

Índice general

Agradecimientos	5
Introducción	7
1. Nociones elementales de nudos	11
1.1. Primeras definiciones	11
1.2. Proyecciones de un nudo	13
1.3. Movimientos de Reidemeister	15
1.4. Links	17
1.5. Grupo de trenzas y Teorema de Alexander	18
1.5.1. Diagramas de trenzas	19
1.5.2. Trenzas cerradas y clausura de trenzas	23
2. Invariantes elementales	27
2.1. Primeros ejemplos	27
2.1.1. Número de cruces	27
2.1.2. Número de desanudamiento	28
2.1.3. Número de enlazamiento	29
2.1.4. Índice de trenza	32
2.2. Superficies de Seifert y género	32
2.3. Polinomio de Conway	36
2.3.1. Links toro	37
2.4. Polinomio de Jones	41
2.5. El grupo del nudo	45
2.5.1. La presentación de Wirtinger	46
2.6. p -coloreos	49
2.7. Representaciones del grupo de nudo	52
3. Invariantes de tipo finito	59
3.1. Nudos singulares	59
3.2. Invariantes de Vassiliev	60
3.3. Algunos ejemplos de Invariantes de Vassiliev	64
3.4. Diagramas de cuerdas	67

4. Criterios de finitud de invariantes	75
4.1. Sucesiones de twists	75
4.2. Fórmula de Newton y crecimiento polinomial	79
4.3. La t -sucesión $\{T_i\}$	82
4.4. Aplicación a representaciones del grupo de un nudo	85
4.4.1. Grupos nilpotentes	86
4.4.2. Aplicación a representaciones del grupo de un link	93
Bibliografía	96

Agradecimientos

A Vendra, por aceptarme como su alumno y dirigir esta tesis, a pesar de mis caprichos sobre la elección del tema. Gracias por la paciencia, la dedicación y por ser un excelente docente.

A los jurados, Marco y Gastón, por tomarse el trabajo de leer esta tesis en tan poco tiempo.

A mis viejos, por apoyarme todos estos años para que pudiese estudiar esto que tanto me gusta.

A Marisol, mi amor, mi mejor amiga. Gracias por el amor que me das todos los días y por bancarme en mis delirios matemáticos. Gracias por seguirme escuchando, aún cuando ya era hora de dejar de hablar de nudos. Por enseñarme biología pero sobre todo a ser mejor persona. Por descubrir juntos que los juegos de mesa no eran solo para chicos.

A toda la buena gente que conocí a lo largo de estos años: Felipe, Virginia, el muerto de Sacha, Manuela, Santiago, Juan P., Juan D., Juan Z., Nahuel, Seba V., Seba R., Rocío, María Luz, Nico, Pota, Viole, Ivan, Noelia y tantos otros más (espero que no tantos) que me estoy olvidando. Gracias a todos por las historias, las risas, las (demasiadas) horas de estudio, los cafés, el fútbol, el truco y los juegos. Sin duda, hicieron que esta sea una hermosa experiencia.

A Emiliano y Pablo, mis *FerneFriends*. Gracias por todos los momentos que compartimos (¡hasta ahora! tienen Juan para rato). Las jodas, los códigos, la rampa, los escapes, las operas, las llamadas de mil horas, la revolución del Skype y tantas cosas más; todo es prueba del aprecio que les tengo. Gracias por acompañarme, por la paciencia, por escucharme hablar de nudos como si fuese lo más normal del mundo, por enseñarme sobre matemática y sobre la vida. Aprender con ustedes, a las puteadas, hizo que pueda tener algunos menos problemitas lógicos.

Y especialmente a Estela, por ser la primera en alumbrar este camino.

Introducción

La Teoría de Nudos es una rama de la matemática con más de 200 años de antigüedad. La primera referencia a los nudos proviene del matemático francés Vandermonde a finales del siglo XVIII. Algunos años más tarde, fue Gauss quién plantó las bases de la teoría tal como la conocemos hoy, creando un método para tabular nudos y descubriendo el primer invariante de links, conocido hoy en día como “Gauss Linking Number”. El estudio de los nudos también tuvo en sus comienzos la atención de la comunidad física: el físico inglés Lord Kelvin conjeturó que los átomos eran, esencialmente, nudos formados por pequeños vórtices de éter. Esta teoría, que resultó ser incorrecta, motivó al físico-matemático Tait a realizar las primeras tablas de clasificación de nudos y formular las tres *conjeturas de Tait* sobre links alternados a finales del siglo XIX. Sin embargo, en ese momento aún se desconocían métodos para determinar si dos nudos eran o no equivalentes, salvo por examinación visual.

La teoría ganó mayor impulso a principios del siglo XX con la sistematización de su estudio, a través de los aportes de Reidemeister y Alexander. Fue el matemático alemán Reidemeister quien demostró que dos diagramas de un mismo nudo estaban relacionados por una secuencia finita de solo tres tipos de movimientos. Por su parte, motivado por el desarrollo de Artin de la teoría de trenzas, Alexander demostró que cualquier link podía ser representado como la clausura de una trenza; este resultado invita a preguntarse cómo puede usarse el grupo de trenzas para resolver el problema de clasificar nudos. Otro importante aporte de Alexander al estudio de nudos fue el descubrimiento del primer invariante polinomial, conocido como polinomio de Alexander (o polinomio de Alexander-Conway, por los posteriores aportes del último). Este polinomio permitió distinguir una gran cantidad de nudos mediante cálculos sencillos.

Sin embargo, fue Jones quien en 1984 revolucionó el estudio de los nudos al descubrir el polinomio de Jones, mientras estudiaba representaciones del grupo de trenzas. A pesar de que este invariante no es precisamente más fuerte que el de Alexander-Conway (es decir, existen pares de nudos no equivalentes que A-C distingue pero Jones no) tiene sin duda más ventajas, como por ejemplo detectar la quiralidad de un nudo. Se sabe además que existen nudos no triviales cuyo polinomio A-C es trivial; sin embargo, para el polinomio de Jones se mantiene aún una abierta la pregunta sobre si es capaz de distinguir la trivialidad de un nudo. El descubrimiento de Jones, que le mereció la medalla Fields, despertó el interés sobre los nudos en la comunidad matemática: solo cuatro meses después, otros ocho matemáticos descubrieron, de forma independiente, el polinomio HOMFLY-PT (nombre que combina

las iniciales de sus autores); un invariante aún más poderoso que el de Jones y el de A-C. El polinomio de Jones fue además una herramienta clave en las primeras demostraciones formales de las conjeturas de Tait.

En esta tesis hablaremos sobre el trabajo realizado por Vassiliev en la década del '90, quien dio un enfoque distinto al realizado hasta el momento, debido en parte a que la Teoría de Nudos no era su principal área de estudio. La definición de los llamados invariantes de tipo finito, o invariantes de Vassiliev, se basa a grandes rasgos en la observación de que los nudos forman un espacio topológico y que se puede pensar a los invariantes de nudos como funciones localmente constantes en ese espacio. Los aportes de Birman y Lin permitieron una mejor descripción de estos invariantes haciendo uso del álgebra de diagramas de cuerdas. Además, demostraron que esta familia de invariantes es al menos tan poderosa como los invariantes polinomiales mencionados. A pesar de que estos últimos no logran distinguir todos los nudos, la importante pregunta sobre si los invariantes de Vassiliev lo hacen se mantiene abierta. Esta conjetura sigue motivando el estudio de estos invariantes, aunque todavía ni siquiera se sabe si los invariantes de Vassiliev pueden detectar la orientación de un nudo.

Hoy en día el alcance de la Teoría de Nudos se extiende por fuera del campo de la matemática. En los últimas décadas, se han encontrado ejemplos aplicaciones concretas en física, en teoría de cuerdas y gravedad cuántica, y en biología, en el estudio de replicación y recombinación del ADN. Los desafíos de clasificar nudos y de establecer un sistema de invariantes completo de forma efectiva, junto con el de entender estas conexiones con otras áreas de la ciencia, son los ejes que mantienen activo al día de hoy el estudio de los nudos a lo largo de la comunidad científica.

Este trabajo está organizado en cuatro capítulos. En el Capítulo 1, definiremos con precisión nudos y links junto a una clase de equivalencia por movimientos espaciales de los mismos. Luego, llevaremos el estudio de los nudos y links al plano al considerar sus proyecciones sobre \mathbb{R}^2 , que llamaremos diagramas. Utilizando los movimientos de Reidemeister obtendremos una noción de equivalencia de diagramas consistente con la de nudos y links vistos en \mathbb{R}^3 . Por último, definiremos el grupo de trenzas B_n y daremos una interpretación geométrica del mismo por medio de lo que llamaremos *trenzas geométricas*. Utilizando estas trenzas geométricas, podremos demostrar que cualquier link se realiza como la clausura de una trenza; este famoso resultado se conoce como Teorema de Alexander.

En el Capítulo 2 exhibiremos distintos invariantes que nos permitirán distinguir nudos. Comenzaremos con algunos de los invariantes más sencillos de describir, pero difíciles de calcular, como el número de cruces, el número de desanudamiento o el índice de trenza. Luego, introduciremos dos de los invariantes polinomiales más conocidos, el polinomio de Conway y el de Jones. Calcularemos el polinomio de Conway sobre una familia importante de links, los links toro, lo cual nos será de utilidad en los capítulos siguientes. Para finalizar, definiremos dos importantes invariantes topológicos de links: el género y el grupo fundamental. Utilizando este último veremos que uno de los invariantes más clásicos, la cantidad de p -coloreos,

resulta de mirar las representaciones del grupo fundamental $\pi(K)$ del nudo K en el grupo diedral D_{2p} .

En el Capítulo 3 definiremos el objeto de estudio de esta tesis: los invariantes de tipo finito o de Vassiliev. Para ello vamos a introducir la noción de *nudo singular* y a mostrar cómo se pueden extender los invariantes clásicos de nudos sobre estos nuevos nudos singulares mediante la *relación de Vassiliev*. Mostraremos que los coeficientes de los polinomios de Conway y Jones son de tipo finito, y que el número de desanudamiento no lo es. Por último, veremos que los invariantes de Vassiliev quedan unívocamente determinados por sus valores sobre una cantidad finita de nudos singulares. Veremos además cómo pueden codificarse estos finitos nudos mediante lo que llamaremos *diagrama de cuerdas*.

Para finalizar la tesis, exhibiremos en el Capítulo 4 algunas técnicas que nos permitirán detectar si un invariante es, o no es, de tipo finito. Comenzaremos introduciendo las sucesiones de twists y veremos que los invariantes de Vassiliev tienen un comportamiento polinomial sobre estas. Esto nos permitirá probar que el índice de trenza, el género y el número de desanudamiento no son invariantes de tipo finito. Además, utilizando estos tres invariantes, obtendremos un método para determinar cuándo un invariante de nudos es constante o no de tipo finito. En la Sección 4.3 analizaremos qué sucede cuando la sucesión de twists es la de nudos toro $(2n + 1, 2)$ y obtendremos una condición necesaria y suficiente para que una función polinomial sobre esta sucesión se extienda a un invariante de Vassiliev sobre todos los nudos. Para finalizar, haremos un estudio del invariante $F_G(K) = |\text{Hom}(\pi(K), G)|$, la cantidad de representaciones del grupo fundamental en un grupo G , introducido en la Sección 2.7. Utilizando las sucesiones de twists, lograremos ver que F_G es constante o no de tipo finito. Luego, interpretaremos este resultado en términos puramente algebraicos: haremos una breve introducción al mundo de los grupos nilpotentes y veremos que el invariante F_G es constante si y solo si el grupo G es nilpotente.

Capítulo 1

Nociones elementales de nudos

1.1. Primeras definiciones

Llamamos nudo a una curva cerrada en \mathbb{R}^3 sin auto-intersecciones. Una forma precisa de definirlo es

Definición 1.1.1. Un *nudo* es una curva poligonal simple y cerrada en \mathbb{R}^3 ; es decir, es una unión de finitos segmentos, también llamados *aristas*,

$$[a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{N-2}, a_{N-1}] \cup [a_{N-1}, a_0]$$

disjuntos dos a dos excepto cuando sean consecutivos, en cuyo caso se intersecan en un solo punto que llamamos *vértice*.

Además, vamos a considerar que los nudos tienen asignada una orientación. Un nudo se dice *orientado* si la curva poligonal está orientada.

A pesar de considerar a los nudos de esta forma poligonal, podemos pensar que cada nudo está compuesto de una cantidad inmensa (pero aún finita) de aristas. Esto nos permitirá dibujar nuestros nudos con curvas *suaves*, en vez de segmentos rectos; sin embargo, no debemos olvidar que sigue siendo una colección finita de estos últimos.

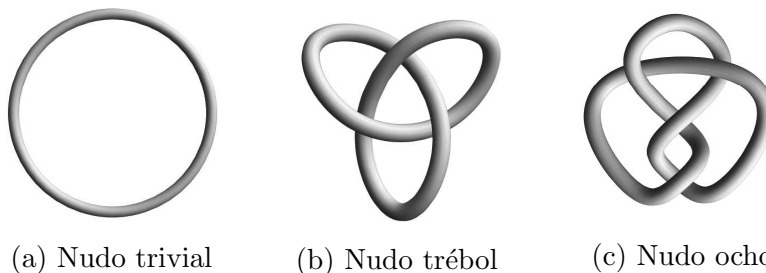


Figura 1.1: Primeros ejemplos de nudos. En estas imágenes el grosor es solo para generar la sensación de profundidad, pero los nudos que definimos no tienen grosor.

Debemos insistir en mantener finita la cantidad de aristas, dado que de lo contrario estaríamos considerando también nudos con una cantidad infinita de pliegues,

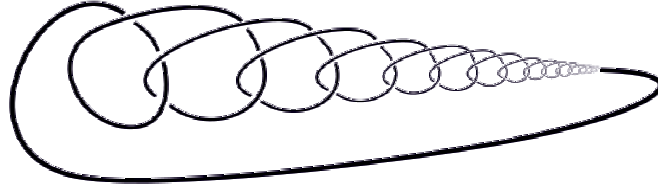
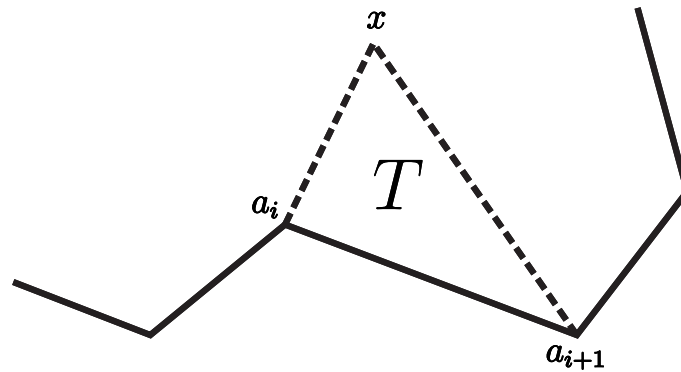


Figura 1.2: Nudo salvaje.

Figura 1.3: Δ -movimiento

volviéndose cada vez más pequeños hasta converger a un único punto (ver Figura 1.2). Estos nudos son llamados *salvajes* y no serán considerados en este trabajo.

La definición de nudo que exhibimos resulta casi idéntica a lo que uno consideraría una cuerda anudada, excepto que no tiene grosor, está fijo en el espacio y forma una curva cerrada. Lo que nos resulta de interés al encontrarnos con uno de estos nudos en la vida real es saber si puede ser desanudado mediante ciertos movimientos, sin romper la cuerda.

El problema fundamental de la teoría de nudos es precisamente este: determinar si un nudo puede ser desanudado a través de ciertos movimientos en \mathbb{R}^3 , sin romperlo ni generando auto-intersecciones en el proceso. Para encarar este problema desde un punto de vista topológico, necesitamos definir una relación de equivalencia que nos permita identificar aquellos nudos que solo difieran en movimientos aplicables a una cuerda cerrada en el espacio.

Definición 1.1.2. (Δ -movimiento) Supongamos que K es un nudo en \mathbb{R}^3 que tiene a $[a_i, a_{i+1}]$ como uno de sus segmentos, y supongamos que $T = [a_i, x, a_{i+1}]$ es un triángulo *relleno* cerrado en \mathbb{R}^3 que interseca a K sólo en el segmento $[a_i, a_{i+1}]$. Sea K' el nudo que resulta de K al reemplazar el segmento $[a_i, a_{i+1}]$ por los dos segmentos $[a_i, x] \cup [x, a_{i+1}]$. Llamamos Δ -movimiento al proceso que transforma a K en K' .

En el caso en que K tenga asignada una orientación, K' lleva la misma orientación inducida por $K \setminus [a_i, a_{i+1}]$. El proceso inverso será notado por Δ^{-1} . (Ver Figura 1.3.)

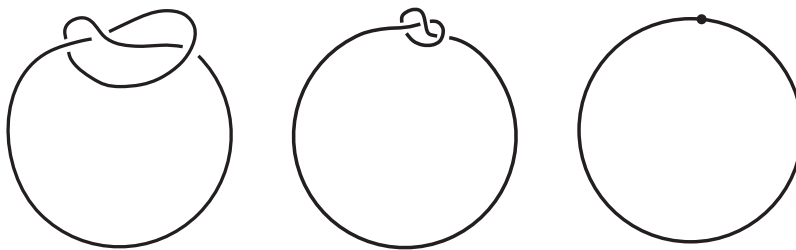
Un Δ -movimiento es el tipo básico de deformación de nudos que debería ser tomado en cuenta como una equivalencia. Vamos entonces a definir nuestra relación

de equivalencia como aquella “generada por Δ -movimientos”:

Definición 1.1.3. Dos nudos K y J son *equivalentes* (o *isotópicos*) si existe una secuencia de nudos $K = K_0, K_1, K_2, \dots, K_n = J$ tal que cada par K_i, K_{i+1} está relacionado por un Δ -movimiento o su inverso.

Notación. Un nudo K puede hacer referencia a un representante de una equivalencia de nudos o a la clase misma. Si los nudos K y K' son equivalentes, vamos a decir que son el mismo, y notaremos $K = K'$.

Observación 1.1.4. Es importante destacar que al admitir solo finitos Δ -movimientos en la definición de equivalencia, estamos evitando considerar a los siguientes nudos como equivalentes



ya que es claro que si intentamos apretar un nudo real como muestra la figura, este no desaparecería.

Observación. La definición de nudo que dimos es solo una de varias definiciones equivalentes. Otra forma natural de definir un nudo es como la imagen de una función $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva y diferenciable, con diferencial nunca nulo (una demostración de la equivalencia de ambas definiciones se puede encontrar en [CF63, Apéndice I]). A pesar de que nos enfocaremos de lleno en definición poligonal, en alguna ocasión resultará de utilidad considerar esta definición alternativa.

1.2. Proyecciones de un nudo

A pesar de que los nudos son curvas espaciales, los datos para determinar el tipo de nudo vienen dados usualmente por una *proyección de K* en el plano \mathbb{R}^2 (proyección planar). Dada una proyección $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, un punto $P \in p(K) \subset \mathbb{R}^2$ cuya preimagen $p^{-1}(P)$ contenga más de un punto de K será llamado punto *múltiple*.

Definición 1.2.1. Si K es un nudo en \mathbb{R}^3 , su *proyección* es $p(K) \subseteq \mathbb{R}^2$, donde p es la proyección a lo largo del eje- z en el plano xy . La proyección de K se dice *regular* si la preimagen de un punto de $p(K)$ consiste en uno o dos puntos de K , y en el último caso ninguno de esos dos es un vértice de K .

Claramente un nudo tiene una *proyección irregular* si tiene alguna arista paralela al eje- z , si tiene tres o más puntos encimados o cualquier vértice alineado verticalmente con otro punto de K . Por otro lado, una proyección regular de un

nudo va a consistir de una poligonal dibujada en el plano solo con puntos dobles como auto-intersecciones.

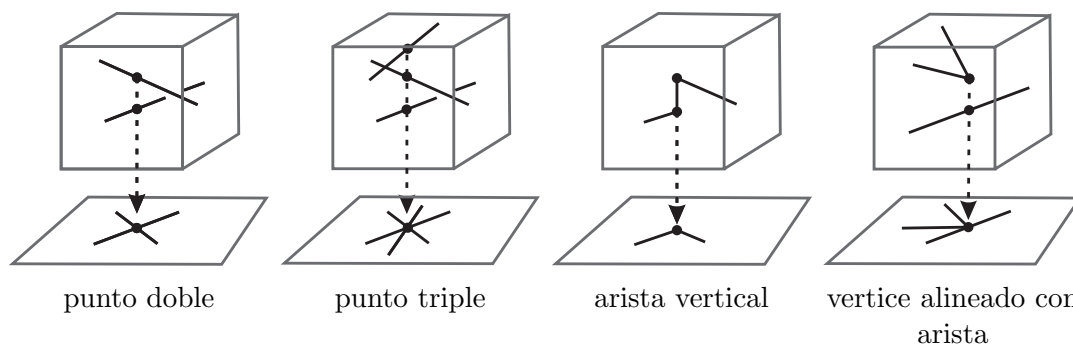
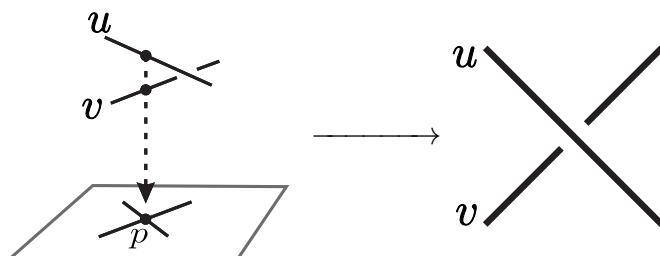


Figura 1.5: Proyección regular y proyecciones irregulares.

Definición 1.2.2. Si K tiene una proyección regular entonces podemos definir el correspondiente *diagrama D del nudo* redibujando un entorno de cada *cruce* para recuperar la información respecto a cuál arista pasa por arriba y cuál por debajo, cortando esta última en dos. Es decir, si las aristas u y v proyectan un punto en común p , y u se encuentra por encima de v en ese punto, el diagrama en ese cruce será de la forma:



Al hacer estos cortes en la proyección, el resultado será un conjunto de curvas cerradas y disjuntas en el plano. Llamamos a cada una de estas curvas un *arco* del diagrama.

Es conveniente notar que siempre puede obtenerse una proyección regular para un nudo K . Una demostración de esto puede encontrarse en [CF63, (3.1), página 7].

Proposición 1.2.3. *Cualquier nudo K es equivalente a un nudo en posición regular; es decir, cuya proyección resulte regular.*

Ejemplo 1.2.4. El nudo trébol del Ejemplo 1.1(b) se representa usualmente por el siguiente diagrama



Observación 1.2.5. Es claro que al tratar de reconstruir un nudo a partir de su diagrama, el resultado no es único. Esto se debe, por ejemplo, a que no conocemos las coordenadas- z de los vértices. Sin embargo, esto no es un problema ya que si obtenemos dos nudos representantes del mismo diagrama, digamos K y K' , podemos de manera sencilla conectar sus aristas mediante Δ -movimientos. (En la Figura 1.7 vemos cómo es posible mover las aristas de el nudo K' para hacerlas coincidir con las de K .) Es decir, siempre es posible reconstruir el nudo salvo equivalencias.

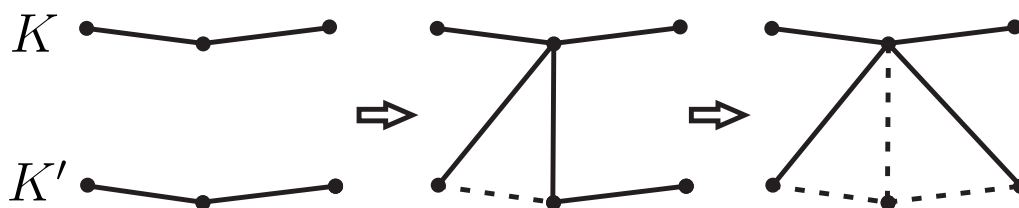


Figura 1.7

1.3. Movimientos de Reidemeister

Ya sabemos representar un nudo con un diagrama. Sin embargo, dado que un nudo puede ser representado por infinitos diagramas, no resulta claro qué información del diagrama nos dice algo respecto del nudo original.

A continuación, vamos a definir una noción de *equivalencia de diagramas* que nos permitirá entender cuándo dos diagramas diferentes representan al mismo nudo.

Definición 1.3.1. (Movimientos de Reidemeister) Dos *diagramas de nudo* se dicen *equivalentes* si están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister Ω_i , $i = 0, 1, 2, 3$, o sus inversos Ω_i^{-1} . Los movimientos están descritos en la Figura 1.8.

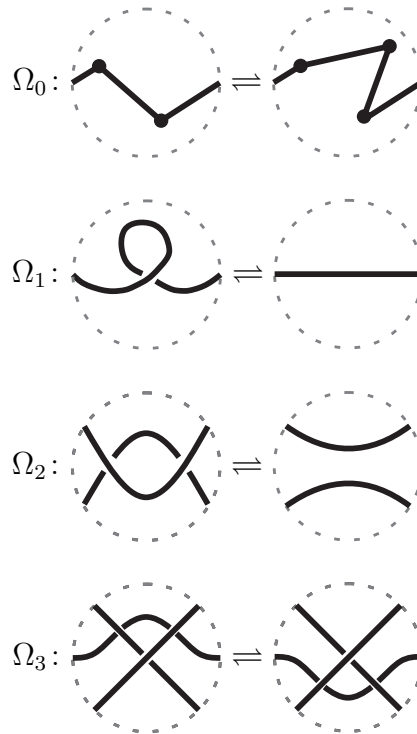


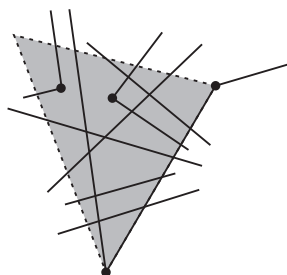
Figura 1.8: Movimientos de Reidemeister

El movimiento Ω_0 es simplemente una versión planar de un Δ -movimiento. Usualmente damos por sentado este movimiento, dado que cuando dibujamos el diagrama de un nudo no nos importa cuál es la forma precisa de sus aristas.

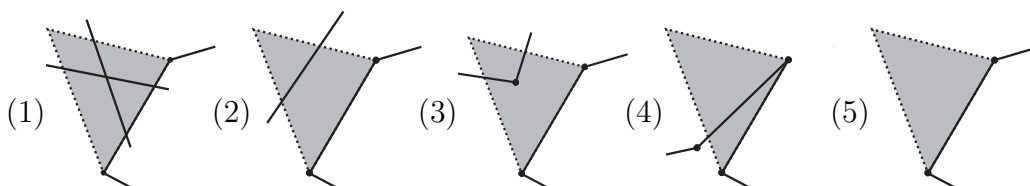
Las operaciones $\Omega_i^{\pm 1}$ efectúan cambios locales en el diagrama. Es evidente que todas estas operaciones pueden realizarse por Δ -movimientos aplicados al nudo; diagramas equivalentes definen entonces nudos equivalentes. El recíproco también es cierto:

Teorema 1.3.2 (Reidemeister). *Dos nudos son equivalentes si y solo si todos sus diagramas son equivalentes.*

Demostración. (Idea) Sean K y K' nudos con diagramas D y D' . Si K y K' son equivalentes, entonces existe cierto n y una secuencia de nudos $K = K_0, K_1, \dots, K_n = K'$, donde cada uno difiere del anterior en un Δ -movimiento. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que todos los nudos K_i tienen proyecciones regulares y diagramas $D = D_0, D_1, \dots, D_n = D'$, donde cada uno difiere del anterior en una *proyección de un Δ -movimiento*. La proyección del triángulo que define el Δ -movimiento probablemente se superponga con varios fragmentos del diagrama del nudo, como se muestra debajo.



Si este es el caso, es posible subdividirlo en varios triángulos más pequeños (reemplazando el Δ -movimiento grande por una secuencia de pequeños) de forma tal que cada pequeño triángulo contenga exactamente una de las siguientes piezas del diagrama: (1) un sólo cruce del diagrama y ningún vértice, (2) una sola arista y ningún vértice, (3) dos aristas unidas por un vértice, (4) una sola arista adyacente a uno de los lados del triángulo, o (5) nada, como se muestra debajo.



Existen en realidad pequeñas variaciones de cada uno de los casos, dependiendo de qué lados del triángulo cortan al contenido del mismo y de cuáles son las alturas relativas de cada arco. Con un poco de cuidado, se puede ver que estas pequeñas proyecciones de Δ -movimientos pueden realizarse por movimientos de Reidemeister (En la ilustración, (1) es Ω_3 , (2) y (3) son Ω_2 , (4) es Ω_1 y (5) es Ω_0 ; variaciones de (1) requerirán Ω_3 y Ω_2 ; variaciones de (2) y (3) pueden ser sólo Ω_0 .) \square

1.4. Links

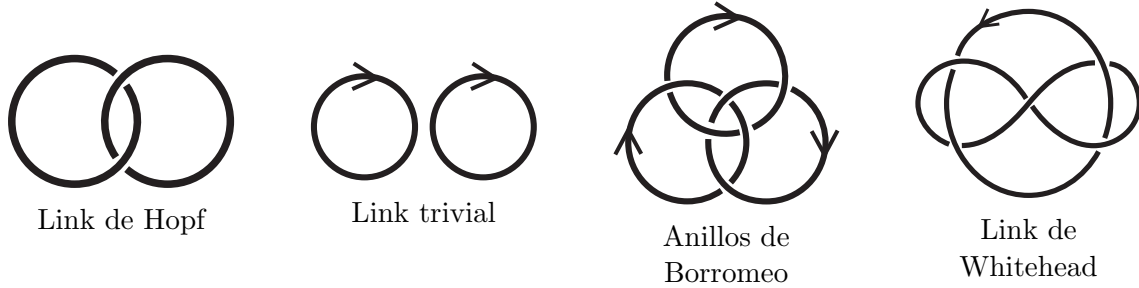
Hasta el momento sólo consideramos embeddings de una única copia de S^1 . Vamos a generalizar esta idea para poder considerar colecciones de estos objetos.

