UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Muestreo en Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo

Hernán Diego Centeno

Director: Dr. Juan Miguel Medina

3 de diciembre de 2016

Agradecimientos

A mi director, Juan Miguel Medina, que confió en mí y brindó su apoyo para la presentación de esta tesis.

A los jurados: Carlos Cabrelli y Pablo De Nápoli, que se tomaron un tiempo para leer lo que escribí.

A l@s docentes del departamento de matemáticas que me formaron: Daniel Carando, Esteban Andruchow, Pablo De Nápoli, María Elena Becker, Carlos Sanchez, Julio Rossi, Guillermo Cortiñas, Román Sasyk, Cristina López, Guillermo Keilhauer, Jonathan Barmak, Gabriel Minian, Leandro Vendramin, Nicolás Saintier, Mariela Sued, Gabriel Acosta, Fernando Cukierman, Constanza S.F. de la Vega, Marcelo Valdettaro, Emanuel Rodríguez Cirone; especialmente a Ursula Molter, quien me introdujo al análisis armónico y maravilló con su entusiasmo, y a Carlos Cabrelli quien me presentó el tema de muestreo,

A mis compañer@s de trabajo en exactas que me bancaron durante el desarrollo de esta tesis: César Massri, Virginia Pedreira, Juliana García Galofre, Victoria Paternostro, Paula Escorcielo, Juan Medina, Laura Barbagallo, Héctor Pérez, Román Villafañe, Laura Pezzatti, Isabel Herrero, Sebastián Velázquez y Matías Zylberstejn.

A mis compañer@s de trabajo en arquitectura que me vienen soportando por años: Alicia Ferreira, Ana María Mastroianni, Sandra Curia, Irma Arias, Valeria Gogni, Teresita Giangrecco, Adriana Frieiro, Florencia Ruda Bart, Verónica Mazzei, Alexia Yavicoli, Virginia Guerrero, Mijal Acuña, Sofía Di Tomasso, Ester Goldwaser, Adrián y Andrés Finkelsteyn, Damián Baldini, Juan Otero, Mauro Rey, Luis Canevari, Guido Feldman y especialmente a Jorge Blumemfarb.

A mis compañer@s de cursada, Dani G., Javi G., Maxi F., Maxi A., Alexia Y., Juan Pablo B., Alexis J., Nahuel N., Eduardo F., Lara S.P., Virginia G., Daniela C., Mariela R., Denise D., Francisco P., Belén V., Rogelio M., Kriscia C. y Ayelen C..

A mi familia: padres, herman@s, tí@s, prim@s y sobrin@s, que brindaron su apoyo cada cual a su manera, especialmente a mi hermana Valeria y cuñado Diego que me brindaron techo y comida tantas veces.

A mis amigos, Chino, Diegui, Estebita y Negritos.

A l@s que me olvidé de mencionar por algún motivo y quisiera haber mencionado.

Dedicado a mis padres
Violeta y Julio

Índice general

Página

Introducción

El clásico teorema de muestreo[1] de **Whittaker - Shannon - Kotel'nikov** (1933) establece que toda función con *energía finita* $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ y de *banda limitada* en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, es decir, la *transformada de Fourier* de f está soportada en el intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, puede recuperarse completamente mediante sus muestras en los enteros $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con una representación de la forma

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \qquad t \in \mathbb{R}$$

con convergencia absoluta de la serie. Reescribiendo un poco lo dicho, notamos que las funciones de banda limitada tienen la forma

$$f(t) = \int_{-1/2}^{1/2} F(x) e^{-2\pi i t x} dx \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $\{e^{2\pi i n(\cdot)}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ base ortonormal de $\mathcal{L}_2[-1/2, 1/2]$.

Teniendo en cuenta esto, más tarde en el año 1959, **Kramer** extendió este resultado a funciones definidas por un operador integral de la forma

$$f(t) = \int_I F(x) \overline{\kappa(t,x)} dx \qquad t \in \mathbb{R},$$

donde I es un intervalo compacto de $\mathbb{R}$ y $\kappa(t,\cdot) \in \mathcal{L}_2(I) \ \ \forall t \in \mathbb{R}$, mediante la hipótesis de que existe una sucesión $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ tal que la sucesión $\{\kappa(t_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortogonal y completa en $\mathcal{L}_2(I)$ logró probar que:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) S_n(t) \quad \text{con} \quad S_n(t) = \frac{\int_\Omega \kappa(t_n,x)\overline{\kappa(t,x)}dx}{\int_I |\kappa(t_n.x)|^2 dx} \qquad t \in \Omega$$

con convergencia absoluta de la serie. Este resultado permite trabajar en problemas de muestreo *no uniformes* a diferencia del teorema de muestreo de Shannon-Whittaker-Kotel'nikov.

Como se puede apreciar a simple vista, ambos operadores integrales se pueden escribir usando el producto interno usual de $\mathcal{L}_2(I)$ y da una posible dirección hacia donde se puede generalizar el teorema de muestreo de Kramer.

Gracias a la teoría de *Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo*[2] (**Aronszajn** 1950) y a los *Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo* formados por funciones que son

[1] *sampling* en inglés

[2] ver *capítulo 2*

imágenes de operadores integrales (**Saitoh** 1988), los resultados anteriores se los puede ver naturalmente en este contexto y, por una generalización de los operadores integrales hecha nuevamente por Saitoh, se los puede considerar como casos particulares de un *Teorema de Muestreo de Kramer abstracto en* Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo (**García**, **Hernández-Medina** & **Muñoz-Bouzo** 2014), donde ahora tenemos funciones de la forma:

$$f(t) = \langle x, \Phi(t) \rangle \qquad t \in \Omega,$$

con Ω un conjunto arbitrario, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio de Hilbert* y $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ es una función, y las hipótesis son que existen sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una *Base de Riesz*[3] tal que la sucesión $\{\Phi(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ cumple $\Phi(t_n) = \overline{a_n} x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ se prueba de este modo que:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{S_n(t)}{a_n} \quad \text{con} \quad S_n(t) = \langle y_n, \Phi(t) \rangle \qquad t \in \Omega$$

donde $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ es la *Base de Riesz biortogonal* de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, con convergencia en norma del Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo que contiene a las funciones de esa forma y además con convergencia absoluta y uniforme en los subconjuntos de Ω donde la función $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ es acotada.

Todos estos resultados los veremos en el *capítulo 4*.

Gracias a la teoría de *Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo*[4] desarrolada por **Haizhang Zhang**, **Yuesheng Xu** & **Jun Zhang** (2009) y al desarrollo del concepto de X_d-*Base de Riesz*[5] dentro de los mismos por Haizhang Zhang & Jun Zhang (2010), García & **Portal** lograron extender un teorema de muestreo de Kramer abstracto a *Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo con semi-producto interno* (2013).

En este trabajo tratamos de extender a Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo con semi-producto interno un *Recíproco del teorema de muestreo de Kramer* dado por García & **Szafraniec** (2002), el cual establece que si tenemos un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo $\mathcal{H}_K$ de funciones sobre $\Omega \subset \mathbb{R}$ dadas por un operador integral, como en el teorema original de muestreo de Kramer, donde existe una sucesión de funciones $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{H}_K$ tal que

$$\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \ \forall t \in \Omega \quad \text{y} \quad \overline{span}\{\, \{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0} : t \in \Omega\} = \ell_2(\mathbb{N}_0),$$

y existen sucesiones $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que

$$\left\{ \frac{f(t_n)}{a_n} \right\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \quad \text{y} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t_n) \frac{S_n(t)}{a_n} \qquad \forall f \in \mathcal{H}_K,$$

con convergencia puntual de la serie, entonces entre otras cosas, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una Base de Riesz para $\mathcal{H}_K$.

---

[3]ver *capítulo 3*
[4]ver *capítulo 5*
[5]ver *capítulo 6*

Capítulo 1

Preliminares

Presentamos los resultados, mayormente del análisis funcional, que se utilizarán a lo largo y ancho de este trabajo. Suponemos conocidos los conceptos: espacios vectoriales sobre un cuerpo $\mathbb{K}$, transformaciones lineales, formas bilineales, espacios métricos, sucesiones de Cauchy, completitud, separabilidad y topología en espacios métricos, normas, seminormas y espacios normados.

1.1. Espacios de Banach

1.1.1. Operadores Acotados y Generalidades

Por lo general trabajaremos en $\mathbb{K}$-espacios vectoriales donde el cuerpo $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1.1 (Espacio de Banach)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un *espacio de Banach* si (X, d) es un espacio métrico completo, donde la métrica $d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ está dada por $d(x, z) = \|x - z\|$ para todos $x, z \in X$.

Notaremos por B_X y S_X a la bola unitaria cerrada de centro 0 y esfera unitaria de centro 0 dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} B_X &:= \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \\ S_X &:= \{x \in X : \|x\| = 1\} \end{aligned}$$

Definición 1.1.2 (Operadores acotados)**.** Decimos que un operador lineal entre espacios normados $T : (X, \|\cdot\|_X) \to (Y, \|\cdot\|_Y)$ es *acotado* si existe uns constante positiva B tal que $\|Tx\|_Y \leq B\|x\|_X$ para todo $x \in X$.

Es una cuenta sencilla probar que un operador es acotado si y sólo si es continuo. Notamos por $B(X, Y)$ al $\mathbb{K}$ espacio vectorial de operadores lineales acotados, al mismo lo podemos normar mediante

$$\|T\| := \sup_{x \in B_X} \|Tx\|_Y = \sup_{x \in S_X} \|Tx\|_Y = \text{ínf}\{B > 0 : \|Tx\|_Y \leq B\|x\|_X \ \ \forall\, x \in X\}.$$

Cuando $Y = \mathbb{K}$ lo notamos por X^* y decimos que es el dual de X con la *forma bilineal* $(\cdot, \cdot)_X : X \times X^* \to \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_X : X \times X^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, x^*) &\longmapsto x^*(x) \end{aligned} \tag{1.1}$$

la cual usaremos indistintamente en vez de escribir $x^*(x)$ cuando resulte conveniente. A los elementos de X^* los llamaremos funcionales lineales acotados sobre X. Asímismo podemos definir el dual de X^* por $X^{**} = (X^*)^*$ y así sucesivamente. Para $T \in B(X,Y)$, M subespacio de X y N subespacio de X^* se definen:

$$
\begin{aligned}
Ker(T) &:= \{x \in X : Tx = 0\} && \text{(Núcleo de } T\text{)}\\
\mathcal{R}(T) &:= \{y \in Y : Tx = y \text{ para algún } x \in X\} && \text{(Rango de } T\text{)}\\
M^{\perp} &:= \{x^* \in X^* : (z,x^*)_X = 0 \ \ \forall\, z \in M\} && \text{(Ortogonal de } M\text{)}\\
{}^{\perp}N &:= \{x \in X : (x,z^*)_X = 0 \ \ \forall\, z^* \in N\} && \text{(Ortogonal de } N\text{)}
\end{aligned}
$$

Todos ellos son subespacios y, salvo $\mathcal{R}(T)$, son cerrados. Nos va a interesar en reiteradas ocasiones que $\mathcal{R}(T)$ sea un subespacio cerrado, luego de presentar el teorema de la aplicación abierta (*teorema 1.1.11*) veremos que la siguiente propiedad nos garantizará que así lo sea, decimos que $T \in B(X,Y)$ es *acotado inferiormente* si existe una constante positiva A tal que

$$\|Tx\|_Y \geq A\|x\|_X \qquad \forall\, x \in X \tag{1.2}$$

Dado un operador lineal $T : X \to Y$, podemos definir su operador adjunto $T^* : Y^* \to X^*$ como

$$(T^*y^*)(x) = y^*(Tx) \qquad y^* \in Y^*,\ x \in X \tag{1.3}$$

que con la forma bilineal anterior queda $(x, T^*y^*)_X = (Tx, y^*)_Y$. Por una cuenta directa resulta que T es acotado si y sólo si T^* es acotado y en tal caso vale que $\|T\| = \|T^*\|$.

Proposición 1.1.3 (Propiedades del Operador Adjunto)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$ con adjunto T^*, entonces:*

- $\mathcal{R}(T)^{\perp} = Ker(T^*)$, $\quad {}^{\perp}\mathcal{R}(T^*) = Ker(T)$, $\quad \overline{\mathcal{R}(T)} = {}^{\perp}Ker(T^*)$.
- *T es inyectivo si y sólo si T^* tiene rango denso (y viceversa).*
- *T tiene rango cerrado si y sólo si T^* tiene rango cerrado y en tal caso $\mathcal{R}(T^*) = Ker(T)^{\perp}$.* ([Me98] pág. 292)
- *T es invertible si y sólo si T^* es invertible y en tal caso es $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Sean $\mathcal{V}$ un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y $P : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ un operador lineal, decimos que P es un *proyector* si P es idempotente ($P^2 = P$), en tal caso, el operador $Q = I - P$ también es un proyector. Si consideramos un proyector $P : X \to X$ con X un espacio de Banach, es sencillo probar que $P \in B(X) := B(X,X)$ si y sólo si $\mathcal{R}(P)$ y $Ker(P)$ son subespacios cerrados de X.

Decimos que un espacio de Banach X es *suma directa* de dos subespacios Y y Z, escribimos $X = Y \oplus Z$, si ambos son cerrados en X, $Y \cap Z = \{0\}$ y todo $x \in X$ se escribe (de manera única) como $x = y + x$ con $y \in Y$ y $z \in Z$. También decimos que un subespacio cerrado M de X es *complementado* en X si existe N subespacio cerrado de X tal que $X = M \oplus N$. Los subespacios complementados y los proyectores acotados esán relacionados como sigue:

Proposición 1.1.4. *Sea M un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, son equivalentes:*

i) M es complementado en X, con $X = M \oplus N$.

i) Existe un único proyector $P \in B(X)$ con $\mathcal{R}(P) = M$, $Ker(P) = N$ y $X = M \oplus N$.

Ejemplos de subespacios complementados son los subespacios de dimensión finita y los de codimensión finita, como así también cualquier subespacio cerrado de un espacio de Hilbert (*proposición 1.2.3*).

1.1.2. Teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach es de vital importancia en la teoría del Análisis Funcional.

Teorema 1.1.5 (Teorema de Hahn-Banach)**.** *Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $\rho : \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una seminorma (cumple lo mismo que una norma salvo que puede existir $v \neq 0$ tal que $\rho(v) = 0$). Si $\mathcal{M}$ es un subespacio de $\mathcal{V}$ y $\gamma : \mathcal{M} \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal satisfaciendo*

$$|\gamma(v)| \leq \rho(v) \qquad v \in \mathcal{V},$$

entonces existe un funcional lineal $\Gamma : \mathcal{V} \to \mathbb{K}$ tal que

$$\Gamma|_{\mathcal{M}} = \gamma \quad \text{y} \quad |\Gamma(v)| \leq \rho(v) \qquad v \in \mathcal{V}.$$

Los siguientes corolarios son igual de importantes que el *teorema 1.1.5* y por lo tanto cuando más adelante hagamos referencia al "Teorema de Hahn-Banach" nos estaremos refiriendo al teorema en sí o a cualquiera de sus corolarios.

Corolario 1.1.6 (H-B)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y M un subespacio de X. Si $\gamma \in M^*$, entonces existe $\Gamma \in X^*$ tal que*

$$\Gamma|_M = \gamma \quad \text{y} \quad \|\Gamma\|_{X^*} = \|\gamma\|_{M^*}.$$

Corolario 1.1.7 (H-B)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, entonces para cada $x \in X$ tenemos:*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in X^*,\, \|x^*\|_{X^*} = 1} |x^*(x)|.$$

Además, el supremo es un máximo.

Corolario 1.1.8 (H-B)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Supongamos que tenemos M un subespacio cerrado de X, $x_0 \in X \setminus M$ y $d = dist(x_0, M) = \inf\{\|x_0 - z\| : z \in M\}$. Entonces existe $\Gamma \in X^*$ tal que*

$$\Gamma(x_0) = 1, \quad \Gamma|_M = \gamma \quad \text{y} \quad \|\Gamma\|_{X^*} = \frac{1}{d}.$$

Sea X un espacio de Banach, dado un conjunto $\{x_i\} \subset X$ escribimos $span\{x_i\}$ para referirnos al subespacio de X formado por combinaciones lineales finitas de $\{x_i\}$, donde i pertenece a algún conjunto de índices.

Corolario 1.1.9 (H-B)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Entonces una sucesión $\{x_n\} \subset X$ es completa ($\overline{span}\{x_n\} = X$) si y sólo si $\{x_n\} \subset X$, es decir, satisface la propiedad*

$$x^* \in X^* \quad \text{y} \quad x^*(x_n) = 0 \ \ \forall n \quad \Longrightarrow \quad x^* = 0. \tag{1.4}$$

Sean X un espacio normado, X^* su dual y X^{**} el bidual de X. Dado $x \in X$ definimos $\pi_x : X^* \to \mathbb{K}$ como $\pi_x(x^*) = x^*(x)$, π_x es claramente un funcional lineal que además es acotado pues

$$|\pi_x(x^*)| = |x^*(x)| \leq \|x^*\|\|x\| \qquad \forall\, x^* \in X^*.$$

Así, tenemos definida

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X^{**} \\ x &\longmapsto \pi_x \end{aligned} \tag{1.5}$$

que es un operador lineal acotado con $\|\pi(x)\| \leq \|x\|\ \forall\, x \in X$. Dado $x \in X$, por Hahn-Banach, existe $f_x \in X^*$ tal que $\|f_x\| = 1$ y $f_x(x) = \|x\|$ de donde $(\pi(x))(f_x) = \pi_x(f_x) = f_x(x) = \|x\|$ y por lo tanto es $\|\pi(x)\| = \|x\|$. El operador π se llama "inyección natural" o "inyección canónica" de X en X^{**}.

Definición 1.1.10 (Espacios Reflexivos)**.** Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice *reflexivo* si el operador π dado en (1.5) es sobreyectivo.

1.1.3. Teorema de la Aplicación Abierta

Si $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ son espacios normados, decimos que una función $T : X \to Y$ es *abierta* si cada vez que tenemos O abierto en X resulta $T(O)$ abierto en Y. Una función puede ser continua y sobreyectiva pero no abierta, de hecho estas tres propiedades son independietes entre sí. El siguiente teorema muestra que esto no ocurre cuando tenemos un operador lineal acotado y sobreyectivo entre espacios de Banach.

Teorema 1.1.11 (Teorema de la Aplicación Abierta)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$ sobreyectivo, entonces T es una aplicación abierta.*

Decimos que $T \in B(X, Y)$ es un *isomorfismo topológico* si T es biyectivo y $T^{-1} \in B(Y, X)$, en tal caso X e Y se dicen topológicamente isomorfos y se nota por $X \simeq Y$. También, decimos que $T \in B(X, Y)$ es un *isomorfismo isométrico* si T es un isomorfismo topológico y una isometría ($\|Tx\|_Y = \|x\|_X\ \ \forall x \in X$), en tal caso X e Y se dicen isométricamente isomorfos y se nota por $X \equiv Y$.

Notar que si X es reflexivo entonces π es un isomorfismo isométrico, de donde necesariamente X es un espacio de Banach. Además, con un poco de cuidado, se prueba que X es reflexivo si y sólo si X^* es reflexivo.

Los siguientes corolarios del *teorema 1.1.11* también serán referidos como "Teorema de la Aplicación Abierta" en futuras referencias.

Corolario 1.1.12 (Teorema de la Aplicación Inversa)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T \in B(X, Y)$ biyectivo, entonces $T^{-1} \in B(Y, X)$ y por lo tanto T es un isomorfismo topológico.*

De este último y por lo visto en la *proposición 1.1.3*, $T \in B(X, Y)$ es isomorfismo topológico (isométrico) si y sólo si $T^* \in B(Y^*, X^*)$ es isomorfismo topológico (isométrico).

También, la asignación $T \mapsto T^*$ es un isomorfismo isométrico de $B(X, Y)$ en $B(Y^*, X^*)$ que además cumple $(ST)^* = T^*S^*$ siempre que la composición tenga sentido.

Un ejemplo de espacios isométricamente isomorfos es el caso en donde tenemos un proyector $P \in B(X)$ con X Banach, pues resulta que $\mathcal{R}(P) \equiv X/Ker(P)$.

Corolario 1.1.13 (Normas Equivalentes)**.** *Supongamos que tenemos un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X que es un espacio de Banach con respecto a dos normas $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$. Si existe una constante positiva B tal que $\|x\| \leq B|||x|||$ $\forall\, x \in X$, entonces $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son normas equivalentes en X, es decir, existe otra constante positiva A (necesariamente $A \leq B$) tal que*

$$A|||x||| \leq \|x\| \leq B|||x||| \qquad \forall\, x \in X.$$

La siguiente proposición la utilizaremos reiteradamente y la hemos enunciando aqui debido a que la implicación $ii) \Rightarrow i)$ utiliza el *corolario 1.1.12*.

Proposición 1.1.14. *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach y $T \in B(X,Y)$, son equivalentes:*

i) T es acotado inferiormente (1.2).

ii) T es inyectivo y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y.

iii) T^* es sobreyectivo.

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Si $x \in X$ es tal que $Tx = 0$, entonces usando (1.2) obtenemos $0 \geq A\|x\|_X$ de donde $x = 0$ y T es inyectivo.

Para ver que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en un espacio de Banach Y, es equivalente ver que $\mathcal{R}(T)$ es un espacio de Banach, o sea, debemos ver que toda sucesión de Cauchy en $\mathcal{R}(T)$ es convergente a un elemento de $\mathcal{R}(T)$. Sea entonces $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(T)$ una sucesión de Cauchy con $y_n = Tx_n$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. De nuevo por (1.2) obtenemos

$$A\|x_n - x_m\|_X \leq \|T(x_n - x_m)\|_Y = \|y_n - y_m\|_Y \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

con lo cual $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en un espacio de Banach X y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como T es acotado, $Tx_n = y_n \longrightarrow Tx$.

$ii) \Rightarrow i)$ Como T es inyectivo y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado en Y podemos usar el *corolario 1.1.12* para obtener un isomorfismo topológico $T : X \to \mathcal{R}(T)$. Sea $x \in X$, entonces existe un único $y \in \mathcal{R}(T)$ tal que $x = T^{-1}y$ de donde

$$A^{-1}\|Tx\|_Y = A^{-1}\|y\|_Y \overset{(T^{-1}\text{ acotado })}{\geq} \|T^{-1}y\|_X = \|x\|_X$$

y vale (1.2).

$ii) \Leftrightarrow iii)$ Utilizando la *proposición 1.1.3* que dice que $\mathcal{R}(T)$ es cerrado si y sólo si $\mathcal{R}(T^*)$ es cerrado, resulta que T^* es sobreyectivo (tiene rango cerrado pues X^* es Banach) si y sólo si T es inyectivo y $\mathcal{R}(T)$ es cerrado. ■

1.1.4. Teorema del Gráfico Cerrado

Si tenemos dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$, entonces podemos armar el espacio producto $X \times Y$ y hacerlo un espacio normado dotándolo con alguna de las siguientes normas equivalentes:

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_p &:= \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \\ \|(x,y)\|_\infty &:= \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} \quad (p = \infty) \end{aligned} \tag{1.6}$$

SI X e Y son espacios de Banach entonces $X \times Y$ también lo es.

Para $T : D(T) \subset X \to Y$, donde $D(T)$ denota el dominio de T, definimos su gráfico como

$$Graf(T) := \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset X \times Y$$

y decimos que T es *cerrado* si su gráfico es cerrado en $X \times Y$ dotado con cualesquiera de las normas en (1.6). Notar que para probar que $Graf(T)$ es cerrado en $X \times Y$ debemos probar que si:

$$\{x_n\}_n \subset D(T) \ / \ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \ \text{ y } \ Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \in D(T) \\ Tx = y \end{cases}$$

Teorema 1.1.15 (Teorema del Gráfico Cerrado)**.** *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, entonces T es acotado si y sólo si T es cerrado.*

1.1.5. Principio de Acotación Uniforme

Teorema 1.1.16 (Principio de Acotación Uniforme)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ un espacio de Banach e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ un espacio normado. Si $\{T_i\}_{i\in I}$ es una familia de operadores en $B(X,Y)$ tal que $\forall\, x \in X$ es $\sup_{i\in I} \|T_i x\|_Y < \infty$, entonces $\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.*

Teorema 1.1.17 (Teorema de Banach-Steinhaus)**.** *Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach. Si $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(X,Y)$ y para cada $x \in X$ existe $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, entonces*

$$T \in B(X,Y) \quad \text{y} \quad \|T\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty. \tag{1.7}$$

1.1.6. Mapa Dual

En esta subsección utilizaremos la monografía de *Dragomir* [Dr03]. Una función $\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ estrictamente creciente tal que $\varphi(0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty$ se dice "función peso".

Definición 1.1.18 (Mapa Dual)**.** Sean $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y 2^{X^*} el conjunto de partes de X^*, la función $J : X \to 2^{X^*}$ dada por

$$J(x) = \{x^* \in X^* : x^*(x) = \|x\|\|x^*\|,\ \|x^*\| = \varphi(\|x\|)\} \qquad x \in X$$

se denomina *mapa dual de peso* φ y, cuando $\varphi(t) = t \ \ \forall\, t \in \mathbb{R}_{>0}$, se denomina *mapa dual normalizado.*

Trabajaremos siempre con el mapa dual normalizado al cual nos referiremos simplemente como mapa dual o aplicación dual. Usando *Hahn-Banach*, $J(x) \neq \emptyset \ \ \forall\, x \in X$ y $J(x) = \{0\}$ si y sólo si $x = 0$. También, $J(x)$ es convexo en $X^* \ \ \forall\, x \in X$ y J es *antihomogéneo* en el sentido de que $J(\lambda x) = \overline{\lambda} J(x)$ para todo $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$.

Buscamos condiciones para que $J(x)$ sean conjuntos unipuntuales para cada $x \in X$ y así tener en realidad una función de X en X^*.

Proposición 1.1.19 (Sobreyectividad del Mapa Dual)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, son equivalentes:*

i) *X es reflexivo.*

ii) *Todo funcional lineal acotado sobre X alcanza su máximo sobre la esfera unitaria de X, es decir,*

$$\forall\, x^* \in X^*, \quad \exists\, x \in S_X \quad \text{tal que} \quad x^*(x) = \|x^*\|.$$

iii) *Todo funcional lineal acotado sobre X posee un elemento maximal en X, es decir,*

$$\forall\, x^* \in X^*, \quad \exists\, x \in X \quad \text{tal que} \quad x^*(x) = \|x^*\|\|x\|.$$

iv) *J es sobreyectiva, es decir,*

$$\forall\, x^* \in X^*, \quad \exists\, y \in X \quad \text{tal que} \quad x^* \in J(y).$$

Definición 1.1.20. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice *suave* en un punto $x \neq 0$ si existe un único funcional lineal acotado x^* sobre X que cumple

$$x^*(x) = \|x\| \quad \text{y} \quad \|x^*\| = 1.$$

Si X es suave en todos sus puntos, decimos que X es *suave* a secas.

Proposición 1.1.21 (Univocalidad del Mapa Dual)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $x_0 \in S_X$, son equivalentes:*

i) *X es suave en x_0.*

ii) *$J(x_0)$ contiene un único elemento en X^*.*

iii) *$\|\cdot\|$ es Gâteaux diferenciable en x_0, es decir, el siguiente límite existe $\forall\, x \in X$*

$$\lim_{h\in\mathbb{R},\, h\to 0} \frac{\|x_0 + hx\| - \|x_0\|}{h}.$$

Esta proposición nos dice entonces que X es *suave* si y sólo si J es *univaluada* (puede verse como una función de X en X^*) si y sólo si la norma en X es *Gâteaux diferenciable.*

Para la cuestión de inyectividad tenemos la siguiente:

Proposición 1.1.22 (Inyectividad del Mapa Dual)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, son equivalentes:*

i) *X es estrictamente convexo* (definición 1.1.24).

ii) *Todo funcional lineal acotado sobre X posee a lo sumo un elemento maximal en S_X.*

iii) *J es inyectiva, es decir, $J(x) \cap J(y) = \emptyset$ para $x \neq y$.*

Corolario 1.1.23. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach reflexivo, estrictamente convexo y Gâteaux diferenciable. Entonces el mapa dual*

$$\begin{aligned} J :=\, ^* : X &\longrightarrow X^* \\ x &\longmapsto J(x) := x^* \end{aligned} \tag{1.8}$$

es biyectivo e isométrico ($\therefore \|\cdot\|$-$\|\cdot\|$ *continuo*) *pero generalmente no es lineal.*

Utilizando la ley del paralelogramo (1.11) y el *teorema 1.2.8* se prueba directamente que en un espacio de Banach real (complejo) X, el mapa dual $J = {}^*$ es lineal (antilineal) si y sólo si X es un espacio de Hilbert real (complejo).

1.1.7. Propiedades Geométricas

Definición 1.1.24. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, decimos que:

- X es *estrictamente convexo* si $x, y \in X$ son tales que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ entonces $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

- X es *uniformemente convexo* si $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $x, y \in S_X$ con $\|x - y\| \geq \epsilon$ implica que $\|x + y\| \leq 2 - \delta$.

- X es *Gâteaux diferenciable* si $\|\cdot\|$ es *Gâteaux diferenciable* en todo $x \in S_X$, es decir, si para cada $x \in S_X$ el límite

$$\lim_{h \in \mathbb{R},\, h \to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h} \tag{1.9}$$

  existe $\forall\, y \in X$.

  Mientras que X es *uniformemente diferenciable Fréchet* si es Gâteaux diferenciable y si el límite (1.9) además es uniforme en $S_X \times S_X$.

- X es *uniforme* si es *uniformemente convexo* y *uniformemente diferenciable Fréchet*.

Por la *proposición 1.1.21*, X es suave si y sólo si X es Gâteaux diferenciable.

Ejemplo. Todo espacio de Hilbert (ver *definición 1.2.1*) es uniforme (uniformemente convexo y uniformemente diferenciable Fréchet) y por lo tanto reflexivo. ♦

Proposición 1.1.25 (Estrictamente Convexo)**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, son equivalentes:*

i) *X es estrictamente convexo.*

ii) *Para $x \neq y \in S_X$ y $0 < t < 1$ se cumple $\|tx + (1-t)y\| < 1$.*

iii) *Todo $C \subset X$ convexo no vacío es un conjunto de unicidad, es decir, para todo $x \in X$ existe a lo sumo un $y_0 \in C$ tal que*

$$dist(x, C) = \|x - y_0\|.$$

Proposición 1.1.26. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach estrictamente convexo y reflexivo, entonces todo $C \subset X$ convexo cerrado no vacío es un conjunto de Chebyshev, es decir, para todo $x \in X$ existe un único $y_0 \in C$ tal que*

$$dist(x, C) = \|x - y_0\|.$$

Proposición 1.1.27. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces X es estrictamente convexo y reflexivo.*

Proposición 1.1.28. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado:*

a) *Si X^* es estrictamente convexo entonces X es suave.*

b) Si X^* es suave entonces X es estrictamente convexo.

c) Si X es reflexivo, entonces X es suave si y sólo si X^* es estrictamente convexo y X es estrictamente convexo si y sólo si X^* es suave.

Proposición 1.1.29. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, entonces:*

a) X^* es uniformemente convexo si y sólo si X es uniformemente diferenciable Fréchet.

b) X^* es uniformemente diferenciable Fréchet si y sólo si X es uniformemente convexo.

No es de extrañar que todas estas propiedades sean preservadas por isomorfismos isométricos (ver [Me98]).

1.1.8. Bases y Series

En esta subsección $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach **separable**. Cuando notemos una sucesión en X por $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ o una serie por $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$, estamos tomando la sucesión ordenada $\{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ o sumando $\{f_1 + f_2 + f_3 + \ldots\}$, es decir, estamos considerando $\mathbb{N}$ con el orden usual. Del mismo modo podemos considerar un conjunto de índices $\mathbb{I}$ que sea a lo sumo numerable y bien ordenado (existe $\preceq$ un orden total en $\mathbb{I}$ donde todo subconjunto no vacío de $\mathbb{I}$ tiene primer elemento) en vez de considerar $\mathbb{N}$. En lo sucesivo de esta subsección seguiremos hablando de esta cuestión para luego encontrar una condición en la que podamos independizarnos del conjunto de índices $\mathbb{N}$.

Definición 1.1.30. Decimos que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es :

- *minimal*, si $f_m \notin \overline{span}\{f_n : n \neq m\}$ $\forall\, m \in \mathbb{N}$.
- *completa*, si $\overline{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = X$.
- *exacta*, si es *minimal* y *completa*.

