UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

EL PROBLEMA DE LA REPRESENTACIÓN EN M-CONJUNTOS

Francisco Antonio Vibrentis

Director: José Luis Castiglioni

18 de marzo de 2016

Agradecimientos

Primero quiero agradecer a mi familia por bancarme siempre en las decisiones que tomé y por el apoyo moral y económico que me brindaron. También agradezco a los Noya Iglesias y a los Yañez por hacerme sentir parte de la familia.

Gracias José Luis por aceptar ser el director de esta tesis y del proyecto que nos espera. Gracias también Román y Ricardo por leer este trabajo.

Agradezco al programa de Becas Bicentenario, por permitirme dedicarme integramente al estudio estos últimos años, y al CONICET por darme la posibilidad de seguir estudiando. Agradezco también a la gente del CBC que me hizo crecer como docente.

Gracias a todos los compañeros de la facu con los que compartimos buenos y malos momentos. Gracias Gastón, Mauri, Anita, Mariela, Euge, Mer, Lucho, Bru, Nati, Aye, Sofi, Namis, Javi, Nahuel, Germán, Juanita y en especial, por acompañarme más de cerca, gracias Mel, Batman y Fede.

Gracias Gallo, Conde, Skapa, Mauro y Jemi por aguantar mis locuras. Gracias a Gaby y Mauro por los asados. Gracias Her por nuestras charlas. Gracias Cuesta, Ger, Necu, Diego, Maita, Lau, Nati, Caro, Meli y sobre todo a Húngaro por los momentos que compartimos.

Te agradezco infinitamente Noe, por ser mi compañera de vida, por todo el amor que me das y porque una vez me dijiste: *Creo en tus proyectos.*

Índice general

Introducción

Block y Pigozzi introducen el concepto de sistemas deductivos algebrizables en [Blo89]. Varias condiciones equivalentes surgen de este y otros trabajos, como por ejemplo [Gal09]. En un intento para abstraer esta noción a un marco más general para unificar su estudio, Block y Jónsson introducen el concepto de los $\mathcal{M}$-*conjuntos* en [Blo06]. Aquí se abstrae la idea del monoide de sustituciones en un leguaje finitario, como un monoide fijo actuando sobre un conjunto.

Al transladar la idea de ser algebrizable a este marco, dejan de valer las equivalencias entre las condiciones que caracterizan la algebrabilidad. De aquí surge el problema de la representación, que consiste en determinar qué condiciones debe cumplir un $\mathcal{M}$-*conjunto* para tener la propiedad de la representación (abreviada como REP), la cual describimos a continuación. Un $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$ tiene la REP si para todo $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{S}$ y todo par de operadores de clausura estructurales, C sobre $\mathbb{R}$ y D sobre $\mathbb{S}$, se tiene que toda representación estructural de C en D es inducida por una transformación estructural de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$.

En el capítulo 1 veremos definiciones, notaciones y propiedades generales de funciones residuadas, operadores de clausura, teoría de categorías y sistemas deductivos. En el capítulo 2 planteamos el problema de la representación en el marco de los $\mathcal{M}$-*conjuntos* y exponemos su origen.

En la primera sección del capítulo 3, veremos como Blok y Jónsson demuestran en [Blo06], que los $\mathcal{M}$-*conjuntos* regulares ($\mathcal{M}$-*conjuntos* con base) tienen la REP. Luego, en la segunda sección, veremos que los $\mathcal{M}$-*conjuntos* con variable graduada también tienen la REP. Esta condición suficiente, más débil que la anterior, fue probada por Gil-Férez en [Gil11].

En el capítulo 4 veremos como Galatos y Tsinakis plantean y resuelven el problema de la representación en la categoría de los módulos sobre un retículo residuado completo $\mathcal{A}$ o $\mathcal{A}$-*módulos*. Para esto, muestran en [Gal09], que los objetos de esta categoría que tienen la REP son exactamente los onto-proyectivos, que coiciden con los proyectivos por un resultado de [Gil09]. Por último, en el capítulo 5, veremos como en [Fon15], Font y Moraschini resuelven completamente el problema de la representación en su contexto original. Para esto, introducen los $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, y muestran que un $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$ tiene la REP como $\mathcal{M}$-*conjunto* si y sólo si tiene la REP como $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Funciones residuadas

Definición 1.1.1. *Un **retículo** $\mathcal{R}$ es un conjunto parcialmente ordenado $\langle R, \leqslant \rangle$ tal que dados dos elementos x e y en R, existen*

$$x \vee y := sup\{x, y\} \quad y \quad x \wedge y := inf\{x, y\}.$$

*Decimos que $\mathcal{R}$ es **completo** si existen supremos e ínfimos arbitrarios. Un elemento x de un retículo completo $\mathcal{R}$ se dice **compacto**, si para todo subconjunto $M \subset R$ tal que $x \leqslant \bigvee M$, existe un subconjunto finito $N \subseteq M$ tal que $x \leqslant \bigvee N$. Decimos que un retículo completo es **algebraico** si todo elemento es supremo de compactos.*

Definición 1.1.2. *Dados dos conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ y una función entre sus conjuntos subyacentes $f : R \to S$, decimos que f es **residuada** si existe $f^+ : S \to R$ tal que:*

$$f(x) \leqslant y \ \Leftrightarrow \ x \leqslant f^+(y)$$

para todo $x \in R$, $y \in S$. En ese caso, decimos que f^+ es el residuo de f.

Observación 1.1.3. Si $f : R \to S$ es residuada, su residuo f^+ es único y se puede expresar:

$$f^+(y) = max\{x \in R : f(x) \leqslant y\}$$

para todo $y \in S$.

Observación 1.1.4. Que $f : R \to S$ sea residuada con residuo f^+, es equivalente a que f y f^+ sean monótonas y que se cumpla que $x \leqslant f^+f(x)$ para todo $x \in R$ y $ff^+(y) \leqslant y$ para todo $y \in S$.

En efecto, supongamos que f es residuada. Sea $x \in R$. Como $f(x) \leqslant f(x)$, entonces $x \leqslant f^+f(x)$. Sea $y \in S$. Como $f^+(y) \leqslant f^+(y)$, se tiene que $ff^+(y) \leqslant y$.

Veamos que f es monótona. Sean $x, x' \in R$ tal que $x \leqslant x'$. Por lo que vimos antes, $x \leqslant x' \leqslant f^+f(x')$. Como f es residuada, entonces $f(x) \leqslant f(x')$.

De manera similar, veamos que f^+ es monótona. Sean $y, y' \in S$ tal que $y \leqslant y'$. Por lo que vimos antes, $ff^+(y) \leqslant y \leqslant y'$, y como f es residuada, $f^+(y) \leqslant f^+(y')$.

Veamos ahora el recíproco. Sean $x \in R$ e $y \in S$. Supongamos que $f(x) \leqslant y$. Como f^+ es monótona, $f^+f(x) \leqslant f^+(y)$. Además, sabemos que $x \leqslant f^+f(x)$, de donde se sigue que $x \leqslant f^+(y)$.

Supongamos que $x \leqslant f^+(y)$. Como f es monótona, entonces $f(x) \leqslant ff^+(y) \leqslant y$. Resulta que f es residuada con residuo f^+.

Observación 1.1.5. Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son retículos completos, las funciones residuadas $f : R \to S$ son exactamente las funciones que preservan supremos arbitrarios, y sus residuos preservan ínfimos arbitrarios.

En efecto, supongamos que f residuadada, en particular es monótona, entonces

$$x_j \leqslant \bigvee_{i\in I} x_i \ \forall j \ \Rightarrow \ f(x_j) \leqslant f(\bigvee_{i\in I} x_i) \ \forall j \ \Rightarrow \ \bigvee_{j\in I} f(x_j) \leqslant f(\bigvee_{i\in I} x_i).$$

Por otro lado,

$$f(x_j) \leqslant \bigvee_{i\in I} f(x_i) \ \forall j \ \Rightarrow \ x_j \leqslant f^+(\bigvee_{i\in I} f(x_i)) \ \forall j \ \Rightarrow$$

$$\bigvee_{i\in I} x_j \leqslant f^+(\bigvee_{i\in I} f(x_i)) \ \Rightarrow \ f(\bigvee_{i\in I} x_j) \leqslant \bigvee_{i\in I} f(x_i).$$

Supongamos ahora que f preserva supremos arbitrarios. Definimos $f^+ : S \to R$ como $f^+(y) = \bigvee\{z \in R : f(z) \leqslant y\}$. Entonces

$$f(x) \leqslant y \ \Rightarrow \ x \leqslant \bigvee\{z \in R : f(z) \leqslant y\} = f^+(y) \quad \text{y}$$

$$x \leqslant f^+(y) \ \Rightarrow \ f^+(y) = f^+(y) \vee x \ \Rightarrow \ ff^+(y) = ff^+(y) \vee f(x) \ \Rightarrow$$
$$f(x) \leqslant ff^+(y) = f(\bigvee\{z \in R : f(z) \leqslant y\}) = \bigvee\{f(z) \in R : f(z) \leqslant y\} = y.$$

Lema 1.1.6. *Dados dos retículos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ y una función residuada $f : R \to S$, se tiene que $f(f^+f) = f$ y $f^+(ff^+) = f^+$.*

Demostración. Sea $x \in R$. Como $f^+f(x) = f^+f(x)$, $f(f^+f(x)) \leqslant f(x)$. Además, $f(x) = f(x)$, y por lo tanto $x \leqslant f^+f(x)$ y $f(x) \leqslant f(f^+f(x))$. La otra igualdad se demuestra de manera análoga. □

Lema 1.1.7. *Sea $f : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ residuada. Son equivalentes:*

1. *f es inyectiva;*

2. $f^+f = id_R$*;*

3. f^+ *es sobreyectiva.*

También son equivalentes:

1. f *es sobreyectiva;*

2. $ff^+ = id_S$*;*

3. f^+ *es inyectiva.*

En particular, si f *es biyectiva,* f^+ *es residuada y es la inversa de* f*.*

Demostración. Si se cumple $f^+f = id_R$, es inmediato que f es inyectiva y f^+ es sobreyectiva. Supongamos que f es inyectiva. Supongamos que existe $x \in R$ tal que $f^+f(x) \neq x$, entonces $f(f^+f(x)) \neq f(x)$, lo cual es absurdo por el Lema 1.1.6. Supongamos ahora que f^+ es sobreyectiva. Para cada $x \in R$ existe $y \in S$ tal que $f^+(y) = x$, entonces $f^+f(x) = f^+f(f^+(y)) = f^+(y) = x$ por el Lema 1.1.6. De forma análoga se ven las otras equivalencias.

Si f es biyectiva, $f^+f = id_R$ y $ff^+ = id_S$. Veamos que f es el residuo de f^+. Sean $x \in R$ e $y \in S$

$$f^+(y) \leqslant x \;\Leftrightarrow\; f^+(y) \leqslant f^+f(x) \;\Leftrightarrow\; ff^+(y) \leqslant f(x) \;\Leftrightarrow\; y \leqslant f(x).$$

□

Observación 1.1.8. Sean $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ retículos, y $f : R \to S$ y $g : S \to T$ funciones residuadas. Entonces $id_R^+ = id_R$ y $(gf)^+ = f^+g^+$. En efecto, sean $x, y \in R$, entonces $id_R(x) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant id_R(y)$. Luego, $id_R^+ = id_R$. Sean $x \in R$ y $z \in T$, entonces $gf(x) \leqslant z \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant g^+(z) \;\Leftrightarrow\; x \leqslant f^+g^+(z)$.

Dado un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{R} = \langle R, \leqslant \rangle$, podemos considerar el orden opuesto $\leqslant^{op}$, definido como $x \leqslant^{op} y \;\Leftrightarrow\; y \leqslant x$ para todo $x, y \in R$. Entonces, se tiene un conjunto parcialmente ordenado $\mathcal{R}^{op} := \langle R, \leqslant^{op} \rangle$. En particular, $\mathcal{R}$ es retículo completo si y sólo si $\mathcal{R}^{op}$ lo es.

Observación 1.1.9. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ retículos. Si $f : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ es una función residuada con residuo f^+, entonces $f^+ : \mathcal{R}^{op} \to \mathcal{S}^{op}$ es una función residuada con residuo f, ya que para todo $x \in R$ e $y \in S$

$$f^+(y) \leqslant^{op} x \;\Leftrightarrow\; x \leqslant f^+(y) \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; y \leqslant^{op} f(x).$$

Definición 1.1.10. *Dados los conjuntos parcialmente ordenados $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$, decimos que una función $*: R \times S \to T$ es residuada, si existen funciones $\backslash : R \times T \to S$ y $/ : T \times S \to R$ tales que:*

$$r * s \leqslant t \;\Leftrightarrow\; s \leqslant r\backslash t \;\Leftrightarrow\; r \leqslant t/s$$

para todo $r \in R$, $s \in S$ y $t \in T$.

Observación 1.1.11. Que $* : R \times S \to T$ sea residuada es equivalente a que para todo $r \in R$ y $s \in S$, las funciones $*_r : S \to T$ y $*_s : R \to T$, con $*_r(s) = r * s$ y $*_s(r) = r * s$, sean residuadas.

Observación 1.1.12. Si $* : R \times S \to T$ es residuada, las funciones $*_r$ y $*_s$ de la observación anterior también son residuadas, y por lo tanto son monótonas. Luego,

$$r \leqslant r' \;\Rightarrow\; r * s \leqslant r' * s$$

$$s \leqslant s' \;\Rightarrow\; r * s \leqslant r * s'$$

para todo $r, r' \in R$ y $s, s' \in S$.

1.2. Operadores de clausura y categorías

Definición 1.2.1. *Un **operador de clausura** sobre un conjunto parcialmente ordenado $\langle R, \leqslant \rangle$, es una función $C : R \to R$ tal que:*

1. *$x \leqslant C(x)$;*
2. *$CC(x) = C(x)$;*
3. *$C(x) \leqslant C(y)$, si $x \leqslant y$;*

para todo $x, y \in R$.

Lema 1.2.2. *Dados dos retículos $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ y una función residuada $f : R \to S$, $f^+ f : R \to R$ es un operador de clausura.*

Demostración. Veamos que se cumpen 1-3 de la definición anterior:

1. Por la Observación 1.1.4, vale que $x \leqslant f^+ f(x)$, para todo $x \in R$.
2. Por el item anterior $f^+ f(x) \leqslant f^+ f(f^+ f(x))$. Por otro lado, tenemos que $f^+ f(x) \leqslant f^+ f(x)$, entonces $f(f^+ f(x)) \leqslant f(x)$. Como f^+ es monótona, $f^+ f(f^+ f(x)) \leqslant f^+ f(x)$. Luego, $f^+ f(x) = f^+ f(f^+ f(x))$, para todo $x \in R$.
3. Si $x \leqslant y$, vale que $f^+ f(x) \leqslant f^+ f(y)$, ya que f y f^+ son monótonas.

$\square$

Definición 1.2.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Decimos que P es un objeto* ***proyectivo*** *de $\mathcal{C}$, si para cualesquiera objetos Q y R de $\mathcal{C}$ y cualesquiera morfismos $\beta : Q \to R$ y $\gamma : P \to R$, con β epimorfismo, existe un (no necesariamente único) morfismo $\alpha : P \to Q$ tal que $\gamma = \beta\alpha$, es decir, el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & Q \arrow[d, two heads, "\beta"] \\ & R \end{tikzcd}$$

Si $\mathcal{C}$ es una categoría concreta, decimos que P es un objeto ***onto-proyectivo*** *si en la definición anterior pedimos que β sea suryectiva.*

Definición 1.2.4. *Decimos que un morfismo $r : S \to R$ en una categoría $\mathcal{C}$, es una* ***retracción*** *si existe un morfismo $f : R \to S$, tal que $rf = id_R$. En ese caso decimos que R es un* ***retracto*** *de S.*

Definición 1.2.5. *Dados objetos R_i con $i \in I$ en una categoría $\mathcal{C}$, un* ***coproducto*** *de los R_i es un objeto $\coprod_{i \in I} R_i$ junto con morfismos $\pi_i : R_i \to \coprod_{i \in I} R_i$, tal que para todo objeto S con morfismos $f_i : R_i \to S$, existe un único $f : \coprod_{i \in I} R_i \to S$ tal que $f\pi_i = f_i$.*

$$\begin{tikzcd} & R_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \coprod_{i \in I} R_i \arrow[rr, dashed, "\exists! f"] & & S \end{tikzcd}$$

Observación 1.2.6. Dada una función $f : \mathcal{P}(R) \to S$ y $x \in R$, escribiremos $f(x)$ para indicar $f(\{x\})$.

1.3. Sistemas deductivos

Un **lenguaje proposicional** es un conjunto $\mathcal{L}$ de conectivos proposicionales. Las **$\mathcal{L}$-fórmulas** o simplemente **fórmulas**, son construidas inductivamente a partir de un conjunto infinito numerable Va de variables proposicionales. Notamos $Fm_{\mathcal{L}}$ (o simplemente Fm si el lenguaje está sobrentendido) al conjunto de todas las $\mathcal{L}$-fórmulas. Una función $\sigma : Va \to Fm$ se extiende de forma natural a una función de Fm en si mismo, también notada σ, que asigna a una fórmula ϕ, la que se obtiene al reemplazar cada una de sus variables p por $\sigma(p)$. Una tal función σ se denomina una **sustitución**.

Una **relación de consecuencia** $\vdash$ es una relación entre subconjuntos y elementos de Fm que cumple que para todo $\Gamma, \Delta \subseteq Fm$ y $\varphi, \psi \in Fm$:

1. $\varphi \in \Gamma \ \Rightarrow\ \Gamma \vdash \varphi$;

2. $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Gamma \subseteq \Delta \ \Rightarrow\ \Delta \vdash \varphi$;

3. $\Gamma \vdash \varphi$ y $\Delta \vdash \psi$ para todo $\psi \in \Gamma \ \Rightarrow\ \Delta \vdash \varphi$.

Además decimos que es **finitaria** si cumple:

4. $\Gamma \vdash \varphi \ \Rightarrow\ \Gamma' \vdash \varphi$ para algún $\Gamma' \subseteq \Gamma$;

y es **estructural** si cumple:

5. $\Gamma \vdash \varphi \ \Rightarrow\ \sigma(\Gamma) \vdash \sigma(\varphi)$.

Llamamos **operador de consecuencia** Cn a cualquier función de las partes de Fm en si misma que cumple:

1. $\Gamma \subseteq Cn(\Gamma)$;

2. $\Gamma \subseteq \Delta \ \Rightarrow\ Cn(\Gamma) \subseteq Cn(\Delta)$;

3. $Cn(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\Gamma)$.

Como antes, decimos que es **finitario** si cumple:

4. $Cn(\Gamma) \subseteq \bigcup_{\Gamma' \subseteq \Gamma \text{ finito}} Cn(\Gamma')$;

y es **estructural** si cumple:

5. $\sigma(Cn(\Gamma)) \subseteq Cn(\sigma(\Gamma))$.

Tener una relación de consecuencia es equivalente a tener un operador de consecuencia. Dada una relación de consecuencia $\vdash$ podemos definir un operador de consecuencia Cn de la siguiente forma:

$$\Gamma \vdash \varphi \ \Leftrightarrow\ \varphi \in C(\Gamma)$$

para todo $\varphi \in Fm$ y $\Gamma \subseteq Fm$. De la misma forma podemos definir una relación de consecuencia a partir de un operador de consecuencia.

Decimos que $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ es un **sistema deductivo**, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación de consecuencia estructural y finitaria. Alternativamente podemos definir un sistema deductivo mediante el operador de consecuencia estructural y finitario equivalente $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, Cn_{\mathcal{S}} \rangle$.

Llamamos **teorías** a los subconjuntos T de Fm que cumplen que $Cn_{\mathcal{S}}(T) = T$ y denotamos $Th\mathcal{S}$ al conjunto de todas las teorías. Sea $\mathbf{Th}\mathcal{S} = \langle Th\mathcal{S}, \bigcap, \bigcup^{Cn_{\mathcal{S}}} \rangle$, donde $\bigcup_{i \in I}^{Cn_{\mathcal{S}}} T_i = Cn_{\mathcal{S}}(\bigcup_{i \in I} T_i)$. $\mathbf{Th}\mathcal{S}$ es un retículo completo ya que $Th\mathcal{S}$ es cerrado por intersecciones arbitrarias.

Una **$\mathcal{L}$-ecuación** o simplemente **ecuación**, es una expresión formal $\alpha \approx \beta$, donde α y β son fórmulas. Denotamos Eq al conjunto de ecuaciones.

Una $\mathcal{L}$-álgebra $\mathbf{A}$ es un par $\langle A, f^{\mathbf{A}} \rangle_{f \in \mathcal{L}}$ donde A es un conjunto no vacío llamado el universo de $\mathbf{A}$, y $f^{\mathbf{A}} : A^k \to A$ es una función para cada conectivo $f \in \mathcal{L}$ de aridad k.

Dada una $\mathcal{L}$-álgebra $\mathbf{A}$, una interpretación de $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ en $\mathbf{A}$ es una función $h : Fm \to A$ tal que $h(f(\alpha_1, ..., \alpha_k)) = f^{\mathbf{A}}(h(\alpha_1), ..., h(\alpha_k))$ para todo conectivo lógico f de rango k, para todo $\alpha_i \in Fm$. Decimos que h **satisface la ecuación** $\alpha \approx \beta$, si $h(\alpha) = h(\beta)$, y decimos que h **satisface un conjunto** Y **de ecuaciones**, si h satisface cada ecuación de Y.

Sean $Y \subseteq Eq$ y $\alpha \approx \beta \in Eq$. Para una $\mathcal{L}$-álgebra $\mathbf{A}$, escribimos $Y \vDash_{\mathbf{A}} \alpha \approx \beta$ si toda interpretación de Fm en $\mathbf{A}$ que satisface Y, también satisface $\alpha \approx \beta$. Para una clase $\mathbf{K}$ de $\mathcal{L}$-álgebras escribimos $Y \vDash_{\mathbf{K}} \alpha \approx \beta$ si $Y \vDash_{\mathbf{A}} \alpha \approx \beta$ para todo $\mathbf{A} \in \mathbf{K}$. La relación $\vDash_{\mathbf{K}}$ es una relación de consecuencia estructural, donde entendemos por esto que si $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \alpha \approx \beta$, entonces $\sigma(\Gamma) \vDash_{\mathbf{K}} \sigma(\alpha) \approx \sigma(\beta)$ para toda sustitución σ.

Para una clase $\mathbf{K}$ de $\mathcal{L}$-álgebras, $Y \subseteq Eq$, definimos $Cn_{\mathbf{K}}(Y) = \{\alpha \approx \beta \in Eq : Y \vDash_{\mathbf{K}} \alpha \approx \beta\}$. El operador $Cn_{\mathbf{K}}$ es un operador de clausura estructural.

Un **secuente** es una expresión de la forma $\Gamma \rhd \Delta$, donde $\Gamma = \langle \gamma_1, ..., \gamma_n \rangle$ y $\Delta = \langle \delta_1, ..., \delta_m \rangle$ son secuencias finitas de fórmulas. La traza de $\Gamma \rhd \Delta$ es el par ordenado que indica en cada componente la cantidad de fórmulas de cada secuencia, $tr(\Gamma \rhd \Delta) = \langle n, m \rangle \in \omega^2$. Sea $Q \subseteq \omega^2$, definimos entonces Seq^Q como el conjunto de secuentes de traza en Q.

Capítulo 2

El problema de la representación

2.1. El problema de la representación en M-conjuntos

En [Blo89], Blok y Pigozzi introducen el concepto de sistemas deductivos algebrizables. En [Gal09, Corolario 2.2], Galatos y Tsinakis muestran una caracterización equivalente, que presentamos a continuación.

Un sistema deductivo $\mathcal{S}$ es **algebrizable** cuando existen funciones $\tau : \mathcal{P}(Fm) \to \mathcal{P}(Eq)$ y $\rho : \mathcal{P}(Eq) \to \mathcal{P}(Fm)$ que aplican conjuntos finitos en finitos, conmutan con las sustituciones, preservan uniones y tal que existe una clase de $\mathcal{L}$-álgebras $\mathbf{K}$ que cumplen:

A1. $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\tau(\Gamma) \models_{\mathbf{K}} \tau(\varphi)$

A2. $\alpha \approx \beta \Dashv\models_{\mathbf{K}} \tau\rho(\alpha \approx \beta)$

para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq Fm$ y $\alpha \approx \beta \in Eq$.

Por la Observación 1.1.5, que ρ y τ preserven uniones, equivale a que sean residuadas respecto del orden parcial de la inclusión de conjuntos de $\mathcal{P}(Fm)$ y $\mathcal{P}(Eq)$; ya que los retículos $\langle \mathcal{P}(Fm), \subseteq \rangle$ y $\langle \mathcal{P}(Eq), \subseteq \rangle$ son completos.