Definición 1.4.1. Un *link* es una unión finita y disjunta de nudos $L = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Llamamos a cada nudo K_i una *componente* del link. Se define la *multiplicidad* de un link como el número de componentes de un link L y lo notamos por $\mu(L)$.

Es claro que el conjunto de links contiene al conjunto de los nudos. Vamos a restringir el término *nudo* para referirnos a un link de solo una componente.

Un conjunto de n círculos disjuntos en el plano conforman un diagrama del *link trivial* de multiplicidad n . Un link se dice trivial si todas sus componentes son nudos triviales que no están “enganchados”.

Ejemplo 1.4.2. Algunos ejemplos de links.



Al igual que los nudos, vamos a considerar a los links provistos de una orientación: esto significa que cada componente será un nudo orientado. A su vez, vamos a decir que dos links son *equivalentes* si sus diagramas están conectados por una sucesión finita de movimientos de Reidemeister.

1.5. Grupo de trenzas y Teorema de Alexander

Definición 1.5.1. El *grupo de trenzas* B_n es el grupo generado por $n-1$ generadores $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ y relaciones

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$$

para cada $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ con $|i-j| \geq 2$, y

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

para $i = 1, 2, \dots, n-2$

Por definición, $B_1 = 1$ es el grupo trivial. El grupo B_2 tiene un único generador σ_1 y ninguna relación; es el grupo cíclico infinito. Veremos en breve que los grupos B_n con $n \geq 3$ son no abelianos.

Dado un morfismo de grupos f de B_n en un grupo G , los elementos $s_i = f(\sigma_i)$ de G , con $i = 1, \dots, n-1$, satisfacen las relaciones de trenza

$$s_i s_j = s_j s_i$$

para cada $i, j = 1, 2, \dots, n-1$ con $|i-j| \geq 2$, y

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$$

para $i = 1, 2, \dots, n-2$. Vemos en el siguiente lema que el recíproco también es cierto.

Lema 1.5.2. Si s_1, \dots, s_{n-1} son elementos de un grupo G que satisfacen las relaciones anteriores, entonces existe un único morfismo de grupos $f: B_n \rightarrow G$ tal que $s_i = f(\sigma_i)$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Demostración. Sea F_n el grupo libre en el conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}\}$. Existe un único morfismo de grupos $\bar{f}: F_n \rightarrow G$ tal que $\bar{f}(\sigma_i) = s_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n-1$. Este morfismo induce un morfismo de grupos $f: B_n \rightarrow G$ solo si $\bar{f}(r) = \bar{f}(r')$ para cada par de relaciones de trenza con $r = r'$. Para la primera relación tenemos

$$\bar{f}(\sigma_i \sigma_j) = \bar{f}(\sigma_i) \bar{f}(\sigma_j) = s_i s_j = s_j s_i = \bar{f}(\sigma_j) \bar{f}(\sigma_i) = \bar{f}(\sigma_j \sigma_i).$$

Para la segunda ecuación tenemos de forma similar

$$\bar{f}(\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) = s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} = \bar{f}(\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}).$$

□

Podemos aplicar el lema previo al grupo simétrico $G = S_n$. Un elemento de S_n es una permutación del conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$. Consideramos las *transposiciones simples* $s_1, \dots, s_{n-1} \in S_n$, donde s_i permuta i con $i+1$ y deja fijos todos los demás elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$. Es fácil verificar que estas transposiciones simples satisfacen las relaciones de trenza. Por el Lema 1.5.2, existe un único morfismo de grupos $\pi: B_n \rightarrow S_n$ tal que $s_i = \pi(\sigma_i)$ para cada $i = 1, 2, \dots, n-1$. Este morfismo resulta sobreyectivo ya que las transposiciones simples generan S_n .

Lema 1.5.3. *El grupo B_n con $n \geq 3$ es no abeliano.*

Demostración. El grupo S_m con $n \geq 3$ es no abeliano pues $s_1 s_2 \neq s_2 s_1$. Dado que la proyección $B_n \rightarrow S_n$ es sobreyectiva, B_n resulta no abeliano para $n \geq 3$. □

1.5.1. Diagramas de trenzas

En esta sección vamos a interpretar el grupo de trenzas en términos geométricos. Vamos a notar por I al intervalo cerrado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Nos vamos a referir por *intervalo topológico* a un espacio topológico homeomorfo a I .

Definición 1.5.4. Una *trenza geométrica en $n \geq 1$ cuerdas* es un conjunto $b \subset \mathbb{R}^2 \times I$ formado por una unión disjunta de n intervalos topológicos llamados cuerdas de b , tal que la proyección $\mathbb{R}^2 \times I \rightarrow I$ da un homeomorfismo de cada cuerda en I , la intersección de b con cada plano $\mathbb{R}^2 \times \{t\}$ consta de n puntos para cada $t \in I$, y además:

$$\begin{aligned} b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{0\}) &= \{(1, 0, 0), (2, 0, 0), \dots, (n, 0, 0)\}, \\ b \cap (\mathbb{R}^2 \times \{1\}) &= \{(1, 0, 1), (2, 0, 1), \dots, (n, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Es claro que cada cuerda de b conecta un punto $(i, 0, 0)$ con un punto $(s(i), 0, 1)$, donde $i, s(i) \in \{1, 2, \dots, n\}$. Llamamos a la secuencia $(s(1), s(2), \dots, s(n))$ la *permutación inducida por b* en el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$.

En la Figura 1.11 tenemos un ejemplo de una trenza geométrica, donde la permutación inducida es $(1, 3, 2, 4)$.

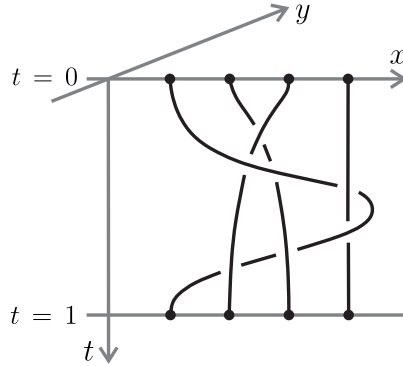


Figura 1.11: Una trenza geométrica en cuatro cuerdas.

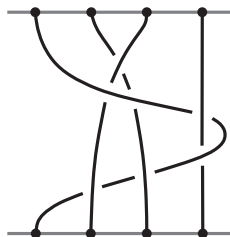
Definición 1.5.5. Sean b y b' dos trenzas geométricas en n cuerdas. Decimos que b y b' son isotópicas o equivalentes si b puede deformarse continuamente en b' . Formalmente, b y b' son equivalentes si existe una función continua $F: b \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ tal que para cada $s \in I$ la aplicación $F_s: b \rightarrow \mathbb{R}^2 \times I$ es un embedding cuya imagen es una trenza geométrica en n cuerdas, $F_0 = id_b: b \rightarrow b$ y $F_1(b) = b'$.

Cada embedding F_s manda automáticamente cada extremo de una cuerda de b en sí mismo. Llamamos tanto a la aplicación F como a la familia de trenzas geométricas $\{F_s(b)\}_{s \in I}$ una isotopía de $b = F_0(b)$ en $b' = F_1(b)$.

Al igual que con los nudos, podemos dibujar la proyección de una trenza geométrica en $\mathbb{R} \times \{0\} \times I$ indicando qué cuerda pasa por debajo de otra en cada cruce. Para evitar complicaciones, sólo vamos a aplicar este proceso a trenzas geométricas cuyas proyecciones tengan solo cruces transversales dobles.

Un *diagrama de trenza* en n cuerdas es un conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times I$ que se parte como una unión de n intervalos topológicos llamados *hebras* de \mathcal{D} tal que se verifican las siguientes tres condiciones:

- (i) La proyección $\mathbb{R} \times I \rightarrow I$ induce un homeomorfismo de cada hebra en I .
- (ii) Cada punto en $\{1, 2, \dots, n\} \times \{0, 1\}$ es el extremo de una única hebra.
- (iii) Cada punto en $\mathbb{R} \times I$ pertenece a lo sumo a dos hebras. En cada punto común a dos hebras la intersección es transversal y las distinguiremos diciendo que una pasa *por debajo* y la otra *por arriba* (al igual que con los diagramas de nudos).



Una diagrama de trenza en cuatro cuerdas.

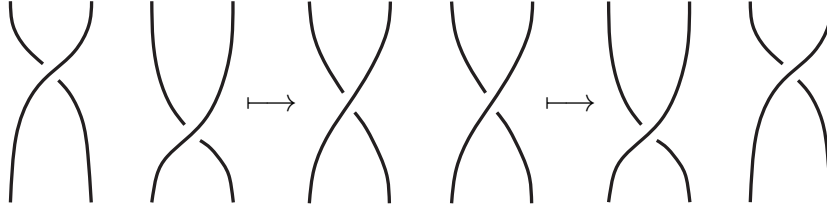


Figura 1.12: Isotopía de diagrama de trenzas.

Definición 1.5.6. Diremos que dos diagramas de trenza $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ son *R-equivalentes* si \mathcal{D} se puede transformar en \mathcal{D}' por una secuencia finita de isotopías y movimientos de Reidemeister $\Omega_2^{\pm 1}, \Omega_3^{\pm 1}$.

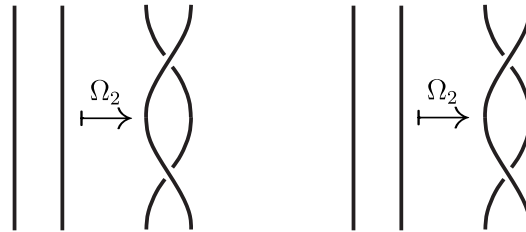


Figura 1.13: Movimiento de Reidemeister Ω_2

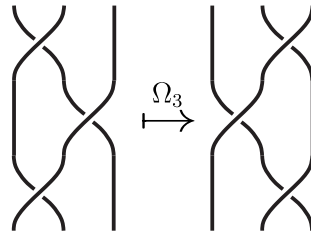


Figura 1.14: Movimiento de Reidemeister Ω_3

Es claro que si \mathcal{D} y \mathcal{D}' son R-equivalentes, entonces las trenzas geométricas que representan, $\beta(\mathcal{D})$ y $\beta(\mathcal{D}')$, son equivalentes. El siguiente teorema nos da la recíproca.

Teorema 1.5.7. [KDT08, Teorema 1.6] *Dos diagramas de trenza presentan trenzas geométricas isotópicas si y solo si los diagramas son R-equivalentes.*

Para establecer una conexión entre el grupo de trenzas y las trenzas geométricas, vamos a darle una operación al conjunto de trenzas geométricas: si b y b' son dos trenzas geométricas, definimos su producto como

$$b * b' = \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times I : \begin{array}{ll} (x, y, 2t) & \text{con } 0 \leq t \leq 1/2 \\ (x, y, 2t - 1) & \text{con } 1/2 \leq t \leq 1 \end{array} \right\}.$$

Es decir, dados dos diagramas $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ en n cuerdas, su producto $\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2$ se obtiene al poner \mathcal{D}_1 encima de \mathcal{D}_2 y encajando el diagrama resultante en $\mathbb{R} \times I$. Es claro

que si \mathcal{D}_1 representa una trenza β_1 y \mathcal{D}_2 representa una trenza β_2 , entonces $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$ representa al producto $\beta_1\beta_2$. Es sencillo ver de la definición que esta operación es asociativa y tiene por neutro a la trenza trivial (la que conecta los puntos $(i, 0, 0)$ con $(i, 0, 1)$ sin anudar las cuerdas).

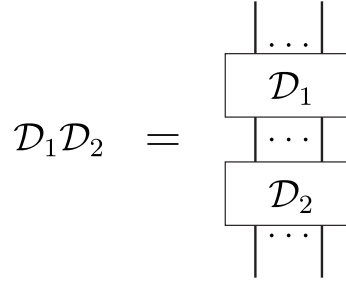


Figura 1.15: Producto de diagramas de trenzas.

Debido a su utilidad, con frecuencia vamos a considerar al grupo de trenzas como el conjunto de diagramas de trenza junto a la operación de concatenar. En lo que resta de esta sección, vamos a exponer una idea de por qué los diagramas junto a esta operación conforman un grupo y cómo se obtiene el isomorfismo con el grupo de trenzas B_n . (Para ver una demostración completa de esta identificación, ver [KDT08, Sección 1.2.4])

Comenzamos definiendo para cada $1 \leq i \leq n-1$ las trenzas elementales σ_i^+ y σ_i^- representadas por diagramas con un solo cruce, como se muestra en la Figura 1.16.

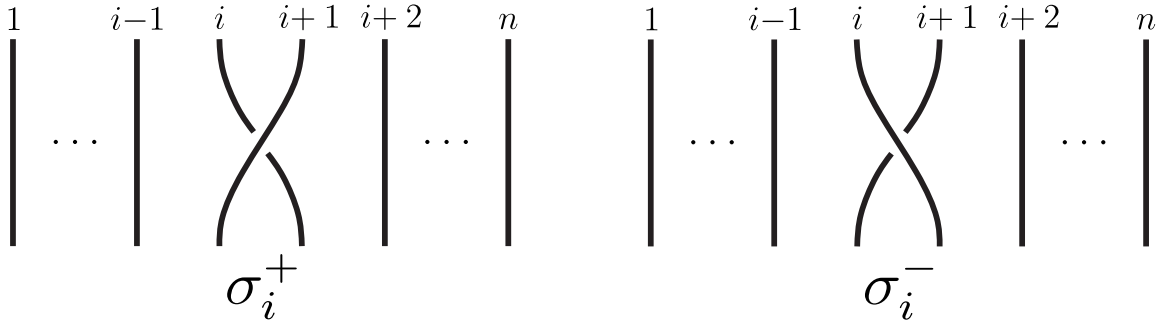


Figura 1.16: Las trenzas elementales σ_i^+ y σ_i^-

Aplicando isotopías sobre un diagrama D (como en la Figura 1.12), siempre podemos considerar que los cruces entre las hebras suceden a alturas distintas del diagrama. Es decir, podemos suponer que existen números reales $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ tales que la intersección de D con cada banda $\mathbb{R} \times [t_j, t_{j+1}]$ contiene exactamente un cruce. Esta intersección resulta entonces un diagrama de σ_i^+ o σ_i^- para algún $i = 1, 2, \dots, n-1$. Luego, es claro que D se puede escribir como

$$D = \sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \sigma_{i_2}^{\varepsilon_2} \cdots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}$$

donde cada $\varepsilon_j = \pm$ y $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Por otro lado, es sencillo ver que los diagramas σ_i^+ se comportan de igual manera que los generadores del grupo de trenzas:

- σ_i^+ y σ_i^- son inversos por la operación de concatenar y, luego, los diagramas con la concatenación forman un grupo;
- el diagrama $\sigma_i^+ \sigma_j^+$ es equivalente a $\sigma_j^+ \sigma_i^+$ para todo $i, j = 1, 2, \dots, n - 1$ con $|i - j| \geq 2$;
- el diagrama $\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+$ es equivalente a $\sigma_{i+1}^+ \sigma_i^+ \sigma_{i+1}^+$ para $i = 1, 2, \dots, n - 2$ (es exactamente el movimiento de Reidemeister Ω_3).

Por lo tanto, la asignación $\sigma_i \mapsto \sigma_i^+$ nos da un morfismo bien definido entre ambos grupos; más aún, esa asignación define un isomorfismo.

1.5.2. Trenzas cerradas y clausura de trenzas

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco y consideremos $V = D \times S^1$ un toro sólido.

Definición 1.5.8. Sea L un link incluido en V . Decimos que L es una *trenza cerrada en n cuerdas* si para cada $z \in S^1$ la intersección $L \cap (D \times \{z\})$ consiste de n puntos y las intersecciones son transversales al disco.

Ejemplo. Si Q es un conjunto finito incluido en D , entonces $Q \times S^1$ es una trenza cerrada

Proposición 1.5.9. Toda trenza $\beta \in B_n$ genera una trenza cerrada $\hat{\beta}$, que llamamos la clausura de β .

Demostración. Sea $\beta \in B_n$ y sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un disco tal que la trenza β está contenida en el cilindro $D \times I$. Si consideramos el toro V que se genera al identificar las tapas del cilindro, vía esa misma identificación la trenza β genera un link $\hat{\beta}$. Por construcción, $\hat{\beta}$ es una trenza cerrada. \square

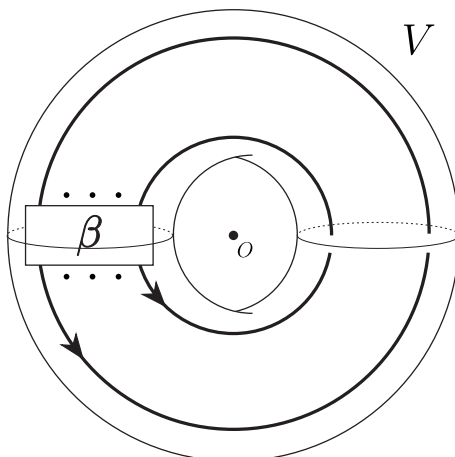
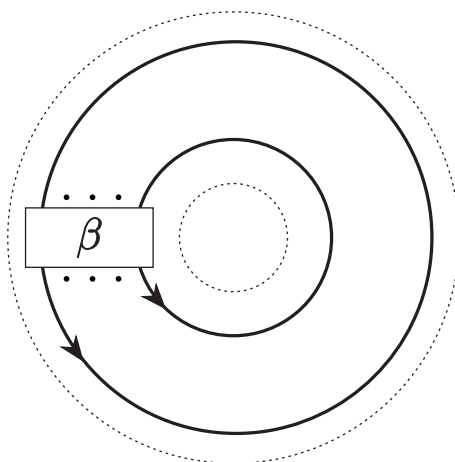


Figura 1.17: Clausura de una trenza β

Figura 1.18: Un diagrama de $\hat{\beta}$

Teorema 1.5.10. [KDT08, Teorema 2.1] *Dados $n \geq 1$ y $\beta, \beta' \in B_n$, las trenzas clausuradas $\hat{\beta}, \hat{\beta}'$ son isotópicas en el toro sólido si y solo si β y β' son conjugados en B_n .*

El teorema anterior nos permite establecer una clasificación por isotopía de n -trenzas cerradas en el toro sólido: las clases de isotopía de n -trenzas cerradas se corresponde biyectivamente con las clases de conjugación. En particular, cada invariante por conjugación de elementos de B_n determina un invariante isotópico de n -trenzas cerradas.

Vimos que la operación de clausurar una trena, nos provee de una aplicación del conjunto de trenzas en el de links orientados en \mathbb{R}^3 . El siguiente teorema, enunciado y demostrado por J. Alexander en [Ale23] afirma que esa aplicación es sobreyectiva. La demostración que exhibimos a continuación corresponde a [Man04, Teorema 9.1], aunque sigue la misma idea que la original.

Teorema 1.5.11 (Alexander). *Todo link orientado en \mathbb{R}^3 es isotópico a una trena cerrada.*

Demostración. Vamos a probar este teorema considerando links poligonales.

Sean L un diagrama de un link poligonal orientado y O un punto en el plano del diagrama (que no forme parte ni de un arco ni un vértice del mismo). Diremos que L está *trenzado alrededor de O* si cada arco de L se ve desde el punto O como orientado en sentido antihorario.

Si existe un punto O tal que nuestro diagrama está trezado alrededor de O , entonces el resultado se vuelve claro: basta con cortar el diagrama a lo largo de un rayo que salga de O y “enderezar el diagrama” (ver Figura 1.19).

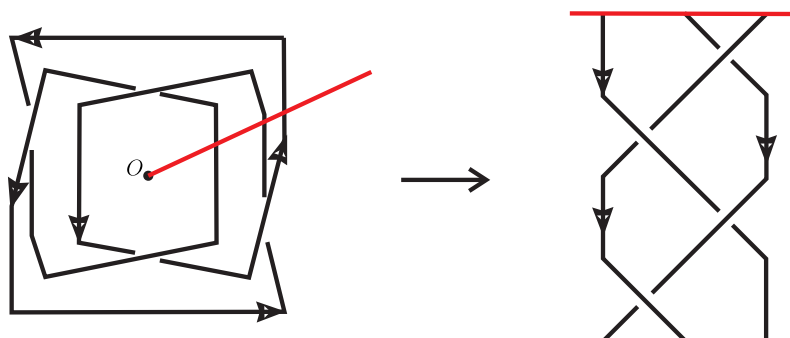


Figura 1.19: Construcción de una trenza a partir de un link trenzado.

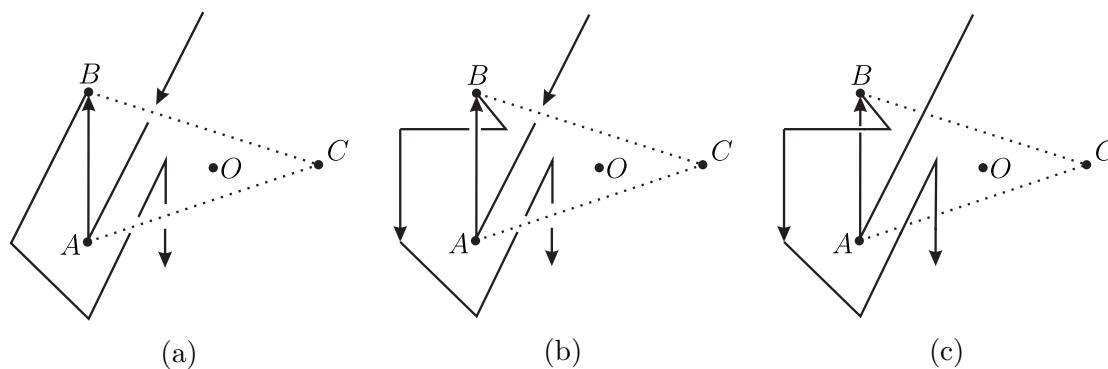


Figura 1.20

Para concluir con la demostración, vamos a ver que podemos modificar cualquier diagrama de link para obtener un trenzado alrededor de cierto punto O . Dados L , un diagrama arbitrario, y O con antes, llamaremos *positivos* a aquellos arcos vistos con orientación antihoraria desde O ; los otros serán *negativos*.

Fijemos un punto O . Consideremos un arco negativo AB de nuestro diagrama poligonal y elijamos un punto C en el plano tal que el triángulo ABC contenga a O . Luego, reemplacemos el segmento AB por los segmentos AC y BC , preservando la orientación del diagrama (notar que esto es la proyección de un Δ -movimiento). Ambos segmentos serán claramente positivos (ver Figura 1.20).

Vamos a repetir esta operación hasta conseguir un diagrama trenzado alrededor de O .

Describamos esta construcción con más detalle. En el caso en que el arco negativo AB no contenga ningún cruce, el proceso se realiza normalmente, como en la Figura 1.20a. Lo mismo sucede si AB contiene un único cruce, del cual es el arco superior, como en la Figura 1.20b. Por último, si AB contiene un cruce, del cual es el arco inferior, entonces podemos tomar los arcos BC y CA por debajo del resto del diagrama, como en la Figura 1.20c. \square

Capítulo 2

Invariantes elementales

Los invariantes de nudo son funciones de los nudos que no cambian bajo equivalencias. El estudio de los invariantes de nudo es el núcleo de la teoría de nudos; de hecho, la clase de equivalencia de un nudo es, tautológicamente, un invariante de nudo.

A lo largo de este capítulo estaremos definiendo algunos de los invariantes más clásicos de nudos y links. Además de su utilidad para distinguir nudos, esta lista de invariantes nos servirá como una base de ejemplos y contraejemplos para los invariantes de tipo finito que trataremos en el capítulo siguiente.

2.1. Primeros ejemplos

Sea \mathcal{K} la clase de todas las clases de equivalencia de nudos.

Definición 2.1.1. Un *invariante de nudos con valores en un conjunto S* es una función de \mathcal{K} en S .

Veremos a lo largo de este capítulo la importancia de mirar invariantes en conjuntos S que estén dotados de algún tipo de estructura, de forma de lograr obtener información útil acerca de las clases de equivalencia de nudos.

2.1.1. Número de cruces

Cualquier nudo puede ser representado por un diagrama plano de infinitas maneras.

Definición 2.1.2. El *número de cruces $c(K)$* de un nudo K es el mínimo número de cruces en un diagrama plano de K .

Observación 2.1.3. De la definición, se desprende que éste es en efecto un invariante de nudos (no necesariamente orientados). Esto es pues estamos considerando el mínimo sobre todos los posibles diagramas, es decir el mínimo sobre todos los nudos equivalentes a K

Observación 2.1.4. Si $c(K) \leq 2$, entonces el nudo K es trivial.

Es claro que el nudo trivial tiene número de cruces 0. Para ver que no existen nudos no-triviales con 1 o 2 cruces, basta con enumerar todos los posibles diagramas planos de nudo con uno o dos cruces.

Se sigue que el mínimo número de cruces requerido para dibujar un diagrama de un nudo no-trivial es al menos 3. En el Ejemplo 2.4.9 veremos que el nudo trébol es efectivamente no-trivial.

A pesar de lo simple que resulta definir este invariante, en general es muy difícil de calcular.

2.1.2. Número de desanudamiento

Este es otro invariante a valores enteros que admite una definición simple.

Representemos un nudo por un diagrama. El diagrama puede ser transformado por movimientos de Reidemeister y cambios de cruce:

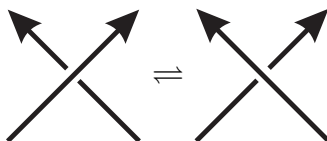


Figura 2.1: Cambios de cruce.

Sabemos que las primeras dos preservan el tipo de nudo, pero los cambios de cruce pueden cambiarlo.

Definición 2.1.5. El *número de desanudamiento* $u(K)$ de un nudo K es la mínima cantidad de cambios de cruces en un diagrama de K que lo convierten en un del nudo trivial.

Esta definición requiere un poco más de explicación, ya que hay que probar que efectivamente existe un tal número de cruces a cambiar para desanudar el nudo.

Lema 2.1.6. *Todo diagrama de un nudo puede transformarse en un diagrama del nudo trivial mediante cambio de cruces.*

Demostración. Consideramos un diagrama y elegimos un punto p del mismo, que por conveniencia no es un cruce. Viajando a lo largo del diagrama, la primera vez que lleguemos a un cruce, cambiaremos el cruce (de ser necesario) de forma tal que la cuerda por la que veníamos sea la que pase por arriba. Siguiendo con el recorrido, si llegamos a un cruce por el que ya habíamos pasado, no lo cambiamos. Una vez que hallamos llegado el punto p inicial, tendremos una proyección del nudo trivial. Este proceso queda ilustrado en la Figura 2.2

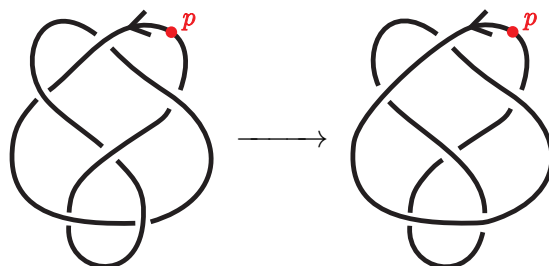
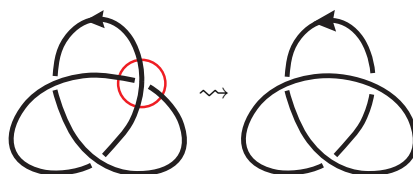


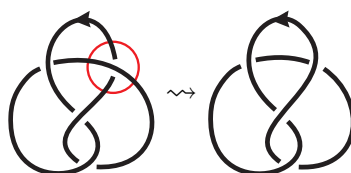
Figura 2.2

□

Ejemplo 2.1.7. En los Ejemplos 2.4.9 y 2.3.3 veremos que los nudos trébol y ocho son no triviales, respectivamente. Sabiendo esto, calculemos sus números de desanudamiento.



Desanudamiento del nudo trébol



Desanudamiento del nudo ocho

Es decir, ambos nudos tienen número de desanudamiento ≤ 1 . Cómo sabemos que no son triviales, no puede ser igual a cero. Por lo tanto, ambos tienen número de desanudamiento igual a 1.

2.1.3. Número de enlazamiento

El invariante que definiremos a continuación es propio de links.

Dado un link orientado L de dos componentes, buscamos una forma de medir qué tan enlazadas están sus componentes. Para hacer esto, vamos a asignar un signo a cada cruce entre ambas componentes, como se indica en la Figura 2.3. La forma es hacer esto es: si al recorrer el arco superior, en el sentido que indica su orientación, el arco inferior cruza de derecha a izquierda el signo será positivo; en caso contrario, negativo.