Si bien hemos requerido que X sea separable, cuando tenemos una sucesión que es completa entonces X necesariamente es separable. Una caracterización de sucesiones minimales que usaremos todo el tiempo es la siguiente:

Proposición 1.1.31 (sucesiones biortogonales)**.** *Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es minimal si y sólo si existe una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tal que $(f_n, g_m)_X = \delta_{n,m}$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$, donde $\delta_{n,m}$ es la delta de Kronecker. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se dicen biortogonales entre sí o que $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión biortogonal a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

Además, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es única si y sólo si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es completa.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Para $m \in \mathbb{I}$ sea $X_m = \overline{span}\{f_n : n \neq m\}$, por hipótesis $f_m \notin X_m$ y por Hahn-Banach existe $g_m \in X^*$ tal que $g_m(f_m) = 1$ y $g_m(f_n) = 0$ $\forall\, n \neq m$, es decir $(f_n, g_m)_X = \delta_{n,m}$ $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.

$(\Leftarrow)$ Sea $m \in \mathbb{I}$ y tomemos $f \in span\{f_n : n \neq m\}$, digamos $f = \sum_{n\in F} a_n f_n$ con $F \subset \mathbb{N}$ finito y $a_n \in \mathbb{C}$, entonces $(f, g_m)_X = \left(\sum_{n\in F} a_n f_n, g_m\right)_X = \sum_{n\in F} a_n (f_n, g_m)_X = 0$, de donde $f_m \notin span\{f_n : n \neq m\}$ puesto que $(f_m, g_m)_X = 1$.

Veamos el además, supongamos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ también es completa en X pero existen dos sucesiones biortogonales $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces

$$(f_n,(g_m-h_m))_X=(f_n,g_m)_X-(f_n,h_m)_X=\delta_{n,m}-\delta_{n,m}=0 \qquad \forall\, n,m\in\mathbb{N}$$

y por la completitud de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe ser $g_m=h_m\ \ \forall\, m\in\mathbb{N}$.

Recíprocamente, si $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la única sucesión biortogonal a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pero esta no es completa, entonces existe $g\in X^*$ no nulo tal que $(f_n,g)_X=0\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$, de donde la sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X^*$ dada por $h_n=g_n-g\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$ es otra biortogonal a $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contradiciendo la unicidad de $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Enunciamos definiciones y resultados concernientes a distintos tipos de convergencia de sucesiones y de series que se pueden encontrar por ejemplo en [Me98, He10].

Definición 1.1.32. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ una sucesión.

a) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es de *Cauchy* en X si la sucesión de sumas parciales $s_N=\sum_{n=1}^N f_n$ es de Cauchy en X.

b) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es *convergente* en X y es igual a un $f\in X$ si la sucesión de sumas parciales $s_N=\sum_{n=1}^N f_n$ converge a f en la norma de X.

c) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es *incondicionalmente convergente* en X si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\sigma(n)}$ es convergente en X para toda permutación σ de $\mathbb{N}$.

d) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es *absolutamente convergente* en X si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|$ es convergente en $\mathbb{R}$.

Cuando tomamos límite en *b*) estamos usando el orden usual de $\mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que $\|s_N\|\leq\sum_{n=1}^N\|f_n\|$, vale *d*) $\Rightarrow$ *c*) $\Rightarrow$ *b*) $\Rightarrow$ *a*), y cuando una serie convergente no converge incondicionalmente decimos que converge condicionalmente. También es claro que si una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge incondicionalmente entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n=\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\sigma(n)}$ para toda permutación σ de $\mathbb{N}$, puesto que si $\mu\in X^*$ entonces

$$\mu\Bigg(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Bigg)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(f_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(f_{\sigma(n)})=\mu\Bigg(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_{\sigma(n)}\Bigg)$$

por convergencia incondicional en $\mathbb{C}$.

Enunciamos equivalencias de series incondicionalmente convergentes que son más accesibles para verificar.

Teorema 1.1.33. *Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ una serie en X, son equivalentes:*

i) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge incondicionalmente*

ii) $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_{n_k}$ *es convergente para toda sucesión creciente* $0<n_1<n_2<\cdots$.

iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n f_n$ *converge para toda elección de signos* $\varepsilon_n=\pm1$.

iv) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n f_n$ *converge para toda sucesión* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$ *acotada.*

v) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |(f_n,\mu)_X|$ *converge uniformemente con respecto a* B_{X^*}*, es decir,*

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sup_{\mu\in B_{X^*}}\left\{\sum_{n\geq\mathbb{N}}|(f_n,\mu)_X|\right\}\right)=0. \tag{1.10}$$

vi) $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge con respecto al conjunto dirigido de subconjuntos finitos de* $\mathbb{N}$*, es decir, si* $I=\{F\subset\mathbb{N} : F \text{ es finito }\}$ *y* $s_F := \sum_{n\in F} f_n$ *entonces existe* $f=\lim_{F\in I} s_F$*, en el sentido de que* $\forall\, O_f$ *entorno abierto de* f *en* X *existe* $F_0\in I$ *tal que* $\forall\, F\supset F_0$ *con* $F\in I$ *se cumple* $s_F\in O_f$*.*

Definición 1.1.34. Decimos que una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ es :

- *base*, si toda $f\in X$ se escribe de manera única como

$$f=\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)f_n=\lim_{N\longrightarrow\infty}\underbrace{\sum_{n=1}^{N} c_n(f)f_n}_{:=S_N(f)}$$

  donde la igualdad (convergencia) es en la norma de X.

  La asignación $f\mapsto c_n(f)$ define funcionales lineales (funcionales coordenados) sobre X para todo $n\in\mathbb{N}$ y la asignación $f\mapsto S_N(f)$ define operadores lineales (proyecciones naturales) de X en X para todo $N\in\mathbb{N}$.

- *base de Schauder*, si es base y los funcionales lineales coordenados $f\mapsto c_n(f)$ son continuos sobre X o, equivalentemente, las proyecciones naturales son operadores acotados de X en X.

- *básica*, si es base de $\overline{span}\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$.

Proposición 1.1.35 (Bases)**.** *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ *una sucesión, son equivalentes:*

i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de* X*.*

ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder de* X*.*

iii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa y existe* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset X^*$ *biortogonal a* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tal que la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}}(f,c_n)_X f_n$ *converge para cada* $f\in X$*.*

Por lo general usaremos el término base de Schauder para referirnos a una base. Diremos que una base de Schauder $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *acotada* si existen constantes positivas $B\geq A$ tales que $A\leq\|f_n\|\leq B\ \ \forall\, n\in\mathbb{N}$.

Teorema 1.1.36. *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de términos no nulos en* X*, se definen:*

$$Y:=\left\{c=\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n \text{ converge en } X\right\}\qquad\text{con}\qquad |\!|\!|c|\!|\!| := \sup_{N\in\mathbb{N}}\left\|\sum_{n=1}^{N} c_n f_n\right\|,$$

entonces:

a) $(Y, \|\!| \cdot \|\!|)$ *es un espacio de Banach.*

b) *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es una base de Schauder,* $X \simeq Y$ *vía el operador de síntesis*

$$R : Y \ni c \longmapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n \in X.$$

A continuación veremos qué se puede decir acerca de la única sucesión biortogonal a una base de Schauder.

Proposición 1.1.37. *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una base de Schauder de* X *con biortogonal* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$*, entonces:*

a) $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es básica en* X^* *y* $\{(c_n, \pi)_{X^*}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^{**}$ *es una biortogonal a* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$*, donde* π *es la dada en* (1.5).

b) *Si* X *es reflexivo,* $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $\{(c_n, \pi)_{X^*}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *son bases de Schauder de* X^* *y* X^{**} *respectivamente.*

Proposición 1.1.38 (Bases incondicionales)**.** *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una base de Schauder de* X*, son equivalentes:*

i) $\{f_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es base de Schauder de* X *para toda permutación* σ *de* $\mathbb{N}$.

ii) $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f) f_n$ *con convergencia incondicional de la serie* $\forall\, f \in X$.

En tal caso decimos que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es base de Schauder incondicional de* X.

Cuando tenemos una base incondicional, ya no nos tenemos que preocupar por el significado de la notación $\sum_{n\in\mathbb{N}}$ ya que sin importar en qué orden tomemos los naturales obtendremos el mismo resultado. Más aun, como no importa el orden, podríamos sumar sobre cualquier conjunto de índices numerable $\mathbb{I}$ puesto que es coordinable con $\mathbb{N}$.

Como comentario final, si tenemos $T : X \to Y$ isomorfismo topológico entre espacios de Banach, este manda bases (incondicionales/acotadas) en bases (incondicionales/acotadas), como se puede comprobar mediante cuentas directas.

1.2. Espacios de Hilbert

1.2.1. Generalidades

Definición 1.2.1 (Espacio de Hilbert)**.** Sea $\mathcal{H}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un *producto interno* sobre $\mathcal{H}$ es una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ tal que para todos $f, g, h \in \mathcal{H}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ cumple:

(i) $\langle \lambda f + g, h\rangle = \lambda\langle f, h\rangle + \langle g, h\rangle$	(Lineal en la primer variable)
(ii) $\langle h, \lambda f + g\rangle = \overline{\lambda}\langle h, f\rangle + \langle h, g\rangle$	(Antilineal en la segunda variable)
(iii) $\langle g, h\rangle = \overline{\langle h, g\rangle}$	(Simetría Conjugada)
(iv) $\langle g, g\rangle \geq 0$ y $\langle g, g\rangle = 0 \iff g = 0$	(Definido Positivo)

Cuando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ cumple de (i) a (iv), también cumple:

(v) $|\langle g,h\rangle|^2 \leq \langle g,g\rangle\langle h,h\rangle$ (*Cauchy-Bunyakovski-Schwarz*)

En tal caso el par $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ se llama *espacio con producto interno* o *pre-Hilbert*. Decimos que $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ es un *espacio de Hilbert* si el mismo resulta *completo* con la norma inducida $\|.\| = \langle\cdot\,,\cdot\rangle^{1/2}$, es decir, $(\mathcal{H}, \|.\|)$ es un espacio de Banach. Notar que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ resulta que $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ es una forma bilineal simétrica definida positiva.

Del item (v) se desprende que un producto interno es continuo en ambas variables conjuntamente, en el sentido de que si tenemos $f_n \longrightarrow f$ y $g_n \longrightarrow g$, entonces $\langle f_n, g_n\rangle \longrightarrow \langle f, g\rangle$. También, todo producto interno satisface la "Ley del Paralelogramo"

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \qquad \forall\, f,g \in \mathcal{H}. \tag{1.11}$$

y vale que una norma proviene de un producto interno si y sólo si satisface (1.11).

Proposición 1.2.2. *Si M es un conjunto convexo cerrado no vacío de $\mathcal{H}$ y $f \in \mathcal{H}$, entonces existe un único $P_M f \in M$ que realiza la distancia, es decir:*

$$dist(f,M) = \inf_{g\in M}\{\|f-g\|\} = \|f - P_M f\|.$$

Si M es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ queda definido un operador lineal

$$\begin{aligned} P_M : \mathcal{H} &\longrightarrow M \\ f &\longmapsto P_M f \end{aligned} \tag{1.12}$$

que se denomina *proyector ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M*. Decimos que dos elementos $f, g \in \mathcal{H}$ son *ortogonales* si $\langle f,g\rangle = 0$, de igual modo $f \in \mathcal{H}$ se dice ortogonal a un subconjuto C de $\mathcal{H}$ si $\langle f,g\rangle = 0 \;\; \forall\, g \in C$. Dado un subconjunto C de $\mathcal{H}$, se define el *ortogonal* de C como el subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ dado por

$$C^\perp = \{g \in \mathcal{H} : \langle g,f\rangle = 0 \;\; \forall\, f \in C\}$$

como consecuencia obtenemos la siguiente.

Proposición 1.2.3. *Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es complementado, es decir, si $\mathcal{L}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ entonces $\mathcal{H} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$.*

Definición 1.2.4. Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión.

a) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *ortogonal* si $\langle f_n, f_m\rangle = 0 \;\; \forall\, n \neq m$.

b) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *ortonormal* si $\langle f_n, f_m\rangle = \delta_{n,m} \;\; \forall\, n,m \in \mathbb{N}$.

c) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *base ortonormal* si es una base de Schauder y una sucesión ortonormal.

Como una aplicación del *Lema de Zorn*, todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal. Antes de ver caracterizaciones de las mismas veamos algunas propiedades de las sucesiones ortogonales y ortonormales.

Proposición 1.2.5 (Teorema de Pitágoras)**.** *Si $\{f_1, \cdots, f_N\}$ son ortogonales en un espacio pre-Hilbert, entonces $\big\|\sum_{n=1}^N f_n\big\|^2 = \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2$.*

Proposición 1.2.6. *Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces valen:*

a) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\langle f, f_n\rangle|^2 \leq \|f\|^2 \ \ \forall f \in \mathcal{H}$. *(Desigualdad de Bessel)*

b) *Si* $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$ *converge, entonces* $c_n = \langle f, f_n\rangle \ \ \forall n \in \mathbb{N}$.

c) $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n f_n$ *converge si y sólo si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|^2 < \infty$.

d) *Si* $f \in \mathcal{H}$ *y* $M = \overline{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, *entonces* $P_M f = \sum_{n\in\mathbb{N}} \langle f, f_n\rangle f_n$.

Proposición 1.2.7. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión ortonormal, son equivalentes:*

(i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es base de Schauder.*

(ii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es completa.*

(iii) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *es total.*

(iv) $f = \sum_n \langle f, f_n\rangle f_n \quad \forall f \in \mathcal{H}$.

(v) $\langle f, g\rangle = \sum_n \langle f, f_n\rangle\langle f_n, g\rangle \quad \forall f, g \in \mathcal{H}$. *(Identidad de Plancherel)*

vi) $\|f\|^2 = \sum_n |\langle f, f_n\rangle|^2 \quad \forall f \in \mathcal{H}$. *(Identidad de Parseval)*

1.2.2. Operadores Acotados

Teorema 1.2.8 (Teorema de Representación de Riesz). *Sea $L : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ un funcional lineal acotado sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, entonces existe un único $f \in \mathcal{H}$ tal que*

$$Lg = \langle g, f\rangle \quad \forall g \in \mathcal{H} \quad \text{y} \quad \|L\| = \|f\|.$$

Es decir, el mapa dual de $\mathcal{H}$ en $\mathcal{H}^*$ ($f \mapsto f^*$) está dado por $f^*(g) = \langle g, f\rangle$ y es una isometría biyectiva antilineal en el sentido de que

$$\|f\| = \|f^*\| \quad \text{y} \quad \lambda f + h \mapsto \overline{\lambda} f^* + h^* \qquad f, h \in \mathcal{H}, \ \lambda \in \mathbb{K}$$

Como todo espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un espacio de Banach, la definición de operador acotado es la misma, no obstante, hay otro operador que se denomina adjunto, el mismo es el único operador lineal acotado en $\mathcal{H}$ tal que

$$\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle \qquad f, g \in \mathcal{H} \tag{1.13}$$

Observar que el "adjunto Banach" (1.3), que ahora notamos por T', es el único que cumple

$$(Tf, g^*)_{\mathcal{H}} = (f, T' g^*)_{\mathcal{H}} \qquad f \in \mathcal{H}, \ g^* \in \mathcal{H}^*$$

cuando estemos en espacios de Hilbert siempre utilizaremos (1.13). Si utilizamos el mapa dual entre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y su dual $\mathcal{H}^*$ obtenemos para $f, g \in \mathcal{H}$:

$$(f, T' g^*)_{\mathcal{H}} = (Tf, g^*)_{\mathcal{H}} = \langle Tf, g\rangle = \langle f, T^* g\rangle = (f, (T^* g)^*)_{\mathcal{H}}$$

de donde $T^{'}g^* = (T^*g)^*$ y, si notamos ahora por J al mapa dual, $T^{'} \circ J = J \circ T^*$ o bien, usando biyectividad de J, resulta que

$$J^{-1} \circ T^{'} \circ J = T^*.$$

Mencionamos algunas clases de operadores que utilizaremos en la sección próxima. Sean $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y T^* el adjunto de T, decimos que T es *Normal* si $TT^* = T^*T$, *Autoadjunto* si $T = T^*$ y *Positivo* si $\langle Tf, f\rangle \geq 0 \ \forall\, f \in \mathcal{H}$. Los operadores *Unitarios* ($T^{-1} = T^*$) son los isomorfismos isométricos entre espacios de Hilbert, es decir, son *Isometrías* ($\langle Tf, Tg\rangle = \langle f, g\rangle \ \forall\, f, g \in \mathcal{H}$) que además son sobreyectivas, y el proyector ortogonal de $\mathcal{H}$ sobre M dado en (1.12) es efectivamente un proyector ortogonal (*Positivo* y $T = T^2$).

Para definir los operadores de Análisis y de Síntesis en el *capítulo 3*, extendemos la definición de operador adjunto entre espacios de Hilbert.

Definición 1.2.9 (Operador Adjunto entre espacios de Hilbert)**.** Sea $T : \mathcal{H} \to \widetilde{\mathcal{H}}$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert. El *adjunto de* T es el único operador lineal acotado $T^* : \widetilde{\mathcal{H}} \to \mathcal{H}$ que cumple:

$$\langle Tf, \widetilde{f}\rangle_{\widetilde{\mathcal{H}}} = \langle f, T^*\widetilde{f}\rangle_{\mathcal{H}} \qquad f \in \mathcal{H},\ \widetilde{f} \in \widetilde{\mathcal{H}}.$$

1.3. Espacios $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ $(1 \leq p \leq \infty)$

En esta sección utilizaremos los libros [Ye06, Me98].

Para (Ω, Σ, μ) un espacio de medida se definen los espacios $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ como:

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \ \mu\text{-medibles} : \|f\|_p := \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\} \quad 1 \leq p < \infty$$

$$\left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} \ \mu\text{-medibles} : \|f\|_\infty := sup\, ese|f| < \infty \right\} \qquad p = \infty$$

Cuando no haya peligro de confusión notaremos simplemente $\mathcal{L}_p$.

Por la *desigualdad de Minkowski* (desigualdad triangular de $\|\cdot\|_p$) los espacios $(\mathcal{L}_p, \|\cdot\|_p)$ son espacios normados y usando luego el *teorema de convergencia monótona de Beppo-Levi* junto con el *teorema de convergencia mayorada de Lebesgue* resultan espacios de Banach.

Decimos que (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida σ-finito si $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n$ y $\mu(\Omega_n) < \infty \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Proposición 1.3.1. *Sean* $1 < p < \infty$ *y* (Ω, Σ, μ) *un espacio de medida* σ*-finito. Entonces* $\mathcal{L}_P$ *es separable, uniformemente convexo* ($\therefore$ *reflexivo*) *y uniformemente diferenciable Fréchet.*

Teorema 1.3.2 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Sean* $1 < p, q < \infty$ *exponentes conjugados* $(1/p + 1/q = 1)$ *y* $L \in \mathcal{L}_p^*$*, entonces existe un único* $f \in \mathcal{L}_q$ *tal que*

$$Lg = \int_\Omega gf d\mu \quad \forall\, g \in \mathcal{L}_p \quad \text{y} \quad \|L\| = \|f\|_q$$

Es decir, el mapa dual de $\mathcal{L}_p$ *en* $\mathcal{L}_p^* \equiv \mathcal{L}_q$ $(f \mapsto f^*)$ *está dado por*

$$f^*(g) = \int_\Omega g \underbrace{\left(\overline{f} \frac{|f|^{p-2}}{\|f\|_p^{p-2}} \right)}_{:=f_0} d\mu \quad \forall\, g \in \mathcal{L}_p \quad \text{y} \quad \|f_0\|_q = \|f\|_p \tag{1.14}$$

Cuando Ω es un conjunto numerable, para fijar ideas digamos $\Omega = \mathbb{N}$, $\mu = \#$ es la medida de contar y $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ el conjunto de partes de $\mathbb{N}$ entonces escribimos $\ell_p(\mathbb{N})$ en lugar de $\mathcal{L}_p(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \#)$. Resulta entonces que

$$\|f\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)|^p\right)^{1/p} \quad (1\leq p<\infty) \quad \text{y} \quad \|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| \quad (p=\infty)$$

y vale lo mismo que antes. Cuando $\Omega = \mathbb{N}_d := \{1, \cdots, d\}$, escribimos ℓ_p^d o bien $\ell_p(\mathbb{N}_d)$.

Los espacios $\mathcal{L}_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ con $p=2$ son espacios de Hilbert con el producto interno

$$\langle f, g\rangle := \int_\Omega f\overline{g}d\mu$$

En este caso los dos teoremas que hemos nombrado por “Teorema de Representación de Riesz” coinciden, y dado $f \in \mathcal{L}_2$ su elemento dual $f^* \in \mathcal{L}_2^*$ lo podemos identificar con $\overline{f} \in \mathcal{L}_2$. Lo mismo vale para $\ell_2(\mathbb{N})$ y ℓ_2^d.

Cuando el espacio Ω tiene medida infinita ($\mu(\Omega) = \infty$) en general no valen ninguna de las contenciones entre $\mathcal{L}_p(\Omega,\Sigma,\mu)$ y $\mathcal{L}_{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu)$ cualesquiera sean $1 \leq p, p^* \leq \infty$, sin embargo, cuando $\mu(\Omega) < \infty$ vale que

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega,\Sigma,\mu) \subset \mathcal{L}_p(\Omega,\Sigma,\mu) \subset \mathcal{L}_{p^*}(\Omega,\Sigma,\mu) \subset \mathcal{L}_1(\Omega,\Sigma,\mu) \qquad 1<p^*<p<\infty.$$

Mientras que para los espacios de sucesiones $\ell_p(\mathbb{N})$ siempre se cumple

$$\ell_1(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_{p^*}(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_p(\mathbb{N}) \subsetneq \ell_\infty(\mathbb{N}) \qquad 1<p^*<p<\infty.$$

Proposición 1.3.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Si $f \in \mathcal{L}_p$ y $g \in \mathcal{L}_q$ con $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados, entonces $fg \in \mathcal{L}_1$ y*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Capítulo 2

Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo

Introducimos una clase particular de espacios de Hilbert, los llamados “Espacios de Hilbert con Núcleo Reproductivo”, donde los resultados de muestreo que veremos en el *capítulo 4* se presentan naturalmente. Definiremos qué es un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo, al que abreviaremos poniendo RKHS (*Reproducing Kernel Hilbert Space* en inglés), daremos algunas caracterizaciones y distintas formas de obtenerlos, como así también algunas propiedades relevantes que los hacen destacar entre los espacios de Hilbert.

2.1. Definición y Propiedades de un RKHS

Definición 2.1.1. Decimos que $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo* sobre un conjunto Ω si cumple:

(P1) $\mathcal{H} = \{f : \Omega \to \mathbb{C} \text{ funciones}\}$ con $\|f\| = 0 \iff f(t) = 0\ \forall\, t \in \Omega$.

(P2) Existe una función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que:

(a) Para cada $t \in \Omega$ es $K(t,\cdot) \in \mathcal{H}$.

(b) Para toda $f \in \mathcal{H}$ se satisface la *propiedad reproductiva*

$$f(t) = \langle f, K(t,\cdot)\rangle \qquad t \in \Omega. \tag{2.1}$$

K se llama *núcleo reproductivo* y por (2.1) es único cuando existe. La propiedad (P1) suele decirse que la *norma es consistente* con el espacio. Notar además que

$$K_s(t) := K(s,t) = \langle K_s, K(t,\cdot)\rangle = \langle K_s, K_t\rangle \qquad s,t \in \Omega. \tag{2.2}$$

Observación 2.1.2. *La definición de RKHS tiene en cuenta, en primer lugar, cuál es la entrada antilineal en el producto interno (en esta tesis se eligió la segunda), en segundo lugar, cuál de las variables del núcleo reproductivo se utiliza para la propiedad reproductiva, que si bien hemos elegido la primera* ($f(t) = \langle f, K(t,\cdot)\rangle$)*, es usual encontrarla en la segunda, con lo que algunas cuestiones cambian de forma, por ejemplo si fuera* $f(t) = \langle f, K(\cdot,t)\rangle$*, entonces sería* $K_s(t) := K(t,s) = \langle K_s, K(\cdot,t)\rangle = \langle K_s, K_t\rangle$.

Ejemplo. 1) El espacio $\ell_2(\mathbb{N})$ es un ejemplo trivial de RKHS ya que para $K : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tal que $K(m,\cdot) = \delta_m(\cdot) \in \ell_2(\mathbb{N})$ es $\langle c, K(m,\cdot)\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} = c_m = c(m)\ \ \forall m \in \mathbb{N}$.

2) ([He10] pág. 267, [Yo80] pág. 109) El espacio *Paley-Wiener* $PW(\mathbb{R}) := \big\{f \in C(\mathbb{R})\cap \mathcal{L}_2(\mathbb{R}) : supp\,\widehat{f} \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\big\}$ con el producto interno usual de $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ es un RKHS sobre $\mathbb{R}$ con núcleo reproductivo K dado por el seno cardinal

$$K(s,t) = \frac{\sin \pi(t-s)}{\pi(t-s)} = sinc(t-s) \qquad s,t \in \mathbb{R}. \qquad \blacklozenge$$

Como se puede ver en [Sa97, Yo80], la teoría de RKHS tiene varios ejemplos interesantes que están lejos de ser triviales y a la vez no son extremadamente técnicos.

El siguiente teorema brinda una alternativa para ver cuándo un espacio de Hilbert de funciones es un RKHS.

Teorema 2.1.3. *Sea $(\mathcal{H}, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert de funciones a valores complejos definidas sobre un conjunto Ω. Entonces, $\exists\, K$ núcleo reproductivo para $\mathcal{H}$ si y sólo si para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones $\delta_t(f) = f(t)$ son funcionales lineales continuos sobre $\mathcal{H}$.*

Demostración. Supongamos primero que K es el núcleo reproductivo de $\mathcal{H}$. Para $t \in \Omega$, por la propiedad reproductiva junto con *C-B-S* (pág. 15) tenemos que

$$|\delta_t(f)| = |f(t)| = |\langle f, K_t\rangle| \leq \|f\|\|K_t\| = \sqrt{K(t,t)}\|f\| \qquad f \in \mathcal{H}.$$

Recíprocamente, si para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones δ_t son continuas en $\mathcal{H}$, definimos $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ por medio del *teorema de representación de Riesz 1.2.8*, es decir, para cada $t \in \Omega$ existe un único $K(t,\cdot) \in \mathcal{H}$ tal que $\delta_t(f) = \langle f, K(t,\cdot)\rangle\ \ \forall f \in \mathcal{H}$, de donde K es el núcleo reproductivo para $\mathcal{H}$. ■

De aqui en adelante escribimos $\mathcal{H}_K$ para denotar a un RKHS con núcleo reproductivo K. Para hacer análisis es fundamental contar con la mayor cantidad de herramientas al momento de analizar distintos tipos de convergencia, en ese sentido tenemos la siguiente:

Proposición 2.1.4. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$ tal que $\|f_j - f\|_{\mathcal{H}_K} \longrightarrow 0$, entonces $|f_j(t) - f(t)| \longrightarrow 0\ \ \forall t \in \Omega$ y la convergencia es uniforme en los subconjuntos de Ω donde la función $t \mapsto K(t,t)$ es acotada.*

Demostración. Sea $t \in \Omega$, entonces

$$|f_j(t) - f(t)| = |(f_j - f)(t)| = |\langle f_j - f, K_t\rangle| \leq \sqrt{K(t,t)}\,\underbrace{\|f_j - f\|}_{\longrightarrow 0} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

de donde se deduce la convergencia uniforme en los subconjuntos del enunciado. ■

Proposición 2.1.5. *Si $\{f_n\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$ es una base ortonormal, entonces*

$$K(s,t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \overline{f_j(s)}f_j(t) \qquad s,t \in \Omega \tag{2.3}$$

donde la serie converge absolutamente en $\Omega\times\Omega$.

Demostración. Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$ es una base ortonormal, para cada $s \in \Omega$ podemos escribir

$$K_s = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle K_s, f_j\rangle_{\mathcal{H}_K} f_j = \sum_{j\in\mathbb{I}} \overline{f_j(s)} f_j$$

y usando ahora que K cumple (2.2) se deduce (2.3), donde la serie converge absolutamente porque $\{f_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I})\ \ \forall\, t \in \Omega$. ■

Ejemplo. El RKHS $\ell_2(\mathbb{N})$ tiene núcleo reproductivo K dado por

$$K(m,n) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \delta_k(m)\overline{\delta_k(n)} = \langle \delta_m, \delta_n\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} = \delta_{m,n} \qquad m,n \in \mathbb{N}.$$ ♦

2.2. Restricción, Inclusión y Subespacios en un RKHS

Si bien no utilizaremos los resultados de esta sección, los nombramos (sin prueba) porque el primero de ellos es utilizado para la demostración del *teorema 4.2.1* en [GS02], no obstante las demostraciones se pueden ver en [Sa97] (págs. 37 y 38). Antes de enunciarlos, necesitamos una definición previa, decimos que una función $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ es una *matriz positiva* en el sentido de *E. H. Moore*, si para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todos $t_j \in \Omega$, $\xi_j \in \mathbb{C}$ con $j = 1,\dots,N$ se cumple

$$\sum_{j,k=1}^{N} K(t_j,t_k)\xi_j\overline{\xi_k} \geq 0, \tag{2.4}$$

Notar que en tal caso es

$$K(t,t) \geq 0, \qquad K(s,t) = \overline{K(t,s)} \qquad \text{y} \qquad |K(s,t)|^2 \leq K(s,s)K(t,t) \qquad \forall\, s,t \in \Omega.$$

Sabemos que toda función f en un RKHS $\mathcal{H}_K$ sobre Ω cumple $f(t) = \langle f, K_t\rangle\ \ \forall\, t \in \Omega$, veamos qué debe cumplir una función arbitraria $f : \Omega \to \mathbb{C}$ para pertenecer a $\mathcal{H}_K$.

Proposición 2.2.1. *Si $K, L : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ son matrices positivas entonces $\mathcal{H}_K \overset{\iota}{\hookrightarrow} \mathcal{H}_L$ (inclusión continua) si y sólo si $\exists\,\gamma > 0$ tal que $\gamma^2 L - K$ es una matriz positiva (se escribe $K << \gamma^2 L$). La mínima constante γ que satiface esto es precisamente $\|\iota\|$.*

Corolario 2.2.2. *Una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ pertenece a un RKHS $\mathcal{H}_L$ sobre Ω si y sólo si $\exists\,\gamma > 0$ tal que*

$$\left|\sum_{i=1}^{N} \xi_i f(s_i)\right|^2 = \sum_{i,j=1}^{N} \xi_i\overline{\xi_j} f(s_i)\overline{f(s_j)} \leq \gamma^2 \sum_{i,j=1}^{N} \xi_i\overline{\xi_j} L(s_i,s_j)$$

$\forall\, N \in \mathbb{N}$, $s_j \in \Omega$, $\xi_j \in \mathbb{C}$, $j = 1,\dots,N$. En tal caso, el mínimo sobre todas las constantes γ que cumplen lo anterior es precisamente $\|f\|_{\mathcal{H}_K}$.

Demostración. Basta considerar $\mathcal{H}_K := span\{f\}$, donde $K(s,t) = \overline{f(s)}f(t)$ para $s,t \in \Omega$, y aplicar la *proposición 2.2.1*. ■

La siguiente proposición nos dice la relación entre un RKHS $\mathcal{H}_K$ y sus subespacios cerrados cuya prueba es directa.

Proposición 2.2.3. *Si $\mathcal{H}_K$ es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert de funciones $\mathcal{H}$, entonces la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_K$ de $F \in \mathcal{H}$ se obtiene como*

$$f(t) = (P_{\mathcal{H}_K}F)(t) = \langle F, K(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}} \qquad t \in \Omega$$

Recíprocamente, si $\mathcal{H}_0$ es un subespacio cerrado de un RKHS $\mathcal{H}_K$ sobre Ω, el mismo es un RKHS sobre Ω con núcleo reproductivo K_0 dado por

$$K_0(s,t) = \langle P_{\mathcal{H}_0}K(s,\cdot), K(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{H}_K} \qquad s,t \in \Omega$$

donde $P_{\mathcal{H}_0}$ es la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_0$.

2.3. Construcción de un RKHS

Veamos ahora dos maneras de construir un RKHS. Para la primera utilizaremos matrices positivas (ver (2.4)) y para la segunda operadores acotados.