Podemos reescribir las condiciones **A1** y **A2** en términos de los operadores de consecucuencia como:

A1'. $Cn_{\mathcal{S}} = \tau^{+} Cn_{\mathbf{K}} \tau$

A2'. $Cn_{\mathbf{K}} = Cn_{\mathbf{K}} \tau\rho$

En efecto, veamos que **A1** implica **A1'**. Por definición, $\varphi \in Cn_{\mathcal{S}}$ si y sólo si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$. Por **A1**, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\tau(\Gamma) \models_{\mathbf{K}} \tau(\varphi)$, que por definición equivale a que $\tau(\varphi) \in Cn_{\mathbf{K}}(\tau(\Gamma))$. Como τ es residuada, esto es lo mismo que $\{\varphi\} \subseteq \tau^{+} Cn_{\mathbf{K}}(\tau(\Gamma))$, es decir, $\varphi \in \tau^{+} Cn_{\mathbf{K}}(\tau(\Gamma))$.

Veamos que **A1'** implica **A1**. Por definición, $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y sólo si $\varphi \in Cn_{\mathcal{S}}(\Gamma)$. Por **A1'**, esto último equivale a que $\varphi \in \tau^{+}Cn_{\mathbf{K}}\tau(\Gamma)$, que es lo mismo que $\{\varphi\} \subseteq \tau^{+}Cn_{\mathbf{K}}\tau(\Gamma)$. Usando que τ es residuada, $\tau(\{\varphi\}) \subseteq Cn_{\mathbf{K}}\tau(\Gamma)$, lo que equivale a que $\tau(\varphi) \in Cn_{\mathbf{K}}\tau(\Gamma)$, es decir, $\tau(\Gamma) \vDash_{\mathbf{K}} \tau(\varphi)$.

Veamos ahora que **A2** implica **A2'**. Sea $\delta \in \Gamma$. Por **A2** $\tau\rho(\delta) \mathrel{=\!\mid\!\vDash_{\mathbf{K}}} \delta$, entonces $\tau\rho(\Gamma) \mathrel{=\!\mid\!\vDash_{\mathbf{K}}} \Gamma$. Por definición, $\epsilon \in Cn_{\mathbf{K}}(\Gamma)$ si y sólo si $\Gamma \vDash_{\mathbf{K}} \epsilon$. Por lo visto antes, esto último equivale a que $\tau\rho(\Gamma) \vDash_{\mathbf{K}} \epsilon$, es decir, $\epsilon \in Cn_{\mathbf{K}}(\tau\rho(\Gamma))$.

Por último, veamos que **A2'** implica **A2**. Sea $\epsilon \in Eq$. Como $\epsilon \in Cn_{\mathbf{K}}(\{\epsilon\}) = Cn_{\mathbf{K}}(\tau\rho(\epsilon))$, entonces $\tau\rho(\epsilon) \vDash_{\mathbf{K}} \epsilon$. Ahora, como $\tau\rho(\epsilon) \in Cn_{\mathbf{K}}(\tau\rho(\epsilon)) = Cn_{\mathbf{K}}(\{\epsilon\})$, se tiene que $\epsilon \vDash_{\mathbf{K}} \tau\rho(\epsilon)$.

Un resultado importante de [Blo89], es el Teorema 3.7 que caracteriza a los sistemas deductivos algebrizables.

Teorema 2.1.1. *[Blo89, Teorema 3.7] Un sistema deductivo $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ es algebrizable si y sólo si existe una clase de $\mathcal{L}$-álgebras $\boldsymbol{K}$ tal que $\vDash_{\boldsymbol{K}}$ es finitaria, y un isomorfismo $\Phi : \boldsymbol{Th\mathcal{S}} \to \boldsymbol{ThK}$ que conmuta con las sustituciones.*

Observación 2.1.2. El hecho que Φ conmute con las sustituciones es equivalente a que $\Phi(Cn_{\mathcal{S}}\sigma) = Cn_{\mathbf{K}}(\sigma\Phi)$ para toda sustitución σ. En efecto, si Φ conmuta con las sustituciones, dado $T \in Th\mathcal{S}$, se tiene que

$$\Phi(Cn_{\mathcal{S}}\sigma(T)) = Cn_{\mathbf{K}}(\Phi\sigma(T)) = Cn_{\mathbf{K}}(\sigma\Phi(T)).$$

Por otra parte, si vale que $\Phi(Cn_{\mathcal{S}}\sigma) = Cn_{\mathbf{K}}(\sigma\Phi)$, entonces, dado $T \in Th\mathcal{S}$, como $Cn_{\mathcal{S}}$ y $Cn_{\mathbf{K}}$ son estructurales, resulta que

$$\Phi(\sigma(T)) = \Phi(\sigma Cn_{\mathcal{S}}(T)) = \Phi(Cn_{\mathcal{S}}\sigma(T)) = Cn_{\mathbf{K}}(\sigma\Phi(T)) = \sigma Cn_{\mathbf{K}}(\Phi(T)) = \sigma(\Phi(T)).$$

En [Blo06], Blok y Jónsson introducen la noción de $\mathcal{M}$-*conjuntos* que vamos a presentar a continuación, como marco para la generalización de la definición de lógica algebrizable.

Como el conjunto de sustituciones en el lenguaje $\mathcal{L}$ junto con la operación de composición forman un monoide que actúa por evaluación sobre el conjunto de fórmulas en $\mathcal{L}$, podemos generalizar esto a un monoide fijo actuando sobre un conjunto.

Definición 2.1.3. *Dado un monoide $\mathcal{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$, un $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{R} = \langle R, \star_{\mathbb{R}}\rangle$ es un conjunto R junto con una función $\star_{\mathbb{R}} : M \times R \to R$, llamada la acción del monoide $\mathcal{M}$ sobre $\mathbb{R}$, que cumple:*

1. $(\sigma \cdot \sigma') \star_{\mathbb{R}} x = \sigma \star_{\mathbb{R}} (\sigma' \star_{\mathbb{R}} x)$
2. $1 \star_{\mathbb{R}} x = x$

para todo $\sigma, \sigma' \in M$ *y* $x \in R$.

Observación 2.1.4. Dado $X \subseteq R$ y $\sigma \in M$, notamos $\sigma \star_{\mathbb{R}} X := \{\sigma \star_{\mathbb{R}} x : x \in X\}$. Se cumplen las mismas condiciones de la definición anterior:

1. $(\sigma \cdot \sigma') \star_{\mathbb{R}} X = \sigma \star_{\mathbb{R}} (\sigma' \star_{\mathbb{R}} X)$
2. $1 \star_{\mathbb{R}} X = X$

para todo $\sigma, \sigma' \in M$ y $X \subseteq R$.

Además, $\star_{\mathbb{R}}$ es monótona con respecto a la inclusión de conjuntos, es decir, para $X \subseteq Y$,

$$\sigma \star_{\mathbb{R}} X = \{\sigma \star_{\mathbb{R}} x : x \in X\} \subseteq \{\sigma \star_{\mathbb{R}} x : x \in Y\} = \sigma \star_{\mathbb{R}} Y.$$

Fijemos un monoide $\mathcal{M} = \langle M, \cdot, 1\rangle$ con el cual trabajaremos a partir de ahora, excepto que se aclare lo contrario.

Ejemplo 2.1.5. El monoide $\mathcal{M}$ induce el $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{M} = \langle M, \cdot\rangle$ donde la acción es la operación del monoide.

Ejemplo 2.1.6. Sean Fm conjunto de fórmulas sobre un lenguaje $\mathcal{L}$, Σ el monoide de sustituciones, Eq el conjunto de ecuaciones sobre Fm y Seq el conjunto de los secuentes sobre Fm. Definimos $\star : \Sigma \times Fm \to Fm$ la operación dada por la evaluación de sustituciones, es decir, $\sigma \star \phi := \sigma(\phi)$, para todo $\phi \in Fm$ y $\sigma \in \Sigma$. De manera similar, definimos $* : \Sigma \times Eq \to Eq$, como $\sigma * (\alpha \approx \beta) := \sigma(\alpha) \approx \sigma(\beta)$, para todo $\alpha \approx \beta \in Eq$ y $\sigma \in \Sigma$. Por último, definimos $\circ : \Sigma \times Seq \to Seq$ como $\sigma \circ (\Gamma \rhd \Delta) := \sigma(\Gamma) \rhd \sigma(\Delta)$, para todo $\Gamma \rhd \Delta \in Seq$ y $\sigma \in \Sigma$, donde $\sigma(\Gamma) = \{\sigma(\alpha) : \alpha \in \Gamma\}$. Como $Id_{Fm} \in \Sigma$ y $\sigma(\sigma'(\phi)) = \sigma\sigma'(\phi)$, se tiene que $\langle Fm, \star\rangle$, $\langle Eq, *\rangle$ y $\langle Seq, \circ\rangle$ son Σ-conjuntos.

También debemos introducir la noción de **operador de clausura estructural**, que generaliza la noción de operador de consecuencia estructural.

Definición 2.1.7. *Un **operador de clausura estructural** sobre un* $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$ *es una función* $C : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ *tal que es un operador de clausura respecto de la inclusión* $\subseteq$*, y tal que para todo* $\sigma \in M$ *y todo* $X \subseteq R$*, se cumple:*

$$\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X).$$

Observación 2.1.8. Un operador de clausura sobre $\mathcal{P}(R)$ cumple $\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$ para todo $X \subseteq R$ si y sólo si $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$ para todo $X \subseteq R$. En efecto, aplicando C a $\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$, y usando que $CC = C$, obtenemos que $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)) \subseteq CC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$.

Por otro lado, tenemos que $X \subseteq C(X)$. Por la Observación 2.1.4, $\sigma \star_{\mathbb{R}} X \subseteq \sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)$. Luego $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X))$. Así obtenemos $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$.

Ahora, supongamos que vale $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$. Como $\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X))$, entonces $\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X) \subseteq C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$.

Observación 2.1.9. Si C es un operador de clausura estructural sobre $\mathbb{R}$, entonces $C(\bigcup_{i\in I} X_i) = C(\bigcup_{i\in I} C(X_i))$, para $X_i \subseteq R$. En efecto, por un lado, $X_i \subseteq C(X_i)$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} X_i \subseteq \bigcup_{i\in I} C(X_i)$. Aplicando C, $C(\bigcup_{i\in I} X_i) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} C(X_i))$.

Por otro lado, $X_j \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$ para todo $j \in I$, luego $C(X_j) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} X_i)$. Entonces, $\bigcup_{j\in I} C(X_j) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} X_i)$. Aplicando C, y usando que $CC = C$, $C(\bigcup_{j\in I} C(X_j)) \subseteq C(\bigcup_{i\in I} X_i)$.

La siguiente definición generaliza la idea de retículo de teorías:

Definición 2.1.10. *Dado un operador de clausura C sobre un conjunto R, denotamos $C[\mathcal{P}(R)]$ a la familia de los subconjuntos C-cerrados de R, o sea $C[\mathcal{P}(R)] = \{C(X) : X \subseteq R\} = \{X \subseteq R : C(X) = X\}$. Así mismo, denotamos $\mathcal{P}(R)_C$ al retículo de los subconjuntos C-cerrados de R con la intersección (arbitraria) de conjuntos como ínfimo, y la clausura de la unión de conjuntos como supremo: $\bigcup_{i\in I}^{C} X_i := C(\bigcup_{i\in I} X_i)$, para I un conjunto de índices arbitrario y $X_i \in C[\mathcal{P}(R)]$. Es decir, $\mathcal{P}(R)_C = \langle C[\mathcal{P}(R)], \bigcap, \bigcup^C \rangle$, es un retículo completo.*

Por último introducimos el concepto de **transformación estructural** inspirada en las funciones entre los conjuntos de partes de fórmulas y de ecuaciones que aparecen en la definición de sistemas deductivos algebrizables.

Definición 2.1.11. *Una **transformación estructural** de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{S}$ es una función $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$, residuada respecto de la inclusión, que cumple que para todo $\sigma \in M$ y todo $X \subseteq R$:*

$$\rho(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = \sigma \star_{\mathbb{S}} \rho(X).$$

Notamos simplemente por $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ a la transformación estructural $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$.

Ahora podemos extender la definición de algebrabilidad a este contexto. Sean dos operadores de clausura estructurales C y D sobre los $\mathcal{M}$-*conjuntos* $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, y sean $\tau : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ y $\rho : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(R)$ dos transformaciones estructurales. Las siguientes condiciones son la traducción de **A1'** y **A2'** al presente contexto:

A1". $C = \tau^+ D\tau$

A2". $D = D\tau\rho$

En [Blo06, Teorema 3.7] se prueba que estas condiciones aseguran que exista un isomorfismo $\Phi : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ tal que $\Phi C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} \Phi X)$ para todo $\sigma \in M$ y $X \subseteq R$. Por [Blo06, Teorema 3.8], este isomorfismo resulta ser la inversa de la restricción de τ^+ a los conjuntos D-cerrados. Así que podemos reescribir la condición **A1"** como $\Phi C = D\tau$. El problema es que el hecho de que exista el isomorfismo Φ, no garantiza que exista una transformación estructural τ que cumpla $\Phi C = D\tau$. Gil-Férez generaliza aún más este problema pidiendo que Φ sea un morfismo inyectivo en vez que un isomorfismo, e introduce la siguiente definición en [Gil11].

Definición 2.1.12. *Sean C y D son operadores de clausura estructurales sobre $\mathcal{M}$-conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente. Decimos que $F : C[\mathcal{P}(R)] \to D[\mathcal{P}(S)]$ es una **representación estructural** de C en D si es residuada y cumple:*

$$X \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; F(X) \subseteq F(Y) \textit{ para todo } X, Y \in C[\mathcal{P}(R)] \quad \textit{y}$$

$$FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(X)) \textit{ para todo } \sigma \in M,\; X \in C[\mathcal{P}(R)].$$

Notamos simplemente por $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ a la representación estructural $F : C[\mathcal{P}(R)] \to D[\mathcal{P}(S)]$.

Observación 2.1.13. Si $F : C[\mathcal{P}(R)] \to C[\mathcal{P}(S)]$ es una representación estructural, como es residuada y los retículos $\mathcal{P}(R)_C$ y $\mathcal{P}(S)_D$ son completos, entonces preserva supremos arbitrarios.

Definición 2.1.14. *Decimos que una representación estructural F de C en D, con C y D operadores de clausura estructurales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, es **inducida por una transformación estructural** $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$, si el siguente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(R) \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "C"'] & \mathcal{P}(S) \arrow[d, "D"] \\ C[\mathcal{P}(R)] \arrow[r, "F"'] & D[\mathcal{P}(S)] \end{tikzcd}$$

La condición **A1"**, dice entonces que F es inducida por τ. Así que el hecho de que una representación estructural sea inducida por una transformación estructural, puede verse como una generalización de la definición de algebrizabilidad concentrándose en una representación en vez que en un isomorfismo.

Definición 2.1.15. *Decimos que un $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{R}$ tiene la **propiedad de la representación** o la **REP** si para todo $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{S}$, todo par de operadores de clausura estructuales, C sobre $\mathbb{R}$ y D sobre $\mathbb{S}$, se tiene que toda representación estructural de C en D, es inducida por una transformación estructural de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$.*

Así surge el problema de la representación, que se pregunta qué condiciones debe cumplir un $\mathcal{M}$-*conjunto* para tener la REP. A lo largo del trabajo veremos varios ejemplos de $\mathcal{M}$-*conjuntos* con la REP. En la siguente sección presentamos un ejemplo de $\mathcal{M}$-*conjunto* si ella.

2.2. M-conjunto sin la REP

Los siguientes resultados los usaremos para demostrar que no toda representación estructural está inducida por una transformación estructural. La siguiente proposición es una adaptación de [Gil11, Proposición 11]:

Proposición 2.2.1. *Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ $\mathcal{M}$-conjuntos, D un operador de clausura estructural sobre $\mathbb{S}$ y $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ una transformación estructural. Entonces $D^\tau := \tau^+ D\tau : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ es un operador de clausura estructural sobre $\mathbb{R}$.*

Demostración. Veamos que $\tau^+ D\tau$ es operador de clausura:

1. Como τ es residuada, por la Observación 1.1.4, τ y τ^+ son monótonas respecto de $\subseteq$. Entonces, dados $X \subseteq Y \subseteq R$, $\tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+ D\tau(Y)$.

2. Sea $X \subseteq R$, $\tau(X) \subseteq D\tau(X)$, entonces $X \subseteq \tau^+ D\tau(X)$.

3. Sea $X \subseteq R$. Por la condición anterior, $\tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+ D\tau\tau^+ D\tau(X)$.

   Por otro lado, $\tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+ D\tau(X)$. Luego $\tau\tau^+ D\tau(X) \subseteq D\tau(X)$. Aplicando $\tau^+ D$ monótona, $\tau^+ D\tau\tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+ DD\tau(X) = \tau^+ D\tau(X)$. Entonces $\tau^+ D\tau\tau^+ D\tau(X) = \tau^+ D\tau(X)$.

Veamos que es estructural. Primero veamos que $\sigma \star_{\mathbb{R}} \tau^+(Y) \subseteq \tau^+(\sigma \star_{\mathbb{S}} Y)$, para todo $\sigma \in M$ e $Y \subseteq S$. Como τ es residuada, por la Observación 1.1.4,

$$\tau\tau^+(Y) \subseteq Y \;\Rightarrow\; \sigma \star_{\mathbb{S}} \tau\tau^+(Y) \subseteq \sigma \star_{\mathbb{S}} Y \;\Rightarrow$$

$$\tau(\sigma \star_{\mathbb{R}} \tau^+(Y)) \subseteq \sigma \star_{\mathbb{S}} Y \;\Rightarrow\; \sigma \star_{\mathbb{R}} \tau^+(Y) \subseteq \tau^+(\sigma \star_{\mathbb{S}} Y).$$

Sean $\sigma \in M$ y $X \subseteq R$.

$$\sigma \star_{\mathbb{R}} \tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+(\sigma \star_{\mathbb{S}} D\tau(X)) \subseteq \tau^+ D(\sigma \star_{\mathbb{S}} \tau(X)) = \tau^+ D\tau(\sigma \star_{\mathbb{R}} X).$$

□

Definición 2.2.2. *Al operador de clausura estructural D^τ definido como en la proposición anterior lo llamamos el τ-**transformado de** C.*

Teorema 2.2.3. *[Gil11, Teorema 22] Sean C y D operadores de clausura estructurales sobre los $\mathcal{M}$-conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ transformación estructural y $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ una representación estructural inducida por τ. Entonces $C = D^\tau$.*

Demostración. Sea $X \subseteq R$. Como F es inducida por τ, $D\tau(X) = FC(X) = FCC(X) = D\tau C(X)$. Entonces $\tau C(X) \subseteq D\tau(X)$, por lo que $C(X) \subseteq \tau^+\tau C(X) \subseteq \tau^+ D\tau(X) = D^\tau(X)$.

Para la otra inclusión veamos primero que $D\tau D^\tau(X) = D\tau(X)$. Se tiene que $X \subseteq D^\tau(X)$, pues D^τ es un operador de clausura. Luego $D\tau(X) \subseteq D\tau D^\tau(X)$.

Por otro lado, $\tau^+ D\tau(X) \subseteq \tau^+ D\tau(X)$, y en consecuencia, $\tau\tau^+ D\tau(X) \subseteq D\tau(X)$. Luego $D\tau\tau^+ D\tau(X) \subseteq DD\tau(X) = D\tau(X)$; o sea que $D\tau D^\tau(X) \subseteq D\tau(X)$.

Entonces,

$$FCD^\tau(X) = D\tau D^\tau(X) = D\tau(X) = FC(X),$$

y como F es inyectiva, $CD^\tau(X) = C(X)$. Entonces $D^\tau(X) \subseteq C(X)$. Y por lo tanto, $D^\tau = C$. □

El siguente ejemplo, que figura en [Gil11], muestra que no toda representación estructural está inducida por una transformación estructural.

Ejemplo 2.2.4. Sean $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}\backslash\{0\}, \cdot, 1\rangle$ el monoide de los números naturales positivos con el producto usual, $R = \mathbb{Z}/(2)$ el conjunto de clases de enteros módulo 2 y $S = \mathbb{N}$ el conjunto de números naturales. El monoide $\mathcal{M}$ actúa en R y S mediante la multiplicación; es decir, para $\sigma \in M$, $\bar{a} \in R$ y $b \in S$, las acciones están dadas por $\sigma \star_{\mathbb{R}} \bar{a} = \overline{\sigma \cdot a}$ y $\sigma \star_{\mathbb{S}} b = \sigma \cdot b$. Tenemos entonces dos $\mathcal{M}$-*conjuntos* $\mathbb{R} = \langle R, \star_{\mathbb{R}}\rangle$ y $\mathbb{S} = \langle S, \star_{\mathbb{S}}\rangle$. Sean C y D los operadores de clausura sobre $\mathcal{P}(R)$ y $\mathcal{P}(S)$ respectivamente con los siguientes retículos de conjuntos cerrados:

$$
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & R \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\{\bar{0}\} \arrow[dr] & & \{\bar{1}\} \arrow[dl] \\
 & \varnothing &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & S \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
P \arrow[dr] & & I \arrow[dl] \\
 & \varnothing &
\end{tikzcd}
$$

donde P es el conjunto de los enteros pares e I el de los impares. Veamos que son estructurales. D es estructural ya que todos los subconjuntos de R son cerrados por D y por lo tanto $D = id_{\mathcal{P}(R)}$.

Por otra parte, sean $\sigma \in M$ y $X \subseteq S$. Si $X = \varnothing$, $C(\sigma \star_{\mathbb{S}} C(\varnothing)) = \varnothing = C(\sigma \star_{\mathbb{S}} \varnothing)$. Si $X \neq \varnothing$ y σ es par, entonces $\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X)$ y $\sigma \star_{\mathbb{S}} X$ son subconjuntos no vacíos de P. Luego $C(\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X)) = P = C(\sigma \star_{\mathbb{S}} X)$. Si $X \neq \varnothing$ y σ es impar, tenemos tres casos:

(i) Si $X \subseteq P$, entonces $\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X) = \sigma \star_{\mathbb{S}} P \subseteq P$ y $\sigma \star_{\mathbb{S}} X \subseteq P$, por lo tanto $C(\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X)) = P = C(\sigma \star_{\mathbb{S}} X)$.

(ii) Si $X \subseteq I$, entonces $\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X) = \sigma \star_{\mathbb{S}} I \subseteq I$ y $\sigma \star_{\mathbb{S}} X \subseteq I$, por lo tanto $C(\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X)) = I = C(\sigma \star_{\mathbb{S}} X)$.

(iii) Si X tiene números pares e impares, entonces $\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X) = \sigma \star_{\mathbb{S}} \mathbb{N}$ y $\sigma \star_{\mathbb{S}} X$ también. Entonces $C(\sigma \star_{\mathbb{S}} C(X)) = \mathbb{N} = C(\sigma \star_{\mathbb{S}} X)$.

Veamos que C no es una τ-transformación de D para ninguna transformación estructural τ. Sea $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ una transformación estructural. Entonces vale para $3 \in M$ que $3 \star_{\mathbb{S}} \tau(\{\bar{1}\}) = \tau(\{3 \star_{\mathbb{R}} \bar{1}\}) = \tau(\{\bar{1}\})$, y luego $\tau(\{\bar{1}\})$ es invariante por multiplicar por 3. Los únicos subconjuntos de $\mathbb{N}$ con esta propiedad son $\varnothing$ y $\{0\}$. Además $\tau(\{\bar{0}\}) = \tau(\{2 \star_{\mathbb{R}} \bar{1}\}) = 2 \star_{\mathbb{S}} \tau(\{\bar{1}\})$. Entonces $\tau(\{\bar{0}\}) = \tau(\{\bar{1}\})$. Luego $\tau^{-1}D\tau(\{\bar{0}\}) = \tau^{-1}D\tau(\{\bar{1}\})$, por lo que $C \neq D^{\tau}$.

Consideramos el isomorfismo $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ determinado por $F(\{\bar{0}\}) = P$, que se grafica a continuación

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & & & S \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\{\bar{0}\} \arrow[dr, dash] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & & \{\bar{1}\} \arrow[dl, dash] \arrow[rrr, mapsto, bend right] & P \arrow[dr, dash] & & I \arrow[dl, dash] \\
& \varnothing \arrow[rrr, mapsto, bend right] & & & \varnothing &
\end{tikzcd}$$

Veamos que F es estructural. $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} \varnothing) = \varnothing = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(\varnothing))$ y $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} \{\bar{0}\}) = P = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F\{\bar{0}\})$, para todo $\sigma \in M$. Si $\sigma \in M$ es par, $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} \{\bar{1}\}) = P = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F\{\bar{1}\})$ y $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} (R)) = P = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(R))$. Si $\sigma \in M$ es impar, $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} \{\bar{1}\}) = I = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F\{\bar{1}\})$ y $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} (R)) = S = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(R))$. Entonces F es una representación estructural de C en D. Si suponemos que F es inducida por una cierta transformación estructural τ, por el Teorema 2.2.3, debe ocurrir que $C = D^\tau$, pero ya vimos que esto no es posible. Luego, F no es inducida por ninguna transformación estructural.