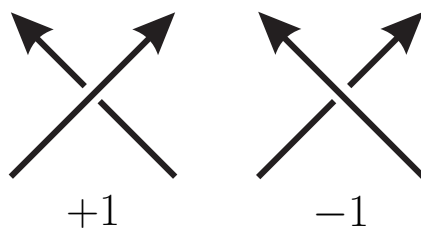


Figura 2.3

Definición 2.1.8. El *número de enlazamiento* de L se define como la suma de los signos de los cruces entre ambas componentes, dividido por 2. Lo notamos por $lk(L)$.

Observación. Podemos extender la definición a links con más de dos componentes. Si L es un link con componentes L_1, L_2, \dots, L_n , definimos $lk(L) = \sum_{i < j} lk(L_i, L_j)$, donde $lk(L_i, L_j)$ es el número de enlazamiento de el link formado sólo por esas dos componentes.

Teorema 2.1.9. *El número de enlazamiento es un invariante de links orientados.*

Demostración. Queremos probar que si tenemos dos links L y L' con $lk(L) \neq lk(L')$ entonces L y L' no son equivalentes. Para eso, basta con ver que el número $lk(L)$ es invariante por movimientos de Reidemeister.

- *Mov. de tipo 1.* Este movimiento no afecta al número de enlazamiento ya que el cruce que se agrega o se remueve es de una misma componente.
- *Mov. de tipo 2.*

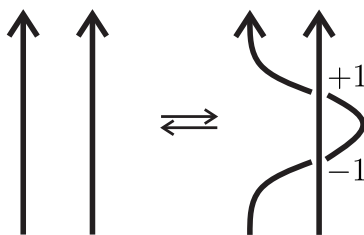


Figura 2.4

(\rightarrow) Cuando este movimiento es aplicado, se agregan un $+1$ y un -1 . Luego, el número de enlazamiento no varía.

(\leftarrow) Cuando aplicamos el inverso, quitamos un $+1$ y un -1 , así que tampoco varía.

- *Mov. de tipo 3.*

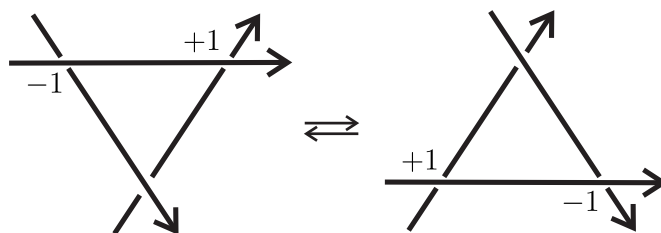


Figura 2.5

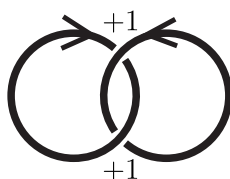
Al realizar este movimiento en cualquier dirección la cantidad de $+1$ y -1 se mantiene igual. Luego, el número de enlazamiento no varía.

En la Figura 2.5 estamos asumiendo que el segmento horizontal pertenece a una componente diferente de la de los otros (los otros casos son similares).

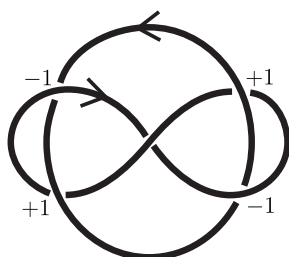
□

Ejemplo 2.1.10. Calculemos el número de enlazamiento de algunos links del Ejemplo 1.4.2.

- Si L es el link trivial, entonces $lk(L) = 0$.
- Si tomamos L el link de Hopf, con la orientación como en la siguiente figura, tenemos que $lk(L) = 1$. (Las demás orientaciones dan $+1$ o -1 .) En particular, el link de Hopf es distinto del link trivial de dos componentes.



- Si L es el link de Whitehead, con la orientación elegida como en la siguiente figura, tenemos que $lk(L) = 0$. Es decir, el número de enlazamiento no nos permite distinguir este link del trivial. Sin embargo, veremos en el Ejemplo 2.6.5 que son efectivamente distintos.



2.1.4. Índice de trenza

En la Sección 1.5 vimos que cualquier nudo (o link) K se realiza como la clausura de una trenza. Sin embargo, ésta no tiene por qué ser única ya que diferentes trenzas podrían tener la misma clausura. En particular, podría haber trenzas con una cantidad diferente de cuerdas cuyas clausuras sean equivalentes (ver Figura 2.6). Esto nos permite definir el siguiente invariante.

Definición 2.1.11. Definimos el *índice de trenza* de un nudo (o link) K como el menor número de cuerdas sobre todas las posibles trenzas que representen a K . Es decir,

$$b(K) := \min\{n \in \mathbb{N} : \text{existe } \beta \in B_n \text{ tal que } \bar{\beta} = K\}$$

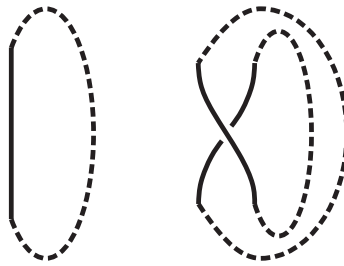


Figura 2.6: Dos trenzas clausuradas equivalentes al nudo trivial.

Al igual que el número de cruces y el número de desanudamiento, determinar el índice de trenza es en general un problema difícil. Sin embargo, podemos decir explícitamente cuáles son los nudos o links con índice de trenza 1 o 2:

- Es claro que $b(K) = 1$ si y solo si K es el nudo trivial.
- Los nudos (o links) con índice de trenza 2 son los nudos toro $(n, 2)$ (que introduciremos en la Sección 2.3.1), con $n \neq 0, \pm 1$. Para ver esto, basta con recordar que el grupo de trenzas $B_2 = \langle \sigma \rangle$ es cíclico infinito y al clausurar cualquier trenza $\sigma^n \in B_2$, $n \neq 0, \pm 1$, obtenemos el nudo toro $(n, 2)$.

2.2. Superficies de Seifert y género

Empezaremos con un breve repaso sobre superficies, siguiendo [Cro04, Capítulo 2].

Sabemos que cualquier superficie orientable puede ser triangulada. Esto es, una superficie orientable puede ser representada como una colección finita de *discos triangulares* pegados a lo largo de sus aristas. Cuando una superficie F ha sido triangulada, se define su *característica de Euler* como

$$\chi(F) = V - E + T$$

donde V , E y T son el número de vértices, aristas y triángulos en la triangulación, respectivamente. La característica de Euler resulta ser independiente de la triangulación y por lo tanto es un invariante topológico de superficies.

Dada una superficie orientable y conexa, podemos considerar sobre ella una curva cerrada simple y realizar un corte a lo largo de la misma. El resultado puede ser una superficie con una o más componentes conexas. Definimos el *género* $g(F)$ de una superficie como el mayor número de cortes a lo largo de esas curvas, de forma tal que la superficie resultante siga siendo conexa.

Para una superficie orientada F , la característica de Euler está relacionada con el género por la siguiente fórmula:

$$2g(F) = 2 - \chi(F) - |\partial F|$$

donde $|\partial F|$ es el número de componentes borde de F .

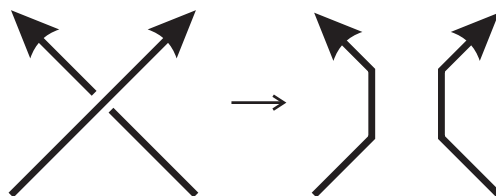
Decimos que una superficie F genera un link L si su borde ∂F es equivalente a L (equivalencia de links).

Definición 2.2.1. El *género* de un link orientado L es el mínimo género sobre todas las superficies conexas orientadas que generen el link L . Notamos el género de L por $g(L)$

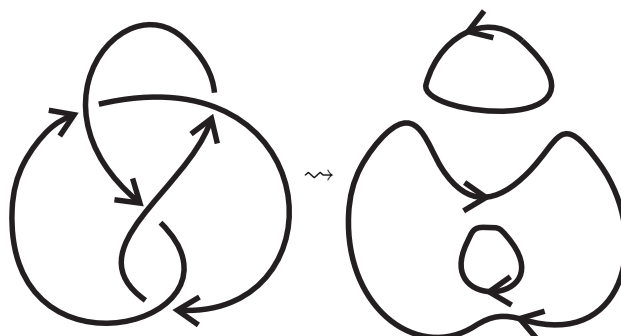
En una primera instancia no es obvio que el género esté bien definido: ¿cada link se realiza como el borde de una superficie orientada?. El siguiente teorema no solo nos da una respuesta afirmativa a esta pregunta sino que además nos provee de un algoritmo para calcular dicha superficie a partir de un diagrama del link.

Teorema 2.2.2 (Algoritmo de Seifert). *Cada link se realiza como el borde de una superficie orientable*

Demostración. Escojamos un diagrama para el link. En un entorno de cada cruce, realizamos el siguiente cambio local al diagrama: borramos el cruce y reconectamos las puntas sueltas de forma natural, de la única forma compatible con la orientación.

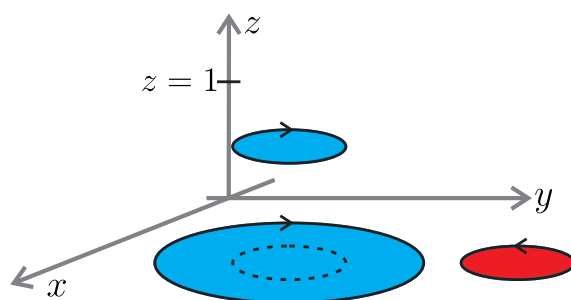


Una vez que realizamos este proceso en todos los cruces, el diagrama resultante es un conjunto de círculos simples disjuntos en el plano (es un diagrama sin cruces). Estos círculos son llamados *círculos de Seifert*.



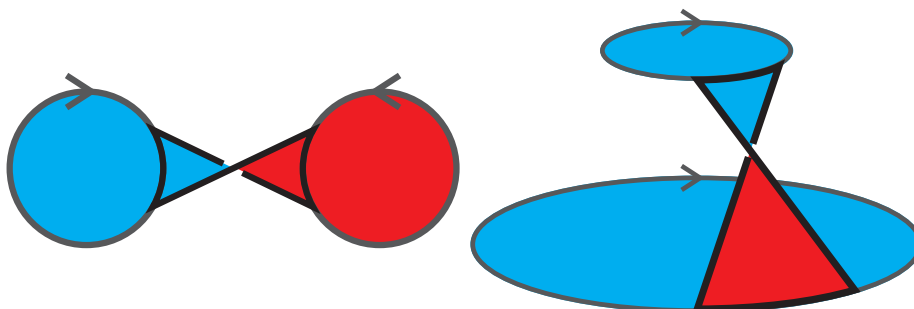
Algunos círculos de Seifert pueden estar anidados. Podemos asignar un índice a cada uno de ellos: definimos $h(\lambda)$ como el número de círculos de Seifert que contienen al círculo λ . La idea es usar este índice como una función de altura.

Ahora vamos a construir la superficie. Por cada círculo de Seifert λ , tomamos un disco Δ en el plano $z = h(\lambda)$ tal que $\partial\Delta$ se proyecte en λ . Esta colección de discos vive en el semi-espacio superior \mathbb{R}_+^3 y están apilados de forma tal que vistos desde arriba el borde de cada disco es visible. Además, cada disco recibe la orientación heredada del diagrama. Luego, vamos a colorear las caras de cada disco de rojo o de azul con la siguiente convención: si el borde del disco tiene orientación horaria visto desde arriba, entonces la cara superior es pintada de azul y la inferior de rojo; en caso contrario, al revés.



Para completar la superficie, necesitamos unir estos discos. Para esto vamos a insertar rectángulos retorcidos en cada cruce, eligiendo el sentido del medio giro para que se coincida con el signo del cruce. Esto produce una superficie cuyo borde es L .

Para concluir la demostración, basta ver que la superficie es orientable. Si una banda conecta dos discos con la misma altura, entonces deben tener sus caras superiores pintadas de distinto color. Luego, el color se extiende de forma natural a través de la banda. Cualquier otra banda va a conectar dos discos cuyas alturas difieren en 1. Estos discos van a tener el mismo color en la cara superior y, cuando agregamos la banda, el medio giro lleva el color de la cara superior de un disco en la cara superior del otro.



En consecuencia, toda la superficie tiene dos lados y por lo tanto es orientable. \square

Vamos a llamar *superficie de Seifert* a la superficie orientable construida a partir del diagrama de un link mediante el algoritmo anterior. La siguiente pregunta que nos surge es si toda superficie F que genere cierto link L se puede obtener mediante este algoritmo. La respuesta en este caso es negativa (ver [Cro04, p. 110-114]), por lo tanto el método propuesto por Seifert sólo nos provee de una cota superior para el género. La ventaja de esto es que, a pesar de el género de una superficie arbitraria puede ser muy difícil de calcular, resulta muy sencillo para el caso de superficies de Seifert. Los siguientes dos resultados son tomados de [Cro04, Capítulo 5]

Teorema 2.2.3. *La característica de Euler de una superficie de Seifert construida a partir de un diagrama de link D con $s(D)$ círculos de Seifert y $c(D)$ cruces es*

$$\chi(F) = s(D) - c(D).$$

Demostración. La superficie está construida con discos y bandas. Vamos a triangular estos elementos como se muestra en la Figura 2.9: un disco en contacto con n bandas es dividido en $2n$ triángulos con un vértice en el interior, y cada banda es dividida en dos triángulos. Sea J el número total de uniones entre los discos y las bandas. Cada rectángulo está unido a dos discos, por lo tanto $J = 2c(D)$. Hay $2J$ triángulos en los discos y dos en cada banda, así que el número de caras en la triangulación es $2J + 2c(D)$. Un recuento sencillo muestra que hay $2J + s(D)$ vértices y $4J + 3c(D)$ aristas. Por lo tanto

$$\chi(F) = [2J + s(D)] - [4J + 3c(D)] + [2J + 2c(D)] = s(D) - c(D).$$

\square

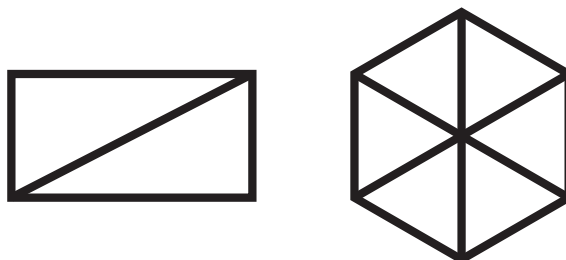


Figura 2.9: Triangulación de una banda y de un disco en contacto con tres bandas.

Corolario 2.2.4. *El género de una superficie de Seifert F construida a partir de un diagrama D de un link L satisface*

$$2g(F) = [1 - s(D) + c(D)] + [1 - \mu(L)],$$

donde $\mu(L)$ es la cantidad de componentes de L .

Demostración. Dado que F es una superficie orientable y conexa, tenemos la siguiente relación entre la característica de Euler y el género

$$\begin{aligned} 2g(F) &= 2 - (\chi(F) + |\partial F|) \\ &= [1 - \chi(F)] + [1 - \mu(L)]. \end{aligned}$$

donde $|\partial F|$ denota la cantidad de componentes del borde de F . Para concluir, basta con aplicar el Teorema previo y notar que $|\partial F| = \mu(L)$, puesto que el borde de F coincide con el link L . \square

2.3. Polinomio de Conway

En la teoría de nudos, son de especial importancia los *invariantes polinomiales de nudos*, que toman valores en un anillo de polinomios en una o varias variables. Un ejemplo de estos invariantes es el polinomio de Conway. Su definición, dada en términos de un diagrama de un link, se basa en *resoluciones* de los cruces del mismo.

Definición 2.3.1. El polinomio de Conway C es un invariante de links orientados (en particular, de nudos orientados) que toma valores en el anillo $\mathbb{Z}[t]$ y está definido por estas dos propiedades:

$$\begin{aligned} C\left(\textcircled{\curvearrowright}\right) &= 1, \\ C\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) - C\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \swarrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) &= tC\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Acá $\textcircled{\curvearrowright}$ representa el nudo trivial, mientras que las tres imágenes en (2.1) representan tres diagramas de link que son idénticos salvo en los entornos que se muestran.

No resulta inmediato de la definición que ese polinomio sea un invariante de nudos; para ver una demostración de esto, ver [Cro04, Capítulo 7].

Cambiando cruces, cualquier link puede transformarse en el link trivial. Por lo tanto, aplicando repetidamente la relación de Conway se puede expresar el polinomio de Conway de un link en término de links triviales.

Veamos una propiedad de este invariante que resulta útil a la hora de calcularlo.

Proposición 2.3.2. *Si $L = L_1 \sqcup L_2$ es un link partido, es decir una unión disjunta de links L_1 y L_2 no anudados, entonces $C(L) = 0$.*

Demostración. Sea D_0 un diagrama disconexo del link $L_1 \sqcup L_2$ tal que las proyecciones de L_1 y L_2 son disjuntas y existe un entorno, como en la siguiente imagen, donde hay un arco de cada una de ellas.



Sean además D_+ y D_- dos diagramas idénticos a D_0 , salvo en ese entorno donde unimos L_1 y L_2 mediante un cruce positivo o negativo, respectivamente. Luego, D_+ y D_- son diagramas de links equivalentes y tienen igual polinomio de Conway, $C(D_+) = C(D_-)$. Para terminar, basta notar que los polinomios de los tres diagramas están relacionados por la ecuación:

$$tC(D_0) = C(D_+) - C(D_-) = 0.$$

□

Ejemplo 2.3.3. Vamos a calcular el polinomio de Conway del nudo ocho.

$$\begin{aligned} C \left(\text{Diagrama del nudo ocho} \right) &= C \left(\text{Diagrama con cruce positivo} \right) + tC \left(\text{Diagrama con cruce negativo} \right) \\ &= 1 + tC \left(\text{Diagrama con cruce positivo} \right) \\ &= 1 + t \left[C \left(\text{Diagrama con cruce positivo} \right) - tC \left(\text{Diagrama con cruce negativo} \right) \right] \\ &= 1 - t^2 + tC \left(\text{Diagrama con cruce positivo} \right) \\ &= 1 - t^2 \end{aligned}$$

En la segunda y cuarta igualdad, estamos usando que $C \left(\text{Diagrama con cruce positivo} \right) = 1$. La última igualdad se sigue de la Proposición anterior. En particular, el nudo ocho no es equivalente al nudo trivial.

2.3.1. Links toro

Ahora vamos a introducir una familia importante de nudos y luego calcularemos sus polinomios de Conway siguiendo las ideas expuestas en [Row08].

Supongamos que tenemos dos cuerdas, una al lado de la otra, con sus extremos superiores fijos y orientadas hacia abajo. Comenzamos a enrollarlas, colocando en cada paso la cuerda de la derecha por sobre la de la izquierda. Luego de hacer esto n

veces, unimos los extremos superiores de las cuerdas con los inferiores de forma tal que no se generen nuevos cruces, como se muestra en la Figura 2.10. El nudo o link resultante se conoce como *link toro* $(n, 2)$, dado que yace sobre la superficie de un toro: las cuerdas recorren dos veces el toro a lo largo y n veces a través del agujero.

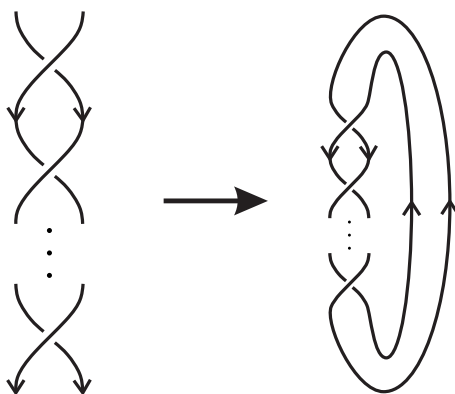


Figura 2.10: Link toro $(n, 2)$

Vamos a notar por \mathcal{T}_n al link toro $(n, 2)$.

Observación 2.3.4. El proceso de generar este link puede verse fácilmente en términos de trenzas clausuradas. Siguiendo la Sección 1.5 del Capítulo 1, cada cruce generado al enrollar ambas cuerdas se corresponde con la trenza σ_1 del grupo B_2 . Luego, tenemos que el link \mathcal{T}_n es la clausura de la trenza σ_1^n .

En general, pueden considerarse links toro (p, q) formados por q cuerdas que se enrollan p veces alrededor del agujero del toro. Sin embargo, nos enfocaremos únicamente en el caso $q = 2$.

Si al enrollar, colocamos la cuerda izquierda por sobre la derecha, los n cruces que se generarán en el diagrama serán negativos. En ese caso, llamaremos al link resultante *link toro* $(-n, 2)$ y lo notaremos \mathcal{T}_{-n} . Notemos que ya conocemos los primeros links toro: \mathcal{T}_0 es el link trivial de 2 componentes, $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_{-1}$ es el nudo trivial, \mathcal{T}_2 es el link de Hopf del Ejemplo 1.4.2 y \mathcal{T}_3 es el nudo trébol. En general, \mathcal{T}_n será un nudo si n es impar y un link de 2 componentes si n es par.

Pasemos ahora a calcular los polinomios de Conway para \mathcal{T}_n . Ya que vamos a usar la ecuación (2.1) para ir reduciendo el link a otros con menos cruces, nos interesa saber cómo varía \mathcal{T}_n al aplicarle estos cambios. Como se ve en la Figura 2.11, si $n \geq 1$ cambiar un cruce positivo por uno negativo en el link $(n, 2)$ resulta en una proyección del link $(n - 2, 2)$, mientras que abrir un cruce resulta en una proyección del link $(n - 1, 2)$.

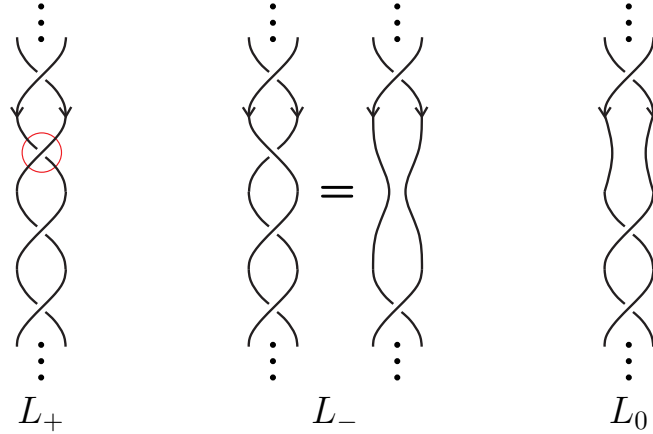


Figura 2.11: Aplicación de (2.1) a un toro link, con $L_+ = \mathcal{T}_n$, $L_- = \mathcal{T}_{n-2}$ y $L_0 = \mathcal{T}_{n-1}$.

En el caso de tener el link toro $(-n, 2)$, con $n \geq 1$, al cambiar un cruce negativo por uno positivo obtenemos $(-n + 2, 2)$ y al abrir un cruce $(-n + 1, 2)$. Usando la fórmula (2.1) para calcular el polinomio de Conway, tenemos entonces que para todo $n \geq 1$,

$$C(\mathcal{T}_n) = C(\mathcal{T}_{n-2}) + tC(\mathcal{T}_{n-1}); \tag{2.2}$$

$$C(\mathcal{T}_{-n}) = C(\mathcal{T}_{-n+2}) - tC(\mathcal{T}_{-n+1}) \tag{2.3}$$

Empecemos calculando los polinomios de Conway para \mathcal{T}_n con $n \geq 1$; la fórmula (2.2) nos permite calcularlos fácilmente:

$$C(\mathcal{T}_0) = 0 \quad (\text{por la Proposición 2.3.2})$$

$$C(\mathcal{T}_1) = 1 \quad (\text{por ser } \mathcal{T}_1 \text{ trivial})$$

$$C(\mathcal{T}_2) = t$$

$$C(\mathcal{T}_3) = 1 + t^2$$

$$C(\mathcal{T}_4) = 2t + t^3$$

$$C(\mathcal{T}_5) = 1 + 3t^2 + t^4$$

$$C(\mathcal{T}_6) = 3t + 4t^3 + t^5$$

$$C(\mathcal{T}_7) = 1 + 6t^2 + 5t^4 + t^6$$

...

En [Row08], Rowland nota ciertos patrones en los coeficientes de estos polinomios, relacionados con el triángulo de Pascal, que sugieren las siguientes fórmulas.

Teorema 2.3.5. *El polinomio de Conway del nudo toro $(2n + 1, 2)$ viene dado por la ecuación*

$$\begin{aligned} C(\mathcal{T}_{2n+1}) &= \binom{n}{0} + \binom{n+1}{2}t^2 + \binom{n+2}{4}t^4 + \dots + \binom{2n}{2n}t^{2n} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n+j}{2j}t^{2j} \end{aligned} \tag{2.4}$$

y el del link $(2n, 2)$ por

$$\begin{aligned} C(\mathcal{T}_{2n}) &= \binom{n}{1}t + \binom{n+1}{3}t^3 + \binom{n+2}{5}t^5 + \cdots + \binom{2n-1}{2n-1}t^{2n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1} t^{2j+1}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Demostración. Vamos a probar (2.4) y (2.5) simultáneamente haciendo inducción en n . Usando la ecuación (2.2) pudimos calcular $C(\mathcal{T}_2) = C(\mathcal{T}_0) + tC(\mathcal{T}_1) = t = \binom{1}{1}t$ y $C(\mathcal{T}_3) = C(\mathcal{T}_1) + tC(\mathcal{T}_2) = 1 + t^2 = \binom{1}{0} + \binom{2}{2}t^2$. Luego el resultado es válido para $n = 1$.

Sea ahora $m = 2n$ y supongamos que las fórmulas son válidas para cualquier entero positivo menor a m ; tenemos que

$$\begin{aligned} C(\mathcal{T}_{2n}) &= C(\mathcal{T}_{2n-2}) + tC(\mathcal{T}_{2n-1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1+j}{2j+1} t^{2j+1} + t \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1+j}{2j} t^{2j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \left(\binom{n-1+j}{2j+1} + \binom{n-1+j}{2j} \right) t^{2j+1} + t^{2n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1} t^{2j+1}. \end{aligned}$$

El caso $m = 2n + 1$ se sigue de forma análoga. \square

Por último, veamos como podemos aplicar la ecuación (2.1) para calcular el polinomio de Conway en los links $(-n, 2)$.

Lema 2.3.6. *El polinomio de Conway del link $(-n, 2)$ es $C(\mathcal{T}_{-n}) = (-1)^{n+1}C(\mathcal{T}_n)$.*

Demostración. Nuevamente vamos a proceder por inducción.

Para el caso base, un cálculo directo usando la ecuación (2.3) muestra que $C(\mathcal{T}_{-1}) = 1$ y $C(\mathcal{T}_{-2}) = -t$.

Sea m un entero impar y supongamos que el resultado es válido para cualquier entero negativo mayor a m . Usando nuevamente (2.3), tenemos que

$$\begin{aligned} C(\mathcal{T}_{-m}) &= C(\mathcal{T}_{-m+2}) - tC(\mathcal{T}_{-m+1}) \\ &= (-1)^{-m+3}C(\mathcal{T}_{m-2}) - t(-1)^{-m+2}C(\mathcal{T}_{m-1}) \\ &= C(\mathcal{T}_{m-2}) + tC(\mathcal{T}_{m-1}) \\ &= C(\mathcal{T}_m), \end{aligned}$$



donde la última igualdad es precisamente (2.2). El caso m par se sigue de forma análoga. \square

2.4. Polinomio de Jones

En esta sección introduciremos nuestro segundo invariante polinomial, el polinomio de Jones. Siguiendo [Lic97], vamos a probar que es efectivamente un invariante de links. Luego, vamos a probar que queda definido, al igual que el polinomio de Conway, por una ecuación que involucra resolver cruces en el diagrama.

Definición 2.4.1. El *corchete de Kauffman* es una función de los diagramas de link sin orientación en los polinomios de Laurent con coeficientes enteros en la variable A . Es decir, manda un diagrama D en $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{-1}, A]$ y está caracterizado por

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \left\langle \bigcirc \right\rangle = 1, \\ \text{(ii)} \quad & \left\langle D \sqcup \bigcirc \right\rangle = (-A^2 - A^{-2}) \langle D \rangle, \\ \text{(iii)} \quad & \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

En esta definición,  es el diagrama del nudo trivial sin cruces y $D \sqcup \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}$ es el diagrama consistente en el diagrama D junto con una curva cerrada  que no contiene ningún cruce, ni consigo mismo ni con D . En (iii) la fórmula hace referencia a los tres diagramas de link que son exactamente iguales salvo cerca del punto, donde difieren en la forma indicada. Veamos cómo afectan los movimientos de Reidemeister sobre D al polinomio $\langle D \rangle$.

Lema 2.4.2. Si un diagrama D es cambiado por un movimiento de Reidemeister de tipo I, su polinomio cambia de la siguiente forma:

$$\left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle = -A^3 \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle = -A^{-3} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \right\rangle &= A \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle + A^{-1} \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagup \diagdown \end{array} \right\rangle \\ &= (A(-A^{-2} - A^2) + A^{-1}) \left\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right\rangle \left\langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \right\rangle. \end{aligned}$$

Eso nos da la primer ecuación; la segunda se sigue de la misma forma. \square

Notemos que si en (iii) cambiamos el cruce entonces el miembro derecho de la ecuación permanece igual salvo por el intercambio de A con A^{-1} . Esto se sigue de la aplicación de (iii) al diagrama rotado en $\pi/2$.