Proposición 2.3.1 (Construcción de un RKHS a partir de una Matriz Positiva, Aronszajn [Ar50])**.** *Sea $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ una matriz positiva, entonces existe $\mathcal{H}_K$ un RKHS sobre Ω unívocamente determinado por su núcleo reproductivo K.*

Demostración. Si K es una matriz positiva, llamamos $\mathcal{H}_0$ al espacio generado por las funciones con dominio Ω de la forma

$$f(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(s_j, t) \quad N \in \mathbb{N},\ s_j \in \Omega,\ \alpha_j \in \mathbb{C}$$

y definimos una norma (consistente) en $\mathcal{H}_0$ (la cual proviene de un producto interno y es independiente de la representación de f) como

$$\|f\|_0^2 = \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k K(s_k,\cdot) \right\|_0^2 = \sum_{j,k=1}^{N} K(s_j,s_k)\alpha_j\overline{\alpha_k},$$

entonces $(\mathcal{H}_0, \|.\|_0)$ es un espacio pre-Hilbert, completándolo agregando límites de sucesiones de Cauchy si fuera necesario (ver [Ar50] pág. 348), se obtiene un RKHS con K como su núcleo reproductivo. Ahora bien, si K es un núcleo reproductivo para un RKHS este satisface:

$$0 \leq \left\| \sum_{k=1}^{N} \alpha_k K(t_k,\cdot) \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(t_j,\cdot), \sum_{k=1}^{N} \alpha_k K(t_k,\cdot) \right\rangle = \sum_{j,k=1}^{N} K(t_j,t_k)\alpha_j\overline{\alpha_k}$$

y por lo tanto todo núcleo reproductivo es una *matriz positiva*, de donde un RKHS está unívocamente determinado por su núcleo reproductivo K. ∎

Ejemplo. Sean $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $e_k(t) := e^{ikt}$ para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $H_n = span\{e_k : k = 1,2,\ldots,n\}$. Así, H_n es un $\mathbb{C}$-e.v. de funciones a valores complejos sobre el intervalo $[0,1]$ de dimensión n (e_k son *l.i.*). Si $f \in H_n$ entonces existen únicos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números complejos tales que $f(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k(t) \quad t \in [0,1]$. Definimos un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en H_n por

$$\langle f, g \rangle := \sum_{j,k=1}^{n} G_{j,k}\, \alpha_j \overline{\beta_k} \qquad \text{con} \qquad g(t) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k(t) \quad t \in [0,1]$$

donde $\{G_{j,k}\}$ es la matriz de *Gram* del sistema $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, con lo cual es una matriz inversible y Hermitiana, es decir, la inversa es igual a su traspuesta conjugada (adjunta), que llamaremos $\{H_{j,k}\}$. Luego, la función $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por

$$K(s,t) = \sum_{j,k=1}^{n} H_{j,k}\, \overline{e_j(s)} e_k(t) \qquad s,t \in [0,1]$$

es el núcleo reproductivo de H_n. ♦

La siguiente construcción de un RKHS es la que utilizaremos reiteradamente en los teoremas de muestreo.

Proposición 2.3.2 (Construcción de un RKHS a partir de un Operador Acotado, Saitoh [Sa97]). *Sean Ω un conjunto arbitrario, $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ una función tal que el conjunto $\{\Phi(t) : t \in \Omega\}$ es completo en $\mathcal{H}$. Entonces existe $\mathcal{H}_K$ un RKHS sobre Ω isométricamente isomorfo a $\mathcal{H}$.*

Demostración. Para cada $x \in \mathcal{H}$ definimos la función $f_x : \Omega \to \mathbb{C}$ que en cada $t \in \Omega$ está dada por $f_x(t) = \langle x, \Phi(t) \rangle$. Obtenemos así un operador lineal (bien definido) $T : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^{\Omega}$ mediante $Tx = f_x$. Por la completitud de $\{\Phi(t) : t \in \Omega\}$ se desprende que T es inyectivo, ya que si $0 = (Tx)(t) = \langle x, \Phi(t) \rangle \;\; \forall t \in \Omega$ entonces $x = 0$ y por lo tanto $f_x \equiv 0$. De hecho $\{\Phi(t) : t \in \Omega\}$ es completo si y sólo si T es inyectivo. Definimos ahora una función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ mediante

$$K(s,t) := \langle \Phi(s), \Phi(t) \rangle \qquad s,t \in \Omega,$$

con lo cual $f_{\Phi(s)}(t) = K_s(t) \;\forall\, s,t \in \Omega$. Notamos por $\mathcal{H}_K$ al conjunto de funciones de $\mathcal{R}(T)$ y definimos sobre él la norma

$$\|f_x\|_{\mathcal{H}_K} := \|x\| \qquad x \in \mathcal{H}.$$

Con esta norma (la cual induce un producto interno sobre $\mathcal{H}_K$), T resulta un isomorfismo isométrico y por lo tanto $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_K$. Más aun, $\mathcal{H}_K$ resulta un RKHS sobre Ω con núcleo reproductivo K pues el item (P1) de la *definición* 2.1.1 se deduce de la inyectividad de T, mientras que el item (P2) vale pues al ser T una isometría se cumple

$$f_x(t) = \langle x, \Phi(t) \rangle = \langle Tx, T\Phi(t) \rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle f_x, K_t \rangle_{\mathcal{H}_K} \qquad x \in \mathcal{H},\; t \in \Omega. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo. Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto, $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(I)$, $\kappa : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ tal que $\{\kappa(t, \cdot) : t \in \Omega\}$ es *completo* en $\mathcal{L}_2(I)$ y $T : \mathcal{L}_2(I) \to \mathbb{C}^{\Omega}$ el operador integral con núcleo κ dado por

$$f(t) := (TF)(t) = \int_I F(x) \overline{\kappa(t,x)} dx = \langle F, \kappa(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{L}_2(I)} \qquad t \in \Omega$$

Definimos entonces $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ por $K(s,t) = \langle \kappa(s, \cdot), \kappa(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{L}_2(I)}$. ♦

Volveremos sobre este ejemplo cuando veamos el *teorema de muestreo de* Kramer 4.1.2.

2.4. Primera Generalización de un RKHS

Terminamos esta sección Viendo una primera generalización de un RKHS reemplazando $\mathbb{C}$ por un espacio de Hilbert arbitrario $\mathcal{X}$. Supongamos que tenemos $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ y $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ dos espacios de Hilbert, con $\mathcal{H}$ un espacio de funciones definidas sobre un conjunto Ω a valores en $\mathcal{X}$. Decimos que $\mathcal{H}$ es un *Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo* (RKHS) sobre Ω si para todo $t \in \Omega$ las evaluaciones en t, $\mathcal{E}_t : \mathcal{H} \to \mathcal{X}$ con $\mathcal{E}_t f = f(t)$, son operadores lineales acotados ($\mathcal{E}_t \in B(\mathcal{H}, \mathcal{X})$). En este caso el adjunto de $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{E}_t^* : \mathcal{X} \to \mathcal{H}$, también es acotado para cada $t \in \Omega$ y queda definida entonces una función $K : \Omega \times \Omega \to B(\mathcal{X})$ por $K(s,t) := \mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^* \quad s, t \in \Omega$. Decimos entonces que K es el núcleo reproductivo del RKHS $\mathcal{H}$. Por su definición, y gracias a la Ley exponencial, K cumple $K_s(\cdot)x := K(s,\cdot)x = \mathcal{E}_s^* x(\cdot) \in \mathcal{H} \quad s \in \Omega$, $x \in \mathcal{X}$. Por lo tanto para todos $f \in \mathcal{H}$, $s \in \Omega$, $x \in \mathcal{X}$ tenemos

$$\langle f, K_s(\cdot)x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, \mathcal{E}_s^* x\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{E}_s f, x\rangle_{\mathcal{X}} = \langle f(s), x\rangle_{\mathcal{X}}.$$

Cuando una función K cumple estas propiedades diremos que K tiene la *propiedad de núcleo reproductivo*. Otra propiedad que cumple un núcleo reproductivo K es la siguiente:

$$\sum_{j,k=1}^{N} \langle K(t_j, t_k)x_k, x_j\rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{j,k=1}^{N} \langle \mathcal{E}_{t_j} \mathcal{E}_{t_k}^* x_k, x_j\rangle_{\mathcal{X}} = \sum_{j,k=1}^{N} \langle \mathcal{E}_{t_k}^* x_k, \mathcal{E}_{t_j}^* x_j\rangle_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{j=1}^{N} K_{t_j} x_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0$$

para todos $N \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_N \in \Omega$, $x_1, \ldots, x_N \in \mathcal{X}$. De nuevo, cuando una función $K : \Omega \times \Omega \to B(\mathcal{X})$ cumple esta propiedad diremos que K es un *núcleo positivo* (comparar con (2.4)). Recíprocamente, si $K : \Omega \times \Omega \to B(\mathcal{X})$ es un *núcleo positivo*, se puede definir un espacio pre-Hilbert

$$\mathcal{H}_0 := span\{K(s,\cdot)x : (s,x) \in \Omega \times \mathcal{X}\}$$

con producto interno dado por

$$\left\langle \sum_{j=1}^{N} K(t_j,\cdot)x_j, \sum_{k=1}^{N} K(t_k,\cdot)x_k \right\rangle_{\mathcal{H}_0} := \sum_{j,k=1}^{N} \langle K(t_j, t_k)x_k, x_j\rangle_{\mathcal{X}}.$$

Completando $\mathcal{H}_0$ si fuera necesario obtenemos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ que puede ser identificado con un espacio de funciones a valores en $\mathcal{X}$ sobre Ω con núcleo reproductivo K (un RKHS). Por consiguiente K cumple $K(s,t) = \mathcal{E}_t \mathcal{E}_s^* \ \ \forall\, s, t \in \Omega$, con $\mathcal{E}_t : \mathcal{H} \to \mathcal{X}$ como antes son las evaluaciones en $t \in \Omega$. Por otro lado, si ahora tenemos una $K : \Omega \times \Omega \to B(\mathcal{X})$ que posee una factorización de la forma $K(s,t) = \Phi(t)\Phi(s)^* \ \ \forall\, s, t \in \Omega$, con $\Phi(t) : \mathcal{H} \to \mathcal{X}$ un operador lineal acotado entre espacios de Hilbert, es decir con $\Phi : \Omega \to B(\mathcal{H}, \mathcal{X})$, entonces

$$\sum_{j,k=1}^{N} \langle K(t_j, t_k)x_k, x_j\rangle_{\mathcal{X}} = \left\| \sum_{j=1}^{N} \Phi(t_j)^* x_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0$$

y por lo tanto K es un *núcleo positivo*. Luego, definimos explicitamente el RKHS sobre Ω por $\mathcal{H}_K := \{\Phi(s)f : f \in \mathcal{H}\}$ con norma $\|\Phi(s)f\|_{\mathcal{H}_K} = \|Qf\|_{\mathcal{H}}$, donde $Q : \mathcal{H} \to Ker(M_{\Phi(s)})^{\perp}$ proyector ortogonal y $M_{\Phi(s)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_K$ es el operador de "multiplicación" por $\Phi(s)$, $M_{\Phi(s)} f = \Phi(s)f$.

Se pueden ver algunos ejemplos con esta generalización en [BV03].

Capítulo 3

Sucesiones en Espacios de Hilbert

En este capítulo presentaremos las definiciones de *sucesiones Bessel, Riesz-Fischer, Marcos y Bases de Riesz* en el contexto de espacios de Hilbert para luego ser extendidas a espacios de Banach en el *capítulo 6*. Salvo indicación contraria, $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ será un espacio de Hilbert *Separable* e $\mathbb{I}$ un conjunto de índices a lo sumo numerable bien ordenado donde escribiremos $\mathbb{I}_n$ para denotar los primeros n elementos de $\mathbb{I}$.

3.1. Sucesiones Bessel

Definición 3.1.1. Una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ se dice *Bessel* si

$$\{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I}) \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Dada una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ se definen los operadores de *Análisis* C y de *Síntesis* R asociados por:

$$\begin{array}{rcl} C : D(C) \subset \mathcal{H} & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{I}) \\ f & \longmapsto & \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} R : D(R) \subset \ell_2(\mathbb{I}) & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ c & \longmapsto & \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \end{array}$$

donde

$$\begin{aligned} D(C) &:= \left\{ f \in \mathcal{H} : \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I}) \right\} \\ D(R) &:= \left\{ c \in \ell_2(\mathbb{I}) : \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \text{ converge en } \mathcal{H} \right\}. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.2. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión, son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es Bessel.

ii) El operador de análisis $Cf = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un operador lineal acotado entre $\mathcal{H}$ y $\ell_2(\mathbb{I})$, es decir, existe una constante $B > 0$ tal que

$$\|Cf\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} = \sum_{j\in\mathbb{I}} |\langle f, f_j\rangle|^2 \le B\|f\|^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}. \tag{3.2}$$

iii) *Si* $c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I})$ *la serie* $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ *converge incondicionalmente en* $\mathcal{H}$ *y el operador de síntesis* $Rc = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ *es un operador lineal acotado de* $\ell_2(\mathbb{I})$ *en* $\mathcal{H}$*, es decir, existe una constante* $B > 0$ *tal que*

$$\|Rc\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}^2 \qquad \forall\, c \in \ell_2(\mathbb{I}). \tag{3.3}$$

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Resta ver que el operador de análisis sea acotado en $\mathcal{H}$. Podemos verlo recurriendo al *teorema de Banach-Steinhaus 1.1.17* o mediante el *teorema del gráfico cerrado 1.1.15*, utilizando este último debido a que es más sencillo. Supongamos entonces que tenemos $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$, $g \in \mathcal{H}$ y $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ tales que

$$g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathcal{H}}} g \quad \text{y} \quad Cg_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\ell_2(\mathbb{I})}} c,$$

entonces por la continuidad del producto interno es $\langle g_k, f_j\rangle \longrightarrow \langle g, f_j\rangle = (Cg)_j$ para cada $j \in \mathbb{I}$ y como $(Cg_k)_j = \langle g_k, f_j\rangle \longrightarrow c_j$, por unicidad del límite es $(Cg)_j = c_j$ para cada $j \in \mathbb{I}$, de donde $Cg = c$.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* Mostraremos que se cumple (1.10) de la *proposición 1.1.33*. Por el *teorema de representación de Riesz* para $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sup_{\mu\in B_{\mathcal{H}^*}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |(c_j f_j, \mu)_{\mathcal{H}}| \right\} = \sup_{f\in B_{\mathcal{H}}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |\langle c_j f_j, f\rangle| \right\}$$

y como

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |\langle c_j f_j, f\rangle| &= \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |c_j||\langle f, f_j\rangle| \\ &\leq \|Cf\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \left(\sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |c_j|^2 \right)^{1/2} \leq B \underbrace{\|f\|_{\mathcal{H}}}_{\leq 1} \left(\sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |c_j|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{N\to\infty} \left(\sup_{f\in B_{\mathcal{H}}} \left\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |\langle c_j f_j, f\rangle| \right\} \right) \leq B \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |c_j|^2 \right)^{1/2} = 0$$

Para ver que el operador de síntesis R es acotado en $\ell_2(\mathbb{I})$ mostraremos que $C^* = R$, es decir,

$$\langle Cf, c\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})} = \langle f, Rc\rangle_{\mathcal{H}} \quad f \in \mathcal{H},\, c \in \ell_2(\mathbb{N})$$

Como ya tenemos convergencia (incondicional) de la serie podemos hacer la siguiente cuenta:

$$\langle f, Rc\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle f, \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, f_j\rangle_{\mathcal{H}} \overline{c_j} = \langle Cf, c\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}.$$

iii) $\Rightarrow$ *ii)* La cuenta anterior muestra que R dado por (3.3) es el adjunto de C, de donde C es acotado.

ii) $\Rightarrow$ *i)* Como $C : \mathcal{H} \to \ell_2(\mathbb{I})$ es acotado, ciertamente $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Bessel*. ■

Como R es el operador adjunto de C vale que $\|R\| = \|C\| = B^{1/2}$, donde B se llama la *cota Bessel*. Otra manera de decir que una sucesión es *Bessel* es decir que el rango del operador de análisis C está contenido en $\ell_2(\mathbb{I})$.

Como todo operador lineal acotado definido sobre un conjunto denso se extiende de manera continua a la clausura, para ver que una sucesión es *Bessel* basta comprobar que se cumple (3.1) o (3.2) para toda f en un denso de $\mathcal{H}$.

3.2. Sucesiones Riesz-Fischer

Definición 3.2.1. Una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ se dice *Riesz-Fischer* si

$$\forall\, c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I}), \quad \exists\, f \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad \langle f, f_j\rangle = c_j \quad \forall\, j \in \mathbb{I}. \tag{3.4}$$

Notar que decir que $\langle f, f_j\rangle = c_j \;\forall\, j \in \mathbb{I}$ en (3.4) es lo mismo que decir que $Cf = c$.

Proposición 3.2.2. *Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ es una sucesión Riesz-Fischer entonces:*

a) Existe una constante $A > 0$ tal que

$$\textit{Dada } c \in \ell_2(\mathbb{I}), \quad \exists\, f \in \mathcal{H} \quad \text{que cumple} \quad A\|f\|_{\mathcal{H}} \le \|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}. \tag{3.5}$$

b) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal.

Demostración. *a*) Si C es el operador de análisis, entonces N dado por

$$N = \{f \in \mathcal{H} : Cf = 0\} = \{f \in \mathcal{H} : \langle f, f_j\rangle = 0 \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}\} = \bigcap_{j\in\mathbb{I}} Ker(f_j^*)$$

es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$ y podemos considerar el espacio de Hilbert $X = \mathcal{H}/N$ con la norma usual. Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una sucesión *Riesz-Fischer*, podemos definir un operador lineal $T : \ell_2(\mathbb{I}) \to X$ como $Tc = \overline{f}$ donde $\overline{f}$ denota la clase de $f \in \mathcal{H}$ en X, es decir, $\overline{f} = f + f_0$ con $f_0 \in N$ cualquiera puede ser un representante.

T está bien definido pues si $g \in \mathcal{H}$ es tal que $Cg = c$, entonces $f_0 = g - f \in N$, $Tc = f + (g - f) = g$ y $g \in \overline{f}$.

Veamos que T tiene gráfico cerrado y apelemos al *teorema del gráfico cerrado*. Supongamos entonces que tenemos

$$c^k \overset{\|\cdot\|_{\ell_2(\mathbb{I})}}{\longrightarrow} c \quad \text{y} \quad Tc^k \overset{\|\cdot\|_X}{\longrightarrow} \overline{g},$$

es decir, $c_j^k \longrightarrow c_j \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$.

Existe $\{g^k\}_{k\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ tal que $Cg^k = c^k \;\; \forall\, k \in \mathbb{I}$, de donde $\langle g^k, f_j\rangle = c_j^k \;\; \forall\, j, k \in \mathbb{I}$. Esta última converge a $c_j \;\forall\, j \in \mathbb{I}$ y como $\overline{g^k} \longrightarrow \overline{g}$ en X, podemos elegir representantes para cada k de modo que $g^k \longrightarrow g$ en $\mathcal{H}$, con lo cual

$$\langle g^k, f_j\rangle \longrightarrow \langle g, f_j\rangle \quad \forall\, j \in \mathbb{I},$$

y por lo tanto, por unicidad del límite, debe ser $\langle g, f_j\rangle = c_j \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$, de donde $Cg = c$ y $Tc = \overline{g}$ como queríamos.

Por el *teorema del gráfico cerrado* el operador T es acotado y $\exists\, A > 0$ tal que para toda $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ se cumple

$$A\|\overline{g}\|_X = A\|Tc\|_X \leq \|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \quad g \in \mathcal{H} \quad \text{tal que} \quad Cg = c.$$

Fijado g tal que $Cg = c$, como N es un subespacio cerrado existe un (único) $h_0 \in N$ tal que

$$\|\overline{g}\|_X := \text{ínf}\{\|g-h\|_{\mathcal{H}} : h \in N\} = \|g - h_0\|_{\mathcal{H}}$$

Tomando $f := g - h_0$, se cumple $A\|f\|_{\mathcal{H}} \leq \|Cf\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$.

b) Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Riesz-Fischer*, si $\delta^k = \{\delta^k_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ denota al vector canónico k-ésimo de $\ell_2(\mathbb{N})$, entonces existe $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ tal que $Cg_k = \delta^k \ \forall\, k \in \mathbb{I}$ de donde $\langle g_k, f_j\rangle = \delta_{k,j} \ \forall\, k, j \in \mathbb{I}$ y $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una sucesión biortogonal de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$, usando ahora la *proposición 1.1.31* junto con el *teorema de representación de Riesz 1.2.8*, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ resulta minimal. ■

Teorema 3.2.3. *Sea* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ *una sucesión, son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es Riesz-Fischer.*

ii) Existe una constante $A > 0$ *tal que* $\forall\, c \in c_{00}(\mathbb{I})$ *(a lo sumo finitos términos no nulos) se tiene*

$$A\|c\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|^2_{\mathcal{H}}.$$

Demostración. *i*) $\Rightarrow$ *ii*) Sea $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ con a lo sumo finitos términos no nulos. Por *Hahn-Banach* existe $d \in S_{\ell_2(\mathbb{I})}$ tal que $|\langle c, d\rangle_{\ell_2(\mathbb{I})}| = \|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$ y como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Riesz-Fischer*, por (3.5) de la *proposición 3.2.2*, existen una constante $A > 0$ y $f \in \mathcal{H}$ tales que $A\|f\|_{\mathcal{H}} \leq 1$, entonces

$$\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})} = \left| \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, f_j\rangle \overline{d_j} \right| = \left| \left\langle f, \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j \right\rangle \right| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j \right\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$$

y despejando estamos.

ii) $\Rightarrow$ *i*) Sean $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ y $M = span\{f_j : j \in \mathbb{I}\}$. Definimos un funcional lineal ν sobre M como:

$$\nu\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j \overline{c_j} = \langle d, c\rangle_{\ell_2(\mathbb{I})} \quad d \in (c_{00}, \|\cdot\|_{\ell_2(\mathbb{I})})$$

Por hipótesis

$$\left|\nu\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j\right)\right| = \left|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j \overline{c_j}\right| \leq \|d\|_{\ell_2(\mathbb{I})}\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \leq \frac{1}{A}\left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j\right\|_{\mathcal{H}} \|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$$

con lo cual ν es acotado y $\|\nu\| \leq \frac{1}{A}\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$. Lo extendemos por *Hahn-Banach* a todo $\mathcal{H}$ (o lo extendemos por densidad a $\overline{M}$ y luego a todo $\mathcal{H}$ como 0 en $\overline{M}^{\perp}$), y lo seguimos llamando igual. Por el *teorema de representación de Riesz* existe $f \in \mathcal{H}$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \|\nu\| \leq \frac{1}{A}\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}$$

y

$$\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j\overline{c_j} = \left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j, \nu\right)_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j, f\right\rangle = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j\langle f_j, f\rangle$$

En particular, $\langle f, f_j\rangle = c_j \ \ \forall j \in \mathbb{I}$ y $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ cumple (3.4). ■

Otra manera de decir que una sucesión es *Riesz-Fischer* es decir que $\ell_2(\mathbb{I})$ está contenido en el rango del operador de análisis C.

Se pueden ver otras caracterizaciones y resultados varios (ejemplos también) acerca de sucesiones *Riesz-Fischer* en [Yo80, CCLL02].

3.3. Marcos

Definición 3.3.1. Una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ se dice *Marco* si existen constantes $B \geq A > 0$ tales que

$$A\|f\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|\{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}}\|_{\ell_2(\mathbb{I})} \leq B\|f\|^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}. \tag{3.6}$$

Por la acotación por arriba (B *cota superior Frame*) es obvio que todo *Marco* es *Bessel.*

Teorema 3.3.2. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión, son equivalentes:*

i) *$\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es Marco.*

ii) *Existen constantes $B \geq A > 0$ tales que*

$$A\|f\|^2_{\mathcal{H}} \leq \|Cf\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} \leq B\|f\|^2_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}.$$

iii) *El Operador de Análisis C es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}$ en un subespacio cerrado de $\ell_2(\mathbb{I})$.*

iv) *El Operador de Síntesis R es acotado y sobreyectivo.*

v) *$\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es Bessel, completa y existen constantes $B \geq A > 0$ tales que*

$$A\|c\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} \leq \|Rc\|^2_{\mathcal{H}} \leq B\|c\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} \qquad \forall\, c \in Ker(R)^{\perp}. \tag{3.7}$$

Demostración. $i) \Leftrightarrow ii)$ Es claro ya que $Cf = \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}} \ \ f \in \mathcal{H}$.

$ii) \Rightarrow iii)$ La acotación por abajo (A *cota inferior Frame*) nos dice que C está acotado inferiormente de donde C tiene rango cerrado y es inyectivo por la *proposición 1.1.14*, luego por el *teorema de la aplicación abierta* $C : \mathcal{H} \to \mathcal{R}(T)$ es isomorfismo topológico.

$iii) \Leftrightarrow ii)$ Si B es la constante de acotación de C y A^{-1} es la constante de acotación de C^{-1} entonces C cumple (3.6) con estas constantes A y B.

$iii) \Leftrightarrow iv)$ Vimos en la *proposición 3.1.2* que R es el adjunto de C y ya sabemos que uno es acotado si y sólo si el otro lo es, también, otra vez por la *proposición 1.1.14*, C está acotado inferiormente si y sólo si R es sobreyectivo.

$ii) \Rightarrow v)$ La desigualdad por arriba nos dice que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Bessel* y la desigualdad por abajo implica que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa pues si existe $f \in \mathcal{H}$ tal que $Cf = 0$ (y por lo tanto $\langle f, f_j\rangle = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{I}$) entonces $A\|f\|_{\mathcal{H}} \leq 0$ de donde $f = 0$. Resta ver que el operador de síntesis cumple (3.7). Por un lado, para $c \in \ell_2(\mathbb{N})$ tenemos que $\|Rc\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|R\|^2 \|c\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^2 = B\|c\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^2$ y por otro lado, para $c \in Ker(R)^\perp = \mathcal{R}(C)$, digamos $Cf = c$, tenemos:

$$\begin{aligned} A\|c\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^4 &= A|\langle c, c\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}|^2 = A|\langle c, Cf\rangle_{\ell_2(\mathbb{N})}|^2 = A|\langle Rc, f\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \\ &\leq A\|f\|_{\mathcal{H}}^2 \|Rc\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|Cf\|_{\mathcal{H}}^2 \|Rc\|_{\mathcal{H}}^2 = \|c\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^2 \|Rc\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

de donde $A\|c\|_{\ell_2(\mathbb{N})}^2 \leq \|Rc\|_{\mathcal{H}}^2$.

$v) \Rightarrow iv)$ Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Bessel* entonces $B = \|R\|^2 = \|C\|^2$ y R es acotado. Al ser $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ completa en $\mathcal{H}$ el operador de análisis C es inyectivo y por lo tanto su adjunto R tiene rango denso. Para ver que R es sobreyectivo alcanza con ver que tiene rango cerrado, o bien que toda sucesión de Cauchy contenida en su rango es convergente. Sea pues $\{g_j = Rc_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{R}(R)$, entonces $\{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset Ker(R)^\perp$ y como vale (3.7) obtenemos

$$A\|c_j - c_k\|_{\ell_2(\mathbb{I})}^2 \leq \|R(c_j - c_k)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|g_j - g_k\|_{\mathcal{H}}^2 \underset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

de donde $\{c_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es de Cauchy en $Ker(R)^\perp$ y por lo tanto convergente a una sucesión $c \in Ker(R)^\perp$, ahora usando la desigualdad por arriba de (3.7) es

$$\|g_j - Rc\|_{\mathcal{H}}^2 = \|R(c_j - c)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|c_j - c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}^2 \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y el teorema queda demostrado. ■

Otra manera de decir que una sucesión es un *Marco* es decir que el rango del operador de análisis C es complementado en $\ell_2(\mathbb{I})$.

3.4. Bases de Riesz

Definición 3.4.1. Una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ se dice *Base de Riesz* si es *completa*, la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ converge para toda $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ y existen constantes $B \geq A > 0$ tales que

$$A\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}^2 \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})}^2 \qquad \forall\, c \in \ell_2(\mathbb{I}). \tag{3.8}$$

Proposición 3.4.2. *Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ es Base de Riesz entonces es un Marco, Bessel, Riesz-Fischer y minimal .*

Demostración. Claramente (3.8) implica (3.7), $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa por definición y resulta *Bessel* porque la serie $Rc = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ converge para toda $c \in \ell_2(\mathbb{I})$, por lo tanto toda *Base de Riesz* es un *Marco* y por consiguiente es *Bessel*.

La desigualdad por abajo en (3.8) implica que R es inyectivo y como ya sabemos que tiene rango cerrado por la cuenta hecha en la prueba de la *proposición* 3.3.2, el operador de análisis C tiene rango denso y cerrado con lo que resulta sobreyectivo y por lo tanto $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *Riesz-Fischer*. La *proposición* 3.2.2 nos dice entonces que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ también es minimal. ■

Un *Marco* no está tan lejos de ser una *Base de Riesz* como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.4.3. *Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ es un Marco que además es minimal, entonces es una Base de Riesz.*

Demostración. Por el item $v)$ del teorema 3.3.2 resta ver que valga (3.7) para toda sucesión $c \in \ell_2(\mathbb{I})$ o, equivalentemente, que R sea inyectivo. Supongamos que $Rc = 0$ con $c \neq 0$, es decir, $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j = 0$ y existe $k \in \mathbb{I}$ tal que $c_k \neq 0$, entonces

$$f_k = \sum_{j\neq k} -\frac{c_j}{c_k} f_j$$

y $f_k \in \overline{span}\{f_j : j \neq k\}$ en contradicción de la minimalidad de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$, luego R es inyectivo y $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una *Base de Riesz.* ■

También tenemos las siguientes caracterizaciones.

Teorema 3.4.4. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ una sucesión, son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es Base de Riesz.*

ii) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es base de Schauder incondicional acotada.*

iii) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es base de Schauder y* $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ *converge* $\Leftrightarrow$ $\sum_{j\in\mathbb{I}} |c_j|^2$ *converge.*

iv) El operador de Análisis C es un isomorfismo topológico de $\mathcal{H}$ en $\ell_2(\mathbb{I})$.

v) El Operador de Síntesis R es un isomorfismo topológico de $\ell_2(\mathbb{I})$ en $\mathcal{H}$.

Demostración. Probaremos $i) \Leftrightarrow iv) \Leftrightarrow v)$ como así también que estas implican $ii)$ y $iii)$ dejando las vueltas debido a que son necesarias otras herramientas acerca de bases que no hemos discutido y llevan bastante desarrollo. Estas se pueden ver en [He10] (teorema 7.13 pág. 197).

$i) \Rightarrow v)$ Como ya sabemos que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ resulta un *Marco*, por el *teorema 3.3.2* R es acotado y sobreyectivo, además la desigualdad por abajo en (3.8) nos dice que también es inyectivo, concluimos por el *teorema de la aplicación abierta* que R es isomorfismo topológico.

$v) \Rightarrow i)$ Como R es isomorfismo topológico, en particular es acotado inferiormente y acotado, de donde cumple (3.8) y por supuesto la convergencia de la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ para toda sucesión $c \in \ell_2(\mathbb{I})$. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa ya que $R\delta^j = f_j \ \ \forall j \in \mathbb{I}$ con δ^j el j-ésimo vector de la base canónica de $\ell_2(\mathbb{I})$ y R manda sucesiones completas en sucesiones completas.

$iv) \Leftrightarrow v)$ Es claro ya que $R = C^*$.

$v) \Rightarrow ii)$ Como R es isomorfismo topológico manda bases incondicionales acotadas en bases incondicionales acotadas, el resultado se sigue de que $R\delta^j = f_j \ \ \forall j \in \mathbb{I}$ con δ^j el j-ésimo vector de la base canónica de $\ell_2(\mathbb{I})$.

$v) \Rightarrow iii)$ Como R es isomorfismo topológico entre $\ell_2(\mathbb{N})$ y $\mathcal{H}$, por un lado manda bases en bases y $R\delta^j = f_j \ \ \forall j \in \mathbb{I}$ con δ^j el j-ésimo vector de la base canónica de $\ell_2(\mathbb{I})$, por otro lado R está dado mediante $c \in \ell_2(\mathbb{N}) \mapsto \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$, de donde $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ converge si y sólo si $\sum_{j\in\mathbb{I}} |c_j|^2$ converge. ■

Otra manera de decir que una sucesión es una *Base de Riesz* es decir que el rango del operador de análisis C es igual a $\ell_2(\mathbb{I})$.

