UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Matchings: convergencia, unicidad y estabilidad

Rafael Fernando Martin

Director: Juan Pablo Pinasco

Fecha de Presentación

Diciembre 2016

Agradecimientos

A mis viejos, por darme todo en cada momento que lo necesité, por nunca cuestionar la carrera que elegí, por bancarme, discusiones razonables mediante, en todas mis decisiones, por hacerme la persona que soy y, por sobre todo, ser un ejemplo para mí.

A mis hermanos, por acompañarme en mis primeros pasos en esta ciudad, por enseñarme tanto sin darse cuenta, por también hacerme como soy, por compartir charlas de futbol, películas, series, juegos, comida, situaciones y por nunca hacerme sentir un bicho raro por estudiar matemática.

A JPP, por estar siempre tan dispuesto a hablar de matemática y misceláneos, por bancarse que le pidiera tema y no lo tocara durante un año para después, de la nada, pedirle que lo cambiemos al que terminé teniendo, por estar con la correcciones hasta altas horas de la madrugada, por nunca dar una respuesta sin abrir preguntas, por siempre tomarse con humor mi rechazo a las ecuaciones diferenciales, por hacer que de cada clase uno salga con una anécdota interesante del mundo de la matemática y por ayudarme a confeccionar mis columnas radiales.

A Nico, por ser jurado y, por sobre todo, aceptar el desafíoo de ser mi director de doctorado sobre un tema que no es de lo que acostumbra investigar.

A Moma, Claudia y Guille, por darme esa dosis de cariño familiar que toda persona necesita y estar siempre a disposición. A Carlitos, por ser la primera persona que tomó la carrera que iba a estudiar y me hizo un regalo acorde, iniciandome en lo que despues sería clave en que yo hoy esté en esta instancia, la divulgacion y por ser el unico que se sentó conmigo a hablar de matemática e interesarse en lo que estaba aprendiendo.

A Bonder, Lopez, Ferrari, Perrucci, Gravano, Sued y Acosta por sus excelentes teóricas, sin ellas no estaría acá.

A Lucas Bali, por ser el mejor ayudante que tuve. Despues de él, debo mencionar a otros grandes ayudantes como Julián Martínez, Mosquera, Muro, Warnes y Ojea, que me ayudaron a entender y aprobar recuperatorios.

A Valeria Fornes, Guillermo Mattei y Carne de Cañon, por devolverme la pasión por la matemática cuando más lo necesitaba, a veces lo que uno necesita para convencerse es tratar de convencer a otros. A Jaz, por ser mi compañera en los primeros pasos divulgativos aunque tengamos conceptos diferentes de este trabajo.

A mi colegio secundario, el San Ignacio, por haberme dado una muy buena educación que me permitió llegar bien parado a la instancia universitaria y en particular a uno de los profesores de matemática, Alejandro Avaria, por responderme con un "¿Pensaste en estudiar matemática?" cuando le pregunte la diferencia, sutil, entre dos funciones.

A los mil amigos y compañeros que me hice en este larguísimo camino, son muchos, trataré de darles alguna suerte de orden cronológico.

A el Cristian, el Avello, el Torres, el Marce y el Camilo, porque a pesar de tener una cordillera en el medio durante todo el año siempre me reciben como si nunca me hubiera ido.

A Mauro, por obligarme a hacer sociales cuando temía hacerlo, a Pablo por las infinitas historias vividas con una mochila en el hombro, a Lucila por esa suerte de odio/cariño que le daba picante a las reuniones de los cuatro. A ellos tres por ser mis amigos mas viejos en esta ciudad, claves en encontrar mi lugar en el mundo.

A Facu, Marce, Maca, Juanma y Anto, por ayudarme a entender temas complejos, avanzados, reales y probabilisticos.

A Fede, por las canchas, los bajones, los mates, los pes, las juntadas a estudiar, por los chistes, los abrazos de gol, trucos, fulbos, ñoñadas. Otra persona clave en encontrarme y devolverme las ganas de venir a cursar.

A Chebi, pensé que era un pedante asqueroso y terminó siendo una persona interesantisima en la que se puede confiar. Es groso, conozcanlo.

A Los Borbotones, pasados y presentes. Ya volveremos a la categoría que nos corresponde.

A los vices, por los momentos vividos, recuerdos que van a quedar en lo profundo del alma.

A La Botella, nunca un grupo de WA fue tan ñoño.

A Ignacio "Tanque" Rossi, por los goles y principalmente porque sin el todavía estaría googleando cómo hacer cualquier pavada en python, mis primeros meses de programación sin el hubieran sido años. Creo que fue el mayor contribuyente a esta tesis.

A Tincho, por prestarme su computadora, que con todos sus problemas pudo con todas las simulaciones y la escritura completa de la tesis.

Al grupete del IMPA, por las caipis, cervezas, salgados, konis, 409s, blocos, zikas, arroces con gilada, por no despertarme temprano, por compartir el termómetro, por los King of Tóquio, batuques, etc.

A Meli por ser tan grosa, a Jesi por hacerme rendir Fisica en dos semanas, a Bruno por hacer que la lista "Tesis de matemática" sea tan mágica, a Javi y Nami por ser esos amigos de Velez que todos decimos tener, a Mel por hacerme sentir la adrenalina de que en cualquier momento la cago, a Euge por siempre tener tan buena onda y la respuesta precisa, y a Feli por su afro.

A Nico Allo, por hacer la burocracia inútil del CBC para que yo solo me tenga que concentrar en iluminar jovenes mentes.

A mis compañeros de aplicada Juli Campos, Yami Barrera y Gasti.

A Nacho Perito, por tener tanta magia en los pies y siempre un chiste preparado, a Dani por tener tanta rusticidad en los pies y un autobardeo preparado, a Diego siempre ser tan bardero y pajero, a Belen por las charlas en el 42 y hacer de oyente en mis problemas, a Santi y Cami por responder a mis dudas pelotudas sobre fisica y olas.

A Mati, el Mono, Mario, Lucas, Alexis, por los fffulbitos. A fobal del DM, por los fobals.

A todos mis compañeros de divulgación de otras carreras, siempre fue un placer ver como la pasión por la ciencia puede ser generada por una piedra, un queso podrido o una ola.

A Conjunto Abierto, porque me enseñó que con buena onda, organización y mucho huevo se pueden hacer muchas cosas interesantes.

A la UMA, por hacer la reunión en San Luis, donde conocí el tema sobre el que trata esta tesis.

A Martina, porque sin ella gran parte de este año hubiera sido muchísimo peor, por ayudarme en la presentación, en los gráficos, por darme siempre palabras de aliento, por estar a mi lado en todas, por ser el último empujón que necesitaba, por volverse tan importante en mi vida.

A River, Messi, Las Delicias de Caballito, TDN, Seinfeld, Goku, Ultima Online, Warwick, y miles de cosas mas, porque sin alegrías en la vida no tiene sentido recibirse.

A La Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por el excelente nivel de la carrera.

A la sociedad argentina, por mantener la educación libre, gratuita y de calidad a pesar de las embestidas. Es un derecho que debemos apreciar y defender todos los días.

A Chile y Argentina, por ser mis dos hogares, les debo tanto que no se puede ni enumerar.

A vos, que sabiendo que estas por leer la mejor tesis del mundo mundial espacio sideral decidiste igual leer todos los aburridos agradecimientos.

Gracias.

Índice general

Introduccion **vii**

1. Gale-Shapley **1**

1.1. Definiciones y conceptos básicos 1

1.2. Algoritmo de aceptación diferida 3

1.3. Estabilidad 4

1.4. Normalidad 5

1.5. Estructura de reticulado 7

2. Roommate **11**

2.1. Definición, existencia y unicidad 12

2.2. Primera Etapa 13

2.3. Segunda Etapa 18

3. Aleatorios **23**

3.1. Definiciones 24

3.2. Proceso de Roth y Vander Vate 26

3.3. Alcances 30

4. Simulaciones **31**

4.1. El espacio de matchings 32

4.2. Estabilidad de los matchings estables 36

4.2.1. Mismas Listas 36

4.2.2. Listas Pinchadas 37
4.2.3. Permutaciones 39
4.2.4. Listas Madre 43
4.3. Convergencia a equilibrios en casos generales 46
4.3.1. Algoritmo de convergencia 46
4.3.2. Inicio con listas fijas 47
4.3.3. Inicio Aleatorio 51
4.3.4. Conclusiones 53

Bibliografía **55**

Introduccion

Gale Shapley 1962

La mayoría de los matemáticos, en algún momento o en otro, probablemente se hayan encontrado a si mismos intentando refutar la noción de que hay personas con "cabeza para los números" o que saben "un montón de fórmulas". En esos momentos sería conveniente tener a mano un ejemplo donde no necesariamente se preocupan por cuestiones numéricas o geométricas. Para estos casos nosotros recomendamos el enunciado y la demostración de nuestro teorema 1.3.2. El mismo no está argumentado a través de símbolos matemáticos sino en Inglés básico; no hay nada turbio ni tecnisismos. No es necesario conocimiento del calculo matematico. De hecho, lo único necesario es saber contar. Aun así, cualquier matemático reconocerá inmediatamente los argumentos de manera matemática, mientras que los mismos serán difíciles de seguir para cualquier persona sin entrenamiento matemático, pero no por la poca familiaridad de los conceptos utilizados.

Entonces, para revivir la vieja pregunta una vez mas, ¿que es la matemática? La respuesta, aparentemente, es que cualquier argumento que pueda ser seguido con suficiente precisión es matemático, y la razon por la que tus amigos y los nuestros no puedan entender la matemática no es porque no tengan cabeza para los números, sino porque no son capaces de lograr la concentración suficiente que se requiere para seguir una secuencia de inferencias. Esta observación dificilmente sea noticia para aquellos que

> se dedican a enseñar matemática, pero quizás no sea facilmente aceptada por gente fuera de la profesión. Para ellos lo precedente puede servir como ejemplo útil.

Gale y Shapley, final de su paper [GS62] y buen punto de partida para mi tesis.

El problema de encontrar matchings estables uno podría pensar que está presente en muchas instancias de la vida o del quehacer administrativo: asignar partes de trabajos entre un grupo de estudiantes secundarios en el que cada uno prefiere un tema frente a otro, armar parejas en una reunión social con personas solteras, de relaciones abiertas o con pocos tapujos, de forma que nadie pase la noche pensando "estoy seguro que la/el rubia/o me prefería a mi"; pero no fue hasta mediado de los '50 que tomó una relevancia mayor, cuando se empezó a buscar una forma sencilla, rápida, justa y estable de asignar residentes a hospitales. Los estudiantes de medicina se recibían y debían ir a hacer la práctica a algún hospital de EEUU, claramente cada uno tenía una preferencia de hospitales, ya sea por cercanía, especialización, prestigio, etc. Y cada hospital quería tener los mejores, nuevos, profesionales en sus filas, por lo que conseguían información de la carrera de los jovenes que se estaban por recibir y realizaban su propia lista de prioridades. Ambas partes, residentes y hospitales, enviaban esta información a un ente centralizado y este debía retornarles luego una asignación razonable de forma que nadie tenga incentivo a no respetarla y buscar por su propia cuenta mejorarla.

Ideas sobre este problema, y algunos mas que fueron surgiendo a raiz de buscar aplicaciones en casos mas generales o extraños, le valieron a Alvin Roth y Lloyd Shapley el Premio Nobel de Economía en el año 2012.

Variantes de este problema, interesantes a nivel tanto práctico como matemático, existen diversas, dos de ellas me parecen destacables.

Al momento de medir la eficacia de la asignacion de residentes en hospitales se encontraron que cerca del 10 % no aceptaba el lugar al cual había sido enviado, y al buscar el motivo fue recurrente ver que esto sucedía porque durante la carrera se habían formado parejas de médicos que luego la asignación rompía o ubicaba en hospitales muy lejanos, lo que llevaba a que alguno rompiera con lo ofrecido. Al considerar este factor, el algoritmo también empezó a recibir la informacion de parejas que querían estar juntas, retornando índices de eficacia superiores al 98 %. Este es el "problema de los dos cuerpos". Cabe destacar que aparece en los años '70 cuando se incrementa el número de mujeres graduadas en medicina, y las parejas entre médicos crecen, antes se formaban entre médicos y enfermeras, pero una enfermera conseguía fácilmente trabajo en otro hospital.

La otra variante que quiero mencionar es la de programación de transplantes simultáneos de riñón. Por motivos de seguridad los transplantes de riñón se deben hacer de forma simultánea, para que ninguno de los donantes se arrepienta y corte con la cadena (como Homero Simpson, escapándose del quirófano por una ventana). Luego, teniendo una lista de todos los donantes y cualidades del órgano a donar, la idea es encontrar una cadena lo mas larga posible de transplantes para satisfacer a la mayor cantidad de beneficiados posibles con órganos compatibles mejores que el que le ofrece su donante.

En el capítulo 1 de esta tesis daremos los lineamientos basicos de lo que es un matching y probaremos los resultados mas importantes dados por Gale y Shapley en su trabajo [GS62]. En el segundo capítulo repasaremos una variante clasica conocida como el "problema del compañero de habitacion" donde se busca armar parejas dentro de un mismo conjunto y daremos un algoritmo propuesto por Irving en [Irv85] que nos permitirá encontrar un matching en el caso de existir. Ya en el tercer capátulo hablaremos de un proceso aleatorio para alcanzar un matching estable que retomaremos en el cuarto capítulo para realizar varias simulaciones que nos permitirán hablar sobre la estabilidad de la unicidad del matching según las listas, y darnos una idea de cómo es el espacio de matching estables.

Capítulo 1

Gale-Shapley

En este capítulo explicaremos qué es un matching, y describiremos el trabajo presentado por Gale y Shapley [GS62] que introdujo el problema de armarlos, en particular, cómo armar parejas de hombres y mujeres de forma que no se generen futuras rupturas de ellas. También daremos la solución que dieron al problema vía un algoritmo iterativo muy sencillo en base a "listas de espera" y comentaremos que de esta forma podemos llegar a más de una asignación en equilibrio que representan las mejores situaciones para cada género.

1.1. Definiciones y conceptos básicos

Consideremos los conjuntos de agentes $M = \{m_1, ..., m_n\}$ y $H = \{h_1, ..., h_p\}$ a quienes llamaremos "mujeres" y "hombres" (que llamaremos género), cada uno con un orden de preferencias completo y transitivo sobre los agentes del otro conjunto y un agente extra que consideraremos que es el agente mismo.