Lema 2.4.3. *Si un diagrama D es cambiado por movimientos de Reidemeister de tipo II o III entonces el diagrama no cambia. Esto es,*

$$(i) \langle \text{diagrama II} \rangle = \langle \text{diagrama II} \rangle,$$

$$(ii) \langle \text{diagrama III} \rangle = \langle \text{diagrama III} \rangle.$$

Demostración. (i)

$$\begin{aligned} \langle \text{diagrama II} \rangle &= A \langle \text{diagrama II} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama II} \rangle \\ &= -A^{-2} \langle \text{diagrama II} \rangle + \langle \text{diagrama II} \rangle + A^{-2} \langle \text{diagrama II} \rangle. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \langle \text{diagrama III} \rangle &= A \langle \text{diagrama III} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama III} \rangle \\ &= A \langle \text{diagrama III} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagrama III} \rangle \\ &= \langle \text{diagrama III} \rangle. \end{aligned}$$

La segunda igualdad se sigue de usar (i) dos veces. \square

Definición 2.4.4. Definimos la *torsión* $\omega(D)$ de un diagrama D de un link *orientado* como la suma de los signos de D , donde cada cruce tiene signo $+1$ o -1 como convenimos previamente en la Figura 2.3.

Notemos que $\omega(D)$ permanece invariante bajo movimientos de Reidemeister de tipo II o III. Sin embargo, $\omega(D)$ varía en $+1$ o -1 si a D se le aplica un movimiento de tipo I.

Tenemos entonces que tanto la torsión de un diagrama de link orientado como el corchete de Kauffman (olvidando la orientación) son invariantes bajo movimientos de Reidemeister de tipos II y III, y ambos se comportan de forma predecible bajo los de tipo I. Esto nos lleva al siguiente resultado, que es esencialmente el enunciado de la existencia del polinomio de Jones.

Teorema 2.4.5. *Sea D un diagrama de un link orientado L . Entonces la expresión*

$$X(L) = (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle$$

es un invariante del link orientado L .

Demostración. Se sigue del Lema 2.4.3 que la expresión es invariante por movimientos de Reidemeister de tipos II y III. Veamos que también lo es por movimientos de tipo I: sean L y L' dos links tales que sus diagramas D y D' son exactamente iguales salvo por un movimiento de tipo I, como se muestra en la Figura 2.12. Entonces, por el Lema 2.4.2 y las observaciones hechas sobre ω , tenemos que $\omega(D') = \omega(D) + 1$ y

$$\begin{aligned} X(L') &= (-A)^{-3\omega(D')} \langle D' \rangle \\ &= (-A)^{-3(\omega(D)+1)} \langle D' \rangle \\ &= (-A)^{-3(\omega(D)+1)} ((-A)^3 \langle D \rangle) \\ &= (-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle \\ &= X(L). \end{aligned}$$



Figura 2.12

De forma análoga se sigue la igualdad para el otro movimiento de tipo I. \square

Definición 2.4.6. El *polinomio de Jones* $J(L)$ de un link orientado L es el polinomio de Laurent en $t^{1/2}$, a coeficientes enteros, definido por

$$J(L) = ((-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}],$$

donde D es cualquier diagrama orientado de L .

Notemos que del Teorema 2.4.5 se desprende que el invariante está bien definido y que $J(\bigcirc) = 1$. Por el momento, se desconoce la existencia de un nudo K no trivial con $J(K) = 1$; encontrar un tal K , o probar su no existencia, es un importante problema abierto. Es claro que si se revierte la orientación de *todas* las componentes del link entonces el signo de cada cruce no varía, por ende tampoco el invariante. En particular, el polinomio de Jones de un *nudo* no depende de la orientación elegida.

El polinomio de Jones está caracterizado en la siguiente proposición por una relación similar a la del polinomio de Conway. A pesar de que se sigue fácilmente de nuestra definición, históricamente esta fue la presentación original.

Proposición 2.4.7. *El polinomio de Jones es una función*

$$J: \{\text{Links orientados en } \mathbb{R}^3\} \rightarrow \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}]$$

que verifica las dos condiciones siguientes:

$$(i) \ J \left(\bigcirc \right) = 1,$$

(ii) cada vez que tres links orientados L_+ , L_- y L_0 sean idénticos, excepto en el entorno de un punto donde sus diagramas son los que se muestran en la Figura 2.13, entonces

$$t^{-1}J(L_+) - tJ(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})J(L_0) = 0.$$

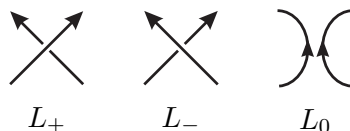


Figura 2.13

Demostración.

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 2} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle, \\ \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A^{-1} \langle \text{Diagram 2} \rangle + A \langle \text{Diagram 3} \rangle. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por A , la segunda por A^{-1} y restando resulta

$$A \langle \text{Diagram 1} \rangle - A^{-1} \langle \text{Diagram 1} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \text{Diagram 2} \rangle.$$

Luego, para los links orientados con los diagramas mostrados, usando el hecho de que $\omega(L_+) - 1 = \omega(L_0) = \omega(L_-) + 1$ junto con la Definición 2.4.6 se sigue que

$$-A^4 J(L_+) + A^{-4} J(L_-) = (A^2 - A^{-2}) J(L_0).$$

Al sustituir las A sobrantes como $t^{1/2} = A^{-2}$, obtenemos la relación que queríamos. \square

Ejemplo 2.4.8. Empecemos con un ejemplo sencillo. Consideremos L el link trivial de dos componentes,

$$L = \bigcirc \bigcirc.$$

Mirando la definición del polinomio de Jones, tenemos que $J(L) = X(L)_{t^{1/2}=A^{-2}}$. Calculemos entonces $X(L)$. Por definición, si D es un diagrama de L (podemos tomar el de arriba), usando la definición del corchete de Kauffman resulta

$$\begin{aligned} X(L) &= (-A)^{3\omega(D)} \langle D \rangle \quad \text{con } \omega(D) = 0 \\ &= \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\ &= (-A^2 - A^{-2}) \langle \bigcirc \rangle \\ &= -A^2 - A^{-2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $J(L) = -t^{-1/2} - t^{1/2}$.

Ejemplo 2.4.9. Vamos ahora a calcular el polinomio de Jones del trébol positivo. Esta vez, vamos a usar la relación de la Proposición 2.4.7 para ir reduciendo el nudo a otros más simples. Vamos a marcar con un círculo rojo el cruce donde se está aplicando la relación.

$$\begin{aligned}
 J \left(\text{Diagrama 1} \right) &= t^2 J \left(\text{Diagrama 2} \right) + (t^{3/2} - t^{1/2}) J \left(\text{Diagrama 3} \right) \\
 &= t^2 + (t^{3/2} - t^{1/2}) \left[t^2 J \left(\text{Diagrama 4} \right) + (t^{3/2} - t^{1/2}) J \left(\text{Diagrama 5} \right) \right] \\
 &= t^2 + (t^{7/2} - t^{5/2}) J \left(\text{Diagrama 6} \right) + (t^{3/2} - t^{1/2})^2 \\
 &= t^3 + t - t^2 + (t^{7/2} - t^{5/2})(-t^{-1/2} - t^{1/2}) \\
 &= t + t^3 - t^4.
 \end{aligned}$$

2.5. El grupo del nudo

En esta sección vamos a introducir nuestro primer invariante definido sobre el nudo, visto como una curva en \mathbb{R}^3 y no como un diagrama en \mathbb{R}^2 . Seguiremos el trabajo desarrollado en [Lin14].

Definición 2.5.1. El *grupo de nudo* de un nudo K con punto base $b \in \mathbb{R}^3$ es el grupo fundamental $\pi_b(K)$ del complemento del nudo K , con b como punto base. Se define de igual forma para un link, como el grupo fundamental del su complemento.

A diferencia de otros invariantes, no es complicado mostrar que para cada par de nudos equivalentes y puntos base los grupos de nudo son isomorfos: nudos equivalentes tienen complementos homeomorfos y espacios homeomorfos tienen grupos fundamentales isomorfos.

Al igual que usamos la palabra *nudo* para referirnos a una clases de equivalencia de nudos, usaremos *grupo* para referirnos a la clase de equivalencia de grupos isomorfos. Esto nos permite hablar de *el grupo del nudo*, sin hacer referencia al punto base.

El grupo de un nudo no es siempre suficiente para distinguir nudos, es decir no es un invariante completo. Por ejemplo, los nudos trébol a izquierda y derecha tienen el mismo grupo fundamental pero no son equivalentes.

Proposición 2.5.2. *El grupo del nudo trivial es el grupo cíclico infinito.*

Demostración. Vamos a construir primero un retracts por deformación fuerte del complemento del nudo en un espacio más manejable. Es más sencillo hacer esto en

S^3 . En este espacio, que es simplemente $\mathbb{R}^3 \cup \infty$, el eje- z junto con el infinito es un círculo y la imagen del nudo trivial. El complemento de este espacio en S^3 puede expresarse con coordenadas cilíndricas $\theta, r > 0$, y z . La siguiente función define entonces un retracts por deformación fuerte del complemento en la circunferencia unitaria del plano xy alrededor del origen:

$$f_t(\theta, r, z) = (\theta, r^{1-t}, (1-t)z)$$

Se sigue que el grupo del nudo trivial es el grupo fundamental del círculo, que es el grupo cíclico infinito. \square

El link de Hopf es un ejemplo similar.

Proposición 2.5.3. *El grupo del link de Hopf es el grupo abeliano libre con dos generadores.*

Demostración. Para la imagen del link de Hopf en S^3 usamos el eje- z , como antes, junto con la circunferencia unitaria alrededor del origen en el plano xy . Podemos usar otra vez coordenadas cilíndricas, solo que ahora excluimos además los puntos con $r = 1$ y $z = 0$, como se muestra en la Figura 2.14. Esta vez, el espacio se puede retraer en un toro. La familia de funciones que hacen esto es:

$$f_t(\theta, r, z) = (\theta, (1-t)r + t(r-1)/2\rho + t, (1-t)z + tz/2\rho)$$

donde $\rho = \sqrt{(r-1)^2 + z^2}$. La función retrae el complemento del link en el toro de radio $1/2$ cuyo círculo central es la circunferencia unitaria alrededor del origen del plano xy . Esto prueba que el grupo de nudo es igual al grupo fundamental del toro. \square

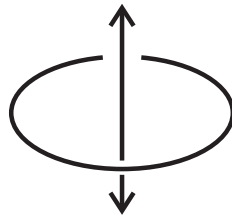


Figura 2.14: Link de Hopf en S^3 , donde una componente incluye al punto infinito.

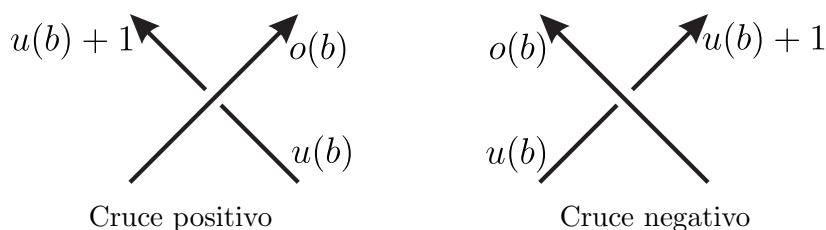
2.5.1. La presentación de Wirtinger

Wirtinger dio un método general para encontrar una presentación del grupo de cualquier nudo, con la ventaja de ser intuitivamente simple y fácil de calcular.

Para construir la presentación de Wirtinger, comenzamos con un diagrama orientado del nudo K . Lo pensamos metido enteramente en el plano xy de \mathbb{R}^3 , excepto por los arcos que pasan por debajo en cada cruce, que se sumergen por debajo del plano para evitar la intersección con el arco superior. En cada cruce, vemos que el arco que pasa por arriba no está quebrado; el arco es el mismo a cada lado del cruce.

Por otro lado, el arco que pasa por debajo si está quebrado, así que ambos lados del cruce corresponden a los finales de dos arcos distintos (o en algunos casos los dos finales del mismo arco). Habiendo distinguido éstos, sea n el número de arcos en el diagrama y los numeramos a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Si K no es un link, podemos asignar los números tal que a_{i+1} sea el arco que viene después de a_i con la orientación dada (con la suma en $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$). Dado que este método funciona también para links, vamos a usar en general la notación $a_i + 1$ para referirnos al arco que sigue a a_i (acá “+” es sólo notación, no una operación).

Para construir la presentación necesitamos además una manera de referirnos a los cruces del diagrama. A cada cruce b le corresponden tres arcos (no necesariamente distintos): el arco superior $o(b)$ y los dos arcos inferiores $u(b)$ y $u(b) + 1$. El primero, $u(b)$, es el que está orientado hacia el cruce mientras que $u(b) + 1$ se aleja. Además, distinguiremos si el cruce es positivo o negativo.



Proposición 2.5.4. *Sea K un nudo representado por un diagrama, y sean A el conjunto de arcos y B el conjunto de cruces. Sea W el grupo libre en el conjunto A y sea N el subgrupo de A generado por los elementos $r(b)$ para cada $b \in B$, con r definido así:*

$$r(b) = \begin{cases} (u(b) + 1)o(b)u(b)^{-1}o(b)^{-1} & \text{si } b \text{ es positivo} \\ o(b)(u(b) + 1)o(b)^{-1}u(b)^{-1} & \text{si } b \text{ es negativo} \end{cases}$$

Entonces W/N es el grupo de nudo de K .

Demostración. El punto base usado para calcular el grupo fundamental es el $(0, 0, 1)$ (o cualquier otro punto que se encuentre por arriba del diagrama en \mathbb{R}^3). Por cada arco a , el generador a en la presentación del grupo se corresponde con el lazo que arranca en el punto base, baja hasta el plano xy , engancha por debajo al arco a y regresa al punto base. Vamos a convenir que el lazo baja por la izquierda del arco y sube por la derecha, siempre mirando igual que su orientación (ver Figura 2.16). El lazo que hace el camino inverso se corresponde con a^{-1} .

Tenemos que corroborar que los lazos correspondientes a cada arco generan todos los posibles lazos, salvo homotopías. Dado un lazo c que empiece y termine en el punto base, hay una cantidad finita de arcos que cruza por debajo y podemos mirar la dirección en la que lo hace relativo a la orientación de los mismos. Luego de cruzar cada arco por debajo, podemos hacer que el camino suba hasta el punto base y vuelva a bajar para seguir su recorrido. Así nos construimos un camino homotópico a c , como la composición de los lazos generadores y sus inversos correspondientes a cada arco que cruce por debajo.

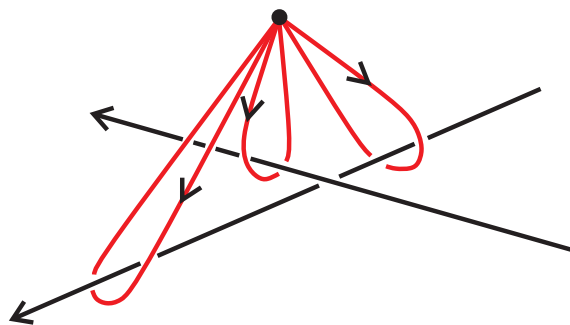


Figura 2.16: Lazos asociados a los tres arcos de un cruce positivo. El punto base se muestra por arriba del diagrama.

Existen ciertas homotopías del lazo c que alteran la serie de arcos que son cruzados por debajo, pero todas ellas son combinaciones de dos casos especiales ilustrados en la Figura 2.17. El primero se da cuando el lazo cruza por debajo un arco y luego lo vuelve a cruzar en la dirección opuesta, sin cruzar por ningún otro en el medio. Es claro que este camino es homotópico al que evita ambos cruces. En nuestra construcción, esto queda representado por la identidad $aa^{-1} = e$. El segundo caso se da cuando el lazo rodea por debajo un cruce. Cuando el lazo hace esto, cruza el arco superior dos veces en direcciones opuestas y los arcos inferiores una vez, en direcciones también opuestas como se muestra en la figura. Este camino es homotópico a aquél que esquiva completamente el cruce, así que agregamos las relaciones en la definición de N para identificar estos caminos con la identidad. Esto completa la presentación.

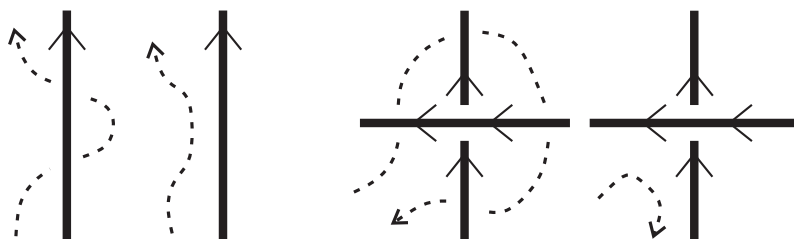


Figura 2.17: Las homotopías que muestran que $aa^{-1} = e$ para cualquier arco a y $o(b)(u(b) + 1)o(b)^{-1}u(b)^{-1} = e$ para cualquier cruce negativo b .

□

Observación 2.5.5. Si K es un nudo, los dos generadores correspondientes a los arcos que pasen por debajo de un cruce resultan elementos conjugados del grupo. Como cada arco está conectado a otro de esta forma, resulta que todos los generadores son conjugados de uno solo. En particular, el grupo se encuentra generado por la clase de conjugación de ese único generador.

Esta característica de $\pi(K)$ será de gran importancia más adelante.

Ejemplo 2.5.6. El diagrama estándar del nudo trébol consiste en tres arcos, que numeramos a_0 , a_1 y a_2 . La presentación de Wirtinger viene dada por:

$$W/N = \langle a_0, a_1, a_2 \mid a_1 a_2 a_0^{-1} a_2^{-1} = a_0 a_1 a_2^{-1} a_1^{-1} = a_2 a_0 a_1^{-1} a_0^{-1} = e \rangle.$$

Ésta puede ser simplificada. Usando la tercer relación, se sigue que $a_2 = a_0 a_1 a_0^{-1}$. Dado que las dos relaciones restantes son iguales, la presentación resulta:

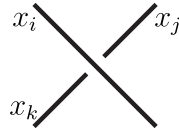
$$W/N = \langle a_0, a_1 \mid a_0 a_1 a_0 = a_1 a_0 a_1 \rangle.$$

2.6. p -coloreos

El método de distinguir nudos usando la “colorabilidad” de sus diagramas fue introducido por Ralph Fox. Consideremos D un diagrama de cierto nudo K (se define de igual forma para links) y p un número primo, $p \geq 3$.

Definición 2.6.1. Un p -coloreo es una función que asigna a cada arco del diagrama D un elemento (o *color*) del grupo $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, de forma tal que se satisfaga la siguiente condición:

En cada cruce, coloreado como se muestra en la siguiente figura, se verifica la relación $2x_i - x_j - x_k \equiv 0 \pmod{p}$.



Vamos a notar por $Col_p(K)$ al conjunto de p -coloreos de un link L ,

$$Col_p(K) = \{(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n : 2x_i - x_j - x_k \equiv 0 \pmod{p}\}$$

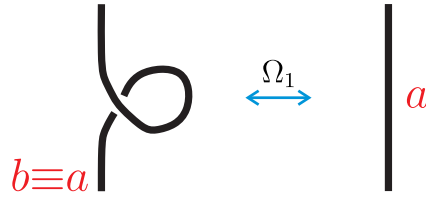
donde n es la cantidad de arcos del diagrama D y tenemos una ecuación por cada cruce. Llamaremos p -coloreos *triviales* a aquellos que asignan a todos los arcos del diagrama el mismo elemento.

Para verificar que efectivamente es un invariante, hay que ver que la cantidad de coloreos se mantiene constante al considerar distintos diagramas.

Teorema 2.6.2. *La cantidad de p -coloreos es un invariante de nudos.*

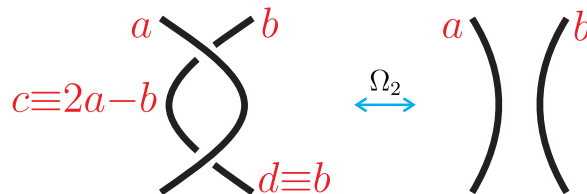
Demostración. Debemos corroborar que aplicar movimientos de Reidemeister a un diagrama no afecta su colorabilidad.

- *Mov. de tipo 1.*



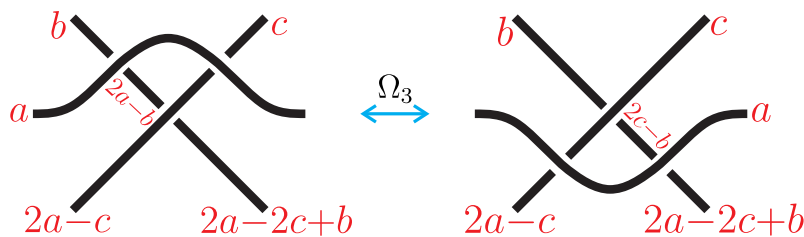
La ecuación de coloreo en el cruce nos dice que $b \equiv a \pmod{p}$. Luego, la imagen de la izquierda es parte de un coloreo si y solo si la de la derecha lo es.

- *Mov. de tipo 2.*



Las ecuaciones de coloreo en ambos cruces nos dan $c \equiv 2a - b$ y $d \equiv b \pmod{p}$. Si $a \equiv b$ entonces $a \equiv b \equiv c$ y el coloreo es el mismo en ambos diagramas. Si $a \not\equiv b$ entonces c es distinto de a y de b pero aún así queda fijo por ellos, así que la cantidad de coloreos no varía tampoco en este caso.

- *Mov. de tipo 3.*



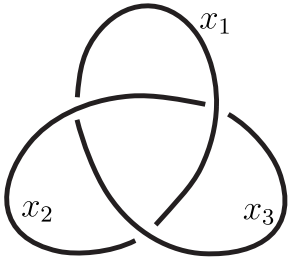
Al igual que antes, resolvemos la ecuación de coloreo en cada cruce. Notemos que los colores de los extremos se mantienen a ambos lados. Luego, la imagen izquierda es parte de un coloreo si y solo si la de la derecha lo es.

□

Observación 2.6.3. Notemos que un p -coloreo no es más que una solución de un sistema lineal homogéneo en $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: por cada cruce, se tiene que satisfacer la ecuación $2x_i - x_j - x_k \equiv 0 \pmod{p}$. En particular, $Col_p(K)$ es un $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ -espacio vectorial y la cantidad de coloreos es igual a $p^{\dim(Col_p(K))}$. Por lo tanto, un nudo será p -coloreable de forma no trivial si $\dim(Col_p(K)) > 1$.

Ejemplo 2.6.4. Veamos cómo se pueden colorear de forma no trivial los nudos trébol y ocho.

- Para el primero vamos a colorear con $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Las ecuaciones en cada cruce son:

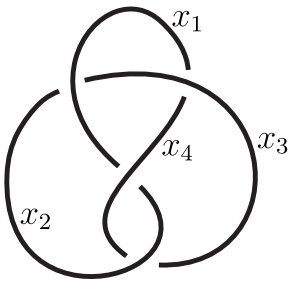


$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \quad (\text{mód } 3) \\ 2x_2 - x_1 - x_3 \equiv 0 \quad (\text{mód } 3) \\ 2x_3 - x_1 - x_2 \equiv 0 \quad (\text{mód } 3) \end{array} \right.$$

Nudo trébol con los arcos numerados.

Por ejemplo, la asignación $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$ nos da un 3-coloreo. Por lo tanto (como ya vimos antes) este nudo no es trivial.

- Para el ocho vamos a usar elementos en $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. En este caso, las cuatro ecuaciones son:



$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \\ 2x_3 - x_1 - x_4 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \\ 2x_2 - x_3 - x_4 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \\ 2x_4 - x_1 - x_2 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \end{array} \right.$$

Nudo ocho con los arcos numerados.

Si tomamos $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 1, 0)$ tenemos un 5-coloreo no trivial; por lo tanto el nudo no lo es.

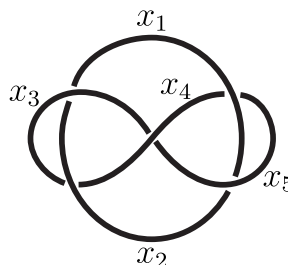
Veamos por último que estos dos nudos no son equivalentes entre sí. Por lo que vimos, basta con verificar que el nudo trébol no admite 5-coloreos no triviales. Miremos sus ecuaciones módulo 5:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & 2x_1 - x_2 - x_3 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \\ \text{(II)} & 2x_2 - x_1 - x_3 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \\ \text{(III)} & 2x_3 - x_1 - x_2 \equiv 0 \quad (\text{mód } 5) \end{array}$$

Despejando x_3 en (I) y reemplazando en (III) tenemos que $x_1 \equiv x_2 \equiv x_3 \pmod{5}$. Luego, no existen 5-coloreos no triviales para el trébol.

Ejemplo 2.6.5. En el Ejemplo 2.1.10 vimos que no podíamos distinguir el link de Whitehead del trivial usando el número de enlazamiento. Veamos que esto es muy sencillo de hacer usando 3-coloreos.

Los links triviales, a diferencia del nudo trivial, admiten p -coloreos no triviales dado que podemos asignarle a cada componente cualquier color al no haber ecuaciones que verificar. En particular, el link de dos componentes admite nueve 3-coloreos. Veamos que el link de Whitehead solo admite los tres 3-coloreos triviales.



$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_4 - x_5 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2x_5 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2x_2 - x_3 - x_4 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2x_3 - x_1 - x_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ 2x_4 - x_3 - x_5 \equiv 0 \pmod{3} \end{array} \right.$$

Despejando en la x_5 en la primer ecuación y reemplazando en las siguientes, resulta que la única solución es pintar con un solo color. Por lo tanto, el link de Whitehead no es trivial.

2.7. Representaciones del grupo de nudo

Dado un nudo K en \mathbb{R}^3 , el grupo de nudo $\pi(K)$ puede ser un invariante muy difícil de manejar. Resulta conveniente mirar invariantes más sencillos derivados de este, como por ejemplo el grupo $\text{Hom}(\pi(K), G)$ de representaciones en cierto grupo finito G o el invariante numérico $F_G(K) = |\text{Hom}(\pi(K), G)|$.

Definición 2.7.1. Sea K un nudo y G un grupo arbitrario. Llamamos un *coloreo de K por G* a cualquier morfismo de grupos de $\pi(K)$ en G . Un *coloreo trivial* será un morfismo $\varphi: \pi(K) \rightarrow G$ tal que $\varphi(x_i) = g$ para todos los generadores x_i de $\pi(K)$. Decimos que un nudo es coloreable por G si existe algún coloreo no trivial de K por G .

Por lo expuesto en las secciones previas, resulta evidente que $\text{Hom}(\pi(K), G)$ es un invariante de nudos dado que $\pi(K)$ lo es.

En la Sección 2.5 vimos que existe una forma de presentar el grupo fundamental de un nudo, etiquetando sus arcos y asignando una relación de conjugación en cada cruce. Por lo tanto, para determinar un morfismo de $\pi(K)$ en G es suficiente decir a donde mandamos los generadores y verificar que las relaciones de conjugación se satisfagan en G . Dado que los generadores pertenecen a la misma clase de conjugación en $\pi(K)$, lo mismo debe suceder con sus imágenes en G ; si C es una clase de conjugación en G , vamos a notar por $\lambda(K, G, C)$ a la cantidad de coloreos a valores en C .

La noción de coloreo expuesta en la sección anterior está muy relacionada con esta idea de etiquetar los arcos de cierta forma particular; en efecto nos provee de nuestro primer ejemplo no trivial de coloreo por un grupo.

Dado $n \geq 3$, llamamos *grupo diedral* de grado n al grupo de simetrías de un polígono regular de n aristas y lo notamos por D_{2n} . Este grupo tiene $2n$ elementos y admite la siguiente presentación:

$$D_{2n} = \langle \sigma, \rho \mid \rho^n = \sigma^2 = e, \sigma\rho = \rho^{-1}\sigma \rangle.$$

Con estas relaciones, podemos escribir de forma única cualquier elemento en D_{2n} como $\sigma^k \rho^i$ con $k \in \{0, 1\}$ e $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Lema 2.7.2. *Sea $p \geq 3$ un primo y sea $R_i = \sigma\rho^i \in D_{2p}$, con $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$. Entonces $R_i R_j R_i = R_{2i-j}$ módulo p . En particular, $C = \{R_0, R_1, \dots, R_{p-1}\}$ es una clase de conjugación en D_{2p} .*

Demostración. Usamos las relaciones de la presentación para lograr la igualdad:

$$\begin{aligned} R_i R_j R_i &= (\sigma\rho^i)(\sigma\rho^j)(\sigma\rho^i) = \sigma\sigma\rho^{-i}\rho^{-j}\sigma\rho^i \\ &= \rho^{j-i}\sigma\rho^i = \sigma\rho^{i-j}\rho^i = \sigma\rho^{2i-j} \\ &= R_{2i-j}. \end{aligned}$$

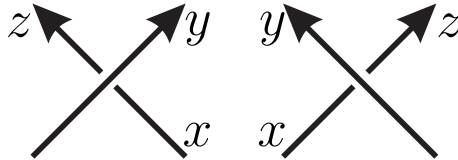
Para ver que es una clase de conjugación, debemos ver que $hR_i h^{-1} = R_j$ para cualquier $h \in D_{2n}$. Como $R_0 = \sigma$ y $R_i^{-1} = R_i$, en la cuenta anterior ya barrimos un montón de casos. Falta verificarlo para $h = \rho^k$:

$$\rho^k(\sigma\rho^i)\rho^{-k} = \sigma\rho^{-k}\rho^i\rho^{-k} = \sigma\rho^{i-2k} = R_{i-2k}.$$

□

Teorema 2.7.3. *Sea K un nudo y $p \geq 3$ un primo y sea C la clase de conjugación en D_{2p} del lema previo. Entonces el número de p -coloreos del nudo K está determinado por $\lambda(K, D_{2p}, C)$.*

Demostración. Veamos primero que cada morfismo de $\pi_1(K)$ en D_{2p} a valores en C determina un coloreo. Supongamos a K orientado y que en cada cruce tenemos los arcos etiquetados por elementos de C



donde x, y, z son enteros entre 0 y $p-1$ y la etiqueta “ i ” denota al elemento R_i . Para satisfacer las relaciones en la presentación de Wirtinger, debe ser

$$R_y R_x R_y = R_z = R_{2y-x}$$

donde la segunda igualdad es la del lema previo. En particular, tenemos que $z = 2y - x$, o equivalentemente $2y - x - z \equiv 0 \pmod{p}$. Esta es precisamente la relación que requerimos en un cruce de K para tener un p -coloreo.