3.5. Reconstrucción

Estudiamos a continuación la reconstrucción de todos los $f \in \mathcal{H}$. Cuando tenemos una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ que es *Bessel*, podemos definir el *Operador Frame* o de *Reconstrucción* $S := RC \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, que al satisfacer

$$Sf = RCf = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, f_j\rangle f_j \qquad f \in \mathcal{H} \tag{3.9}$$

entonces cumple

$$\langle Sf, f\rangle = \sum_{j\in\mathbb{I}} |\langle f, f_j\rangle|^2 = \|Cf\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} \geq 0 \qquad \forall\, f \in \mathcal{H} \tag{3.10}$$

de donde S es un operador *positivo* y por lo tanto *autoadjunto*. También tenemos el *Operador Gram* $G := CR \in \mathcal{B}(\ell_2(\mathbb{I}))$ que satisface

$$Gc = CRc = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{I}} c_k \langle f_k, f_j\rangle \right\}_{j\in\mathbb{I}} \qquad c \in \ell_2(\mathbb{I})$$

Si ahora $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un *Marco*, entonces $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa por el *teorema 3.3.2*, de donde el "$\geq$" en (3.10) es en realidad un "$>$" si $f \neq 0$. Así, S es inyectivo, tiene rango cerrado y es autoadjunto, con lo que S es biyectivo y por lo tanto un isomorfismo topológico. Aplicando S^{-1} en (3.9) obtenemos

$$f = S^{-1}Sf = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, f_j\rangle S^{-1}f_j \qquad f \in \mathcal{H} \tag{3.11}$$

y considerando $S^{-1}f \in \mathcal{H}$ y aplicando S queda

$$f = SS^{-1}f = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle S^{-1}f, f_j\rangle f_j = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, S^{-1}f_j\rangle f_j \qquad f \in \mathcal{H} \tag{3.12}$$

Las fórmulas (3.11) y (3.12) se denominan *fórmulas de reconstrucción* y la sucesión $\{S^{-1}f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ se llama *Marco Dual Canónico* de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ con cotas asociadas B^{-1} y A^{-1}. Las sucesiones $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ y $\{S^{-1}f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ son biortogonales entre sí cuando $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal ($\therefore$ *Bases de Riesz* por *proposición 3.4.3*), pues

$$f_k = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f_k, S^{-1}f_j\rangle f_j \qquad k \in \mathbb{I}$$

implica que $\langle f_k, S^{-1}f_j\rangle = \delta_{k,j}\ \ \forall\, k, j \in \mathbb{I}$.

Lo interesante de los *Marcos* es que se pueden reconstruir los elementos del espacio con distintos coeficientes, a continuación veremos que de todas las posibles maneras, la que utiliza los coeficientes del *Marco Dual Canónico* es la más económica.

Proposición 3.5.1. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ un Marco con Marco Dual Canónico $\{\widetilde{f_j}\}_{j\in\mathbb{I}}$. Si $f \in \mathcal{H}$ se escribe como $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$, entonces*

$$\|\{c_j\}_{j\in\mathbb{I}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} = \|\{\langle f, \widetilde{f_j}\rangle\}_{j\in\mathbb{I}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})} + \|\{\langle f, \widetilde{f_j}\rangle - c_j\}_{j\in\mathbb{I}}\|^2_{\ell_2(\mathbb{I})}$$

En particular, la sucesión $\{\langle f, \widetilde{f_j}\rangle\}_{j\in\mathbb{I}}$ tiene la mínima norma en $\ell_2(\mathbb{I})$ entre todas las posibles sucesiones.

Demostración. Son cuentas directas (ver [He10] teorema 8.21 pág. 221). ∎

Capítulo 4

Muestreo en RKHS's

Además de utilizar $\mathbb{I}$ para referirnos a un conjunto de índices a lo sumo numerable y bien ordenado arbitrario, en esta sección utilizaremos varios conjuntos de índices, como por ejemplo $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ y $\mathbb{Z}$. Seguidamente enunciamos unos "teoremas de muestreo de Kramer" junto con un teorema "recíproco" que es el resultado principal que se intenta extender en esta tesis.

Antes de eso, supongamos que tenemos $\mathcal{H}_K$ un RKHS sobre Ω con núcleo reproductivo K y una sucesión $\{t_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \Omega$ tal que $\{K_{t_j}\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un *Marco* para $\mathcal{H}_K$. Por lo visto al final del capítulo anterior podemos escribir

$$f = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, K_{t_j}\rangle K_{t_j} = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j) K_{t_j} \qquad f \in \mathcal{H}_K \tag{4.1}$$

y así recuperar toda función de $\mathcal{H}_K$ mediante sus muestras en el conjunto $\{t_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \Omega$.

Para una introducción a la teoría de muestreo y una disertación acerca de por qué los RKHS's son espacios convenientes para la misma ver [Ga15].

4.1. Teoremas de Muestreo de Kramer en RKHS's

El siguiente es el teorema de muestreo más famoso sin lugar a dudas que aparece en la literatura con diferentes nombres y versiones, habiendo elegido aquí la siguiente:

Teorema 4.1.1 (Teorema de Muestreo de Whittaker-Shannon-Kotel'nikov)**.** *Toda $f \in \mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ de banda limitada (el soporte de la tranformada de Fourier de f está en $[-\omega, \omega]$) tiene la representación*

$$f(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} f\left(\frac{n}{2\omega}\right) \frac{\sin 2\pi\omega(t - n/2\omega)}{2\pi\omega(t - n/2\omega)} \tag{4.2}$$

con convergencia absoluta de la serie en $t \in \mathbb{R}$.

Tomando $\omega = 1/2$, (4.2) es un caso particular de (4.1) ya que es: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{H}_K = PW(\mathbb{R})$ (página 20), $\mathbb{I} = \mathbb{Z}$, $\{t_n = n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ y $K_n(t) = sinc(t - n)$ $n \in \mathbb{Z}$, $t \in \mathbb{R}$, quedando

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \qquad f \in PW(\mathbb{R}),\ t \in \mathbb{R}.$$

En la publicación de *Kramer* en 1959 [Kr59] el autor empieza el artículo haciendo alusión al *teorema 4.1.1*, nombrándolo como un resultado obtenido por *J. M. Whittacker* (hijo de E. T. Whittacker), y cómo su resultado lo generaliza (ver [Ga00]).

Teorema 4.1.2 (Teorema de Muestreo de Kramer)**.** *Sean $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo compacto, Ω un conjunto, $\kappa : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ tal que $\kappa(s,\cdot) := \kappa_s(\cdot) \in \mathcal{L}_2(I)$ $\forall\, s \in \Omega$ y $T : \mathcal{L}_2(I) \to \mathbb{C}^{\Omega}$ el operador integral con núcleo κ dado por:*

$$f(s) := (TF)(s) = \int_I F(x)\overline{\kappa(s,x)}dx = \langle F, \kappa_s\rangle_{\mathcal{L}_2(I)} \qquad s \in \Omega$$

Supongamos que existe una sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \Omega$ tal que $\{\kappa(s_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}_2(I)$ es ortogonal y completa, entonces para $f = TF$ con $F \in \mathcal{L}_2(I)$:

$$f(s) = \lim_{N\to\infty} \sum_{|n|\le N} f(s_n)S_n(s) \quad con \quad S_n(s) = \frac{\int_I \kappa(s_n,x)\overline{\kappa(s,x)}dx}{\int_I |\kappa(s_n,x)|^2 dx} \qquad s \in \Omega$$

Demostración. Lo probaremos haciendo cuentas directas en $\mathcal{L}_2(I)$ como en la prueba original de Kramer. Para $N \in \mathbb{N}_0$ sea $f_N(s) = \sum_{|n|\le N} f(s_n)S_n(s)$ con $f = TF$ y S_n como en el enunciado. Si denotamos por $\|\cdot\|$ a la norma en $\mathcal{L}_2(I)$, tenemos:

$$\begin{aligned}
|f(s) - f_N(s)| &= \left| \int_I F(x)\overline{\kappa(s,x)}dx - \sum_{|n|\le N} f(s_n)S_n(s) \right| \\
&= \left| \int_I F(x)\overline{\kappa(s,x)}dx - \sum_{|n|\le N} S_n(s)\int_I F(x)\overline{\kappa(s_n,x)}dx \right| \\
&\le \int_I |F(x)| \left| \overline{\kappa(s,x)} - \sum_{|n|\le N} S_n(s)\overline{\kappa(s_n,x)} \right| dx \\
&\le \|F\| \left\| \overline{\kappa_s} - \sum_{|n|\le N} S_n(s)\overline{\kappa_{s_n}} \right\| \\
&= \|F\| \left\| \overline{\kappa_s} - \sum_{|n|\le N} \langle \kappa_{s_n}, \kappa_s\rangle \frac{\overline{\kappa_{s_n}}}{\|\kappa_{s_n}\|^2} \right\| \\
&= \|F\| \left\| \kappa_s - \sum_{|n|\le N} \left\langle \kappa_s, \frac{\kappa_{s_n}}{\|\kappa_{s_n}\|} \right\rangle \frac{\kappa_{s_n}}{\|\kappa_{s_n}\|} \right\| \qquad s \in \Omega
\end{aligned}$$

y como $\{\kappa_{s_n}/\|\kappa_{s_n}\|\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base ortonormal de $\mathcal{L}_2(I)$, tomando límite en N obtenemos

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} |f(s) - f_N(s)| \le \|F\| \lim_{N\longrightarrow\infty} \left\| \kappa_s - \sum_{|n|\le N} \left\langle \kappa_s, \frac{\kappa_{s_n}}{\|\kappa_{s_n}\|} \right\rangle \frac{\kappa_{s_n}}{\|\kappa_{s_n}\|} \right\| = 0. \qquad \blacksquare$$

Notar que solamente obtuvimos convergencia puntual de la serie al no tener contemplado algún espacio de funciones. Este teorema se traduce sin inconvenientes al lenguaje RKHS donde además obtendremos que la serie converge en norma.

Definición 4.1.3. Decimos que una base de Schauder $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$, con $\mathcal{H}_K$ un RKHS sobre un conjunto Ω, es una *base de Muestreo* si existe una sucesión $\{t_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \Omega$ tal que

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)S_j(t) \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}_K,\, t \in \Omega$$

donde la igualdad es en norma y, por consiguiente, puntualmente.

Proposición 4.1.4. *Una base de Schauder $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$ es una base de Muestreo si y sólo si su (base) biortogonal $\{F_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}_K$ está dada por*

$$F_j(t) = K(t_j, t) := K_{t_j}(t) \qquad j \in \mathbb{I},\, t \in \Omega$$

donde el núcleo reproductivo K se escribe como

$$K(s,t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} S_j(t)\overline{F_j(s)} = \langle \{S_j(t)\}_j, \{F_j(s)\}_j\rangle_{\ell_2(\mathbb{I})} \qquad s,t \in \Omega$$

En tal caso es $S_j(t_k) = \delta_{j,k}\ \ \forall j,k \in \mathbb{I}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una base de Muestreo de $\mathcal{H}_K$ entonces su biortogonal (única) $\{F_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es base de Schauder y por consiguiente para toda $f \in \mathcal{H}_K$ obtenemos:

$$\sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, F_j\rangle S_j(t) = f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)S_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, K_{t_j}\rangle S_j(t) \qquad t \in \Omega$$

donde en las igualdades se usan: base de Schauder, base de sampling y propiedad reproductiva de K respectivamente. Así, por unicidad de escritura, debe ser $\langle f, F_j\rangle = \langle f, K_{t_j}\rangle\ \forall\, j \in \mathbb{I}$, de donde $F_j = K_{t_j}\ \ \forall\, j \in \mathbb{I}$ como buscábamos.

($\Leftarrow$) Si la base de Schauder biortogonal a $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ está dada por $F_j(t) = K(t_j,t) := K_{t_j}(t)$, entonces para $f \in \mathcal{H}_K$ es:

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, F_j\rangle S_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \langle f, K_{t_j}\rangle S_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)S_j(t) \qquad t \in \Omega$$

y $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una base de Muestreo de $\mathcal{H}_K$. ∎

Traducimos ahora el *teorema* 4.1.2 al lenguaje RKHS (recordar ejemplo de la *página* 23). Llamamos $\Phi(t) = \kappa_t$, $t \in \Omega$ y el operador integral queda $(TF)(s) = \langle F, \Phi(s)\rangle_{\mathcal{L}_2(I)}$, $s \in \Omega$. Como la sucesión $\{\kappa(s_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}_2(I)$ es ortogonal y completa, la *proposición* 2.3.2 nos dice que tenemos definido $\mathcal{H}_K$ un RKHS sobre Ω compuesto por las funciones del rango de T con núcleo reproductivo K dado por $K(s,t) = \langle \kappa_s, \kappa_t\rangle_{\mathcal{L}_2(I)}$ para $s,t \in \Omega$ y norma $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \|F\|_{\mathcal{L}_2(I)}$ (T es una isometría).

Teorema 4.1.5 (Teorema de Muestreo de Kramer - versión RKHS)**.** *En las condiciones del teorema 4.1.2, la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{H}_K$ dada por*

$$S_n(s) = \frac{\int_I \kappa(s_n,x)\overline{\kappa(s,x)}dx}{\int_I |\kappa(s_n,x)|^2 dx} \qquad n \in \mathbb{Z},\ s \in \Omega$$

es una base de Muestreo de $\mathcal{H}_K$ y por lo tanto vale

$$f(s) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(s_n)S_n(s) \qquad f \in \mathcal{H}_K,\ s \in \Omega$$

donde la igualdad también es en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_K}$.

Demostración. Notar que al ser $\{\kappa(s_n,\cdot)\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{L}_2(I)$ ortogonal y completa, es base de Schauder de $\mathcal{L}_2(I)$, y por una cuenta sencilla, tenemos que

$$S_n(s) = \frac{(T\kappa_{s_n})(s)}{(T\kappa_{s_n})(s_n)} = \frac{K(s_n,s)}{K(s_n,s_n)} \qquad n \in \mathbb{Z},\ s \in \Omega$$

de donde por la primera igualdad $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es base de Schauder de $\mathcal{H}_K$ ya que T es isomorfismo isométrico, mientras que por la segunda igualdad junto con la *proposición 4.1.4* resulta una *base de Muestreo* de $\mathcal{H}_K$ pues

$$\langle S_n, K_{s_m}\rangle_{\mathcal{H}_K} = \frac{\langle K_{s_n}, K_{s_m}\rangle_{\mathcal{H}_K}}{K(s_n,s_n)} = \frac{K(s_n,s_m)}{K(s_n,s_n)} = \frac{\langle \kappa_{s_n},\kappa_{s_m}\rangle_{\mathcal{L}_2(I)}}{\langle \kappa_{s_n},\kappa_{s_n}\rangle_{\mathcal{L}_2(I)}} = \delta_{n,m}. \qquad \blacksquare$$

Seguidamente obtenemos, previas definiciones, una versión "abstracta" del *teorema de Kramer*, es decir, en vez de $\mathcal{L}_2(I)$ consideramos un espacio de Hilbert arbitrario $\mathcal{H}$, una función $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ tal que el conjunto $\{\Phi(t) : t \in \Omega\}$ es *completo* en $\mathcal{H}$ y trabajamos en el RKHS $\mathcal{H}_K$ sobre Ω construido en la *proposición 2.3.2*.

Definición 4.1.6 (Núcleo de Kramer Abstracto)**.** Decimos que $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ es un *Núcleo de Kramer Abstracto* (AKK) con respecto a: $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ una Base de Riesz, si cumple $\Phi(t_n) = \overline{a_n}x_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Observación 4.1.7. *Sea $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ un AKK como en la definición previa, entonces:*

1. *T es isomorfismo isométrico.*
2. *Si $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la Base de Riesz biortogonal de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tenemos que*

$$\Phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{S_n(t)}x_n \qquad t \in \Omega$$

   donde $S_n(t) = \langle y_n, \Phi(t)\rangle_{\mathcal{H}}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$.

3. *$\Phi(t_n) = \overline{a_n}x_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ si y sólo si $S_n(t_m) = a_n\delta_{n,m}\ \ \forall\, n,m \in \mathbb{N}$.*

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar la tercera versión del teorema de muestreo. En [GHM14] si bien se toma $\Omega \subset \mathbb{R}$, no es necesario para la demostración.

Teorema 4.1.8 (Teorema de Muestreo de Kramer - versión RKHS abstracto)**.** *Sean Ω conjunto, $(\mathcal{H},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio de Hilbert, $\Phi : \Omega \to \mathcal{H}$ un AKK con respecto a $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_K$, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ como arriba. Entonces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Base de Riesz para $\mathcal{H}_K$ y vale*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n)\frac{S_n(t)}{a_n} \qquad \forall\, f \in \mathcal{H}_K,\ t \in \Omega$$

con convergencia en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_K}$ y con convergencia absoluta y uniforme en los subconjuntos de Ω donde la función $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ es acotada.

Si además $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ es b.o.n. entonces $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}_K$ también lo es.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos $Ty_n = S_n$ con $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una *Base de Riesz* de $\mathcal{H}$ y T un isomorfismo isométrico, de donde $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una Base de Riesz de $\mathcal{H}_K$. y la biortogonl $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{H}_K$ está dada por $R_n := Tx_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, ya que

$$\langle S_n, Tx_m\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle Ty_n, Tx_m\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle y_n, x_m\rangle = \delta_{n,m} \qquad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto para cada $f = Tx \in \mathcal{H}_K$ podemos escribir

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, R_n\rangle_{\mathcal{H}_K} S_n$$

donde la igualdad es en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_K}$ y puntualmente en Ω. Ahora bien, como vale

$$\langle f, R_n\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle Tx, Tx_n\rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle x, x_n\rangle = \left\langle x, \frac{\Phi(t_n)}{\overline{a_n}}\right\rangle = \frac{f(t_n)}{a_n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

obtenemos la representación del enunciado.

La convergencia absoluta de la serie se desprende de la convergencia puntual incondicional de la misma (porque la serie converge incondicionalmente en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_K}$), mientras que la convergencia uniforme de la serie se sigue de que para cada $t \in \Omega$ se cumple

$$|f(t)| = |\langle x, \Phi(t)\rangle| \leq \|x\|\|\Phi(t)\|$$

y donde $t \mapsto \|\Phi(t)\|$ es acotada estamos.

Finalmente, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ entonces $y_n = x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ y, al ser T unitario, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_K$. ■

4.2. Un Recíproco del Teorema de Muestreo de Kramer en RKHS's

En el *capítulo 7* extenderemos el siguiente teorema recíproco de muestreo de tal manera que sean evidentes en el enunciado cuáles son los conceptos extendidos y también sean similares los razonamientos utilizados en la demostración, por esto último, realizaremos una prueba parcialmente distinta a la originalmente dada por *García & Szafraniec* [GS02].

Teorema 4.2.1 (Un Recíproco del Teorema de Muestreo de Kramer)**.** *Sea $\mathcal{H}_K$ el RKHS sobre Ω como en el teorema 4.1.5 con $\{\kappa(t,\cdot) : t \in \Omega\}$ completo en $\mathcal{L}_2(I)$. Supongamos que tenemos una sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathcal{H}_K$ tal que $S_n(t) \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \ \forall t \in \Omega$. Podemos considerar entonces $\mathcal{H}_{samp}$ el RKHS sobre Ω con núcleo reproductivo K_{samp} dado por*

$$K_{samp}(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{S_n(s)} S_n(t) \qquad s, t \in \Omega. \tag{4.3}$$

Entonces:

(1) *Si el conjunto $\{\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0} : t \in \Omega\} \subset \ell_2(\mathbb{N}_0)$ satisface la condición:*

$$\text{Si } \alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \ \Big/ \ \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n S_n(t) = 0 \quad \forall t \in \Omega \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0, \tag{4.4}$$

entonces $\mathcal{H}_{samp} \subset \mathcal{H}_K$ y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_{samp}$.

(2) *Si además de valer* (1) *existen sucesiones* $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \Omega$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ *tales que*

$$\left\{\frac{f(t_n)}{a_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0) \quad \text{y} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t_n)\frac{S_n(t)}{a_n} \qquad \forall f \in \mathcal{H}_K \tag{4.5}$$

donde la serie converge puntualmente en Ω, *entonces valen:*

a) $\mathcal{H}_{samp} = \mathcal{H}_K$.

b) Las normas de $\mathcal{H}_{samp}$ *y* $\mathcal{H}_K$ *son equivalentes y, consecuentemente,* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *es una Base de Riesz para* $\mathcal{H}_K$.

c) La biortogonal de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *en* $\mathcal{H}_K$ *está dada por*

$$\left\{\overline{a_n^{-1}}\sum_{m=0}^{\infty} K(t_n,t_m)\frac{S_m(\cdot)}{a_m}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{4.6}$$

d) La biortogonal de $\left\{\overline{a_n^{-1}}\kappa_{t_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *en* $\mathcal{L}_2(I)$ *está dada por*

$$\left\{\sum_{m=0}^{\infty}\langle S_n, S_m\rangle_{\mathcal{H}_K}\frac{\kappa_{t_m}(\cdot)}{\overline{a_m}}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}. \tag{4.7}$$

Demostración. Utilizamos la *proposición* 2.3.2 para mostrar que $\mathcal{H}_{samp}$ es efectivamente un RKHS sobre Ω isométricamente isomorfo a $\ell_2^*(\mathbb{N}_0)$.

Sean $\phi : \Omega \to \ell_2(\mathbb{N}_0)$ la función dada por $\phi(t) = \{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\phi^* : \Omega \to \ell_2^*(\mathbb{N}_0)$ tal que $\phi^*(t) = (\phi(t))^*$, $t \in \Omega$. Consideremos el operador lineal

$$\begin{array}{rcl} T_\phi : \ell_2^*(\mathbb{N}_0) & \longrightarrow & \mathbb{C}^\Omega \\ c^* & \longmapsto & T_\phi c^* \end{array} \quad \text{con} \quad \begin{array}{rcl} T_\phi c^* : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \langle c^*, \phi^*(t)\rangle_{\ell_2^*(\mathbb{N}_0)} \end{array}$$

y $c^* \in \ell_2^*(\mathbb{N}_0)$ el elemento dual de $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$. Para no recargar la notación, utilizaremos la identificación usual entre un espacio de Hilbert y su dual, es decir, para $c \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$ su elemento dual es $c^* \in \ell_2^*(\mathbb{N}_0)$ y a este lo identificaremos con $\overline{c} = \{\overline{c_n}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$.

El operador T_ϕ es inyectivo, pues si existe $c \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$ tal que $T_\phi c^* = 0$, entonces tenemos

$$0 = \langle c^*, \phi^*(t)\rangle_{\ell_2^*(\mathbb{N}_0)} = \langle \phi(t), c\rangle_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} = \sum_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}S_n(t) \qquad t \in \Omega$$

de donde $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}_0$ por (4.4) (de hecho la condición (4.4) es equivalente a pedir que el conjunto $\{\phi(t) : t \in \Omega\} \subset \ell_2(\mathbb{N}_0)$ sea completo).

Tenemos así el RKHS $\mathcal{H}_{samp}$ sobre Ω (ahora T_ϕ es isomorfismo isométrico con la norma $\|T_\phi c^*\|_{\mathcal{H}_{samp}} = \|c^*\|_{\ell_2^*(\mathbb{N}_0)}$), con núcleo reproductivo K_{samp} dado por

$$K_{samp}(s,t) = \langle \phi^*(s), \phi^*(t)\rangle_{\ell_2^*(\mathbb{N}_0)} = \langle \phi(t), \phi(s)\rangle_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} \qquad s,t \in \Omega$$

como en (4.3).

(1) Veamos primero que $\mathcal{H}_{samp} \subset \mathcal{H}_K$. Debemos mostrar que $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} c_n S_n$ es convergente en $\mathcal{H}_K$ para toda sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_0} \in \ell_2(\mathbb{N}_0)$. Por la *proposición* 3.1.2, esto es

equivalente a ver que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es *Bessel* para $\mathcal{H}_K$. Debido a que para $s,t\in\Omega$ tenemos que $(T_\kappa\kappa_s)(t)=\langle\kappa_s,\kappa_t\rangle_{\mathcal{L}^2(I)}=K_s(t)$ con T_κ isomorfismo isométrico, $\mathcal{H}_0:=span\{K_t : t\in\Omega\}$ resulta denso en $\mathcal{H}_K$. Primero veamos que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es *Bessel* para $\mathcal{H}_0$. Como $S_n(t)=\langle S_n,K_t\rangle_{\mathcal{H}_K}$ y $\{S_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}_0}\in\ell_2(\mathbb{N}_0)$ si $t\in\Omega$, los siguientes operadores lineales están bien definidos

$$\begin{array}{rccl} C_N: & \mathcal{H}_0 & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}_0) \\ & f & \longmapsto & \{\mathbf{1}_{\mathbb{N}_N}(n)\langle f,S_n\rangle_{\mathcal{H}_K}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccl} C: & \mathcal{H}_0 & \longrightarrow & \ell_2(\mathbb{N}_0) \\ & f & \longmapsto & \{\langle f,S_n\rangle_{\mathcal{H}_K}\}_{n\in\mathbb{N}_0} \end{array}$$

donde $\mathbf{1}_{\mathbb{N}_N}$ denota a la función característica del conjunto $\mathbb{N}_N=\{1,\cdots,N\}$. Además los C_N son acotados y convergen puntualmente a C ya que

$$\begin{aligned} \|C_Nf\|_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} &\le \left(\sum_{n=0}^{N}\|S_n\|^2_{\mathcal{H}_K}\right)^{1/2}\|f\|_{\mathcal{H}_K} \quad , \\ \|C_Nf-Cf\|^2_{\ell_2(\mathbb{N}_0)} &\le \sum_{n\ge N+1}|\langle f,S_n\rangle_{\mathcal{H}_K}|^2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

luego, por el *teorema de Banach-Steinhaus* 1.1.17, el operador de análisis C resulta acotado en $\mathcal{H}_0$. Finalmente, extendiendo C a $\mathcal{H}_K$ por densidad de $\mathcal{H}_0$ se obtiene que $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es *Bessel* para $\mathcal{H}_K$.

$\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ resulta una base ortonormal de $\mathcal{H}_{samp}$ pues para cada $n\in\mathbb{N}_0$, S_n es la imagen por T_ϕ del vector canónico n-ésimo de $\ell_2^*(\mathbb{N}_0)$ y T_ϕ transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

Supongamos ahora que además de valer (1) también se satisface (4.5).

a) Por hipótesis la sucesión $\{f(t_n)a_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}_0}\in\ell_2(\mathbb{N}_0)$ para $f\in\mathcal{H}_K$ y por lo tanto, por un lado existe $g\in\mathcal{H}_{samp}$ tal que $g=\sum_{n=0}^{\infty}f(t_n)a_n^{-1}S_n$ en $\mathcal{H}_{samp}$ y puntualmente en Ω (*proposición* 2.1.4), y por otro lado la serie también converge puntualmente a f, con lo que $g=f\in\mathcal{H}_{samp}$ y $\mathcal{H}_K\subset\mathcal{H}_{samp}$ que es la inclusión que faltaba.

b) Si vemos que $id:\mathcal{H}_{samp}\to\mathcal{H}_K$ es continua entonces (apelando al *teorema de la aplicación abierta*) id es bicontinua, las normas son equivalentes y $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una Base de Riesz para $\mathcal{H}_K$ (esto último porque es base ortonormal de $\mathcal{H}_{samp}$). Si $f_n\longrightarrow f$ en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_{samp}}$ y $f_n\longrightarrow g$ en $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_K}$ entonces nuevamente por la *proposición* 2.1.4 es $f(t)=\lim_{n\to\infty}f_n(t)=g(t)\ \forall\, t\in\Omega$, apelando ahora al *teorema del gráfico cerrado* resulta que id es continua.

c) Como ahora $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es una *Base de Riesz* para $\mathcal{H}_K$ entonces la sucesión $\{F_n:=T^{-1}S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, con $T:\mathcal{L}_2(I)\to\mathcal{H}_K$ isomorfismo isométrico, es una *Base de Riesz* para $\mathcal{L}_2(I)$ y, como $K(t_n,s)=\langle\kappa_{t_n},\kappa_s\rangle_{\mathcal{L}_2(I)}=(T\kappa_{t_n})(s)$, aplicando (4.5) junto con la propiedad reproductiva en $\mathcal{H}_K$ a S_n se obtienen:

$$a_m\delta_{n,m}=S_n(t_m)=\langle S_n,K_{t_m}\rangle_{\mathcal{H}_K}=\langle F_n,\kappa_{t_m}\rangle_{\mathcal{L}_2(I)} \qquad n,m\in\mathbb{N}_0. \tag{4.8}$$

con lo cual $\{\frac{K_{t_n}}{\overline{a_n}}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es la biortogonal de $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ en $\mathcal{H}_K$ y vale (4.6) pues

$$\frac{K_{t_n}}{\overline{a_n}}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{K(t_n,t_m)}{\overline{a_n}a_m}S_m=\sum_{m=0}^{\infty}\left\langle\frac{K_{t_n}}{\overline{a_n}},\frac{K_{t_m}}{\overline{a_m}}\right\rangle_{\mathcal{H}_K}S_m \qquad n\in\mathbb{N}_0$$

d) También por (4.8), las sucesiones $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ y $\left\{\overline{a_n^{-1}}\kappa_{t_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ son biortogonales en $\mathcal{L}_2(I)$, desarrollando un poco, veamos que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ cumple (4.7)

$$
\begin{aligned}
\delta_{n,m} &= \left\langle F_n, \frac{\kappa_{t_m}}{\overline{a_m}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(I)} \\
&= \left\langle S_n, \frac{K_{t_m}}{\overline{a_m}} \right\rangle_{\mathcal{H}_K} \\
&= \left\langle S_n, \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{K_{t_m}}{\overline{a_m}}, \frac{K_{t_k}}{\overline{a_k}} \right\rangle_{\mathcal{H}_K} S_k \right\rangle_{\mathcal{H}_K} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{K_{t_k}}{\overline{a_k}}, \frac{K_{t_m}}{\overline{a_m}} \right\rangle_{\mathcal{H}_K} \langle S_n, S_k\rangle_{\mathcal{H}_K} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{\kappa_{t_k}}{\overline{a_k}}, \frac{\kappa_{t_m}}{\overline{a_m}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(I)} \langle S_n, S_k\rangle_{\mathcal{H}_K} \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \langle S_n, S_k\rangle_{\mathcal{H}_K} \frac{\kappa_{t_k}}{\overline{a_k}}, \frac{\kappa_{t_m}}{\overline{a_m}} \right\rangle_{\mathcal{L}^2(I)} \qquad n, m \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}
$$

■

Capítulo 5

Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo

En este capítulo empezamos generalizando un Espacio de Hilbert con Núcleo Reproductivo a espacios de Banach llamándolo, como no podía ser de otra manera, Espacio de Banach con Núcleo Reproductivo, para inmediatamente generalizar las propiedades relevantes que vimos en el *capítulo* 2. En el *capítulo* 6 generalizamos lo visto en el *capítulo* 3 y en el *capítulo* 7 hacemos lo propio con el *capítulo* 4.

Queremos extender a espacios de Banach tanto las propiedades de los RKHS's como así también los razonamientos geométricos utilizados para demostrar tales propiedades, para eso iremos imponiendo propiedades adicionales sobre los espacios de Banach, siempre enfocándonos en que nuestro objetivo principal es obtener fórmulas de muestreo. Al haber varias maneras distintas (pero no muy distintas en realidad) de definir un "Espacio de Banach con Núcleo Reproductivo", trataremos de que quede claro por qué adoptamos la siguiente definición.

5.1. Definición y Propiedades de un RKBS

Definición 5.1.1. Decimos que $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ es un *Espacio de Banach con Núcleo Reproductivo* sobre Ω (abreviado como RKBS) si cumple:

(P1) $\mathcal{B}$ es reflexivo.

(P2) $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach de funciones a valores en $\mathbb{C}$ sobre un conjunto Ω, es decir, $f \in \mathcal{B}$ es tal que $\|f\| = 0$ si y sólo si $f(t) = 0\ \forall t \in \Omega$, y $\mathcal{B}^*$ es isométricamente isomorfo a un espacio de Banach de funciones a valores en $\mathbb{C}$ sobre Ω.

(P3) Las evaluaciones en $t \in \Omega$ son funcionales lineales continuos en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{B}^*$.

Ejemplo. Sean $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \ell_p(\mathbb{N})$ y $\mathcal{B}^* = \ell_q(\mathbb{N})$ (identificación), con $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados. $\ell_p(\mathbb{N})$ es reflexivo y para cada $m \in \mathbb{N}$ y cada $c = \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{N})$ las evaluaciones $\delta_m(c) = c(m) = c_m$ son funcionales lineales continuos (los vectores canónicos forman una base de Schauder) y por lo tanto $\ell_p(\mathbb{N})$ es un RKBS sobre $\mathbb{N}$. ⧫

Con esta definición excluímos a los espacios $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ cuando (Ω, Σ, μ) es un espacio de medida más general, ya que sus elementos son *clases* de funciones sobre un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y no funciones donde se pueda evaluar, sin embargo, veremos algunos ejemplos de subespacios cerrados de los mismos que sí cumplen la definición. Por el primer item excluimos también a los espacios de funciones continuas sobre un espacio topológico compacto dotado con norma del supremo, que si hubiésemos adoptado la misma *definición 2.1.1* que para un espacio de Hilbert (adoptada en [HNS09] por ejemplo), entonces en particular el espacio $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ sí la cumpliría y para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones $\delta_t(f) = f(t)$ para $f \in C[0,1]$ serían continuas, pero el núcleo reproductivo para $C[0,1]$ debería ser la distribución δ que ni siquiera es una función donde pueda evaluarse y por ende no nos sería de mucha utilidad. Porque no queremos que pase esto último es que pedimos esa condición sobre el dual y, porque queremos además "ir y venir" de $\mathcal{B}^*$ en $\mathcal{B}$ convenientemente, pedimos tanto la reflexividad de $\mathcal{B}$ como la continuidad de las evaluaciones en ambos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$.