Capítulo 3

Solución en M-conjuntos regulares y con variables graduadas

3.1. M-conjuntos regulares

En esta sección veremos que los $\mathcal{M}$-*conjuntos* con base tienen la REP. La base captura el comportamiento del conjunto Va como generador de Fm, en particular, que para cada fórmula ϕ, exista una única sustitución que asigna ϕ a cada variable.

Definición 3.1.1. *Decimos que $P \subseteq R$ es una* ***base*** *para el $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{R}$, si para todo $a \in R$, existe un único $\sigma \in M$ tal que $\sigma \star_{\mathbb{R}} p = a$ para todo $p \in P$. Si $\mathbb{R}$ tiene base, decimos que es* ***regular****.*

Ejemplo 3.1.2. Sea Fm el conjunto de todas las fórmulas de un lenguaje proposicional. Entonces Fm tiene a Va, el conjunto de las variables proposicionales, como su única base.

Ejemplo 3.1.3. Sea Eq el conjunto de todas las ecuaciones de un lenguaje proposicional con al menos dos variables. Sean S y S' dos conjuntos no vacíos que particionan a Va. Entonces

$$P = \{s \approx s' : s \in S, s' \in S'\}$$

es una base para Eq.

Veamos que si $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ son $\mathcal{M}$-*conjuntos* y si $\mathbb{R}$ tiene una base, entonces toda transformación estructural $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ queda determinada por su valor en $\{p\}$, para p cualquier elemento de la base.

Teorema 3.1.4. *[Blo06, Teorema 5.4] Supongamos que $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ son $\mathcal{M}$-conjuntos, y $\mathbb{R}$ es regular con base P. Para cada $a \in R$, sea $\kappa_a \in M$ el único tal que $\kappa_a \star_{\mathbb{R}} p = a$ para todo $p \in P$. Sea $q \in P$. Entonces $\rho \mapsto \rho(q)$ es una asignación biyectiva entre las* *transformaciones estructurales $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ y los subconjuntos κ_q-invariantes. Su inversa es la función $U \mapsto \rho_U$ con $\rho_U(a) = \kappa_a \star_{\mathbb{S}} U$ para cada $a \in R$, extendiendo luego a $\mathcal{P}(R)$ de forma natural ($\rho_U(X) = \bigcup_{x\in X} \kappa_x \star_{\mathbb{S}} U$).*

Demostración. Dada $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ una transformación estructural, $\rho(q)$ es un subconjunto de S κ_q-invariante ya que $\kappa_q \star_{\mathbb{S}} \rho(q) = \rho(\kappa_q \star_{\mathbb{R}} q) = \rho(q)$.

Sea $U \subseteq S$ κ_q-invariante, ρ_U es residuada con residuo $\rho_U^+ : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(R)$ definido como $\rho_U^+(Y) = \{x \in R : \kappa_x \star_{\mathbb{S}} U \subseteq Y\}$. En efecto,

$$\rho(X) \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; \bigcup_{x\in X} \kappa_x \star_{\mathbb{S}} U \subseteq Y \;\Leftrightarrow\; \kappa_x \star_{\mathbb{S}} U \subseteq Y \;\forall x \in X \;\Leftrightarrow$$

$$x \in \{a \in R : \kappa_a \star_{\mathbb{S}} U \subseteq Y\} \;\forall x \in X \;\Leftrightarrow\; X \subseteq \{a \in R : \kappa_a \star_{\mathbb{S}} U \subseteq Y\}.$$

Notemos que $\sigma \cdot \kappa_a = \kappa_{\sigma \star_{\mathbb{R}} a}$, para todo $\sigma \in M$ y $a \in R$, ya que $(\sigma \cdot \kappa_a) \star_{\mathbb{R}} p = \sigma \star_{\mathbb{R}} (\kappa_a \star_{\mathbb{R}} p) = \sigma \star_{\mathbb{R}} a$ para todo $p \in P$. Además, sabemos que $\kappa_{\sigma \star_{\mathbb{R}} a}$ es el único elemento de $\mathcal{M}$ que cumple esto. Entonces

$$\sigma \star_{\mathbb{S}} \rho_U(a) = \sigma \star_{\mathbb{S}} (\kappa_a \star_{\mathbb{S}} U) = (\sigma \cdot \kappa_a) \star_{\mathbb{S}} U = \kappa_{\sigma \star_{\mathbb{R}} a} \star_{\mathbb{S}} U = \rho_U(\sigma \star_{\mathbb{R}} a).$$

Luego, ρ_U es una transformación estructural (basta verificar estructuralidad en los conjuntos unitarios ya que está definida en ellos, y luego extendida de forma natural).

Además, como

$$\rho_{\rho(q)}(a) = \kappa_a \star_{\mathbb{S}} \rho(q) = \rho(\kappa_a \star_{\mathbb{R}} q) = \rho(a)$$
$$\rho_U(q) = \kappa_q \star_{\mathbb{R}} U = U,$$

son mutuamente inversas. □

El siguiente teorema es una adaptación de [Blo06, Teorema 5.5] al caso de las representaciones, y prueba que los $\mathcal{M}$-*conjuntos* regulares tienen la REP.

Teorema 3.1.5. *Supongamos que C y D son operadores de clausura estructurales sobre $\mathcal{M}$-conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, con $\mathbb{R}$ regular. Entonces toda representación estructural entre C y D es inducida por una transformación estructural.*

Demostración. Dada una representación estructural $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$, debemos ver que existe una transformación estructural $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ tal que $FC = D\rho$. Supongamos que P es una base para $\mathbb{R}$, y fijemos $q \in P$.

Sea $U = \kappa_q \star_{\mathbb{S}} FC(q)$. Veamos que U es κ_q-invariante:

$$\kappa_q \star_{\mathbb{S}} U = \kappa_q \star_{\mathbb{S}} (\kappa_q \star_{\mathbb{S}} FC(q)) = (\kappa_q \cdot \kappa_q) \star_{\mathbb{S}} FC(q) = \kappa_{\kappa_q \star_{\mathbb{R}} q} \star_{\mathbb{S}} FC(q) = \kappa_q \star_{\mathbb{S}} FC(q) = U.$$

Tomemos $\rho = \rho_U$. Tenemos que $\rho_U(a) = \kappa_a \star_{\mathbb{S}} (\kappa_q \star_{\mathbb{S}} FC(q)) = (\kappa_a \cdot \kappa_q) \star_{\mathbb{S}} FC(q) = \kappa_{\kappa_a \star_{\mathbb{R}} q} \star_{\mathbb{S}} FC(q) = \kappa_a \star_{\mathbb{S}} FC(q)$ para todo $a \in R$.

Sabemos que ρ_U es estructural, falta ver que $FC = D\rho_U$. Sea $a \in R$, se tiene que

$$D\rho_U(a) = D(\kappa_a \star_{\mathbb{S}} FC(q)) = FC(\kappa_a \star_{\mathbb{R}} C(q)) = FC(\kappa_a \star_{\mathbb{R}} q) = FC(a).$$

Sea $X \subseteq R$. Como ρ_U y F preservan uniones arbitrarias y usando la Observación 2.1.9, tenemos que

$$D\rho_U(X) = D\rho_U(\bigcup_{x\in X} x) = D\bigcup_{x\in X} \rho_U(x) = D\bigcup_{x\in X} D\rho_U(x) = D\bigcup_{x\in X} FC(x) =$$

$$D\bigcup_{x\in X} DF(x) = D\bigcup_{x\in X} F(x) = DF(\bigcup_{x\in X} x) = FC(\bigcup_{x\in X} x) = FC(X).$$

Entonces $D\rho_U = FC$. □

A continuación introduciremos las nociones de operadores de clausura, transformaciones y representaciones estructurales finitarias y veremos que si pedimos en el teorema anterior que C, D y F sean finitarias, entonces podemos tomar ρ finitaria.

Definición 3.1.6. *Sean C y D operadores de clausura estructurales sobre los $\mathcal{M}$-conjuntos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ una transformación estructural y $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ una representación estructural.*

Decimos que C es ***finitaria*** *si para todo $X \subseteq R$ y $x \in C(X)$, existe $X_x \subseteq X$ finito tal que $x \in C(X_x)$.*

Decimos que ρ es ***finitaria*** *si $\rho(X)$ es finito para todo $X \subseteq R$ finito. Y decimos que F es* ***finitaria*** *si $F(X)$ es compacto para todo $X \in C[R]$ compacto.*

Notar que los subconjuntos finitos de R son exactamente los elementos compactos de $\langle \mathcal{P}(R), \subseteq \rangle$.

Lema 3.1.7. *Dado un operador de clausura estructural finitario C sobre $\mathbb{R}$, el retículo $\mathcal{P}(R)_C$ es algebraico, con la clausura de los conjuntos finitos como elementos compactos.*

Demostración. Sean $X \subseteq R$ finito y $M \subseteq \mathcal{P}(R)$ tal que $C(X) \subseteq \bigcup^C_{Z\in M} C(Z) = C(\bigcup_{Z\in M} C(Z))$. Como C es finitaria, para cada $x \in X$ existe $Z_x \subseteq \bigcup_{Z\in M} C(Z)$ finito tal que $x \in C(Z_x)$. Como Z_x es finito, existe $M_x \subseteq M$ finito tal que $Z_x \subseteq \bigcup_{Z\in M_x} C(Z)$. Además X es finito, entonces $M_X = \bigcup_{x\in X} M_x$ es finito y $Z_x \subseteq \bigcup_{Z\in M_X} C(Z)$ para todo $x \in X$. Luego, como $x \in C(Z_x) \subseteq \bigcup^C_{Z\in M_X} C(Z)$ para todo $x \in X$, entonces $C(X) \subseteq \bigcup^C_{Z\in M_X} C(Z)$, o sea $C(X)$ es compacto.

Sea $X \subseteq R$ subconjunto arbitrario, $C(X) = C(\bigcup_{x\in X}\{x\}) = C(\bigcup_{x\in X} C\{x\}) = \bigcup^C_{x\in X} C\{x\}$.

Veamos ahora que si $C(X)$ es compacto, entonces existe $\bar{X} \subseteq X$ finito tal que $C(\bar{X}) = C(X)$. Al igual que antes, $C(X) = \bigcup^C_{x\in X} C\{x\}$, entonces existe $\bar{X} \subseteq X$ finito tal que $C(X) = \bigcup^C_{x\in \bar{X}} C\{x\} = C(\bigcup_{x\in \bar{X}}\{x\}) = C(\bar{X})$. □

Teorema 3.1.8. *[Blo06, Teorema 6.3] Sean C y D operadores de clausura estructurales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, con $\mathbb{R}$ regular y C finitaria. Entonces toda representación estructural finitaria entre C y D es inducida por una transformación estructural finitaria.*

Demostración. Por el teorema anterior, toda representación $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ es inducida por una transformación estructural $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$. Fijada una base P de $\mathbb{R}$ y un $q \in P$ y usando la notación del Teorema 3.1.4, veamos que ρ puede ser reemplazada por ρ_U, para $U \subseteq S$ finito y κ_q-invariante.

Por el Lema 3.1.7, $C(q)$ es compacto en $\mathcal{P}(R)_C$, y en consecuencia el conjunto $FC(q) = D\rho(q)$ es compacto en $D[S]$. $D\rho(q) = D\bigcup_{y\in\rho(q)} y = \bigcup^{D}_{y\in\rho(q)} D(y)$, entonces existe $U \subseteq \rho(q)$ finito tal que $D\rho(q) = D\bigcup_{y\in U} D(y) = D(U)$.

El conjunto $\rho(q)$ es κ_q-invariante, ya que $\kappa_q *_{\boldsymbol{S}} \rho(q) = \rho(\kappa_q *_{\boldsymbol{R}} q) = \rho(q)$. Además, $\kappa_q \cdot \kappa_q = \kappa_{\kappa_q \star_{\mathbb{R}} q} = \kappa_q$, con lo cual cada elemento de $\rho(q)$ es un punto fijo de κ_q. En efecto, sea $x \in \rho(q) = \kappa_q *_{\boldsymbol{S}} \rho(q)$, entonces existe $y \in \rho(q)$ tal que $x = \kappa_q *_{\boldsymbol{S}} y$

$$\kappa_q *_{\boldsymbol{S}} x = \kappa_q *_{\boldsymbol{S}} (\kappa_q *_{\boldsymbol{S}} y) = \kappa_q *_{\boldsymbol{S}} y = x.$$

Luego, U es κ_q-invariante ya que $U \subseteq \rho(q)$.

Tenemos que $D\rho(q) = D(U) = D(\kappa_q \star_{\mathbb{R}} U) = D\rho_U(q)$, entonces para todo $a \in R$

$$FC(a) = D\rho(a) = D\rho(\kappa_a \star_{\mathbb{R}} q) = D\kappa_a \star_{\mathbb{S}} \rho(q) = D\kappa_a \star_{\mathbb{S}} D\rho(q) =$$

$$D\kappa_a \star_{\mathbb{S}} D\rho_U(q) = D\kappa_a \star_{\mathbb{S}} \rho_U(q) = D\rho_U(\kappa_a \star_{\mathbb{R}} q) = D\rho_U(a).$$

Al igual que en teorema anterior, esto implica que $FC = D\rho_U$. □

3.2. M-conjunto con variables graduadas

No todo $\mathcal{M}$-*conjunto* tiene base, por ejemplo en los secuentes no hay ningún elemento que cumpla que para cualquier otro, exista una sustición que mande el primero en el segundo, ya que las sustituciones presenvan la traza. Pero, para cada traza existen elementos que pueden ser mandados por sustituciones a cualquer otro de la misma traza. Esto motiva la definición de $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado y de variable graduada de un $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado, que funciona como una base para cada grado.

Definición 3.2.1. *Un $\mathcal{M}$-conjunto* ***graduado*** *es una terna $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ en la cual $\mathbb{R} = \langle R, \star_{\mathbb{R}}\rangle$ es un $\mathcal{M}$-conjunto y $\pi : R \to I$ es una aplicación suryectiva tal que $\pi(\sigma \star_{\mathbb{R}} x) = \pi(x)$ para todo $\sigma \in M$ y $x \in R$. La aplicación se denomina una* ***graduación*** *en $\mathbb{R}$.*

Ejemplo 3.2.2. Todo $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$ tiene una graduación trivial $\pi : R \to \{0\}$.

En [Gil11], Gil-Férez exiende la idea de base de un $\mathcal{M}$-*conjunto* a la de base graduada de un $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado, de manera tal que una base es una base graduada para la graduación trivial.

Definición 3.2.3. *Una **base graduada** para un $\mathcal{M}$-conjunto graduado $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ es un conjunto $P \subseteq R$ tal que para todo $i \in I$, $P_i \neq \varnothing$ y para todo $x \in R$, existe un único $\kappa^x \in M$ que cumple que $\kappa^x \star_{\mathbb{R}} p = x$ para todo $p \in P_{\pi(x)}$.*

Notemos que si $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ es un $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado con base graduada P, entonces para todo $\sigma \in M$ y todo $x \in R$, se tiene que

$$(\sigma \cdot \kappa^x) \star_{\mathbb{R}} (P_{\pi(\sigma \star_{\mathbb{R}} x)}) = \sigma \star_{\mathbb{R}} (\kappa^x \star_{\mathbb{R}} P_{\pi(\sigma \star_{\mathbb{R}} x)}) = \sigma \star_{\mathbb{R}} (\kappa^x \star_{\mathbb{R}} P_{\pi(x)}) = \sigma \star_{\mathbb{R}} \{x\} = \{\sigma \star_{\mathbb{R}} x\}.$$

Por la unicidad de $\kappa^{\sigma \star_{\mathbb{R}} x}$, tenemos que $\sigma \cdot \kappa^x = \kappa^{\sigma \star_{\mathbb{R}} x}$. Esto motiva las siguientes definiciones.

Definición 3.2.4. *Una función $\kappa : R \to M$ es una **familia coherente de sustituciones** si $\kappa_{\sigma \star_{\mathbb{R}} x} = \sigma \cdot \kappa_x$ para todo $\sigma \in M$ y $x \in R$, donde en general notamos $\kappa_x := \kappa(x)$.*

Definición 3.2.5. *Decimos que una función $p : I \to R$ es una **variable graduada** para un $\mathcal{M}$-conjunto graduado $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$, cuando $\pi p_i = i$ para todo $i \in I$ y existe una familia coherente de sustituciones κ tal que $\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_{\pi(x)} = x$ para todo $x \in R$, donde en general notamos $p_i := p(i)$. En particular, $\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{R}} p_i = p_i$ para todo $i \in I$.*

Si $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ es un $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado con base graduada P y $\kappa : R \to M$ es una función tal que $\kappa_x = \kappa^x$ es el único elemento de M tal que $\kappa_x \star_{\mathbb{R}} P_{\pi(x)} = \{x\}$, para todo $x \in R$, entonces toda función $p : I \to P$ tal que $p_i \in P_i$ es una variable graduada con familia coherente de sustituciones κ, ya que $\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_{\pi(x)} \in \kappa_x \star_{\mathbb{R}} P_{\pi(x)} = \{x\}$, o sea $\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_{\pi(x)} = x$. Luego, todo $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado con base graduada tiene una variable graduada.

Ejemplo 3.2.6. Como los Σ-conjuntos Fm y Eq son regulares, tienen base graduada para la graduación trivial, y por lo tanto tienen una variable graduada.

Ejemplo 3.2.7. Sea $Q \subseteq \omega^2$ no vacío, entonces $\langle Seq^Q, \circ, tr\rangle$ es un $\mathcal{M}$-*conjunto* graduado con graduación $tr : Seq^Q \to Q$.

La siguiente proposición muestra cómo se puede definir una variable graduada en los secuentes.

Proposición 3.2.8. *[Gil11, Proposición 29] Sea $Q \subseteq \omega^2$ no vacío. Entonces, $\langle Seq^Q, \circ, tr\rangle$ tiene una variable graduada si y sólo si $\mathcal{L}$ tiene una constante ó $\langle 0, 0\rangle \notin Q$.*

Demostración. Sea $Va = \{x_i : i \geqslant 1\}$ una enumeración de las variables proposicionales, y para todo $\langle n, m\rangle \in \omega^2$, sea $p_{\langle n,m\rangle} = \langle x_1, ..., x_n\rangle \rhd \langle x_{n+1}, ..., x_{n+m}\rangle$. En particular, $p_{\langle 0,0\rangle} = \varnothing \rhd \varnothing$.

Definimos para cada secuente $\Gamma \rhd \Delta = \langle \eta_1, ..., \eta_n\rangle \rhd \langle \eta_{n+1}, ..., \eta_{n+m}\rangle$ de traza en $Q \backslash \langle 0, 0\rangle$, la sustitución $\kappa_{\Gamma \rhd \Delta} \in \Sigma$ como la única tal que

(i) $\kappa_{\Gamma \rhd \Delta}(x_i) = \eta_i$ para $1 \leqslant i \leqslant n+m$ y

(ii) $\kappa_{\Gamma \rhd \Delta}(x_i) = \eta_{n+m}$ para $n+m < i$.

Si $\langle 0,0\rangle \in Q$ y $c \in Fm$ es una constante, entonces definimos $\kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}(x) = c$ para todo $x \in Va$.

Si $\Gamma \rhd \Delta$ es un secuente de traza $\langle n,m\rangle \neq \langle 0,0\rangle$, y $\sigma \in \Sigma$, entonces $\sigma \cdot \kappa_{\Gamma \rhd \Delta}(x_i) = \sigma(\eta_i) = \kappa_{\sigma \circ (\Gamma \rhd \Delta)}(x_i)$ si $1 \leqslant i \leqslant n+m$, y $\sigma \cdot \kappa_{\Gamma \rhd \Delta}(x_i) = \sigma(\eta_{n+m}) = \kappa_{\sigma \circ (\Gamma \rhd \Delta)}(x_i)$ si $n+m < i$. Además, $\sigma \cdot \kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}(x) = \sigma(c) = c = \kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}(x) = \kappa_{\sigma \circ (\varnothing \rhd \varnothing)}(x)$, para todo $x \in Va$.

Entonces $\{\kappa_{\Gamma \rhd \Delta} : \Gamma \rhd \Delta \in Seq^Q\}$ es una familia coherente de sustituciones que hace a $p : Q \to Seq^Q$ una variable graduada.

Veamos el recíproco. Sea Fm tal que no tiene una constante y $Q \subseteq \omega^2$ tal que $\varnothing \rhd \varnothing \in Seq^Q$. Supongamos que p es una variable graduada con κ familia coherente de sustituciones. Como $\varnothing \rhd \varnothing$ es el único secuente de traza $\langle 0,0\rangle$, $p_{\langle 0,0\rangle} = \varnothing \rhd \varnothing$. Sean $x \in Va$ y $\varphi = \kappa_{p_{\langle 0,0\rangle}}(x)$ que no es una constante por hipótesis, y sea $\sigma \in \Sigma$ una sustitución tal que $\sigma \circ \varphi \neq \varphi$. Entonces, $\varphi = \kappa_{p_{\langle 0,0\rangle}}(x) = \kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}(x) = \kappa_{\sigma(\varnothing \rhd \varnothing)}(x) = \sigma \cdot \kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}(x) = \sigma \circ \varphi \neq \varphi$, lo que es absurdo. Luego Seq^Q no tiene una variable graduada. □

Observación 3.2.9. *Seq* con $\varnothing \rhd \varnothing$ no tiene una base graduada. Así vemos que tener una variable graduada es una condición más débil que tener una base graduada. En efecto, supongamos que P es una base graduada de *Seq* para una graduación π. Sea $i = \pi(\varnothing \rhd \varnothing)$, entonces existe un único $\kappa_{\varnothing \rhd \varnothing}$ tal que $\kappa_{\varnothing \rhd \varnothing} \circ p = \varnothing \rhd \varnothing$ para todo $p \in P_i$. Como las sustituciones respetan la traza, entonces $P_i = \{\varnothing \rhd \varnothing\}$. Pero $\sigma \circ \varnothing \rhd \varnothing = \varnothing \rhd \varnothing$ para todo $\sigma \in \Sigma$, luego no vale la unicidad, lo que contradice la existencia de la base P.

Los siguientes lemas servirán para probar el Teorema 3.2.13 que dice que los $\mathcal{M}$-*conjuntos* con variable graduada tienen la REP.

Lema 3.2.10. *[Gil11, Lema 31] Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ $\mathcal{M}$-conjuntos. Sea $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ un $\mathcal{M}$-conjunto graduado, con una variable graduada p, κ una familia coherente de sustituciones para p y ρ una transformación estructural de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$. Entonces para todo $i \in I$, todo elemento de $\rho(p_i)$ es invariante por κ_{p_i}.*

Demostración. Primero notemos que

$$\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} \rho(p_i) = \rho(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{R}} p_i) = \rho(p_i).$$

Entonces, dado $y \in \rho(p_i)$, existe $y' \in \rho(p_i)$ tal que $y = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} y'$. Por lo tanto,

$$\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} y = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} (\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} y') = (\kappa_{p_i} \cdot \kappa_{p_i}) \star_{\mathbb{S}} y' = \kappa_{(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{R}} p_i)} \star_{\mathbb{S}} y' = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} y' = y.$$

□

Lema 3.2.11. *[Gil11, Lema 32] Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ $\mathcal{M}$-conjuntos. Sea $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ $\mathcal{M}$-conjunto graduado, con una variable graduada p y κ una familia coherente se sustituciones para p. Entonces para toda función $H : I \to \mathcal{P}(S)$, existe una única transformación estructural ρ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$ determinada por la condición*

$$\rho(p_i) = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} H_i, \text{ para todo } i \in I,$$

donde $H_i = H(i)$.

Demostración. Sea $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ tal que para todo $x \in R$,

$$\rho(x) = \kappa_x \star_{\mathbb{S}} H_{\pi(x)}.$$

Se ve, de forma análoga a la demostración del Teorema 3.1.4, que ρ es residuada con residuo $\rho^+ : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(R)$ definida como $\rho^+(Y) = \{a \in R : \kappa_a *_{\boldsymbol{R}} H_{\pi(a)}\}$.