El orden de preferencias de una mujer m, por ejemplo, puede ser representado por una lista ordenada $P(m)$: si la mujer m prefiere a h_i frente a h_j, entonces h_i aparecerá antes que h_j en $P(m)$. Por ejemplo, $P(m)$ será representada por

$$P(m) = (h_2, h_5, h_3, m, h_1, h_4, h_6)$$

indicando que su primer opción es h_2, la segunda h_5, como tercer opción h_3, su cuarta opción sera permanecer soltero, etc. Para los propósitos de esta tesis será suficiente describir solo a aquellos agentes que son preferidos antes que quedar soltero, por lo que las lista antes descriptas serán resumidas de la siguiente manera:

$$P(m) = (h_2, h_5, h_3).$$

Notaremos $l_1 \succ_p l_2$ si el agente p prefiere a l_1 frente a l_2.

Sea $P \equiv \{P(m_1), \cdots, P(m_n), P(h_1), \cdots, P(h_p)\}$ el conjunto de listas de preferencias de todos los agentes. Una instancia del problema del matrimonio será dada por la terna (M, H, P).

Definición 1.1.1. *Decimos que una función uno a uno* $\mu : M \cup H \to M \cup H$ *es un* matching *si para cada* $m \in M$ *y para cada* $h \in H$ *se cumplen:*

- $\mu(m) = h \Leftrightarrow \mu(h) = m$*, esta condición se suele notar por comodidad,* $\mu(\mu(p)) = p$ *para todo agente* $p \in M \cup H$*, es decir, es una involucion de orden 2.*

- *Si* $\mu(m) \notin H$ *entonces* $\mu(m) = m$*. Análogamente, si* $\mu(h) \notin M$ *entonces* $\mu(h) = h$*.*

Si $\mu(m) = h$ diremos que m está emparejada con h y si $\mu(m) = m$ diremos que está soltera.

Definición 1.1.2. *Para un matching* μ *dado diremos que una mujer* m *y un hombre* h bloquean *a* μ *si no están emparejados* ($\mu(m) \neq h$) *y entre ellos se prefieren frente a las parejas actuales, es decir,* m *prefiere a* h *frente* $\mu(m)$ *y* h *prefiere a* m *frente a* $\mu(h)$*.*

Definición 1.1.3. *Diremos que un agente* p *se* bloquea a sí mismo *en un matching* μ *si* p *prefiere estar soltero frente a* $\mu(p)$

Definición 1.1.4. *Diremos que un matching* μ *es* individualmente racional *si ningún agente se bloquea a sí mismo.*

Definición 1.1.5. *Un matching individualmente racional* μ *se dirá* estable *si no contiene parejas que se bloqueen.*

1.2. Algoritmo de aceptación diferida

Gale y Shapley en su trabajo [GS62] consideraron el siguiente algoritmo para una instancia (M, H, P) al cual llamaron "Algoritmo de Aceptación Diferida" (AAD de ahora en adelante).

(i) Inicialmente cada mujer no está emparejada con nadie.

(ii) Cada hombre se propone como pareja a la mujer mejor ubicada en su lista.

(iii) Cada mujer evalúa sus propuestas, incluyendo al hombre con el que podría estar provisoriamente emparejada, y se queda con el mejor ubicado en su lista, quedándose provisoriamente con él y rechazando al resto.

(iv) Cada hombre rechazado se ofrece a la siguiente mujer preferida de su lista.

(v) Repetir el paso (ii) y (iii) hasta que ningún hombre sea rechazado o que los hombres libres hayan agotado su lista.

Observación 1.2.1. *El algoritmo antes descripto tiene a los hombres como los agentes que proponen formar parejas, de la misma forma se puede ejecutar el algoritmo con las mujeres como el conjunto de agentes que propone.*

Veamos un ejemplo sencillo de cómo sería la ejecución de este algoritmo. Supongamos que tenemos un conjunto de agentes femeninos

$$\{Lisa, Marge, Jessica\},$$

y otro de agentes masculinos

$$\{Homero, Nelson, Bart, Milhouse\},$$

con las siguientes listas de preferencias:

$$
\begin{aligned}
&P(Lisa) = (Nelson, Bart)\\
&P(Marge) = (Homero, Bart, Nelson)\\
&P(Jessica) = (Bart, Homero, Nelson)\\
&P(Homero) = (Lisa, Marge, Jessica)\\
&P(Nelson) = (Marge, Lisa)\\
&P(Bart) = (Jessica, Marge)\\
&P(Milhouse) = (Lisa, Marge, Jessica)
\end{aligned}
$$

Luego la sucesión de propuestas sería la siguiente

Lisa	Marge	Jessica	libres
Homero Milhouse	Nelson	Bart	∅
∅	Nelson	Bart	Homero Milhouse
∅	Nelson Homero Milhouse	Bart	∅
∅	Homero	Bart	Nelson Milhouse
Nelson	Homero	Bart Milhouse	∅
Nelson	Homero	Bart	Milhouse

Como el único agente libre que queda ya agotó su lista, el algoritmo termina con las parejas $(Marge, Homero)$, $(Lisa, Nelson)$, $(Jessica, Bart)$ y el agente Milhouse soltero.

1.3. Estabilidad

El siguiente resultado demuestra que este algoritmo se detiene, y se consigue así un matching estable.

Teorema 1.3.1 (Gale y Shapley)**.** *El Algoritmo de Aceptación Diferida construye un matching estable.*

Demostración. Primero veamos que el algoritmo termina. Esto sucede porque en cada iteración del algoritmo al menos un hombre baja un nivel en su lista de preferencia y en el peor de los casos esto sucede $np = |M| \times |H|$ veces, con p el numero de hombres y n el de mujeres.

Ahora veamos que efectivamente el matching alcanzado es estable. Observemos que una vez que una mujer está tentativamente emparejada, solo cambia de pareja si se le propone una opción mejor, es decir, de una iteración a otra solo puede mejorar su situación o se queda igual, pero nunca empeora. Supongamos que el matching obtenido por AAD no es estable, es decir, existen $m \in M$ y $h \in H$ con $m \neq \mu(h)$ tal que m prefiere a h frente a $\mu(m)$ y h a m contra $\mu(h)$. Como las propuestas se realizan en el orden dado por $P(h)$, h se propuso a m antes que a $\mu(h)$ y si m no lo aceptó, esto solo pudo pasar si m en ese momento estaba con un candidato mejor, pero por la observación no pudo haber terminado emparejada con un candidato peor que h, lo cual es un absurdo. Entonces el matching obtenido es estable. $\square$

Con este resultado Gale y Shapley probaron el siguiente enunciado.

Teorema 1.3.2. *Dada una instancia (M, H, P) del problema del matrimonio, el conjunto de matchings estables es no vacío.*

Demostración. La demostración no es más que aplicar AAD a la instancia. $\square$

1.4. Normalidad

Teniendo en cuenta que el algoritmo puede ser corrido tanto con las mujeres como género que propone como con los hombres proponiendo, nos podríamos preguntar si ambos alcanzan el mismo matching. En esta sección avanzaremos en ese sentido para demostrar que ambos son, en general, distintos. Más aún, de alguna forma son los "casos extremos" en el conjunto de matchings estables.

Definición 1.4.1. *Decimos que un agente p es* alcanzable *por otro agente del género contrario, l, si existe un matching estable μ tal que $\mu(l) = p$*

Teorema 1.4.2. *Sea μ el matching estable obtenido por AAD con los hombres proponiéndose. Entonces,*

(i) Para cada hombre h, $\mu(h)$ es la mujer alcanzable mejor ubicada en $P(h)$.

(ii) Para cada mujer m, $\mu(m)$ es el hombre alcanzable peor ubicado en $P(m)$.

Demostración. Probaremos (i) por el absurdo. Supongamos que μ no empareja a cada hombre con su mejor opción alcanzable. Consideremos el primer momento durante la ejecución del algoritmo donde un hombre h es rechazado por su mejor opción alcanzable m y supongamos que lo rechaza para quedarse con h' que es preferido por ella frente a h. Como este es el primer momento en el que un hombre es rechazado por su mejor opción alcanzable sabemos que h' prefiere a m tanto o más que a su mejor opción alcanzable. Además, como m es la mejor opción alcanzable de h, existe otro matching estable μ' en el que ellos están emparejados. En μ', h' está emparejado con una mujer distinta a m. Esto resulta una contradicción: h' prefiere a m tanto o más que a su mejor opción alcanzable, en particular, que a $\mu'(h')$, y m prefiere a h' frente a h, con lo cual μ' no es estable.

También probaremos (ii) por el absurdo. Supongamos que en μ la mujer m queda emparejada con h, que es una mejor opción que su peor alcanzable h'. Entonces existe otro matching estable μ' en el que h' y m son una pareja y h con una mujer distinta de m. Entonces en el matching μ', m prefiere estar con h antes que con su pareja h'. Además, por la parte (i), en μ, h está con su mejor opción alcanzable m. Luego, h prefiere a m frente a $\mu'(h)$ y m prefiere a h contra $\mu'(m) = h'$, y entonces μ' no es estable. □

Corolario 1.4.3 (Peor es nada)**.** *Si para un agente, AAD con hombres proponiendo y AAD con mujeres proponiendo le asignan la misma persona, entonces era la única persona alcanzable.*

1.5. Estructura de reticulado

Se puede probar la existencia de un matching estable usando el teorema del punto fijo de Tarski [Tar55]. Para esto sera útil relajar un poco la noción de matching.

Definición 1.5.1. *Una asignación de mujeres a hombres tal que cada hombre este asignado a lo sumo una mujer, pero una mujer puede estar asignada a más de un hombre será llamada* semimatching masculino. *Análogamente se define un* semimatching femenino

Por ejemplo, asignarle a cada hombre su primer opción es un semimatching masculino.

Definición 1.5.2. *Un par de semimatchings masculinos y femeninos se llamara* semimatching

Un ejemplo de semimatching sería asignar a cada hombre su primer opción y a cada mujer la última de su lista. Al igual que con matchings a la mujer asignada al hombre h por el semimatching μ la denotaremos por $\mu(h)$. Si μ no asigna ninguna mujer al hombre h también será notado por $\mu(h) = h$.

Ahora definiremos un orden parcial sobre el conjunto de semimatchings. Notaremos $\mu \succeq \nu$ si

(i) $\mu(h) \succ_h \nu(h)$ o $\mu(h) = \nu(h)$ para todo $h \in H$ y

(ii) $\mu(m) \prec_m \nu(m)$ o $\mu(m) = \nu(m)$ para todo $m \in M$.

Es decir, $\mu \succeq \nu$ si todos los hombres se ven favorecidos por μ frente a la de ν y todas las mujeres se ven perjudicadas.

Definición 1.5.3. *Dados dos semimatchings μ y ν definimos el supremo $\lambda = \mu \vee \nu$ como*

- $\lambda(h) = \mu(h)$ *si* $\mu(h) \succ_h \nu(h)$, *si no,* $\lambda(h) = \nu(h)$,
- $\lambda(m) = \mu(m)$ *si* $\mu(m) \prec_m \nu(m)$, *si no,* $\lambda(m) = \nu(m)$,

y el ínfimo $\lambda' = \mu \wedge \nu$ *como*

- $\lambda'(h) = \mu(h)$ *si* $\mu(h) \prec_h \nu(h)$*, si no,* $\lambda'(h) = \nu(h)$*,*
- $\lambda'(m) = \mu(m)$ *si* $\mu(m) \prec_m \nu(m)$*, si no,* $\lambda'(m) = \nu(m)$*.*

Con estas definiciones se puede probar sin mayor dificultad que el conjunto de semimatchings forma un reticulado. Recordemos que un reticulado es una conjunto con un orden parcial tal que todo par de elementos tiene un supremo y un ínfimo en el conjunto.

Definición 1.5.4. *Sea* μ *un semimatching, definimos una función no decreciente* f *del conjunto de semimatchings en sí mismo dando* $f(\mu)$ *el siguiente semimatching:*

(i) $f(\mu)(h)$ *es la mujer preferida por* h *dentro del conjunto*

$$\{m : h \succ_m \mu(m), h = \mu(m)\},$$

o sea, todas las mujeres que prefieren estar con h *que con quien están actualmente y todas aquellas que ya están asignadas a* h*. Si este conjunto es vacío, entonces* $f(\mu)(h) = h$*.*

(ii) $f(\mu)(m)$ *es el hombre preferido por* m *dentro del conjunto*

$$\{h : m \succ_h \mu(h), m = \mu(h)\},$$

análogo al anterior. Si este conjunto es vacío, entonces $f(\mu)(m) = m$*.*

Es claro que f envía un semimatching a otro semimatching.

Recordemos el siguiente teorema de Knaster y Tarski [KT28] sobre la existencia de puntos fijos en reticulados.

Teorema 1.5.5. *Sea* $(A, \succeq)$ *un reticulado completo y* f *una funcion no decreciente de* A *en* A*. Luego el conjunto* $P = \{x \in A | f(x) = x\}$ *es no vacío, es decir, existe un punto fijo.*

Teorema 1.5.6. *Existe un semimatching μ tal que $f(\mu) = \mu$ y ese μ es estable.*

Demostración. Usaremos el teorema del punto fijo de Tarski [Tar55]. Alcanza con ver que f es no decreciente. Supongamos que $\mu \succeq \nu$ y sea $h \in H$. De la definición de $\succeq$ entre semimatchings, las mujeres están peor sobre μ que sobre ν. Así

$$\{m : h \succ_m \nu(m)\} \subseteq \{m : h \succ_m \mu(m)\}$$

entonces $f(\mu)(h) \succ_h f(\nu)(h)$ o $f(\mu)(h) = f(\nu)(h)$. Un argumento similar aplica para cada $m \in M$. Luego, f es no decreciente.

Entonces, como las condiciones del teorema de Tarski se cumplen, se sigue que existe un semimatching μ tal que $f(\mu) = \mu$.

Veamos que ese semimatching es efectivamente un matching estable.

Por la definición de semimatching tenemos que para todo $h \in H$, $\mu(h)$ es univaluado, así como para todo $m \in M$. Para ver que es un matching, debemos ver que no ocurre que exista un par $h_1, h_2 \in H$ tal que $\mu(h_1) = m*$, y $\mu(m*) = h_2$. Supondremos que sí, y llegaremos a un absurdo.

Como $f(\mu) = \mu$ se sigue que $m*$ es la mejor opción de h_1 dentro de

$$\{m : h_1 \succ_m \mu(m), h_1 = \mu(m)\},$$

y h_2 es la mejor opción de $m*$ en

$$\{h : m* \succ_h \mu(m), m* = \mu(h)\}.$$

De esto extraemos que $h_1 \succ_{m*} h_2$. Sin embargo, $h_2 = \mu(m*) = f(\mu)(m*)$, que es el hombre preferido de $m*$ dentro de $\{h : m* \succ_h \mu(h), m* = \mu(h)\}$. Como h_1 y h_2 son miembros de este conjunto, llegamos a una contradicción. Luego es un matching, $\mu(\mu(p)) = p$ para todos los agentes p.