Algunas observaciones sobre la *definición 5.1.1* son en orden. Primero, notemos que para que un espacio $\mathcal{B}$ sea un RKBS sobre Ω no dependemos de la identificación entre $\mathcal{B}^*$ y un espacio de Banach de funciones $\mathcal{B}^\#$, en otras palabras, si las evaluaciones son continuas con una identificación particular $\mathcal{B}^\#$ entonces lo son con cualquier otra, ya que todas las identificaciones son isomorfismos isométricos entre sí.

Segundo, todo RKHS $\mathcal{H}$ sobre Ω es un RKBS sobre Ω y efectivamente estamos generalizando el concepto de RKHS. Para ver esto, consideremos

$$\mathcal{H}^\# = \{\overline{f} : f \in \mathcal{H}\} \quad \text{con norma} \quad \|\overline{f}\|_{\mathcal{H}^\#} := \|f\|_{\mathcal{H}}$$

donde $\overline{f}$ es la función conjugada de f dada por $\overline{f}(t) = \overline{f(t)}\ \ \forall t \in \Omega$. Por el *teorema de representación de Riesz*, dado $L \in \mathcal{H}^*$ existe un único $f_0 \in \mathcal{H}$ tal que $Lf = \langle f, f_0\rangle_{\mathcal{H}}\ \ \forall f \in \mathcal{H}$ y además $\|L\| = \|f_0\|_{\mathcal{H}}$ (recordar que el mapa dual entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^*$ dado por $g \mapsto g^*$ tal que $g^*(f) = \langle f, g\rangle_{\mathcal{H}}\ \ \forall f \in \mathcal{H}$ es una isometría biyectiva antilineal). Luego, $T : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}^\#$ dado por $TL = \overline{f_0}$ es un isomormismo isométrico.

Tercero, generalmente la identificación entre $\mathcal{B}^\#$ y $\mathcal{B}^*$ no es única pero, al ser todas ellas isométricamente isomorfas, se puede elegir una de ellas y trabajar con esa fijada.

Cuarto y último, Si $f^* \in \mathcal{B}^*$ (análogamente para $f \in \mathcal{B}$), según conveniencia, se lo verá como un funcional sobre $\mathcal{B}$ o se lo verá como una función sobre Ω.

Otra definición posible de RKBS es la dada en [SZH13, GSP13], donde no aparece la reflexividad y se habla de pares $\{\mathcal{V}, \mathcal{V}^\#\}$ de Espacios de Banach con Núcleo Reproductivo formados por funciones definidas sobre conjuntos no necesariamente iguales Ω y $\Omega^\#$ respectivamente.

Veamos ahora la cuestión del núcleo reproductivo, para eso recordemos que tenemos definida la forma bilineal (1.1), es decir, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{B}} : \mathcal{B} \times \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$ con $(x, y^*)_{\mathcal{B}} = y^*(x)\ \ x \in \mathcal{B}$, $y^* \in \mathcal{B}^*$, con lo cual para $f \in \mathcal{B}^{**}$, por la reflexividad de $\mathcal{B}$, existe un único $x \in \mathcal{B}$ tal que $f(y^*) = (x, y^*)_{\mathcal{B}}\ \ \forall y^* \in \mathcal{B}^*$.

Proposición 5.1.2. *Sea $\mathcal{B}$ un RKBS sobre Ω, entonces existe una única función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que:*

(1) Para todo $t \in \Omega$, $K(\cdot, t) \in \mathcal{B}^*$ y $f(t) = (f, K(\cdot, t))_{\mathcal{B}}$ para toda $f \in \mathcal{B}$.

(2) Para todo $t \in \Omega$, $K(t, \cdot) \in \mathcal{B}$ y $f^*(t) = (K(t, \cdot), f^*)_{\mathcal{B}}$ para toda $f^* \in \mathcal{B}^*$.

(3) $\mathcal{B}^* = \overline{span}\{K(\cdot, t) : t \in \Omega\}$.

(4) $\mathcal{B} = \overline{span}\{K(t,\cdot) : t \in \Omega\}$.

(5) $K(s,t) = (K(s,\cdot), K(\cdot,t))_{\mathcal{B}}$ *para todos* $s,t \in \Omega$.

Demostración. Como para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones $\delta_t : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ son continuas, existe una función $g_t \in \mathcal{B}^*$ tal que $\delta_t(f) = f(t) = (f, g_t)_{\mathcal{B}}$ $\forall f \in \mathcal{B}$. Definimos una función $H : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ mediante $H(s,t) = g_s(t)$ $\forall s,t \in \Omega$. Entonces, se sigue que

$$H(\cdot,t) \in \mathcal{B}^* \quad \text{y} \quad f(t) = (f, H(\cdot,t))_{\mathcal{B}} \qquad \forall t \in \Omega,\ f \in \mathcal{B}.$$

Si existiera otra función $\widetilde{H} : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ satisfaciendo las dos condiciones anteriores, entonces tendríamos que

$$0 = (f, H(\cdot,t) - \widetilde{H}(\cdot,t))_{\mathcal{B}} \qquad \forall t \in \Omega,\ f \in \mathcal{B}$$

y por lo tanto sería $H(\cdot,t) - \widetilde{H}(\cdot,t) = 0$ $\forall t \in \Omega$. Puesto que $\mathcal{B}^*$ es un espacio de Banach de funciones sobre Ω, resulta que $H(s,t) - \widetilde{H}(s,t) = 0$ $\forall s,t \in \Omega$, de donde $H = \widetilde{H}$. Utilizando la continuidad de las evaluaciones $\delta_t^* : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ para cada $t \in \Omega$, por razonamiento análogo al anterior, obtenemos una única función $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que

$$K(t,\cdot) \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad f^*(t) = (K(t,\cdot))_{\mathcal{B}} \qquad \forall t \in \Omega,\ f^* \in \mathcal{B}^*.$$

Ahora bien, si consideramos $f := K(s,\cdot)$ obtenemos

$$K(s,t) = (K(s,\cdot), H(t,\cdot))_{\mathcal{B}} \qquad s,t \in \Omega$$

y si consideramos $f^* := H(s,\cdot)$ nos queda también

$$H(t,s) = (K(s,\cdot), H(t,\cdot))_{\mathcal{B}} \qquad s,t \in \Omega$$

Por consiguiente $K(s,t) = H(t,s)$ $\forall s,t \in \Omega$ y K cumple los items (1), (2) y (5). Falta ver que K satisfaga los items (3) y (4). Al probar (3) quedará claro que (4) sale de manera completamente análoga. Supongamos que no vale (3), entonces por el *Teorema de Hahn-Banach* existe un funcional no nulo $f^* \in \mathcal{B}^*$ tal que

$$(K(t,\cdot), f^*)_{\mathcal{B}} = 0 \qquad t \in \Omega$$

es decir, $f^*(t) = 0$ $\forall t \in \Omega$ y al estar en un espacio de Banach de funciones sobre Ω, resulta que $f^* = 0$ contradiciendo la suposición. ■

El único K del teorema se dice *núcleo reproductivo* de $\mathcal{B}$ y los items (1) y (2) son equivalentes a pedir que las evaluaciones $\delta_t : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ y $\delta_t^* : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$ sean continuas para todo $t \in \Omega$. Si bien el núcleo reproductivo es único, no obstante, distintos espacios (no isomorfos) pueden tener el mismo núcleo reproductivo como mostraremos luego con un ejemplo.

Basado en estas propiedades del núcleo reproductivo, en [FHY15], se da otra posible definición de RKBS que extiende a la de RKHS y es más general que la adoptada aquí.

Para que el núcleo reproductivo de un RKBS tenga alguna de las propiedades de su homónimo en un RKHS, debemos dejar de lado la forma bilineal $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{B}}$ y encontrar un sustituto para un producto interno.

Definición 5.1.3. Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, una aplicación $[\cdot,\cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ es un *semi-producto interno* (Lumer [Lu61]) si $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ y $\forall\, x, y, z \in \mathcal{V}$ satisface:

(a) $[\alpha x + y, z] = \alpha[x, z] + [y, z]$.

(b) $[x, \alpha y] = \overline{\alpha}[x, y]$.

(c) $[x, x] > 0$ si $x \neq 0$.

(d) $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$.

En tal caso el par $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot])$ se llama *espacio con* semi-producto interno (abreviado por s.i.p.S.). Si además $\mathcal{V}$ es un espacio normado y cumple:

(e) $\lim_{h\in\mathbb{R},\, h\to 0} Re\{[y, x + hy]\} = Re\{[y, x]\} \qquad \forall\, x, y \in S_{\mathcal{V}}$,

decimos que es un *espacio con* semi-producto interno *continuo*, mientras que si el límite anterior existe y es uniforme en $S_{\mathcal{V}} \times S_{\mathcal{V}}$, decimos que es un *espacio con* semi-producto interno *uniformemente continuo*.

La propiedad (b) fué agregada convenientemente por Giles [Gi67]. Enunciamos algunas propiedades y relaciones entre los conceptos de la *definición 5.1.3* y aquellos de la *definición 1.1.24*, cuyas demostraciones se pueden ver en el *apéndice A* o bien en las referencias citadas.

Observación 5.1.4. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach.*

1. *Como una aplicación del teorema de Hahn-Banach, siempre existe al menos un semi-producto interno $[\cdot,\cdot]$ sobre X compatible con $\|.\|$ en el sentido de que $[x, x] = \|x\|^2\ \forall\, x \in X$. Incluso en el caso de que X sea simplemente un espacio normado. Recíprocamente, todo espacio vectorial con semi-producto interno se puede normar de manera tal que la norma y el semi-producto interno resulten compatibles* [Dr03, Gi67, Lu61].

2. *Un semi-producto interno $[\cdot,\cdot]$ sobre X es un producto interno si y sólo si*
$$[x, y + z] = [x, y] + [x, z] \qquad \forall\, x, y, z \in X \quad \text{[ZXZ09]}.$$

3. *X es un espacio con semi-producto interno continuo (uniformemente continuo) si y sólo si X es Gâteaux diferenciable (uniformemente diferenciable Fréchet)* [Dr03, Lu61].

4. *Si X es un uniformemente diferenciable Fréchet y $[\cdot,\cdot]$ es un semi-producto interno compatible sobre X, entonces:*
$$\lim_{h\in\mathbb{R},\, h\to 0} \frac{\|x + hy\| - \|x\|}{h} = \frac{Re\{[y, x]\}}{\|x\|} \qquad \forall\, x, y \in X.$$
Así, existe un único semi-producto interno compatible con la norma de X (por la unicidad del límite) y viene dado $\forall\, x, y \in X$ por:
$$[x, y] = \|y\| \left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\|y + hx\| - \|y\|}{h} + i \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{\|iy + hx\| - \|iy\|}{h} \right)$$
y claramente $[x, y] = 0$ si x o y son nulos [Dr03, Gi67, ZXZ09].

5. *X es estrictamente convexo si y sólo si siempre que $x, y \in X \setminus \{0\}$ son tales que $[x, y] = \|x\|\|y\|$ resulta $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$* [Dr03, Gi67].

6. (***Teorema de Representación de Riesz***) *Si X es un espacio uniformemente convexo con semi-producto interno continuo, dado $f \in X^*$, existe un único $y_0 \in X$ tal que $f = y_0^*$, es decir, la aplicación dual $y \mapsto y^*$ tal que*

$$y^*(x) = [x, y] \qquad \forall\, x \in X$$

es biyectiva. También es isométrica pero generalmente no es aditiva [Dr03, Gi67].

7. *Por la proposición 1.1.29, un espacio normado es uniformemente diferenciable Fréchet si y sólo si su dual es uniformemente convexo. Así, si X es uniforme entonces X^* también lo es, y su semi-producto interno viene dado por $[x^*, y^*]_{X^*} = [y, x]_X \;\; \forall\, x, y \in X$* [Dr03, Gi67].

Ejemplo. Considerando los espacios uniformes $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ con μ medida σ-finita, donde $1 < p, q < \infty$ son exponentes conjugados, para $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ su elemento asociado en $\mathcal{L}_q(\Omega, \Sigma, \mu)$ dado por el *teorema de representación de Riesz 1.3.2* está dado por

$$\frac{|f|^{p-2}}{\|f\|_p^{p-2}}\overline{f},$$

consecuentemente, usando (1.14), el semi-producto interno sobre $\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ es

$$[f, g]_p = \|g\|_p^{2-p} \int_X f\overline{g}|g|^{p-2} d\mu. \qquad \blacklozenge$$

Estamos en condiciones de definir una clase especial de RKBS, debido al item 4. de la observación precedente definimos:

Definición 5.1.5. Un "*s.i.p. RKBS sobre Ω*" es un RKBS uniforme sobre Ω.

Recordar que un espacio de Banach uniforme es un espacio de Banach uniformemente convexo y uniformemente diferenciable Fréchet (*definición 1.1.24*). Notar que el dual de un s.i.p. RKBS también es un s.i.p. RKBS, y claramente valen las siguientes implicaciones:

$$\text{RKHS} \;\Rightarrow\; \text{s.i.p. RKBS} \;\Rightarrow \text{RKBS}$$

y veremos más adelante que ninguna de las flechas va para el otro lado. Podemos probar ahora que en un s.i.p. RKBS tenemos un núcleo reproductivo que se asemeja al núcleo reproductivo de un RKHS.

Proposición 5.1.6. *Sea $\mathcal{B}$ un s.i.p. RKBS sobre Ω con núcleo reproductivo K. Entonces existe una única función $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ tal que*

(1) $G(t, \cdot) \in \mathcal{B}$ y $K(\cdot, t) = (G(t, \cdot))^* \in \mathcal{B}^* \;\; \forall\, t \in \Omega$.

(2) $f(t) = [f, G(t, \cdot)]$ y $f^*(t) = [K(t, \cdot), f] \;\; \forall\, f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega$.

Demostración. Por el *teorema de representación de Riesz* 5.1.4, para cada $t \in \Omega$ existe un único $G_t \in \mathcal{B}$ tal que

$$f(t) = [f, G_t] \qquad \forall\, f \in \mathcal{B}.$$

Definimos $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ por $G(s,t) := G_s(t)$, $s,t \in \Omega$. Claramente $G(t,\cdot) \in \mathcal{B}$, $f(t) = [f, G(t,\cdot)]$ $\forall\, t \in \Omega$ y G en estas condiciones es única. Por la *proposición* 5.1.2, el núcleo reproductivo K de $\mathcal{B}$ satisface

$$f(t) = (f, K(\cdot,t))_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad f^*(t) = (K(t,\cdot), f^*)_{\mathcal{B}} \qquad \forall\, f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega.$$

Usando la forma bilineal $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{B}}$ obtenemos para cada $t \in \Omega$

$$(f, (G(t,\cdot))^*)_{\mathcal{B}} = [f, G(t,\cdot)] = f(t) = (f, K(\cdot,t))_{\mathcal{B}} \qquad \forall\, f \in \mathcal{B}.$$

de donde $(G(t,\cdot))^* = K(\cdot,t)$ $\forall\, t \in \Omega$. También

$$f^*(t) = (K(t,\cdot), f^*)_{\mathcal{B}} = [K(t,\cdot), f] \qquad \forall\, f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega$$

completando la demostración. ∎

A la función G del teorema se la llama *núcleo s.i.p.* de $\mathcal{B}$ y cuando coincide con K se la llama *núcleo reproductivo s.i.p.*. En este último caso, por la *proposición* 5.1.2 G satisface

$$G_s(t) := G(s,t) = G(s,\cdot)(t) = [G(s,\cdot), G(t,\cdot)] \qquad s,t \in \Omega.$$

En un RKBS ($\therefore$ en un s.i.p. RKBS), al igual que en un RKHS y con la misma cuenta, la convergencia en norma implica la convergencia puntual.

Proposición 5.1.7. *Sean $\mathcal{B}$ un RKBS sobre Ω con núcleo reproductivo K y $\{f_n\}_n \subset \mathcal{B}$ tal que $\|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$, entonces $|f_n(t) - f(t)| \longrightarrow 0$ $\forall\, t \in \Omega$ y la convergencia es uniforme en los subconjuntos de Ω donde la función $t \mapsto \|K(\cdot,t)\|$ es acotada.*

Demostración. De hecho, en un RKBS se cumple la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= |(f_n - f, K(\cdot,t))_{\mathcal{B}}| \\ &\leq \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \|K(\cdot,t)\|_{\mathcal{B}^*} = \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \sqrt{K(t,t)} \qquad \forall\, t \in \Omega, \end{aligned}$$

de donde se sigue inmediatamente lo afirmado. De paso, para un s.i.p. RKBS con núcleo reproductivo s.i.p. G se cumple

$$\begin{aligned} |f_n(t) - f(t)| &= |[f_n - f, G(t,\cdot)]| \\ &\leq \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \|G(t,\cdot)\|_{\mathcal{B}} = \|f_n - f\|_{\mathcal{B}} \sqrt{G(t,t)} \qquad \forall\, t \in \Omega. \end{aligned}$$

que muestra todavía mejor la semejanza en el procedimiento al probar el resultado análogo en un RKHS (*proposición* 2.1.4). ∎

5.2. Subespacios de RKBS's y s.i.p. RKBS's

Esta sección es con el único propósito de comparar resultados similares en los RKHS's. Veremos qué se puede decir al respecto de los subespacios (cerrados) de un RKBS y de un s.i.p. RKBS, por ejemplo si Y es subespacio cerrado de un espacio de Banach X entonces Y es asímismo un espacio de Banach con la norma inducida y si además X es reflexivo entonces Y también.

Proposición 5.2.1. *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach X, si:*

a) $[\cdot,\cdot]$ *es un semi-producto interno sobre X entonces* $[\cdot,\cdot]|_{Y\times Y}$ *es un semi-producto interno sobre Y.*

b) *X es un RKBS sobre un conjunto Ω entonces Y es un RKBS sobre Ω.*

c) *X es uniformemente convexo / uniformemente diferenciable Fréchet / uniforme entonces Y es uniformemente convexo / uniformemente diferenciable Fréchet / uniforme.*

d) *X es un s.i.p. RKBS sobre un conjunto Ω entonces Y es un s.i.p. RKBS sobre Ω.*

Demostración. a) y b) son inmediatas, para c) ver [Me98] capítulo 5 "Rotundity" y d) es consecuencia de los items anteriores. ■

5.3. Construcción de RKBS's y s.i.p. RKBS's

Empezamos con una construcción de un RKBS sobre Ω.

Proposición 5.3.1 (Zhang, Xu & Zhang [ZXZ09])**.** *Sea W un espacio de Banach reflexivo. Supongamos que existen $\Phi:\Omega\to W$ y $\Phi^*:\Omega\to W^*$ tales que*

$$\overline{span}\{\Phi(t):t\in\Omega\}=W \quad y \quad \overline{span}\{\Phi^*(t):t\in\Omega\}=W^* \tag{5.1}$$

entonces:

$\mathcal{B}=\{(u,\Phi^*(\cdot))_W : u\in W\}$ *equipado con*

$$\left\|(u,\Phi^*(\cdot))_W\right\|_{\mathcal{B}}:=\|u\|_W \quad y$$

$\mathcal{B}^*=\{(\Phi(\cdot),u^*)_W : u^*\in W^*\}$ *equipado con*

$$\left\|(\Phi(\cdot),u^*)_W\right\|_{\mathcal{B}^*}:=\|u^*\|_{W^*}$$

son RKBS sobre Ω y $\mathcal{B}^*$ es el dual de $\mathcal{B}$ con la forma bilineal

$$\left((u,\Phi^*(\cdot))_W,(\Phi(\cdot),u^*)_W\right)_{\mathcal{B}}:=(u,u^*)_W.$$

Además el núcleo reproductivo K para $\mathcal{B}$ está dado por

$$K(s,t)=(\Phi(s),\Phi^*(t))_W \qquad s,t\in\Omega. \tag{5.2}$$

Demostración. Primero mostramos que $\mathcal{B}$ definido como arriba es un espacio de Banach de funciones sobre Ω. Supongamos que tenemos $u \in W$ tal que $(u, \Phi^*(t))_W = 0 \ \forall t \in \Omega$, como $\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\}$ es denso en W^*, entonces debe ser $(u, u^*)_W = 0 \ \forall u^* \in W^*$, de donde $u = 0$. Recíprocamente, $(0, \Phi^*(t))_W = 0 \ \forall t \in \Omega$. De este modo $f_u(\cdot) := (u, \Phi^*(\cdot))_W = 0 \ \Leftrightarrow \ u = 0$ y este argumento también muestra que el representante u de la función f_u es único. En definitiva, queda definido un operador lineal biyectivo $T_{\Phi^*} : W \to \mathcal{B}$ tal que $T_{\Phi^*}u = f_u$ y, definiendo la norma en $\mathcal{B}$ como $\|f_u\|_{\mathcal{B}} := \|u\|_W$, T_{Φ^*} resulta un isomorfismo isométrico. De este modo, además de ser un espacio de Banach de funciones sobre Ω, $\mathcal{B}$ es reflexivo y, por la misma cuenta, $\widetilde{\mathcal{B}} = \{f_{u^*} := (\Phi(\cdot), u^*)_W : u^* \in W^*\}$ equipado con la norma $\|(\Phi(\cdot), u^*)_W\|_{\widetilde{\mathcal{B}}} := \|u^*\|_{W^*}$ es un espacio reflexivo de funciones sobre Ω.

Definimos una forma bilineal $\beta : \mathcal{B} \times \widetilde{\mathcal{B}} \to \mathbb{C}$ por

$$\beta(f_u, f_{u^*}) := (u, u^*)_W \qquad u \in W,\ u^* \in W^*.$$

β es acotada ya que para cualesquiera $u \in W$, $u^* \in W^*$ tenemos:

$$|\beta(f_u, f_{u^*})| = |(u, u^*)_W| \ \leq \|u\|_W \|u^*\|_{W^*} = \|f_u\|_{\mathcal{B}} \|f_u^*\|_{\widetilde{\mathcal{B}}}.$$

Por consiguiente cada función en $\widetilde{\mathcal{B}}$ es un funcional lineal continuo sobre $\mathcal{B}$ y son todos de esta forma por ser T_{Φ^*} un isomorfismo isométrico. En conclusión, $\widetilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^*$ con la forma bilineal β y si llamamos $T_\Phi : W^* \to \mathcal{B}^*$ al operador lineal tal que $(T_\Phi u^*)(\cdot) = (\Phi(\cdot), u^*)_W := f_{u^*}(\cdot)$ resulta que T_Φ también es isomorfismo isométrico.

Para ver que $\mathcal{B}$ es un RKBS sobre Ω resta ver que para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones en t son continuos en ambos $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$, sean pues $t \in \Omega$, $f_u \in \mathcal{B}$ y $f_{u^*} \in \mathcal{B}^*$, entonces:

$$|\delta_t f_u| = |f_u(t)| = |(u, \Phi^*(t))_W| \leq \|u\|_W \|\Phi^*(t)\|_{W^*} = \|\Phi^*(t)\|_{W^*} \|f_u\|_{\mathcal{B}}$$

y

$$|\delta_t^* f_{u^*}| = |f_{u^*}(t)| = |(\Phi(t), u^*)_W| \leq \|\Phi(t)\|_W \|u^*\|_{W^*} = \|\Phi(t)\|_W \|f_{u^*}\|_{\mathcal{B}^*}.$$

como se quería ver.

Finalmente, veamos que $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ definida como en (5.2) cumple la *proposición 5.1.2*, sea pues $t \in \Omega$, entonces

$$K(t, \cdot) = (\Phi(t), \Phi^*(\cdot))_W = f_{\Phi(t)}(\cdot) \in \mathcal{B}$$

y

$$K(\cdot, t) = (\Phi(\cdot), \Phi^*(t))_W = f_{\Phi^*(t)}(\cdot) \in \mathcal{B}^*,$$

y si $f_u \in \mathcal{B}$, queda

$$(f_u, K(\cdot, t))_{\mathcal{B}} = \beta(f_u, f_{\Phi^*(t)}) = (u, \Phi^*(t))_W = f_u(t) \qquad t \in \Omega$$

similarmente para $f_{u^*} \in \mathcal{B}^*$ obtenemos

$$(K(t, \cdot), f_{u^*})_{\mathcal{B}} = \beta(f_{\Phi(t)}, f_{u^*}) = (\Phi(t), u^*)_W = f_{u^*}(t) \qquad t \in \Omega.$$

Estos hechos muestran que K es el núcleo reproductivo de $\mathcal{B}$ como queríamos ver. ■

Las funciones $\{\Phi, \Phi^*\}$ y los espacios $\{W, W^*\}$, se dicen un par de *mapas característicos* y un par de *espacios caracteísticos* para el núcleo reproductivo K respectivamente. Notar que este teorema tiene similitud con la construcción hecha en un RKHS a partir de un operador lineal acotado (*proposición 2.3.2*) puesto que T_{Φ^*} definido por $T_{\Phi^*}u = (u, \Phi^*(\cdot))_W$ es el operador en cuestión. Al final de esta sección explicitaremos tal construcción en un s.i.p. RKBS pues será utilizada para demostrar un teorema de muestreo.

Usando la *proposición 5.3.1* obtenemos una caracterización de núcleo reproductivo en un RKBS como la que se tiene en un RKHS.

Teorema 5.3.2. *Una función $K : \Omega\times\Omega \to \mathbb{C}$ es el núcleo reproductivo de un RKBS sobre Ω si y sólo si es de la forma (5.2), con W un espacio de Banach reflexivo y $\Phi : \Omega \to W$, $\Phi^* : \Omega \to W^*$ satisfaciendo (5.1).*

Demostración. La vuelta ya la vimos en la *proposición 5.3.1*, así que resta ver la ida. Supongamos que K es el núcleo reproductivo para un RKBS $\mathcal{B}$ sobre Ω, tomemos

$$W = \mathcal{B},\ W^* = \mathcal{B}^*,\ \Phi(t) := K(t, \cdot),\ \Phi^*(t) := K(\cdot, t),\ t \in \Omega.$$

Por la *proposición 5.1.2*, W, W^*, Φ y Φ^* cumplen todas las condiciones. ∎

Observación 5.3.3. *Para abordar el tema de caracterización de los RKBS sobre Ω dependiendo de propiedades particulares de Ω, veamos que pasa si tenemos $\mathcal{B}$ un RKBS sobre Ω donde Ω es a lo sumo numerable.*

1. *Si Ω es finito, entonces toda función no trivial K sobre $\Omega \times \Omega$ es el núcleo reproductivo de un RKBS sobre Ω ([ZXZ09] pág. 2749).*

2. *Si Ω es un conjunto numerable (bien ordenado), para fijar ideas, digamos que $\Omega = \mathbb{N}$, entonces tenemos un espacio de Banach de sucesiones reflexivo indexadas por $\mathbb{N}$, donde su dual lo hemos identificado con un espacio de Banach de sucesiones indexadas por $\mathbb{N}$. Que las evaluaciones sean continuas en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{B}^*$ nos dice que los vectores canónicos $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forman una base de Schauder en ambos.*

   Si K es el núcleo reproductivo para $\mathcal{B}$, entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ es

   $$c_m = c(m) = (c, K(\cdot, m))_{\mathcal{B}} \quad \text{y} \quad d_m = d(m) = (K(m, \cdot), d)_{\mathcal{B}} \qquad c \in \mathcal{B},\ d \in \mathcal{B}^*.$$

   De esto se desprende que $K(\cdot, m)$ y $K(m, \cdot)$ son los funcionales lineales coordenados en $\mathcal{B}$ y en $\mathcal{B}^*$ respectivamente, o sea

   $$K(\cdot, m) = \delta_m \quad y \quad K(m, \cdot) = \delta^*_m \qquad m \in \mathbb{N}$$

   y por lo tanto $K(m, n) = (K(m, \cdot), K(\cdot, n))_{\mathcal{B}} = \delta_{m,n}$ $\forall m, n \in \mathbb{N}$, o sea, K es la delta de Kronecker.

   Recíprocamente, si $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach de sucesiones reflexivo indexado en $\mathbb{N}$, donde su dual puede ser identificado con un espacio de Banach de sucesiones y donde los vectores conónicos forman una base de Schauder en ambos espacios, entonces $\mathcal{B}$ es un RKBS sobre $\mathbb{N}$.

   Esto nos dará la pauta de lo que queremos que se cumpla cuando queramos generalizar los espacios $\ell_2(\mathbb{I})$.

Damos ahora una construcción de un s.i.p. RKBS sobre Ω. Dado $\Phi : \Omega \to E$, con E uniforme, notamos con Φ^* a la función de Ω en E^* definida por $\Phi^*(t) := (\Phi(t))^*$, $t \in \Omega$. Tenemos así resultados análogos a la *proposición* 5.3.1 y al *teorema* 5.3.2 ahora para un s.i.p. RKBS.

Proposición 5.3.4 (Zhang, Xu & Zhang [ZXZ09]). *Sea E un espacio de Banach uniforme y supongamos que existe $\Phi : \Omega \to E$ tal que*

$$\overline{span}\{\Phi(t) : t \in \Omega\} = E \quad y \quad \overline{span}\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\} = E^* \tag{5.3}$$

entonces:

$\mathcal{B} = \{[x, \Phi(\cdot)]_E : x \in E\}$ *equipado con*

$$\big[[x, \Phi(\cdot)]_E, [y, \Phi(\cdot)]_E\big]_{\mathcal{B}} := [x, y]_E \quad y$$

$\mathcal{B}^* = \{[\Phi(\cdot), x]_E : x \in E\}$ *equipado con*

$$\big[[\Phi(\cdot), x]_E, [\Phi(\cdot), y]_E\big]_{\mathcal{B}^*} := [x^*, y^*]_{E^*}$$

son s.i.p. RKBS's sobre Ω y $\mathcal{B}^*$ es el dual de $\mathcal{B}$ con la forma bilineal

$$\big([x, \Phi(\cdot)]_E, [\Phi(\cdot), y]_E\big)_{\mathcal{B}} := (x, y^*)_E$$

Además el núcleo reproductivo s.i.p. $G = K$ para $\mathcal{B}$ está dado por

$$G(s, t) = [\Phi(s), \Phi(t)]_E \qquad s, t \in \Omega. \tag{5.4}$$

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ como en el enunciado. Definimos un operador lineal $T_\Phi : E \to \mathcal{B}$ por

$$T_\Phi x = [x, \Phi(\cdot)]_E = (x, \Phi^*(\cdot))_E := f_x \qquad x \in E.$$

Por las mismas cuentas hechas en la *proposición* 5.3.1, si dotamos a $\mathcal{B}$ con la norma $\|f_x\|_{\mathcal{B}} := \|x\|_E$, T_Φ es un isomorfismo isométrico y $\mathcal{B}$ resulta un RKBS uniforme sobre Ω, donde su descripción es la dada en el enunciado al igual que la de $\mathcal{B}^*$. A los únicos productos semi-internos consistentes con sus normas los notamos por $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{B}}$ y $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{B}^*}$ respectivamente. Debido a que

$$[x, x]_E = \|x\|_E^2 = \|f_x\|_{\mathcal{B}}^2 = \|T_\Phi x\|_{\mathcal{B}}^2 = [T_\Phi x, T_\Phi x]_{\mathcal{B}} \qquad x \in E$$

el semi-producto interno sobre $\mathcal{B}$ está dado por

$$[f_x, f_y]_{\mathcal{B}} := [x, y]_E \qquad x, y \in E,$$

y por consiguiente el de $\mathcal{B}^*$ está dado por

$$[f_x^*, f_y^*]_{\mathcal{B}^*} = [f_y, f_x]_{\mathcal{B}} = [y, x]_E = [x^*, y^*]_{E^*} = [f_{x^*}, f_{y^*}]_{\mathcal{B}^*} \qquad x, y \in E$$

donde notamos $f_{x^*} := [\Phi(\cdot), x]_E = (\Phi(\cdot), x^*)_E$. Así, ya que la forma bilineal β de la *proposición* 5.3.1 cumple la fórmula del enunciado, sólo resta ver que si G está dada como en (5.4) y K es el núcleo reproductivo de $\mathcal{B}$, entonces G cumple la *proposición* 5.1.6 y resulta $G = K$. Para cada $t \in \Omega$ claramente se cumple

$$G(t, \cdot) = [\Phi(t), \Phi(\cdot)]_E = f_{\Phi(t)} \in \mathcal{B} \quad \text{y} \quad G(\cdot, t) = [\Phi(\cdot), \Phi(t)]_E = f_{\Phi^*(t)} \in \mathcal{B}^*,$$

y si $f_x \in \mathcal{B}$, entonces

$$\begin{aligned} \beta(f_x, K(\cdot,t)) &= f_x(t) \\ &= [x, \Phi(t)]_E \\ &= [f_x, f_{\Phi(t)}]_{\mathcal{B}} \\ &= [f_x, G(t,\cdot)]_{\mathcal{B}} = \beta(f_x, (G(t,\cdot))^*) \end{aligned}$$

de donde

$$K(\cdot,t) = (G(t,\cdot))^* \quad \text{y} \quad f_x(t) = [f_x, G(t,\cdot)]_{\mathcal{B}} \qquad t \in \Omega$$

De manera similar, si $f_{x^*} \in \mathcal{B}^*$ y $t \in \Omega$, tenemos

$$f_{x^*}(t) = [\Phi(t), x]_E = [f_{\Phi(t)}, f_x]_{\mathcal{B}} = [G(t,\cdot), f_x]_{\mathcal{B}}.$$

Para terminar, si $s, t \in \Omega$, obtenemos:

$$G(s,t) = [\Phi(s), \Phi(t)]_E = (\Phi(s), \Phi^*(t))_E = \beta(K(s,\cdot), K(\cdot,t)) = K(s,t)$$

y por lo tanto $G = K$. ■

Del mismo modo que antes, $\{\Phi, E\}$ se dicen *mapa característico* y *espacio caracteístico* para el núcleo reproductivo s.i.p. G. Notar que la completitud de $\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\}$ no se desprende de la completitud de $\{\Phi(t) : t \in \Omega\}$ puesto que el mapa dual $x \mapsto x^*$ al no ser aditivo no preserva completitud de combinaciones lineales.