Veamos que es es estructural. Sean $\sigma \in M$ y $x \in R$, entonces

$$\rho(\sigma \star_{\mathbb{R}} x) = \kappa_{\sigma \star_{\mathbb{R}} x} \star_{\mathbb{S}} H_{\pi(\sigma \star_{\mathbb{R}} x)} = (\sigma \cdot \kappa_x) \star_{\mathbb{S}} H_{\pi(x)} = \sigma \star_{\mathbb{S}} (\kappa_x \star_{\mathbb{S}} H_{\pi(x)}) = \sigma \star_{\mathbb{S}} \rho(x).$$

El hecho de que satisfaga la condición requerida, se sigue de:

$$\rho(p_i) = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} H_{\pi(p_i)} = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} H_i.$$

Probemos la unicidad. Sea $\rho' : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ una transformación estructural tal que para todo $i \in I$, $\rho'(p_i) = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} H_i$. Sea $x \in R$ y tomemos $i = \pi(x)$. Entonces,

$$\rho'(x) = \rho'(\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_i) = \kappa_x \star_{\mathbb{S}} \rho'(p_i) = \kappa_x \star_{\mathbb{S}} (\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} H_i) =$$

$$(\kappa_x \cdot \kappa_{p_i}) \star_{\mathbb{S}} H_i = \kappa_{\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_i} \star_{\mathbb{S}} H_i = \kappa_x \star_{\mathbb{S}} H_i = \rho(x).$$

Por lo tanto $\rho = \rho'$ □

Lema 3.2.12. *[Gil11, Lema 33] Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ $\mathcal{M}$-conjuntos con operadores de clausura estructurales C y D respectivamente, $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ un $\mathcal{M}$-conjunto graduado, con una variable graduada p y $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ una representación estructural de C en D. Si existe una transformación estructural $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ tal que para todo $i \in I$, $FC(p_i) = D\rho(p_i)$, entonces F es inducida por ρ.*

Demostración. Debemos ver que $FC(X) = D\rho(X)$ para todo $X \subseteq R$.

Comencemos viendo que para todo $x \in R$, $FC(x) = D\rho(x)$. Sea κ una familia coherente de sustituciones para p, sean $x \in R$ e $i = \pi(x)$; entonces

$$FC(x) = FC(\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_i) = FC(\kappa_x \star_{\mathbb{R}} C(p_i)) = D(\kappa_x \star_{\mathbb{S}} FC(p_i)) =$$

$$D(\kappa_x \star_{\mathbb{S}} D\rho(p_i)) = D(\kappa_x \star_{\mathbb{S}} \rho(p_i)) = D\rho(\kappa_x \star_{\mathbb{R}} p_i) = D\rho(x).$$

Ahora, sea $X \subseteq R$. Recordemos que por la Observación 2.1.13, F preserva supremos, y por la Observación 2.1.9, $C(\bigcup_{x\in X}\{x\}) = C(\bigcup_{x\in X} C\{x\})$ y $D(\bigcup_{x\in X} \rho(x)) = D(\bigcup_{x\in X} D\rho(x))$. Entonces

$$FC(X) = FC(\bigcup_{x\in X}\{x\}) = FC(\bigcup_{x\in X} Cx) = F(\bigcup_{x\in X}^{C} Cx) = \bigcup_{x\in X}^{D} FC(x) \quad \text{y}$$

$$D\rho(X) = D\rho(\bigcup_{x\in X}\{x\}) = D(\bigcup_{x\in X} \rho(x)) = D(\bigcup_{x\in X} D\rho(x)) = \bigcup_{x\in X}^{D} D\rho(x).$$

Como $FC(x) = D\rho(x)$, para todo $x \in X$, resulta que $FC(X) = D\rho(X)$. □

Teorema 3.2.13. *[Gil11, Teorema 34] Sean $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ $\mathcal{M}$-conjuntos con operadores de clausura estructurales C y D respectivamente, $\langle R, \star_{\mathbb{R}}, \pi\rangle$ un $\mathcal{M}$-conjunto graduado, con una variable graduada p. Entonces, toda representación estructural $F : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_D$ de C en D es inducida por una transformación estructural ρ. Más aún, si F y C son finitarias, se puede tomar ρ finitaria.*

Demostración. Sea κ una familia coherente de sustituciones para p y $H : I \to \mathcal{P}(S)$ con $H_i = FC(p_i)$. Luego, por el Lema 3.2.11, existe una única transformación estructural ρ tal que $\rho(p_i) = \kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} FC(p_i)$ para todo $i \in I$. Entonces,

$$FC(p_i) = FC(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{R}} p_i) = FC(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{R}} C(p_i)) = D(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} FC(p_i)) = D\rho(p_i).$$

Por el Lema 3.2.12, F es inducida por ρ.

Supongamos ahora que F y C son finitarias. Como se vio en la demostración del Teorema 3.1.8, para todo $x \in R$, existe $U \subseteq \rho(x)$ finito tal que $D\rho(x) = D(U)$. En particular, existe $U_i \subseteq \rho(p_i)$ tal que $D\rho(p_i) = D(U_i)$ para todo $i \in I$.

Por el Lema 3.2.10, todo elemento de $\rho(p_i)$ es invariante por κ_{p_i}, y en consecuencia $\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} U_i = U_i$. Por el Lema 3.2.11, la transformación $\rho' : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$, definida como $\rho'(x) = \kappa_x \star_{\mathbb{S}} U_{\pi(x)}$, es estructural, y como U_i es finito para todo $i \in I$, es finitaria. Entonces,

$$D\rho'(p_i) = D(\kappa_{p_i} \star_{\mathbb{S}} U_i) = D(U_i) = D\rho(p_i) = FC(p_i).$$

Por el Lema 3.2.12, ρ' induce a F. □

Con el ejemplo 5.1.5 del capítulo 5, mostraremos que no vale el recíproco de este teorema.

Capítulo 4

Solución en A-Mod

4.1. Módulos sobre un retículo residuado completo

En [Gal09], Galatos y Tsinakis introducen el concepto de módulo sobre un retículo residuado completo como otro marco para la generalización de la definición de lógica algebrizable.

Este idea resulta ser una generalización del concepto de $\mathcal{M}$-*conjunto*. En efecto, en la Observación 4.1.2, veremos que podemos levantar la operación del monoide $\mathcal{M}$ a una operación residuada en $\mathcal{P}(M)$. Además, $\mathcal{P}(M)$ es un retículo completo con la unión y la intersección de conjuntos como supremos e ínfimo respectivamente. Tenemos así, un retículo residuado completo inducido por el monide $\mathcal{M}$.

En la Observación 4.1.5, veremos que podemos hacer algo similar con la acción de un $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$, y como $\langle \mathcal{P}(R), \bigcap, \bigcup \rangle$ es un retículo completo, tenemos así un módulo sobre el retículo residuado completo inducido por el monide $\mathcal{M}$. Además, como las transformaciones estructurales y los operadores de clausura sobre $\mathcal{M}$-*conjuntos* son operaciones definidas sobre las partes del conjunto subyacente del $\mathcal{M}$-*conjunto*, veremos en las observaciones 4.1.10 y 4.1.14, que se pueden pensar como transformaciones estructurales y operadores de clausura sobre $\mathcal{A}$-*módulos* respectivamente.

Definición 4.1.1. *Un* ***retículo residuado completo*** *es un álgebra* $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \cdot, \backslash, /, 1 \rangle$ *donde* $\langle A, \wedge, \vee \rangle$ *es un retículo completo,* $\langle A, \cdot, 1 \rangle$ *es un monoide y* $\cdot : A \times A \to A$ *es residuada con residuos* $\backslash : A \times A \to A$ *y* $/ : A \times A \to A$.

Observación 4.1.2. Dado un monoide $\mathcal{M}$, tomando las partes del conjunto subyacente, podemos considerar la operación $\cdot : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ con $X \cdot Y = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$. Esta operación resulta tener residuos $\backslash : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ y $/ : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ dadas por,

$$X \backslash Z = \{y \in M : x \cdot y \in Z,\ \forall x \in X\} \text{ y}$$

$$Z/Y = \{x \in M : x \cdot y \in Z,\ \forall y \in Y\}.$$

En efecto, sean $X, Y, Z \subseteq M$, debemos ver que $X \cdot Y \subseteq Z \iff Y \subseteq X\backslash Z \iff X \subseteq Z/Y$:

$$X \cdot Y \subseteq Z \iff x \cdot y \in Z \ \ \forall x \in X \ , \ \forall y \in Y \iff y \in X\backslash Z \ \ \forall y \in Y \iff Y \subseteq X\backslash Z.$$

Analogamente $X \cdot Y \subseteq Z \iff X \subseteq Z/Y$. Entonces tenemos un monoide $\langle \mathcal{P}(M), \cdot, \{1\} \rangle$ donde 1 es el elemento neutro de $\mathcal{M}$ y $\cdot$ es residuada. Además, $\mathcal{P}(M)$ forma un retículo completo con la unión y la intersección de conjuntos $\langle \mathcal{P}(M), \cap, \cup \rangle$. Tenemos así un retículo residuado completo $\langle \mathcal{P}(M), \cap, \cup, \cdot, \backslash, /, \{1\} \rangle$, al cual notaremos $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Definición 4.1.3. *Sea $\mathcal{A}$ un retículo residuado completo y $\mathcal{R} = \langle R, \wedge, \vee \rangle$ un retículo completo, provisto de una operación $*_{\boldsymbol{R}} : A \times R \to R$ residuada. Decimos que $\boldsymbol{R} = \langle \mathcal{R}, *_{\boldsymbol{R}} \rangle$ es un* ***módulo sobre*** *$\mathcal{A}$ o un $\mathcal{A}$-módulo, si la operación $*_{\boldsymbol{R}}$, llamada acción del retículo residuado completo $\mathcal{A}$ sobre $\boldsymbol{R}$, cumple:*

1. $(\sigma \cdot \sigma') *_{\boldsymbol{R}} x = \sigma *_{\boldsymbol{R}} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}} x)$ *y*

2. $1 *_{\boldsymbol{R}} x = x$,

para todo $\sigma, \sigma' \in A$ y $x \in R$.

Ejemplo 4.1.4. Un retículo residuado completo $\mathcal{A}$ tiene estructura de $\mathcal{A}$-*módulo*, pensando a la operación de monoide de $\mathcal{A}$ como la acción.

Observación 4.1.5. Dado $\mathbb{R} = \langle R, \star_{\mathbb{R}} \rangle$ un $\mathcal{M}$-*conjunto* podemos tomar el conjunto de partes de su conjunto subyacente R y definir la operación $\star_{\mathbb{R}} : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$ como $N \star_{\mathbb{R}} X = \{\sigma \star_{\mathbb{R}} x : \sigma \in N, x \in X\}$ para $N \subseteq M$ y $X \subseteq R$. Como $\langle \mathcal{P}(R), \bigcap, \bigcup \rangle$ es un retículo completo, tenemos que $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \langle \mathcal{P}(R), \star_{\mathbb{R}} \rangle$ es un $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*. Para poder probar esto, debemos ver que $\star_{\mathbb{R}}$ es residuada y que

1. $(N \cdot N') \star_{\mathbb{R}} X = N \star_{\mathbb{R}} (N' \star_{\mathbb{R}} X)$;

2. $\{1\} \star_{\mathbb{R}} X = X$;

para todo $N, N' \subseteq M$ y $X \subseteq R$.

Veamos que es residuada con residuos:

$$\backslash_{\star_{\mathbb{R}}} : \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R) \quad N\backslash_{\star_{\mathbb{R}}} Y = \{x \in R : \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in Y, \ \forall \sigma \in N\} \quad \text{y}$$

$$/_{\star_{\mathbb{R}}} : \mathcal{P}(R) \times \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(M) \quad Y/_{\star_{\mathbb{R}}} X = \{\sigma \in M : \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in Y, \ \forall x \in X\},$$

donde $X, Y \subseteq R$ y $N \subseteq M$.

$$N \star_{\mathbb{R}} X \subseteq Y \iff \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in Y \ \ \forall \sigma \in N \ , \ \forall x \in X \iff X \subseteq N\backslash_{\star_{\mathbb{R}}} Y.$$

Analogamente, $N \star_{\mathbb{R}} X \subseteq Y \iff \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in Y \ \ \forall \sigma \in N \ , \ \forall x \in X \iff N \subseteq Y/_{\star_{\mathbb{R}}} X$. Luego $\star_{\mathbb{R}}$ es residuada.

Veamos $(N \cdot N') \star_{\mathbb{R}} X = N \star_{\mathbb{R}} (N' \star_{\mathbb{R}} X)$:

$$(N \cdot N') \star_{\mathbb{R}} X = \{\sigma \cdot \sigma' : \sigma \in N, \sigma' \in N'\} \star_{\mathbb{R}} X =$$

$$\{(\sigma \cdot \sigma') \star_{\mathbb{R}} x : \sigma \in N, \sigma' \in N', x \in X\} = \{\sigma \star_{\mathbb{R}} (\sigma' \star_{\mathbb{R}} x) : \sigma \in N, \sigma' \in N', x \in X\} =$$

$$N \star_{\mathbb{R}} \{\sigma' \star_{\mathbb{R}} x : \sigma' \in N', x \in X\} = N \star_{\mathbb{R}} (N' \star_{\mathbb{R}} X).$$

Veamos $\{1\} \star_{\mathbb{R}} X = X$:

$$\{1\} \star_{\mathbb{R}} X = \{1 \star_{\mathbb{R}} x : x \in X\} = \{x : x \in X\} = X.$$

Ejemplo 4.1.6. Como $\langle Fm, \star\rangle$, $\langle Eq, *\rangle$ y $\langle Seq, \circ\rangle$ son Σ-conjuntos, por la observación anterior $\mathcal{P}(\langle Fm, \star\rangle)$, $\mathcal{P}(\langle Eq, *\rangle)$ y $\mathcal{P}(\langle Seq, \circ\rangle)$ son $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulos.

Lema 4.1.7. *[Gal09, Lema 3.7] Las siguientes propiedades valen para todo $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$:*

1. *La operación $*_{\boldsymbol{R}}$ preserva supremos arbitrarios en ambas coordenadas. En particular, preserva el orden en ambas coordenadas.*

2. *Las operaciones $\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}$ y $/_{*_{\boldsymbol{R}}}$ preservan ínfimos arbitrarios en el numerador. Más aún, convierten supremos arbitrarios en el denominador en ínfimos. En particular, preservan el orden en el numerador, y lo invierten en el denominador.*

Además, si $a \in A$ y $x, y \in R$, se cumplen las siguientes igualdades y desigualdades:

3. $(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}y) *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x$

4. $a *_{\boldsymbol{R}} (a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}x) \leqslant x$

5. $x \leqslant a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}(a *_{\boldsymbol{R}} x)$ *y* $a \leqslant (a *_{\boldsymbol{R}} x)/_{*_{\boldsymbol{R}}}x$

6. $(a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}x)/_{*_{\boldsymbol{R}}}y = a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}y)$

7. $[(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}y) *_{\boldsymbol{R}} y]/_{*_{\boldsymbol{R}}}y = x/_{*_{\boldsymbol{R}}}y$

8. $1 \leqslant x/_{*_{\boldsymbol{R}}}x$

9. $(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}x) *_{\boldsymbol{R}} x = x$

10. $([a *_{\boldsymbol{R}} x]/_{*_{\boldsymbol{R}}}x) *_{\boldsymbol{R}} x = a *_{\boldsymbol{R}} x$

Como en el caso de $\mathcal{M}$-*conjuntos*, las transformaciones estructurales entre $\mathcal{A}$-*módulos*, resultan ser funciones residuadas compatibles con la acción.

Definición 4.1.8. *Una **transformación estructural** de $\mathcal{A}$-módulos $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ es una función residuada $\alpha : R \to S$ tal que $\alpha(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x) = \sigma *_{\boldsymbol{S}} \alpha(x)$, para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$.*

Observación 4.1.9. Los $\mathcal{A}$-*módulos*, junto con sus transformaciones estructurales como morfismos, forman una categoría que denotaremos $\mathcal{A}$-$\texttt{Mod}$. Además, si $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ es un morfismo de $\mathcal{A}$-*módulos* biyectivo, entonces es un isomorfismo.

En efecto, como f es biyectivo, por el Lema 1.1.7, f^+ es residuada con residuo f, y son mutuamente inversas. Veamos que f^+ es estructural. Sean $a \in A$ e $y \in S$, entonces

$$f^+(a *_{\boldsymbol{S}} y) = f^+(a *_{\boldsymbol{S}} ff^+(y)) = f^+f(a *_{\boldsymbol{R}} f^+(y)) = a *_{\boldsymbol{R}} f^+(y).$$

Observación 4.1.10. Una función $\rho : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(S)$ es una transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos* de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{S}$, si y sólo si, es una transformación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{P}(\mathbb{S})$.

Para ver esto, primero notemos que, tanto si ρ es transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos* como de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, resulta residuada respecto de la inclusión $\subseteq$. Supongamos que ρ es transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*. Sean $N \subseteq M$ y $X \subseteq R$,

$$\rho(N \star_{\mathbb{R}} X) = \rho(\{\sigma \star_{\mathbb{R}} X\}_{\sigma \in N}) = \{\rho(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)\}_{\sigma \in N}$$
$$\{\sigma \star_{\mathbb{S}} \rho(X)\}_{\sigma \in N} = N \star_{\mathbb{S}} \rho(X).$$

Entonces ρ es transformación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*.

Supongamos ahora que ρ es transformación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*. Sean $\sigma \in M$ y $X \subseteq R$,

$$\rho(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = \rho(\{\sigma\} \star_{\mathbb{R}} X) = \{\sigma\} \star_{\mathbb{S}} \rho(X) = \sigma \star_{\mathbb{S}} \rho(X).$$

Entonces ρ resulta transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*.

Lema 4.1.11. *Sea $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ un morfismo entre $\mathcal{A}$-módulos. Sean $\perp_{\boldsymbol{R}} = \bigwedge_{x \in R} x$ y $\perp_{\boldsymbol{S}} = \bigwedge_{x \in R} S$ los elementos mínimos de $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$. Entonces:*

(i) $\sigma *_{\boldsymbol{R}} \perp_{\boldsymbol{R}} = \perp_{\boldsymbol{R}}$ *para todo* $\sigma \in A$.

(ii) $\alpha(\perp_{\boldsymbol{R}}) = \perp_{\boldsymbol{S}}$.

(iii) $\bigvee_{i \in I}(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x_i) = \sigma *_{\boldsymbol{R}} \bigvee_{i \in I} x_i$ *para todo* $\sigma \in A$, $x_i \in R$, I *arbitrario.*

(iv) $(\bigvee_{i \in I} a_i) *_{\boldsymbol{R}} x = \bigvee_{i \in I}(a_i *_{\boldsymbol{R}} x)$ *para todo* $x \in R$, $a_i \in A$, I *arbitrario.*

Demostración. (i) Como $\perp_{\boldsymbol{R}}$ es el mínimo, $\perp_{\boldsymbol{R}} \leqslant \sigma *_{\boldsymbol{R}} \perp_{\boldsymbol{R}}$ y $\perp_{\boldsymbol{R}} \leqslant \sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} \perp_{\boldsymbol{R}}$. La segunda desigualdad es equivalente a $\sigma *_{\boldsymbol{R}} \perp_{\boldsymbol{R}} \leqslant \perp_{\boldsymbol{R}}$. Entonces, $\sigma *_{\boldsymbol{R}} \perp_{\boldsymbol{R}} = \perp_{\boldsymbol{R}}$.

(ii) Tenemos que $\perp_{\boldsymbol{R}} \leqslant \alpha^+(\perp_{\boldsymbol{S}})$, lo que equivale a que $\alpha(\perp_{\boldsymbol{R}}) \leqslant \perp_{\boldsymbol{S}}$. Además, $\perp_{\boldsymbol{S}} \leqslant \alpha(\perp_{\boldsymbol{R}})$. Por lo tanto, $\alpha(\perp_{\boldsymbol{R}}) = \perp_{\boldsymbol{S}}$.

(iii) Notemos que $x_j \leqslant \bigvee_{i \in I} x_i$, para todo $j \in I$. Por la monotonía de $\sigma *_{\boldsymbol{R}} -$, $\sigma *_{\boldsymbol{R}} x_j \leqslant \sigma *_{\boldsymbol{R}} \bigvee_{i \in I} x_i$, para todo $j \in I$. Luego, $\bigvee_{j \in I} \sigma *_{\boldsymbol{R}} x_j \leqslant \sigma *_{\boldsymbol{R}} \bigvee_{i \in I} x_i$.

Por otro lado, $\sigma *_{\boldsymbol{R}} x_j \leqslant \bigvee_{i\in I} \sigma *_{\boldsymbol{R}} x_i$, para todo $j \in I$. Entonces, $x_j \leqslant \sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} \bigvee_{i\in I} \sigma *_{\boldsymbol{R}} x_i$, para todo $j \in I$. Tomando supremo, $\bigvee_{j\in I} x_j \leqslant \sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} \bigvee_{i\in I} \sigma *_{\boldsymbol{R}} x_i$. Luego, $\sigma *_{\boldsymbol{R}} \bigvee_{j\in I} x_j \leqslant \bigvee_{i\in I} \sigma *_{\boldsymbol{R}} x_i$.

(iv) Tenemos que $a_j \leqslant \bigvee_{i\in I} a_i$, para todo $j \in I$. Luego, $a_j *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant (\bigvee_{i\in I} a_i) *_{\boldsymbol{R}} x$, para todo $j \in I$. Tomando supremo, $\bigvee_{j\in I}(a_j *_{\boldsymbol{R}} x) \leqslant (\bigvee_{i\in I} a_i) *_{\boldsymbol{R}} x$.

Por otro lado, $a_j *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant \bigvee_{i\in I}(a_i *_{\boldsymbol{R}} x)$, para todo $j \in I$. Luego, $a_j \leqslant [\bigvee_{i\in I}(a_i *_{\boldsymbol{R}} x)]/_{*_{\boldsymbol{R}}} x$, para todo $j \in I$. Tomando supremo, $\bigvee_{j\in I} a_j \leqslant [\bigvee_{i\in I}(a_i *_{\boldsymbol{R}} x)]/_{*_{\boldsymbol{R}}} x$. Por lo tanto, $(\bigvee_{j\in I} a_j) *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant \bigvee_{i\in I}(a_i *_{\boldsymbol{R}} x)$ □

Definición 4.1.12. *Un* ***operador de clausura estructural*** *sobre un $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$ es una función $C : R \to R$ tal que es un operador de clausura para el orden de $\boldsymbol{R}$ y $\sigma *_{\boldsymbol{R}} C(x) \leqslant C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x)$ para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$.*

Observación 4.1.13. Sea $\boldsymbol{R}$ un $\mathcal{A}$-*módulo* y sea $C : R \to R$ un operador de clausura para el orden de $\boldsymbol{R}$. Dado que $*_{\boldsymbol{R}}$ es residuada y por lo tanto $\sigma *_{\boldsymbol{R}} - : R \to R$ es monótona para todo $\sigma \in A$, resulta, a semejanza de lo que sucedió en la Observación 2.1.8, que $\sigma *_{\boldsymbol{R}} C(x) \leqslant C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x)$ para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$ si y sólo si $C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x) = C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} C(x))$ para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$.

Observación 4.1.14. Sean $\mathbb{R}$ un $\mathcal{M}$-*conjunto* y C un operador de clausura respecto de la inclusión $C : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(R)$. Entonces C es un operador de clausura estructural sobre $\mathbb{R}$ si y sólo si es un operador de clausura estructural sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. En efecto, supongamos que C es operador de clausura estructual sobre $\mathbb{R}$. Sea $N \subseteq M$, $C(N \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(\{\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)\}_{\sigma\in N}) = C(\{C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)\}_{\sigma\in N}) = C(\{\sigma \star_{\mathbb{R}} X\}_{\sigma\in N}) = C(N \star_{\mathbb{R}} X)$.

