo } k \geq 1,$$

y por lo tanto, se deduce que $\overline{\bigcup_{k \geq r} f^{-k}(F_j)}$ es conexo para todo $r \geq 1$. Esto implica que I_j es conexo.

Como

$$I_j \subset f^{-2}(B_j) \quad \text{y } F_j \cap f^{-2}(B_j) = \varnothing,$$

se tiene que

$$\delta_j := \operatorname{dist}(I_j, F_j) > 0.$$

Ahora, sea $w \in I_j$. Para cada $\epsilon > 0$, podemos encontrar $y \in F_j$ y $k \geq 1$ de forma tal que

$$||f^{-k}(y) - w|| < \epsilon.$$

Sin embargo,

$$||y - f^k(w)|| \geq \delta_j.$$

Esto prueba que f es sensible a la condiciones iniciales en I_j.

Para probar que I_j es no numerable, basta ver que I_j no es un conjunto unipuntual. Supongamos que $I_j = \{a\}$. Elegimos un punto$x$ $F_f \cap \operatorname{Int}(B_j) - \{a\}$ y tomamos un segmento L que une x con algún punto en $\operatorname{Bd} B_j$ de forma tal que $a \notin L$. Pero como

$$\overline{\bigcup_{k \geq r} f^{-k}(F_j)} \cap L \neq \varnothing \quad \text{para todo } r \geq 1,$$

concluímos que $I_j \cap L \neq \varnothing$. Contradicción.

□

4.2. Existencia de Atractores

En esta última sección, demostramos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen infinitos atractores uniformes disjuntos dos a dos que son conexos y tienen interior no vacío. Por último, probamos que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ no tienen atractores con órbita densa y en particular, no tienen atractores extraños.

Fijemos $f \in \mathcal{H}(X)$ y recordemos algunas definiciones.

Definición 4.2.1. *(i) Un subconjunto A de X no vacío cerrado e invariante se dice atractor si existe un entorno U_0 de A tal que para cada $x \in U_0$ y para cada entorno U de A podemos encontrar $k_{x,U} \geq 1$ tal que*

$$f^k(x) \in U \quad \textit{para todo } k \geq k_{x,U}.$$

(ii) Un subconjunto A de X no vacío cerrado e invariante se dice atractor uniforme si existe un entorno U_0 de A tal que para cada $x \in U_0$ y para cada entorno U de A podemos encontrar $k_U \geq 1$ tal que

$$f^k(U_0) \subset U \quad \textit{para todo } k \geq k_U.$$

El teorema 3.1.2 implica que casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ no tiene atractores finitos. Sin embargo, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.2.2. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ tienen infinitos atractores uniformes $\{A_j\}_{j\in J}$ disjuntos dos a dos con las siguientes propiedades:*

(a) A_j es conexo para todo $j \in J$;

(b) A_j contiene un conjunto perfecto de puntos fijos para todo $j \in J$;

(c) A_j contiene un conjunto abierto no vacío de puntos no periódicos para todo $j \in J$; en particular, A_j tiene interior no vacío (y por lo tanto $\mu(A) > 0$) para todo $j \in J$;

(d) A_j contiene un conjunto no numerable, conexo, cerrado e invariante I tal que f es sensible a las condiciones iniciales en I, para todo $j \in J$.

Demostración. Se sigue de la prueba del teorema 3.1.3, tomando $m = 1$, que casi todas las funciones $g \in \mathcal{H}(X)$ tienen la siguiente propiedad:

(**) Para cada $k \geq 1$, existen finitas bolas cerradas disjuntas $D_1, \ldots, D_r \subset \operatorname{Int} X$ con $g(D_j) \subset \operatorname{Int} D_j$ para $1 \leq j \leq r$, de forma tal que cada $x \in F_g$ tiene un entorno abierto U_x con $\operatorname{diam}(U_x) < \frac{1}{k}$, que contiene al menos dos D_j distintos.