Para probar que nuestro matching μ es estable vamos a suponer que no. Entonces deben existir $m \in M$ y $h \in H$ tal que $\mu(h) \neq m$ y $m \succ_h \mu(h)$ y $h \succ_m \mu(m)$, es decir, se prefieren mutuamente frente a lo que les fue asignado por μ. Llamemos $h' = \mu(m)$ y $m' = \mu(h)$. Ahora $h' = \mu(m) = f(\mu)(m)$ que es la mejor opción de m dentro de $\{h : m \succ_h \mu(m), m = \mu(h)\}$. Pero este conjunto contiene a h, que es preferida por m frente a h', llegando a una contradicción. Luego, es estable. $\square$

.

Capítulo 2

Roommate

En el capítulo anterior dimos las primeras definiciones necesarias para enunciar el problema del matrimonio, consideramos dos conjuntos a los cuales llamamos "mujeres" y "hombres" a los que intentamos juntar en parejas estables, pero a estos términos les subyace la idea de que las parejas son heterosexuales o, mas en general, que pertenecen a conjuntos distintos. Luego uno se podría preguntar qué se puede decir, si es que se puede decir algo, si uno quisiera considerar parejas homosexuales, es decir, formar parejas dentro de un mismo conjunto.

Esta variante ya fue introducida por Gale y Shapley en [GS62] como el "problema del compañero de habitación" (Roommate problem, en inglés) quienes dieron un ejemplo sencillo de que no existe un matching estable cuando uno considera esta variante del problema original del matrimonio. Luego Knuth [Knu76] mostró un ejemplo en el que existen múltiples matchings estables, y por último, Robert Irving [Irv85] exhibió un algoritmo eficiente estructurado en dos etapas para hallarlo en el caso de existir, y que reporta la no existencia si no lo hay.

En este capítulo repasaremos estos ejemplos de no existencia o multiplicidad de matchings para terminar viendo el algoritmo que nos permite obtener un matching. Señalemos que existen otras variantes interesantes de los problemas de matrimonios estables y de compañeros de habitación, ver por ejemplo [MII+02].

2.1. Definición, existencia y unicidad

Debemos reformular el concepto de matching para esta variante.

Definición 2.1.1. *Sea A un conjunto de cardinal par, para cada $a \in A$ tenemos una lista $P(a)$ ordenada de los elementos de A, que denotará las preferencias de a. En este contexto llamaremos* matching *a una funcion $\mu : A \to A$ biyectiva tal que, para todo $a \in A$, $\mu(\mu(a)) = a$.*

La idea de matching estable sigue siendo la misma, que no existan dos agentes no emparejados que simultaneamente se prefieran frente a la actual pareja.

Notemos que en esta variante pedimos que las listas de preferencias sean completas y que la cantidad de agentes sea par, para que, a diferencia del matching clásico, todos terminen con un compañero.

Dicho esto podemos mostrar un ejemplo en el que, a diferencia de los matchings entre dos conjuntos distintos, no existe un matching estable.

Teorema 2.1.2. *Dada una instancia (A, P) del problema del compañero de cuarto, el conjunto de matchings estables para esa instancia podría ser vacío.*

Demostración. Consideremos α, β, γ y π agentes con listas de preferencias

$$P(\alpha) = (\beta, \gamma, \pi), \quad P(\beta) = (\gamma, \alpha, \pi), \quad P(\gamma) = (\alpha, \beta, \pi)$$

y $P(\pi)$ cualquier orden de los otros tres agentes.

En este caso, si μ es un matching sobre estos agentes, $\mu(\pi)$ preferirá estar con aquel agente que lo tenga como primer preferencia y este, claramente, lo preferirá. Luego, como todo agente que tenga como compañero a π genera una inestabilidad, no existe el matching buscado. □

Una vez visto que una instancia del problema podría no tener una solución estable, veamos ahora el ejemplo dado por Knuth en el que pueden formarse tres matchings estables distintos.

Ejemplo 2.1.3. *Consideremos ocho agentes numerados con las siguientes listas de preferencias*

$$\begin{array}{ll} P(1) = (2,5,4,6,7,8,3) & P(2) = (3,6,1,7,8,5,4) \\ P(3) = (4,7,2,8,5,6,1) & P(4) = (1,8,3,5,6,7,2) \\ P(5) = (6,1,8,2,3,4,7) & P(6) = (7,2,5,3,4,1,8) \\ P(7) = (8,3,6,4,1,2,5) & P(8) = (5,4,7,1,2,3,6) \end{array}$$

En esta situación podemos formar tres matchings estables distintos

$$\{(1,2),(3,4),(5,8),(6,7)\}$$

$$\{(1,4),(2,3),(5,6),(7,8)\}$$

$$\{(1,5),(2,6),(3,7),(4,8)\}$$

Luego de ver que en instancias del problema del compañero de habitación puede no existir un equilibrio, o pueden haber varios, en principio no comparables como en el de matrimonio, Irving [Irv85] propuso un algoritmo que resuelve este problema, en el sentido de hallar un matching en el caso que exista y que cuando no se pueda encontrar responda de forma negativa.

Dicho algoritmo está diagramado en dos etapas consecutivas, luego de la primera podremos desechar los casos en los que no existe equilibrio por la presencia de un agente poco apreciado por el resto, como en el caso del ejemplo que citamos. Luego, de la segunda podremos responder de forma positiva dando el equilibrio, o negativa indicando la no existencia.

2.2. Primera Etapa

La primer etapa tiene el espíritu del algoritmo de aceptación diferida, es una secuencia de proposiciones ordenadas, pero a diferencia del AAD las propuestas no se realizan todas al mismo tiempo, sino una a la vez y siguiendo un esquema particular, además de eso no es simétrico: un agente puede aceptar la propuesta de otro y proponerse a un tercer agente, consiguiendo al final un semi-matching.

Las propuestas se dan de acuerdo a las siguientes reglas:

(a) Si x recibe una propuesta de y, entonces

- Lo rechaza si ya tiene una propuesta mejor, es decir, si tiene una propuesta vigente de alguien mejor ubicado en su lista.
- Lo conserva y lo considera como su propuesta vigente si es mejor que su propuesta vigente, rechazando la anterior, o si no tenía propuesta.

(b) Un individuo x se propone u ofrece a otros siguiendo el orden de su lista de preferencias, deteniéndose cuando su propuesta es aceptada, y continuando si eventualmente es rechazado en el futuro.

Como los agentes realizan sus propuestas una a la vez, generando una cadena de propuestas y rechazos, termina eventualmente en n^2 pasos pues en cada uno algún agente es obligado a bajar un nivel su preferencia.

Al terminar podemos estar en cualquiera de las siguientes situaciones:

1. Cada agente tiene una propuesta.
2. Uno o más agentes fueron rechazados por todos.

Veamos dos ejemplos de como sería la ejecución de este algoritmo.

Ejemplo 2.2.1. *Retomando el ejemplo dado por Gale y Shapley. Sean α, β, γ y π agentes con listas de preferencias*

$$P(\alpha) = (\beta, \gamma, \pi), P(\beta) = (\gamma, \alpha, \pi), P(\gamma) = (\alpha, \beta, \pi)$$

y fijemos $P(\pi) = (\alpha, \beta, \gamma)$. Luego la ejecución sería

propuesta	*consecuencias*	*estado*
α *se propone a* β	β *conserva a* α	$\{\beta : \alpha\}$
β *se propone a* γ	γ *conserva a* β	$\{\beta : \alpha, \gamma : \beta\}$
γ *se propone a* α	α *conserva a* γ	$\{\alpha : \gamma, \beta : \alpha, \gamma : \beta\}$
π *se propone a* α	α *rechaza a* π	$\{\alpha : \gamma, \beta : \alpha, \gamma : \beta\}$
π *se propone a* β	β *rechaza a* π	$\{\alpha : \gamma, \beta : \alpha, \gamma : \beta\}$
π *se propone a* γ	γ *rechaza a* π	$\{\alpha : \gamma, \beta : \alpha, \gamma : \beta\}$
π *agota su lista*	*la secuencia termina*	$\{\alpha : \gamma, \beta : \alpha, \gamma : \beta\}$

Notemos que π fue rechazado por todos, más adelante, en 2.2.5, veremos que esto indica que no existe un matching estable.

Ahora veamos un ejemplo donde esto no sucede, es decir, la secuencia termina con todos los agentes con alguna propuesta.

Ejemplo 2.2.2. *Consideremos un problema con 6 agentes* $\{1, ..., 6\}$ *con las siguientes listas de preferencias*

$$P(1) = (4, 6, 2, 5, 3) \quad P(2) = (6, 3, 5, 1, 4)$$
$$P(3) = (4, 5, 1, 6, 2) \quad P(4) = (2, 6, 5, 1, 3)$$
$$P(5) = (4, 2, 3, 6, 1) \quad P(6) = (5, 1, 4, 2, 3)$$

La ejecución de la primera etapa sería la siguiente

propuesta	*consecuencias*	*estado*
1 se propone a 4	*4 conserva a 1*	{*4:1*}
2 se propone a 6	*6 conserva a 2*	{*4:1,6:2*}
3 se propone a 4	*4 rechaza a 3*	{*4:1,6:2*}
3 se propone a 5	*5 conserva a 3*	{*4:1,5:3,6:2,*}
4 se propone a 2	*2 conserva a 4*	{*2:4,4:1,5:3,6:2*}
5 se propone a 4	*4 conserva a 5 y rechaza a 1*	{*2:4,4:5,5:3,6:2*}
1 se propone a 6	*6 conserva a 1 y rechaza a 2*	{*2:4,4:5,5:3,6:1*}
2 se propone a 3	*3 conserva a 2*	{*2:4,3:2,4:5,5:3,6:1*}
6 se propone a 5	*5 rechaza a 6*	{*2:4,3:2,4:5,5:3,6:1*}
6 se propone a 1	*1 acepta a 6*	{*1:6,2:4,3:2,4:5,5:3,6:1*}

Notemos que lo que conseguimos no es un matching, sino un semimatching, pues si bien 2 aceptó la propuesta de 4, 4 aceptó la de 5. Sólo 1 y 6 estan emparejados mutuamente.

El siguiente lema nos permitirá reducir las listas de cada agente para continuar a una segunda etapa.

Lema 2.2.3. *Si* y *rechazó a* x *en la secuencia de propuestas de la primer etapa, entonces* x *e* y *no pueden ser pareja en un matching estable.*

Demostración. Supongamos que, de todos los rechazos que involucran a dos agentes que son compañeros en algún matching estable, el rechazo de x por y es, cronologicamente, el primero. Llamemos M a un matching estable donde x e y son compañeros, queremos ver que esto nos lleva a un absurdo.

Notemos que si y rechazó a x fue porque tenía, o recibió despues, una propuesta mejor de otro agente, z. Pero si y prefiere a z por sobre x, luego, por la estabilidad del matching M, z debe preferir a su compañero en M, llamémoslo w, frente a y.

Ahora bien, antes de que z se haya propuesto a y debió proponerse a w y fue rechazado, pero este rechazo sucedió antes de que y rechace a x, contradiciendo la suposición. □

Veamos tres colorarios útiles del lema.

Corolario 2.2.4. *Si, en cualquier etapa del proceso de propuestas, x se propone a y, entonces en un matching estable:*

- *x no puede tener mejor compañero que y.*
- *y no puede tener peor compañero que x.*

Demostración. Si x llegó a proponerse a y entonces antes se propuso a todos los agentes mejor ubicados que y y fue rechazado, entonces, por el lema anterior, no puede estar con ninguno de ellos en un matching estable.

Si y es compañero de z en un matching e y prefiere a x antes que a z, entonces, por lo recién dicho, como x prefiere a y frente a su actual compañero, el matching no sería estable. □

Corolario 2.2.5. *Si la primer etapa del algoritmo termina con un agente rechazado por todos, entonces no existe matching estable.*

Demostración. Por 2.2.3 la persona rechazada no tiene posible pareja. □

Corolario 2.2.6. *Si la primer etapa del algoritmo termina con cada agente portando una propuesta, entonces la lista de preferencia de y, quien tiene una propuesta de x, puede ser reducida borrando de ella:*

(i) *A todos aquellos frente a los cuales y prefiere a x.*

(ii) *A todos aquellos que tengan una propuesta de una persona que prefieran frente a y, incluyendo a aquellos que rechazaron a y.*

En las listas de preferencia resultantes,

(iii) *y es el primero en la lista de x y x el ultimo en la de y.*

(iv) *En general, b aparece en la lista de a si y solo si a aparece en la de b.*

Demostración. (i) y (ii) se siguen directamente del corolario 2.2.4,(iii) se deduce de (i) y (iv) es una generalizacion de (iii) □

Ejemplo 2.2.7. *Siguiendo con el ejemplo 2.2.2 demos una idea de como se terminan reduciendo las listas de cada agente:*

- *1 tiene una propuesta de 6, luego todas las opciones peores que él, como* 2*,* 5 *y* 3*, se borran. Como 4 tiene una propuesta de 5 que es mejor que 1, también lo borro de la lista de* 1 *quedando* $P(1) = (6)$

- *2 tiene una propuesta de 4, que es su última opción, por lo que no se puede borrar nada peor, pero tanto 6 como 1 tienen una propuesta mejor que 2, luego los borro de* $P(2) = (3, 5, 4)$

y así obtenemos las listas reducidas

$$\begin{array}{ll} P(1) = (6) & P(2) = (3,5,4) \\ P(3) = (5,2) & P(4) = (2,5) \\ P(5) = (4,2,3) & P(6) = (1) \end{array}$$

Ahora podemos enunciar el siguiente lema que nos ayudará a detectar un matching

Lema 2.2.8. *Si las listas reducidas de cada agente contienen solo un elemento, entonces determinan un matching estable.*

Demostración. Por 2.2.6, si x es el único elemento en la lista reducida de y, y es el único en la de x, entonces esta pareja será estable, pues cualquier opción mejor para x que y fue borrada al reducir su lista ya que tienen una propuesta mejor. □

2.3. Segunda Etapa

La segunda etapa del algoritmo propuesto por Irving viene a tratar los casos en los que, como en el ejemplo 2.2.7, tenemos listas reducidas por el Corolario 2.2.6 con mas de un elemento.