Al revés, supongamos que tenemos sobre K un p -coloreo. Las ecuaciones que lo determinan definirán de igual forma (mediante la identidad del lema previo) las relaciones de conjugación de Wirtinger entre los elementos de C . Por lo tanto, quedará bien definido el morfismo de $\pi(K)$ en D_{2p} que asigna al arco pintado con j el elemento R_j , para cada $0 \leq j \leq p-1$. Luego, construir un morfismo $\varphi: \pi(K) \rightarrow D_{2p}$ es equivalente a dar un p -coloreo de K . \square

Antes de finalizar este capítulo vamos a introducir un resultado que va a ser muy útil a la hora de estudiar el invariante $F_G(K)$. El mismo fue enunciado en [Neu65, Problema U] y fue demostrado por primera vez en [GA75].

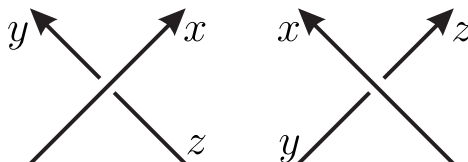
Teorema 2.7.4. *Un grupo finito es imagen de un morfismo de algún grupo de nudo si y solo si está generado por la clase de conjugación de algún elemento $x \in G$.*

La demostración que vamos a exhibir pertenece a [Joh80]. Para probar este resultado necesitamos hacer algunas consideraciones acerca de los morfismos del grupo de un nudo en un grupo G . Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 2.7.5. Dado un grupo H , decimos que un elemento $x \in H$ es un *meridiano* si H está generado por la clase de conjugación de x . Si notamos $x^h = hxh^{-1}$ y $x^H = \{x^h : h \in H\}$, entonces x es un meridiano si $H = \langle x^H \rangle$.

La condición necesaria del teorema se sigue entonces de la presentación de Wirtinger del grupo del nudo: sabemos $\pi(K)$ está generado por las clases de conjugación de cualquier generador de la presentación. Por lo tanto, si $f: \pi(K) \twoheadrightarrow G$ es un epimorfismo y a es un generador de la presentación entonces $G = \langle f(a)^G \rangle$ como queríamos.

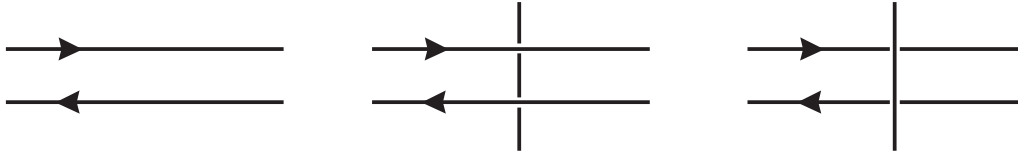
Para probar la suficiencia, vamos a recurrir a la técnica introducida por Johnson, donde se construye de manera astuta un nudo junto a un epimorfismo $\pi(K) \twoheadrightarrow G$, mandando un meridiano de $\pi(K)$ al elemento $x \in G$. La presentación de Wirtinger nos da un meridiano del grupo del nudo; uno por cada arco de un diagrama. Luego, un morfismo de $\pi(K)$ en G se puede representar indicando la imagen $g_i \in G$ de dicho meridiano. En cada cruce, los generadores de $\pi(K)$ se relacionan de la siguiente forma:



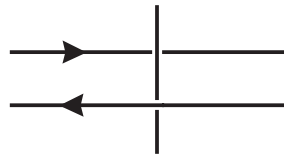
$$xyx^{-1} = z.$$

Podemos entonces *representar* o *colorear* cada arco del nudo con un elemento de G de forma que se satisfaga esa relación en G en cada cruce.

Vamos a introducir la noción de *banda representada*. Por *banda* nos referimos a un par de arcos orientados del diagrama, paralelos y con direcciones opuestas, y sin ningún otro arco pasando entre medio de ellos. Es decir, la banda localmente se ve como en los siguientes tres dibujos (salvo por las orientaciones):



Es decir, no admitimos lo siguiente:



Una banda *representada* es una banda con el mismo elemento de G asignado a ambos arcos. Veamos ahora qué sucede cuando una banda representada cruza por arriba o por debajo a otro arco del diagrama. La Figura 2.21(a) muestra el primer caso, donde se ve que el arco con la etiqueta x no cambia salvo entre los arcos de la banda. La Figura 2.21(b) muestra el segundo caso, donde la igualdad de los valores en ambos arcos de la banda se preserva y se mantiene la asignación. (El resto de los casos con diferentes orientaciones de los arcos son análogos a estos dos.)

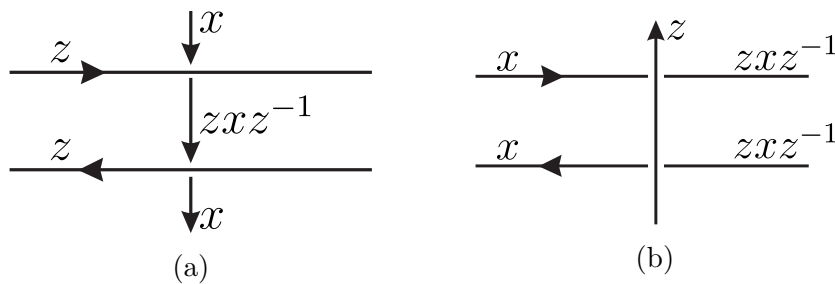
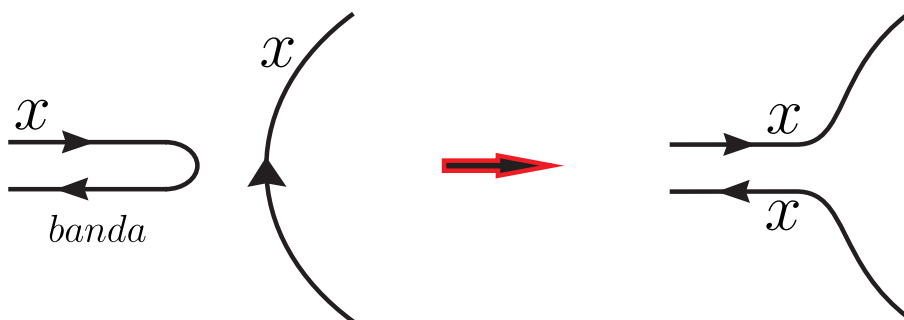


Figura 2.21

Estas figuras nos muestran cómo podemos alterar un diagrama de un nudo representado, dibujando una pequeña banda a partir de algún arco y estirándola a lo largo del resto del diagrama, sin cambiar la representación previa. Por último, podemos hacer otro tipo de alteración del diagrama, llamada *conexión de bandas*, de la siguiente forma:

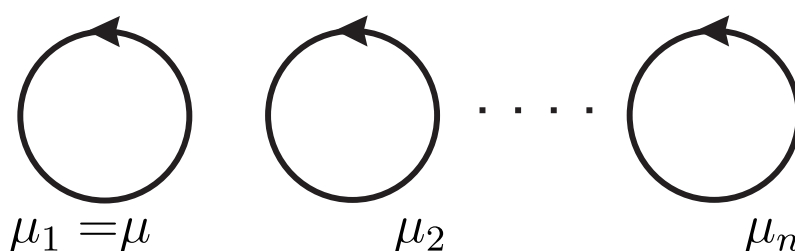


donde la representación por G se mantiene luego de hacer la conexión. Este proceso nos provee una solución para el Teorema 2.7.4.

Demostración. (Teorema 2.7.4)

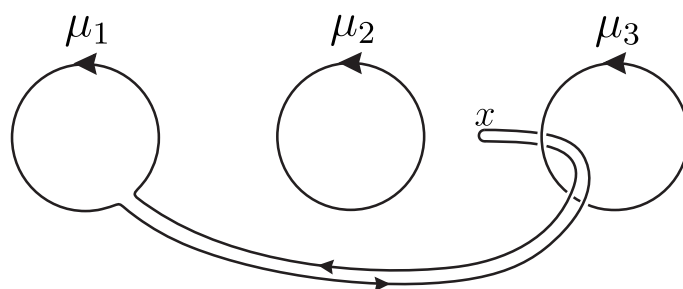
Por hipótesis, G está generado por los conjugados $\mu = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ del meridiano μ . Dado que μ_i es un conjugado de μ , existe una palabra W_i en las letras μ_j tal que $\mu_i = W_i \mu W_i^{-1}$.

Para armar el nudo, vamos a comenzar con un link trivial de n componentes, representado por G de la siguiente forma:

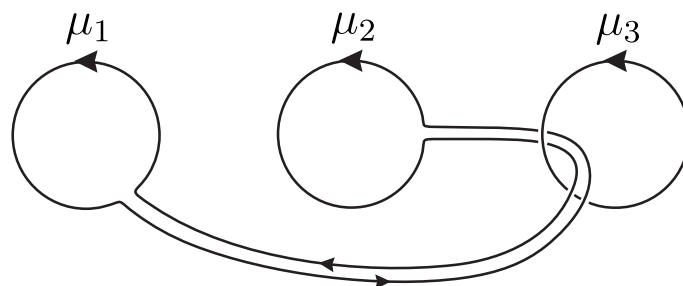


Es claro que esta representación induce un epimorfismo del grupo fundamental del link en G (pero estamos buscando un nudo).

Tomemos $\mu_2 = W_2 \mu W_2^{-1}$. Para ilustrar el proceso, vamos a suponer que $W_2 = \mu_3$; el caso general se sigue de forma similar. Entonces, para $\mu_2 = \mu_3 \mu \mu_3^{-1}$ comenzamos dibujando una banda desde el primer círculo y la hacemos pasar a través del tercer círculo, como se ve en la siguiente figura.

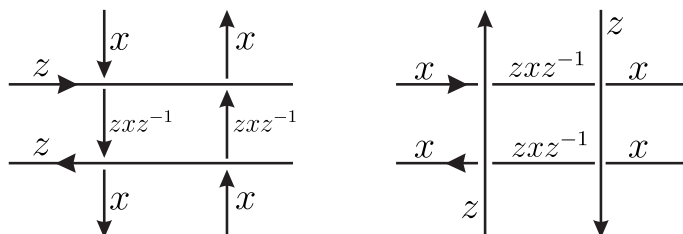


El valor de x en la nueva sección de la banda es, siguiendo lo dicho previamente, $x = \mu_3 \mu_1 \mu_3^{-1} = \mu_2$. Luego, podemos conectar esta sección con el segundo círculo:



Es sencillo verificar en el caso general que las orientaciones de la banda y el círculo siempre quedan compatibles para realizar la conexión de bandas.

Si hubiésemos tenido $W_2 = \mu_3^{-1}$ en vez de μ_3 , tendríamos que haber pasado la banda a través del tercer círculo en sentido opuesto (primero por debajo, luego por arriba) para conseguir $x = \mu_3^{-1}\mu_1\mu_3$. En general, si W_2 fuese una palabra producto de varios μ_j y sus inversos, entonces tendríamos que pasar la banda a través de los correspondientes círculos, en el sentido apropiado, para obtener $\mu_2 = W_2\mu W_2^{-1}$. A medida que la banda avanzase, podría ser necesario que la banda pase por arriba o por debajo de otras secciones de signo misma, pero esto no genera alteraciones a ninguna de las partes como se ve en la siguiente figura. Lo mismo va a ocurrir cuando dibujemos una segunda banda desde el primer círculo para conseguir $x = W_3\mu_1W_3^{-1} = \mu_3$ y conectarla con el tercer círculo.



Habiendo hecho esto para μ_2 , logramos reducir en uno el número de componentes del link pero, a la vez, mantenemos una representación con todos los generadores de G ; por lo tanto, seguimos teniendo un epimorfismo del grupo fundamental en G . Luego de realizar el proceso para cada μ_j , habremos conectado todas las componentes del link y tendremos un nudo. La representación sigue dando un epimorfismo sobre G y manda el meridiano elegido (el del primer círculo) en $\mu \in G$.

□

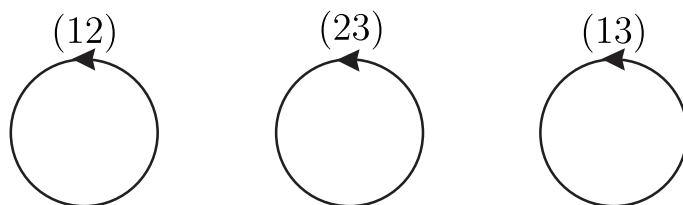
Ejemplo 2.7.6. Para ilustrar el procedimiento, vamos a construir un nudo K para el grupo simétrico $G = S_3$. Sabemos que $S_3 = \langle (12), (23), (13) \rangle$. Además, se tienen las siguientes igualdades:

$$(13) = (23)(12)(32) = (23)(12)(23)^{-1} \tag{2.6}$$

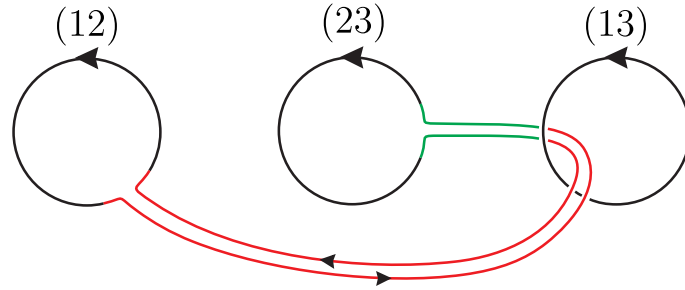
$$(23) = (23)(12)(31) = (23)(12)(13)^{-1}. \tag{2.7}$$

Es decir, la trasposición (12) es un meridiano de S_3 .

Siguiendo la construcción de la demostración, comenzamos con un link trivial de tres componentes, cada una representada por una de las trasposiciones.

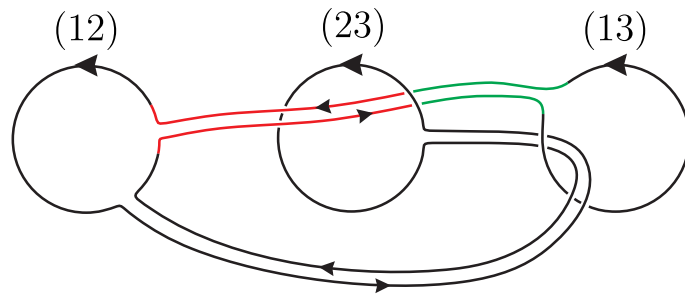


Para la relación (2.6), estiramos una banda desde el primer círculo, la hacemos pasar a través del círculo (13) como se muestra en la siguiente figura. Al salir, le queda asignada a la región verde de la banda el elemento (23) .



Conexión de la ecuación (2.6)

Luego, procedemos a hacer lo mismo para la relación (2.7). Al estirar una banda desde el primer círculo y hacerla pasar a través del segundo (como se ve en la figura), la misma sale con el elemento (13) asignado en la región verde.



Conexión de la ecuación (2.7)

Al haber unificado las tres componentes, obtenemos un nudo cuyo grupo fundamental admite un epimorfismo sobre S_3 .

En el Capítulo 4 utilizaremos este resultado para analizar el invariante F_G con más detalle.

Capítulo 3

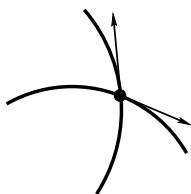
Invariantes de tipo finito

En este capítulo vamos a introducir el objeto de estudio de la tesis: los *invariantes de tipo finito*, o *invariantes de Vassiliev*. De ahora en más, todos los invariantes de nudos u serán invariantes numéricos. A lo largo de todo el capítulo estaremos siguiendo a [Mur96] y [CDM12].

3.1. Nudos singulares

Un *nudo singular* es esencialmente un “nudo” con auto intersecciones. Más precisamente, es la imagen de una función suave $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ inyectiva, salvo para un número finito de puntos en S^1 . Sólo vamos a considerar nudos singulares con las singularidades más simples: *puntos dobles*.

Definición 3.1.1. Sea $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una función. Un punto $p \in im(f) \subset \mathbb{R}^3$ es un *punto doble* o *vértice* de f si $f^{-1}(p)$ consiste de dos puntos t_1 y t_2 y los vectores tangentes $f'(t_1)$ y $f'(t_2)$ son linealmente independientes. Geométricamente, esto significa que en un entorno del punto p la curva f tiene dos ramas con tangentes no colineales.



Un punto doble

Notación. Recordemos que en el Capítulo 1 llamábamos vértices a los puntos del nudo donde se unían dos aristas de la poligonal. Dado que dejaremos de hablar de esos puntos, no hay confusión en usar el término a partir de ahora para referirnos a los puntos dobles de un nudo.

En la Figura 3.1 tenemos algunos ejemplos de nudos singulares. Al igual que con los nudos clásicos, vamos a definir una equivalencia de nudos singulares.

Definición 3.1.2. Dos nudos singulares K, K' se dicen equivalentes, y lo notamos por $K \approx K'$, si sus diagramas D y D' pueden ser transformados uno en otro aplicando un número finito de

- (1) movimientos de Reidemeister, excepto en un entorno de cada vértice;
- (2) las siguientes operaciones $\tilde{\Omega}_4$ y $\tilde{\Omega}_5$, en un entorno de cada vértice:

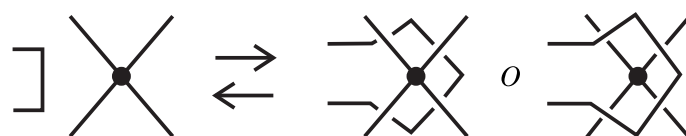
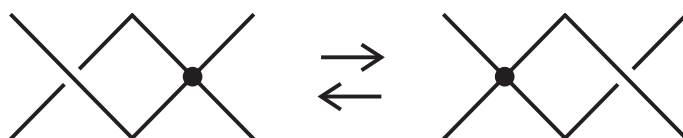
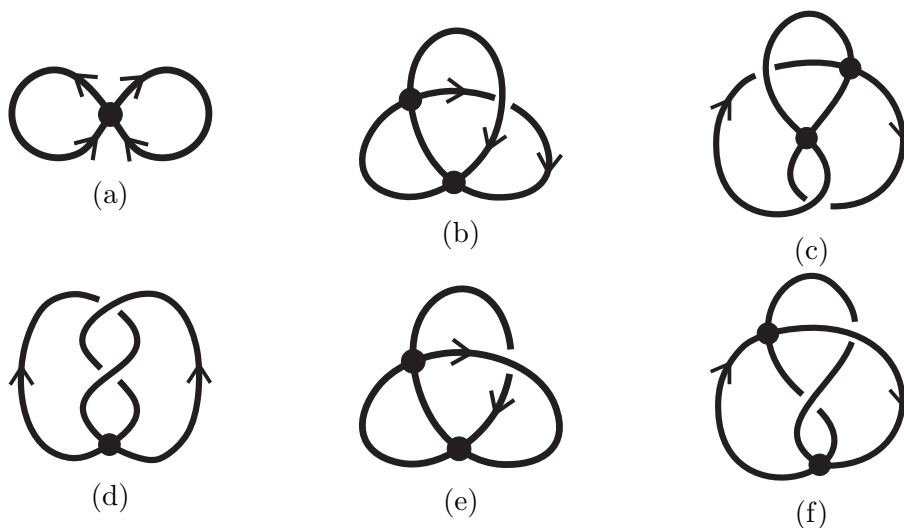
Movimiento $\tilde{\Omega}_4$ Movimiento $\tilde{\Omega}_5$ 

Figura 3.1: Ejemplos de nudos singulares.

3.2. Invariantes de Vassiliev

Cualquier invariante de nudos puede extenderse a nudos con puntos dobles por medio de la *relación de Vassiliev*:

$$v \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \bullet \\ \searrow \end{array} \right) = v \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \times \\ \searrow \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \times \\ \nearrow \end{array} \right). \quad (3.1)$$

Acá v es un invariante de nudos con valores en algún anillo, el miembro izquierdo es el valor de v en un nudo singular K y el derecho es la diferencia de los valores de v en nudos obtenidos a partir de K (posiblemente singulares) al reemplazar el punto doble con un cruce positivo y uno negativo respectivamente. Llamamos *resolver un vértice* al proceso de aplicar esta relación. Es claramente independiente de la proyección elegida del nudo singular, dado que solo nos estamos enfocando en un pequeño entorno del vértice.

Usando la relación de Vassiliev recursivamente podemos extender cualquier invariante de nudos a nudos con cualquier cantidad (finita) de vértices. Hay muchas formas de hacer esto, dado que podemos resolver los vértices en cualquier orden. Sin embargo, el resultado es independiente de la elección.

Observación. Debemos verificar que al extender un invariante de nudos clásicos v usando relación (3.1) obtenemos uno de nudos singulares bien definido; es decir, si K y K' son nudos singulares equivalentes entonces $v(K) = v(K')$. Dado que v no varía al aplicar movimientos de Reidemeister, solo falta verificar que lo mismo sucede con los movimientos $\tilde{\Omega}_4$ y $\tilde{\Omega}_5$. Aplicando la relación (3.1) a los diagramas del movimiento $\tilde{\Omega}_4$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
 v \left(\begin{array}{c} \square \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \bullet \end{array} \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} \right) &= v \left(\begin{array}{c} \square \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \times \end{array} \\ \nearrow \quad \nwarrow \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \square \quad \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \times \end{array} \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) \\
 v \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \times \end{array} \quad \square \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) &= v \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \times \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \quad \nwarrow \\ \times \end{array} \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \times \end{array} \quad \begin{array}{c} \nwarrow \quad \nearrow \\ \times \end{array} \\ \nwarrow \quad \nearrow \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Los diagramas de ambos miembros derechos difieren en un movimiento de Reidemeister Ω_3 . Por lo tanto, tenemos la igualdad entre ambas ecuaciones.

Análogamente, al aplicar la relación (3.1) a los diagramas del movimiento $\tilde{\Omega}_5$ obtenemos la igualdad usando un movimiento de Reidemeister Ω_2 .

Definición 3.2.1. Un invariante de nudos singulares v que satisface la relación (3.1) se dice que es un *invariante de Vassiliev de orden (a lo sumo) n* (también llamado *invariante de tipo finito de orden n*) si para cualquier nudo singular K con al menos $n + 1$ vértices se tiene

$$v(K) = 0. \tag{3.2}$$


En particular, si v es de orden a lo sumo n pero no es de orden $n - 1$, es decir si existe un nudo singular con exactamente n vértices donde v no se anula, entonces v se dice un invariante de Vassiliev de orden *exactamente* n .

Notación. Vamos a notar por \mathcal{V}_n al conjunto de invariantes de Vassiliev de orden $\leq n$ con valores en un anillo \mathcal{R} . Se sigue de la definición que, para cada n , el conjunto \mathcal{V}_n es un \mathcal{R} -módulo. Más aún, $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{V}_{n+1}$, así que tenemos la siguiente filtración

$$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{V}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{V}_n \subset \cdots \subset \mathcal{V} := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{V}_n.$$

Como se puede ver de la definición anterior, los invariantes de Vassiliev son esencialmente distintos de los invariantes de nudos mencionados en el Capítulo 2. Estos últimos asocian cierto valor numérico a cada nudo. Los de Vassiliev, en cambio, son invariantes de nudos singulares que satisfacen las ecuaciones (3.1) y (3.2).

Vamos a ver que existen muchos invariantes de nudos que inducen invariantes de Vassiliev; sin embargo, no todos ellos lo hacen. Antes de dar algunos ejemplos de esto, veamos algunas propiedades que se siguen fácilmente de la definición de invariante de Vassiliev.

Proposición 3.2.2. *Sea v un invariante de Vassiliev. Si un nudo singular K tiene un “bucle” , entonces*

$$v(K) = 0.$$

Demostración. Si aplicamos la relación de Vassiliev (3.1) al vértice que forma parte del bucle, entonces tenemos:

$$v(K) = v \left(\square \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \right) = v \left(\square \text{---} \text{---} \text{---} \right) - v \left(\square \text{---} \text{---} \right) = 0,$$

dado que los últimos dos nudos son equivalentes. □

Corolario 3.2.3. *Si v es un invariante de Vassiliev y K es un nudo singular con un vértice como en la Figura 3.2, entonces $v(K) = 0$.*

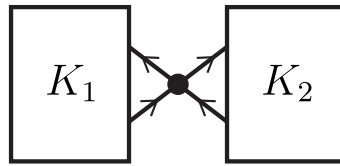


Figura 3.2

Demostración. Se sigue aplicando el mismo método que en la Proposición 3.2.2. □

Veamos ahora como podemos aplicar estas propiedades para determinar los invariantes de orden 0 y 1.

Proposición 3.2.4. *Sea v un invariante de Vassiliev de orden 0. Entonces para cualquier nudo no singular K se tiene*

$$v(K) = v \left(\bigcirc \right).$$

Por lo tanto, hay esencialmente un único invariante de Vassiliev de orden cero, en el sentido de que $\dim_{\mathcal{R}}(\mathcal{V}_0) = 1$.

Demostración. Dado que v tiene orden 0, se sigue que $v\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}\right) = 0$ y, por la relación de Vassiliev, $v\left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \nwarrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array}\right)$. Esto quiere decir que al aplicar un cambio de cruce el valor de v se mantiene constante. Dado que un nudo puede ser desanudado, es decir transformado en el nudo trivial, mediante cambios de cruce (ver Lema 2.1.6) se sigue que $v(K) = v(\bigcirc)$. Por lo tanto, v es constante en cualquier nudo no singular. \square

Proposición 3.2.5. *No existe ningún invariante de Vassiliev de orden (exactamente) uno. Es decir, $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_1$.*

Demostración. Supongamos que existe un tal invariante de Vassiliev v de orden uno. Entonces, v se anula sobre cualquier nudo singular con dos o más vértices, pero por definición existe un nudo singular K con un sólo vértice para el cual $v(K) \neq 0$. Repitiendo el argumento de la demostración anterior, si al diagrama de K le cambiamos un cruce el valor de v no varía: por la relación de Vassiliev, la diferencia entre estos es un nudo con dos singularidades donde v vale cero por hipótesis. Aplicando estos cambios podemos transformar K en el nudo singular \hat{K} de la Figura 3.1 (a), con $v(K) = v(\hat{K})$. Pero por la Proposición 3.2.2, $v(\hat{K}) = 0$, lo cual es una contradicción. \square

Sea K un nudo singular con $n + 1$ vértices y numerémoslos: $1, 2, \dots, n + 1$. Apliquemos ahora la relación de Vassiliev en cada vértice para eliminar cada uno de ellos. Este proceso va a generar 2^{n+1} nudos $\{K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}\}$ a partir de K , donde $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$ son $+$ o $-$ y $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}$ denota al nudo obtenido de K al reemplazar el vértice j ($j = 1, 2, \dots, n + 1$) por un cruce positivo si $\epsilon_j = +$ o por uno negativo si $\epsilon_j = -$. Aplicando repetidamente la relación, obtenemos la siguiente fórmula:

$$v(K) = \sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}} (-1)^l v(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}), \quad (3.3)$$

donde la suma es sobre todo el conjunto de 2^{n+1} elementos $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$ y l es el número de “ $-$ ” en la tira $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$. Usando (3.3) podemos reemplazar la condición (3.2) en la definición de invariante de Vassiliev.

Proposición 3.2.6. *Un invariante de nudos singulares, que satisfaga la relación (3.1), es un invariante de Vassiliev de orden a lo sumo n si y solo si para cualquier nudo singular K con $n + 1$ vértices,*

$$\sum_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}} (-1)^l v(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) = 0, \quad (3.4)$$

donde la suma es sobre el mismo conjunto que en (3.3).

3.3. Algunos ejemplos de Invariantes de Vassiliev

En esta sección mostraremos varios ejemplos de invariantes de Vassiliev, como así algunos que no lo son.

Los invariantes polinomiales definidos por relaciones son un buen punto de partida para hallar invariantes de tipo finito, dado podemos combinar estas relaciones con la relación de Vassiliev para obtener información sobre el polinomio.

En la siguiente proposición veremos que existen invariantes de tipo finito de orden exacto tan grande como queramos.