Análogamente, como $\mathcal{H}(X)$ es un grupo topológico y en particular, invertir es un homeomorfismo en $\mathcal{H}(X)$, deducimos que la propiedad $(**)$ también se cumple para casi todas las funciones inversas $g^{-1} \in \mathcal{H}(X)$.

Así, tomamos $f \in \mathcal{H}(X)$ tal que tanto f como f^{-1} verifican $(**)$. Entonces, sabemos existen bolas cerradas disjuntas $B_1, B_2, \ldots \subset \operatorname{Int} X$ tales que

$$f(B_j) \subset \operatorname{Int} B_j \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Fijamos $j \geq 1$ y tomamos

$$A_j := \bigcap_{k=1}^{\infty} f^k(B_j).$$

Claramente, A_j es no vacío, cerrado e invariante por f.

Consideramos $U_0 := \operatorname{Int} B_j$ entorno de A_j y sea U cualquier entorno abierto de A_j. Afirmamos que existe $k_U \geq 1$ tal que

$$f^k(U_0) \subset U \quad \text{para todo } k \geq k_U.$$

Supongamos que no es cierto. Entonces, $f^k(B_j) - U \neq \varnothing$ para todo $k \geq 1$, y así, como $f^k(B_j) \subset f^{k-1}(B_j)$ para todo $k \geq 1$,

$$A_j - U = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left(f^k(B_j) - U \right) \neq \varnothing.$$

Como esto no puede ser, A_j es un atractor uniforme.

A su vez, debido a que $f^k(B_j) \subset f^{k-1}(B_j)$ para todo $k \geq 1$, A_j es conexo. Es decir, se cumple la propiedad (a).

La propiedad (b) es inmediata por el Teorema 3.1.3.

Como f^{-1} satisface $(**)$, existe una bola cerrada $B \subset \operatorname{Int} B_j$ tal que

$$f^{-1}(B) \subset \operatorname{Int} B.$$

Luego, $\operatorname{Int}(B) - f^{-1}(B)$ es un conjunto no vacío abierto contenido en A_j. Afirmamos que $\operatorname{Int}(B) - f^{-1}(B)$ no contiene puntos periódicos de f. Si no fuera el caso, existe $x \in \operatorname{Per}(f, m) \cap \operatorname{Int}(B) - f^{-1}(B)$. En ese caso, tenemos que $f^m(x) \in \operatorname{Int} B$. Entonces, $f^{m-1}(x) \in f^{-1}(B) \subset B$ y por lo tanto, $f^{m-2}(x) \in f^{-1}(B) \subset B$. Así sucesivamente, llegamos a que $x \in f^{-1}(B)$, que es imposible. Esto prueba (c).

La propiedad (d) se sigue de la demostración del Teorema 4.1.5

□

Un problema que ha sido considerado por muchos matemáticos es la existencia de atractores extraños (ver [4], [11] y [17], por ejemplo). En nuestro contexto, nos podemos preguntar si casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen o no un atractor extraño. Vamos a obtener la respuesta en el siguiente Teorema 4.2.3.

Primero, veamos que queremos decir con atractor extraño en nuestro contexto. Sea $f \in \mathcal{H}(X)$, un atractor A se dice extraño si contiene una orbita densa (futura) y si f es sensible a condiciones iniciales en A.

Si combinamos las demostraciones del Teorema 3.1.3 y del Teorema 3.2.9, podemos generalizar la conclusión del Teorema 3.1.2 de la siguiente manera:

Teorema 4.2.3. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no tienen atractores con orbita densa.*

Demostración. Sea $A_{m,k}$, $(m, k \in \mathbb{N})$ definido en la demostración del Teorema 3.1.3. Sea $f \in \mathcal{H}(X)$, tal que

$$f, f^{-1} \in \bigcap_{m,k} A_{m,k}$$

y tal que $\overline{\mathrm{Per}(f)} \supset \Omega_f$.