Esta segunda etapa involucra la reducción de las listas de preferencias de forma iterativa hasta llegar a alguna de dos condiciones de termino: o un agente se quedó sin opciones para proponerse, caso en el cual no existirá el matching estable, o la lista de cada agente queda reducida a un solo elemento, situación en la cual tendremos nuestro matching buscado.

Definición 2.3.1. *Diremos que un conjunto de listas de preferencia está* reducido *si*

- *pasó por la reducción de la primer etapa, y*
- *pasó por 0 o mas reducciones de la segunda etapa.*

La idea de esta segunda etapa es el reconocimiento de una secuencia cíclica $a_1, ..., a_r$ de agentes distintos tal que:

- Para $i = 1, ..., r-1$ la segunda persona en la lista reducida de a_i es la primera persona en la de a_{i+1}. A la primera persona en la lista de a_{i+1} la llamaremos b_{i+1}.
- La segunda persona en la lista reducida de a_r es la primera persona en la lista de a_1. A esta persona la llamaremos b_1.

Como b_i es el primero en la lista de a_i, esto nos indica que b_i tiene una propuesta aceptada de a_i por el Corolario 2.2.6.

Un ciclo con esas características será llamado ciclo “todo o nada” relativo a las listas de preferencias reducidas actuales y nos permitirá reducir las listas aún más.

Observemos que cuando un agente tiene una sola opción en su lista reducida, quiere decir que aceptó una propuesta de ese agente, y que a la vez se propuso a ese agente quien también lo aceptó a él. Podríamos entonces eliminarlos del problema a ambos, ya que forman una pareja estable: el otro es simultáneamente lo mejor y lo peor que puede conseguir cada uno, por el Lema 2.2.8.

Es, en líneas generales, fácil hallar un ciclo "todo o nada". Debemos tomar como p_1 un agente cuya lista de preferencia reducida tenga dos o más elementos, y generar las secuencias

q_i = segunda persona en la lista reducida de p_i;

p_{i+1} = última persona en la lista reducida de q_i (así resulta q_i el primero en la lista de p_{i+1} por el Corolario 2.2.6).

Continuamos hasta que la secuencia p cicle. Esto sucederá porque hay finitos agentes y en algún momento regresaremos a alguno elegido antes, que no necesariamente coincidirá con el que iniciamos la búsqueda del ciclo.

Llamemos

$$a_i = p_{s+i-1} \quad (i = 1, 2, ..),$$

donde p_s es el primer elemento en la secuencia p que se repite. Nos referiremos a $p_1, p_2, ..., p_{s-1}$ como la *cola* del ciclo.

Para ver como funciona esta idea retomemos el ejemplo que venimos analizando

Ejemplo 2.3.2. *En nuestro ejemplo 2.2.7 de tamaño 6, podemos tomar* $p_1 = 2$*, lo que nos daría*

$$\begin{array}{ll} q_1 = 5 & p_2 = 3 \\ q_2 = 2 & p_3 = 4 \\ q_3 = 5 & p_4 = 3 \end{array}$$

entonces, como $p_2 = 3$ *es el primero en repetirse,* $s = 2$ *y obtuvimos un ciclo "todo o nada" de longitud 2 con* $a_1 = p_{2+1-1} = 3$*,* $a_2 = 4$ *con cola de longitud 1.*

La reducción de la segunda etapa, aplicada a un conjunto de listas reducidas y para un ciclo "todo o nada" particular $a_1, ..., a_r$ involucra forzar a cada b_i, $1 \leq i \leq r$, a rechazar la propuesta que mantiene de a_i, de este modo forzando a cada a_i a proponerse a b_{i+1}(modulo r), el segundo agente en su lista.

Como resultado, así como hicimos al reducir las listas en el Corolario 2.2.6, los sucesores de a_i en la lista reducida de b_{i+1} pueden ser eliminados y b_{i+1} de la lista de ellos. Esto es porque si a_i no logra mejor compañero que b_{i+1}, entonces, para la estabilidad, b_{i+1} no tendrá un compañero peor que a_i por el Corolario 2.2.6.

La importancia principal de las listas reducidas es el siguiente: si la instancia original del problema admitía un matching estable, cada agente es compañero de alguien en su lista reducida. Diremos que dicho matching está *contenido* en las listas reducidas. Este resultado crucial es consecuencia del siguiente Lema:

Lema 2.3.3. *Sea $a_1, ..., a_r$ un ciclo "todo o nada" relativo a un conjunto de listas de preferencias reducidas, y denotemos como b_i a la primer persona en la lista reducida de a_i $(1 \leq i \leq r)$. Entonces*

(i) en cualquier matching estable contenido en esas listas reducidas, o a_i está emparejado con b_i para todos los valores de i, o esto no sucede para ningun i;

(ii) si hay algun matching estable en el que a_i y b_i están emparejados, entonces hay otro en el que no lo están.

Demostración. (i) Consideremos los subíndices modulo r, supongamos que, para algún i fijo, a_i y b_i son compañeros en un matching estable particular que está contenido en las listas reducidas.

Como a_i es el último en la lista reducida de b_i y b_i es el segundo en la de a_{i-1} , podemos afirmar que a_{i-1} está presente en la lista de b_i, se sigue que b_i prefiere a a_{i-1} frente a a_i.

Entonces, para la estabilidad, a_{i-1} debe tener como compañero a alguien que prefiera frente a b_i, y la única persona que cumple eso en la lista reducida es b_{i-1}. Repitiendo este argumento mostramos que a_i y b_i deben ser compañeros para todos los valores de i.

(ii) Para ver esto, llamemos $A = \{a_1, ..., a_r\}$, y $B = \{b_1, ..., b_r\}$. Tenemos dos posibilidades, que $A \cap B \neq \emptyset$ ó $A \cap B = \emptyset$. Veamos que ocurre en cada caso.

Si $A \cap B \neq \emptyset$, existen j, k tales que $a_j = b_k$. En ese caso, es imposible para todos los a_i conseguir como compañero a su primer preferencia dentro de las que le quedan, ya que b_k es el mejor ubicado para a_k, pero $a_j = b_k$ debería estar con su mejor ubicado, b_j, lo cual implica que $a_k = b_j$. Pero en ese caso a_j y a_k están con el último y el primero de sus listas, lo que dice que su lista contenía un solo miembro y no podrían ser parte del ciclo.

Entonces, el caso $A \cap B \neq \emptyset$ implica que ninguno de los a_i y b_i pueden ser compañeros, porque el punto (i) implicaría que todos deben serlo, y el punto (ii) sólo puede darse cuando $A \cap B = \emptyset$.

Partiendo entonces de $A \cap B = \emptyset$, supongamos que M es un matching estable contenido en las listas reducidas en el cual a_i y b_i son compañeros para todo $1 \leq i \leq r$. Generemos un nuevo matching $M*$, el matching en el que cada a_i es compañero de b_{i+1}, y cualquier persona fuera de $A \cup B$ tiene el mismo compañero que en el matching M. Afirmamos que $M*$ es estable.

En $M*$, cada miembro de B obtiene un compañero mejor desde su punto de vista, ya que en M le asignan el último de su lista reducida, que es lo peor que se puede conseguir en algún matching estable. Los que no están en $A \cup B$ no cambian, y a los agentes del conjunto A les va peor en $M*$ que en M (pues estaban con lo mejor que podían conseguir).

Entonces, cualquier inestabilidad en $M*$ no presente en M debe involucrar a algún a_i. Supongamos que a_i prefiere a x más que a b_{i+1} (su compañero asignado por $M*$). Entonces hay que considerar tres casos:

(i) a_i y x eran compañeros en M,es decir, $x = b_i$. En este caso, x prefiere a su nuevo compañero a_{i-1} frente a a_i.

(ii) a_i también prefiere a x frente a b_i, luego x no está en la lista reducida de a_i.

(iii) a_i prefiere a b_i frente a x, en cuyo caso x está entre b_i y b_{i+1} en la lista original de a_i, pero está ausente en la lista reducida actual de a_i, y esto se tiene que deber a que tiene una propuesta de un agente mejor que a_i.

La demostración está terminada. □

De este lema surgen los siguientes dos corolarios importantes:

Corolario 2.3.4. *Si la instancia inicial admite un matching estable, entonces hay un matching estable contenido en cualquier conjunto de listas reducidas.*

Corolario 2.3.5. *Si una o mas listas de un conjunto de listas reducidas son vacías, entonces el problema original no admite un matching estable.*

Nuestro lema final, que no es mas que una extensión del Lema 2.2.8, justifica las circunstancias en las que el algoritmo arriba a una conclusión positiva.

Lema 2.3.6. *Si en un conjunto de listas de preferencias reducidas cada lista contiene solo una persona, entonces las listas dan pie a un matching estable.*

Demostración. Que la lista muestra un matching es una consecuencia inmediata del punto (iv) en el Corolario 2.2.6.

Supongamos que y prefiere a x frente a la única persona que queda en su lista reducida. Entonces, exactamente igual que en la prueba del segundo caso del Lema 2.3.3 (ii) podemos demostrar que x prefiere a la única persona en su lista reducida frente a y. Entonces no hay ninguna inestabilidad en el matching que generan las listas. □

Ejemplo 2.3.7. *Siguiendo con nuestro ejemplo de longitud 6, la reducción de la segunda etapa fuerza a 5 a rechazar a 3, y a 2 a rechazar a 4, causando que 3 se proponga a 2 y 4 a 5. Luego quedan todas las listas reducidas a una sola persona y obtenemos el matching estable* $(1,6);(2,3);(4,5)$

En definitiva, la idea del algoritmo es, una vez reducidas las listas por la primera etapa, iterar sobre las listas mientras alguna tenga longitud mayor a 1, y ninguna sea vacía, calculando un ciclo "todo o nada", y ejecutando con este una nueva reducción. Así hasta salir del ciclo, ya sea porque todas tienen longitud 1, donde habríamos llegado a un matching estable o porque una lista quedó vacía indicando que no hay matching estable.

Capítulo 3

Aleatorios

Hasta ahora el camino para llegar a un matching estable fue usar el Algoritmo de Aceptación Diferida, pero su aplicación en mercados concretos implica la existencia de un ente centralizado que recopile las listas de los agentes y corra el algoritmo, esto resulta muchas veces difícil de llevar a cabo, porque en generar no existe un ente con esas características, o también porque este ente, por el Teorema 1.4.2, debe escoger a que lado favorecer y a cual perjudicar, situación que puede acarrear problemas con los involucrados en muchos casos.

Esto hace que surja la pregunta de si existe un método no centralizado y sin preferencia de género para alcanzar un matching estable y si es posible llegar a cualquier matching estable por esta vía.

En este capítulo veremos la demostración dada por Roth y Vander Vate [RV90] que prueba que arrancando de un matching cualquiera y seleccionando para emparejar a un pareja al azar que bloquee al matching, se converge a un equilibrio estable con probabilidad 1. Esto da una demostración prueba distinta a la dada por Gale y Shapley en [GS62] de que el conjunto de matching estables es no vacío. Esto en particular resolvió una pregunta abierta de Knuth [Knu76] que mostró que un proceso de este estilo podría ciclar. Además de eso, probaron que arrancando desde un estado en el que todos los agentes están solteros se puede alcanzar cualquier matching estable con probabilidad positiva.

3.1. Definiciones

Definición 3.1.1. *Si $m \in M$ y $h \in H$ bloquean a μ, diremos que el nuevo matching ν se obtiene* satisfaciendo *a (m, h) si:*

- $\nu(m) = h$.
- $\nu(\mu(m)) = \mu(m)$ *y* $\nu(\mu(h)) = \mu(h)$*, es decir, las parejas de m y h en μ no están emparejadas a nadie en ν.*
- $\forall m' \in M /\ m' \neq \mu(h),\ \mu(m') = \nu(m')$*, o sea, el resto de las mujeres siguen emparejadas con la misma persona en ν que en μ.*
- $\forall h' \in H /\ h' \neq \mu(m),\ \mu(h') = \nu(h')$*, análogo a lo anterior sobre los hombres que no son h.*

Dada esta definición podemos exhibir el ejemplo dado por Knuth de una sucesión de matchings, obtenidos uno a partir del anterior satisfaciendo una pareja que bloqueaba, que cicla.
Sea $M = \{m_1, m_2, m_3\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ y

$$\begin{array}{ccc} P(h_1) = (m_2, m_1, m_3) & P(h_2) = (m_1, m_3, m_2) & P(h_3) = (m_1, m_2, m_3) \\ P(m_1) = (h_1, h_3, h_2) & P(m_2) = (h_3, h_1, h_2) & P(m_3) = (h_1, h_3, h_2) \end{array}$$

las preferencias de cada agente.
Consideremos el matching inestable $\mu_1 = [(m_1, h_1), (m_2, h_2), (m_3, h_3)]$, se puede ver que (m_2, h_1) lo bloquea, pues en la lista de m_2, h_1 ocupa el segundo lugar, en cambio $\mu_1(m_2) = h_2$ es el tercero, y en las preferencias de h_1 la mujer m_2 es su mejor opción, por lo que la prefiere frente a cualquiera, en particular, frente a $\mu_1(h_1) = m_1$.
Cuando satisfacemos esta pareja obtenemos un nuevo matching

$$\mu_2 = [(m_1, m_1), (m_2, h_1), (m_3, h_3), (h_2, h_2)]$$

donde como m_1 y h_2 tienen listas completas, prefieren estar juntos a solos dando lugar a

$$\mu_3 = [(m_1, h_2), (m_2, h_1), (m_3, h_3)],$$

que es bloqueado por (m_2, h_3). Si satisfacemos la pareja queda

$$\mu_4 = [(m_1, h_2), (m_2, h_3), (m_3, m_3), (h_1, h_1)],$$

donde (m_3, h_1) bloquea, dando pie a

$$\mu_5 = [(m_1, h_2), (m_2, h_3), (m_3, h_1)],$$

y (m_1, h_3) bloquea, dejando

$$\mu_6 = [(m_1, h_3), (m_3, h_1), (m_2, m_2), (h_2, h_2)].$$

Luego (m_2, h_2) se juntan por estar solteros,

$$\mu_7 = [(m_1, h_3), (m_2, h_2), (m_3, h_1)]$$

pero es bloqueado por (m_1, h_1), obteniendo

$$\mu_8 = [(m_1, h_1), (m_2, h_2), (m_3, m_3), (h_3, h_3)]$$

donde al emparejar a m_3 y h_3 llegamos a μ_1 cerrando el ciclo.