Proposición 3.3.1. *[Mur96, Prop. 15.3.1] Sea K un nudo y sea $C(K)$ su polinomio de Conway. Entonces cada coeficientes de grado n , $C_n(K) = a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) induce un invariante de Vassiliev de orden exacto n .*

Demostración. Es suficiente mostrar que se verifican las dos siguientes condiciones:

- (1) Dado un nudo singular K con $n + 1$ vértices, $C_n(K) = 0$;
- (2) Existe un nudo singular K' con n vértices tal que $C_n(K') \neq 0$.

Por la Proposición 3.2.6, podemos reescribir la condición (1) como

$$(1') \sum (-1)^l C_n(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}) = 0.$$

Probemos (1'). Vamos a notar por $(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i, 0, \dots, 0})$ al nudo obtenido a partir de $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}}$ al reemplazar los últimos $n + 1 - i$ cruces por . Veamos qué sucede al aplicar la relación de Conway.

Para cualquier tira $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}$,

$$C(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, +})(z) - C(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, -})(z) = zC(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0})(z).$$

Si volvemos a aplicar la relación, pero esta vez a $K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n, 0}$, obtenemos

$$C(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, +, 0})(z) - C(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, -, 0})(z) = zC(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, 0, 0})(z).$$

Seguiremos aplicando la relación hasta llegar a la siguiente ecuación:

$$C(K_{+, 0, \dots, 0})(z) - C(K_{-, 0, \dots, 0})(z) = zC(K_{0, 0, \dots, 0})(z).$$

Si juntamos todos estos términos, obtenemos finalmente

$$\sum (-1)^l C(K_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n+1}})(z) = z^{n+1} C(K_{0, 0, \dots, 0})(z). \quad (3.5)$$

Dado que el miembro derecho de (3.5) no contiene el término z^n , se tiene que $C_n(K) = 0$.

Vamos ahora a probar (2). Consideremos el nudo singular $K[p, q]$, ilustrado en la Figura 3.3, donde p es el número de vértices y $|q|$ el número de cruces (positivos o negativos, según el signo de q).

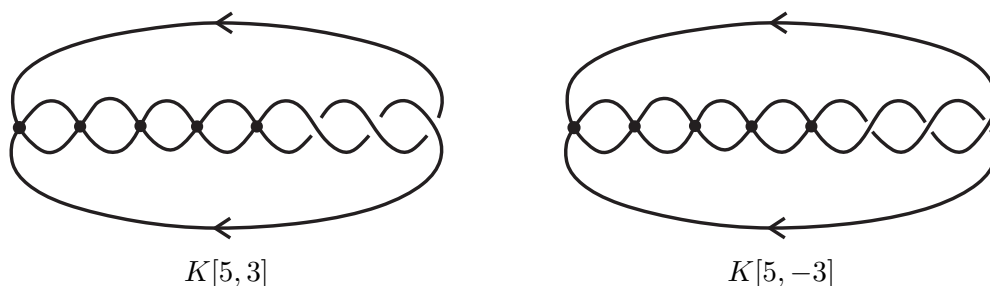


Figura 3.3

Específicamente, vamos a mirar $K[n, 1]$ y a calcular $C_n(K[n, 1])$:

$$C_n(K[n, 1]) = \sum (-1)^l C_n(K[n, 1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}). \tag{3.6}$$

Veamos cómo son los nudos $K[n, 1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$. Si ϵ_i y ϵ_{i+1} tienen signos distintos entonces se cancelan mutuamente (aplicando el movimiento de Reidemeister Ω_2 podemos borrar ambos cruces del diagrama). Luego de realizar todas las cancelaciones posibles, el nudo (o link) resultante tendrá solo cruces positivos o negativos. Recordando lo hecho en la Sección 2.3.1, es entonces fácil ver que $K[n, 1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}$ es un link toro $(n - 2l + 1, 2)$, donde l es el número de “-” en la tira $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$.

Además, por el Teorema 2.3.5 y el Lema 2.3.6 sabemos que $C(\mathcal{T}_{n-2l+1})$ es un polinomio de grado $|n - 2l + 1| - 1$ (salvo cuando $n - 2l + 1 = 0$, donde el link \mathcal{T}_{n-2l+1} es trivial y su polinomio de Conway es nulo). Como l toma valores entre 0 y n , el único caso en que $|n - 2l + 1| - 1 = n$ se da cuando $l = 0$, y en el resto de los casos es $|n - 2l + 1| - 1 < n$. Por lo tanto, el polinomio $C(\mathcal{T}_{n-2l+1})$ tiene coeficiente n -ésimo no nulo sólo si $l = 0$, y sabemos que en ese caso además es mónico.

Por lo tanto, $C_n(K[n, 1]_{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n}) = 1$ si cada ϵ_i es + y cero en cualquier otro caso. Luego, $C_n(K[n, 1]) = 1$. □

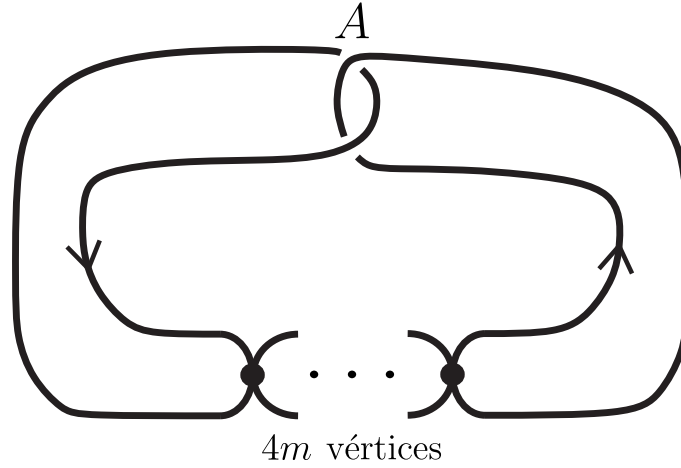
Ya vimos que los coeficientes del polinomio de Conway son invariantes de Vassiliev. El polinomio de Conway, en su totalidad, no es un invariante de tipo finito, pero si resulta ser una combinación lineal infinita de varios de ellos. Esta propiedad se mantiene para todos los invariantes polinomiales clásicos, luego de realizar algún cambio de variable.

Consideremos la siguiente modificación del polinomio de Jones de un nudo K : sustituímos $t = e^h$ y lo expandimos en una serie de potencias formal en la variable h . Llamemos $j_n(K)$ al coeficiente que acompaña al término de grado n .

Teorema 3.3.2. *El coeficiente $j_n(K)$ es un invariante de Vassiliev de orden $\leq n$.*

Demostración. Tomando $t = e^h = 1 + h + \dots$ en la relación de la Proposición 2.4.7 obtenemos

$$e^{-h} J \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - e^h J \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right) = (-e^{-h/2} + e^{h/2}) J \left(\begin{array}{c} \left(\right) \left(\right) \end{array} \right).$$

Figura 3.4: Nudo singular K_{4m}

Si ahora desarrollamos cada exponencial como una serie de potencias, tenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} (1 - h + \frac{h^2}{2} - \dots) J \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) - (1 + h + \frac{h^2}{2} + \dots) J \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right) = \\ = (h + \frac{h^3}{24} + \dots) J \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right). \end{aligned}$$

Esto nos muestra que la diferencia

$$J \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \searrow \searrow \end{array} \right) - J \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right) = J \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \searrow \nearrow \end{array} \right)$$

es congruente a 0 módulo h . Por lo tanto, el polinomio de Jones de un nudo singular con k puntos dobles es divisible por h^k . En particular, si $k \geq n + 1$ el coeficiente de h^n es igual a cero. \square

Para terminar esta sección vamos a mostrar que no todos los invariantes de nudos inducen invariantes de tipo finito. Recordemos el número de desanudamiento $u(K)$ de un nudo K , definido como el menor número tal que existe un diagrama de K que puede transformarse en el del nudo trivial al cambiar esa cantidad de cruces.

Proposición 3.3.3. [Man04, Teorema 12.6] *El invariante u es de orden infinito.*

Demostración. Para probar que u es de orden infinito basta con exhibir nudos singulares, con una cantidad arbitrariamente grande de vértices, sobre los cuales u no se anule. Dado $m \in \mathbb{N}$, consideramos el nudo K_{4m} con $4m$ vértices, como se muestra en la Figura 3.4.

Siguiendo la fórmula (3.3), el valor de u sobre este nudo es igual a la suma alternada de 2^{4m} sumandos; cada uno es el valor de u en un nudo obtenido a partir de K_{4m} al resolver todos los vértices.

Notemos que para cualquiera de estos nudos, el valor de u es menor o igual a 1: cambiando el cruce A de la figura, siempre obtenemos el nudo trivial. Por otro lado, un nudo obtenido de K_{4m} al resolver todos los vértices va a ser trivial si y solo si el número resoluciones positivas es igual al número de negativas (ambos iguales a $2m$). En el caso de tener q cruces positivos y $4m - q$ negativos, el signo en la sumatoria es $(-1)^{4m-q} = (-1)^q$. Por lo tanto, obtenemos finalmente que $u(K_{4m})$ es igual a

$$u(K_{4m}) = 2 \left[\binom{4m}{0} - \binom{4m}{1} + \dots - \binom{4m}{2m-1} \right]$$

donde cada $\binom{4m}{q}$ representa todas las formas posibles de resolver q vértices de forma positiva (cada uno de esos aporta 1 a la suma). Es claro que esa suma es negativa, en particular $u(K_{4m}) \neq 0$. Como tomamos $m \in \mathbb{N}$ arbitrario, se sigue que u no es un invariante de tipo finito. \square

En el Capítulo 4 vamos introducir técnicas que nos van a proveer de más ejemplos de invariantes que no son de tipo finito.

3.4. Diagramas de cuerdas

Además de la igualdad de la Proposición 3.2.2, cualquier invariante de Vassiliev v satisface una ecuación más importante llamada *fórmula de 4 términos* (o fórmula $4T$, para abreviar).

Teorema 3.4.1 (Fórmula $4T$). *Cualquier invariante de Vassiliev v satisface la igualdad*

$$v \left(\text{Diagram 1} \right) - v \left(\text{Diagram 2} \right) = v \left(\text{Diagram 3} \right) - v \left(\text{Diagram 4} \right) \quad (3.7)$$

donde los 4 nudos singulares son idénticos fuera de los círculos.

Demostración. Consideremos dos nudos singulares equivalentes K y K' . K y K' son idénticos, salvo dentro de los círculos que se muestran en la Figura 3.5



Figura 3.5

Si aplicamos la relación de Vassiliev en los cruces a y b dentro de cada uno de los siguientes círculos, obtenemos las igualdades:

$$\begin{aligned}
 v(K) &= v \left(\text{Diagram 1} \right) = v \left(\text{Diagram 2} \right) + v \left(\text{Diagram 3} \right) \\
 &= v \left(\text{Diagram 4} \right) + v \left(\text{Diagram 5} \right) + v \left(\text{Diagram 6} \right) \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v(K') &= v \left(\text{Diagram 7} \right) = v \left(\text{Diagram 8} \right) + v \left(\text{Diagram 9} \right) \\
 &= v \left(\text{Diagram 10} \right) + v \left(\text{Diagram 11} \right) + v \left(\text{Diagram 12} \right) \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

En (3.8) y (3.9) los primeros sumandos son iguales, dado que se corresponden con el valor de v en nudos singulares equivalentes. Como $v(K) = v(K')$, si reordenamos los términos restantes obtenemos la fórmula (3.7) como queríamos. \square

Como vimos en la Proposición 3.2.4, el invariante de Vassiliev v_0 de orden 0 es esencialmente único. Además, mostramos en la Proposición 3.2.5 que no existen invariantes de Vassiliev de orden 1. Veamos que usando las mismas ideas, podemos determinar el invariante de Vassiliev de orden exacto 2.

Sabemos que cualquier nudo K puede ser transformado en el nudo trivial mediante cambios de cruce. Al evaluar en un invariante de tipo finito v , la diferencia entre dos nudos conectados por un cambio de cruce es un nudo con un vértice. Luego $v(K)$ puede escribirse como una suma de v evaluado en el nudo trivial y varios otros nudos con un vértice. Siguiendo la misma idea, podríamos llevar cualquier nudo con un vértice al “nudo singular infinito” de la Figura 3.1(a), generando en el proceso nudos con dos vértices.

La idea es poder expresar el valor de v_2 sobre un nudo K arbitrario en función de nudos singulares sencillos. Dado que el invariante de Vassiliev de orden 2, v_2 , se anula en nudos singulares con más de dos vértices, podemos escribir:

$$v_2(K) = av_2 \left(\text{Diagram 13} \right) + bv_2 \left(\text{Diagram 14} \right) + \sum_{K_i^2} c_i v_2(K_i^2), \tag{3.10}$$

donde la sumatoria se toma (en principio) sobre todos los posibles nudos singulares no equivalentes con exactamente dos vértices.

Ejemplo 3.4.2. Supongamos que K es el nudo trébol. Para llegar a una expresión de $v_2(K)$ de la forma de 3.10 vamos aplicar de forma iterada la relación de Vassiliev en los cruces positivos señalados. Cada par de flechas indica que el valor de v_2 sobre el nudo superior se escribe como una suma de los dos que tiene debajo.

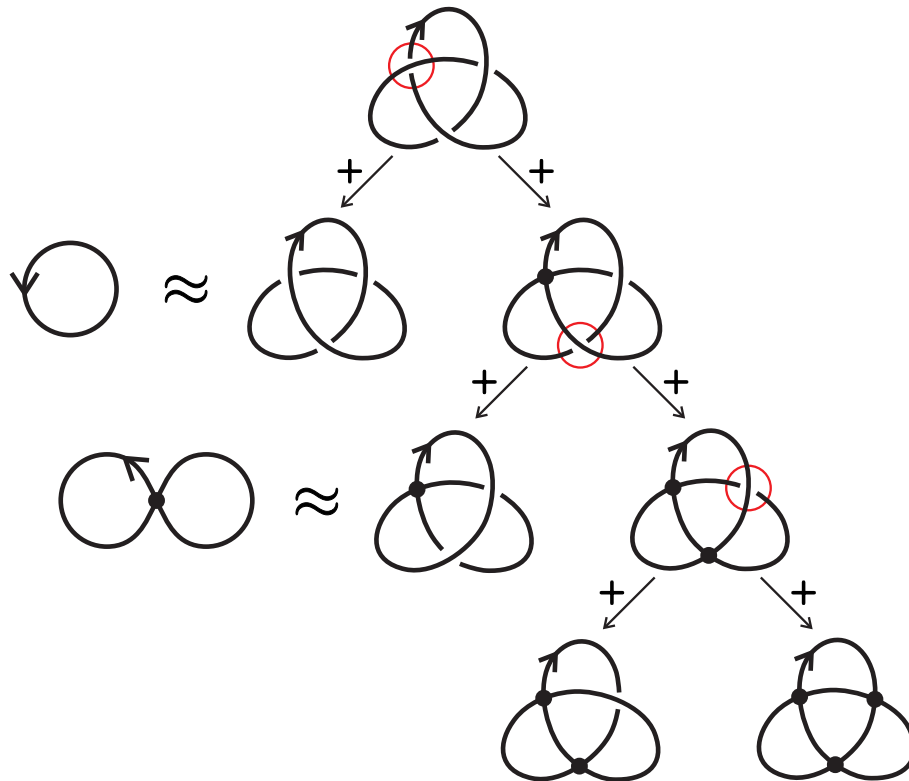


Figura 3.6

Dado que $v_2 \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \right) = 0$, podemos escribir como queríamos

$$v_2(K) = v_2 \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \right) + v_2 \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \right) + v_2 \left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ \curvearrowright \end{array} \right).$$

Al realizar este proceso para un nudo arbitrario, tenemos que tener en cuenta que podrían aparecer diversos nudos con dos singularidades. Sin embargo, veremos a continuación que esencialmente nos importan solo dos de ellos.

Tomemos un nudo con dos vértices. Sabemos que al aplicar cambios de cruce el valor de v_2 no varía, puesto que la diferencia entre ambos nudos coincide con el valor de v_2 sobre un nudo con tres vértices, que es cero. Es decir que, al evaluar v_2 sobre un nudo con dos vértices, en algún sentido podemos ignorar la información sobre qué arcos pasan por arriba y cuales por debajo. Nos podemos preguntar entonces, ¿qué información del nudo resulta determinante a la hora de calcular v_2 ? La respuesta es la disposición de los puntos dobles.

Si consideramos a un nudo singular K como una función $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en el caso del invariante v_2 todo lo que necesitamos saber es cuáles son los cuatro puntos a , b , c y d sobre S^1 que tienen la misma imagen. Básicamente, hay dos casos a considerar:

Caso 1 $f(a) = f(b)$ y $f(c) = f(d)$

A pesar que el nudo K y el nudo singular en la Figura 3.7(A) puedan no ser equivalentes, van a tener el mismo valor en v_2 . Por el Proposición 3.2.2 ese valor va a ser cero.

Caso 2 $f(a) = f(c)$ y $f(b) = f(d)$

En este caso, la igualdad (3.11) nos dice que K y el nudo en la Figura 3.7(B) van a tener el mismo valor en v_2 , a pesar de que puedan no ser equivalentes. En efecto, la siguiente igualdad nos muestra que podemos efectuar cambios de cruce sin alterar el valor de v_2 :

$$v_2 \left(\text{Diagram 1} \right) = v_2 \left(\text{Diagram 2} \right) + v_2 \left(\text{Diagram 3} \right) = v_2 \left(\text{Diagram 4} \right). \quad (3.11)$$

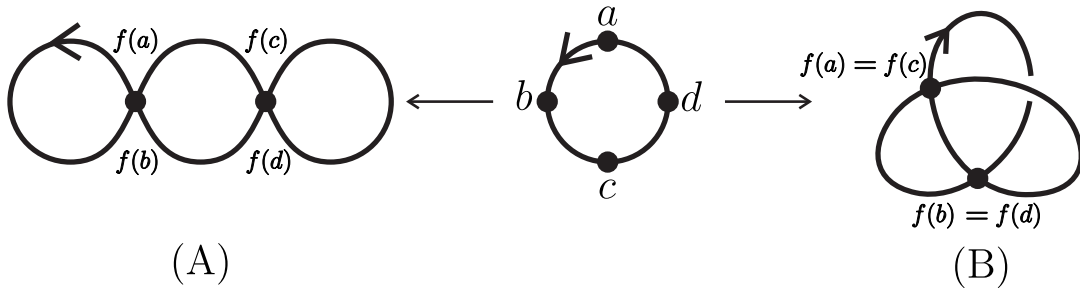


Figura 3.7

Esto quiere decir que podemos escribir un poco mejor la Ec. 3.10. Dado v_2 y un nudo K arbitrario,

$$v_2(K) = av_2 \left(\text{Diagram 1} \right) + bv_2 \left(\text{Diagram 2} \right) + cv_2 \left(\text{Diagram 3} \right) + dv_2 \left(\text{Diagram 4} \right).$$

Por la Proposición 3.2.2, tenemos que $v_2 \left(\text{Diagram 2} \right) = v_2 \left(\text{Diagram 3} \right) = 0$; luego v_2 queda determinado por $v_2 \left(\text{Diagram 1} \right)$ y $v_2 \left(\text{Diagram 4} \right)$. Sin embargo, al igual que con los invariantes polinomiales, es natural asignar a cualquier invariante de Vassiliev de orden n ($n \geq 2$) el valor cero sobre el nudo trivial,

$$v_n \left(\text{Diagram 1} \right) = 0.$$

Por lo tanto, se sigue que $v_2(K)$ queda completamente determinado por el valor $v_2\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right)$. Es decir, v_2 es *único*, en el sentido de que el espacio vectorial $\mathcal{V}_2/\mathcal{V}_1$ de invariantes de Vassiliev de orden (exactamente) 2 tiene dimensión 1. Asignemos entonces

$$v_2\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right) = 1.$$

Volvamos por un momento a los casos (A) y (B) de la Figura 3.7. Estas posibles configuraciones de los vértices de un nudo pueden representarse con los que llamaremos *diagramas de cuerdas*. En el caso anterior, vamos a asignar el diagrama (A') en la Figure 3.8 al Caso 1 y el diagrama (B') al caso 2. Una vez definido el valor de v_2 sobre cada uno de esos dos diagramas es posible evaluar v_2 en cualquier nudo singular. La tabla de diagramas de cuerda con sus valores en v_2 recibe el nombre (en la bibliografía) de *Actuality Table*.



Figura 3.8: Actuality Table para v_2

El valor $v_2\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \oplus \end{array}\right)$ debe ser cero por la Proposición 3.2.2, mientras que la elección del valor $v_2\left(\begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array}\right)$ es arbitraria siempre y cuando no sea nulo.

En [Mur96, Capítulo 5, §4] se realiza un análisis similar para determinar el invariante de Vassiliev de orden 3, v_3 , donde empieza a jugar un rol importante la fórmula $4T$ del Teorema 3.7.

Es posible seguir construyendo estas tablas para invariantes de Vassiliev de cualquier orden.

Definición 3.4.3. Un *diagrama de cuerdas* de orden o grado n es un círculo orientado con un conjunto distinguido de n pares disjuntos de puntos distintos, considerados salvo difeomorfismos del círculo que preserven la orientación. Al conjunto de todos los diagramas de cuerdas de orden n lo notaremos por \mathbf{A}_n .

En las imágenes de los diagramas vamos a omitir la orientación, asumiendo siempre que está orientado en sentido antihorario.

Ejemplo. Diagramas de cuerdas de orden 1, 2 y 3.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left\{ \text{Diagrama 1} \right\}, \\ \mathbf{A}_2 &= \left\{ \text{Diagrama 2}, \text{Diagrama 3} \right\}, \\ \mathbf{A}_3 &= \left\{ \text{Diagrama 4}, \text{Diagrama 5}, \text{Diagrama 6}, \text{Diagrama 7}, \text{Diagrama 8} \right\}. \end{aligned}$$

Los diagramas de cuerdas son usados para codificar la disposición de los vértices en los nudos singulares.

Definición 3.4.4. El diagrama de cuerdas $\sigma(K) \in \mathbf{A}_n$ de un nudo singular con n puntos dobles se obtiene marcando en el círculo parametrizado los n pares de puntos que tienen por imagen los n puntos dobles del nudo.

Proposición 3.4.5. *El valor de un invariante de Vassiliev v de orden $\leq n$ en un nudo K con n puntos dobles depende únicamente del diagrama de cuerdas de K . Es decir,*

$$\sigma(K_1) = \sigma(K_2) \Rightarrow v(K_1) = v(K_2).$$

Demostración. Supongamos que $\sigma(K_1) = \sigma(K_2)$. Entonces existe una correspondencia unívoca entre las cuerdas de ambos diagramas, y luego entre los vértices de K_1 y K_2 . Acomodemos K_1 y K_2 en \mathbb{R}^3 de forma que coincidan los vértices correspondientes, junto con un entorno de los mismos.

Ahora podemos transformar K_1 en K_2 , mediante deformaciones y cambios de cruce, de forma tal de no mover un pequeño entorno de cada vértice. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que en este proceso solo se crea una cantidad finita de nuevas singularidades. Por la relación de Vassiliev, en cada uno de esos casos el valor de v no cambia, por lo que $v(K_1) = v(K_2)$. \square

Dado que existe una cantidad finita de diagramas de cada orden, la Proposición 3.4.5 implica el siguiente resultado.

Corolario 3.4.6. *El módulo de invariantes de Vassiliev a valores en un anillo \mathcal{R} , de grado a lo sumo n , es finitamente generado sobre \mathcal{R} .*

La Proposición 3.4.5 muestra además que existe una función bien definida $\alpha_n: \mathcal{V}_n \rightarrow \mathcal{R}\mathbf{A}_n$ (el \mathcal{R} -módulo de funciones a valores en \mathcal{R} del conjunto \mathbf{A}_n):

$$\alpha_n(v)(D) = v(K),$$

donde K es un nudo arbitrario con $\sigma(K) = D$.

Para entender al espacio \mathcal{V}_n resulta entonces de utilidad tener una descripción del núcleo y la imagen de α_n . Por las definiciones que dimos, la descripción del núcleo es sencilla: $\ker \alpha_n = \mathcal{V}_{n-1}$. Luego, tenemos un morfismo inyectivo

$$\bar{\alpha}_n: \mathcal{V}_n / \mathcal{V}_{n-1} \rightarrow \mathcal{R}\mathbf{A}_n.$$

El problema de describir la imagen de α_n es mucho más difícil y no lo trataremos en esta tesis. [CDM12, Teorema 4.2.1]

Capítulo 4

Criterios de finitud de invariantes

El problema que surge es determinar cuándo un invariante de nudos es de tipo finito. Un método para mostrar que un invariante u **no** es de tipo finito es, como vimos en el caso del número de desanudamiento, encontrar una sucesión de nudos singulares, con un número creciente de puntos dobles, donde u nunca se anule. En este capítulo, siguiendo a [Tra94], vamos a definir las sucesiones de twists, y sus sucesiones de diferencias, para probar que los invariantes de Vassiliev tienen crecimiento polinomial sobre ellas. De esta forma, eligiendo una sucesión de twists conveniente, vamos a probar que el género, el índice de trenza y el número de desanudamiento no son de tipo finito.

Luego, vamos a aplicar estas técnicas para hacer un análisis del invariante F_G definido en la Sección 2.7 para determinar que el mismo solo puede ser constante o no de tipo finito. Este problema fue formulado en [Alt96] y resuelto en algunos casos específicos. Nosotros vamos a exponer los resultados de [Eis00], donde se da una respuesta definitiva al problema.

4.1. Sucesiones de twists

Definición 4.1.1. Una sucesión de nudos singulares $\{K_i\}$, indexados por $i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, es una *sucesión de twists*, o *t-sucesión*, si los nudos K_i son idénticos salvo una región donde localmente se ven como en la Figura 4.1 o Figura 4.2. Las llamamos *t-sucesión vertical* u *horizontal* respectivamente.

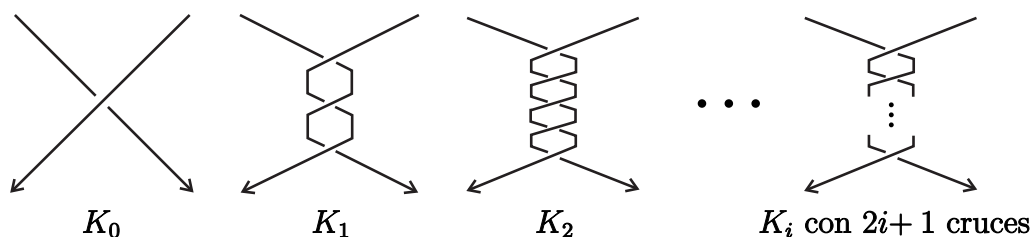
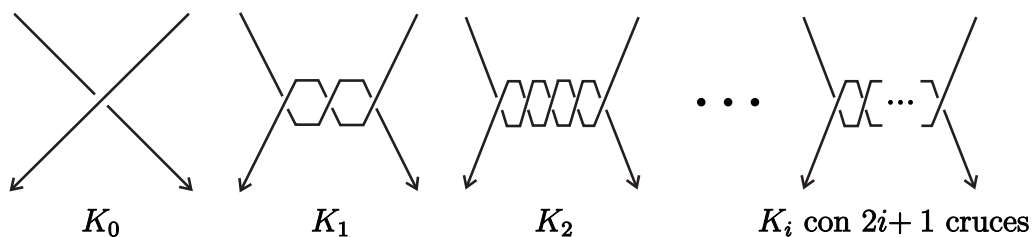
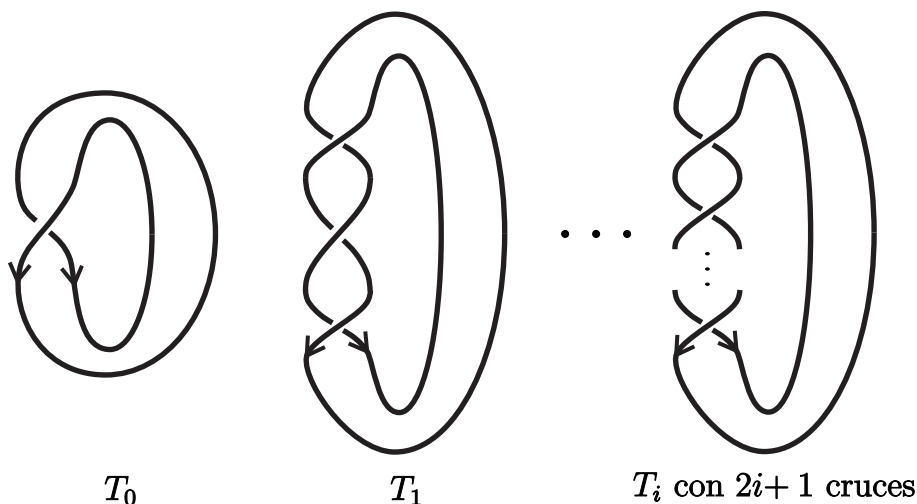


Figura 4.1: Diagrama local de una t -sucesión vertical

Figura 4.2: Diagrama local de una t -sucesión horizontal

Ejemplo 4.1.2. Los siguientes son ejemplos de t -sucesiones

- 1) La sucesión $\{T_i\}$ de nudos toro $(2i + 1, 2)$.