Usando la *proposición 5.3.4* obtenemos una caracterización de núcleo reproductivo s.i.p. en un s.i.p. RKBS como la que se tiene en un RKBS.

Teorema 5.3.5. *Una función $G : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ es el núcleo reproductivo s.i.p. de un s.i.p. RKBS sobre Ω si y sólo si es de la forma (5.4), con E un espacio de Banach uniforme y $\Phi : \Omega \to E$, $\Phi^* : \Omega \to E^*$ satisfaciendo (5.3).*

Demostración. La suficiencia se probó en la *proposición 5.3.4*. Para ver la necesidad, supongamos que tenemos G como en (5.4) y tomemos $E = \mathcal{B}$ y $\Phi(t) := G(t,\cdot)$. Por la *proposición 5.1.6* es

$$G(s,t) = [\Phi(s), \Phi(t)]_E \qquad s, t \in \Omega$$

y $\overline{span}\{\Phi(t) : t \in \Omega\} = E$ pues $f(t) = [f, G(\cdot,t)]_E \ \forall f \in \mathcal{B}, \forall t \in \Omega$. Supongamos que $span\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\}$ no es denso en E^* y lleguemos a un absurdo. En tal caso, por el *teorema de Hahn-Banach* existe $f \in \mathcal{B}$ no nula tal que $[\Phi^*(t), f^*]_{\mathcal{B}^*} = 0 \ \forall t \in \Omega$, pero como

$$f(t) = [f, G(t,\cdot)]_{\mathcal{B}} = [f, \Phi(t)]_{\mathcal{B}} = [\Phi^*(t), f^*]_{\mathcal{B}^*} = 0 \qquad t \in \Omega$$

f resulta la función nula en $\mathcal{B}$ lo cual es absurdo, luego se cumple (5.3). ■

Ejemplo. ([ZXZ09] pág. 2748) Sean $\Omega = \mathbb{R}$, $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $1 < p, q < \infty$ exponentes conjugados. Consideramos $W = \mathcal{L}_p(I)$, $W^* = \mathcal{L}_q(I)$, $\Phi : \Omega \to W$ y $\Phi^* : \Omega \to W^*$ dadas por

$$\Phi(t)(\xi) := e^{-2\pi i t\xi} \quad \text{y} \quad \Phi^*(t)(\xi) := e^{2\pi i t\xi} \qquad t \in \mathbb{R},\ \xi \in I$$

Se puede ver que

$$\overline{span}\{e^{-2\pi i t(\cdot)} : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_p(I) \quad \text{y} \quad \overline{span}\{e^{2\pi i t(\cdot)} : t \in \mathbb{R}\} = \mathcal{L}_q(I)$$

ya que alcanza con tomar los $t \in \mathbb{Z}$ ([He10] pág. 450, [Yo80] pág. 111). Recordemos que para $f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier $\widehat{f}$ está definida por

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ixy}dx \qquad y \in \mathbb{R}$$

y su antitranformada por

$$\overset{\vee}{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{2\pi ixy}dx \qquad y \in \mathbb{R},$$

por la *proposición* 5.3.1 y el *teorema* 5.3.2 obtenemos el RKBS sobre $\mathbb{R}$

$$\mathcal{B}_p := \{f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_q(\mathbb{R}) : supp\, \widehat{f} \subset I\}$$

con norma $\|f\|_{\mathcal{B}_p} = \|\widehat{f}\|_{\mathcal{L}_p(I)}$ y dual $\mathcal{B}_p^*$ que identificamos con

$$\mathcal{B}_q := \{f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_p(\mathbb{R}) : supp\, \widehat{f} \subset I\}$$

con norma $\|f\|_{\mathcal{B}_q} = \|\widehat{g}\|_{\mathcal{L}_q(I)}$ (explicaremos al final de la sección de dónde salen estas descripciones).

Los espacios *Paley-Wiener* $\mathcal{B}_p$ son no isomorfos entre sí porque los espacios $\mathcal{L}_p(I)$ son no isomorfos entre sí y ambos están estrechamente relacionados como se aprecia en su mismísima definición, no obstante, veremos más abajo que poseen el mismo núcleo reproductivo (núcleo reproductivo s.i.p.). Para cada $f \in \mathcal{B}_p$ y $g \in \mathcal{B}_q$, tenemos la dualidad dada por la forma bilineal

$$(f, g)_{\mathcal{B}_p} = \int_I \widehat{f}(\xi)\, \overset{\vee}{g}(\xi)d\xi,$$

y el *núcleo reproductivo* K para $\mathcal{B}_p$ está dado por el seno cardinal, pues

$$K(s,t) := (\Phi(s), \Phi^*(t))_{\mathcal{L}_p(I)} = \int_I e^{-2\pi is\xi}e^{2\pi it\xi}d\xi = \frac{\sin \pi(t-s)}{\pi(t-s)} = sinc(t-s) \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

Para $f \in \mathcal{B}_p$, $g \in \mathcal{B}_q$ y $t \in \mathbb{R}$ obtenemos:

$$\begin{array}{rclclcl} (f, K(\cdot,t))_{\mathcal{B}_p} & = & \int_I \widehat{f}(\xi)(K(\cdot,t))^{\vee}(\xi)d\xi & = & \int_I \widehat{f}(\xi)e^{2\pi it\xi}d\xi & = & f(t), \\ (K(t,\cdot), g)_{\mathcal{B}_p} & = & \int_I (K(t,\cdot))^{\wedge}(\xi)\, \overset{\vee}{g}(\xi)d\xi & = & \int_I \overset{\vee}{g}(\xi)e^{-2\pi it\xi}d\xi & = & g(t). \end{array}$$

Por otro lado, como $\mathcal{L}_p(I)$ es uniforme, podemos usar la *proposición* 5.3.4 para concluir que $\mathcal{B}_p$ es un s.i.p. RKBS sobre $\mathbb{R}$ y la *proposición* 5.1.6 para concluir que K es el núcleo reproductivo s.i.p. para $\mathcal{B}_p$. Cuando $p = 2$ tenemos $\mathcal{B}_2 := PW(\mathbb{R})$ el RKHS sobre Ω visto en la *página* 20 y si $p \neq 2$ tenemos un ejemplo de s.i.p. RKBS que no es un RKHS. Se puede ver otro ejemplo de un s.i.p. RKBS en [FHY15] pág. 126. ♦

Escribiremos $(\mathcal{B}, [\cdot,\cdot], G, E, \Phi)$ s.i.p. RKBS sobre Ω cuando sea estrictamente necesario explicitar cada componente del mismo, por ejemplo cuando consideremos dos s.i.p. RKBS's sobre Ω simultáneamente, en caso contrario diremos simplemente que $\mathcal{B}$ es un s.i.p. RKBS sobre Ω.

Mirando las proposiciones 5.3.1 y 5.3.4, es claro que si tomamos un espacio W reflexivo pero no uniformemente convexo (o que no sea uniformemente diferenciable Fréchet), tendremos un RKBS que no es un s.i.p. RKBS.

Terminamos la sección mostrando la construcción de un s.i.p. RKBS mediante un operador lineal acotado, semejante a la hecha en la *proposición* 2.3.2. Si repasamos las demostraciones de las *proposiciones 5.3.1 y 5.3.4* veremos que ya está casi todo dicho.

Observación 5.3.6 (Construcción de un s.i.p. RKBS mediante un operador acotado, García & Portal [GP13])**.** *Sean $(E, [\cdot,\cdot]_E)$ un espacio uniforme, $\Phi : \Omega \to E$ una función y $T_\Phi : E \to \mathbb{C}^\Omega$ dado por $T_\Phi x = f_x$ con $f_x(t) = [x, \Phi(t)]_E$ para $t \in \Omega$.*

Usando la linealidad de $[\cdot,\cdot]$ en la primer variable se comprueba que T_Φ es lineal y si suponemos que

$$\overline{span}\{\Phi(t) : t \in \Omega\} = E$$

esto implica que

$$0 = f_x(t) = [x, \Phi(t)]_E \quad \forall\, t \in \Omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

con lo cual T_Φ es inyectivo. Notamos por $\mathcal{B} = \mathcal{R}(T_\Phi)$ y definimos sobre él la norma $\|f_x\|_{\mathcal{B}} := \|x\|_E$ que hace de T_Φ un isomorfismo isométrico entre E y $\mathcal{B}$, entonces $\mathcal{B}$ es un espacio de Banach uniforme de funciones de Ω en $\mathbb{C}$ y definiendo

$$[f_x, f_y]_{\mathcal{B}} := [x, y]_E \qquad x, y \in E$$

resulta que $[\cdot,\cdot]_{\mathcal{B}}$ es el único semi-producto interno compatible sobre $\mathcal{B}$. Para cada $t \in \Omega$ las evaluaciones $\delta_t : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$ son continuas, pues

$$|\delta_t(f_x)| = |f_x(t)| = |[x, \Phi(t)]_E| \leq \|x\|_E \|\Phi(t)\|_E = C_t \|f_x\|_{\mathcal{B}} \qquad \forall\, f_x \in \mathcal{B}.$$

y para que $\mathcal{B}$ sea un s.i.p. RKBS *sobre Ω, solamente falta asegurar que las evaluaciones $\delta_t^* : \mathcal{B}^* \to \mathbb{C}$ sean continuas para cada $t \in \Omega$. Como esto no se deduce de las hipótesis, recurrimos a la proposición 5.3.4 para obtenerlo, después cuando aspiremos a probar un teorema de muestreo, definiremos explicitamente la función $\Phi^* : \Omega \to E^*$ para que sí se cumpla la suposición equivalente de que*

$$\overline{span}\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\} = E^* \quad \text{donde} \quad \Phi^*(t) = (\Phi(t))^* \qquad t \in \Omega.$$

De este modo $\mathcal{B}^* = \{f_x^* := [\Phi(\cdot), x]_E : x \in E\}$ equipado con

$$[f_x^*, f_y^*]_{\mathcal{B}^*} := [y, x]_E = [f_y, f_x]_{\mathcal{B}} \qquad x, y \in E$$

es el dual de $\mathcal{B}$ con la forma bilineal

$$(f_x, f_y^*)_{\mathcal{B}} := [x, y]_E = y^*(x) = (x, y^*)_E \qquad x, y \in E$$

y el núcleo reproductivo s.i.p. G para $\mathcal{B}$ está dado por

$$G(s, t) = [\Phi(s), \Phi(t)]_E \qquad s, t \in \Omega.$$

Ejemplo. Volviendo al ejemplo anterior de los espacios Paley-Wiener

$$\mathcal{B}_p := \{f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_q(\mathbb{R}) : supp\, \widehat{f} \subset I\} \qquad \text{(funciones de ``banda limitada'')}$$

consideremos el siguiente subespacio cerrado de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}_p(I, \mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}) : f = 0 \text{ a.e. en } \mathbb{R} \setminus I\} \qquad \text{(funciones de ``tiempo limitado'')}$$

al cual podemos identificar naturalmente con el espacio $\mathcal{L}_p(I)$ (restringimos a $\mathcal{L}_p(I, \mathbb{R})$ el operador de restricción de $\mathcal{L}_p(\mathbb{R})$ en $\mathcal{L}_p(I)$ dado por $f \mapsto f|_I$), llamando $T : \mathcal{L}_p(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}_p(I)$ a este isomorfismo isométrico y $\mathcal{F}$ a la transformada de Fourier, entonces podemos reescribir a $\mathcal{B}_p$ como

$$\mathcal{B}_p = \{f \in C(\mathbb{R}) \cap \mathcal{L}_q(\mathbb{R}) : \mathcal{F}f \in \mathcal{L}_p(I, \mathbb{R})\} = \mathcal{F}^{-1}|_{\mathcal{L}_p(I,\mathbb{R})}(\mathcal{L}_p(I, \mathbb{R})).$$

Consideremos ahora el operador lineal acotado $T_\Phi : \mathcal{L}_p(I) \to \mathcal{B}_p$ de la *construcción* 5.3.6

$$(T_\Phi f)(y) = [f, \Phi(y)]_p = \int_I f(\xi) e^{2\pi i \xi y} d\xi = \overset{\vee}{f}(y) \qquad y \in \mathbb{R},$$

es decir, T_Φ es aplicar primero T^{-1} y luego la antitransformada, que está bien definido por la teoría de las distribuciones temperadas. ♦

5.4. Primera Generalización de RKBS's

A modo de analogía con la sección anterior sobre una primera genralización de RKHS considerando $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de funciones sobre un conjunto arbitrario Ω a valores en un espacio de Hilbert $\mathcal{X}$, podemos generalizar el concepto de RKBS considerando ahora $\mathcal{B}$ un espacio de Banach uniforme de funciones sobre un conjunto arbitrario Ω a valores en un espacio de Banach uniforme E y pidiendo que las evaluaciones puntuales, $\delta_t : \mathcal{B} \to E$ dadas por $\delta_t f = f(t)$ para $t \in \Omega$, sean operadores lineales acotados. Para mayores detalles recomendamos ver [ZZ13].

Capítulo 6

Sucesiones en Espacios de Banach Uniformes

En este capítulo trabajaremos sobre un *espacio de Banach uniforme* $(E, [\cdot,\cdot])$ y queremos extender los conceptos de sucesiones *Bessel, Riesz-Fischer, Marcos* y *Bases de Riesz* vistos en el *capítulo 3*. Si prestamos atención a las *definiciones 3.1.1, 3.2.1, 3.3.1 y 3.4.1* el espacio $\ell_2(\mathbb{I})$ está involucrado fuertemente en todas ellas, así que no será extraño trabajar con espacios de sucesiones más generales, una pauta de lo que queremos que cumplan estos espacios de sucesiones lo vimos en la *observación 5.3.3*. Antes de esto, empezamos recordando las relaciones entre sucesiones minimales, completas y totales que, usando ahora un semi-producto interno, se evidenciarán razonamientos geométricos similares a los utilizados en las pruebas de los mismos resultados en espacios de Hilbert,

Observación 6.0.1. *1. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es completa si y sólo si es total* (1.4).

Demostración. ($\Rightarrow$) Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa y si $f \in E$ es tal que $0 = f^*(f_j) = [f_j, f]$ $\forall\, j \in \mathbb{I}$ entonces por *Hahn-Banach* debe ser $f = 0$.

($\Leftarrow$) Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es total, entonces el único funcional lineal acotado sobre E que se anula en $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es el funcional nulo, luego $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa. ■

2. $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es minimal si y sólo si existe una sucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ tal que

$$[f_j, g_k] = \delta_{j,k} \qquad \forall\, j,k \in \mathbb{I}.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Para $k \in \mathbb{I}$ consideramos $M_k = \overline{span}\{f_j : j \neq k\}$, que por hipótesis es $f_k \notin M_k$ y por *Hahn-Banach* existe $\mu_k \in E^*$ tal que $\mu_k(f_k) = 1$ y $\mu_k(f_j) = 0$ $\forall\, j \neq k$. Como E es uniforme, existe un único $g_k \in E$ tal que $\mu_k(f) = [f, g_k]$ $\forall\, f \in E$, de donde $\mu_k = g_k^*$ y $[f_j, g_k] = \delta_{j,k}$ $\forall\, j,k \in \mathbb{I}$.

($\Leftarrow$) Sea $k \in \mathbb{I}$ y tomemos $f \in span\{f_j : j \neq k\}$, digamos $f = \sum_{j\in F} a_j f_j$ con $F \subset \mathbb{I} \setminus \{k\}$ finito , $a_j \in \mathbb{C}$, entonces

$$[f, g_k] = \left[\sum_{j\in F} a_j f_j, g_k\right] = \sum_{j\in F} a_j [f_j, g_k] = 0$$

de donde $f_k \notin span\{f_j : j \neq k\}$ puesto que $[f_k, g_k] = 1$. ■

Como en espacios de Banach ya no es cierto que para ser isométricamente isomorfos es necesario y suficiente tener la misma dimensión, cuando trabajemos con espacios de Banach de sucesiones (separables), vamos a necesitar que estos posean propiedades semejantes a aquellas de los espacios $\ell_p(\mathbb{I})$ con $1<p<\infty$, que como ya vimos son s.i.p. RKBS's sobre un conjunto a lo sumo numerable $\mathbb{I}$ (*página 41*).

Definición 6.0.2. Un *BK-space* X_d sobre un conjunto a lo sumo numerable y bien ordenado $\mathbb{I}$ es un espacio de Banach de sucesiones $c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{I}}$ con la propiedad de que los funcionales lineales coordenados $c \mapsto c_j$ son continuos $\forall\, j \in \mathbb{I}$.

Observar que esta última propiedad es equivalente a que la convergencia en norma de X_d implique convergencia coordenada a coordenada, también es equivalente a pedir que la sucesión de vectores canónicos $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset X_d$ formen una base de Schauder cuando el espacio es separable (*proposición 1.1.35*), y a los espacios que cumplen esto último se los suele llamar *CB-spaces*. Teniendo en mente $\ell_p(\mathbb{I})$ con $1 < p < \infty$, trasladamos algunas propiedades que poseen estos últimos a los *BK-space* en los que vamos a trabajar. Específicamente pedimos que: X_d sea *reflexivo* (*RCB-space*) y los vectores canónicos de X_d^* formen una base de Schauder (*CBCB-space*). Se puede ver en [KA64] que si X_d es un *BK-space* reflexivo sobre $\mathbb{I}$ entonces su dual X_d^* también es un *BK-space* sobre $\mathbb{I}$. Además, en tal caso, vale que

$$d(c) = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j \qquad c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d,\ d = \{d_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^*,$$

es decir, la dualidad entre X_d y X_d^* está dada por

$$(c, d)_{X_d} = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j.$$

Adicionalmente vamos a pedir que si la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j$ es convergente en $\mathbb{C}\ \forall\, c \in X_d$ entonces $d \in X_d^*$; y si converge $\forall\, d \in X_d^*$ entonces $c \in X_d$, también pediremos convergencia absoluta de esta serie (porque esto implicará convergencia incondicional de otras series). En definitiva, salvo indicación contraria, cuando consideremos un *BK-space* este cumplirá todas las condiciones adicionales mencionadas anteriormente. También, emplearemos la sucesión $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ para denotar o bien los vectores canónicos de X_d, o bien los funcionales lineales coordenados (evaluaciones) sobre X_d.

Ejemplo. Los espacios $\ell_p(\mathbb{I})$ para $1 < p < \infty$ son *BK-spaces* que satisfacen todas las propiedades adicionales, incluso la de convergencia absoluta como se puede comprobar mediante una aplicación sencilla de las *desigualdades de Hölder 1.3.3*. ♦

Observemos que un *BK*-space X_d en estas condiciones es un RKBS sobre $\mathbb{I}$, generalizando los espacios $\ell_p(\mathbb{I})$ incluso para $p = 2$. Con estas hipótesis sobre E, X_d e $\mathbb{I}$ podemos generalizar los conceptos de sucesiones *Bessel, Riesz-Fischer, Marcos* y *Bases de Riesz.*

6.1. Sucesiones X_d-Bessel

Definición 6.1.1. Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es X_d-*Bessel* para E si

$$\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d \qquad \forall\, f \in E. \tag{6.1}$$

Con esta definición toda sucesión *Bessel* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una sucesión $\ell_2(\mathbb{I})$-*Bessel* para $\mathcal{H}$. Vamos a definir dos operadores lineales asociados a una sucesión dada $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ (*Operadores de Análisis*) de manera similar que en espacios de Hilbert (no los definiremos sobre un dominio donde resulten acotados sino como operadores lineales sobre todo el espacio).

$$\begin{array}{rcl} U:E & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \\ f & \longmapsto & \{[f,f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} V:E^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^{\mathbb{I}} \\ f^* & \longmapsto & \{[f^*,f_j^*]_*\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array}$$

Decimos que están asociados a una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ pues $[f^*,f_j^*]_* = [f_j,f]$, $j\in\mathbb{I}$. Con estos operadores obtenemos una caracterización de sucesiones X_d-*Bessel* para E similar al *teorema 3.1.2*.

Teorema 6.1.2. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$. Son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es X_d-Bessel para E.*

ii) *$U: E\to X_d$ está bien definido y existe una constante $B>0$ tal que*

$$\|\{[f,f_j]\}_j\|_{X_d} \le B\|f\|_{\mathcal{B}} \qquad \forall\, f\in E.$$

iii) *$U: E\to X_d$ está bien definido y es acotado.*

iv) *La serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*$ converge incondicionalmente en E^* para toda $d\in X_d^*$ y $U^*: X_d^*\to E^*$ es acotado y viene dado por*

$$U^*d = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^* \qquad \forall\, d\in X_d^*. \tag{6.2}$$

Demostración. i) $\Rightarrow$ *ii)* Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Bessel* para E, el operador de análisis $U: E\to X_d$ es un operador lineal bien definido y resta ver que sea acotado. Para eso, veamos que tiene gráfico cerrado, supongamos que tenemos $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ y $c\in X_d$ tales que

$$g_k \xrightarrow{\|\cdot\|_E} g \quad \text{y} \quad Ug_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{X_d}} c,$$

entonces por la continuidad del semi-producto interno es $[g_k,f_j] \longrightarrow [g,f_j] = (Ug)_j$ para cada $j\in\mathbb{I}$ y como $(Ug_k)_j = [g_k,f_j] \longrightarrow c_j$, por unicidad del límite es $(Ug)_j = c_j$ para cada $j\in\mathbb{I}$, de donde $Ug=c$. Por el *teorema del gráfico cerrado* U es acotado.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* U está bien definido y al ser $Uf = \{[f,f_j]\}_j$ $\forall\, f\in E$, U es ciertamente acotado.

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Como U está bien definido y es acotado, lo mismo vale para su adjunto U^*. Veamos primero que la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*$ es convergente en E^* para toda $d\in X_d^*$. Sean $m>n$ e $\mathbb{I}_n \subset \mathbb{I}_m$ subconjuntos de índices de $\mathbb{I}$ con n y m elementos respectivamente. Sea

$d \in X_d^*$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j f_j^* \Big\|_{E^*} &= \sup_{f\in S_E} \Big| \Big(\sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j f_j^* \Big)(f) \Big| \\
&= \sup_{f\in S_E} \Big| \sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j [f, f_j] \Big| \\
&\leq \sup_{f\in S_E} \|\{[f, f_j]\}_j\|_{X_d} \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j \delta_j \Big\|_{X_d^*} \\
&\leq B \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j \delta_j \Big\|_{X_d^*}
\end{aligned}$$

Como $\{\delta_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ forman una base de Schauder para X_d^*, $\| \sum_{j\in\mathbb{I}_m\setminus\mathbb{I}_n} d_j\delta_j\|_{X_d^*}$ tiende a cero cuando n, m tienden a infinito, con lo cual es una sucesión de Cauchy en E^* y por lo tanto es convergente.

Mostraremos que se cumple (1.10) de la *proposición 1.1.33* y por lo tanto la serie convergerá incondicionalmente. Por el *teorema de representación de Riesz* para $N \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sup_{\mu\in B_{E^{**}}} \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |(d_j f_j^*, \mu)_{E^*}| \Big\} = \sup_{f\in B_E} \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |[f, \overline{d_j} f_j]| \Big\}$$

ya que $(d_j f_j^*, \mu)_{E^*} = (f, d_j f_j^*)_E = [f, \overline{d_j} f_j] \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$, entonces como

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |[f, \overline{d_j} f_j]| &= \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |d_j||[f, f_j]| \\
&\leq \|Uf\|_{X_d} \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |d_j|\delta_j \Big\|_{X_d^*} \\
&\leq B \underbrace{\|f\|_E}_{\leq 1} \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |d_j|\delta_j \Big\|_{X_d^*} \qquad f \in B_E
\end{aligned}$$

(aquí es donde usamos la propiedad sobre el par $\{X_d, X_d^*\}$ de que la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j$ converge absolutamente para todas $c \in X_d$, $d \in X_d^*$). Tomando límite en N queda

$$\lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{f\in B_E} \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |[f, \overline{d_j} f_j]| \Big\} \Big) \leq B \lim_{N\to\infty} \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N} |d_j|\delta_j \Big\|_{X_d^*} = 0.$$

Finalmente veamos que U^* cumple (6.2):

$$\begin{aligned}
(f, U^* d)_E &= (Uf, d)_{X_d} \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, d_j \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} [f_j^*, f^*]_*\, d_j \\
&= \Big[\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*, f^* \Big]_* = \Big(f, \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^* \Big)_E \qquad f \in E,\; d \in X_d^*.
\end{aligned}$$

iv) $\Rightarrow$ *iii)* Por propiedad del adjunto resulta que $U : E \to X_d$ está bien definido y es acotado,

iii) $\Rightarrow$ *i)* Como $U : E \to X_d$ está bien definido vale (6.1) y, como U es acotado, la constante B que sirve es precisamente la de acotación de U. ■

Como se puede apreciar, los *teoremas* 6.1.2 y 3.1.2 fueron demostrados de manera casi idéntica.

Observación 6.1.3. *Tendremos siempre resultados "duales" del siguiente tipo que no explicitaremos en lo sucesivo:*

Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$*. Son equivalentes:*

i)* $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d^**-Bessel para* E^**.*

ii)* $V : E^* \to X_d^*$ *está bien definido y existe una constante* $B^* > 0$ *tal que*

$$\|\{[f^*, f_j^*]\}_j\|_{X_d^*} \leq B^*\|f^*\|_{E^*} \qquad \forall\, f^* \in E^*.$$

iii)* $V : E^* \to X_d^*$ *está bien definido y es acotado.*

iv)* *La serie* $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ *es convergente en* E *para toda* $c \in X_d$ *y el adjunto de* V*,* $V^* : X_d \to E^*$*, es acotado y viene dado por*

$$V^*d = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \qquad \forall\, c \in X_d.$$

Los operadores U^*, V^* se dicen *operadores de Síntesis* y es claro que la cota Bessel para $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es $B = \|U\| = \|U^*\|$. Gracias al *teorema* 6.1.2 es claro que para verificar que una sucesión es X_d*-Bessel* para E, alcanza con comprobar que $\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d$ $\forall\, f \in D$ para algún $D \subset E$ denso, ya que si el operador de análisis está definido y es acotado sobre D, lo extendemos por densidad a todo E de manera continua.

6.2. Sucesiones X_d-Riesz-Fischer

Definición 6.2.1. Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es X_d*-Riesz-Fischer* para E si

$$\forall\, c = \{c_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d, \quad \exists\, f \in E \quad \text{tal que} \quad [f, f_j] = c_j \quad \forall\, j \in \mathbb{I}. \tag{6.3}$$

Notar que decir que $[f, f_j] = c_j$ $\forall\, j \in \mathbb{I}$ en (6.3) es lo mismo que decir que $Uf = c$. Con esta definición toda sucesión *Riesz-Fischer* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una sucesión $\ell_2(\mathbb{I})$*-Riesz-Fischer* para $\mathcal{H}$. Cabe aclarar que puede existir $f \in E$ tal que $Uf \notin X_d$ con lo cual U puede no estar bien definido como operador de E en X_d.

Proposición 6.2.2. *Si* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ *es una sucesión* X_d*-Riesz-Fischer para* E*, entonces*

a) *Existe una constante* $A > 0$ *tal que:*

$$\textit{Dada } c \in X_d, \quad \exists\, f \in E \quad \text{que cumple} \quad A\|f\|_E \leq \|c\|_{X_d}. \tag{6.4}$$

b) $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es minimal en* E^*.

Demostración. Sea $N \subset E$ el subespacio cerrado dado por

$$N = \{f \in E : Uf = 0\} = \{f \in E : [f, f_j] = 0 \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}\} = \bigcap_{j\in\mathbb{I}} Ker(f_j^*).$$

a) Consideremos el espacio de Banach reflexivo $X = E/N$ con la norma usual (E y N reflexivos). Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una sucesión X_d-*Riesz-Fischer* para E, podemos definir un operador lineal $T : X_d \to X$ como $Tc = \overline{f}$ donde $\overline{f}$ denota la clase en X de un $f \in E$, es decir, $\overline{f} = f + f_0$ con $f_0 \in N$ cualquiera.

T está bien definido pues si $g \in E$ es tal que $Ug = c$, entonces $f_0 = g - f \in N$, $Tc = f + (g - f) = g$ y $g \in \overline{f}$.

Veamos que T tiene gráfico cerrado. Supongamos entonces que tenemos

$$c^k \overset{\|\cdot\|_{X_d}}{\longrightarrow} c \quad \text{ y } \quad Tc^k \overset{\|\cdot\|_X}{\longrightarrow} \overline{g},$$

es decir, $c_j^k \longrightarrow c_j \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$.

Existe $\{g^k\}_{k\in\mathbb{I}} \subset E$ tal que $Ug^k = c^k \;\; \forall\, k \in \mathbb{I}$, de donde $[g^k, f_j] = c_j^k \;\; \forall\, j, k \in \mathbb{I}$. Esta última converge a $c_j \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$ y como $\overline{g^k} \longrightarrow \overline{g}$ en X, podemos elegir representantes para cada $k \in \mathbb{I}$ de modo que $g^k \longrightarrow g$ en E, con lo cual

$$[g^k, f_j] \longrightarrow [g, f_j] \qquad \forall\, j \in \mathbb{I},$$

y por lo tanto, por unicidad del límite, debe ser $[g, f_j] = c_j \;\; \forall\, j \in \mathbb{I}$, de donde $Ug = c$ y $Tc = \overline{g}$ como queríamos.

Por el *teorema del gráfico cerrado*, T es acotado y existe una constante $A > 0$ tal que para toda $c \in X_d$ se cumple

$$A\|\overline{g}\|_X = A\|Tc\|_X \leq \|c\|_{X_d} \qquad \forall\, g \in E \quad \text{con} \quad c = Ug.$$

Fijado g tal que $Ug = c$, como E es reflexivo, existe $h_0 \in N$ tal que

$$\|\overline{g}\|_X = \text{ínf}\{\|g - h\|_E : \, h \in N\} = \|g - h_0\|_E$$

Tomando $f := g - h_0$, se cumple $A\|f\|_E \leq \|Uf\|_{X_d}$.

b) Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es Riesz-Fischer, si $\delta^k = \{\delta_j^k\}_{j\in\mathbb{I}}$ denota al vector canónico k-ésimo de X_d, entonces existe $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{H}$ tal que $Ug_k = \delta^k \;\; \forall\, k \in \mathbb{I}$ de donde $[f_j^*, g_k^*]_* = [g_k, f_j] = \delta_{k,j} \;\; \forall\, k, j \in \mathbb{I}$, luego $\{g_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ y $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ son biortogonales y por la *observación* 6.0.1 $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal en E^*. ∎

Teorema 6.2.3. *Sea* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$, *son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d-*Riesz-Fischer para* E.

ii) Existe una constante $A > 0$ *tal que para toda* $d \in X_d^*$ *con a lo sumo finitos términos no nulos, i.e.:* $\forall\, d \in (c_{00}, \|\cdot\|_{X_d^*})$, *se cumple*

$$A\|d\|_{X_d^*} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^* \right\|_{E^*}$$

Demostración. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $d \in X_d^*$ con a lo sumo finitos términos no nulos, por reflexividad de X_d junto con *Hahn-Banach*, existe $c \in X_d$ de norma uno tal que

$$\|d\|_{X_d^*} = |d(c)| = \left|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j\right|.$$

Como estamos suponiendo que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Riesz-Fischer* para E, por (6.4) de la *proposición* 6.2.2 existen una constante $A > 0$ (independiente de $c \in X_d$) y $f \in E$ con $Uf = c$ tales que $\|f\|_E \leq 1/A$, entonces:

$$\begin{aligned}\|d\|_{X_d^*} &= \left|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j\right| \\ &= \left|\sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j] d_j\right| \\ &= \left|\left(f, \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right)_E\right| \\ &\leq \|f\|_E \left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right\|_{E^*} \leq \frac{1}{A}\left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right\|_{E^*}\end{aligned}$$

Despejando A, obtenemos lo que queremos.