Sea $a \in X$ y tomamos $A := \overline{\mathrm{Orb}(f, a)}$. Tenemos que probar que A no es un atractor. Tenemos dos posibilidades:

CASO 1. A contiene algún punto periódico de f.

Sea$y \in A$ un punto periódico de f y sea q el período de y. Sea $t \in \mathbb{N}$ tal que

$$\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X,\ f(\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X),\ \ldots,\ f^{q-1}(\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X)$$

son disjuntos dos a dos y

$$\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X,\ f^{-1}(\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X),\ \ldots,\ (f^{-1})^{q-1}(\overline{B}(y; \frac{1}{t}) \cap X)$$

son disjuntos dos a dos.

Dado $j \geq 1$, como $f \in A_{q,jt}$, existe un entorno abierto U_y de y con $\mathrm{diam}(U_y) < \frac{1}{jt}$, que contiene una bola cerrada $D_j \subset X$ tal que $y \notin D_j$,

$$D_j,\ f(D_j),\ \ldots, f^{q-1}(D_j) \text{ son disjuntos dos a dos y } f^q(D_j) \subset \mathrm{Int}(D_j).$$

Como $f^{-1} \in A_{q,k}$ para todo $k \geq 1$, existe una bola cerrada $E_j \subset \mathrm{Int}\, D_j$ tal que

$$E_j,\ f^{-1}(E_j),\ \ldots,\ (f^{-1})^{q-1}(E_j) \text{ son disjuntos dos a dos y } (f^{-1})^q(E_j) \subset \mathrm{Int}\, E_j.$$

Sea $y_j \in \mathrm{Int}\, E_j$ un punto periódico de f con período q. Supongamos que tenemos $f^{i_0}(a) \in E_j$, para algún $i_0 \in \mathbb{Z}$, entonces

$$f^i(a) \in D_j \cup f(D_j) \cup \cdots \cup f^{q-1}(D_j) \text{ para todo } i \geq i_0$$

y

$$f^i(a) \in E_j \cup f^{-1}(E_j) \cup \cdots \cup (f^{-1})^{q-1}(E_j) \text{ para todo } i \leq i_0,$$

lo que contradice el hecho que $y \in A$. Por lo tanto, $y_j \notin A$. Entonces, la sucesión $y_1, y_2, \ldots$ construida cae en $X - A$, que consiste de puntos periódicos de f y converge a $y \in A$. Esto implica que A no es atractor.

CASO 2. A no contiene puntos periódicos de f.

En este otro caso, fijamos un punto $z \in X$ de acumulación de la sucesión $(f^j(a))_{j \geq 0}$. Entonces, $z \in A$ y z es un punto no errante de f.

Como los puntos periódicos de f son densos en el conjunto de puntos no errantes de f, existe una sucesión $(z_j)_{j \geq 1}$ de puntos periódicos de f que converge a z. Como A no contiene puntos periódicos de f, $z_j \in X - A$ para todo $j \geq 1$. Luego, A no puede ser atractor.

□

Corolario 4.2.4. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no tienen atractores extraños.*

Conclusión

A modo de conclusión, incluimos algunos resultados de Bernardes [6], [7] que generalizan los teoremas desarrollados en esta tesis. Naturalmente, los teoremas se pueden extender en diferentes direcciones. Por un lado, podemos considerar que el espacio X es un espacio topólogico más abstracto. Por otro lado, podemos extendernos a funciones de $C(X)$ y no solo homeomorfismos de $\mathcal{H}(X)$ como señalamos en la Observación 3.1.4.

En lo que sigue supongamos que X es una variedad topológica de dimensión n, $n \geq 1$, compacta, metrizable, con (o sin) borde y sea d una métrica compatible con la topología de X. Igual que antes, $C(X)$ denota el espacio de funciones continuas de X a X provisto de la topología de la convergencia uniforme y la expresión "casi todas las funciones en $\mathcal{H}(X)$ tienen la propiedad P" significa que el conjunto de funciones en $\mathcal{H}(X)$ que no satisfacen la propiedad P es de primera categoría en $\mathcal{H}(X)$.