Figura 4.3: La t -sucesión vertical $\{T_i\}$

- 2) Una t -sucesión horizontal $\{K_i\}$. Notar que K_0 tiene un cruce negativo en la región del twist.

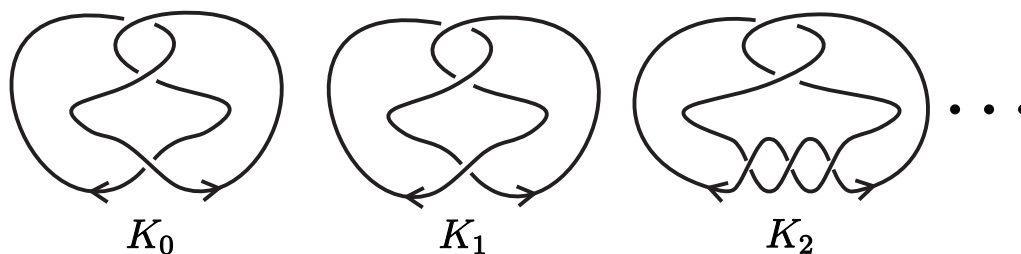


Figura 4.4

Observación. Es fácil ver que si cambiamos un cruce del twist en K_i , con $i \geq 1$, obtenemos el nudo K_{i-1} . El proceso es similar al que realizamos para calcular el polinomio de Conway de los links toro en la Sección 2.3.1.

Definición 4.1.3. La *sucesión de diferencias*, o Δ -sucesión, de una t -sucesión $\{K_i\}$ es la sucesión de nudos singulares $\{\Delta K_i\}$ que se obtiene definiendo ΔK_i como K_{i+1} con uno de los cruces del twist aplastado, es decir transformando uno de los cruces en un punto doble.

Notemos que esta definición es independiente de qué cruce aplastamos, dado que podemos mover un cruce aplastado a cualquier posición realizando simplemente medios giros en el twist (ver Figura 4.5). La secuencia $\{\Delta K_i\}$ se ve localmente como en la Figura 4.6.

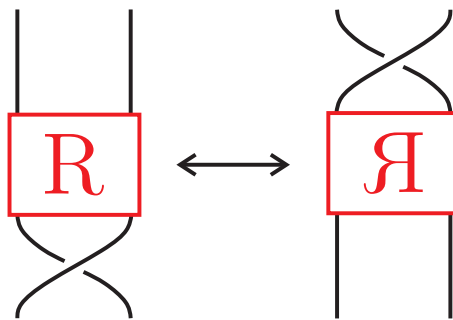


Figura 4.5

Ambos diagramas están conectados por un medio giro del rectángulo rojo.

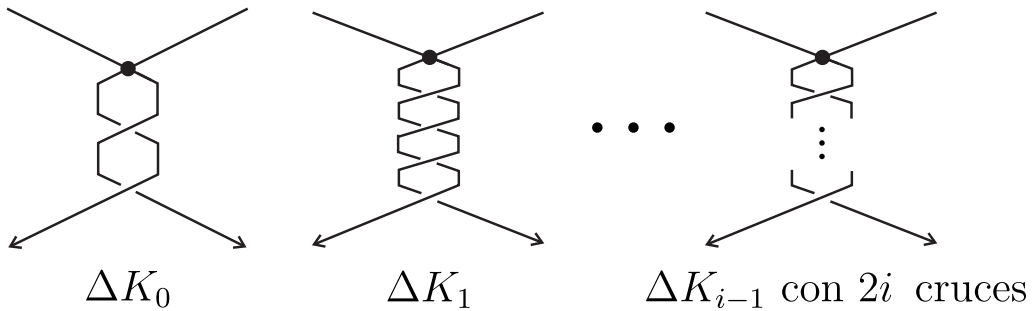


Figura 4.6

Sucesión de diferencias de la t -sucesión de la Figura 4.1

La sucesión los nudos singulares $\{\Delta K_i\}$ es a su vez una t -sucesión, donde los términos también difieren uno a otro en un cambio de cruce. Para cada $j \geq 2$, podemos definir la j -ésima Δ -sucesión de $\{K_i\}$ de forma inductiva, notando por $\Delta^j K_i$ al nudo singular que se obtiene al aplastar un cruce del twist de $\Delta^{j-1} K_{i+1}$.

Vamos a necesitar también una noción de sucesión de diferencias para una sucesión numérica. (Notemos no hay ambigüedad en la nomenclatura dado que siempre vamos a especificar si la aplicamos sobre nudos o números.)

Definición 4.1.4. Dada una sucesión numérica $\{a_i\}_{i \geq 0}$ definimos su primera *sucesión de diferencias* $\{\Delta a_i\}_{i \geq 0}$ como $\Delta a_i = a_{i+1} - a_i$. En general, vamos a definir para cada $j \geq 2$, de forma inductiva, la j -ésima sucesión de diferencias de $\{a_i\}_{i \geq 0}$ como

$$\Delta^j a_i = \Delta^{j-1} a_{i+1} - \Delta^{j-1} a_i.$$

Hagamos algunas observaciones:

- (i) Todos los nudos en una t -sucesión tienen la misma cantidad de puntos dobles. Más aún, si la t -sucesión $\{K_i\}$ consiste de nudos singulares con m vértices, entonces la j -ésima sucesión de diferencias consiste de nudos singulares con $j + m$ vértices.
- (ii) Si u es un invariante de nudos, como $\Delta^{j-1}K_{i+1}$ y $\Delta^{j-1}K_i$ difieren en un cambio de cruce, la relación de Vassiliev implica que

$$u(\Delta^j K_i) = u(\Delta^{j-1} K_{i+1}) - u(\Delta^{j-1} K_i). \quad (4.1)$$

Esto nos permite establecer una conexión entre las sucesiones de diferencias de $\{K_i\}$ y las de $\{u(K_i)\}$. Más precisamente, se tiene que

$$\Delta^j u(K_i) = u(\Delta^j K_i), \quad (4.2)$$

donde $\Delta^j u(K_i)$ se define inductivamente por $\Delta u(K_i) = u(K_{i+1}) - u(K_i)$ y $\Delta^j u(K_i) = \Delta^{j-1} u(K_{i+1}) - \Delta^{j-1} u(K_i)$ para $j \geq 2$. Luego, evaluar u en la t -sucesión $\{K_i\}$ y luego tomar sucesiones de diferencias es lo mismo que evaluar u en sucesiones de diferencias de $\{K_i\}$.

- (iii) Si v es un invariante de Vassiliev de orden n y $\{K_i\}$ es una t -sucesión con n puntos dobles, entonces v es constante sobre $\{K_i\}$. Esto es claro pues los nudos singulares K_i y K_{i+1} difieren en un cambio de cruce y, por lo tanto,

$$v(K_{i+1}) - v(K_i) = v(\Delta K_i) = 0,$$

dado que ΔK_i tiene $n + 1$ vértices y v de orden n .

Podemos usar estas observaciones para probar el siguiente lema.

Lema 4.1.5. *Si v es un invariante de Vassiliev de orden n y $\{K_i\}$ es una t -sucesión, entonces existe un entero $k \leq n + 1$ tal que la k -ésima sucesión de diferencias de $\{v(K_i)\}$, es decir $\{\Delta^k v(K_i)\}$, se anula.*

Demostración. Dada una t -sucesión $\{K_i\}$, la observación (ii) implica que $\Delta^j v(K_i) = v(\Delta^j K_i)$. Además, el nudo singular $\Delta^j K_i$ tiene al menos j puntos dobles, por la observación (i). Dado que v es de orden n , se anula en nudos con mas de n puntos dobles; luego basta con tomar $k = (n + 1) - j$. \square

El Lema 4.1.5 nos provee de un método para determinar cuándo un invariante de nudos u no es de tipo finito. Esto es, evaluamos u en una t -sucesión $\{K_i\}$ y consideramos las sucesiones de diferencias $\{\Delta^j v(K_i)\}$. Si estas sucesiones nunca se anulan, entonces u no es un invariante de Vassiliev. De hecho, el lema anterior sugiere realizar un análisis de las tasas de crecimiento de los invariantes de Vassiliev sobre t -sucesiones. Para eso, vamos a hacer uso de la fórmula de Newton para sucesiones de diferencias.

4.2. Fórmula de Newton y crecimiento polinomial

Dada una sucesión de números $\{a_i\}_{i \geq 0}$, la fórmula de Newton da una escritura de a_i en función de los primeros términos de las primeras i sucesiones de diferencias. Más precisamente, tenemos que

$$a_i = \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \Delta^j a_0. \quad \forall i \geq 0. \quad (4.3)$$

Notemos que si la $(n+1)$ -ésima sucesión de diferencias de $\{a_i\}$ se anula, entonces la sucesión $\{a_i\}$ es una función polinomial de grado n **en la variable i** . En efecto, si $\{\Delta^{n+1}a_i\}$ se anula, la fórmula anterior resulta en

$$a_i = \sum_{j=0}^n \binom{i}{j} \Delta^j a_0 \quad \forall i \geq 0 \quad (4.4)$$

y el término de mayor grado es $\binom{i}{n} \Delta^n a_0$; basta con notar que $\binom{i}{j}$ es un polinomio de grado j en la variable i . Recíprocamente, es sencillo ver (haciendo inducción en n) que si $\{a_i\}$ es un polinomio en i de grado n , entonces $\{\Delta^{n+1}a_i\}$ se anula. Usando esta fórmula podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1. *La restricción de un invariante de Vassiliev de orden n a cualquier t -sucesión $\{K_i\}$ es un polinomio en i de grado a lo sumo n .*

Demostración. Sea v un invariante de Vassiliev de orden n y $\{K_i\}$ una t -sucesión. Por el Lema 4.1.5, existe cierto entero $k \leq n+1$ tal que la k -ésima sucesión de diferencias de $\{v(K_i)\}$ se anula. La fórmula de Newton implica entonces que $v|_{\{K_i\}}$ es un polinomio en i de grado menor o igual a $k-1$. \square

Corolario 4.2.2. *Si u es un invariante de nudos y existe una t -sucesión sobre la cual u no tiene crecimiento polinomial, entonces u no es de tipo finito.*

Demostración. Se sigue inmediatamente del Teorema 4.2.1. \square

Corolario 4.2.3. *Si v es un invariante de Vassiliev acotado en toda t -sucesión vertical (respectivamente, horizontal) entonces v es constante.*

Demostración. Sea K un nudo y miramos su diagrama. Alrededor de un cruce p construimos una t -sucesión vertical (respectivamente, horizontal) $\{K_i\}_{i \geq 0}$, donde $K_1 = K$ y K_0 igual al nudo K con el cruce p cambiado. Dado que la aplicación $i \mapsto v(K_i)$ es polinomial y está acotada, debe ser constante. En particular, tenemos que $v(K_0) = v(K_1)$, lo que significa que podemos cambiar el cruce p sin alterar el valor de v . Dado que siempre podemos cambiar cruces para conectar K con el nudo trivial, v resulta constante. \square

El Corolario 4.2.3 nos permite hallar más ejemplos de invariantes que no son de tipo finito: si tomamos un invariante no constante y vemos que está acotado sobre toda t -sucesión vertical (u horizontal) entonces no puede ser de Vassiliev. Veamos por este método que el índice de trenza, el género y el número de desanudamiento no son de tipo finito. En particular, tenemos una demostración alternativa para la Proposición 3.3.3.

Lema 4.2.4. *El índice de trenza está acotado en cualquier t -sucesión vertical.*

Demostración. Dada una t -sucesión vertical $\{K_i\}$, podemos representar sus diagramas localmente como en la Figura 4.1. Aplicando el Teorema 1.5.11 (de Alexander), podemos poner estos diagramas en forma de trenza sin mover la sección del twist: siguiendo el método en la demostración, basta con tomar un punto O a la derecha del twist. De esta forma, el twist queda trenzado alrededor de O y no hace falta moverlo para dejar trenzado alrededor de O el resto del diagrama.

Luego, podemos encontrar una trenza β en n cuerdas tal que cada nudo K_i está representado por la trenza $\beta\sigma_j^{2i}$, donde σ_j^{2i} representa la sección del twist en la trenza. Esto nos da una cota superior para el índice de trenza: $b(K_i) \leq n$ para todo i . \square

Lema 4.2.5. *El género está acotado en cualquier t -sucesión horizontal.*

Demostración. Dada una t -sucesión horizontal $\{K_i\}$, podemos representarla con una secuencia de diagramas como en la Figura 4.2. Sobre estos, aplicamos el algoritmo de Seifert para construir una superficie de Seifert a partir de cada uno de los diagramas. Dado que tanto la cantidad de cruces entre K_i y K_{i+1} como la cantidad de discos de Seifert de sus superficies difieren en 2, la fórmula del Teorema 2.2.3 nos dice que ambas superficies tienen la misma característica de Euler; luego el mismo género g_0 . Esto nos da la cota superior $g(K_i) \leq g_0$ para todo i . \square

Lema 4.2.6. *El número de desanudamiento está acotado en cualquier t -sucesión horizontal.*

Demostración. Vamos a ver que cualquier t -sucesión horizontal $\{K_i\}$ puede ser desanudada de la siguiente manera: empezamos con un diagrama D_0 para el nudo K_0 tal que la secuencia K_i se genera al realizar twists horizontales alrededor de un cruce p como en la Figura 4.2. Viajando a lo largo del diagrama D_0 , empezando y terminando en el arco superior de p , vamos a llamar a un cruce *ascendente* si se recorre primero por debajo y luego por arriba. Notemos por A al conjunto de cruces ascendentes de D_0 , y por D_i^A al diagrama D_i , del nudo K_i , con todos los cruces de A cambiados.

Afirmamos que para cada i el diagrama D_i^A representa al nudo trivial. Luego, podemos concluir que $u(K_i) \leq |A|$ para todo i .

Veamos que, en efecto, los diagramas D_i^A representan el nudo trivial. Cualquier diagrama de nudo D puede ser parametrizado por una inmersión $f: S^1 \rightarrow D \subset \mathbb{R}^2$ (donde todos los cruces serán puntos dobles). Una *función de altura* correspondiente al diagrama parametrizado (D, f) es una aplicación continua $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, en

cada cruce de D , el arco superior tiene una altura mayor que el inferior. Esto es lo mismo que decir que $(f, h): S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ es un nudo parametrizado que se proyecta al diagrama D . Es claro que si podemos construir una función de altura que tenga un único máximo local, entonces el nudo resultante será trivial.

Para cualquier diagrama D_i^A podemos construir una función de altura con un único máximo. Tal función es definida en la Figura 4.7 para el caso $i \geq 1$. Indicamos para algunos puntos del diagrama el valor de la función. Entre estos puntos, tomamos la función estrictamente creciente al ir de Q a P , y estrictamente decreciente de P a Q .

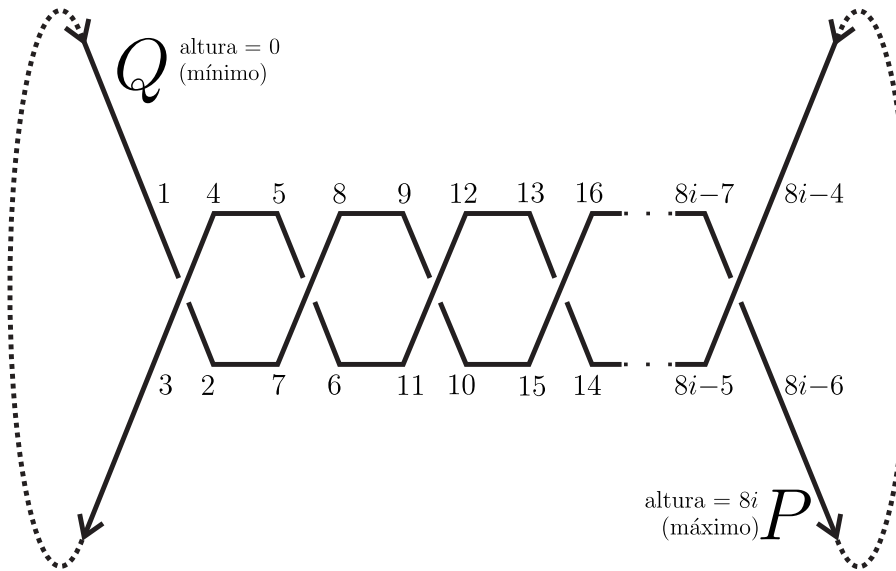


Figura 4.7: Función de altura para el diagrama D_i^A

El hecho de que se puedan mantener los correspondientes crecimiento y decrecimiento en la región punteada del diagrama se justifica en que podemos, en efecto, hacerlo para el diagrama D_0^A , que ya sabemos que es trivial por el Lema 2.1.6. Esto concluye la demostración. \square

Teorema 4.2.7. *Sea v el índice de trenza, el género o el número de desanudamiento. Si un invariante de nudos $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ satisface $|F(K)| \leq \phi(v(K))$ para todo nudo K y cierta función $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, entonces F es constante o no de tipo finito.*

Demostración. Sea v el índice de trenza (o el género, o el número de desanudamiento, respectivamente) y supongamos que $F: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{C}$ es un invariante de Vassiliev que satisface la desigualdad $|F(K)| \leq \phi(v(K))$ para todo nudos K . Vimos en los lemas previos que v está acotado en cualquier t -sucesión vertical (resp. horizontal). Esto implica que F está acotado en cualquier t -sucesión vertical (resp. horizontal). Por el Corolario 4.2.3, F es constante. \square

Observación 4.2.8. (1) En los tres lemas previos, la elección de t -sucesiones verticales u horizontales para cada caso no son arbitrarias.

- El índice de trenza está acotado sobre cualquier t -sucesión vertical, pero en el caso horizontal la mejor cota posible es orden lineal en el índice de la sucesión. Se puede ver que sobre la sucesión del Ejemplo 4.1.2(2), el crecimiento es efectivamente lineal.
 - Lo mismo para el género y el número de desanudamiento: están acotados en cualquier t -sucesión horizontal, pero sobre una vertical la mejor cota es lineal en el índice de la sucesión. Crecimientos lineales ocurren, por ejemplo, en la sucesión $\{T_i\}$ de nudos toro $(2i + 1, 2)$.
- (2) Para poder acotar el número de desanudamiento es de vital importancia que estemos hablando de nudos y no de links. Es decir, el Lema 4.2.6 es falso para links: si L_0 es un link y generamos una t -sucesión alrededor de un cruce entre dos componentes distintas, entonces tenemos que el número de enlazamiento satisface $lk(L_i) = lk(L_0) + i$. Dado que se tiene la desigualdad $|lk| \leq u$, resulta que u no puede estar acotado sobre ninguna t -sucesión de links.

A pesar de la observación anterior, dado que los Lemas 4.2.4 y 4.2.5 siguen valiendo para links, podemos formular una versión más débil del Teorema 4.2.7. Sea \mathcal{L}_μ la clase de clases de equivalencia de links con μ componentes.

Corolario 4.2.9. *Sea $v: \mathcal{L}_\mu \rightarrow \mathcal{N}$ el índice de trenza o el género. Si un invariante de links $F: \mathcal{L}_\mu \rightarrow \mathbb{C}$ satisface $|F(L)| \leq \phi(v(L))$ para todo link $L \in \mathcal{L}_\mu$ y cierta función $\phi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, entonces F es constante o no de tipo finito.*

4.3. La t -sucesión $\{T_i\}$

En la Sección anterior vimos que cualquier invariante de Vassiliev induce una función polinomial sobre cualquier t -sucesión. En esta sección vamos a usar la técnica de las t -sucesiones para estudiar la restricción de los invariantes de tipo finito a la secuencia $\{T_i\}$ de $(2i + 1, 2)$ nudos toro (ver Ejemplo 4.1.2). Más precisamente, vamos a determinar cuándo una función polinomial p sobre $\{T_i\}$ se puede extender a un invariante de tipo finito sobre todos los nudos.

Sea $p: \{T_i\} \rightarrow \mathbb{Z}$ una función polinomial **en la variable i** de grado n , lo cual implica que la $(n + 1)$ -ésima sucesión de diferencias de $\{p(T_i)\}$ se anula. La fórmula de Newton nos dice entonces que $\{p(T_i)\}$ está determinado por los valores $p(T_0), \Delta p(T_0), \Delta^2 p(T_0), \dots, \Delta^n p(T_0)$. La pregunta que nos hacemos ahora es: ¿para qué valores $p(T_0), \Delta p(T_0), \dots, \Delta^n p(T_0)$ puede extenderse la función p a un invariante de Vassiliev sobre todos los nudos?

Para responder esta pregunta, recordemos que $p(T_0), \Delta p(T_0), \dots, \Delta^n p(T_0)$ representan a p evaluado en el primer nudo de las primeras n sucesiones de diferencias de $\{T_i\}$. Notemos por T_i^j al nudo toro $(2i + 1, 2)$ con j cruces aplastados (donde $0 \leq j \leq 2i + 1$). Entonces, $\Delta^i T_0$ es el nudo singular T_i^i (ver Figura 4.8).

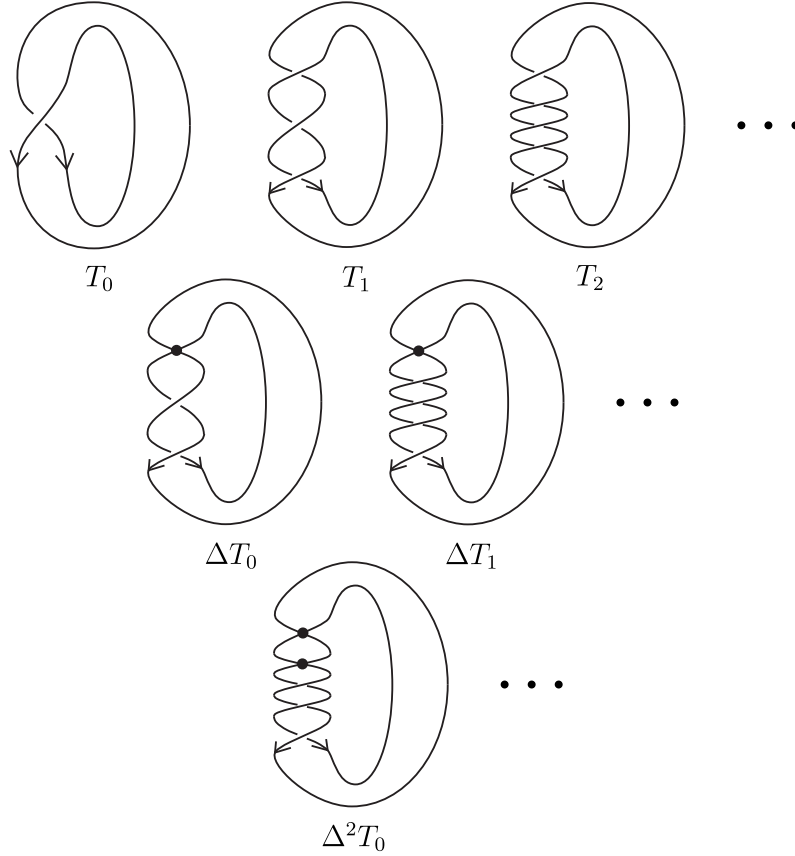


Figura 4.8: Sucesión de diferencias de $\{T_i\}$

Lema 4.3.1. *Sea v un invariante de Vassiliev cuya restricción sobre $\{T_i\}$ es de orden n . Luego, los valores $\Delta v(T_0), \Delta^2 v(T_0), \dots, \Delta^n v(T_0)$ satisfacen la ecuación*

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \Delta^i v(T_0) = 0. \quad (4.5)$$

Demostración. Con la notación que introdujimos, tenemos que $\Delta^i v(T_0) = v(T_i^i)$ y la Ec. (4.5) se reescribe como

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i v(T_i^i) = 0. \quad (4.6)$$

Luego, basta ver que

$$v(T_n^{n+1}) = (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i v(T_i^i), \quad (4.7)$$

dado que T_n^{n+1} tiene $n+1$ puntos dobles y $v(T_n^{n+1}) = 0$ por ser v de orden n . Vamos a probar la Ec. (4.7) por inducción en n . Utilizando la relación de Vassiliev tenemos que

$$v(T_i^{j+1}) = v(T_i^j) - v(T_{i-1}^j). \quad (4.8)$$

Luego, para el caso base $n = 1$, la Ec. (4.8) implica que

$$v(T_1^2) = v(T_1^1) - v(T_0^1) = v(T_1^1), \quad (4.9)$$

pues $v(T_0^1) = 0$. Para probar la Ec. (4.7) en el caso general, notemos que de la Ec. (4.8) se sigue que

$$\begin{aligned} v(T_n^{n+1}) &= v(T_n^n) - v(T_{n-1}^n) \\ &= v(T_n^n) - \left((-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i v(T_i^n) \right) \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^n (-1)^i v(T_i^n), \end{aligned}$$

donde en la segunda ecuación usamos la hipótesis inductiva. Esto prueba la Ec. (4.7) y completa la demostración. \square

Corolario 4.3.2. *Si u es un invariante con crecimiento lineal sobre $\{T_i\}$, entonces u no es un invariante de Vassiliev. En particular, el número de cruces no es un invariante de tipo finito.*

Demostración. Al tener u tiene crecimiento lineal, la segunda sucesión de diferencias de $\{u(T_i)\}$ se anula. Luego, $\Delta^i u(T_0) = 0$ para cada $i \geq 2$.

Si fuese también $\Delta u(T_0) = 0$ entonces u no tendría más opción que ser constante sobre $\{T_i\}$. Por lo tanto, $\Delta u(T_0) \neq 0$ y u no satisface la Ec.(4.6) del Lema 4.3.1; en particular u no es invariante de Vassiliev. \square

El Lema 4.3.1 junto con el Corolario 4.3.2 muestran que no todos los polinomios sobre $\{T_i\}$ son la restricción de un invariante de Vassiliev. Además, nos indica cómo puede ser usada la relación de Vassiliev para encontrar condiciones necesarias en polinomios sobre t -sucesiones arbitrarias que se extiendan a invariantes de tipo finito. Vamos a mostrar ahora que la Ec. (4.5) es suficiente para asegurar que un polinomio sobre $\{T_i\}$ se extiende a un invariante de Vassiliev.

Teorema 4.3.3. *Un invariante p definido sobre $\{T_i\}$ es la restricción de un invariante de tipo finito v sobre todos los nudos si y solo si la sucesión de diferencias de $\{p(T_i)\}$ se anula para cierto $n + 1$ y*

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i p(T_i^n) = 0. \quad (4.10)$$

Demostración. Como vimos en el Teorema 4.2.1, cualquier invariante de orden n sobre una t -sucesión induce un polinomio de grado a lo sumo n ; es decir, que el espacio $\mathcal{V}_n|_{\{T_i\}}$ está incluido en $\mathcal{R}_n[x]$, el espacio de polinomios de grado a lo sumo n . Más aún, por el Lema 4.3.1, resulta que

$$\mathcal{V}_n|_{\{T_i\}} \subseteq \left\{ p: \{T_i\} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \{\Delta^{n+1} p(T_i)\} \text{ es nula y } p \text{ satisface la Ec. (4.10)} \right\} \subsetneq \mathcal{R}_n[x],$$

donde la última contención es estricta pues ya vimos que las funciones con crecimiento lineal sobre $\{T_i\}$ no verifican la Ec. (4.10).

Observación. Estamos haciendo un pequeño abuso de notación en esa última contención: si bien las funciones p no son polinomios en el sentido habitual, se identifican con estos tomando la aplicación inyectiva $i \mapsto x$. Esto tiene sentido ya que, como dijimos, las funciones p son polinomiales en la variable i .

Notemos que el espacio de polinomios de grado a lo sumo n tiene dimensión $n + 1$. Luego, para probar el teorema basta con ver que $\mathcal{V}_n|_{\{T_i\}}$ tiene dimensión *al menos* n para $n \geq 2$.

En las Propositiones 3.2.4 y 3.2.5 vimos que sólo existe un invariante de orden 0 (constante) y ninguno de orden 1. Luego, en la Proposition 3.3.1 probamos que, para cada $n \geq 2$, el n -ésimo coeficiente del polinomio de Conway es invariante de Vassiliev de orden exactamente n y sabemos además que no se anula sobre $\{T_i\}$ para cualquier $n \geq 2$. Por lo tanto, al incrementar el orden de los invariantes desde $\mathcal{V}_n|_{\{T_i\}}$ hacia $\mathcal{V}_{n+1}|_{\{T_i\}}$ se introduce un nuevo invariante para cada $n \geq 1$ (luego, una nueva dimensión). Esto prueba que $\dim(\mathcal{V}_n|_{\{T_i\}}) = n$ y concluye la demostración. \square

4.4. Aplicación a representaciones del grupo de un nudo

Para finalizar, vamos a aplicar todo lo visto sobre invariantes de Vassiliev para determinar que el invariante $F_G(K) = |\text{Hom}(\pi(K), G)|$ es constante o no de tipo finito. Luego, siguiendo a [Isa08], haremos una pequeña introducción a la teoría de grupos nilpotentes y concluiremos que F_G es constante si y solo si el grupo G es nilpotente.

Comenzamos probando el siguiente resultado.

Teorema 4.4.1. *Dado cualquier grupo finito G , el invariante de nudos F_G es constante o no de tipo finito.*

Demostración. Sea $b(K) = n_0$ el índice de trenza del nudo K . La presentación de Wirtinger, obtenida a partir la clausura de una n_0 -trenza equivalente a K , muestra que el grupo de nudo $\pi(K)$ puede ser presentado con $b(K)$ generadores.