Notemos que en este ejemplo hay un camino que lleva a un matching estable, que sería desde μ_1 satisfacer (m_2, h_3) dando lugar a

$$\mu_2' = [(m_1, h_1), (m_2, h_3), (m_3, m_3), (h_2, h_2)],$$

donde si juntamos a los solteros obtenemos

$$\mu_3' = [(m_1, h_1), (m_2, h_3), (m_3, h_2)]$$

que es estable.

La pregunta formulada por Knuth [Knu76] fue si siempre existía un camino de este estilo, satisfaciendo parejas que bloquean, desde un matching cualquiera hasta uno estable independientemente de las listas de preferencias.

Knuth formalmente enunció la pregunta para instancias en las que la cantidad de hombres y mujeres era la misma y todos con listas completas. Entonces en su problema todos los hombres y mujeres estaban emparejados siempre considerando que cuando se satisfacía una pareja en un matching la mujer y el hombre que quedaban libres por el divorcio eran obligados a emparejarse.

Roth y Vander Vate [RV90] consideraron un caso mas general en el que nadie era obligado a casarse, sino que las personas quedaban solteras luego del divorcio. Claramente si las listas son completas para todos los agentes los caminos propuestos por Knuth son obtenidos por Roth y Vander Vate de la misma forma que exhibimos en el ejemplo, aquellos que quedan solteros se prefieren frente a la soledad, luego forman una pareja que bloquea.

Podemos preguntarnos qué pasa si las listas no son completas, es decir, hay algún agente que no tiene a todos los del género opuesto en su lista. De eso hablaremos en el capítulo 4 de esta tesis, el problema se resuelve completando las listas a partir de ese lugar con una preferencia del agente por sí mismo y ubicando en cualquier orden los agentes restantes, construiremos una dinámica que replique la idea de Roth y Vander Vate para agentes con listas al azar, y veremos cómo los son matchings a los cuales se converge.

3.2. Proceso de Roth y Vander Vate

Ahora veamos el resultado enunciado por Roth y Vander Vate que resuelve la pregunta de Knuth.

Teorema 3.2.1. *Sea μ un matching arbitrario sobre (M, H, P). Entonces existe una secuencia finita de matchings $\mu_1, ..., \mu_k$, tal que $\mu = \mu_1$, μ_k es estable y para cada i=1,...,k-1, hay una pareja (m_i, h_i) que bloquea a μ_i tal que μ_{i+1} es obtenido de μ_i satisfaciendo (m_i, h_i).*

Demostración. Sea μ_1 un matching arbitrario en (M, H, P), y supongamos que es individualmente racional, es decir, ningún agente está emparejado a alguien que no esté en su lista. Si el matching escogido no fuera individualmente racional, es porque algún agente p forma una pareja que bloquea consigo mismo, y al satisfacerla el agente queda libre; haciendo esto con cada agente que esté en la situación nombrada de estar con alguien no deseado, se consigue un nuevo matching individualmente racional.

Supongamos que el matching μ_1 tiene una pareja (m_1, h_1) que bloquea. Si no existiera tal pareja entonces el matching sería estable y el resultado es trivialmente cierto con $k = 1$.

Sea μ_2 el matching obtenido al satisfacer la pareja (m_1, h_1), dejando libres sus parejas anteriores, y todas las demás sin cambios. Luego, $\mu_2(h_1) = m_1$ y definamos el conjunto $A(1) \equiv \{m_1, h_1\}$.

Notemos que si (m_2, h_2) es una pareja que bloquea a μ_2 entonces $\{m_2, h_2\}$ no está contenido en $A(1)$, porque sino $m_1 = m_2$, $h_1 = h_2$ y en μ_2 ambos están emparejados, luego no pueden bloquear.

La prueba se basará en construir inductivamente la secuencia de matchings de forma de ir asociándoles una secuencia de conjuntos $A(q)$, creciente en el orden de la contención, que no contenga parejas que bloqueen, hasta obtener un matching estable.

Supongamos que tenemos un conjunto $A(q)$ tal que no contiene parejas que bloqueen a μ_{q+1} y que μ_{q+1} no empareja a ningun agente en $A(q)$ con uno que no esté en $A(q)$.Notemos que en nuestro caso base $q = 1$ se cumplen estas hipótesis por lo que ya mencionamos, $A(1)$ solo contiene dos agentes que están emparejados en μ_2 y no lo bloquean.

Luego, si μ_{q+1} no es estable, entonces existe una pareja (m', h') tal que, por las hipótesis, a lo sumo uno de los dos agentes está contenido en $A(q)$. Consideraremos tres casos.

1. Primero supongamos que tenemos una pareja (m_{q+1}, h_{q+1}) tal que h_{q+1} está contenido en $A(q)$ y está escogida de forma tal que entre todas las parejas (m_{q+1}, h) con $h \in A(q)$ que bloquean a μ_{q+1}, h_{q+1} es el preferido de m_{q+1}.

Sea μ_{q+2} el siguiente matching en la secuencia, obtenido satisfaciendo (m_{q+1}, h_{q+1}) y definamos $A(q+1) \equiv A(q) \cup \{m_{q+1}\}$. Pueden pasar dos cosas según como estaba h_{q+1} en μ_{q+1}.

- Si h_{q+1} estaba soltero en μ_{q+1}, afirmamos que ninguna pareja que bloquee a μ_{q+2} está contenida en $A(q+1)$: esto se debe a que en $A(q)$ no habían parejas que bloquearan a μ_{q+1} y en $A(q+1)$ solo se incorporó m_{q+1} y no quedó ningún agente libre por la soltería de h_{q+1}. Como m_{q+1} en μ_{q+2} está (por construcción) con su mejor opción dentro de $A(q+1)$, no puede formar una pareja que bloquee con otro elemento de $A(q+1)$.
- Si h_{q+1} no estaba soltero, podría aparecer un par m_{q+2}, h_{q+2} que bloqueen al matching μ_{q+2} con $m_{q+2} = \mu_{q+1}(h_{q+1})$ y h_{q+2} ambos en $A(q+1)$.

  Es decir, la mujer que h_{q+1} dejó libre (que está en $A(q+1)$ por hipótesis) podría ahora bloquear junto a un hombre de $A(q+1)$. En ese caso, elegimos entre todos los hombres en $A(q+1)$ al preferido por m_{q+2} para que conforme la pareja a satisfacer en μ_{q+3} y el proceso continúa hasta que llegue a un matching μ_r, $r > q$, tal que no contenga parejas que bloqueen en $A(r) \equiv A(q+1)$. Esto eventualmente pasará pues ningun hombre recibirá una peor pareja, y ninguna pareja que bloquee aparecerá dos veces en la secuencia $\mu_{q+2}, ..., \mu_r$ (ya que al armarla, se eligió al mejor dentro del conjunto). El conjunto $A(r)$ es el que estábamos buscando, contiene estrictamente a $A(q)$, y no contiene parejas que bloqueen a μ_r.

Los restantes dos casos ahora son más simples.

2. Si no hay una pareja que bloquee (m_{q+1}, h_{q+1}) con $h_{q+1} \in A(q)$, pero sí hay una con $m_{q+1} \in A(q)$, entonces el proceso es el mismo que antes, intercambiando los roles de hombres y mujeres.

3. Si toda pareja (m_{q+1}, h_{q+1}) que bloquea es disjunta con $A(q)$, entonces

seleccionamos cualquiera de ella para satisfacer y armar μ_{q+2} y definimos $A(q+1) = A(q) \cup \{m_{q+1}, h_{q+1}\}$.

Ahora, $A(q+1)$ contiene a $A(q)$ y no contiene parejas que bloqueen, ya que no las había antes en $A(q)$, y como todas las parejas que bloqueaban eran disjuntas con $A(q)$, al agregar $\{m_{q+1}, h_{q+1}\}$ no se genera ningún conflicto entre los agentes en $A(q+1)$. Entonces, es el conjunto que estabamos buscando.

El proceso terminará en finitos pasos pues $A(q)$ crecerá estrictamente mientras no se alcance un matching estable, pero $A(q)$ no puede ser más grande que $M \cup H$.

Esto finaliza la prueba. □

Ahora podemos considerar un proceso aleatorio que empieza seleccionando un matching arbitrario μ, y entonces procede generando una secuencia de matchings $\mu = \mu_1, \mu_2, ...$, donde cada μ_{i+1} es derivado de μ_i satisfaciendo una pareja que bloquee escogida al azar del conjunto de todas las parejas que bloqueen. Asumiendo que la probabilidad de escoger una pareja particular es positiva y depende sólo de $\mu = \mu_i$ (y no del i).[1]

Sea $R(\mu)$ la secuencia aleatoria generada de esta forma partiendo desde μ. Ahora podemos anunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.2.2. *Para cualquier matching inicial μ, la secuencia aleatoria $R(\mu)$ converge con probabilidad uno a un matching estable*

Demostración. La prueba es inmediata al notar que como cada elección tiene probabilidad positiva de suceder, en particular, la secuencia de elecciones dada por la demostración del teorema 3.2.1 tiene probabilidad positiva, luego por Borel Cantelli, probamos que lo queremos.

Más precisamente, dado que el conjunto de todos los matchings posibles es un número C enorme pero finito, cada C pasos de este algoritmo, si no hemos

[1]La probabilidad de cada pareja particular de ser escogida puede reflejar factores como resistencia al divorcio de los agentes, cuánto mejoran los agentes al cambiar, etc

convergido a un matching estable, repetimos alguno de los matchings anteriores. Si esto ocurre infinitas veces, habrá un matching $\hat{\mu}$ al que regresaremos infinitas veces, y la probabilidad de que acertemos la secuencia correcta comenzando desde este matching $\hat{\mu}$ es positiva, con lo cual con probabilidad 1 en algún momento lo haremos. □

3.3. Alcances

El proceso con el que hemos construido la secuencia de matchings en la prueba del Teorema 3.2.1 es bastante cercano al de aceptación diferida para probar que el conjunto de matchings estables es no vacío, Teorema 1.3.2. Es mas, si arrancamos con el matching μ_1 donde todos los agentes están solteros y elegimos el conjunto $A(1)$ como el conjunto de hombres, entonces la secuencia construída es precisamente la dada por el algoritmo de aceptación diferida con propuestas de las mujeres (y converge al matching estable que optimiza según las preferencias de las mujeres).

Es mas, podemos enunciar el siguiente teorema, que nos da una prueba alternativa de que el conjunto de estables es no vacío y que no introduce asimetrías entre los dos géneros de agentes:

Teorema 3.3.1. *Si empezamos con el matching μ_1 donde todos los agentes están solteros, cualquier matching estable es alcanzable por la secuencia dada por el Teorema 3.2.1.*

Demostración. Sea μ es un matching estable arbitrario, entonces la secuencia (que tiene probabilidad positiva de suceder)

$$A(1) = \{m_1, \mu(m_1)\}, ..., A(i) = A(i-1) \cup \{m_i, \mu(m_1)\}, ...$$

nos conduce a μ. □

Entonces la clase de procesos aleatorios $R(\mu_1)$ del corolario nos conduce con probabilidad positiva a cualquier matching estable.

Capítulo 4

Simulaciones

Una vez presentado el problema clásico de encontrar un matching estable vía el Algoritmo de Aceptación Diferida propuesto por Gale y Shapley, y el posterior enfoque aleatorio de Roth y Vander-Vate de buscarlo vía un proceso iterativo arrancando desde cualquier matching, en principio inestable, surgen varias preguntas que nos podríamos hacer.

Por ejemplo, el conjunto de todos los matchings posibles incluye a los estables, pero ¿cuántos hay típicamente? ¿Cuándo hay un único matching estable? ¿Cómo depende la cantidad de matchings estables de la longitud de las listas de preferencias? ¿Y de la cantidad de personas?

También nos podríamos interesar en los resultados del proceso de Roth y Vander-Vate: ¿siempre nos conduce a los mismos matchings? ¿Es una buena forma de obtener un matching estable uniformemente distribuido entre todos los matchings estables? ¿Cómo se relaciona el matching final con los obtenidos por el AAD?

Otro punto interesante es la estabilidad de los matchings estables. La denominación de la literatura clásica es poco feliz pues los llamados matchings estables son puntos de equilibrio, es decir, situaciones donde la dinámica se detiene y permanece sin cambios. La estabilidad, en el sentido de los sistemas dinámicos, se refiere a la respuesta del sistema ante perturbaciones. Por ejemplo, si tenemos preferencias que nos conducen a un único equilibrio ¿cuánto las puedo perturbar sin perder esta unicidad? O si arranco con listas parecidas ¿puedo decir algo de la proximidad entre los matching al cual llegaré en cada caso?

En este capítulo trataremos de dar una respuesta aproximada a alguna de estas preguntas (y abrir algunas otras) a través de simulaciones, con la esperanza de demostrar teóricamente en el futuro alguno de los resultados que observamos o conjeturaremos.

4.1. El espacio de matchings

El conjunto de matchings estables es díficil de estudiar, principalmente porque depende de la cantidad M de mujeres, H de hombres, y de todos los órdenes posibles, considerando incluso listas incompletas. El AAD nos asegura que para cualquier lista de preferencias siempre encontraremos un matching estable, es más, en principio tenemos dos matchings distintos inviertiendo los roles en el algoritmo y si ambos resultan ser el mismo podemos asegurar por 1.4.2 que es el único. Esto da pie a la siguiente definición:

Definición 4.1.1. *Diremos que para un conjunto de listas de preferencia P el matching está* determinado *si existe un único matching estable con esas listas.*

Ahora, una pregunta natural que surge es si esta situación es muy frecuente. Es decir, dada una lista de preferencias arbitraria P, ¿que tan esperable es que el matching esté determinado?

Observemos que el número de matchings estables puede ser muy grande. Irving y Leather [IL86] demostraron que para todo $i \geq 0$, existe una instancia del problema con $|M| = |H| = 2^i$, con al menos $2^{|M|-1}$ matchings estables. Sin embargo, analizar el espacio de matchings es realmente difícil, y su argumento para obtener este número se basa en dos pares de agentes que pueden estar cruzados o no en un matching, lo cual eleva rápidamente el número de matchings dada la forma en que pueden combinarse.

Para responder esta pregunta, al menos intuirla, simulamos una dinámica que genere listas de preferencia y revisamos si el matching estaba determinado. Esto no resulta muy difícil ni a nivel programacion ni a nivel complejidad computacional, aunque aumenta cuando crece el número de personas de cada género. El esquema básico del algoritmo está descripto en el Algoritmo 1.

Necesitamos además generar listas de preferencias al azar. Cuando queremos que éstas no sean completas, las generamos con el Algoritmo 2.