Ahora, supongamos que C es operador de clausura estructural sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Sean $\sigma \in M$ y $X \subseteq R$, $C(\sigma \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(\{\sigma\} \star_{\mathbb{R}} C(X)) = C(C(\{\sigma\} \star_{\mathbb{R}} X)) = C(\{\sigma\} \star_{\mathbb{R}} X) = C(\sigma \star_{\mathbb{R}} X)$

El siguiente lema se basa en el Lema 3.9 de [Gal09] y muestra que el retículo de elementos cerrados resulta ser también un $\mathcal{A}$-*módulo*:

Lema 4.1.15. *Dado un operador de clausura estructural C sobre un $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$, tenemos $\mathcal{R}_C := \langle C[R], \bigwedge, \bigvee^C \rangle$ el retículo de sus puntos fijos, donde $C[R] = \{C(x) : x \in R\} = \{x \in R : C(x) = x\}$ y $\bigvee^C_{i\in I} x_i = C(\bigvee_{i\in I} x_i)$ para $x_i \in R$. Podemos considerar entonces $\boldsymbol{R}_C := \langle \mathcal{R}_C, *_{\boldsymbol{R}_C} \rangle$, que resulta ser un $\mathcal{A}$-módulo, donde $\sigma *_{\boldsymbol{R}_C} x := C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x)$. Además $C' : R \to C[R]$, la correstricción de C a su imagen, es un morfismo de $\mathcal{A}$-módulos suryectivo entre $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{R}_C$.*

Demostración. $\mathcal{R}_C$ es un retículo completo ya que $\mathcal{R}$ lo es y, dado $X \subseteq C[R]$, $\bigwedge_{x\in X} x \in C[R]$. En efecto, $\bigwedge_{z\in X} z \leqslant x$, para todo $x \in X$. Entonces, $C(\bigwedge_{z\in X} z) \leqslant C(x) = x$, para todo $x \in X$. Luego, $C(\bigwedge_{z\in X} z) \leqslant \bigwedge_{x\in X} x \leqslant C(\bigwedge_{x\in X} x)$. Por lo tanto, $\bigwedge_{x\in X} x = C(\bigwedge_{z\in X} z) \in C[R]$.

Veamos que $*_{\boldsymbol{R}_C} : A \times R[C] \to R[C]$ es residuada. Primero veamos que el residuo izquierdo es $\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}$. Sean $x, y \in C[R]$ y $\sigma \in A$,

$$\sigma *_{\boldsymbol{R}_C} x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \sigma *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant \sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y.$$

Debemos ver que que $\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y \in C[R]$. Tenemos que

$$\sigma *_{\boldsymbol{R}} C(\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y) \leqslant C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} (\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y)) \leqslant C(y) = y.$$

Luego, $C(\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y) \leqslant \sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y \leqslant C(\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y)$. Por lo tanto, $\sigma \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} y \in C[R]$.

Veamos ahora que el residuo derecho es $/_{*_{\boldsymbol{R}}}$. Sean $x, y \in C[R]$ y $\sigma \in A$,

$$\sigma *_{\boldsymbol{R}_C} x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \sigma *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \sigma \leqslant y /_{*_{\boldsymbol{R}}} x.$$

Veamos que $*_{\boldsymbol{R}_C}$ cumple las condiciones necesarias:

1. $(\sigma \cdot \sigma') *_{\boldsymbol{R}_C} x = \sigma *_{\boldsymbol{R}_C} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}_C} x)$ para todo $\sigma, \sigma' \in A$ y $x \in C[R]$:

$$(\sigma \cdot \sigma') *_{\boldsymbol{R}_C} x = C((\sigma \cdot \sigma') *_{\boldsymbol{R}} x) = C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}} x)) =$$

$$C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} C(\sigma' *_{\boldsymbol{R}} x)) = C(\sigma *_{\boldsymbol{R}} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}_C} x)) = \sigma *_{\boldsymbol{R}_C} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}_C} x))$$

2. $1 *_{\boldsymbol{R}_C} x = x$ para todo $x \in C[R]$:

$$1 *_{\boldsymbol{R}_C} x = C(1 *_{\boldsymbol{R}} x) = C(x) = x$$

Entonces $\boldsymbol{R}_C$ es un $\mathcal{A}$-*módulo*. Veamos que $C' : R \to C[R]$ es un morfismo de $\mathcal{A}$-*módulos* suryectivo. Tenemos que es suryectivo ya que es la correstricción de C a su imagen. Veamos que $C' : R \to C[R]$ es residuada, con residuo $i : C[R] \to R$, donde $i(x) = x$. Debemos ver:

$$C'(x) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant i(y), \text{ para todo } x \in R \text{ e } y \in C[R].$$

Si $C'(x) \leqslant y$, resulta $x \leqslant C'(x) \leqslant y = i(y)$. Ahora, si $x \leqslant i(y)$ entonces $C'(x) \leqslant C'(i(y)) = C'(y) = y$. Luego i es el residuo de C'.

Veamos que $C'(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x) = \sigma *_{\boldsymbol{R}_C} C'(x)$ para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$. Por definición, $\sigma *_{\boldsymbol{R}_C} C'(x) = C'(\sigma *_{\boldsymbol{R}} C'(x))$, y como C' es estructural, $C'(\sigma *_{\boldsymbol{R}} C'(x)) = C'(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x)$. □

Como en el caso de los $\mathcal{M}$-*conjuntos*, definimos **representación estructural** como una función residuada inyectiva entre los retículos de los elementos cerrados por los operadores de clausura, que respeta el orden y la acción. Como en particular estos retículos son $\mathcal{A}$-*módulos*, las podemos ver como morfismos inyectivos de $\mathcal{A}$-`Mod`. Notar entonces que esto es una abstracción de la condición $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} x) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(x))$ para todo $x \in R$ y $\sigma \in M$, para $\mathcal{M}$-*conjuntos*, ya que esto se cumple al pedir que F sea una transformación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*.

Definición 4.1.16. *Dados operadores de clausura estructurales C y D sobre los $\mathcal{A}$-módulos $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{S}$ respectivamente, decimos que $F : \boldsymbol{R}_C \to \boldsymbol{S}_D$ es una* ***representación estructural*** *de C en D, si F es un morfismo de módulos tal que $x \leqslant y \Leftrightarrow F(x) \leqslant F(y)$ para todo $x, y \in R$.*

Decimos que la representación estructural es inducida por una transformación estructural $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$, si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "C"'] & \boldsymbol{S} \arrow[d, "D"] \\ \boldsymbol{R}_C \arrow[r, "F"'] & \boldsymbol{S}_D \end{tikzcd}$$

Lema 4.1.17. *Una función $F : C[\mathcal{P}(R)] \to D[\mathcal{P}(S)]$, es una representación estructural de $\mathcal{M}$-conjuntos, si y sólo si, es una representación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-módulos.*

Demostración. Supongamos que F es una representación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*, entonces $X \subseteq Y$ si y sólo si $F(X) \subseteq F(Y)$ para todo $X, Y \subseteq R$ y $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(X))$ para todo $X \subseteq R$ y $\sigma \in M$. Por definición, F es residuada. Falta ver que $F(\Gamma *_{\mathbb{R}_C} X) = \Gamma *_{\mathbb{S}_D} F(X)$, para todo $\Gamma \subseteq M$ y $X \in C[\mathcal{P}(R)]$. Para ello, observemos que

$$F(\Gamma *_{\mathbb{R}_C} X) = FC(\Gamma \star_{\mathbb{R}} X) = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) =$$

$$\bigcup_{\sigma \in \Gamma} D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(X)) = \bigcup_{\sigma \in \Gamma} \sigma *_{\mathbb{S}_D} F(X) = \Gamma *_{\mathbb{S}_D} F(X).$$

Ahora supongamos que F es una representación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, entonces es un morfismo de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* tal que $X \subseteq Y$ si y sólo si $F(X) \subseteq F(Y)$ para todo $X, Y \subseteq R$. Solo falta ver que $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(X))$ para todo $X \subseteq R$ y $\sigma \in M$. Como F es morfismo de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, $F(\{\sigma\} *_{\mathbb{R}_C} X) = \{\sigma\} *_{\mathbb{S}_D} F(X)$; es decir, $FC(\sigma \star_{\mathbb{R}} X) = D(\sigma \star_{\mathbb{S}} F(X))$. □

Por último, definimos la propiedad de la representación para el caso de los $\mathcal{A}$-*módulos*, que también resulta ser una generalización de la definición de los sistemas deductivos algebrizables.

Definición 4.1.18. *Un $\mathcal{A}$-módulo* ***$\boldsymbol{R}$ tiene la REP*** *si para todo $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{S}$ y todo par de operadores de clausura estructurales, C sobre $\boldsymbol{R}$ y D sobre $\boldsymbol{S}$, se tiene que toda representación estructural de C en D está inducida por una transformación estructural de $\boldsymbol{R}$ en $\boldsymbol{S}$.*

El siguiente lema es una adptación de [Gal09, Lema 3.4], y nos dice cómo obtener un operador de clausura estructural a partir de una transformación estructural.

Lema 4.1.19. *Sea* $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ *un morfismo de* $\mathcal{A}$*-módulos, entonces* $\alpha^+\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *es un operador de clausura estructural sobre* $\boldsymbol{R}$*. Además,* $\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}$ *es isomorfo a* $\alpha[\boldsymbol{R}]$ *a través del morfismo*

$$\alpha' := \alpha_{|\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}} : \boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha} \subseteq \boldsymbol{R} \longrightarrow \alpha[\boldsymbol{R}] \subseteq \boldsymbol{S}.$$

Demostración. Como α es un morfismo de $\mathcal{A}$*-módulos*, es residuada, entonces existe α^+ su residuo. Por el Lema 1.2.2, $\alpha^+\alpha$ es un operador de clausura. Veamos que es estructural. Para ello debemos ver que $\sigma *_{\boldsymbol{R}} \alpha^+\alpha(x) \leqslant \alpha^+\alpha(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x)$, para todo $\sigma \in A$ y $x \in R$. Primero notemos que como $\alpha^+\alpha(x) \leqslant \alpha^+\alpha(x)$, entonces $\alpha\alpha^+\alpha(x) \leqslant \alpha(x)$. Por (1) del Lema 4.1.7 tenemos que

$$\sigma *_{\boldsymbol{S}} \alpha\alpha^+\alpha(x) \leqslant \sigma *_{\boldsymbol{S}} \alpha(x).$$

Como α es un morfismo de $\mathcal{A}$*-módulos*, tenemos que

$$\alpha(\sigma *_{\boldsymbol{R}} \alpha^+\alpha(x)) \leqslant \alpha(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x).$$

Luego,

$$\sigma *_{\boldsymbol{R}} (\alpha^+\alpha(x)) \leqslant \alpha^+\alpha(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x).$$

En consecuencia, $\alpha^+\alpha$ resulta un operador de clausura estructural sobre $\boldsymbol{R}$.

Veamos que $\alpha_{|\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}} : \boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha} \subseteq \boldsymbol{R} \to \alpha[\boldsymbol{R}] \subseteq \boldsymbol{S}$ es un isomorfismo. Sean $x, y \in \alpha^+\alpha[R]$ tales que $\alpha(x) = \alpha(y)$, entonces $\alpha^+\alpha(x) = \alpha^+\alpha(y)$; o sea $x = y$. Luego $\alpha_{|\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}}$ es inyectiva. Por otra parte, sea $\alpha(x) \in \alpha[R]$, entonces $\alpha^+\alpha(x) \in \alpha^+\alpha[R]$. Por 1.1.6, $\alpha(\alpha^+\alpha(x)) = \alpha(x)$, y entonces $\alpha_{|\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}}$ resulta sobreyectiva. Luego, por la Observación 4.1.9, $\alpha_{|\boldsymbol{R}_{\alpha^+\alpha}}$ es isomorfismo. □

El siguiente teorema caracteriza a los $\mathcal{A}$*-módulos* que tienen la REP y así se obtiene una solución para el problema de la representación en el marco de los $\mathcal{A}$*-módulos*.

Teorema 4.1.20. *[Gal09, Lema 5.1] Los objetos que tienen la REP en* $\mathcal{A}$-`Mod` *son exactamente los onto-proyectivos.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{P}$ un objeto onto-proyectivo. Veamos que tiene la REP. Sea $\boldsymbol{S}$ un $\mathcal{A}$*-módulo* y sean C y D operadores de clausura estructurales sobre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{S}$ respectivamente, tales que existe una representación estructural $F : \boldsymbol{P}_C \to \boldsymbol{S}_D$. Como $\boldsymbol{P}$ es proyectivo, existe $\alpha : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "FC"'] & \boldsymbol{S} \arrow[d, "D"] \\
 & \boldsymbol{S}_D
\end{tikzcd}$$

Luego, también conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "C"'] & \boldsymbol{S} \arrow[d, two heads, "D"] \\
\boldsymbol{P}_C \arrow[r, "F"'] & \boldsymbol{S}_D
\end{tikzcd}$$

de donde se sigue que F es inducida por α. En consecuencia, $\boldsymbol{P}$ tiene la REP.

Veamos ahora que si $\boldsymbol{P}$ tiene la REP, entonces es un objeto onto-proyectivo. Sean $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ $\mathcal{A}$-*módulos* y sean $\beta : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ y $\gamma : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R}$ morfismos de $\mathcal{A}$-*módulos* con β sobreyectiva. Por el Lema 4.1.19, $\gamma^+\gamma$ es un operador de clausura estructural sobre $\boldsymbol{P}$, y además $\boldsymbol{P}_{\gamma^+\gamma}$ es isomorfo a $\gamma[\boldsymbol{P}] \subseteq \boldsymbol{R}$ a través de

$$\gamma' := \gamma_{|\boldsymbol{P}_{\gamma^+\gamma}} : \boldsymbol{P}_{\gamma^+\gamma} \to \boldsymbol{R}.$$

Entonces γ se factoriza como $\gamma = \gamma'(\gamma^+\gamma)$. Analogamente, tenemos $\beta = \beta'(\beta^+\beta)$, con

$$\beta' := \beta_{|\boldsymbol{Q}_{\beta^+\beta}} : \boldsymbol{Q}_{\beta^+\beta} \to \boldsymbol{R}.$$

Luego, $F := (\beta')^{-1}\gamma' : \boldsymbol{P}_{\gamma^+\gamma} \to \boldsymbol{Q}_{\beta^+\beta}$ es una representación estructural. Como $\boldsymbol{P}$ tiene la REP, tenemos que existe un morfismo de $\mathcal{A}$-*módulos* $\alpha : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ que hace conmutar al cuadrado exterior del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P} \arrow[rr, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, two heads, "\gamma^+\gamma"'] & & \boldsymbol{Q} \arrow[dl, two heads, "\beta"'] \arrow[dd, two heads, "\beta^+\beta"] \\
& \boldsymbol{R} & \\
\boldsymbol{P}_{\gamma^+\gamma} \arrow[ur, "\gamma'"] \arrow[rr, "F"] & & \boldsymbol{Q}_{\beta^+\beta} \arrow[ul, two heads, "\beta'"']
\end{tikzcd}$$

Es decir, $F(\gamma^+\gamma) = (\beta^+\beta)\alpha$. Como $F = \beta'^{-1}\gamma'$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\beta'^{-1}\gamma')(\gamma^+\gamma) &= (\beta^+\beta)\alpha \\
\beta'(\beta'^{-1}\gamma')(\gamma^+\gamma) &= \beta'(\beta^+\beta)\alpha \\
\gamma'(\gamma^+\gamma) &= \beta'(\beta^+\beta)\alpha.
\end{aligned}$$

Además, $\gamma'(\gamma^+\gamma) = \gamma$ y $\beta'(\beta^+\beta) = \beta$, y por lo tanto $\gamma = \beta\alpha$. Es decir, el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{P} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \boldsymbol{Q} \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
& \boldsymbol{R}
\end{tikzcd}$$

Luego $\boldsymbol{P}$ es onto-proyectivo.

□

4.2. Principio de dualidad

Dado el retículo residuado completo $\mathcal{A} = \langle A, \wedge\vee, \cdot\backslash, /, 1\rangle$ definimos el **simétrico** de $\mathcal{A}$ como el retículo residuado completo $\mathcal{A}^s = \langle A, \wedge\vee, \cdot^s, \backslash^s, /^s, 1\rangle$, donde para todo $a, b \in A$,

$$a \cdot^s b = b \cdot a, \qquad a\backslash^s b = b/a \qquad \text{y} \qquad a/^s b = b\backslash a.$$

Veamos que $\backslash^s$ y $/^s$ son los residuos de $a \cdot^s b$:

$$a \cdot^s b \leqslant c \;\Leftrightarrow\; b \cdot a \leqslant c \;\Leftrightarrow\; a \leqslant b\backslash c \;\Leftrightarrow\; a \leqslant c/^s b$$

$$a \cdot^s b \leqslant c \;\Leftrightarrow\; b \cdot a \leqslant c \;\Leftrightarrow\; b \leqslant c/a \;\Leftrightarrow\; b \leqslant a\backslash^s c.$$

Notar que el orden de $\mathcal{A}^s$ y de $\mathcal{A}$ coinciden. Además, $(\mathcal{A}^s)^s = \mathcal{A}$.

Dado un $\mathcal{A}$-*módulo* $\boldsymbol{R} = \langle \mathcal{R}, *_{\boldsymbol{R}}\rangle$, definimos su dual como $\boldsymbol{R}^{op} = \langle \mathcal{R}^{op}, \odot\rangle$ donde $\mathcal{R}^{op}$ es el retículo $\mathcal{R}$ con el orden inverso $\leqslant^{op}$ y $\odot = \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} : A \times R \to R$.

Proposición 4.2.1. *[Gil09, Proposición 5] Si $\boldsymbol{R}$ es un $\mathcal{A}$-módulo, entonces $\boldsymbol{R}^{op}$ es un $\mathcal{A}^s$-módulo y los residuos de $\odot$ quedan determinados por $a\backslash_{\odot} x = a *_{\boldsymbol{R}} x$ y $y/_{\odot} x = x/_{*_{\boldsymbol{R}}} y$. Más aún, $(\boldsymbol{R}^{op})^{op} = \boldsymbol{R}$.*

Demostración. Veamos que $\backslash_{\odot}$ y $/_{\odot}$ son los residuos de $\odot$. Sean $x, y \in R$ y $a \in A$,

$$a \odot x \leqslant^{op} y \;\Leftrightarrow\; y \leqslant a \odot x \;\Leftrightarrow\; y \leqslant a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x$$

$$x \leqslant^{op} a\backslash_{\odot} y \;\Leftrightarrow\; a\backslash_{\odot} y \leqslant x \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x$$

$$a \leqslant y/_{\odot} x \;\Leftrightarrow\; a \leqslant x/_{*_{\boldsymbol{R}}} y \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x.$$

Luego

$$a \odot x \leqslant^{op} y \;\Leftrightarrow\; x \leqslant^{op} a\backslash_{\odot} y \;\Leftrightarrow\; a \leqslant y/_{\odot} x.$$

Tenemos así que $y \leqslant 1\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x$ si y sólo si $1 *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x$ si y sólo si $y \leqslant x$ para todo $x, y \in R$. Luego $1 \odot x = 1\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x = x$. Sean $a, b \in A$ y $x, y \in R$, entonces

$$y \leqslant a \odot (b \odot x) \;\Leftrightarrow\; y \leqslant a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}}(b\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x) \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant b\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x \;\Leftrightarrow$$

$$b *_{\boldsymbol{R}} (a *_{\boldsymbol{R}} y) \leqslant x \;\Leftrightarrow\; (b \cdot a) *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x \;\Leftrightarrow\; (a \cdot^s b) *_{\boldsymbol{R}} y \leqslant x \;\Leftrightarrow$$

$$y \leqslant (a \cdot^s b)\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} x \;\Leftrightarrow\; y \leqslant (a \cdot^s b) \odot x.$$

Luego $a \odot (b \odot x) = (a \cdot^s b) \odot x$. □

Por la Observación 1.1.9, dado un morfismo de $\mathcal{A}$-*módulos* $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$, $f^+ : \mathcal{S}^{op} \to \mathcal{R}^{op}$ es residuada, con residuo $f : \mathcal{R}^{op} \to \mathcal{S}^{op}$. Veamos que f^+ es estructural para $\odot$. Tenemos que

$$x \leqslant f^+(a \odot y) \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant a \odot y \;\Leftrightarrow\; f(x) \leqslant a\backslash_{*_{\boldsymbol{S}}} y \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{S}} f(x) \leqslant y \;\Leftrightarrow$$

$$f(a *_{\boldsymbol{R}} x) \leqslant y \iff a *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant f^+(y) \iff x \leqslant a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} f^+(y) \iff x \leqslant a \odot f^+(y).$$

Entonces, $f^+(a \odot y) = a \odot f^+(y)$. Además, por la Observación 1.1.8, $id_{\boldsymbol{R}}^+ = id_R = id_{\boldsymbol{R}^{op}}$ y $(fg)^+ = g^+ f^+$. De este modo obtenemos el siguiente principio de dualidad.

El pasaje al dual $D : \mathcal{A}\text{-}\mathtt{Mod} \to \mathcal{A}^s\text{-}\mathtt{Mod}$ *es un isomorfismo de categorías*

$$D(f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}) = f^+ : \boldsymbol{S}^{op} \to \boldsymbol{R}^{op}.$$

El siguiente resultado muestra que los epis de $\mathcal{A}$-`Mod` coinciden con los morfismos suryectivos. En consecuencia, los objetos onto-proyectivos y los proyectivos son los mismos. Así, en el Teorema 4.1.20, podemos intercambiar estos objetos.

Para demostrar la siguiente porposición, veamos que dados un $\mathcal{A}$-*módulo* $\boldsymbol{R}$ y $x \in R$, podemos definir un morfismo $m_x : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}$ como $m_x(a) = a *_{\boldsymbol{R}} x$.

Como $m_x(a) \leqslant y \iff a *_{\boldsymbol{R}} x \leqslant y \iff a \leqslant y/_{*_{\boldsymbol{R}}} x$, tenemos que m_x es residuada con residuo $m_x^+(y) = y/_{*_{\boldsymbol{R}}} x$. Además, $m_x(b \cdot a) = (b \cdot a) *_{\boldsymbol{R}} x = b *_{\boldsymbol{R}} (a *_{\boldsymbol{R}} x) = b *_{\boldsymbol{R}} m_x(a)$, entonces m_x es estructural.

Proposición 4.2.2. *[Gil09, Proposición 8] En la categoría de* $\mathcal{A}$-`Mod`*, los monomorfismos son inyectivos y los epimorfismos son suryectivos.*

Demostración. Sea $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ monomorfismo. Sean $x, y \in R$, tal que $f(x) = f(y)$. Entonces $fm_x(a) = f(a *_{\boldsymbol{R}} x) = a *_{\boldsymbol{S}} f(x) = a *_{\boldsymbol{S}} f(y) = f(a *_{\boldsymbol{R}} y) = fm_y(a)$, luego $fm_x = fm_y$. Como f es monomorfismo, $m_x = m_y$, y en particular $x = 1 *_{\boldsymbol{R}} x = m_x(1) = m_y(1) = 1 *_{\boldsymbol{S}} y = y$. Entonces f es inyectiva.

Por dualidad, el funtor D manda epis y monos de $\mathcal{A}$-`Mod` a monos y epis de $\mathcal{A}^s$-`Mod` respectivamente. Además, por el Lema 1.1.7, una función residuada $f : R \to S$ es inyectiva si y sólo si f^+ es sobreyectiva. Luego, D manda morfismos sobreyectivos e inyectivos de $\mathcal{A}$-`Mod` a morfismos inyectivos y sobreyectivos de $\mathcal{A}^s$-`Mod` respectivamente. Entonces, si f es un epi de $\mathcal{A}$-`Mod`, f^+ es un mono de $\mathcal{A}^s$-`Mod`. Luego, f^+ es inyectiva en $\mathcal{A}^s$-`Mod`, y en consecuencia, es sobreyectiva en $\mathcal{A}$-`Mod`. $\square$

Corolario 4.2.3. *[Gil09, Corolario 9] Los objetos onto-proyectivos de* $\mathcal{A}$-`Mod` *son exactamente los proyectivos. En consecuencia, los objetos con la REP son exactamente los proyectivos.*

El siguiente lema es la implicación (iv) $\Rightarrow$ (i) del Teorema 31 de [Gil09].

Lema 4.2.4. *Si* $\boldsymbol{P'}$ *es proyectivo y existe una retracción* $\epsilon : \boldsymbol{P'} \to \boldsymbol{P}$*, entonces* $\boldsymbol{P}$ *es proyectivo.*

Demostración. Sean $f : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$ y $\pi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}$ epimorfismo. Como ϵ es una retracción, sea $\rho : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P'}$ tal que $\epsilon\rho = id_{\boldsymbol{P}}$. En particular $f\epsilon\rho = f$. Como $\boldsymbol{P'}$ es proyectivo, existe

$\overline{f\epsilon} : \boldsymbol{P'} \to \boldsymbol{R}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} \arrow[r, "\rho"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & \boldsymbol{P'} \arrow[r, dashed, "\overline{f\epsilon}"] \arrow[dr, "f\epsilon"'] & \boldsymbol{R} \arrow[d, "\pi"] \\ & & \boldsymbol{S} \end{tikzcd}$$

Entonces $\boldsymbol{P}$ resulta proyectivo. □

4.3. A-módulos cíclicos

En esta sección analizaremos los $\mathcal{A}$-*módulos* cíclicos. Esto nos permitirá mostrar la existencia de $\mathcal{A}$-*módulos* proyectivos.