Para ver esto, consideremos primero una trenza trivial en n_0 cuerdas y etiquetemos cada una de ellas como x_1, x_2, \dots, x_{n_0} . Utilizando la presentación de Wirtinger, podemos ver que el grupo fundamental de la clausura de esa trenza admite una presentación con generadores x_1, x_2, \dots, x_{n_0} y sin relaciones, dado que no hay cruces en el diagrama. Si ahora trenzamos algún par de cuerdas, digamos por ejemplo x_1 con x_2 , se agregará una nueva arista al diagrama de la trenza pero sabemos que la etiqueta que lleve esa arista, mirando las relaciones de la presentación de Wirtinger, va a ser $x_1 x_2 x_1^{-1}$ (ver Figura 4.9). Es decir, al ir trenzando las cuerdas x_1, x_2, \dots, x_{n_0} de la trenza trivial, hasta obtener una trenza que represente a K , se agregan relaciones a la presentación pero la cantidad de generadores se mantiene fija (a lo sumo, podremos quitar algunos usando las relaciones).

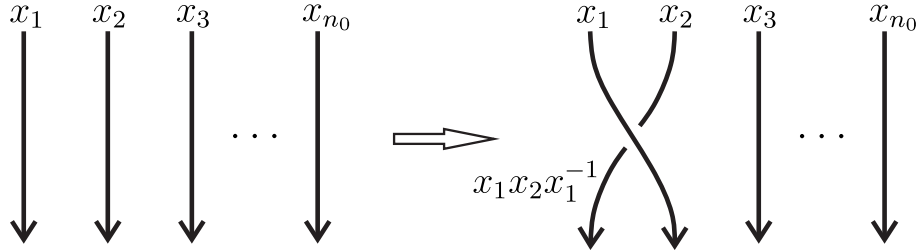


Figura 4.9

Dado que un morfismo $\pi(K) \rightarrow G$ queda determinado por la imagen de un conjunto de generadores, al ser G finito tenemos a lo sumo $|G|^{b(K)}$ formas de definir un morfismo. Esto implica que se tiene la desigualdad $F_G(K) \leq |G|^{b(K)}$. Por el Teorema 4.2.7, concluimos que F_G es constante o no de tipo finito. \square

Vamos ahora a dar condiciones necesarias y suficientes sobre un grupo G para que F_G sea constante. Este problema está íntimamente relacionado con el de saber cuándo un grupo puede realizarse como la imagen de un morfismo de cierto grupo de nudo; en el Teorema 2.7.4 dimos una respuesta a este problema. Juntando ese resultado con la teoría de invariantes de Vassiliev, obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 4.4.2. *El invariante F_G no es de tipo finito si y solo si G contiene un subgrupo no-abeliano $H \leq G$ tal que $H = \langle x^H \rangle$ para algún elemento $x \in H$.*

Equivalentemente (por el Teorema 4.4.1), el invariante es constante si y solo si todos los subgrupos $H \leq G$ que satisfacen $H = \langle x^H \rangle$ son abelianos, luego cíclicos.

Demostración. Para cualquier nudo K hay exactamente $|G|$ representaciones que se factorizan a través de la abelianización $\pi(K)_{ab} \cong \mathbb{Z}$, ya que el cociente $\pi(K)_{ab} = \pi(K)/[\pi(K), \pi(K)]$ es cíclico (todos los generadores de la presentación de Wirtinger son conjugados de uno solo de ellos). Dado que $\pi(\bigcirc) \cong \mathbb{Z}$, esto implica que $F_G(K) \geq F_G(\bigcirc) = |G|$ (donde \bigcirc es el nudo trivial).

Supongamos que el invariante F_G no es constante y sea K un nudo con

$$F_G(K) > F_G(\bigcirc) = |G|$$

. Luego, tiene que haber algún morfismo $\varphi: \pi(K) \rightarrow G$ que no se factorice a través del abelianizado. La imagen $H = \text{Im}(\varphi)$ es entonces necesariamente no abeliana y satisface $H = \langle x^H \rangle$, donde x es la imagen de cualquier generador.

Supongamos ahora que G contiene un subgrupo no abeliano $H = \langle x^H \rangle$. Por el Teorema 2.7.4 existe un nudo K y un morfismo $\pi(K) \rightarrow H \hookrightarrow G$, que no se factoriza a través del abelianizado. Esto implica que $F_G(K) > F_G(\bigcirc)$ y el invariante F_G no puede ser constante. \square

4.4.1. Grupos nilpotentes

Vamos a reescribir los resultados anteriores en términos de teoría de grupos. De acá en adelante vamos a suponer siempre que todos los grupos son finitos.

Dados dos subgrupos S y H de G , definimos $\langle S^H \rangle$ como el subgrupo generado por los elementos s^h , con $s \in S$ y $h \in H$. En particular, para un subgrupo cíclico $S = \langle x \rangle$, tenemos $\langle S^H \rangle = \langle x^H \rangle$.

El siguiente lema establece la primera conexión entre el Corolario 4.4.2 y la teoría de grupos nilpotentes. Primero, vamos a introducir la noción de *subnormalidad*.

Definición 4.4.3. Dado un grupo G , un subgrupo S se dice *subnormal en G* si existen subgrupos H_i de G , $0 \leq i \leq r$, tales que

$$S = G_0 \triangleleft G_1 \triangleleft \cdots \triangleleft G_r = G.$$

En tal caso, notamos $S \triangleleft\triangleleft G$.

Lema 4.4.4. Dado un grupo G y un subgrupo $S \leq G$ las siguientes dos condiciones son equivalentes:

- (1) El único subgrupo $H \leq G$ que satisface $H = \langle S^H \rangle$ es el grupo S .
- (2) El grupo S es subnormal en G .

Demostración. Solo por comodidad, vamos a invertir los índices en la definición de subnormalidad, es decir $S = G_r \triangleleft G_{r-1} \triangleleft \cdots \triangleleft G_0 = G$.

(1) \Rightarrow (2) Podemos construir una sucesión subnormal empezando con $G_0 = G$ y definiendo inductivamente $G_{k+1} := \langle S^{G_k} \rangle$ (es claro que $G_{k+1} \triangleleft G_k$ por definición). Dado que G es finito, esta sucesión debe estancarse, es decir $G_{n+1} = G_n$ para algún n . Luego, $G_n = \langle S^{G_n} \rangle$ y por la hipótesis (1) podemos concluir que $G_n = S$.

(2) \Rightarrow (1) Supongamos que tenemos una sucesión como en (2) y un subgrupo $H = \langle S^H \rangle$; en particular, $S \leq H$. Dado que $H \leq G_0$, se tiene que $H = \langle S^H \rangle \leq \langle S^{G_0} \rangle \leq G_1$, donde la última inclusión se sigue de que G_1 contiene a S y es normal en G_0 . Podemos reiterar el argumento: como $H \leq G_1$, tenemos $H = \langle S^H \rangle \leq \langle S^{G_1} \rangle \leq G_2$. Continuando de la misma forma, llegamos a $H \leq G_n = S$, lo cual prueba $H = S$. \square

Vamos a introducir ahora la noción *grupo nilpotente*. Para eso, necesitamos unas definiciones previas.

Dado un grupo G , una colección finita $\{N_i\}$ de subgrupos normales en G se dice una *serie normal de G* si satisface

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_r = G.$$

Una serie normal se dice *serie central* si además se tiene que

$$N_i/N_{i-1} \subseteq \mathbf{Z}(G/N_{i-1})$$

para cada $1 \leq i \leq r$, donde \mathbf{Z} indica el centro de un grupo.

Definición 4.4.5. Un grupo G se dice *nilpotente* si admite una serie central.

Dado un grupo G arbitrario, podemos intentar construir una serie central de la siguiente forma. Empezamos definiendo $Z_0 = 1$ y $Z_1 = \mathbf{Z}(G)$. El segundo término de la serie, Z_2 , se define como el único subgrupo tal que $Z_2/Z_1 = \mathbf{Z}(G/Z_1)$. Notemos que existe un tal Z_2 por el teorema de correspondencia entre los subgrupos de G que contienen a cierto subgrupo normal N y los de G/N . Además, como el centro de cualquier grupo es un subgrupo normal, Z_2 resulta normal en G . Continuando, para cada $n > 0$ podemos definir inductivamente Z_n como el único subgrupo normal en G que verifica $Z_n/Z_{n-1} = \mathbf{Z}(G/Z_{n-1})$. La cadena de subgrupos normales

$$1 = Z_0 \subseteq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots$$

construida de esta forma se llama *serie central superior* de G . Notemos que, en general, la serie central superior podría no ser una serie central dado que podría darse que $Z_i < G$ para todo i . Pero si $Z_r = G$ para algún r , entonces $\{Z_i : 0 \leq i \leq r\}$ será una serie central, y en particular G nilpotente. Recíprocamente, veamos que si G es nilpotente entonces la serie central superior de G es una serie central. (El resultado se mantiene para grupos no necesariamente finitos, ver [Isa08, Teorema 1.21].)

Lema 4.4.6. *Sea G un grupo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) G es nilpotente.
- (2) Si $\varphi: G \rightarrow H$ es un epimorfismo, donde H es no trivial, entonces H tiene centro no trivial
- (3) G aparece un término de la serie central superior.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Si tomamos una serie central

$$1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \dots \subseteq N_r = G,$$

es claro que los subgrupos $\varphi(N_i)$ dan una serie central para H ; luego H es nilpotente. Además, como el primer término no trivial de una serie central está contenido en el centro del grupo, se sigue que cualquier grupo nilpotente no trivial tiene centro no trivial. Juntando ambas cosas, tenemos la implicación.

(2) \Rightarrow (3) Tomemos Z_i un término de la serie central superior con $Z_i < G$ y consideremos la aplicación no trivial $G \twoheadrightarrow G/Z_i$. Por (2) resulta que $Z_{i+1}/Z_i = \mathbf{Z}(G/Z_i)$ es no trivial; luego $Z_i < Z_{i+1}$. Dado que G es finito y los términos de la serie central superior son estrictamente crecientes, la serie debe estancarse en G en algún momento.

(3) \Rightarrow (1) Como ya observamos, (3) garantiza que la serie central superior de G sea en realidad una serie central; luego G es nilpotente. \square

El siguiente teorema nos provee de una propiedad muy útil de los grupos nilpotentes. Dado un grupo G y un subgrupo H , definimos el *normalizador de H en G* , $\mathbf{N}_G(H)$, como el mayor subgrupo de G en el cual H es normal. Probemos antes el siguiente lema.

Lema 4.4.7. *Sea G un grupo y sean N y H subgrupos, con N normal en G y $N \subseteq H$. Luego, se verifica la siguiente igualdad*

$$\mathbf{N}_G(H)/N = \mathbf{N}_{G/N}(H/N).$$

Demostración. Para aliviar la notación, vamos a escribir $\overline{K} = K/N$ para cualquier subgrupo K con $N \subseteq K$.

El teorema de correspondencia nos da información sobre la normalidad de los subgrupos: si $N \subseteq H \subseteq K \subseteq G$, entonces $H \triangleleft K$ si y solo si $\overline{H} \triangleleft \overline{K}$. En particular, dado que $H \triangleleft \mathbf{N}_G(H)$, tenemos que $\overline{H} \triangleleft \overline{\mathbf{N}_G(H)}$. Luego, $\overline{\mathbf{N}_G(H)} \subseteq \mathbf{N}_{\overline{G}}(\overline{H})$ por maximalidad del normalizador.

Veamos ahora la otra contención. Dado que $\mathbf{N}_{\overline{G}}(\overline{H})$ es un subgrupo de \overline{G} , por el teorema de correspondencia existe un único subgrupo U , con $N \subseteq U \subseteq G$, tal que $\mathbf{N}_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{U}$. Entonces, $\overline{H} \triangleleft \overline{U}$, y luego $H \triangleleft U$ y $U \subseteq \mathbf{N}_G(H)$. Por lo tanto, $\mathbf{N}_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{U} \subseteq \overline{\mathbf{N}_G(H)}$ como queríamos. \square

Teorema 4.4.8. *Sea G un grupo nilpotente y sea H un subgrupo propio de G . Entonces $H < \mathbf{N}_G(H)$, es decir el normalizador de H en G contiene propiamente a H .*

Demostración. Como G es nilpotente, admite una serie central $\{N_i: 0 \leq i \leq r\}$, donde $N_0 = 1 \subseteq H$ y $N_r = G \not\subseteq H$. Luego, existe cierto índice k , con $0 \leq k < r$ tal que $N_k \subseteq H$ pero $N_{k+1} \not\subseteq H$. Vamos a probar que $N_{k+1} \subseteq \mathbf{N}_G(H)$, lo cual implicará que $H < \mathbf{N}_G(H)$ como queríamos.

Notemos, al igual que antes, $\overline{K} = K/N_k$ para cualquier subgrupo K con $N_k \subseteq K$. Dado que los subgrupos N_i forman una serie central, tenemos que

$$\overline{N_{k+1}} \subseteq \mathbf{Z}(\overline{G}) \subseteq \mathbf{N}_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{\mathbf{N}_G(H)},$$

donde la igualdad se sigue del Lema previo, pues $N_k \subseteq H$. Como $N_k \subseteq \mathbf{N}_G(H)$, podemos remover las barras y obtenemos $N_{k+1} \subseteq \mathbf{N}_G(H)$, como queríamos. \square

Veamos ahora una familia importante de grupos que resulta nilpotente.

Proposición 4.4.9. *Si G es un p -grupo finito entonces G es nilpotente.*

Demostración. Sea G un p -grupo de orden > 1 ; sabemos que $\mathbf{Z}(G) \neq 1$. Haciendo inducción en $|G|$, resulta que $G/\mathbf{Z}(G)$ es nilpotente. Si tomamos las preimágenes de los términos de la serie central de $G/\mathbf{Z}(G)$ bajo el morfismo natural $G \rightarrow G/\mathbf{Z}(G)$, y agregamos el término inicial $\{1\}$, obtenemos una serie central de G . \square

El siguiente teorema nos dá una buena cantidad de propiedades equivalentes a la nilpotencia, que solo son válidas cuando G es finito. En particular, nos dá una conexión entre la teoría de Sylow y la de grupos nilpotentes. Recordemos antes una propiedad de los subgrupos de Sylow.

Lema 4.4.10. *[Isa08, Lema 1.13] Sea $N \triangleleft G$, con N finito, y supongamos que $P \in \text{Syl}_p(N)$. Entonces $G = \mathbf{N}_G(P)N$.*

Teorema 4.4.11. *Sea G un grupo finito. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (1) G es nilpotente
- (2) $\mathbf{N}_G(H) > H$ para todo subgrupo propio $H < G$.
- (3) Todo subgrupo maximal de G es normal.
- (4) Todo subgrupo de Sylow de G es normal.
- (5) G es el producto directo de sus subgrupos de Sylow no triviales.

Demostración. (1) \Rightarrow (2) Ya fue probado (para grupos no necesariamente finitos) en el Teorema 4.4.8.

(2) \Rightarrow (3) Sea H maximal en G . Por (2), $H < \mathbf{N}_G(H)$ y al ser H maximal debe ser $\mathbf{N}_G(H) = G$. Luego, H es normal en G .

(3) \Rightarrow (4) Sea $P \in \text{Syl}_p(G)$ un p subgrupo de Sylow para cierto p primo. Supongamos que P no es normal en G , es decir que $\mathbf{N}_G(P)$ es propio en G . Luego está contenido en cierto subgrupo maximal M que, por hipótesis, es normal en G . Dado que $P \in \text{Syl}_p(M)$, tenemos por el Lema 4.4.10 que $G = \mathbf{N}_G(P)M \subseteq M$, y esto es una contradicción por la maximalidad de M . Por lo tanto $\mathbf{N}_G(P) = G$ y P es normal en G .

(4) \Rightarrow (5) Dado que cada subgrupo de Sylow de G es normal, hay exactamente un p -subgrupo de Sylow para cada primo p , dado que son todos conjugados. Es claro que el producto de los subgrupos de Sylow es directo y debe ser igual a G .

(5) \Rightarrow (1) Sabemos que los subgrupos de Sylow de G son nilpotentes por la Proposición 4.4.9. Para concluir, basta con notar que un producto directo de grupos nilpotentes es nilpotente. Esto puede verse fácilmente considerando la serie central superior sobre un producto directo, dado que $Z_i(H \times H') = Z_i(H) \times Z_i(H')$. \square

Estamos ahora en condiciones de relacionar los grupos nilpotentes con los subgrupos subnormales mediante la siguiente Proposición.

Proposición 4.4.12. *Sea G un grupo finito. Entonces G es nilpotente si y solo si todo subgrupo de G es subnormal.*

Demostración. Por el Teorema 4.4.8, sabemos que un grupo finito es nilpotente si y solo si $H < \mathbf{N}_G(H)$ para todo subgrupo propio $H < G$.

Supongamos que $H < G$ es subnormal. Entonces podemos escribir $H = G_0 \triangleleft \cdots \triangleleft G_r = G$, con $r > 0$, y podemos asumir que $G_0 < G_1$. Dado que $H = G_0 \triangleleft G_1$, tenemos que $H < G_1 \subseteq \mathbf{N}_G(H)$. Luego, G es nilpotente por la equivalencia (2) del Teorema 4.4.11.

Supongamos ahora que G es nilpotente. Dado $H \subseteq G$, vamos a probar que $H \triangleleft \triangleleft G$ por inducción en el índice $|G : H|$. Si $|G : H| = 1$, entonces $H = G$ y por lo tanto es subnormal. En otro caso, $H < G$ y, por la equivalencia (2) del Teorema 4.4.11, tenemos que $H < \mathbf{N}_G(H)$. Entonces, $|G : \mathbf{N}_G(H)| < |G : H|$ y, por hipótesis inductiva, $\mathbf{N}_G(H) \triangleleft \triangleleft G$. Dado que $H \triangleleft \mathbf{N}_G(H)$, se sigue que H es subnormal en G . \square

El último resultado que nos va a interesar probar sobre grupos nilpotentes es el siguiente:

Lema 4.4.13. *Dado G un grupo finito, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- (1) *El grupo G es nilpotente.*
- (2) *Todo subgrupo de G es subnormal en G .*
- (3) *Todo subgrupo cíclico de G es subnormal en G .*

Notemos que la equivalencia entre las afirmaciones (1) y (2) ya fueron probadas en el Teorema 4.4.12, mientras que la implicación (2) \Rightarrow (3) es trivial. Para poder concluir el Lema vamos a probar que (3) \Rightarrow (2). Antes, necesitamos probar los dos siguientes resultados.

Lema 4.4.14. *Sean M y N dos subgrupos normales de un grupo G tales que $M \cap N = 1$. Entonces los elementos de M conmutan con los de N .*

Demostración. Sean $m \in M$ y $n \in N$ y consideremos el conmutador $c = [m, n] = mn m^{-1} n^{-1}$. Dado que $c = m m^n$ y M es normal, tenemos que $c \in M$. Pero a la vez, $c = n^m n^{-1}$ y luego $c \in N$ pues N es normal. Entonces, $c \in M \cap N = 1$ y por lo tanto $mn = nm$ como queríamos. \square

Teorema 4.4.15. *Sea $S \triangleleft\triangleleft G$, con G un grupo finito. Sea M un subgrupo normal mínimo de G , es decir que $1 \neq M \triangleleft G$ y además M no contiene propiamente a ningún subgrupo normal no trivial de G . Entonces $M \subseteq \mathbf{N}_G(S)$.*

Para probar el Teorema 4.4.15 vamos a necesitar definir el *zócalo* de un grupo finito G , que es simplemente el subgrupo generado por todos los subgrupos normales minimales de G , y lo notamos por $\text{Soc}(G)$. (Recordemos que un subgrupo generado por una colección de subgrupos normales resulta ser el producto de esos subgrupos.)

La propiedad que resulta importante destacar de $\text{Soc}(G)$ es que, si G es finito, cualquier subgrupo normal no trivial N de G contiene un subgrupo normal minimal de G , y por lo tanto $N \cap \text{Soc}(G) > 1$. En particular, si $G > 1$ entonces $\text{Soc}(G) > 1$. Además, $\text{Soc}(G)$ es un subgrupo característico de G , dado que el conjunto de subgrupos normales minimales es invariante por automorfismos de G .

Demostración. Procedemos por inducción en $|G|$. En el caso que $S = G$ el resultado es trivial; supongamos entonces que $S < G$. Dado que $S \triangleleft\triangleleft G$, existe un subgrupo $N \triangleleft G$ tal que $S \triangleleft\triangleleft N < G$ (basta con tomar N el penúltimo término de la serie subnormal de S).

Tenemos dos casos a considerar. Si $M \cap N = 1$, por el Lema 4.4.14 tenemos que $M \subseteq \mathbf{Z}(N) \subseteq \mathbf{Z}(S) \subseteq \mathbf{N}_G(S)$, como queríamos. Luego, podemos suponer que $1 < M \cap N$. Entonces, dado que $M \cap N \subseteq M$ y M es normal minimal en G , tenemos que $M \cap N = M$ y, por lo tanto, $M \subset N$.

Dado que $S \triangleleft\triangleleft N < G$, la hipótesis inductiva nos garantiza que cualquier subgrupo minimal de N normaliza a S . Ahora, tenemos que $M \triangleleft N$ pero no sabemos

si M es normal minimal en N ; por lo tanto no podemos concluir directamente que M normaliza a S . Pero lo que si sabemos es que $\text{Soc}(N)$, que es está generado por todos los subgrupos normales minimales en N , normaliza a S ; luego será suficiente mostrar que $M \subseteq \text{Soc}(N)$.

Observemos primero que $M \cap \text{Soc}(N) > 1$, dado que $1 < M \triangleleft N$. Además, como $N \triangleleft G$ y $\text{Soc}(G)$ es característico en N , resulta que $\text{Soc}(G)$ es normal en G ; luego $M \cap \text{Soc}(G) \triangleleft G$. Pero $1 < M \cap \text{Soc}(G) \subset M$, lo cual implica que $M \cap \text{Soc}(G) = M$ pues M es normal minimal en G . Por lo tanto, $M \subseteq \text{Soc}(G) \subseteq \mathbf{N}_G(S)$ y esto completa la prueba. \square

Finalmente estamos en condiciones de probar que, en grupos finitos, la unión de subgrupos subnormales es subnormal. Con esto, queda completa la demostración del Lema 4.4.13.

Teorema 4.4.16. *Sea G un grupo finito y supongamos que $S, T \triangleleft\triangleleft G$. Entonces $\langle S, T \rangle \triangleleft\triangleleft G$.*

Demostración. Al igual que antes, vamos a proceder por inducción en $|G|$. Dado que podemos asumir sin inconvenientes que $G > 1$, podemos elegir un subgrupo normal minimal M de G . Sea $\overline{G} = G/M$ y observemos que los cocientes \overline{S} y \overline{T} de S y T son subnormales en \overline{G} . (Por el teorema de correspondencia, al cocientar una serie subnormal de S obtenemos una serie subnormal de \overline{S} .) Como $|\overline{G}| < |G|$, podemos aplicar la hipótesis inductiva y concluir que $\langle \overline{S}, \overline{T} \rangle \triangleleft\triangleleft \overline{G}$. Dado que $G \rightarrow G/M$ es un morfismo con núcleo M , se sigue que

$$\langle \overline{S}, \overline{T} \rangle = \overline{\langle S, T \rangle} = \overline{\langle S, T \rangle M},$$

por lo tanto, $\overline{\langle S, T \rangle M} \triangleleft\triangleleft \overline{G}$.

El teorema de correspondencia establece una biyección entre el conjunto de los subgrupos de \overline{G} y el conjunto de aquellos subgrupos de G que contienen a M . Más aún, sabemos que esta biyección preserva normalidad; luego también preserva subnormalidad y podemos concluir que $\langle S, T \rangle M \triangleleft\triangleleft G$. Como M es normal minimal en G , por el Teorema 4.4.15, tenemos que los subgrupos S y T son normalizados por M . Por lo tanto, M normaliza a $\langle S, T \rangle$ y tenemos que

$$\langle S, T \rangle \triangleleft \langle S, T \rangle M \triangleleft\triangleleft G.$$

Luego, $\langle S, T \rangle$ es subnormal en G como queríamos. \square

Estamos ahora en condiciones de decidir si el invariante de nudos F_G es constante o no de tipo finito en relación a la condición de nilpotencia del grupo G .

Teorema 4.4.17. *El invariante F_G es constante si y solo si el grupo G es nilpotente. Equivalentemente, el invariante F_G no es de tipo finito si y solo si el grupo G no es nilpotente.*

Demostración. Por el Corolario 4.4.2, sabemos que el invariante F_G es constante si y solo si cada subgrupo que satisface $H = \langle x^H \rangle$ es abeliano, lo que significa que $H = \langle x \rangle$. Por el Lema 4.4.4, esto pasa si y solo si cada subgrupo cíclico es subnormal en G . Por el Lema 4.4.13, esto es equivalente a que el grupo G sea nilpotente. \square

Ejemplo 4.4.18. El grupo diedral D_{2p} no es nilpotente. Para ver esto, basta con notar que tiene p subgrupos de orden 2; los generados por los elementos $R_i = \sigma \rho^i$ (ver Sección 2.7). Luego, como esos p subgrupos son 2-Sylows, se sigue que ninguno de ellos puede ser normal en D_{2p} . Por el Lema 4.4.11, concluimos que D_{2p} no es nilpotente.

En la Sección 2.7, probamos además que el número de p -coloreos estaba determinado por la cantidad de representaciones del grupo fundamental del nudo en el grupo D_{2p} . Por lo tanto, la cantidad de p -coloreos no es un invariante de tipo finito.

4.4.2. Aplicación a representaciones del grupo de un link

Si consideramos links en vez de nudos entonces podemos demostrar una versión más simple del Teorema 4.4.17, ya que solo contamos con una versión débil del Teorema 4.2.7 para links. Sea $F_G: \mathcal{L}_\mu \rightarrow \mathbb{N}$ el invariante de links definido como $F_G(L) = |\text{Hom}(\pi(L), G)|$.

Teorema 4.4.19. *Sea $\mu \geq 2$. El invariante de links $F_G: \mathcal{L}_\mu \rightarrow \mathbb{N}$ es constante si G es abeliano y no es de tipo finito si G es no abeliano.*

Demostración. Sea $b(L) = n_0$ el índice de trenza del link L . Sabemos entonces que el grupo del link $\pi(L)$ puede ser presentado con n_0 generadores. Esto implica que se tiene la desigualdad $F_G(L) \leq |G|^{n_0}$, exactamente como en el caso de nudo. Por el Corolario 4.2.9 podemos concluir que F_G es constante o no de tipo finito.

Dado un grupo abeliano G , cualquier representación se factoriza a través de la abelianización de $\pi(L)$, $\pi(L)_{ab} \cong \mathbb{Z}^\mu$, lo que significa que $F_G \equiv |G|^\mu$ es constante.

Si G es no abeliano, entonces F_G no es constante; veamos esto para el caso de links de dos componentes. Para el link trivial \bigcirc^2 , el grupo del link es *libre* en dos generadores. Por otro lado, si L es link de Hopf entonces $\pi(L)$ es el grupo *libre abeliano* en dos generadores. Esto implica que $F_G(L) < F_G(\bigcirc^2)$ para cualquier grupo G no abeliano. \square

Bibliografía

- [Ale23] J. Alexander. A lemma on a system of knotted curves. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 9:93–95, 1923.
- [Alt96] D. Altschuler. Representations of knot groups and Vassiliev invariants. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 05(04):421–425, 1996.
- [CDM12] Sergei Chmutov, Sergei Duzhin, and Jacob Mostovoy. *Introduction to Vassiliev knot invariants*. Cambridge University Press, 2012.
- [CF63] R.H. Crowell and R.H. Fox. *Introduction to Knot Theory, By Richard H. Crowell and Ralph H. Fox*. Introduction to Higher Mathematics. 1963.
- [Cro04] P.R. Cromwell. *Knots and Links*. Cambridge University Press, 2004.
- [Eis00] M Eisermann. The number of knot group representations is not a Vassiliev invariant. *Proc. Amer. Math. Soc*, pages 1555–1561, 2000.
- [GA75] F. Gonzalez-Acuna. Homomorphs of knot groups. *Annals of Mathematics*, 102(3):373–377, 1975.
- [Isa08] I.M. Isaacs. *Finite Group Theory*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2008.
- [Joh80] Dennis Johnson. Homomorphs of knot groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 78(1):135–138, 1980.
- [KDT08] C. Kassel, O. Dodane, and V. Turaev. *Braid Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2008.
- [Lic97] W.B.R. Lickorish. *An Introduction to Knot Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1997.
- [Lin14] L. Linov. An introduction to knot theory and the knot group. 2014.
- [Man04] V. Manturov. *Knot Theory*. CRC Press, 2004.
- [Mur96] K. Murasugi. *Knot Theory and Its Applications*. Birkhäuser, 1996.
- [Neu65] L.P. Neuwirth. *Knot Groups*. Annals of mathematics studies. Princeton University Press, 1965.

- [Row08] D. Rowland. Twisting with Fibonacci. *Harvard College Mathematics Review*, 2(1):66–74, 2008.
- [Tra94] R. Trapp. Twist sequences and Vassiliev invariants. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 03(03):391–405, 1994.