Algoritmo 1 Proporciones de determinados

Entrada: M=cantidad de mujeres, H=cantidad de hombres, cantidad de iteraciones
Salida: Proporción de machings determinados

```
Determinados=0
Para la cantidad de iteraciones
    Generar preferencias para los H hombres
    Generar preferencias para las M mujeres
    Correr AAD con hombres proponiendo
    Correr AAD con mujeres proponiendo
    Si ambos AAD dieron el mismo matching
        Determinados +1
    Fin Si
Fin Para
Devolver Determinados/iteraciones
```

Algoritmo 2 Generar lista al azar

Entrada: Cantidad C de personas del otro genero
Salida: Lista de preferencias

```
Elegir un natural N al azar entre 1 y C
Permutar (1,2,...,C)
Considerar los primer N de la permutación como la lista
Devolver Lista de preferencia
```

Una vez que podemos generar las listas al azar, calculamos la proporción de determinados si la cantidad de personas varía entre 1 y 60, realizando 10000 iteraciones por vez. Los datos obtenidos se pueden resumir en 4.1.

Una pregunta que nos podríamos hacer es que pasaría si forzamos a que las listas sean completas, es decir, que cada agente incluya en su lista a todos los del género opuesto. ¿Esto cambiará mucho la proporción de matchings determinados? 4.1 Para ello, como primer acercamiento y para poder comparar contra el caso anterior, simulamos desde 1 a 60 personas, 10000 iteraciones por vez dando pie a las proporciones de la figura 4.2.

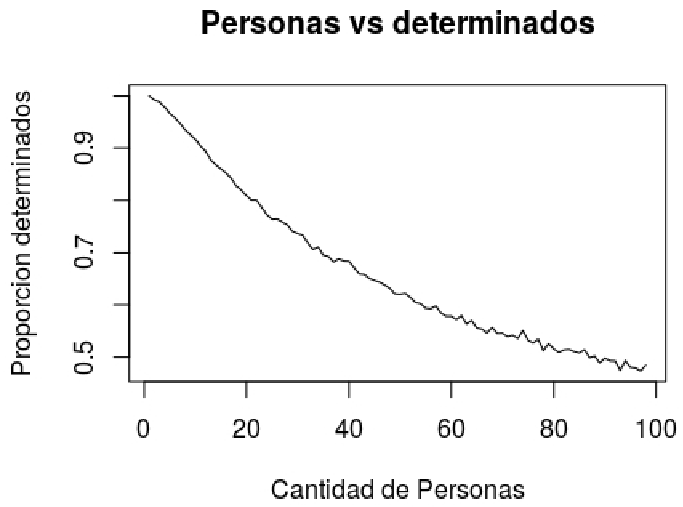


Figura 4.1: Listas al azar vs Determinados

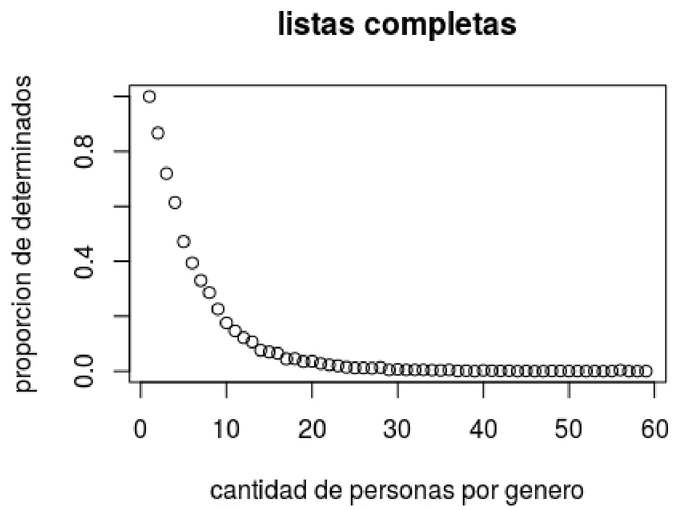


Figura 4.2: Listas completas vs Determinados

Podemos notar que hay una clara diferencia entre ambas situaciones, cuando usamos listas al azar o cuando forzamos que sean completas. Esto de alguna forma es intuitivo: los agentes con listas cortas restringen mucho al matching al tener que emparejarlos con alguien de ellas, y si varios agentes tienen la posibilidad, como les da la generación al azar, de tener listas acotadas, terminan imprimiéndoles muchas restricciones a la búsqueda. En cambio las listas completas son restricciones mas laxas, solo determinan el orden, pero no limitan al matching a no considerar ciertos agentes.

Señalemos que respecto a la determinación de los matchings, se conocen apenas dos condiciones sobre las listas que son suficientes. Una, que veremos más adelante, es que todos los agentes de un mismo género tengan la misma orden de preferencia del otro género. La otra, introducida en [Eec00], impone también una restricción muy fuerte, aprovechemos para dar una demostración más simple de este teorema, utilizando inducción en la cantidad de personas n de cada grupo:

Teorema 4.1.2. *Sean $\{m_i\}_{1\leq i\leq n}$, $\{h_i\}_{1\leq i\leq n}$ dos conjuntos de mujeres y hombres.. Supongamos que para todo i, el hombre h_i tiene en su lista a la mujer m_i en el lugar i, a las mujeres $\{m_1, \cdots, m_{i-1}\}$ en los primeros $i-1$ lugares (en cualquier orden) y a las mujeres $\{m_{i+1}, \cdots, m_n\}$ en los últimos $n-i$ lugares (también en cualquier orden). Supongamos que ocurre lo mismo con las listas de las mujeres. Entonces, el único matching estable es $\{(m_1, h_1), (m_2, h_2), \cdots, (m_n, h_n)\}$.*

Demostración. Si $n = 1$, el resultado vale trivialmente.

Si vale para n, y tenemos $n+1$ personas en cada género, observemos que las parejas (m_1, h_j) y (m_k, h_1) bloquean excepto cuando $j = k = 1$. Entonces, cualquier matching estable contiene la pareja (m_1, h_1) y podemos eliminarlos del problema. Los grupos reducidos que quedan caen en la hipótesis inductiva, y el teorema queda demostrado. □

Es sencillo modificarlo para el caso de listas con distinto número de personas, y basta hacer inducción en el mínimo de los cardinales de las listas.

4.2. Estabilidad de los matchings estables

Desde que el problema de buscar matchings fue presentado por Gale y Shapley la bibliografia siempre se a referido a estos como “estables”, pero al darle una mirada más general desde la dinámica, esta denominación da a entender cualidades que no necesariamente cumplen los matchings.

En principio, lo único que cumple el matching obtenido por el AAD o el proceso aleatorio de Roth y Vander-Vate es que resulta ser un equilibrio: ningún agente encuentra una opción viable que mejore su situacion personal, todas las personas que son preferidas frente a la actual pareja no lo prefieren respecto a la que tienen, pero nada dice de la estabilidad en el sentido de“soportar” perturbaciones en los datos iniciales, o sea, si altero las listas de los agentes, ¿cuánto afecta a los matchings a los que llego?

En esa dirección propusimos alternativas para crear listas de alguna forma parecidas, o perturbar las listas y estudiar los matchings a los que se llega.

4.2.1. Mismas Listas

Una forma de obtener matchings determinados es asignar a cada agente de un género la misma lista de preferencias sobre el otro género. Demostremos este resultado:

Lema 4.2.1. *Si todos los miembros de un mismo género tienen la misma lista de preferencias, entonces existe un único equilibrio.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que todos los hombres tienen la misma lista $P = (m_1, m_2, ..., m_M)$ de preferencias y sean μ_m y μ_h los matchings obtenidos por el AAD proponiendo mujeres y hombres respectivamente, veamos que ambos matchings son el mismo.

Para eso vamos a usar el resultado 1.4.2 que establece que cuando los hombres proponen estos consiguen su mejor mujer alcanzable y cada mujer su peor hombre alcanzable.

Lo hacemos por inducción en M. Si $M = 1$, no hay nada que demostrar.

Supongamos que vale para M, y veamos si hay $M+1$ hombres. Consideremos $\mu_h(m_1)$. Por un lado, m_1 es la mejor opción de todos los hombres, en particular de $\mu_h(m_1)$. Luego, él no tendrá incentivo a cambiar de pareja. Por otro lado, $\mu_h(m_1)$ será la peor pareja alcanzable de m_1 por 1.4.2, pero por cómo funciona el AAD y como las listas de todos los hombres son iguales, en el primer paso todos ellos se proponen a m_1, con lo cual ella elegirá al primero en su lista, con lo cual su peor opción será la mejor de su lista y tampoco tendrá incentivos a cambiar de pareja. De esto podemos decir algo mas fuerte aún: en todo matching en equilibrio tendremos la pareja $(m_1, \mu_h(m_1))$, en particular en μ_m.

Entonces, podríamos considerar un nuevo problema de matching sacando a los agentes m_1 y $\mu_h(m_1)$, resolverlo y luego agregar a esta pareja. En el nuevo problema estamos otra vez en las condiciones anteriores, con M hombres que tienen la misma lista de preferencias, y por hipótesis inductiva, el resultado es válido. $\square$

Notemos que el resultado anterior nos da una forma muy fácil de encontrar un conjunto de listas que de pie a un matching determinado. Veremos a continuación qué ocurre cuando las perturbamos.

4.2.2. Listas Pinchadas

Supongamos que tenemos listas de preferencias P con las cuales el matching está determinado y para cada $p \in P$ elegimos un lugar de la lista al azar y borramos esa preferencia, tal como sucedería si ese agente realizó algo que afectó tanto al creador de la lista p como para eliminarlo de sus preferencias.

Algoritmo 3 Pinchar listas

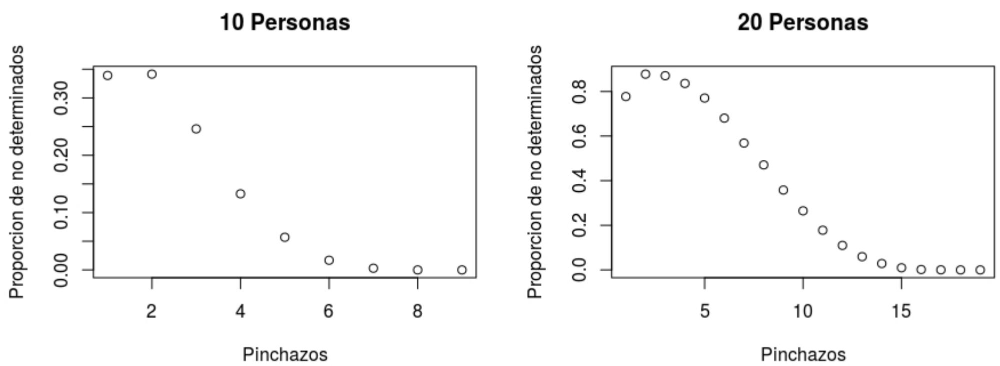
Entrada: Listas de preferencias
Salida: Listas pinchadas
  Para cada lista
    elegir un lugar de la lista
    borrar esa entrada de la lista
  Fin Para
  Devolver Listas

Luego de pinchar cada una de las listas el matching podría dejar de estar determinado, es por eso que realizamos la siguiente simulación:

Algoritmo 4 Proporciones de no determinados

Entrada: cantidad de personas maxima, cantidad de iteraciones
Salida: proporción de no determinados
  Para cantidad entre 1 y la máxima de personas
    buscar listas completas para la cantidad de personas con matching determinado
    Para pinchazos entre 0 y la longitud de las listas
      noDeterminados=0
      iteración=0
      Mientras iteración $<$ cantidad de iteraciones
        pinchar cada lista en cantidad de pinchazos
        Si con las listas pinchadas no está determinado
          NoDeterminados+1
        Fin Si
        volver a las listas determinadas
        iteración+1
        guardar
      Fin Mientras
    Fin Para
  Fin Para
  Devolver Proporciones

Los gráficos para 10, 20, 30, 40, 50 y 60 personas que conseguimos con las simulaciones se ven en 4.3.



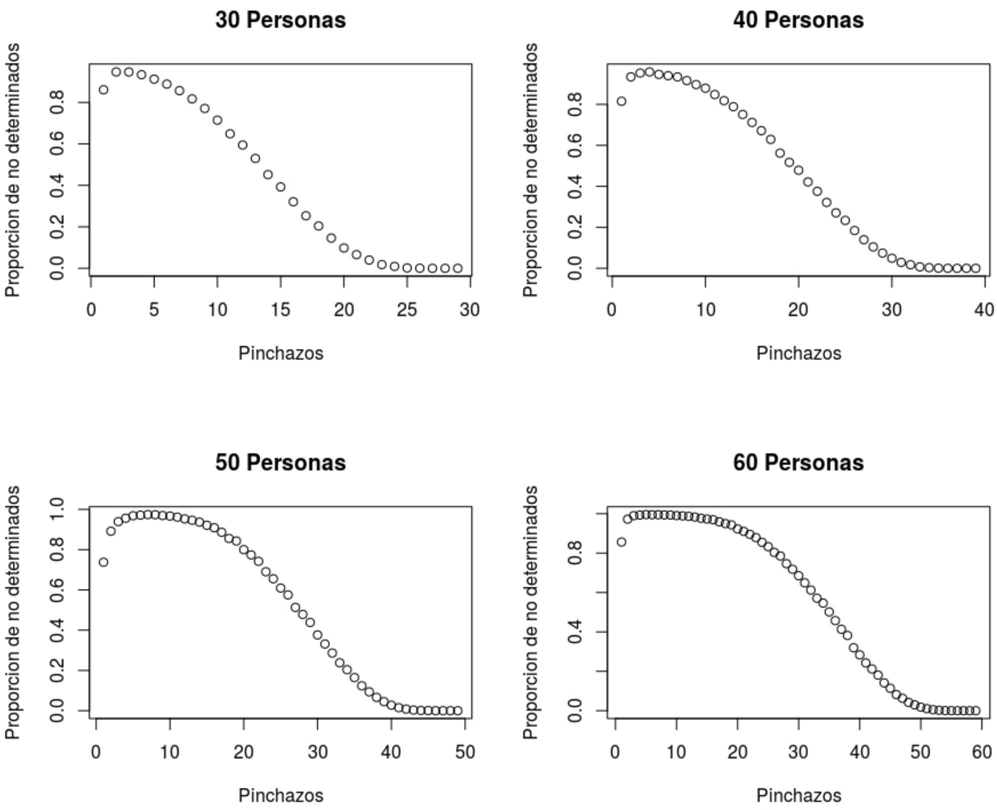


Figura 4.3: Pinchazos vs No determinados

Las simulaciones muestran que los equilibros resultan muy poco estables, al sacarle a cada lista un agente pasamos a no tener la unicidad con la que empezamos, y despues, a medida que las listas se van acortando, por lo mencionado en 4.1, vamos recuperando la unicidad de matching.