Definición 4.3.1. *Decimos que un $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$ es **cíclico** si existe un elemento $v \in R$, llamado **generador** de $\boldsymbol{R}$, tal que $R = A *_{\boldsymbol{R}} v = \{a *_{\boldsymbol{R}} v : a \in A\}$.*

Lema 4.3.2. *[Gal09, Lema 5.2] Un $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$ es cíclico con generador v si y sólo si $(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}v) *_{\boldsymbol{R}} v = x$ para todo $x \in R$.*

Demostración. Si v es un generador, para todo $x \in R$ existe $a \in A$ tal que $x = a *_{\boldsymbol{R}} v$. Entonces $a \leqslant (a *_{\boldsymbol{R}} v)/_{*_{\boldsymbol{R}}}v = x/_{*_{\boldsymbol{R}}}v$. Luego, $x = a *_{\boldsymbol{R}} v \leqslant (x/_{*_{\boldsymbol{R}}}v) *_{\boldsymbol{R}} v \leqslant x$, por el Lema 4.1.7, y resulta $(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}v) *_{\boldsymbol{R}} v = x$.

Por otro lado, si vale $(x/_{*_{\boldsymbol{R}}}v) *_{\boldsymbol{R}} v = x$, entonces $x \in A *_{\boldsymbol{R}} v$. □

Lema 4.3.3. *[Gal09, Lema 5.3] Sea $C : A \to A$ un operador de clausura estructural. Entonces el $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{A}_C$ es cíclico con generador $C(1)$.*

Demostración. Se tiene que $C(1) \in C[A]$. Sea $C(a) \in C[A]$, $a *_{\boldsymbol{A}_C} C(1) = C(a *_{\boldsymbol{A}} C(1)) = C(a *_{\boldsymbol{A}} 1) = C(a)$. □

Lema 4.3.4. *[Gal09, Lema 5.4] Sea $\boldsymbol{R}$ un $\mathcal{A}$-módulo y $v \in R$. Entonces,*

1. *$\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v = \langle A *_{\boldsymbol{R}} v, *_{\boldsymbol{R}} \rangle$ es un $\mathcal{A}$-módulo con el mismo supremo que $\boldsymbol{R}$ y el residuo izquierdo de la operación $*_{\boldsymbol{R}}$ en $\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ está dado por $a \backslash_{\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v} q = [(a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q)/_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v$.*
2. *La función $C_v : A \to A$, definida como $C_v(a) = (a *_{\boldsymbol{R}} v)/_{*_{\boldsymbol{R}}}v$ es un operador de clausura estructural.*
3. *$\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ es isomorfo a $\boldsymbol{A}_{C_v}$*

Así, tenemos que un $\mathcal{A}$-módulo es cíclico si y sólo si es isomorfo a $\boldsymbol{A}_C$, para un operador de clausura $C : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$.

Demostración. (1) Veamos que $*_{\boldsymbol{R}} : A \times A *_{\boldsymbol{R}} v \to A *_{\boldsymbol{R}} v$. Sean $a \in A$ y $q \in A *_{\boldsymbol{R}} v$ y $b \in A$ tal que $q = b *_{\boldsymbol{R}} v$. Luego $a *_{\boldsymbol{R}} q = a *_{\boldsymbol{R}} (b *_{\boldsymbol{R}} v) = (a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v \in A *_{\boldsymbol{R}} v$. Por el Lema 4.1.11 $\bigvee_{i \in I}^{\boldsymbol{R}} (a_i *_{\boldsymbol{R}} v) = (\bigvee_{i \in I}^{\boldsymbol{A}} a_i) *_{\boldsymbol{R}} v \in A *_{\boldsymbol{R}} v$. Veamos que $a \backslash_{\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v} q = [(a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v$. Si $r = c *_{\boldsymbol{R}} v$, con $c \in A$, entonces $a *_{\boldsymbol{R}} r \leqslant q$ si y sólo si $a *_{\boldsymbol{R}} (c *_{\boldsymbol{R}} v) \leqslant q$ si y sólo si $c \leqslant (a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v$ si y sólo si $r = c *_{\boldsymbol{R}} v \leqslant [(a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v$. La vuelta de la última equivalencia vale ya que si $c *_{\boldsymbol{R}} v \leqslant [(a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v$, entonces $c \leqslant (c *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v \leqslant ([(a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = (a \backslash_{*_{\boldsymbol{R}}} q) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v$ por (5) y (7) del Lema 4.1.7.

(2) Por (5) de 4.1.7, $a \leqslant (a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = C_v(a)$. Si $a \leqslant b$, entonces $a *_{\boldsymbol{R}} v \leqslant b *_{\boldsymbol{R}} v$, $C_v(a) = (a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v \leqslant (b *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = C_v(b)$. Además, $C_v(C_v(a)) = C_v((a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v) = ([(a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = [(a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] = C_v(a)$ por (7) del Lema 4.1.7. Para ver la estructuralidad, $(a *_{\boldsymbol{A}} C_v(b)) *_{\boldsymbol{R}} v = a *_{\boldsymbol{R}} ([(b *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v) \leqslant a *_{\boldsymbol{R}} (b *_{\boldsymbol{R}} v) = (a *_{\boldsymbol{A}} b) *_{\boldsymbol{R}} v$ por (3) del Lema 4.1.7, entonces $a *_{\boldsymbol{A}} C_v(b) \leqslant ([a *_{\boldsymbol{A}} C_v(b)] *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v \leqslant [(a *_{\boldsymbol{A}} b) *_{\boldsymbol{R}} v] /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = C_v(a *_{\boldsymbol{A}} b)$. Entonces C_v es estructural.

(3) Sea $f(a) = a *_{\boldsymbol{R}} v$ y $g(x) = x /_{*_{\boldsymbol{R}}} v$. Notar que $f : C_v[A] \to A *_{\boldsymbol{R}} v$ y $g : A *_{\boldsymbol{R}} v \to C_v[A]$, ya que $f(a) = a *_{\boldsymbol{R}} v \in A *_{\boldsymbol{R}} v$ y $g(a *_{\boldsymbol{R}} v) = (a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v \in C_v[A]$. Sean $x \in A *_{\boldsymbol{R}} v$, con $x = b *_{\boldsymbol{R}} v$ para $b \in A$, entonces $f(g(x)) = f(x /_{*_{\boldsymbol{R}}} v) = (x /_{*_{\boldsymbol{R}}} v) *_{\boldsymbol{R}} v = [(b \star_{\mathbb{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v] *_{\boldsymbol{R}} v = b *_{\boldsymbol{R}} v = x$ por el Lema 4.3.2, ya que $\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ es cíclico con generador v. Además, para todo $a \in A_{C_v}$, $g(f(a)) = g(a *_{\boldsymbol{R}} v) = (a *_{\boldsymbol{R}} v) /_{*_{\boldsymbol{R}}} v = C_v(a) = a$. Entonces f es biyectiva con inversa g. Como además f y g son monótonas, por la observación 1.1.4, f es residuada con residuo g.

Se tiene también que f es estructural. En efecto, sean $b \in C_v[A]$ y $a \in A$. Por el Lema 4.3.2, $([(a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v] /_{*_{\boldsymbol{R}}} v) *_{\boldsymbol{R}} v = (a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v$. Entonces, $f(a *_{\boldsymbol{A}_{C_v}} b) = (a *_{\boldsymbol{A}_{C_v}} b) *_{\boldsymbol{R}} v = C_v(a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v = ([(a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v] /_{*_{\boldsymbol{R}}} v) *_{\boldsymbol{R}} v = (a \cdot b) *_{\boldsymbol{R}} v = a *_{\boldsymbol{R}} (b *_{\boldsymbol{R}} v) = a *_{\boldsymbol{R}} f(b)$. Luego, f es morfismo de $\mathcal{A}$-*módulos* biyectivo. Por el Lema 4.1.9, f es un isomorfismo. □

Corolario 4.3.5. *[Gal09, Corolario 5.5] Si $u \in A$ entonces $\boldsymbol{A} \cdot u = \langle A \cdot u, \cdot \rangle$, es un $\mathcal{A}$-módulo cíclico isomorfo a $\boldsymbol{A}_{C_u}$.*

Lema 4.3.6. *[Gal09, Lema 5.6] Sea $C : A \to A$ un operador de clausura estructural y $u \in A$. Las siguientes propiedades son equivalentes:*

1. *$C(u) = C(1)$ y $C(a) \cdot u = a \cdot u$ para todo $a \in A$.*

2. *$C = C_u$ y $u = u \cdot u$*

Demostración. Supongamos que $C(u) = C(1)$ y $C(a) \cdot u = a \cdot u$ para todo $a \in A$. Entonces $u \cdot u = C(u) \cdot u = C(1) \cdot u = 1 \cdot u = u$. Como $C(a) \cdot u = a \cdot u$, entonces $C(a) \leqslant (a \cdot u)/u = C_u(a)$ Además, como $C(u) = C(1)$, $C(b \cdot u) = C(b \cdot C(u)) = C(b \cdot C(1)) = C(b \cdot 1) = C(b)$. Luego,

$$C_u(a) \cdot u = ([a \cdot u]/u) \cdot u = a \cdot u \;\Rightarrow\; C(C_u(a) \cdot u) = C(a \cdot u)$$

$$\Rightarrow\; C(C_u(a)) = C(a) \;\Rightarrow\; C_u(a) \leqslant C(a).$$

Así tenemos que $C(a) = C_u(a)$ para todo $a \in A$.

Para ver la otra implicación, supongamos que $C = C_u$ y $u = u \cdot u$. Entonces, $C(1) = C_u(1) = (1 \cdot u)/u = u/u = (u \cdot u)/u = C_u(u) = C(u)$. Además, $C(a) \cdot u = C_u(a) \cdot u = ([a \cdot u]/u) \cdot u = a \cdot u$ por (10) de 4.1.7. $\square$

Teorema 4.3.7. *[Gal09, Teorema 5.7] Para todo $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$u *_{\boldsymbol{R}} v = v$, $[(a *_{\boldsymbol{R}} v)/_{*_{\boldsymbol{R}}} v] \cdot u = a \cdot u$ para todo $a \in A$ y $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ para algún $v \in R$ y $u \in A$.*

2. *$C_v(u) = C_v(1)$, $C_v(a) \cdot u = a \cdot u$ para todo $a \in A$ y $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ para algún $v \in R$ y $u \in A$.*

3. *$C_v = C_u$, $u \cdot u = u$ y $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$ para algún $v \in R$ y $u \in A$.*

4. *$\boldsymbol{R}$ es isomorfo a $\boldsymbol{A} \cdot u$ y $u \cdot u = u$ para algún $u \in A$.*

5. *$\boldsymbol{R}$ es cíclico y proyectivo.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2): $u *_{\boldsymbol{R}} v = v \Rightarrow (u *_{\boldsymbol{R}} v)/_{*_{\boldsymbol{R}}} v = v/_{*_{\boldsymbol{R}}} v$, o sea $C_v(u) = C_v(1)$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Se sigue del Lema 4.3.6.

(3) $\Rightarrow$ (4): Por el Lema 4.3.4, $\boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v \cong \boldsymbol{A}_{C_v}$. Por el Corolario 4.3.5, $\boldsymbol{A} \cdot u \cong \boldsymbol{A}_{C_u}$. Como $C_u = C_v$, entonces $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v \cong \boldsymbol{A} \cdot u$ con $u \cdot u = u$.

(4) $\Rightarrow$ (1): Sea $F : \boldsymbol{A} \cdot u \to \boldsymbol{R}$ isomorfismo, tomo $v = F(u)$, entonces $\boldsymbol{R} = F(\boldsymbol{A} \cdot u) = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} F(u) = \boldsymbol{A} *_{\boldsymbol{R}} v$. Además $u *_{\boldsymbol{R}} v = u *_{\boldsymbol{R}} F(u) = F(u \cdot u) = F(u) = v$. Veamos la otra igualdad: $([a *_{\boldsymbol{R}} v]/_{*_{\boldsymbol{R}}} v) \cdot u = ([a *_{\boldsymbol{R}} F(u)]/_{*_{\boldsymbol{R}}} F(u)) \cdot u = [F(a \cdot u)/_{*_{\boldsymbol{R}}} F(u)] \cdot u = [(a \cdot u)/u] \cdot u = a \cdot u$.

(4) $\Rightarrow$ (5): El *$\mathcal{A}$-módulo* $\boldsymbol{A} \cdot u$ es, por construcción, cíclico. Veamos que es onto-proyectivo. Sean $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{Q}$ *$\mathcal{A}$-módulos*, y sean $f : \boldsymbol{A} \cdot u \to \boldsymbol{Q}$ y $g : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{Q}$ morfismos tal que g es sobreyectiva. Sea $p \in P$ tal que $g(p) = f(u)$. Sea $h : \boldsymbol{A} \cdot u \to \boldsymbol{P}$ definida por $h(a \cdot u) = a *_{\boldsymbol{P}} p$. Entonces $gh(a \cdot u) = g(a *_{\boldsymbol{P}} p) = a *_{\boldsymbol{Q}} g(p) = a *_{\boldsymbol{Q}} f(u) = f(a \cdot u)$, o sea h completa el diagrama

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \cdot u \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "f"'] & \boldsymbol{P} \arrow[d, "g"] \\ & \boldsymbol{Q} \end{tikzcd}$$

Entonces $\boldsymbol{A} \cdot u$ es onto-proyectivo, y por la Observación 4.2.3, resulta proyectivo.

(5) $\Rightarrow$ (4): Como $\boldsymbol{R}$ es cíclico, por el Lema 4.3.4, $\boldsymbol{R} \cong \boldsymbol{A}_C$ para $C : A \to A$ un operador de clausura estructural. Como además $\boldsymbol{R}$ es proyectivo, entonces $\boldsymbol{A}_C$ también.

Luego, existe un morfismo f que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}_C \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[dr, "Id"'] & \boldsymbol{A} \arrow[d, "C"] \\
 & \boldsymbol{A}_C
\end{tikzcd}$$

Sea $u = fC(1)$. Tenemos $C(a) = C(a \cdot 1) = C(a \cdot C(1)) = a *_{\boldsymbol{A}_C} C(1)$ para todo $a \in A$. Entonces $fC(a) = f(a *_{\boldsymbol{A}_C} C(1)) = a \cdot fC(1) = a \cdot u$. Entonces $f[A_C] = A \cdot u$. Además, por el diagrama, f es inyectiva, entonces $\boldsymbol{A}_C \cong \boldsymbol{A} \cdot u$. Veamos que $u \cdot u = u$:

$$u \cdot u = fC(1) \cdot fC(1) = f(fC(1) *_{\boldsymbol{A}_C} C(1)) =$$

$$fC(fC(1) \cdot C(1)) = fCC(fC(1) \cdot 1) = fC(fC(1)) = fC(1) = u$$

pues $Cf = Id$. □

Corolario 4.3.8. *Sea $\mathcal{A}$ un retículo residuado completo. El $\mathcal{A}$-módulo asociado $\boldsymbol{A}$ es cíclico y proyectivo en $\mathcal{A}$-*`Mod`*.*

Demostración. Tomando $u = 1 \in A$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot u$ y $1 = 1 \cdot 1$, entonces por 4.3.7, $\boldsymbol{A}$ es cíclico y proyectivo. □

Corolario 4.3.9. *El $\mathcal{A}$-módulo $\boldsymbol{A}$ asociado al retículo residuado completo $\mathcal{A}$ tiene la REP.*

Otro corolario del Teorema 4.3.7 nos da más ejemplos de $\mathcal{A}$-*módulos* con la REP.

Corolario 4.3.10. *[Gal09, Corolario 5.9] $\mathcal{P}(\langle Fm, \star\rangle)$ y $\mathcal{P}(\langle Eq, *\rangle)$ son $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulos cíclicos proyectivos. En consecuencia, tienen la REP.*

Demostración. Sea $v = \{x\}$, con $x \in Va$ y $u = \{\kappa_x\}$ donde κ_x es la sustitución que manda todas las variables a x. Entonces $u \star v = \{\kappa_x\} \star \{x\} = \{x\} = v$ y

$$[(\Gamma \star v)/v]u = [\{\sigma(x) : \sigma \in \Gamma\}/v]u = \{\gamma \in \Sigma : \gamma(x) = \sigma(x) \text{ para algún } \sigma \in \Gamma\}u = \Gamma u$$

para todo $\Gamma \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Y además, $\mathcal{P}(\Sigma) \star v = \{\sigma(x) : \sigma \in \Sigma\} = Fm$. Entonces por el Teorema 4.3.7, $\mathcal{P}(\langle Fm, \star\rangle)$ es cíclico y proyectivo.

Ahora, para $\mathcal{P}(\langle Eq, *\rangle)$, sea $v = \{x \approx y\}$ donde x e y son dos variables distintas. Sean V_x y V_y dos subconjuntos de Va que lo partcionan y tal que $x \in V_x$ e $y \in V_y$. Sea $u = \{\kappa_{x \approx y}\}$, con $\kappa_{x\approx y}$ la sustitución que manda todas las variables de V_x a x y todas las de V_y a y. Entonces $u * v = \{\kappa_{x\approx y}(x \approx y)\} = v$, y por otro lado

$$[(\Gamma * v)/v]u = [(\{\sigma(x \approx y) : \sigma \in \Gamma\}/v]u =$$

$$\{\gamma \in \Sigma : \gamma(x \approx y) = \sigma(x \approx y) \text{ para algún } \sigma \in \Gamma\}u = \Gamma u$$

para todo $\Gamma \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Además, $\mathcal{P}(\Sigma) * v = \{\sigma(x \approx y) : \sigma \in \Sigma\} = Eq$. Luego, por el Teorema 4.3.7, $\mathcal{P}(\langle Eq, *\rangle)$ es cíclico y proyectivo.

Como ambos $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulos son proyectivos, por el Corolario 4.2.3, tienen la REP. $\square$

Proposición 4.3.11. *[Gal09, Proposición 5.10] El $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulo $\mathcal{P}(Seq)$ no es cíclico.*

Demostración. Supongamos que V es un generador de $\mathcal{P}(Seq)$. Como las sustituciones preservan la traza, para todo $\Gamma \subseteq \Sigma$, V tiene secuentes de cierta traza si y sólo si $\Gamma \circ V$ tiene secuentes de la misma traza. Si V no tiene secuentes de alguna traza, entonces $\Gamma \circ V$ no tendrá secuentes de esa traza para todo $\Gamma \subseteq \Sigma$, lo cual sería absurdo pues V es generador. Luego V tiene elementos de todas las trazas. Pero dado un $W \in \mathcal{P}(Seq)$ que no contenga secuentes de cierta traza, existe $\Gamma \subseteq \Sigma$ tal que $W = \Gamma \circ V$, entonces W tiene secuentes de todas las trazas, absurdo. Luego $\mathcal{P}(Seq)$ no es cíclico. $\square$

Vamos a que $\mathcal{A}$-`Mod` tiene coproductos. Esto nos servirá, entre otras cosas, para probar que el $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulo $\mathcal{P}(Seq)$ tiene la REP.

Lema 4.3.12. *[Gal09, Lema 5.11] Sea $\boldsymbol{R}_i$ con $i \in I$ una familia de $\mathcal{A}$-módulos. Entonces el $\mathcal{A}$-módulo $\coprod_{i\in I} \boldsymbol{R}_i = \langle \prod_{i\in I} \mathcal{R}_i, *\rangle$, donde $\prod_{i\in I} \mathcal{R}_i = \langle \prod_{i\in I} R_i, \wedge, \vee\rangle$ es el retículo completo con el orden parcial $x \leqslant y$ si y sólo si $x_i \leqslant_i y_i$, para todo $i \in I$. El supremo, el ínfimo y la acción $*$ están definidos coordenada a coordenada. Los morfismos inyectivos asociados son $\tau_i : R_i \to \prod_{i\in I} R_i$ definidos como $\tau_i(r) = (x_j)_{j\in I}$ donde $x_i = r$ y $x_j =\perp_j$ si $j \neq i$, para cada $i \in I$, donde $\perp_j = \bigwedge R_j$.*

Demostración. Veamos que $\langle \prod_{i\in I} \mathcal{R}_i, *\rangle$ es un *$\mathcal{A}$-módulo*. Debemos ver que $* : A \times \prod_{i\in I} R_i \to \prod_{i\in I} R_i$ es residuada con residuos $a\backslash_* y = (a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}_i}} y_i)_{i\in I}$ y $y/_* x = \bigwedge_{i\in I} y_i/_{*_{\boldsymbol{R}_i}} x_i$. En efecto,

$$a * x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}_i} x_i \leqslant_i y_i \;\forall i \;\Leftrightarrow\; x_i \leqslant_i a\backslash_{*_{\boldsymbol{R}_i}} y_i \;\forall i \;\Leftrightarrow\; x \leqslant a\backslash_* y \quad \text{y}$$

$$a * x \leqslant y \;\Leftrightarrow\; a *_{\boldsymbol{R}_i} x_i \leqslant_i y_i \;\forall i \;\Leftrightarrow\; a \leqslant_i y_i/_{*_{\boldsymbol{R}_i}} x_i \;\forall i \;\Leftrightarrow\; a \leqslant_i \bigwedge_{i\in I} y_i/_{*_{\boldsymbol{R}_i}} x_i \;\Leftrightarrow\; a \leqslant y/_* x.$$

Además,

$$(\sigma \cdot \sigma') * x = ((\sigma \cdot \sigma') *_{\boldsymbol{R}_i} x_i)_{i\in I} = (\sigma *_{\boldsymbol{R}_i} (\sigma' *_{\boldsymbol{R}_i} x_i))_{i\in I} = \sigma * (\sigma' *_{\boldsymbol{R}_i} x_i)_{i\in I} = \sigma * (\sigma' * x) \quad \text{y}$$

$$1 * x = (1 *_{\boldsymbol{R}_i} x_i)_{i\in I} = (x_i)_{i\in I} = x.$$

Luego, $\coprod_{i\in I} \boldsymbol{R}_i = \langle \prod_{i\in I} \mathcal{R}_i, *\rangle$ es un *$\mathcal{A}$-módulo.*

Veamos que $\tau_i : R_i \to \prod_{i\in I} R_i$ es un morfismo de *$\mathcal{A}$-módulos* para todo $i \in I$. Debemos ver que es residuada y que $\tau_i(\sigma *_{\boldsymbol{R}_i} r) = \sigma * \tau_i(r)$ para todo $r \in R_i$ y $\sigma \in A$. Sea $\tau_i^+ : \prod_{i\in I} R_i \to R_i$ $\tau_i^+(x) = x_i$. Tenemos que

$$\tau_i(r) \leqslant y \;\Leftrightarrow\; \tau_i(r)_j \leqslant_j y_j \;\forall j \;\Leftrightarrow\; r \leqslant_i y_i \;\Leftrightarrow\; r \leqslant_i \tau_i^+(y) \quad \text{y}$$

$$(\tau_i(\sigma *_{\boldsymbol{R}_i} r))_i = \sigma *_{\boldsymbol{R}_i} r = (\sigma * \tau_i(r))_i.$$

Además, si $j \neq i$,

$$(\tau_i(\sigma *_{\boldsymbol{R}_i} r))_j = \perp_j = \sigma *_{\boldsymbol{R}_j} \perp_j = \sigma *_{\boldsymbol{R}_j} (\tau_i(r))_j = (\sigma * \tau_i(r))_j.$$

La igualdad $\perp_j = \sigma *_{\boldsymbol{R}_j} \perp_j$ vale por el Lema 4.1.11. Entonces los τ_i son morfismos. Sean $\rho_i : R_i \to Q$ morfismos. Definimos $\rho : \prod_{i\in I} R_i \to Q$ como $\rho(x) = \bigvee_{i\in I} \rho_i(x_i)$ para todo $x \in \prod_{i\in I} R_i$. Veamos que es residuada con residuo $\rho^+(y) = (\rho_i^+(y))_{i\in I}$ para todo $y \in Q$. Esto se sigue de que

$$\rho(x) \leqslant y \ \Leftrightarrow\ \bigvee_{i\in I} \rho_i(x_i) \leqslant y \ \Leftrightarrow\ \rho_i(x_i) \leqslant y \ \forall i \ \Leftrightarrow\ x_i \leqslant \rho_i^+(y) \ \forall i \ \Leftrightarrow\ x \leqslant \rho^+(y).$$

Veamos que ρ es estructural. Sean $x \in \prod_{i\in I} R_i$ y $\sigma \in A$, por el Lema 4.1.11, tenemos que

$$\rho(\sigma * x) = \bigvee_{i\in I} \rho_i(\sigma *_{\boldsymbol{R}_i} x_i) = \bigvee_{i\in I} \sigma *_{\boldsymbol{Q}} \rho_i(x_i) = \sigma *_{\boldsymbol{Q}} \bigvee_{i\in I} \rho_i(x_i) = \sigma *_{\boldsymbol{Q}} \rho(x).$$

Veamos que $\rho\tau_j = \rho_j$ para todo $j \in I$. Si $i \neq j$, $\rho_i(\tau_j(x_j))_i = \rho_i(\perp_i) = \perp_Q$ por el Lema 4.1.11, y $\rho_j(\tau_j(x_j))_j = \rho_j(x_j)$, entonces $\rho\tau_j(x_j) = \bigvee_{i\in I} \rho_i(\tau_j(x_j))_i = \rho_j(x_j)$. □

Lema 4.3.13. *[Gal09, Lema 5.12] El coproducto de una familia de $\mathcal{A}$-módulos proyectivos es un $\mathcal{A}$-módulo proyectivo.*

Demostración. Sean $\boldsymbol{P}_i$ con $i \in I$ *$\mathcal{A}$-módulos* proyectivos. Sean $\boldsymbol{Q}$ y $\boldsymbol{R}$ *$\mathcal{A}$-módulos*, y $g : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ y $k : \coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i \to \boldsymbol{R}$ morfismos, con g sobreyectiva. Sean $\sigma_i : \boldsymbol{P}_i \to \coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i$ los morfismos inyectivos asociados al coproducto. Como cada $\boldsymbol{P}_i$ es proyectivo, existen morfismos $\tau_i : \boldsymbol{P}_i \to \boldsymbol{Q}$ tal que $k\sigma_i = g\tau_i$. Por la propiedad del coproducto, existe un morfismo $\tau : \coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i \to \boldsymbol{Q}$ tal que $\tau_i = \tau\sigma_i$ para todo $i \in I$, entonces los triángulos internos del siguiente diagrama conmutan:

$$\begin{tikzcd}
 & & \boldsymbol{Q} \arrow[dd, "g"] \\
\coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i \arrow[urr, dashed, "\tau"] \arrow[drr, "k"'] & \boldsymbol{P}_i \arrow[l, "\sigma_i"'] \arrow[ur, dashed, "\tau_i"'] \arrow[dr, "k\sigma_i"] & \\
 & & \boldsymbol{R}
\end{tikzcd}$$

Luego $k\sigma_i = g\tau_i = g\tau\sigma_i$. Como existe un único morfismo $f : \coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i \to \boldsymbol{R}$ tal que $f\sigma_i = g\tau_i$, y tanto k como $g\tau$ cumplen esto, entonces $k = g\tau$, o sea el triángulo exterior conmuta. Entonces $\coprod_{i\in I} \boldsymbol{P}_i$ resulta proyectivo. □

Con el siguiente teorema, vemos que el $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulo $\mathcal{P}(Seq)$ es proyectivo, y por consiguiente, tiene la REP.