$ii) \Rightarrow i)$ Sea $c \in X_d$, definimos un funcional lineal ν sobre $M = span\{f_j^* : j \in \mathbb{I}\}$ como:

$$\nu\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right) = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j c_j \qquad \forall\, d \in (c_{00}, \|\cdot\|_{X_d^*}).$$

Por hipótesis

$$\left|\nu\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right)\right| = \left|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j c_j\right| \leq \|d\|_{X_d^*}\|c\|_{X_d} \leq \frac{1}{A}\|c\|_{X_d}\left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right\|_{E^*}$$

con lo cual ν es acotado y $\|\nu\| \leq \frac{1}{A}\|c\|_{X_d}$. Lo extendemos por *Hahn-Banach* a todo E^* (y lo seguimos llamando ν). Como E es reflexivo, existe $f \in E$ tal que

$$\|f\|_E = \|\nu\|_{E^{**}} \leq \frac{1}{A}\|c\|_{X_d}$$

y

$$\left(f, \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*\right)_E = \left(\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j f_j^*, \nu\right)_{E^*} = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j d_j$$

En particular, $f_j^*(f) = [f, f_j] = c_j\ \ \forall\, j \in \mathbb{I}$ y $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ cumple (6.3). ■

Como se puede apreciar, los *teoremas* 6.2.3, 3.2.3 y las *proposiciones* 6.2.2, 3.2.2 fueron demostrados de manera casi idéntica. En la siguiente sección vamos a definir un X_d-*Marco* para E de manera que cumpla, entre otras cosas, la última proposición de esta sección.

Proposición 6.2.4. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ una sucesión tal que existe una constante $A > 0$ tal que*

$$A\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|\{[f, f_j]\}_j\|_{X_d} \qquad \forall\, f \in E$$

entonces $\overline{span}\{f_j^*\} = E^*$.

Demostración. Supongamos por el contrario que $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ no es completa. Por *Hahn-Banach* existe $\nu \in E^{**}$ no nulo tal que $\nu(f_j^*) = 0 \ \ \forall j \in \mathbb{I}$. Por reflexividad de E, existe $f \in E$ tal que $0 = \nu(f_j^*) = f(f_j^*) = [f, f_j] \ \ \forall j \in \mathbb{I}$. pero $A\|f\|_E \leq 0$ y entonces $f = 0$ lo cual es absurdo. ∎

6.3. X_d-Marcos

Definición 6.3.1. Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es *X_d-Marco* para E si la sucesión $\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d$ para todo $f \in E$ y existen constantes $B \geq A > 0$ tales que

$$A\|f\|_E \leq \|\{[f, f_j]\}_j\|_{X_d} \leq B\|f\|_E \qquad \forall f \in E. \tag{6.5}$$

Con esta definición todo *Marco* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un $\ell_2(\mathbb{I})$-*Marco* para $\mathcal{H}$. En [ZXZ11] se pide en la definición de X_d-*Marco* que $\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d$ para todo $f \in E$, y aunque esta es redundante la ponemos igual. Teniendo en cuenta (6.5) es inmediato que para una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ vale que $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d^*-*Marco* para E^* si y sólo si $\{[f_j, f]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^* \ \forall f \in E$ y $\exists B \geq A > 0$ tales que

$$\underbrace{A\|f\|_E}_{=\|f^*\|_{E^*}} \leq \| \underbrace{\{[f_j, f]\}_j}_{=\{[f^*,f_j^*]_*\}_j} \|_{X_d^*} \leq \underbrace{B\|f\|_E}_{=\|f^*\|_{E^*}} \qquad \forall f \in E.$$

Cuando $[\cdot,\cdot]$ es un producto interno y $X_d = X_d^* = \ell_2(\mathbb{I})$ el resultado anterior nos dice que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d-*Marco* para E si y sólo si $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d^*-*Marco* para E^*, pero cuando no es producto interno esto puede no valer (ver [ZXZ11] ejemplo 5.3 pág. 22).

Es evidente también de las definiciones que si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Marco* para E entonces es X_d-*Bessel* para E y, debido a la *proposición* 6.2.4, $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa. Seguidamente vemos qué más hay que pedir para que una sucesión X_d-*Bessel* sea un X_d-*Marco*.

Teorema 6.3.2. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$, son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es X_d-Marco para E.*

ii) $U : E \to X_d$ *es acotado y acotado inferiormente.*

iii) $U^* : X_d^* \to E^*$ *es acotado y sobreyectivo.*

Demostración. *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Marco* para E si y sólo si $\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d \ \forall f \in E$ y existen constantes positivas $B \geq A$ tales que

$$A\|f\|_E \leq \|\{[f, f_j]\}_j\|_{X_d} = \|Uf\|_{X_d} \leq B\|f\|_E \qquad \forall f \in E.$$

si y sólo si $U : E \to X_d$ es acotado (la acotación por arriba) y U es acotado inferiormente (la acotación por abajo).

ii) $\Leftrightarrow$ *iii)* $U : E \to X_d$ es acotado y acotado inferiormente si y sólo si su adjunto $U^* : X_d^* \to E^*$ es acotado y sobreyectivo. ∎

6.4. X_d-Bases de Riesz

Definición 6.4.1. Decimos que una sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ es X_d-*Base de Riesz* para E si es *completa*, la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ converge en E para toda $c \in X_d$ y existen constantes $B \geq A > 0$ tales que

$$A\|c\|_{X_d} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|_E \leq B\|c\|_{X_d} \qquad \forall\, c \in X_d. \tag{6.6}$$

Con esta definición toda *Base de Riesz* en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es una $\ell_2(\mathbb{I})$-*Base de Riesz* para $\mathcal{H}$. Si bien pedir la convergencia de la serie es redundante, la pedimos porque usualmente antes de probar la existencia de las constantes en (6.6) se prueba la convergencia. A continuación mostramos que el término "base" no es arbitrario en la definición anterior.

Proposición 6.4.2. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ una X_d-Base de Riesz para E, entonces $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una Base de Schauder para E y $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d^*-Marco para E^*.*

Demostración. Veamos primero que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es base de Schauder. Como la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ converge en E $\forall\, c \in X_d$, toda $f \in R(V^*)$ (cerrado) se escribe como $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ para alguna $c \in X_d$. Esta escritura es única pues si existiera otra sucesión $\widetilde{c} \in X_d$ tal que $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} \widetilde{c}_j f_j$, por la desigualdad por abajo en (6.6) queda

$$A\|c - \widetilde{c}\|_{X_d} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} (c_j - \widetilde{c}_j) f_j \right\|_E = 0$$

de donde $c = \widetilde{c}$. De este modo $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es básica y, al ser completa, resulta una base de Schauder. Para ver que $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d^*-*Marco* para E^*, sólo hay que notar que la definión de X_d-*Base de Riesz* nos dice que existen constantes positivas $B \geq A$ tales que

$$A\|c\|_{X_d} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|_E = \|V^* c\|_E \leq B\|c\|_{X_d} \qquad \forall\, c \in X_d$$

de donde el operador lineal $V^* : X_d \to E$ es acotado, acotado inferiormente (si y sólo si es inyectivo y tiene rengo cerrado) y sobreyectivo (por la completitud de $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$). En definitiva V^* es biyectivo, entonces V es acotado y biyectivo y se cumple lo análogo de la *proposición* 6.3.2 para U. ∎

Ya que $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un X_d^*-*Marco* para E^* entonces es X_d^*-*Bessel* para E^*, también, como V^* resulta un isomorfismo topológico entonces V lo es, por consiguiente, $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Riesz-Fischer* para E^* y por la *proposición* 6.2.2 $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal en E.

Las constantes de X_d^*-*Marco* para E^* son las mismas que las de X_d-*Base de Riesz* para E ya que $\|V\| = \|V^*\| = B$ y $\|V^{-1}\| = \|(V^{-1})^*\| = \|(V^*)^{-1}\| = A$. Obtenemos ahora la caracterización:

Teorema 6.4.3. *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$, son equivalentes:*

i) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es X_d-Base de Riesz para E.*

ii) $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d^**-Marco para* E^* *y* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es minimal.*

iii) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es completa y* $V : E^* \to X_d^*$ *es acotado y sobreyectivo.*

iv) $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es completa y* $V^* : X_d \to E$ *es acotado y acotado inferiormente.*

Demostración. *i)* $\Rightarrow$ *ii)* Ya vimos en la *proposición* 6.4.2 que $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Marco* para E^* y que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una base de Schauder, de esto último, por la escritura única es minimal.

ii) $\Rightarrow$ *iii)* La sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ resulta completa en E debido a la desigualdad por debajo de X_d^*-*Marco* junto con el resultado dual de la *proposición* 6.2.4. Por ambas desigualdades de X_d^*-*Marco*, $V : E^* \to X_d^*$ es acotado y acotado inferiormente, con lo cual su adjunto V^* dado por $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ es acotado y sobreyectivo. Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal, V^* resulta inyectivo además, ya que si $0 = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j$ con algún $c_k \neq 0$, despejando obtenemos que $f_k \in \overline{span}\{f_j : j \in \mathbb{I}\backslash\{k\}\}$ en contradicción con la hipótesis. De este modo V^* es biyectivo, por lo tanto V lo es, y en particular es sobreyectivo.

iii) $\Leftrightarrow$ *iv)* A esta altura es obvio.

iv) $\Rightarrow$ *i)* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa en E por hipótesis. La serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j = V^*c$ es convergente en E para toda sucesión $c \in X_d$ ya que V^* es acotado. Como también V^* es acotado inferiormente, en definitiva, existen constantes positivas $B \geq A$ tales que

$$A\|c\|_{X_d} \leq \left\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j f_j \right\|_E = \|V^*c\|_E \leq B\|c\|_{X_d} \qquad \forall\, c \in X_d$$

de donde $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Base de Riesz* para E. ■

Resumimos la relación obtenida hasta ahora entre los operadores de Análisis y las sucesiones X_d-Bessel, X_d-Riesz-Fischer, X_d-Marcos y X_d-Bases de Riesz.

Observación 6.4.4. *Sea* V *el operador de análisis asociado a una sucesión* $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E^*$*, entonces:*

1. $V : E^* \to X_d^*$ *es acotado y sobreyectivo si y sólo si* $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d^**-Bessel y* X_d^**-Riesz-Fischer para* E^**.*

2. $V : E^* \to X_d^*$ *es acotado y acotado inferiormente si y sólo si* $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d^**-Marco para* E^**.*

3. $V : E^* \to X_d^*$ *es acotado y biyectivo si y sólo si* $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d^**-Marco,* X_d^**-Bessel y* X_d^**-Riesz-Fischer para* E^**, si y sólo si* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es* X_d*-Base de Riesz para* E*.*

Con resultados análogos para el otro operador de análisis $U : E \to X_d$*.*

6.5. Reconstrucción

Abordamos ahora el tema de la reconstrucción de una $f \in E$. Supongamos que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Marco* para E, decimos que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un *Marco de Banach* para E si existe un operador lineal acotado $T : X_d \to E$ tal que $TUf = f \;\; \forall\, f \in E$.

Supongamos que tenemos $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ un *Marco de Banach* para E con el correspondiente $T : X_d \to E$ tal que $TU = I$, ya sabemos que $\mathcal{R}(U)$ es cerrado en X_d y definiendo

$P : X_d \to X_d$ por $Pc = c$ si $c \in \mathcal{R}(U)$ y 0 en caso contrario, resulta que P es un proyector acotado y $X_d = \mathcal{R}(U) \oplus N$ con $N := Ket(T) = Ker(P)$, de donde $\mathcal{R}(U)$ es complementado en X_d. Recíprocamente, si $\mathcal{R}(U)$ es complementado en X_d entonces por la *proposición* 1.1.4 es $X_d = \mathcal{R}(U) \oplus N$ con N cerrado y definimos $T : X_d \to E$ como

$$Tc = \begin{cases} f & \text{si} \quad Uf = c \\ 0 & \text{si} \quad c \in N \end{cases}$$

T es un operador lineal bien definido y acotado ya que $\|Tc\|_E = \|f\|_E \leq A^{-1}\|c\|_{X_d}$ $\forall c \in \mathcal{R}(U)$ y $\|Tc\|_E = 0$ si $c \in N$, además cumple $TU = I$ por lo que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ resulta un *Marco de Banach* para E.

Proposición 6.5.1 (Fórmulas de Reconstrucción I). *Sea $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ un X_d-Marco para E tal que $\mathcal{R}(U)$ es complementado en X_d, entonces existe $\{g_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ un X_d^*-Marco para E^* tal que*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, g_j \qquad \text{y} \qquad f^* = \sum_{j\in\mathbb{I}} [g_j, f]\, f_j^* \qquad f \in E \tag{6.7}$$

donde $TU = I$ y $g_j = T\delta_j$ $\forall j \in \mathbb{I}$.

Si además $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal entonces $T = U^{-1}$ y $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d-Base de Riesz para E con $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ como sucesión biortogonal.

Demostración. Como $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ un X_d-*Marco* para E tal que $\mathcal{R}(U)$ es *complementado* en X_d, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es un *Marco de Banach* y existe un operador lineal acotado $T : X_d \to \mathcal{B}$ tal que $TU = I$. Para cada $j \in \mathbb{I}$ sea $g_j = T\delta_j \in E$, veamos que $\{g_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ un X_d^*-*Marco* para E^*. Por la *proposición* 6.3.2 es suficiente ver que el operador adjunto asociado $V^* : X_d \to E$ es acotado y sobreyectivo. Es acotado ya que

$$\|V^*c\|_E = \Big\| \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j g_j \Big\|_E = \Big\| T\Big(\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j \delta_j\Big) \Big\|_E \leq \|T\|\|c\|_{X_d} \qquad \forall c \in X_d$$

y es sobreyectivo ya que T es sobreyectivo. Para ver que vale (6.7), al tener $TU = I$, obtenemos:

$$f = TUf = T\Big(\sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, \delta_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, T\delta_j = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, g_j \qquad \forall f \in E$$

con la serie de la última igualdad convergente en $\mathcal{B}$, también

$$\begin{aligned} [g, f] &= \Big[\sum_{j\in\mathbb{I}} [g, f_j]\, g_j, f \Big] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}} [g, f_j]\, [g_j, f] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}} [g_j, f]\, [f_j^*, g^*]_* \\ &= \Big[\sum_{j\in\mathbb{I}} [g_j, f]\, f_j^*, g^* \Big]_* = \Big[g, \Big(\sum_{j\in\mathbb{I}} [g_j, f]\, f_j^* \Big)^* \Big] \qquad g, f \in E \end{aligned}$$

de donde

$$f^* = \sum_{j\in\mathbb{I}} [g_j, f]\, f_j^* \qquad \forall\, f \in E.$$

con la serie convergente en E porque el operador adjunto U^* asociado a $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es acotado y sobreyectivo.

Para el además, si $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es *minimal* entonces por la *proposición* 6.4.3 $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d^**-Base de Riesz* para E^* con lo que U es biyectivo (por lo tanto $\mathcal{R}(U) = X_d$ es *complementado*) y el único operador lineal acotado que existe es $T = U^{-1}$, llamando $g_j = U^{-1}\delta_j$ para cada $j \in \mathbb{I}$, veamos que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ y $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ son biortogonales. Por la primer fórmula de reconstrucción podemos escribir

$$g_k = \sum_{j\in\mathbb{I}} [g_k, f_j]\, g_j \qquad k \in \mathbb{I}$$

y por la minimalidad de $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$, debe ser $[g_k, f_j] = \delta_{k,j}$ $\forall\, k, j \in \mathbb{I}$. ∎

Notar que en la proposición anterior es $I^* = (TU)^* = U^*T^*$ con U operador asociado a $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ y también $I^* = U^*V = (V^*U)^*$ con V operador asociado a $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$. De este modo se sigue que $TU = V^*U$, con lo cual $T = V^*$ sobre $\mathcal{R}(U)$ (ya que ahí U es inversible a derecha).

Vamos a introducir otros dos operadores lineales acotados. Para eso, supongamos que dada la sucesión $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{B}$, los operadores U y V son acotados. Definimos:

$$S : E \to E \quad \text{dado por} \quad Sf = V^*Uf = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, f_j \qquad \forall\, f \in E$$

y

$$G : X_d \to X_d \quad \text{dado por} \quad Gc = UV^*c = \left\{ \sum_{k\in\mathbb{I}} c_k\, [f_k, f_j] \right\}_{j\in\mathbb{I}} \qquad \forall c \in X_d.$$

S se llama *Operador de reconstrucción* y G *Operador Gram*. El operador Gram no va a ser utilizado aquí pero vale la pena notar que el mismo está dado como multiplicación del vector c con la matriz infinita $(G_{k,j}) = \{[f_k, f_j]\}_{k,j}$.

Si S es biyectivo tenemos entonces que

$$f = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j] S^{-1} f_j \qquad \forall\, f \in E$$

recuperando así toda $f \in E$. Como pone de manifiesto el siguiente resultado, deben cumplirse varias condiciones simultáneamente para ello.

Proposición 6.5.2. *Para U y V acotados, S es acotado y biyectivo si y sólo si $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-Marco para E^*, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-Marco para E y $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es $\mathcal{R}(U)$-Base de Riesz para E.*

Demostración. (⇒) Si $S = V^*U$ es acotado y biyectivo, entonces V^* es acotado y sobreyectivo, entonces V es acotado y acotado inferiormente, de donde $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^**-Marco* para E^*. También, $S^* = U^*V$ resulta acotado y biyectivo, y por el mismo razonamiento que antes ahora para U^*, $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Marco* para E. Para ver que $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es $\mathcal{R}(U)$-*Base de Riesz* para E, veamos que V^* restringido a $R(U)$ en E es biyectivo, ciertamente V^* es sobreyectivo sobre $\mathcal{R}(U)$ pues $V^*(\mathcal{R}(U)) = E$ y si para $f, g \in E$ fuera $Sf = V^*Uf = V^*Ug = Sg$, al ser S y U inyectivos sería $f = g$, por lo tanto V^* también es inyectivo sobre $\mathcal{R}(U)$.

($\Leftarrow$) Si se cumplen las tres condiciones, $U : E \to \mathcal{R}(U)$ es acotado y biyectivo, $V^* : X_d \to E$ es acotado y sobreyectivo y $V^*|_{\mathcal{R}(U)} : \mathcal{R}(U) \to E$ es acotado y biyectivo, de donde $S = V^*U$ es acotado y biyectivo. ■

Corolario 6.5.3. *Si $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-Base de Riesz para E y $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-Base de Riesz para E^* entonces S es biyectivo.*

En este caso podemos reescribir las fórmulas (6.7) usando el operador S como sigue.

Proposición 6.5.4 (Fórmulas de Reconstrucción II)**.** *Si S es acotado y biyectivo entonces*

$$f = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j] S^{-1} f_j \quad \text{y} \quad f^* = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f_j, f](S^{-1})^* f_j^* \qquad \forall\, f \in E. \tag{6.8}$$

Además $[S^{-1}f_k, f_j] = \delta_{k,j}$ $\forall\, j, k \in \mathbb{I}$.

Demostración. Como S es acotado y biyectivo, por la *proposición* 6.5.2, $\{f_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Marco* para E^* y $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Marco* y $\mathcal{R}(U)$-*Base de Riesz* para E. Para $f \in E$ tenemos:

$$Sf = V^*Uf = V^*(\{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}}) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, f_j$$

Y aplicando S^{-1} obtenemos

$$f = S^{-1}\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, f_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j]\, S^{-1} f_j \qquad f \in E.$$

Considerando ahora que S^* es acotado y biyectivo, para $f^* \in E^*$ tenemos:

$$S^*f^* = U^*Vf^* = U^*(\{[f^*, f_j^*]_*\}_{j\in\mathbb{I}}) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f^*, f_j^*]_*\, f_j^*$$

Y aplicando $(S^*)^{-1} = (S^{-1})^*$ obtenemos

$$\begin{aligned} f^* &= (S^*)^{-1}\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} [f^*, f_j^*]_*\, f_j^*\right) \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}} [f^*, f_j^*]_*\, (S^*)^{-1} f_j \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}} [f_j, f]\, (S^{-1})^* f_j^* \qquad f \in E. \end{aligned}$$

probando las fórmulas en (6.8). Para ver el además, en particular para $S^{-1}f_k \in E$ queda

$$S^{-1}f_k = \sum_{j\in\mathbb{I}} [S^{-1}f_k, f_j]\, S^{-1} f_j \qquad k \in \mathbb{I}$$

y al ser $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ minimal, $\{S^{-1}f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ también lo es, de donde resulta que $[S^{-1}f_k, f_j] = \delta_{k,j}$ $\forall\, j, k \in \mathbb{I}$. ■

Una propiedad notable de un $\ell_2(\mathbb{I})$-*Marco* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es que los coeficientes $\langle f, f_j\rangle$ son los más económicos para la descomposición de un $f \in E$ por medio de la sucesión $\{S^{-1}f_j\}_{j\in\mathbb{I}}$, es decir, si $c \neq \{\langle f, f_j\rangle\}_{j\in\mathbb{I}} \in \ell_2(\mathbb{I})$ satisface $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S^{-1} f_j$ entonces

$$\|c\|_{\ell_2(\mathbb{I})} > \|\{\langle f, f_j\rangle\}_j\|_{\ell_2(\mathbb{I})}.$$

Veremos que con algunas hipótesis extras vale lo mismo para un X_d-*Marco* para E. Sea $[\cdot,\cdot]_{X_d}$ un semi-producto interno compatible en X_d, se prueba que X_d es *estrictamente convexo* si y sólo si siempre que $[c_1, c_2] = 0$ con $c_1 \neq 0$ entonces $\|c_1 + c_2\|_{X_d} > \|c_2\|_{X_d}$ (ver *apéndice* A).

Proposición 6.5.5. *Supongamos se cumplen que S es biyectivo, X_d es estrictamente convexo y $\{[f, f_j]\}^*_{j\in\mathbb{I}} \in \mathcal{R}(V)$ $\forall f \in E$, entonces*

$$\|c\|_{X_d} > \|\{[f, f_j]\}_j\|_{X_d}$$

$\forall\, c \neq \{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d$ *tal que* $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S^{-1} f_j$.

Demostración. Sea $f \in E$ y tomemos alguna $c \neq \{[f, f_j]\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d$ tal que $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S^{-1} f_j$, como S es biyectivo obtenemos que

$$0 = S(f - f) = S\left(\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S^{-1} f_j - \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, f_j] S^{-1} f_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{I}} (c_j - [f, f_j]) f_j$$

de donde $c - Uf \in Ker(V^*) = \mathcal{R}(V)^{\perp}$. Como $(Uf)^* \in \mathcal{R}(V)$ por hipótesis, tenemos que

$$0 = (Uf)^*(c - Uf) = (c - Uf, (Uf)^*)_{X_d} = [c - Uf, Uf]_{X_d}$$

y al ser $c - Uf \neq 0$ con X_d es estrictamente convexo resulta

$$\|c\|_{X_d} = \|(c - Uf) + Uf\|_{X_d} > \|Uf\|_{X_d}$$

que es lo que se quería probar. ■

Para ver un tratamiento de X_d-*Marcos* y X_d-*Bases de Riesz* sobre un espacio de Banach cualquiera y en donde X_d es un *BK-space, CB-space, CBCB-space* o *RCB-space*, como así también relaciones con otros conceptos como *Marcos de Banach, p-Marcos y Descomposiciones Atómicas* entre otros, se pueden ver [St08, St09].

Capítulo 7

Muestreo en s.i.p. RKBS's

Inspirados en los resultados de la sección anterior, dado $\mathcal{B}$ un *espacio de Banach separable* de funciones a valores complejos sobre un conjunto Ω, estudiaremos la reconstrucción completa de una función $f \in \mathcal{B}$ a partir de sus muestras

$$\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f = \{f(t_j) : j \in \mathbb{I}\}$$

donde $\mathcal{Z} = \{t_j : j \in \mathbb{I}\} \subset \Omega$ es un *conjunto de muestreo* e $\mathbb{I}$ es un conjunto de índices a lo sumo numerable bien ordenado como antes. Nuestro estudio de tales reconstrucciones mediante muestreo en un espacio de Banach estará dentro de un *marco ideal de trabajo* que satisface los siguientes requerimientos:

(i) Solamente una cantidad finita de datos puede ser manejada en la práctica con lo que para cada $f \in \mathcal{B}$ el conjunto $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f$ debería ser de energía "finita" y se debería poder aproximar mediante subconjuntos finitos. Por esta razón, vamos a requerir que $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f$ pertenezca a algún *BK-space* X_d para toda $f \in \mathcal{B}$.

(ii) En el proceso de muestreo, $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \to X_d$ debería ser "estable", esto significa que si hay una pequeña perturbación $\tilde{f}$ de f en $\mathcal{B}$ con $\|\tilde{f}\| \leq \delta$ (donde δ suele medir el nivel de ruido) y terminamos muestreando $f_\delta := \tilde{f} + f$, entonces es de esperar que $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f_\delta$ esté cerca de $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f$ en X_d. En otras palabras, el operador de muestreo $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} : \mathcal{B} \to X_d$ debe ser lineal y acotado.

(iii) Aspiramos a recuperar toda $f \in \mathcal{B}$ mediante sus muestras $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f$ y este preceso de recuperación también debería ser estable. Por consiguiente $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}}$ deber ser invertible sobre su rango.

(iv) El muestreo no debería ser redundante, en el sentido de que no debería existir $j \in \mathbb{I}$ tal que para alguna $f \in \mathcal{B}$ la muestra $f(t_j)$ pueda obtenerse por medio de las demaás $\{f(t_k) : k \neq j\}$.

Los requerimientos (i)-(iii) se pueden resumir pidiendo que $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B}) \subset X_d$ y que existan constantes $B \geq A > 0$ tales que

$$A\|f\|_{\mathcal{B}} \leq \|\mathcal{I}_{\mathcal{Z}} f\|_{X_d} \leq B\|f\|_{\mathcal{B}} \qquad f \in \mathcal{B}.$$

Para utilizar los resultados del *capítulo 6*, estamos interesados en trabajar en $\mathcal{B}$ un s.i.p. RKBS sobre Ω con núcleo reproductivo s.i.p. G satisfaciendo

$$f(t) = [f, G(t,\cdot)] \qquad \forall\, f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega$$

y en tal caso podemos definir las sucesiones

$$G_{\mathcal{Z}} := \{G(t_j,\cdot) : j \in \mathbb{I}\} \subset \mathcal{B} \quad \text{y} \quad G^*_{\mathcal{Z}} := \{G(t_j,\cdot)^* : j \in \mathbb{I}\} \subset \mathcal{B}^*$$

con lo que los requerimientos (i)-(iii) se comprimen pidiendo que $G_{\mathcal{Z}}$ sea un X_d-*Marco* para $\mathcal{B}$ y el requerimiento (iv) es equivalente a pedir que la sucesión $G^*_{\mathcal{Z}}$ sea *minimal* en $\mathcal{B}^*$, ya que es claro que si $G^*_{\mathcal{Z}}$ es minimal entonces se satisface (iv) y, recíprocamente, si

$$G(t_j,\cdot)^* \in \overline{span}\{G(t_k,\cdot)^* : k \in \mathbb{I},\ k \neq j\} \qquad \text{para algún } j \in \mathbb{I}$$

entonces para toda $f \in \mathcal{B}$, los valores $f(t_j)$ podrían ser aproximados por combinaciones lineales finitas de $f(t_k)$ con $k \in \mathbb{I} \setminus \{j\}$. Por lo tanto sería innecesario muestrear en los puntos t_j's desde el punto de vista práctico y como no queremos que nuestro *marco ideal de trabajo* contenga puntos de muestreo redundantes, $G^*_{\mathcal{Z}}$ debe ser *minimal* en $\mathcal{B}^*$.

En definitiva, para nuestro *marco ideal de trabajo* buscamos un conjunto de muestreo $\mathcal{Z} \subset \Omega$ tal que exista un *BK-space* X_d para el cual $G_{\mathcal{Z}}$ sea un X_d-*Marco* para $\mathcal{B}$ y $G^*_{\mathcal{Z}}$ sea *minimal* en $\mathcal{B}^*$ que, usando la *proposición 6.4.3*, es equivalente a que $G^*_{\mathcal{Z}}$ sea una X^*_d-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}^*$. En estas condiciones se tiene el siguiente teorema.

Teorema 7.0.6. *Sea $\mathcal{B}$ un s.i.p. RKBS sobre Ω con núcleo reproductivo s.i.p. G y sea $\mathcal{Z} = \{t_j : j \in \mathbb{I}\}$ un subconjunto de Ω. Entonces:*

(1) Si $G_{\mathcal{Z}}$ es un X_d-Marco para $\mathcal{B}$ e $\mathcal{I}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{B})$ está complementado en X_d, entonces existe $\{g^*_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ un X^*_d-Marco para $\mathcal{B}^*$ tal que

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j) g_j(t) \qquad f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega.$$

(2) Si $G^*_{\mathcal{Z}}$ es una X^*_d-Base de Riesz para $\mathcal{B}^*$ entonces la sucesión $\{g_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ anterior es única y forma una X_d-Base de Riesz para $\mathcal{B}$ tal que

$$g_j(t_k) = [g_j, G(t_k,\cdot)] = \delta_{j,k} \qquad j,k \in \mathbb{I}.$$

(3) Si $G_{\mathcal{Z}}$ y $G^*_{\mathcal{Z}}$ son X_d-Base de Riesz para $\mathcal{B}$ y X^*_d-Base de Riesz para $\mathcal{B}^*$ respectivamente, entonces el operador de reconstrucción $S : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ dado por

$$(Sf)(t) := \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j) G(t_j, t) \qquad f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega$$

es acotado y biyectivo, con lo cual

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)(S^{-1}G(t_j,\cdot))(t) \qquad f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega.$$

donde la igualdad es en norma de $\mathcal{B}$ y por consiguiente puntualmente en Ω.

Demostración. Es simplemente traducir los resultados de la sección anterior. (1) y (2) salen por la *proposición 6.5.1* y (3) por el *corolario 6.5.3* junto con la *proposición 6.5.4*. ■

Seguidamente pasamos a generalizar el *teorema de muestreo de Kramer 4.1.8* a un s.i.p. RKBS sobre Ω.

7.1. Teorema de Muestreo de Kramer en s.i.p. RKBS's

Teniendo en cuenta la construcción hecha en la *observación* 5.3.6 de un s.i.p. RKBS sobre Ω mediante un operador lineal acotado, con $(E, [\cdot,\cdot])$ un espacio de Banach uniforme, $\Phi : \Omega \to E$ una función sobre un conjunto arbitrario Ω y $T_\Phi : E \to \mathbb{C}^\Omega$ dado por $(T_\Phi x)(t) = [x, \Phi(t)] := f_x(t)$ para $t \in \Omega$, supongamos ahora que además tenemos una sucesión $\{x_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset E$ tal que $\{x_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d^*-*Base de Riesz* para E^*, entonces por la *proposición* 6.5.1 existe una única sucesión $\{y_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ que es una X_d-*Base de Riesz* para E y que cumple $[y_j, x_k] = \delta_{j,k}\ \ \forall\, j,k \in \mathbb{I}$. Denotando por $S_j(t) := [y_j, \Phi(t)] = f_{y_j}(t)$, por (6.8) podemos escribir

$$(\Phi(t))^* = \sum_{j\in\mathbb{I}} S_j(t)\, x_j^* \in E^* \qquad t \in \Omega.$$

y, en vez de pedir que $\overline{span}\{\Phi(t) : t \in \Omega\} = E$, supongamos que existen sucesiones $\{t_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \Omega$ y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ tales que se satisface la condición de interpolación

$$S_j(t_k) = a_j\delta_{j,k} \qquad j,k \in \mathbb{I}$$

equivalentemente

$$\Phi(t_k))^* = a_k x_k^* \qquad k \in \mathbb{I}.$$

De este nodo T_Φ resulta inyectivo (equivalentemente, $\overline{span}\{\Phi(t) : t \in \Omega\} = E$). En efecto, si para algún $x \in E$ es $0 = f_x(t) = [x, \Phi(t_k)]\ \ \forall\, t \in \Omega$, en particular para $t = t_k$ es

$$\begin{aligned} 0 = f_x(t_k) &= \Big[\sum_{j\in\mathbb{I}}[x, x_j]\, y_j, \Phi(t_k)\Big] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}}[x, x_j][y_j, \Phi(t_k)] \\ &= \sum_{j\in\mathbb{I}}[x, x_j]\, S_j(t_k) \\ &= [x, x_k]\, a_k \qquad k \in \mathbb{I} \end{aligned}$$

lo cual implica que debe ser $0 = [x, x_k] = x_k^*(x)\ \ \forall\, k \in \mathbb{I}$ de donde $x = 0$.