4.2.3. Permutaciones

Ahora una pregunta que nos podríamos hacer es qué tan estable es la unicidad del matching obtenido cuando todos los miembros de un mismo género tienen la misma lista frente a permutaciones en cada una de las listas. Básicamente lo que haremos será aplicar el Algoritmo 5:

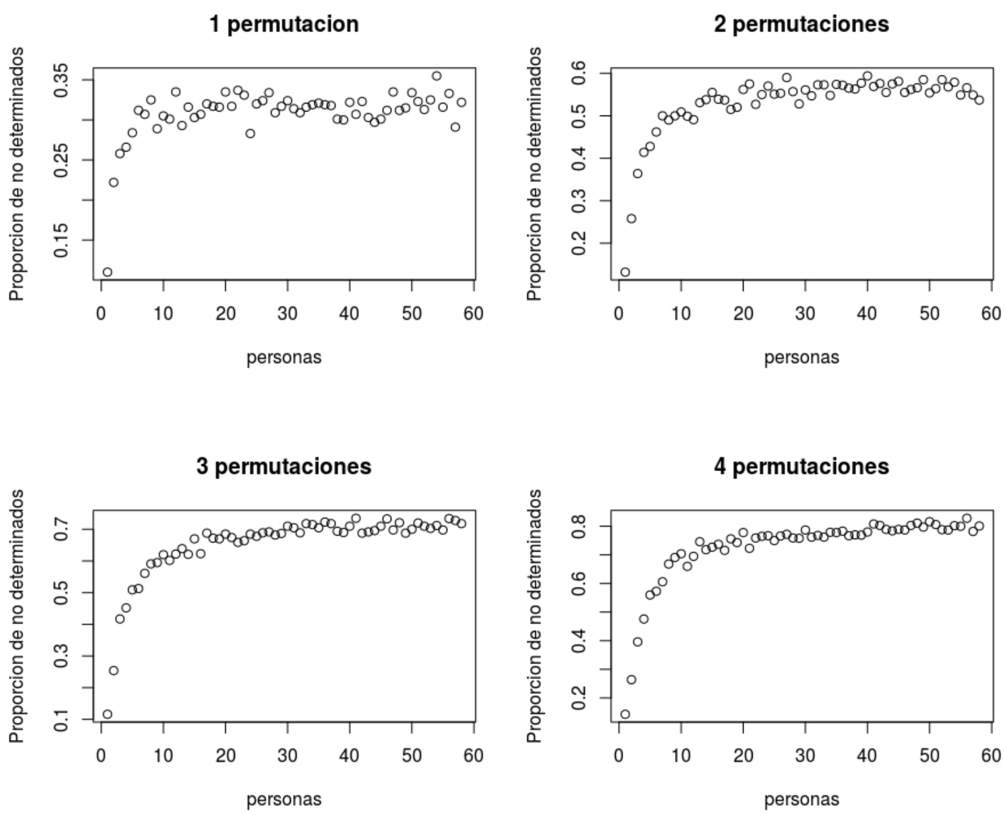
Para ver eso, realizamos 1000 simulaciones haciendo la misma cantidad de

Algoritmo 5 Permutar listas

Entrada: Listas de preferencias
Salida: Listas permutadas
  Para cada lista
    elegir dos lugares de la lista
    intercambiar las entradas en esos lugares
  Fin Para
  Devolver Listas

permutaciones para cada género, quienes tenían inicialmente las mismas listas, y cambiando la cantidad de personas por género.

En 4.4 veremos los resultados obtenidos.



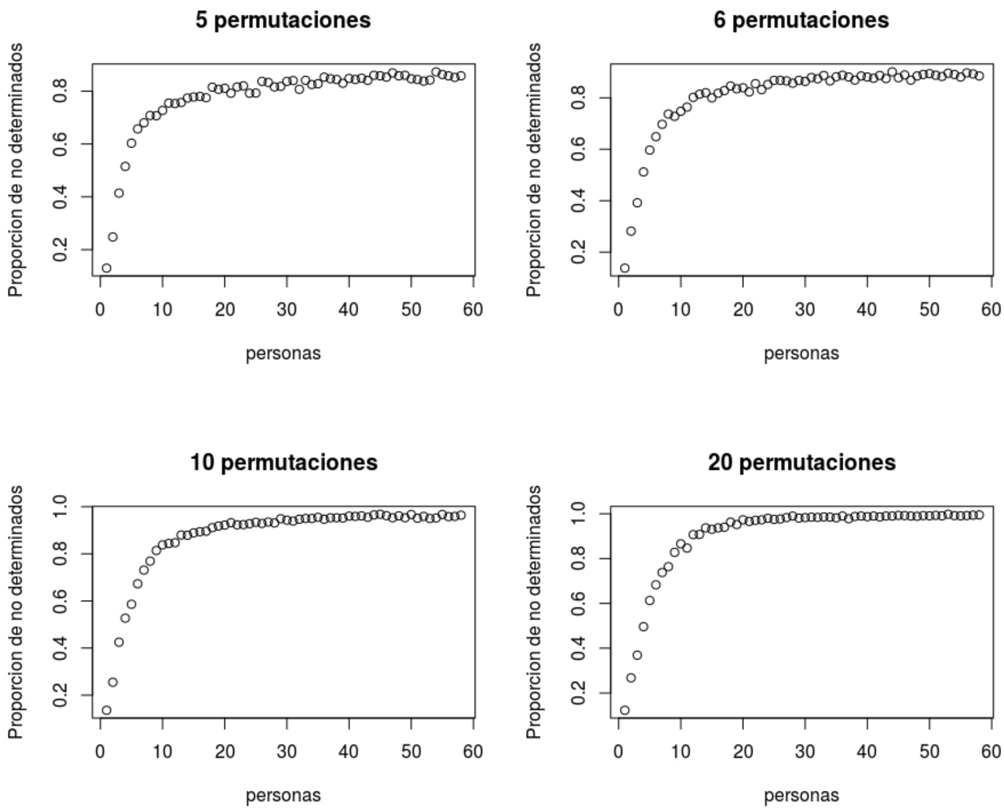
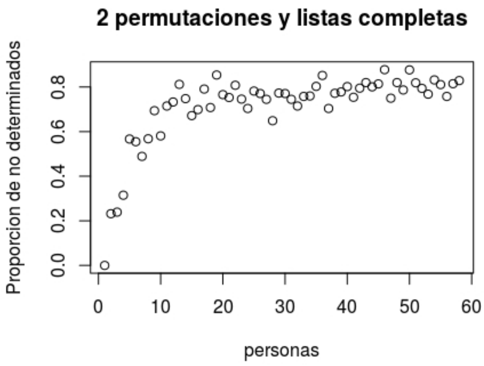


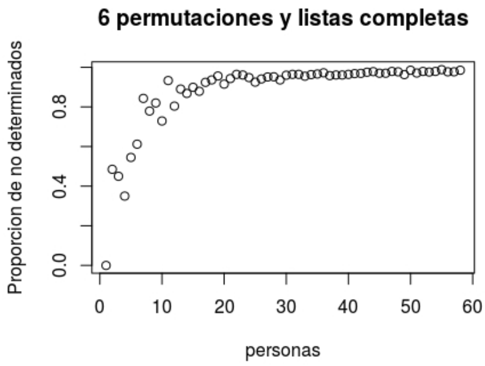
Figura 4.4: Permutaciones vs No determinados

Aquí podemos ver que a medida que aumentamos la cantidad de personas la proporción de no determinados aumenta rápidamente al principio, independiente del número de permutaciones, pero a partir de unas 15 personas parece estabilizarse y luego crece lentamente, sin llegar al 1. Es decir, sigue habiendo una fracción de determinados, pero si uno aumenta la cantidad de permutaciones, al perderse la estructura inicial de las listas en la cual eran todas iguales, vemos que esta proporción si comienza a acercarse al 1.

Destaquemos que en este caso partimos inicialmente con una misma lista para cada género, pero como vimos en 4.2.1 alcanza con que uno de los géneros tenga la misma lista. Es posible que este hecho forzó que la proporcion de determinados sea mas alta que si se dejaba que un género tuviera listas al azar, completas o no.

Simulamos entonces estas variantes, asignando una misma lista a un género, y el otro con listas al azar de longitud variable y con listas completas. Los resultados obtenidos son los siguientes:

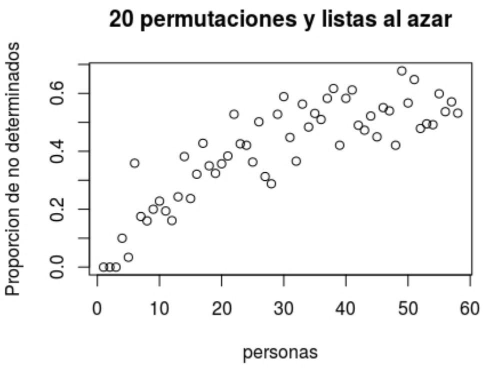


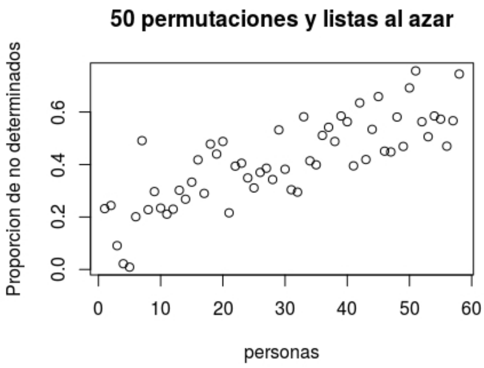


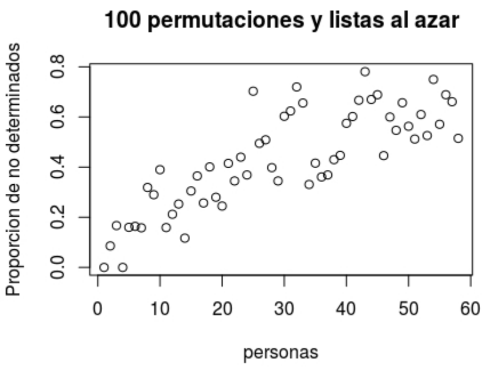
En el caso de las listas completas, como habíamos dicho, esta restricción es muy fuerte y fuerza a que la cantidad de no determinados sea alta, aunque hayamos hecho pocas permutaciones.

Podemos ver que cuando el otro género tiene listas aleatorias incompletas, hay más variabilidad de los resultados son más no hay una tendencia clara.

Observemos que en el caso de 6 permutaciones, cuando arrancábamos desde listas iguales, ya había una tendencia clara, ya sea si comparamos contra 3 permutaciones en cada género como contra 6 en ambos. Incluso aumentando las cantidad de permutaciones a 20, 50 y 100, se observa que una proporción importante de matchings se mantienen determinados.







4.2.4. Listas Madre

Otra forma de perturbar una lista es generar listas relacionadas entre si, derivadas de una misma lista madre.

Para eso, teniendo una lista fija y un parametro de "influencia genética", vamos a perturbar la lista con el Algoritmo 6:

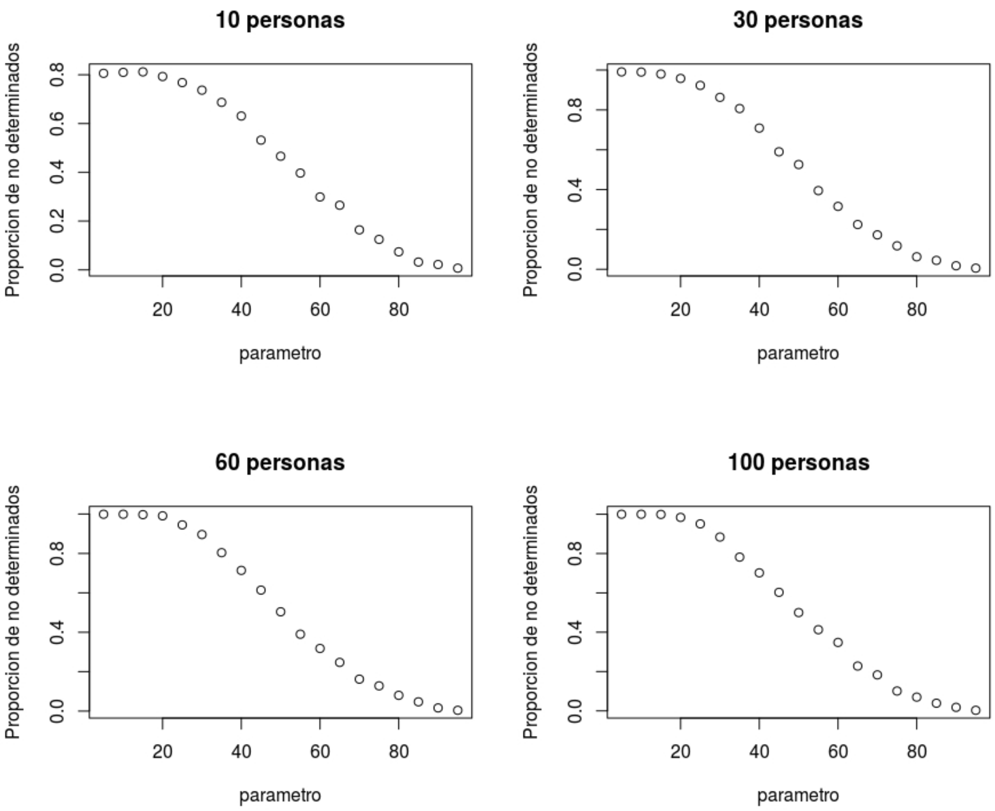
Algoritmo 6 Listas con madre

Entrada: Lista madre, parametro
Salida: Lista hija

```
hija=[]
opciones= Lista madre
Mientras opciones no es vacío
   candidato= primer elemento en opciones
   azar = generar número al azar entre 0 y 100
   Si azar < parametro
      Agregar el candidato a hija
      Sacar el candidato de las opciones
   Si no
      Poner candidato al final de opciones
   Fin Si
Fin Mientras
Devolver hija
```

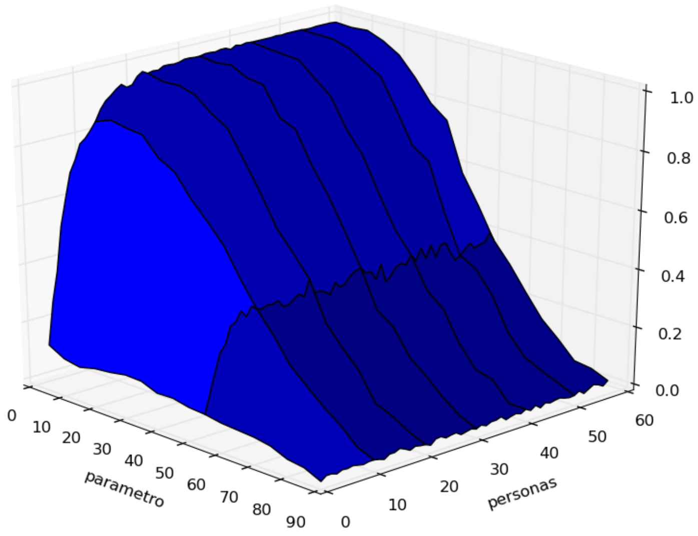
Así, con un parámetro cercano a 100, las listas tendrán un gran parecido y la mayoría de los órdenes relativos con respecto a la lista madre se mantendrán. Si el parametro es chico, terminaríamos teniendo una distribución casi uniforme sobre todas las permutaciones, y en particular, obtendríamos listas independientes entre sí.