Teorema 4.3.14. *[Gal09, Teorema 5.13] El $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulo $\mathcal{P}(Seq)$ es coproducto de $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulos cíclicos y proyectivos.*

Demostración. Sea $Va = \{x_1, x_2, ...\}$ una numeración de las variables. Para cada $\langle n, m\rangle$ definimos el secuente $p_{\langle n,m\rangle} = \langle x_1, ..., x_n\rangle \rhd \langle x_{n+1}, ..., x_{n+m}\rangle$, y elegimos una partición de Va: V_{x_1},...,$V_{x_{n+m}}$ tal que $x_i \in V_{x_i}$ para todo $1 \leqslant i \leqslant n+m$. Sean $\kappa_{\langle n,m\rangle}$ la sustitución que manda todos los elementos de V_{x_i} a x_i para todo $1 \leqslant i \leqslant n+m$. Sean $v_{\langle n,m\rangle} = \{p_{\langle n,m\rangle}\} \in \mathcal{P}(Seq)$ y $u_{\langle n,m\rangle} = \{\kappa_{\langle n,m\rangle}\} \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Sea $\boldsymbol{P}_{\langle n,m\rangle} = \mathcal{P}(\Sigma) \circ v_{\langle n,m\rangle}$ el $\mathcal{P}(\Sigma)$-módulo cíclico generado por $v_{\langle n,m\rangle}$, con $P_{\langle n,m\rangle}$ como conjunto subyacente. Tenemos que,

$$u_{\langle n,m\rangle} \circ v_{\langle n,m\rangle} = \{\kappa_{\langle n,m\rangle} \circ (\langle x_1, ..., x_n\rangle \rhd \langle x_{n+1}, ..., x_{n+m}\rangle)\} =$$

$$\{\langle x_1, ..., x_n\rangle \rhd \langle x_{n+1}, ..., x_{n+m}\rangle\} = v_{\langle n,m\rangle}.$$

Sea $\Gamma \in \mathcal{P}(\Sigma)$, entonces,

$$[(\Gamma \circ v_{\langle n,m\rangle})/_{\circ} v_{\langle n,m\rangle}]u_{\langle n,m\rangle} = [\{\sigma \circ p_{\langle n,m\rangle} : \sigma \in \Gamma\}/_{\circ} v_{\langle n,m\rangle}]u_{\langle n,m\rangle} =$$

$$\{\sigma' \in \mathcal{P}(\Sigma) : \sigma' \circ p_{\langle n,m\rangle} = \sigma \circ p_{\langle n,m\rangle}, \sigma \in \Gamma\}u_{\langle n,m\rangle} =$$

$$\{\sigma'\kappa_{\langle n,m\rangle} \in \mathcal{P}(\Sigma) : \sigma' \circ p_{\langle n,m\rangle} = \sigma \circ p_{\langle n,m\rangle} : \sigma \in \Gamma\} =$$

$$\{\sigma'\kappa_{\langle n,m\rangle} \in \mathcal{P}(\Sigma) : \sigma'(x_i) = \sigma(x_i), 1 \leqslant i \leqslant n+m, \sigma \in \Gamma\} =$$

$$\{\sigma\kappa_{\langle n,m\rangle} \in \mathcal{P}(\Sigma) : \sigma \in \Gamma\} = \Gamma \circ u_{\langle n,m\rangle}.$$

Luego, se cumple (1) del Teorema 4.3.7, lo que significa que $\boldsymbol{P}_{\langle n,m\rangle}$ es cíclico y proyectivo.

Sea $F : \prod_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \mathcal{P}(P_{\langle n,m\rangle}) \to \mathcal{P}(Seq)$ definida como

$$F((\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}) = \bigcup_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \Gamma_{\langle n,m\rangle}.$$

Veamos que es residuada, con residuo $F^+ : \mathcal{P}(Seq) \to \prod_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \mathcal{P}(P_{\langle n,m\rangle})$, definido como $F^+(\Gamma) = (\pi_{\langle n,m\rangle}(\Gamma))_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}$, siendo $\pi_{\langle n,m\rangle}(\Gamma) = \{P \in \Gamma : tr(P) = \langle n, m\rangle\}$. Tenemos que

$$F((\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}) \subseteq \Delta \;\Leftrightarrow\; \bigcup_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \Gamma_{\langle n,m\rangle} \subseteq \Delta \;\Leftrightarrow$$

$$\Gamma_{\langle n,m\rangle} \subseteq \pi_{\langle n,m\rangle}(\Delta)\ \forall \langle n,m\rangle \in \omega^2 \;\Leftrightarrow\; (\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \leqslant (\pi_{\langle n,m\rangle}(\Delta))_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}.$$

Sean $(\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \in \prod_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \mathcal{P}(P_{\langle n,m\rangle})$ y $\Delta \in \mathcal{P}(\Sigma)$. Se tiene,

$$F(\Delta \circ (\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}) = F((\Delta \circ \Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}) =$$

$$\bigcup_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \Delta \circ \Gamma_{\langle n,m\rangle} = \Delta \circ \bigcup_{\langle n,m\rangle \in \omega^2} \Gamma_{\langle n,m\rangle} = \Delta \circ F((\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle \in \omega^2}).$$

De donde se sigue que F es estructural. Por otra parte,

$$F((\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}) = F((\Gamma'_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}) \;\Rightarrow\; \bigcup_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}\Gamma_{\langle n,m\rangle} = \bigcup_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}\Gamma'_{\langle n,m\rangle} \;\Rightarrow$$

$$\Gamma_{\langle n,m\rangle} = \Gamma'_{\langle n,m\rangle}\ \forall\langle n,m\rangle\in\omega^2 \;\Rightarrow\; (\Gamma_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle\in\omega^2} = (\Gamma'_{\langle n,m\rangle})_{\langle n,m\rangle\in\omega^2};$$

y por lo tanto F es inyectiva. También es sobreyectiva, ya que dado $\Gamma\in\mathcal{P}(Seq)$, $F((\pi_{\langle n,m\rangle}(\Gamma))_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}) = \Gamma$. Luego, por la Observación 4.1.9, $\mathcal{P}(Seq)\cong\coprod_{\langle n,m\rangle\in\omega^2}\mathcal{P}(\boldsymbol{P}_{\langle n,m\rangle})$, y como cada $\boldsymbol{P}_{\langle n,m\rangle}$ es proyectivo, por el Teorema 4.3.13, $\mathcal{P}(Seq)$ también lo es. □

Vamos a introducir las nociones de ser finitario en el contexto de los $\mathcal{A}$-*módulos*.

Definición 4.3.15. *Un* ***retículo residuado finitario*** $\mathcal{A}$ *es un retículo residuado algebraico en el cual* 1 *es compacto y el producto de dos elementos compactos, es compacto. Un* $\mathcal{A}$*-módulo* $\boldsymbol{R}$ *con* $\mathcal{A}$ *como antes, se dice* ***finitario*** *si* $\mathcal{R}$ *es un retículo completo algebraico y* $a *_{\boldsymbol{R}} x$ *es compacto para todos* $a\in A$ *y* $x\in X$ *compactos. Una transformación estructural* $\rho:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{S}$ *con* $\boldsymbol{R}$ *y* $\boldsymbol{S}$ *finitarios, se dice* ***finitaria*** *si manda compactos en compactos. Un operador de clausura estructural sobre un* $\mathcal{A}$*-módulo finitario* $\boldsymbol{R}$ *se dice* ***finitario*** *si para todo* $x,y\in R$ *con* $y\leqslant C(x)$ *e* y *es compacto, entonces existe un elemento compacto* $x_0\leqslant x$ *tal que* $y\leqslant C(x_0)$.

Lema 4.3.16. *Sea* $\boldsymbol{R}$ *un* $\mathcal{A}$*-módulo finitario, y sea* $C\subseteq R$ *un subconjunto finito de compactos. Entonces* $\bigvee_{c\in C} c$ *es compacto.*

Demostración. Sea $X\subseteq R$ tal que $\bigvee_{c\in C} c\leqslant\bigvee_{x\in X} x$. Luego, para cada $c\in C$, $c\leqslant\bigvee_{x\in X} x$. Como c es compacto, existe $X_c\subseteq X$ finito tal que $c\leqslant\bigvee_{x\in X_c} x$. Sea $X_C=\bigcup_{c\in C} X_c$ un subconjunto finito de X tal que $c\leqslant\bigvee_{x\in X_C} x$, para todo $c\in C$. Luego, $\bigvee_{c\in C} c\leqslant\bigvee_{x\in X_C} x$. De donde se concluye que $\bigvee_{c\in C} c$ es compacto. □

Veamos como son los elementos compactos de $\boldsymbol{A}\cdot u$ con u compacto.

Lema 4.3.17. *[Gal09, Lema 6.9] Sea* u *compacto en* $\boldsymbol{A}$*. Entonces los elementos compactos de* $\boldsymbol{A}\cdot u$ *son exactamente los de la forma* $a\cdot u$ *para* a *compacto en* $\boldsymbol{A}$*.*

Demostración. Claramente si a es compacto en $\boldsymbol{A}$, $a\cdot u$ es compacto en $\boldsymbol{A}\cdot u$. Sea ahora $a\cdot u$ compacto de $\boldsymbol{A}\cdot u$. Como $\boldsymbol{A}$ es finitario, existe $C\subseteq A$ conjunto de elementos compactos de $\boldsymbol{A}$ tal que $a=\bigvee^{A}_{c\in C} c$. Entonces,

$$a\cdot u = (\bigvee_{c\in C}^{A} c)\cdot u = \bigvee_{c\in C}^{A} c\cdot u = \bigvee_{c\in C}^{A\cdot u} c\cdot u,$$

por los lemas 4.1.11 y 4.3.4. Como $a\cdot u$ es compacto en $\boldsymbol{A}\cdot u$, existe $\bar{C}\subseteq C$ finito tal que $a\cdot u=\bigvee^{A\cdot u}_{c\in\bar{C}} c\cdot u=\bigvee^{A}_{c\in\bar{C}} c\cdot u=(\bigvee^{A}_{c\in\bar{C}} c)\cdot u$. Como $\bar{C}$ es finito y sus elementos son compactos, $\bigvee^{A}_{c\in\bar{C}} c$ es un compacto de $\boldsymbol{A}$, por el Lema 4.3.16. □

Lema 4.3.18. *[Gal09, Lema 6.11] Sea $\boldsymbol{P}$ cíclico y onto-proyectivo, con $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \cdot u$, u compacto de $\boldsymbol{A}$ y $u \cdot u = u$. Entonces dados $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\gamma : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R}$ y $\beta : \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{R}$ finitarios, con β suryectiva, existe $\alpha : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{R}$ finitaria tal que $\gamma = \beta\alpha$.*

Demostración. El elemento $y = \gamma(u) \in R$ resulta compacto, pues u lo es. Sea $x \in Q$ tal que $\beta(x) = y$. Existe $X \subseteq Q$ formado por elementos compactos tales que $x = \bigvee_{z \in X} z$. Luego, $y = \beta(x) = \beta(\bigvee_{z \in X} z) = \bigvee_{z \in X} \beta(z)$, pues β preserva supremos arbitrarios, por ser residuada. Como y es compacto, existe $Y \subseteq X$ finito tal que $y = \bigvee_{z \in Y} \beta(x) = \beta(\bigvee_{z \in Y} x)$. Sea $w = \bigvee_{z \in Y} x$, el cual resulta compacto por el Lema 4.3.16 pues es supremo de finitos compactos. Además $\beta(w) = y$. Sea $z = u *_{\boldsymbol{Q}} w$, también compacto.

Definimos la función $\alpha : P \to Q$ como $\alpha(a \cdot u) = a *_{\boldsymbol{Q}} z$. Veamos que es un morfismo de módulos finitario que cumple $\beta\alpha = \gamma$.

Primero veamos que está bien definido. Sean $a, b \in A$ tal que $a \cdot u = b \cdot u$, entonces $a *_{\boldsymbol{Q}} z = a *_{\boldsymbol{Q}} (u *_{\boldsymbol{Q}} w) = (a \cdot u) *_{\boldsymbol{Q}} w = (b \cdot u) *_{\boldsymbol{Q}} w = b *_{\boldsymbol{Q}} (u *_{\boldsymbol{Q}} w) = b *_{\boldsymbol{Q}} z$. Veamos que α es residuada con residuo $\alpha^+ : Q \to P$ definido como $\alpha^+(q) = (q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) \cdot u$. En efecto,

$$\alpha(a \cdot u) \leqslant q \;\Rightarrow\; a *_{\boldsymbol{Q}} z \leqslant q \;\Rightarrow\; a \leqslant q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z \;\Rightarrow\; a \cdot u \leqslant (q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) \cdot u$$

$$a \cdot u \leqslant (q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) \cdot u \;\Rightarrow\; (a \cdot u) *_{\boldsymbol{Q}} z \leqslant [(q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) \cdot u] *_{\boldsymbol{Q}} z \;\Rightarrow$$
$$a *_{\boldsymbol{Q}} (u *_{\boldsymbol{Q}} z) \leqslant (q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) *_{\boldsymbol{Q}} [u *_{\boldsymbol{Q}} z] \;\Rightarrow$$
$$a *_{\boldsymbol{Q}} z \leqslant (q /_{*_{\boldsymbol{Q}}} z) *_{\boldsymbol{Q}} z \leqslant q \;\Rightarrow\; \alpha(a \cdot u) \leqslant q,$$

ya que $u *_{\boldsymbol{Q}} z = u *_{\boldsymbol{Q}} (u *_{\boldsymbol{Q}} w) = (u \cdot u) *_{\boldsymbol{Q}} w = u *_{\boldsymbol{Q}} w = z$.

Veamos ahora que α es estructural. Sean $a, b \in A$, $\alpha(b *_{\boldsymbol{P}} (a \cdot u)) = \alpha((b \cdot a) \cdot u) = (b \cdot a) *_{\boldsymbol{Q}} z = b *_{\boldsymbol{Q}} (a *_{\boldsymbol{Q}} z) = b *_{\boldsymbol{Q}} \alpha(a \cdot u)$.

Veamos que α es finitaria. Sea $a \cdot u \in R$ compacto. Por el Lema 4.3.17, existe c compacto de $\boldsymbol{A}$ tal que $c \cdot u = a \cdot u$. Luego, $\alpha(a \cdot u) = \alpha(c \cdot u) = c \star_{\mathbb{Q}} z$ el cual es compacto, pues c y z lo son. Entonces α resulta finitaria. Por último, tenemos que,

$$\beta\alpha(a \cdot u) = \beta(a *_{\boldsymbol{Q}} z) = \beta(a *_{\boldsymbol{Q}} [u *_{\boldsymbol{Q}} w]) = \beta([a \cdot u] *_{\boldsymbol{Q}} w) = (a \cdot u) *_{\boldsymbol{R}} \beta(w) =$$

$$(a \cdot u) *_{\boldsymbol{R}} y = (a \cdot u) *_{\boldsymbol{R}} \gamma(u) = \gamma([a \cdot u] \cdot u) = \gamma(a \cdot [u \cdot u]) = \gamma(a \cdot u),$$

y en consecuencia, $\beta\alpha = \gamma$. □

Corolario 4.3.19. *Sean $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{S}$ $\mathcal{A}$-módulos finitarios con $\boldsymbol{P}$ cíclico y onto-proyectivo dado por $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A} \cdot u$, u compacto de $\boldsymbol{A}$ y $u \cdot u = u$. Sean, además, C y D operadores de clausura finitarios sobre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{S}$ respectivamente. Entonces toda representación estructural $G : \boldsymbol{P}_C \to \boldsymbol{S}_D$ finitaria es inducida por una transformación estructural finitaria.*

Demostración. Por el lema anterior, existe $\alpha : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$ finitaria tal que el siguiente diagrama conmuta,

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{P} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "GC"'] & \boldsymbol{S} \arrow[d, two heads, "D"] \\ & \boldsymbol{S}_D \end{tikzcd}$$

Luego α induce a G. $\square$

Capítulo 5

Solución en M-Set

5.1. Categorías M-Set y P(M)-Mod

En esta sección vamos a trasladar el Corolario 4.2.3 que caracteriza los $\mathcal{A}$-*módulos* con la REP, al marco de los $\mathcal{M}$-*conjuntos*. Para esto vamos definir la categoría $\mathcal{M}$-$\mathtt{Set}$, donde los objetos son los $\mathcal{M}$-*conjuntos* y los morfismos son las transformaciones estructurales. Por la Observación 4.1.2, tenemos que $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ es un retículo residuado completo. Entonces, podemos considerar la categoría de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* con sus morfismos, a la cual notaremos $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-$\mathtt{Mod}$. Además, tenemos que $\mathcal{P} : \mathcal{M}\text{-}\mathtt{Set} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})\text{-}\mathtt{Mod}$ es un funtor.

Teorema 5.1.1. *[Fon15, Teorema 13] La categoría $\mathcal{M}$-$\mathtt{Set}$ tiene coproductos arbitrarios. Más precisamente, si $\{\mathbb{R}_i\}_{i\in I}$ es una familia de $\mathcal{M}$-conjuntos, $\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i = \langle \coprod_{i\in I} R_i, \star\rangle$, donde $\coprod_{i\in I} R_i = \bigcup_{i\in I}\{\langle x,i\rangle : x\in R_i\}$, con $\star : M\times\coprod_{i\in I} R_i \to \coprod_{i\in I} R_i$ tal que $\sigma\star\langle x,i\rangle = \langle \sigma\star_{\mathbb{R}_i} x, i\rangle$ para todo $x\in R_i$ y $\sigma\in M$, es un $\mathcal{M}$-conjunto y coincide con el coproducto de la familia $\{\mathbb{R}_i\}_{i\in I}$. Más aún, el funtor $\mathcal{P} : \mathcal{M}\text{-}\mathtt{Set} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})\text{-}\mathtt{Mod}$ preserva coproductos, es decir, para toda familia $\{\mathbb{R}_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{M}$-conjuntos, $\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i) \cong \coprod_{i\in I}\mathcal{P}(\mathbb{R}_i)$.*

Demostración. Veamos que $\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i$ es un $\mathcal{M}$-*conjunto*: Sean $\sigma,\sigma'\in M$, entonces $(\sigma\cdot\sigma')\star\langle x,i\rangle = \langle(\sigma\cdot\sigma')\star_{\mathbb{R}_i} x, i\rangle = \langle\sigma\star_{\mathbb{R}_i}(\sigma'\star_{\mathbb{R}_i} x), i\rangle = \sigma\star\langle\sigma'\star_{\mathbb{R}_i} x, i\rangle = \sigma\star(\sigma'\star\langle x,i\rangle)$, y $1\star\langle x,i\rangle = \langle 1\star_{\mathbb{R}_i} x, i\rangle = \langle x,i\rangle$.

Consideramos la función $\tau : \prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i) \to \mathcal{P}(\coprod_{i\in I} R_i)$ definida para cada $\bar{X}\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i)$ como $\tau(\bar{X}) = \bigcup_{i\in I}(\bar{X}(i)\times\{i\})$. Veamos que τ es un morfismo de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*. Denotamos por $\bar{\star}$ a la acción de $\coprod_{i\in I}\mathcal{P}(\mathbb{R}_i) = \langle\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i),\bar{\star}\rangle$.

Primero, veamos que τ es estructural. Sean $\Gamma\in\mathcal{P}(M)$ y $\bar{X}\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i)$, entonces

$$\tau(\Gamma\bar{\star}\bar{X}) = \bigcup_{i\in I}(\Gamma\bar{\star}\bar{X})(i)\times\{i\} = \bigcup_{i\in I}(\Gamma\star_{\mathbb{R}_i}\bar{X}(i)\times\{i\}) = \Gamma\bar{\star}\bigcup_{i\in I}(\bar{X}(i)\times\{i\}) = \Gamma\bar{\star}\tau(\bar{X}).$$

Veamos que τ es residuada. Sea $Z\subseteq\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i)$, entonces

$$\tau(\bigvee_{\bar{X}\in Z}\bar{X}) = \bigcup_{i\in I}[(\bigvee_{\bar{X}\in Z}\bar{X})(i)\times\{i\}] = \bigcup_{i\in I}[(\bigvee_{\bar{X}\in Z}\bar{X}(i))\times\{i\}] =$$

$$\bigcup_{i\in I}[\bigcup_{\bar{X}\in Z}(\bar{X}(i)\times\{i\})] = \bigcup_{\bar{X}\in Z}[\bigcup_{i\in I}(\bar{X}(i)\times\{i\})] = \bigcup_{\bar{X}\in Z}\tau(\bar{X}) = \bigvee_{\bar{X}\in Z}\tau(\bar{X}).$$

Entonces τ es una transformación estructural. Veamos que es una biyección. Sean $\bar{X},\bar{Y}\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i)$ tales que $\bar{X}\neq\bar{Y}$, entonces existe $i\in I$ tal que $\bar{X}(i)\neq\bar{Y}(i)$. Asumimos, sin pérdida de generalidad, que existe $a\in\bar{X}(i)$ tal que $a\notin\bar{Y}(i)$. Entonces $\langle a,i\rangle\in\tau(\bar{X})$ y $\langle a,i\rangle\notin\tau(\bar{Y})$, por lo tanto, $\tau(\bar{X})\neq\tau(\bar{Y})$. Luego, τ es inyectiva.

Sea $X\in\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}R_i)$, definimos $\bar{X}\in\prod_{i\in I}\mathcal{P}(R_i)$ como $\bar{X}(i)=\{a:\langle a,i\rangle\in X\}$ para todo $i\in I$. Luego, $\tau(\bar{X})=X$, y entonces τ es sobreyectiva. Luego, por la Observación 4.1.9, $\coprod_{i\in I}\mathcal{P}(\mathbb{R}_i)\cong\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i)$. Como $\coprod_{i\in I}\mathcal{P}(\mathbb{R}_i)$ es un coproducto de los $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* $\mathcal{P}(\mathbb{R}_i)$, entonces $\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i)$ también, con morfismos de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* $\rho_i:\mathcal{P}(R_i)\to\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}R_i)$.