Para comenzar, tenemos la siguiente generalización del Teorema 3.1.3:

Teorema. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, F_{f^m} es un conjunto perfecto y $\mathrm{Per}(f, m)$ es denso en F_{f^m}, para cada $m \geq 1$.*

En particular, casi todas las funciones en $C(X)$ tienen no numerables puntos periódicos de período m, para cada $m \geq 1$.

Por otra parte, el siguiente resultado generaliza el Teorema 3.2.3:

Teorema. *Para casi todas las funciones $f \in C(X)$, el conjunto de puntos no errantes de f es nunca denso en X.*

Sea $\overline{B}(0; 1) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Entonces, tenemos que el siguiente teorema generaliza el Teorema 3.3.1:

Teorema. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0; 1))$, el conjunto de puntos no errantes de f tiene medida de Lebesgue cero.*

Por último, recordemos el Teorema 4.1.4:

Teorema. *Para casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(\overline{B}(0; 1))$, la familia $\{f^j : j \geq 1\}$ es equicontinua en un subconjunto G_δ denso de $\overline{B}(0; 1)$.*

Este resultado lo podemos extender de la siguiente manera:

Teorema. *Casi todas las funciones $f \in \mathcal{H}(X)$ no son sensibles a condiciones iniciales en subconjuntos G_δ densos de X.*

Bibliografía

[1] SJ Agronsky, AM Bruckner, and M Laczkovich. Dynamics of typical continuous functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(2):227–243, 1989.

[2] Ethan Akin. Topological dynamics: A survey. 2007.

[3] I Noel Baker. Fixpoints of polynomials and rational functions. *Journal of the London Mathematical Society*, 1(1):615–622, 1964.

[4] Michael Benedicks and Lennart Carleson. On iterations of 1-ax 2 on (-1, 1). *Annals of Mathematics*, 122(1):1–25, 1985.

[5] Nilson Bernardes Jr. On the dynamics of homeomorphisms on the unit ball of rn. *Positivity*, 3(2):149–172, 1999.

[6] Nilson Bernardes Jr. On the predictability of discrete dynamical systems. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(7):1983–1992, 2002.

[7] Nilson Bernardes Jr. On the predictability of discrete dynamical systems ii. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 133(12):3473–3483, 2005.

[8] Keith Burns and Boris Hasselblatt. The sharkovsky theorem: A natural direct proof. *American Mathematical Monthly*, 118(3):229–244, 2011.

[9] Jan De Vries. *Elements of topological dynamics*, volume 257. Springer Science & Business Media, 2013.

[10] Benjamin Halpern. Homeomorphisms with many recurrent points. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 59(1):159–160, 1976.

[11] Michel Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor. *Communications in Mathematical Physics*, 50(1):69–77, 1976.

[12] Chung Wu Ho. On the homeomorphisms which satisfy the poincare recurrence theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 58(1):272–276, 1976.

[13] Michael V Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 81(1):39–88, 1981.

[14] Rudolf Kurth. *Poincaré-recurrent phase flows.* Southern Illinois University at Edwardsville, Department of Mathematical Studies, 1979.

[15] Elon Lages Lima. *Espaços métricos*, volume 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

[16] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, 55(3):531–534, 1992.

[17] Leonardo Mora and Marcelo Viana. Abundance of strange attractors. *Acta Mathematica*, 171(1):1–71, 1993.

[18] James R Munkres. *Elements of algebraic topology*, volume 7. Addison-Wesley Reading, 1984.

[19] Martín Sambarino. Introducción a los sistemas dinámicos, 2009.

[20] Michael Sears. On ergodic homeomorphisms. *Theory of Computing Systems*, 9(2):109–116, 1975.