Para ver como se altera la proporción de no determinados alteraremos el parámetro de influencia y la cantidad de personas. Es de esperar que aumentando el parámetro encontremos mas determinados, y aumentando la cantidad de personas, encontremos menos.



En **??** veremos un grafico en 3D de la situacion para ver que los perfiles obtenidos en realidad no dependen de la cantidad de personas.

Podemos observar que para mas de 30 personas los tres gráficos son muy similares, estando el equilibrio determinado cuando el parámetro es menor a 20. Cada diez personas, esto significa aproximadamente dos permutaciones (un 20 % de las veces saltea a la persona correspondiente). La proporción de determinados con esta regla es mayor que la que se obtenía permutando de una misma lista en la sección anterior.



4.3. Convergencia a equilibrios en casos generales

En el tercer capítulo vimos el algoritmo de Roth y Vander Vate que aseguraba convergencia a un equilibrio para casos en los que las listas eran completas y teníamos la misma cantidad de cada género vía satisfacer parejas que bloquean al matching.

Una pregunta abierta es qué pasa si los generos son desiguales en número y las listas no son completas. En esta sección abordaremos ese problema simulando una modificación de la dinámica propuesta por ellos y viendo que el resultado de convergencia con probabilidad 1 se verifica en la práctica mas allá de que las hipótesis no son las mismas que enunciaron.

4.3.1. Algoritmo de convergencia

El algoritmo usado es una leve modificación del propuesto por Roth y Vander Vate, pero la idea es la misma, satisfacer parejas que bloquean hasta llegar a un equilibrio. Las diferencias están en que, en primer lugar, al satisfacer una pareja las ex parejas quedan solteras, y en que en vez de seleccionar una pareja que bloquee particular, se elije una al azar entre todas las parejas que bloquean para satisfacer, y continuar así hasta que no hayan mas parejas que bloqueen. También utiliza fuertemente que las parejas que bloquean a un matching de un paso al otro no cambian mas allá de sacar aquellas que involucran a algún agente satisfecho y que ahora no bloqueen, y agregar aquellas que se hayan generado por la soltería de las ex parejas de los agentes satisfechos. Con esto ganamos el hecho de mantener con bajo costo la lista de parejas que bloquean en cada momento.

Algoritmo 7 Equilibrar matching

Entrada: matching inicial, preferencias
Salida: matching en equilibrio
  Detectar pares de parejas inestables y guardarlas
  Mientras existan parejas que bloqueen
    Elegir una pareja que bloquea al azar
    Crear nuevo matching satisfaciendo la pareja electa
    Borrar los pares de parejas que incluían las parejas rotas
    Guardar pares de parejas inestables que contienen la nueva pareja
    Guardar pares de parejas inestables que contienen a los nuevos agentes solteros
  Fin Mientras
  Devolver matching

Como la idea es utilizar este algoritmo para cantidades de mujeres y hombres no necesariamiente iguales, al satisfacer una pareja se deben dejar a las ex parejas solteras, si no alguien inicialmente emparejado nunca podría estar solo, situación que puede llevarnos a que el algoritmo nunca converja a un equilibrio en el peor de los casos, o que limite los matchings a los cuales podemos llegar de forma innecesaria.

4.3.2. Inicio con listas fijas

Es razonable preguntarse a qué matchings se puede converger por esta dinámica si uno arranca siempre desde el mismo matching inicial dejando fijas las listas. ¿Llegaremos siempre a los mismos? ¿dependerá de la cantidad de cada género? ¿los óptimos de cada género serán matchings mas probables?

Para responder estas preguntas lo que hicimos fue simular la dinámica con el Algoritmo 8, corriéndolo 100 veces, cada vez con un nuevo matching inicial aleatorio, y listas de preferencia asignadas al azar.

Algoritmo 8 Inicio Fijo

Entrada: matching inicial, preferencias, iteraciones
Salida: equilibrios con su frecuencia de aparición
  Si está determinado el matching
    conteo[óptimo]=iteraciones
  Fin Si
  conteo=
  Para iteraciones
    equilibrar matching inicial
    conteo[matching equilibrado]+1
  Fin Para
  Devolver conteo

Nuestro objetivo es analizar los resultados con distintas distribuciones de mujeres, para ver si esto afecta o no a los matchings alcanzados. Veamos qué ocurrió en cada caso estudiado.

50 mujeres y 10 hombres

Cuando corrimos la dinámica con 50 mujeres y 10 hombres los resultados fueron los siguientes

- La totalidad de las veces el matching estuvo determinado, por lo que no hubo necesidad correr el Algoritmo 8.

Notamos que la mayoría de las veces, en este caso en su totalidad, que generamos listas al azar obtenemos que el matching está determinado y esto no nos permite ver bien como se distribuyen los puntos de equilibrio de la dinamica .

Hicimos una segunda simulación en la que pedimos que genere 100 casos en los que el matching no esté determinado, y los resultados fueron los siguientes:

- 89 veces se llegó a dos matchings equiparables en frecuencia (ambos entre 40 y 50), correspondientes a los óptimos de cada género.

- 3 veces se encontró un equilibrio dominante, por encima de 70 apariciones, y otro con el resto. En dos de ellas, el dominante fue el óptimo de mujeres.
- 2 veces se llegó a dos matchings equiparables, y algunos con muy poca frecuencia (menos de 10 apariciones). En ambas los dos equiparables fueron los óptimos de cada género.
- 5 veces se llegó a tres o mas equiparables en frecuencia, y siempre los óptimos de cada género estuvieron entre ellos.
- Una sola vez se presentaron dos equiparables muy frecuentes, y otros dos que aparecieron entre 10 y 15 veces.

50 mujeres y 25 hombres

- 91 veces el matching estuvo determinado.
- En 7 ocasiones se llegó a dos equilibros equiparables, ambos óptimos de cada género.
- En las restantes dos se llegó a que el óptimo de mujeres tuvo frecuencia por encima del 70 por ciento, y el de hombres el resto.

Cuando pedimos que el matching no esté determinado a priori, conseguimos los siguientes resultados:

- 71 veces conseguimos dos matchings, ambos los óptimos de cada género, equiparables en frecuencia.
- En 23 casos se llegó a un equilibrio dominante, en todos ellos los óptimos de cada género figuraron, siendo 19 veces dominante el óptimo de las mujeres, 4 el de hombres. Solo una vez apareció un matching no óptimo de un género
- En 4 ocasiones obtuvimos varios equilibros equiparables, en frecuencia, siempre con los óptimos de cada género presentes.

- En las restantes 2 obtuvimos dos equilibrios equiparables y uno con menos de 10 apariciones.

30 mujeres y 30 hombres

Al intentar simular con 50 en cada género, cada iteración tardó mucho tiempo y como la idea de este sección es analizar distribuciones. necesitabamos conseguir muchas iteraciones sobre el mismo caso, por lo que se redujo la cantidad de mujeres y hombres a 30 esperando que estas proporciones sean manejables.

- 71 veces el matching estuvo determinado.
- 24 veces hubo dos equilibrios, en las 24 el óptimo de mujeres fue uno de ellos, y en 23 estuvo el de hombres.
- 5 veces existió uno dominante y otro con menor frecuencia, siempre entre los óptimos de cada género, siendo el de mujeres el dominante 3 veces.

Al analizar otras 100 muestras partiendo de listas que no daban lugar a un matching determinado:

- 55 veces se llegó a dos matchings con frecuencia similar, ambos los óptimos de cadagenero.
- 7 veces se alcanzaron varios matchings con frecuencias parejas, y siempre estuvieron involucrados los óptimos de cada género.
- 29 veces se llegó a un matching dominando a otros en frecuencia, 18 de ellas el dominante fue el óptimo de hombres y las restantes 11 el de mujeres.
- En las restantes 9 se obtuvieron dos o tres matchings equiparables en frecuencia y otros con bastante menos. Siempre los óptimos de cada género aparecían entre los más y frecuentes.

4.3.3. Inicio Aleatorio

Con una idea parecida al caso anterior donde dejábamos fijo el matching inicial, ahora arrancaremos desde matchings aleatorios, la principal incógnita que tenemos en este caso es si haciendo esto llegamos a diversos equilibrios o si aún partiendo desde lugares distintos hay matchings mas atractivos que otros.

Para eso usaremos una dinámica muy parecida a la anterior, corriéndola 100 veces para las mismas proporciones de géneros que en las listas fijas:

Algoritmo 9 Inicio Aleatorio

Entrada: preferencias, iteraciones
Salida: equilibrios con su frecuencia de aparición
  Si está determinado el matching
    conteo[optimo]=iteraciones
  Fin Si
  generar matching al azar
  conteo=
  Para iteraciones
    equilibrar matching generado
    conteo[matching equilibrado]+1
  Fin Para
  Devolver conteo

50 mujeres y 10 hombres

Lo obtenido en este caso es lo siguiente:

- 99 veces el matching estuvo determinado.
- La restante tuvo una distribución muy pareja entre los óptimos de cada género.

Al pedir que trabaje solo frente a preferencias que no den lugar a un matching determinado, se obtuvieron los siguientes resultados:

- 79 de ellas llegaron a dos equilibros, equiparables en frecuencia, ambos los óptimos de cada género.

- Una vez se llegó a varios equilibros, equiparables en frecuencia.
- 3 veces existió uno dominante, con mas de 70 apariciones, y otro minoritario. Siempre ambos eran los óptimos de cada género, y en 2 de ocasiones el mayoritario fue el de mujeres.
- 3 veces existieron dos equilibrios frecuentes y equiparables, ambos los óptimos de cada género, y otros pocos muy minoritarios.
- 14 veces existieron dos equilibrios frecuentes y equiparables, ambos los óptimos de cada género, y varios minoritarios. El caso mas extremo que obtuvimos fue de 25 equilibrios con menos de 2 apariciones cada uno.

50 mujeres y 25 hombres

Los resultados fueron los siguientes:

- 89 casos donde el matching estaba determinado.
- 10 casos donde los óptimos de cada género eran equiparables por su frecuencia.
- En el restante, el óptimo de las mujeres fue mucho mas frecuente que el de los hombres, siendo estos dos los únicos equilibrios presentes.

Al trabajar solo sobre casos no determinados obtuvimos:

- En 73 casos donde los óptimos de cada género eran equiparables por su frecuencia.
- 22 veces un matching tuvo una frecuencia alta (mas de 70 apariciones), siempre entre los óptimos de cada género, siendo el de mujeres el dominante en 18 oportunidades.
- Las restantes 5 resultaron ser situaciones con 3 o 4 equilibrios equiparables por su frecuencia. Siempre estuvieron presentes los óptimos de cada género.

30 mujeres y 30 hombres

Este caso no fue analizado porque las simulaciones demoraban mucho más del tiempo que nos podíamos permitir.

4.3.4. Conclusiones

De las preguntas que inicialmente planteamos, podemos responder en base a los resultados que los óptimos de género, son puntos de atracción de la dinámica, estando siempre presentes y de forma mayoritaria frente a los otros.

En los casos que la cantidad de mujeres fue mayor que la de hombres, se observó una tendencia marcada a alcanzar el óptimo de ellas frente al óptimo de hombres. Cuando la cantidad de personas de cada género era similar, entonces ambos tuvieron frecuencias similares de aparición, lo cual era esperable ya que la dinámica no favorece ningún género en su ejecución.

La fuerte atracción que generan los óptimos de cada género no permiten la aparición de otros equilibros distintos, salvo en el caso en que hay una diferencia clara entre la cantidad de personas de un género y del otro. Si se comienza generando un matching aleatorio, entonces se logró observar otros equilibros que no eran los óptimos de algún genero, posiblemente por haber comenzado muy cerca de alguno de los equilibrios.

Se observa que esta dinámica no es una buena manera de generar un equilibrio de forma aproximadamente uniforme, y que lo mas probable es que terminemos llegando a algunos de los óptimos de algún genéro, los cuales podemos generar con muchísimo menos costo computacional con el AAD.

Bibliografía

[Eec00] Jan Eeckhou, *On the uniqueness of stable marriage matchings*, Economics Letters **69** (2000), no. 1, 1–8. ↑35

[GS62] David. Gale and Lloyd S. Shapley, *College admissions and the stability of marriage*, The American Mathematical Monthly **69** (1962), no. 1, 9–15. ↑viii, ix, 1, 3, 11, 23

[Irv85] Robert W Irving, *An efficient algorithm for the "stable roommates" problem*, Journal of Algorithms **6** (1985), no. 4, 577–595. ↑ix, 11, 13

[IL86] Robert W Irving and Paul Leather, *The complexity of counting stable marriages*, SIAM Journal of Computing **15** (1986), 655–667. ↑32

[KT28] B. Knaster and Alfred Tarski, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Soc. Polon. Math. **6** (1928), 133–134. ↑8

[Knu76] Donald Ervin Knuth, *Mariages stables et leurs relations avec d'autres problèmes combinatoires: introduction à l'analyse mathématique des algorithmes*, Montréal: Presses de l'Université de Montréal, 1976. ↑11, 23, 26

[MII+02] David F Manlove, Robert W Irving, Kazuo Iwama, Shuichi Miyazaki, and Yasufumi Morita, *Hard variants of stable marriage*, Theoretical Computer Science **276** (2002), no. 1, 261–279. ↑11

[RV90] Alvin E. Roth and John H Vande. Vate, *Random paths to stability in two-sided matching*, Econometrica: Journal of the Econometric Society (1990), 1475–1480. ↑23, 26

[Tar55] Alfred Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific journal of Mathematics **5** (1955), no. 2, 285–309. ↑7, 9