Sea $\mathbb{S}$ un $\mathcal{M}$-*conjunto* tal que existen $\tau_i:\mathcal{P}(R_i)\to\mathcal{P}(S)$ transformaciones estructurales de $\mathcal{M}$-*conjuntos*. Por la Observación 4.1.10, las transformaciones estructurales de $\mathcal{M}$-*conjuntos* se corresponden con las de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, entonces los τ_i son morfismos de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*. Luego, existe un única $\tau:\mathcal{P}(\coprod_{i\in I}R_i)\to\mathcal{P}(S)$ morfismo de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*, (y por ende una única transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*) tal que $\tau\rho_i=\tau_i$. Entonces $\coprod_{i\in I}\mathbb{R}_i$ resulta ser un coproducto de $\mathbb{R}_i$, con morfismos ρ_i. □

El siguiente lema nos servirá para ver que un $\mathcal{M}$-*conjunto* tiene la REP si y sólo si la tiene como $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*.

Lema 5.1.2. *[Fon15, Lema 14] Para cada $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-módulo $\boldsymbol{R}$ existen un $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{S}$ y un operador de clausura estructural C sobre $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ tal que $\boldsymbol{R}\cong\mathcal{P}(\mathbb{S})_C$.*

Demostración. Sea $\boldsymbol{R}$ un $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*. Consideremos la función $\tau:\prod_{x\in R}\mathcal{P}(M)\to R$ donde $\tau(\bar{\Gamma})=\bigvee\{\sigma *_{\boldsymbol{R}} x : x\in R,\sigma\in\bar{\Gamma}(x)\}$ para todo $\bar{\Gamma}\in\prod_{x\in R}\mathcal{P}(M)$. El mismo, resulta morfismo sobreyectivo con residuo $\tau^+:R\to\prod_{x\in R}\mathcal{P}(M)$, con τ^+ definido por $\tau^+(y)=(\{\sigma\in M:\sigma *_{\boldsymbol{R}} x\leqslant y\})_{x\in R}$. Sean $\bar{\Gamma}\in\prod_{x\in R}$ e $y\in R$, entonces

$$\tau(\bar{\Gamma})\leqslant y \;\Leftrightarrow\; \bigvee\{\sigma *_{\boldsymbol{R}} x:\sigma\in\bar{\Gamma}(x),x\in R\}\leqslant y \;\Leftrightarrow\; \sigma *_{\boldsymbol{R}} x\leqslant y\ \forall\sigma\in\bar{\Gamma}(x),\ \forall x\in R \;\Leftrightarrow$$

$$\bar{\Gamma}(x)\subseteq\{\sigma\in M:\sigma *_{\boldsymbol{R}} x\leqslant y\}\ \forall x\in R \;\Leftrightarrow\; \bar{\Gamma}\subseteq\tau^+(y).$$

Veamos que es estructural. Sean $\Gamma'\in\mathcal{P}(M)$ y $\bar{\Gamma}\in\prod_{x\in R}\mathcal{P}(M)$. Luego,

$$\tau(\Gamma'\star_{\mathbb{M}}\bar{\Gamma})=\bigvee\{\sigma *_{\boldsymbol{R}} x:x\in R,\sigma\in(\Gamma'\star_{\mathbb{M}}\bar{\Gamma})(x)\}=$$

$$\bigvee\{\sigma' *_{\boldsymbol{R}}(\sigma *_{\boldsymbol{R}} x):x\in R,\sigma\in\bar{\Gamma}(x),\sigma'\in\Gamma'\}=$$

$$\Gamma' *_{\boldsymbol{R}}\bigvee\{\sigma *_{\boldsymbol{R}} x:x\in R,\sigma\in\bar{\Gamma}(x)\}=\Gamma' *_{\boldsymbol{R}}\tau(\bar{\Gamma}).$$

Veamos que es sobreyectiva. Sea $y\in R$, defino $\bar{\Gamma}$ tal que $\bar{\Gamma}(x)=\varnothing$ si $x\neq y$ y $\bar{\Gamma}(y)=\{1\}$. Tenemos que,

$$\tau(\bar{\Gamma})=\bigvee\{\sigma *_{\boldsymbol{R}} x:x\in R,\sigma\in\bar{\Gamma}(x)\}=\bigvee\{1 *_{\boldsymbol{R}} y\}=y.$$

Por el Lema 4.1.19, sabemos que $\tau^+\tau$ es un operador clausura estructural. En consecuencia, τ es inyectiva en los puntos fijos de $\tau^+\tau$. En efecto, sean $X, Y \in \tau^+\tau[\coprod_{x\in R}\mathcal{P}(M)]$ tal que $\tau(X) = \tau(Y)$. Luego, $X = \tau^+\tau(X) = \tau^+\tau(Y) = Y$. Luego, $\tau : (\coprod_{x\in R}\mathcal{P}(\mathbb{M}))_{\tau^+\tau} \to \boldsymbol{R}$ es un isomorfismo de módulos. Por el Teorema 5.1.1, tenemos que

$$\boldsymbol{R} \cong (\coprod_{x\in R}\mathcal{P}(\mathbb{M}))_{\tau^+\tau} \cong \mathcal{P}(\coprod_{x\in R}\mathbb{M})_{\tau^+\tau}.$$

□

Teorema 5.1.3. *[Fon15, Teorema 15] Sea $\mathbb{R}$ un $\mathcal{M}$-conjunto. $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene la REP como $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-módulo si y sólo si $\mathbb{R}$ tiene la REP como $\mathcal{M}$-conjunto.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $\mathbb{S}$ un $\mathcal{M}$-*conjunto*, C y D operadores de clausura sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, y $F : C[\mathcal{P}(R)] \to D[\mathcal{P}(S)]$ una representación estructural. Por la Observación 4.1.14, a C y D se los puede ver como operadores de clausura sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\mathcal{P}(\mathbb{S})$ respectivamente. Por el Lema 4.1.17, F es una representación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos*. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tiene la REP, entonces existe una transformación estructural de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* ρ, tal que $FC = D\rho$. Por la Observación 4.1.10, ρ es una transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*. Luego $\mathbb{R}$ tiene la REP.

($\Leftarrow$) Sean $\boldsymbol{T}$ un $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*, C y D operadores de clausura estructurales sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $\boldsymbol{T}$ respectivamente y $F : \mathcal{P}(\mathbb{R})_C \to \boldsymbol{T}_D$ una representación estructural de C en D. Por el Lema 5.1.2, existe un $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{S}$ y un isomorfismo de $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulos* $\rho : \boldsymbol{T} \to \mathcal{P}(\mathbb{S})_E$ asociado a un operador de clausura estructural E sobre $\mathcal{P}(\mathbb{S})$. Por la Proposición 2.2.1, el operador $D' = \rho D\rho^{-1}$, es un operador de clausura estructural sobre $\mathcal{P}(\mathbb{S})_E$. Además, $\rho : \boldsymbol{T}_D \cong (\mathcal{P}(\mathbb{S})_E)_{D'}$. Notemos que C y $D'E$ son operadores de clausura estructurales sobre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$ respectivamente, y $F' := \rho F$ es una representación estructural $F' : \mathcal{P}(R)_C \to \mathcal{P}(S)_{D'E}$. Como $\mathbb{R}$ tiene la REP, existe una transformación estructural $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ que induce a F', es decir, $F'C = D'E\tau \Rightarrow \rho FC = \rho D\rho^{-1}E\tau \Rightarrow FC = D\rho^{-1}E\tau$. Luego, $\rho^{-1}E\tau$ induce a F. □

Lema 5.1.4. *[Fon15, Lema 16] Sea $\mathbb{R}$ un $\mathcal{M}$-conjunto y sea $\mathbb{M}$ el $\mathcal{M}$-conjunto inducido por el monoide $\mathcal{M}$, entonces:*

(i) *$\mathcal{P}(\mathbb{M})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*`Mod`.

(ii) *Si $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*`Mod`*, entonces $\mathbb{R}$ es onto-proyectivo en $\mathcal{M}$-*`Set`.

(iii) *$\mathbb{M}$ es onto-proyectivo en $\mathcal{M}$-*`Set`.

Demostración. (i) Vale por el Lema 4.3.8.

(ii) Supongamos que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`. Sean $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ y $\tau : \mathbb{S} \to \mathbb{Q}$, con τ sobreyectiva. Tenemos $\rho : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ y $\tau : \mathcal{P}(\mathbb{S}) \to \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ con

τ sobreyectiva, entonces es epimorfismo. Como $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es proyectivo, existe $\alpha : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{S})$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}(R) \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathcal{P}(S) \arrow[d, "\tau"] \\ & \mathcal{P}(Q) \end{tikzcd}$$

Como α también es una transformación estructural de $\mathcal{M}$-*conjuntos*, entonces $\mathbb{R}$ es onto-proyectivo.

(iii) Por (i), $\mathcal{P}(\mathbb{M})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`, entonces por (ii), $\mathbb{M}$ es onto-proyectivo en $\mathcal{M}$-`Set`.

□

Estamos en condiciones de mostrar un ejemplo de un módulo con la REP que no tiene variable graduada; el mismo se extrajo de [Fon15, Ejemplo 10]. Así vemos que no vale el recíproco del Teorema 3.2.13.

Ejemplo 5.1.5. Consideramos el monoide $\mathcal{M} = \langle \{0,1\}, \cdot, 1\rangle$ definido por la siguiente tabla:

$\cdot$	0	1
0	1	0
1	0	1

y consideramos el $\mathcal{M}$-*conjunto* trivial $\mathbb{T} := \langle \{a\}, \star_{\mathbb{T}}\rangle$. Veamos que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`. Para esto consideramos la función $\tau : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(\{a\})$, dada por

$$\tau(N) := \begin{cases} \{a\} & \text{si } N \neq \varnothing \\ \varnothing & \text{caso contrario} \end{cases}$$

para todo $N \subseteq M$, y la función $\rho : \mathcal{P}(\{a\}) \to \mathcal{P}(M)$ dada por

$$\rho(Y) := \begin{cases} \{0,1\} & \text{si } Y = \{a\} \\ \varnothing & \text{caso contrario .} \end{cases}$$

Notemos que $\varnothing \subseteq \rho\tau(\varnothing)$, y si $\varnothing \neq N \subseteq M$, $\tau(N) = \{a\}$. Entonces $N \subseteq \{0,1\} = \rho\tau(N)$, o sea, $N \subseteq \rho\tau(N)$ para todo $N \subseteq M$. Además, $\tau\rho(\varnothing) = \tau(\varnothing) = \varnothing$ y $\tau\rho(\{a\}) = \tau(\{0,1\}) = \{a\}$, es decir, $\tau\rho = id_{\mathcal{P}(T)}$. En particular, $\tau\rho(Y) \subseteq Y$ para todo $Y \subseteq \{a\}$, y como τ y ρ son monótonas, por la Observación 1.1.4, ρ es el residuo de τ. Veamos que τ es estructural. Sean $N, X \subseteq M$. Si $N, X \neq \varnothing$, $N \star_{\mathbb{M}} X \neq \varnothing$, $\tau(N \star_{\mathbb{M}} X) = \{a\}$. Por otro lado, $\tau(X) \neq \varnothing$, entonces $N \star_{\mathbb{T}} \tau(X) \neq \varnothing$, o sea $N \star_{\mathbb{T}} \tau(X) = \{a\}$. Luego $\tau(N \star_{\mathbb{M}} X) = N \star_{\mathbb{T}} \tau(X)$. Si N o X es vacío, $N \star_{\mathbb{M}} X = \varnothing$, entonces $\tau(N \star_{\mathbb{M}} X) = \varnothing$. Además, N o $\tau(X)$ es vacío, y por lo tanto, $N \star_{\mathbb{T}} \tau(X) = \varnothing$; es decir, $\tau(N \star_{\mathbb{M}} X) = N \star_{\mathbb{T}} \tau(X)$. Luego, τ es transformación estructural.

Veamos que ρ es residuada con residuo $\rho^+ : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(\{a\})$, dado por

$$\rho^+(N) := \begin{cases} \{a\} & \text{si } N = \{0,1\} \\ \varnothing & \text{caso contrario .} \end{cases}$$

Para ello, observemos que $\rho\rho^+(\{0,1\}) = \rho(\{a\}) = \{0,1\}$ y si $\{0,1\} \neq N \subseteq M$, $\rho\rho^+(N) = \rho(\varnothing) = \varnothing \subseteq N$. Como $\varnothing \subseteq \rho^+\rho(\varnothing)$ y $\{a\} = \rho^+(\{0,1\}) = \rho^+\rho(\{a\})$, y como ρ^+ y ρ son monótona, ρ^+ es el residuo de ρ.

Veamos que ρ es estructural. En efecto,

$$\rho(\{0\} \star_{\mathbb{T}} \{a\}) = \rho(\{a\}) = \{0,1\} = \{0 \cdot 1, 0 \cdot 0\} = \{0\} \star_{\mathbb{M}} \{0,1\} = \{0\} \star_{\mathbb{M}} \rho(\{a\}),$$

$$\rho(\{1\} \star_{\mathbb{T}} \{a\}) = \rho(\{a\}) = \{0,1\} = \{1 \cdot 0, 1 \cdot 1\} = \{1\} \star_{\mathbb{M}} \{0,1\} = \{1\} \star_{\mathbb{M}} \rho(\{a\}) \text{ y}$$

$$\rho(\{0,1\} \star_{\mathbb{T}} \{a\}) = \rho(\{a\}) = \{0,1\} = \{0 \cdot 1, 0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 1 \cdot 1\} = \{0,1\} \star_{\mathbb{M}} \{0,1\} = \{0,1\} \star_{\mathbb{M}} \rho(\{a\}).$$

Si $\varnothing = X \subseteq \{a\}$ o $\varnothing = N \subseteq M$, $\rho(N \star_{\mathbb{T}} X) = \rho(\varnothing) = \varnothing = N \star_{\mathbb{M}} \rho(X)$. Luego, ρ es una transformación estructural.

Antes, vimos que $\tau\rho = id_{\mathcal{P}(T)}$, de donde se sigue que $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ es un retracto de $\mathcal{P}(\mathbb{M})$. Por (i) del Lema 5.1.4, sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{M})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod` y por el Lema 4.2.4, $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ también lo es. Entonces, por el Corolario 4.2.3, $\mathcal{P}(\mathbb{T})$ tiene la REP, y por el Teorema 5.1.3, $\mathbb{T}$ también.

La única graduación para $\mathbb{T}$ es la trivial. Veamos que $\mathbb{T}$ no puede tener ninguna familia coherente de sustituciones. Supongamos que $\kappa : T \to M$ es una familia coherente de sustiticiones, entonces $\kappa_a = \kappa_{\sigma \star_{\mathbb{T}} a} = \sigma \cdot \kappa_a$ para todo $\sigma \in M$. Si $\kappa_a = 0$, tomo $\sigma = 0$, entonces $0 = 0 \cdot 0$, absurdo. Si $\kappa_a = 1$, tomo $\sigma = 0$, entonces $1 = 0 \cdot 1$, absurdo. Luego, $\mathbb{T}$ no puede tener familia coherente de sustituciones, por lo tanto no puede tener una variable graduada, y sin embargo tiene la REP.

Lema 5.1.6. *[Fon15, Lema 17] El coproducto de cualquier familia de $\mathcal{M}$-conjuntos onto-proyectivos es onto-proyectivo.*

Demostración. Sean $\mathbb{P}_i$ para $i \in I$ $\mathcal{M}$-*conjuntos* onto-proyectivos, $f : \coprod_{i \in I} \mathbb{P}_i \to \mathbb{S}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ transformaciones estructurales con g sobreyectiva, y $\pi_i : \mathbb{P}_i \to \coprod_{i \in I} \mathbb{P}_i$ los morfismos del coproducto. Entonces, como cada $\mathbb{P}_i$ es onto-proyectivo, existen $\alpha_i : \mathbb{P}_i \to \mathbb{R}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}_i \arrow[r, dashed, "\alpha_i"] \arrow[dr, "f\pi_i"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{S} \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del coproducto, existe una única $\alpha : \coprod_{i \in I} \mathbb{P}_i \to \mathbb{R}$ tales que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{P}_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "\alpha_i"] & \\ \coprod_{i \in I} \mathbb{P}_i \arrow[rr, dashed, "\exists! \alpha"] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

y existe una única $\beta : \coprod_{i\in I} \mathbb{P}_i \to \mathbb{S}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{P}_i \arrow[dl, "\pi_i"'] \arrow[dr, "f\pi_i"] & \\
\coprod_{i\in I} \mathbb{P}_i \arrow[rr, dashed, "\exists!\beta"] & & \mathbb{S}
\end{tikzcd}$$

En particular, $\beta = f$ hace conmutar el diagrama. Como $(g\alpha)\pi_i = g(\alpha\pi_i) = g\alpha_i = f\pi_i$, $g\alpha$ también hace conmutar el diagrama. Por la unicidad, resulta que $f = g\alpha$, y en consecuencia, $\coprod_{i\in I} \mathbb{P}_i$ es onto-proyectivo. □

La siguiente observación nos servirá para caracterizar a los $\mathcal{M}$-*conjuntos* que tienen la REP.

Observación 5.1.7. Dado un $\mathcal{M}$-*conjunto* $\mathbb{R}$, consideramos el coproducto de R copias de $\mathbb{M}$. Podemos definir:

$$\{\langle\sigma, x\rangle : \sigma \in M, x \in R\} \longrightarrow R$$

$$\langle\sigma, x\rangle \longmapsto \sigma \star_{\mathbb{R}} x$$

y extenderla de manera natural al conjunto potencia para tener una flecha $\phi : \coprod_{x\in R} \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ en $\mathcal{M}$-$\texttt{Set}$, donde $\phi\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} = \{\sigma_i \star_{\mathbb{R}} x_i\}_{i\in I}$ para todo $\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq \coprod_{x\in R} \mathbb{M}$. ϕ resulta una transformación estructural suryectiva.

Veamos que es transfornación estructural. Primero veamos que es residuada con residuo $\phi^+ : \mathcal{P}(R) \to \mathcal{P}(\coprod_{x\in R} M)$ definida $\phi^+(X) = \{\langle\sigma, x\rangle : \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in X\}$ para todo $X \subseteq R$. Sean $X \subseteq R$ y $\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq \coprod_{x\in R} M$,

$$\phi\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq X \Leftrightarrow \{\sigma_i \star_{\mathbb{R}} x_i\}_{i\in I} \subseteq X \Leftrightarrow$$

$$\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq \{\langle\sigma, x\rangle : \sigma \star_{\mathbb{R}} x \in X\} \Leftrightarrow \{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq \phi^+(X).$$

Veamos que ϕ es estructural. Sean $\sigma \in M$ y $\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I} \subseteq \coprod_{x\in R} M$

$$\phi(\sigma \bar{*} \{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I}) = \phi(\{\langle\sigma \cdot \sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I}) = \{(\sigma \cdot \sigma_i) \star_{\mathbb{R}} x_i\}_{i\in I} =$$

$$\{\sigma \star_{\mathbb{R}} (\sigma_i \star_{\mathbb{R}} x_i)\}_{i\in I} = \sigma \star_{\mathbb{R}} \{\sigma_i \star_{\mathbb{R}} x_i\}_{i\in I} = \sigma \star_{\mathbb{R}} \phi\{\langle\sigma_i, x_i\rangle\}_{i\in I}.$$

Veamos que es suryectiva. Sea $X \subseteq R$, tenemos que $\phi\{\langle 1, x\rangle\}_{x\in X} = \{1 \star_{\mathbb{R}} x\}_{x\in X} = \{x\}_{x\in X} = X$.

Teorema 5.1.8. *[Fon15, Teorema 18] Sea $\mathbb{R}$ un $\mathcal{M}$-conjunto y sea $\mathbb{M}$ el $\mathcal{M}$-conjunto inducido por el monoide $\mathcal{M}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $\mathbb{R}$ *es onto-proyectivo en* $\mathcal{M}$-$\texttt{Set}$.

(ii) Para todo $\mathcal{M}$-conjunto $\mathbb{S}$, toda transformación estructural suryectiva $\tau : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ es una retracción.

(iii) *La aplicación* $\phi : \coprod_{x\in R}\mathbb{M} \to \mathbb{R}$*, definida en la observación anterior, es una retracción.*

(iv) *Existe un* $\mathcal{M}$*-conjunto* $\mathbb{S}$ *onto-proyectivo tal que* $\mathbb{R}$ *es el retracto* $\mathbb{S}$*.*

(v) $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *es proyectivo en* $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`*.*

(vi) $\mathbb{R}$ *tiene la REP como* $\mathcal{M}$*-conjunto.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$: Como $\mathbb{R}$ es onto-proyectivo, existe $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, dashed, "\alpha"] \arrow[dr, "id_{\mathbb{R}}"'] & \mathbb{S} \arrow[d, two heads, "\tau"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Entonces τ es una retracción.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Como ϕ es una transformación estructural suryectiva, entonces es una retracción.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Por el Lema 5.1.4, sabemos que $\mathbb{M}$ es onto-proyectivo, y por el Lema 5.1.6, resulta $\coprod_{x\in R}\mathbb{M}$ onto-proyectivo. Por último, la condición (iii) dice que $\mathbb{R}$ es retacto de $\coprod_{x\in R}\mathbb{M}$.

$(iv) \Rightarrow (i)$: Sean $\tau : \mathbb{K} \to \mathbb{T}$ y $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ transformaciones estructurales tal que τ es suryectiva. Suponemos que $\lambda : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ es una retracción, con $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ tal que $\lambda\pi = id_{\mathbb{R}}$. Como por hipótesis $\mathbb{S}$ es onto-proyectivo, existe $\epsilon : \mathbb{S} \to \mathbb{K}$ tal que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S} \arrow[r, dashed, "\epsilon"] \arrow[dr, "\rho\lambda"'] & \mathbb{K} \arrow[d, two heads, "\tau"] \\ & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

Tenemos entonces:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{S} \arrow[r, dashed, "\epsilon"] \arrow[d, "\lambda"'] & \mathbb{K} \arrow[d, two heads, "\tau"] \\ & \mathbb{R} \arrow[r, "\rho"'] & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

Entonces $\tau(\epsilon\pi) = \rho(\lambda\pi)$ y como $\lambda\pi = id_{\mathbb{R}}$, tenemos que $\tau(\epsilon\pi) = \rho$, o sea:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, dashed, "\epsilon\pi"] \arrow[dr, "\rho"'] & \mathbb{K} \arrow[d, two heads, "\tau"] \\ & \mathbb{T} \end{tikzcd}$$

Luego $\mathbb{R}$ es onto-proyectivo.

$(iii) \Rightarrow (v)$: $\mathbb{R}$ es un retracto de $\coprod_{x\in R}\mathbb{M}$. Entonces $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un retracto de $\mathcal{P}(\coprod_{x\in R}\mathbb{M})$ en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`. Por el Teorema 5.1.1, $\mathcal{P}(\coprod_{x\in R}\mathbb{M}) \cong \coprod_{x\in R}\mathcal{P}(\mathbb{M})$. Por el Lema 5.1.4, $\mathcal{P}(\mathbb{M})$ es proyectivo, y por el Lema 4.3.13, $\coprod_{x\in R}\mathcal{P}(\mathbb{M})$ es proyectivo. Entonces $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es un retracto de un $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo* proyectivo. Por el Lema 4.2.4, $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ también es proyectivo.

$(v) \Leftrightarrow (vi)$: Que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sea proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod` es equivalente, por el Corolario 4.2.3, a que $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tenga la REP como $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-*módulo*, y esto es equivalente, por el Teorema 5.1.3 a que $\mathbb{R}$ tenga la REP como $\mathcal{M}$-*conjunto*.

$(v) \Rightarrow (i)$: Por (ii) del Lema 5.1.4, como $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ es proyectivo en $\mathcal{P}(\mathcal{M})$-`Mod`, entonces $\mathbb{R}$ es onto-proyectivo en $\mathcal{M}$-`Set`.

$\square$

Bibliografía

[Fon15] J. Font y T. Moraschini, *M-Sets and the representation problem*, Studia Logica (2015) 103: 21-51.

[Blo06] W. Block y B. Jonsson, *Equivalence of consequence operations*, Studia Logica 83 (2006), no. 1-3, 91-110.

[Blo89] W. Block y D. Pigozzi *Algebrizable logics*, Memoirs of the AMS 77, no. 396, 1989.

[Gal09] N. Galatos y C. Tsinakis *Equivalence of consequence relations: an order-theoretic and categorical perspective*, Journal of Symbolic Logic 74(3),780-810 (2009).

[Gil11] J. Gil-Férez, *Representations of structural closure operators*, Archive for Mathematical Logic 50:45-73, 2011.

[Gil09] J. Gil-Férez, *Categories of modules over complete residuated lattices*, 2009.