Notar que al ser $(\Phi(t_k))^* = a_k x_k^*\ \ \forall\, k \in \mathbb{I}$, con $\{x_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ una X_d^*-*Base de Riesz* para E^* y $\{a_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\{a_j x_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una base de Schauder para E^* y por lo tanto $\overline{span}\{\Phi^*(t) : t \in \Omega\} = E^*$. Juntando todo obtenemos $\mathcal{B} = \{[x, \Phi(\cdot)] : x \in E\}$ un s.i.p. RKBS sobre Ω con núcleo reproductivo s.i.p. G dado por

$$G(s,t) = [\Phi(s), \Phi(t)] \qquad s,t \in \Omega$$

y en donde la sucesión $\{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^*$ para cada $t \in \Omega$, ya que

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S_j(t)\Big| &= \Big|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j [y_j, \Phi(t)]\Big| \\ &= \Big|\Big[\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j y_j, \Phi(t)\Big]\Big| \\ &\le \|\Phi(t)\|_E \Big\|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j y_j\Big\|_E \\ &\le B\|c\|_{X_d}\|\Phi(t)\|_E \qquad c \in X_d. \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de enunciar y probar una extensión del *teorema 4.1.8* a un s.i.p. RKBS.

Teorema 7.1.1 (Teorema de Muestreo de Kramer - Versión s.i.p. RKBS [GHM14, GP13]). *Sea $\mathcal{B}$ un s.i.p. RKBS sobre Ω construido como arriba. Entonces la sucesión $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{B}$ es una X_d-Base de Riesz para $\mathcal{B}$ que satisface*

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)\frac{S_j(t)}{a_j} \qquad \forall\, f \in \mathcal{B},\, t \in \Omega$$

donde la convergencia de la serie es en $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, y uniforme sobre los subconjuntos de Ω donde la función $t \mapsto \|\Phi(t)\|_E$ es acotada.

Demostración. Veamos que $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}$ por definición (6.4.1).

Como T_Φ es una isometría, $\{y_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d-*Base de Riesz* para E y $T_\Phi y_j = S_j \ \forall\, j \in \mathbb{I}$, existen constantes positivas $B \geq A$ tales que

$$A\|c\|_{X_d} \leq \left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j y_j\right\|_E = \left\|\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S_j\right\|_{\mathcal{B}} \leq B\|c\|_{X_d} \qquad \forall\, c \in X_d.$$

y en particular la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} c_j S_j$ converge en $\mathcal{B}$ para toda sucesión $c \in X_d$.

Sea $x \in E$, entonces para $f_x \in \mathcal{B}$ tenemos

$$f_x(t) = [x, \Phi(t)] = \left[\sum_{j\in\mathbb{I}} [x, x_j]\, y_j, \Phi(t)\right] = \sum_{j\in\mathbb{I}} [x, x_j]\, S_j(t) \qquad t \in \Omega$$

y como $\sum_{j\in\mathbb{I}} [x, x_j]\, S_j$ es convergente en $\mathcal{B}$, por unicidad de límite converge a f_x, de donde $\overline{span}\{S_j : j \in \mathbb{I}\} = \mathcal{B}$, probando así que $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}$.

Sean ahora $k \in \mathbb{I}$ y $x \in E$, entonces $f_x(t_k) = [x, \Phi(t_k)] = a_k[x, x_k]$ con lo cual

$$f_x(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [x, x_j]\, S_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)\frac{S_j(t)}{a_j} \qquad t \in \Omega$$

donde la convergencia es en $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. La convergencia puntual y uniforme son consecuencia inmediata del hecho de que $\mathcal{B}$ es un s.i.p. RKBS sobre Ω. ■

7.2. Un Recíproco del Teorema de Muestreo de Kramer en s.i.p. RKBS's

Teniendo en mente tanto el enunciado como la prueba del *recíproco del teorema de muestreo de Kramer 4.2.1*, consideremos $(\mathcal{B}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{B}}, G, E, \Phi)$ un s.i.p. RKBS sobre Ω construido mediante la *proposición 5.3.4* y supongamos que tenemos una sucesión $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathcal{B}$ tal que

$$\{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d \quad \text{y} \quad \{S_j(t)\}^*_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^* \qquad \forall\, t \in \Omega$$

con X_d un *BK-space* que además es *uniforme* (existen, ℓ_p por ejemplo). Definimos

$$\begin{aligned} \phi : \Omega \ &\longrightarrow \ X_d \\ t \ &\longmapsto \ \{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}} \end{aligned}$$

y notamos por $\phi^*(t) = (\phi(t))^*$, $t \in \Omega$, obteniendo así otra función

$$\begin{aligned} \phi^* : \Omega &\longrightarrow X_d^* \\ t &\longmapsto \{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}}^*. \end{aligned}$$

Supongamos además que se cumple:

$$\begin{cases} c \in X_d & \text{es tal que} \quad \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j (S_j(t))^* = 0 \quad \forall\, t \in \Omega \quad \Rightarrow \quad c = 0. \\ d \in X_d^* & \text{es tal que} \quad \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j S_j(t) = 0 \quad \forall\, t \in \Omega \quad \Rightarrow \quad d = 0. \end{cases} \tag{7.1}$$

Esto es similar a lo que se pide en el item (1) del *recíproco del teorema de muestreo de Kramer* 4.2.1 y es lo mismo que pedir que

$$\overline{span}\{\phi(t) : t \in \Omega\} = X_d \quad \text{y} \quad \overline{span}\{\phi^*(t) : t \in \Omega\} = X_d^*.$$

lo cual es necesario para poder definir (de nuevo por la *proposición* 5.3.4) el s.i.p. RKBS sobre Ω $(\mathcal{B}_{samp}, [\cdot,\cdot]_{samp}, G_{samp}, X_d^*, \phi^*)$ con núcleo reproductivo s.i.p. G_{samp} dado por

$$G_{samp}(s,t) := [\phi^*(s), \phi^*(t)]_{X_d^*} = \sum_{j\in\mathbb{I}} (S_j(s))^* S_j(t) \qquad s, t \in \Omega \tag{7.2}$$

donde hemos usado la reflexividad de X_d para escribir (identificar) $(\phi(t))^{**}$ con $\phi(t)$.

Hemos tomado X_d^* en vez de X_d en la definición de $\mathcal{B}_{samp}$ para que el núcleo reproductivo s.i.p. G_{samp} (7.2) se asemeje al núcleo reproductivo K_{samp} (4.3) del *recíproco del teorema de muestreo de Kramer* 4.2.1. Seguidamente enunciamos y demostramos el teorema que se quería extender al contexto de espacios de Banach, además trataremos que la demostración sea lo más parecida posible a aquella del *teorema* 4.2.1.

Teorema 7.2.1 (Un Recíproco del Teorema de Muestreo de Kramer - Versión s.i.p. RKBS)**.** *Sean* $(\mathcal{B}, [\cdot,\cdot]_{\mathcal{B}}, G, E, \Phi)$ *y* $(\mathcal{B}_{samp}, [\cdot,\cdot]_{samp}, G_{samp}, X_d^*, \phi^*)$ *unos s.i.p. RKBS's sobre* Ω *como antes, entonces:*

(1) *Si los conjuntos* $\{\{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}} : t \in \Omega\} \subset X_d$, $\{\{S_j(t)\}_{j\in\mathbb{I}}^* : t \in \Omega\} \subset X_d^*$ *satisfacen* (7.1)*, entonces* $\mathcal{B}_{samp} \subset \mathcal{B}$*.*

(2) *Si además de valer* (1) *existen sucesiones* $\{t_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \Omega$, $\{a_j\}_{j\in\mathbb{I}} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *tales que*

$$\left\{ \frac{f(t_j)}{a_j} \right\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^* \qquad \forall\, f \in \mathcal{B} \tag{7.3}$$

y

$$f(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j) \frac{S_j(t)}{a_j} \qquad \forall\, f \in \mathcal{B} \tag{7.4}$$

donde la serie converge puntualmente en Ω*, entonces valen:*

a) $\mathcal{B}_{samp} = \mathcal{B}$*.*

b) Las normas de $\mathcal{B}_{samp}$ *y* $\mathcal{B}$ *son equivalentes y* $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *es una* X_d^**-Base de Riesz para* $\mathcal{B}$*.*

c) La biortogonal de $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *en* $\mathcal{B}_{samp}$ *está dada por*

$$\left\{\sum_{k\in\mathbb{I}}\left[\frac{\phi^*(t_j)}{\overline{a_j}},\frac{\phi^*(t_k)}{\overline{a_k}}\right]_{X_d^*}S_k\right\}_{j\in\mathbb{I}}. \tag{7.5}$$

d) La biortogonal de $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ *en* $\mathcal{B}$ *está dada por*

$$\left\{\sum_{k\in\mathbb{I}}\left[\frac{\Phi(t_j)}{\overline{a_j}},\frac{\Phi(t_k)}{\overline{a_k}}\right]_{E}S_k\right\}_{j\in\mathbb{I}}. \tag{7.6}$$

Demostración. La condición (7.1) es necesaria para la definición de $\mathcal{B}_{samp}$ como hemos dicho anteriormente y la hemos recordado en el item (1) a modo de analogía con el *teorema 4.2.1*. Por cómo se construyó $\mathcal{B}_{samp}$, tenemos que el mismo está formado por funciones de la forma

$$\sum_{j\in\mathbb{I}} d_jS_j \quad \text{con} \quad d=\{d_j\}_{j\in\mathbb{I}}\in X_d^*,$$

es decir, $\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_jS_j\|_{samp}<\infty\ \ \forall\, d\in X_d^*$. Para ver que $\mathcal{B}_{samp}\subset\mathcal{B}$ hay que probar que $\|\sum_{j\in\mathbb{I}} d_jS_j\|_{\mathcal{B}}<\infty\ \ \forall\, d\in X_d^*$ y, por la *proposición 6.1.2*, es equivalente a probar que la sucesión $\{S_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Bessel* para $\mathcal{B}^*$ pues en tal caso sus operadores de análisis y de síntesis asociados están dados por

$$\begin{array}{rcl} V:\mathcal{B}^* & \longrightarrow & X_d \\ f^* & \longmapsto & \{[f^*,S_j^*]_{\mathcal{B}^*}\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} V^*:X_d^* & \longrightarrow & \mathcal{B} \\ d & \longmapsto & \sum_{j\in\mathbb{I}} d_jS_j \end{array}$$

Similarmente a lo visto en la demostración de la *proposición 5.3.4*, el operador $T: E^*\to\mathcal{B}^*$ dado por $Tx^*=[x^*,\Phi^*(\cdot)]_{E^*}:=f_{x^*}$ es un isomorfismo isométrico y como ya dijimos anteriormente en la *página 59* del *capítulo 6* , alcanza con ver la "*Besselianidad*" de $\{S_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ sobre el subespacio $\mathcal{B}_0^*=span\{G_s^*: s\in\Omega\}$, donde

$$T\Phi^*(s)=[\Phi^*(s),\Phi^*(\cdot)]_{E^*}=[\Phi(\cdot),\Phi(s))]_E=G(\cdot,s)=(G(s,\cdot))^*:=G_s^* \qquad s\in\Omega$$

pues este es denso en $\mathcal{B}^*$ al ser imagen por T del subespacio $span\{\Phi^*(s): s\in\Omega\}$ denso en E^*. Dicho esto, consideremos para cada $N\in\mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} V_N:\mathcal{B}_0^* & \longrightarrow & X_d \\ f^* & \longmapsto & \{\mathbf{1}_{\mathbb{I}_N}(j)[f^*,S_j^*]_{\mathcal{B}^*}\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rcl} V:\mathcal{B}_0^* & \longrightarrow & X_d \\ f^* & \longmapsto & \{[f^*,S_j^*]_{\mathcal{B}^*}\}_{j\in\mathbb{I}} \end{array}$$

donde $\mathbf{1}_{\mathbb{I}_N}$ denota a la función característica del conjunto $\mathbb{I}_N$. Para cada $s\in\Omega$, $j\in\mathbb{I}$ se cumple que

$$[G_s^*,S_j^*]_{\mathcal{B}^*}=[S_j,G_s]_{\mathcal{B}}=S_j(s)$$

y, como $\{S_j(s)\}_{j\in\mathbb{I}}\in X_d\ \ \forall\, s\in\Omega$, los operadores V_N están bien definidos y son acotados para cada $N\in\mathbb{N}$, pues

$$\|V_Nf^*\|_{X_d}=\sup_{d\in S_{X_d^*}}\left|\sum_{j\in\mathbb{I}_N} d_j[f^*,S_j^*]_{\mathcal{B}^*}\right|\le\sup_{d\in S_{X_d^*}}\left(\sum_{j\in\mathbb{I}_N} d_j\|S_j^*\|_{\mathcal{B}^*}\right)\|f^*\|_{\mathcal{B}^*}.$$

Además, convergen puntualmente a V ya que

$$\begin{aligned}\|V_N f^* - V f^*\|_{X_d} &= \sup_{d \in S_{X_d^*}} \left| \sum_{j \in \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_N} d_j [f^*, S_j^*]_{\mathcal{B}^*} \right| \\ &\leq \|\{\mathbf{1}_{\mathbb{I}\setminus\mathbb{I}_N}(j)[f^*, S_j^*]_{\mathcal{B}^*}\}_{j\in\mathbb{I}}\|_{X_d} \quad \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\end{aligned}$$

donde al tomar límite usamos que los vectores canónicos en X_d forman una base de Schauder. Así, por el *teorema de Banach-Steinhaus*, V es acotado y $\{S_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d-*Bessel* para $\mathcal{B}^*$ probando que $\mathcal{B}_{samp} \subset \mathcal{B}$.

Supongamos ahora que además de valer (1), se satisfacen (7.3) y (7.4).

a) Para ver que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{samp}$ resta ver que $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_{samp}$. Si tomamos $f \in \mathcal{B}$ entonces, al ser $\{f(t_j)a_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^*$ por (7.3), la serie $\sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j)a_j^{-1}S_j$ converge en $\|\cdot\|_{samp}$ y por consiguiente converge puntualmente a una $g \in \mathcal{B}_{samp}$, por (7.4) la serie también converge puntualmente a f, de donde $g(t) = f(t)\ \forall t \in \Omega$ por unicidad del límite y por lo tanto $f \in \mathcal{B}_{samp}$.

b) Veamos primero que $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ y $\|\cdot\|_{samp}$ son equivalentes. Para ver esto alcanza con ver que el operador identidad $id : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{samp}$ es continuo, ya que después recurrimos al *teorema de la aplicación abierta* para concluir que es bicontinuo. Mediante el *teorema del gráfico cerrado*, basta ver que si $f_j \longrightarrow f$ en $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$ y $f_j \longrightarrow g$ en $\|\cdot\|_{samp}$ entonces $f = g$, y esto es claro ya que al ser ambos s.i.p. RKBS's sobre Ω, por la *proposición* 5.1.7, tenemos convergencia puntual de ambas sucesiones y, de nuevo por unicidad del límite, $f = g$.

Seguidamente probamos en varios pasos que $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es una X_d^*-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}$, antes vamos a realizar algunas notaciones para simplificar la escritura, llamamos:

$$M_j(\cdot) := \overline{a_j}^{-1} G_{samp}(t_j, \cdot) \quad \text{y} \quad G_j(\cdot) := \overline{a_j}^{-1} G(t_j, \cdot) \qquad j \in \mathbb{I}$$

de donde por propiedad del núcleo reproductivo s.i.p. resulta que:

$$M_j^* = a_j^{-1} G_{samp}(\cdot, t_j) \in \mathcal{B}_{samp}^* \quad \text{y} \quad G_j^*(\cdot) = a_j^{-1} G(\cdot, t_j) \in \mathcal{B}_{samp}^* \qquad j \in \mathbb{I}$$

<u>$\{M_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es completa en $\mathcal{B}_{samp}^*$</u>

Supongamos que tenemos $f \in \mathcal{B}_{samp}$ tal que

$$0 = [f, M_j]_{samp} = [M_j^*, f^*]_{samp*} \qquad \forall j \in \mathbb{I}$$

entonces

$$f(t) \overset{(7.4)}{=} \sum_{j\in\mathbb{I}} f(t_j) \frac{S_j(t)}{a_j} = \sum_{j\in\mathbb{I}} [f, M_j]_{samp} S_j(t) = 0 \qquad \forall t \in \Omega$$

con lo cual $f = 0$.

<u>$\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Bessel* para $\mathcal{B}_{samp}$</u>

Esto es inmediato ya que $\{f(t_j)a_j^{-1}\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^*$ para toda $f \in \mathcal{B}_{samp}$ y

$$\begin{aligned} a_j^{-1} f(t_j) &= a_j^{-1} [f, G_{samp}(t_j, \cdot)]_{samp} \\ &= [f, \overline{a_j}^{-1} G_{samp}(t_j, \cdot)]_{samp} \\ &= [f, M_j]_{samp} \qquad \forall j \in \mathbb{I}. \end{aligned}$$

De esto se desprende también que los operadores de análisis $U : \mathcal{B}_{samp} \to X_d^*$ y de síntesis $U^* : X_d \to \mathcal{B}_{samp}^*$ asociados a $\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ están bien definidos y son acotados, en particular

$$U^* c = \sum_{j\in\mathbb{I}} c_j M_j^*$$

converge (incondicionalmente) en $\mathcal{B}_{samp}^*$ para toda $c \in X_d$.

$\{M_j^*\}_{j\in\mathbb{I}}$ es minimal en $\mathcal{B}_{samp}^*$

Por la *proposición 6.0.1*, alcanza con ver que

$$[M_k^*, S_j^*]_{samp*} = [S_j, M_k]_{samp} = \delta_{j,k} \qquad \forall\, j,k \in \mathbb{I}$$

de donde también $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ resulta minimal en $\mathcal{B}_{samp}$. Por un lado tenemos que

$$S_k(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} \delta_{j,k} S_j(t) \qquad k \in \mathbb{I},\, t \in \Omega$$

y por otro lado

$$S_k(t) \overset{(7.4)}{=} \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{S_k(t_j)}{a_j} S_j(t) = \sum_{j\in\mathbb{I}} [S_j, M_k]_{samp}\, S_j(t) \qquad k \in \mathbb{I},\, t \in \Omega$$

entonces

$$0 = \sum_{j\in\mathbb{I}} \underbrace{\left([S_j, M_k]_{samp} - \delta_{j,k}\right)}_{\in X_d^* \text{ por } (7.3)} S_j(t) \qquad k \in \mathbb{I},\, t \in \Omega$$

de donde por (7.1) obtenemos $[S_j, M_k]_{samp} = \delta_{j,k}\ \forall\, j,k \in \mathbb{I}$.

$\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Riesz-Fischer* para $\mathcal{B}_{samp}$

Debemos ver que dada una sucesión $d = \{d_j\}_{j\in\mathbb{I}} \in X_d^*$ existe $f \in \mathcal{B}_{samp}$ tal que $Uf = d$. Consideremos $f = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j S_j$ (está en $\mathcal{B}_{samp}$ por construcción), entonces

$$[f, M_k]_{samp} = \left[\sum_{j\in\mathbb{I}} d_j S_j, M_k\right]_{samp} = \sum_{j\in\mathbb{I}} d_j\, [S_j, M_k]_{samp} = d_k \qquad k \in \mathbb{I}$$

con lo cual $\{Uf\}_k = d_k\ \forall\, k \in \mathbb{I}$ y por lo tanto U es sobreyectivo.

$\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}_{samp}$

Es consecuencia de los anteriores y de la *proposición 6.4.3*.

Podemos usar ahora el caso particular de la *proposición 6.5.1* y así concluir que $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ es X_d^*-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}_{samp}$ puesto que $[S_j, G_k] = \delta_{j,k}\ \forall\, j,k \in \mathbb{I}$, además, por equivalencia de normas, $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ también es X_d^*-*Base de Riesz* para $\mathcal{B}$.

c) Ya vimos que $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ y $\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ son biortogonales en $\mathcal{B}_{samp}$, veamos que $\{M_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ cumple (7.5):

$$\begin{aligned}
M_k(t) &\overset{(7.4)}{=} \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{M_k(t_j)}{a_j} S_j(t) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{G_{samp}(t_k,t_j)}{\overline{a_k} a_j} S_j(t) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} [M_k, M_j]_{samp}\, S_j(t) \\
&\overset{(7.2)}{=} \sum_{j\in\mathbb{I}} \left[\frac{\phi^*(t_k)}{\overline{a_k}}, \frac{\phi^*(t_j)}{\overline{a_j}}\right]_{X_d^*} S_j(t) \qquad k\in\mathbb{I},\ t\in\Omega
\end{aligned}$$

d) Ya vimos que $S_j(t_k) = a_k\delta_{j,k}\ \ \forall\, j,k\in\mathbb{I}$ y además se cumple

$$\delta_{j,k} = \frac{S_j(t_k)}{a_k} = \left[S_j, \frac{G_{t_k}}{\overline{a_k}}\right]_{\mathcal{B}} = [S_j, G_k]_{\mathcal{B}} \qquad j,k\in\mathbb{I}$$

de donde $\{S_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ y $\{G_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ son biortogonales en $\mathcal{B}$ y $\{G_j\}_{j\in\mathbb{I}}$ cumple (7.6), pues

$$\begin{aligned}
G_k(t) &\overset{(7.4)}{=} \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{G_k(t_j)}{a_j} S_j(t) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} \frac{G(t_k,t_j)}{\overline{a_k} a_j} S_j(t) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} [G_k, G_j]_{\mathcal{B}}\, S_j(t) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{I}} \left[\frac{\Phi(t_k)}{\overline{a_k}}, \frac{\Phi(t_j)}{\overline{a_j}}\right]_{E} S_j(t) \qquad k\in\mathbb{I},\ t\in\Omega
\end{aligned}$$

El teorema queda demostrado. ■

Apéndice A

Semi-productos internos (s.i.p.)

Las referencias sobre semi-productos internos son [Dr03, Gi67, Ko71, Lu61, To70, ZXZ09].

Definición A.0.2. Sea $\mathcal{V}$ un $\mathbb{C}$-espacio vectorial, una aplicación $[\cdot,\cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{C}$ es un *semi-producto interno* (Lumer [Lu61]) si $\forall\, \alpha \in \mathbb{C}$ y $\forall\, x, y, z \in \mathcal{V}$ satisface:

(a) $[\alpha x + y, z] = \alpha[x, z] + [y, z]$.

(b) $[x, \alpha y] = \overline{\alpha}[x, y]$.

(c) $[x, x] > 0$ si $x \neq 0$.

(d) $|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y]$.

En tal caso el par $(\mathcal{V}, [\cdot,\cdot])$ se llama *espacio con semi-producto interno* (abreviado por s.i.p.S.). Si además $\mathcal{V}$ es un espacio normado y cumple:

(e) $\lim_{h\in\mathbb{R},\, h\to 0} Re\{[y, x + hy]\} = Re\{[y, x]\} \qquad \forall\, x, y \in S_{\mathcal{V}}$,

decimos que es un *espacio con semi-producto interno continuo*, mientras que si el límite anterior existe y es uniforme en $S_{\mathcal{V}} \times S_{\mathcal{V}}$, decimos que es un *espacio con semi-producto interno uniformemente continuo.*

Proposición A.0.3 (Giles, Lumer)**.** *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio normado, entonces existe un semi-producto interno $[\cdot,\cdot]$ sobre X compatible con $\|.\|$ en el sentido de que $[x, x] = \|x\|^2\ \forall\, x \in X$. Recíprocamente, todo espacio vectorial con semi-producto interno se puede normar de manera tal que la norma y el semi-producto interno resulten compatibles.*

Demostración. Para $x \in S_X$ existe al menos (infinitos) un funcional lineal acotado (*Hahn-Banach*), y elegimos exactamente uno de ellos, $f_x \in S_{X^*}$ tal que $f_x(x) = 1$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ y $x \in S_X$, para $\lambda x \in X$ elegimos $f_{\lambda x} \in X^*$ tal que $f_{\lambda x} = \overline{\lambda} f_x$. Tenemos así una aplicación

$$\begin{array}{rcl} \varphi : X & \longrightarrow & X^* \\ \lambda x & \longmapsto & f_{\lambda x} \end{array}$$

(existen infinitas de tales aplicaciones) y definimos

$$\begin{array}{rcl} [\cdot,\cdot] : X \times X & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & f_y(x) \end{array}$$

la cual satisface (a)-(d) de la *definición A.0.2* mediante una verificación inmediata. Para el recíproco sólo hay que mostrar que $x \mapsto [x,x]^{1/2}$ define una norma sobre X y también es directo. ■

Proposición A.0.4. *Un semi-producto interno* $[\cdot,\cdot]$ *sobre un espacio normado* $(X, \|.\|)$ *es un producto interno si y sólo si*

$$[x, y+z] = [x,y] + [x,z] \qquad \forall\, x,y,z \in X.$$

Demostración. Claramente un producto interno es aditivo en la segunda variable así que veamos que si $[\cdot,\cdot]$ es un semi-producto interno aditivo en la segunda variable, entonces es un producto interno. Para eso, resta ver que vale la simetría conjugada, o sea, hay que ver que $[x,y] = \overline{[y,x]}$ $\forall\, x,y \in X$. Usando linealidad en la primer variable y antilinealidad en la segunda, para $x,y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ nos queda

$$[x+\lambda y, x+\lambda y] = [x,x] + |\lambda|^2[y,y] + \lambda[y,x] + \overline{\lambda}[x,y]$$

Ya que $[z,z] \geq 0$ $\forall\, z \in X$, debe ser $\lambda[y,x] + \overline{\lambda}[x,y] \in \mathbb{R}$. Tomando $\lambda = 1$ queda que $Im\{[y,x]\} = -Im\{[x,y]\}$, y tomando $\lambda = i$ resulta que $Re\{[y,x]\} = Re\{[x,y]\}$, sumando ambas obtenemos la simetría conjugada buscada. ■

Definición A.0.5. Sea $[\cdot,\cdot]$ un semi-producto interno sobre un espacio normado $(X, \|.\|)$. Dados $x,y \in X$ tales que $[y,x] = 0$ decimos que x es *normal* a y e y es *transversal* a x. También, si $x \in X$ cumple $[y,x] = 0$ $\forall\, y \in Y$ con Y un subespacio de E, decimos que x es *normal* a Y e Y es *transversal* a x. Una noción de ortogonalidad posible sobre X (R. C. James) es la siguiente: Dados $x,y \in X$, decimos que x es *ortogonal* a y, se nota $x \perp y$, si $\|x+\lambda y\| \geq \|x\|$ $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$.

Proposición A.0.6. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio normado con semi-producto interno continuo. Entonces,* x *es normal a* y *si y sólo si* x *es ortogonal a* y*.*

Demostración. Mostramos solamente la ida, para la vuelta ver [Gi67]. Si x es normal a y entonces

$$\|x+\lambda y\|\|x\| \geq |[x+\lambda y, x]| = |\lambda[y,x] + \|x\|^2| = \|x\|^2$$ ■

Proposición A.0.7. *Si* $(X, \|.\|)$ *es un espacio de Banach uniformemente convexo con un semi-producto interno continuo, entonces para todo subespacio cerrado propio* Y *de* X *existe un vector no nulo* x *que es normal a* Y*.*

Demostración. Sea Y subespacio cerrado de X y $x \notin Y$, por la *proposición 1.1.26* existe un único $y_0 \in Y$ tal que $\|x - y_0\| = \inf\{\|x-y\| : y \in Y\}$. Tomando $x_0 = x - y_0$ resulta que x_0 es normal a Y. ■

Proposición A.0.8. *Un espacio normado* $(X, \|.\|)$ *es un espacio con semi-producto interno continuo (uniformemente continuo) si y sólo si* $(X, \|.\|)$ *es Gâteaux diferenciable (uniformemente diferenciable Fréchet).*

Demostración. ($\Rightarrow$) En un espacio con semi-producto interno, para $x,y \in S_X$ y $h > 0$, se cumple:

$$\frac{\|x+hy\| - \|x\|}{h} \geq \frac{|[x+hy,x]| - \|x\|^2}{h\|x\|} \geq \frac{Re\{[x+hy,x]\} - \|x\|^2}{h\|x\|} = \frac{Re\{[y,x]\}}{\|x\|}$$

y también

$$\begin{aligned}\frac{\|x+hy\|-\|x\|}{h} &\leq \frac{\|x+hy\|^2-|[x,x+hy]|}{h\|x+hy\|}\\ &\leq \frac{|[x,x+hy]|+hRe\{[y,x+hy]\}-|[x,x+hy]|}{h\|x\|}\\ &= \frac{Re\{[y,x+hy]\}}{\|x+hy\|}\end{aligned}$$

usando ahora que se satisface (e) de la *definición A.0.2* por hipótesis, obtenemos que

$$\lim_{h\in\mathbb{R},\,h\to 0}\frac{\|x+hy\|-\|x\|}{h}=\frac{Re\{[y,x]\}}{\|x\|} \tag{A.1}$$

de donde la norma en X es Gâteaux diferenciable (uniformemente diferenciable Fréchet si el semi-producto interno es uniformemente continuo).

($\Leftarrow$) Si ahora la norma en X es Gâteaux diferenciable (uniformemente diferenciable Fréchet) entonces se cumple (A.1). Haciendo cuentas con límites inferiores y superiores se deduce (e) de la *definición A.0.2* (ver [Gi67] pág. 440). ■

Proposición A.0.9. *Si $(X,\|.\|)$ es un espacio de Banach uniformemente diferenciable Fréchet y $[\cdot,\cdot]$ es un semi-producto interno compatible sobre X, entonces vale* (A.1) *(proposición A.0.8) y existe un único semi-producto interno compatible con la norma de X (por la unicidad del límite) que viene dado $\forall\, x,y\in X\setminus\{0\}$ por:*

$$[x,y]=\|y\|\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|y+hx\|-\|y\|}{h}+i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|iy+hx\|-\|iy\|}{h}\right). \tag{A.2}$$

Demostración. Veamos que $[\cdot,\cdot]$ dado por (A.2) cumple (a)-(d) de la *definición A.0.2*. Primero veamos que $[\cdot,\cdot]$ es compatible con la norma , si $x\neq 0$ queda

$$\begin{aligned}[x,x] &= \|x\|\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|x+hx\|-\|x\|}{h}+i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|ix+hx\|-\|ix\|}{h}\right)\\ &= \|x\|\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{|1+h|\|x\|-\|x\|}{h}+i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{|i+h|\|x\|-\|x\|}{h}\right)\\ &= \|x\|^2\left(\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{1+h-1}{h}+i\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{|i+h|-1}{h}\right)\\ &= \|x\|^2(1+0)=\|x\|^2>0\end{aligned}$$

de donde se desprende también (c).

(a) Básicamente se prueba que $Re\{[x+y,z]\}\leq Re\{[x,z]\}+Re\{[y,z]\}$, luego se prueba el "$\geq$" y se procede análogamente con $Im\{[x+y,z]\}$ para $x,y,z\neq 0$ cualesquiera (ver [ZXZ09] pág. 2772). Para ver la homogeneidad en la primer variable, primero tomamos $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y calculamos para $x,y\in X$:

$$\|y\|\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|y+h\lambda x\|-\|y\|}{h}=\lambda\|y\|\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|y+h\lambda x\|-\|y\|}{h\lambda}=\lambda\|y\|\lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}}\frac{\|y+hx\|-\|y\|}{h}$$

haciendo lo mismo para el segundo miembro de (A.2), con lo que $[\lambda x, y] = \lambda[x, y]\ \forall x, y \in X$. Seguidamente se comprueba que $[ix, y] = i[x, y]\ \forall x, y \in X$ y para $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ calculamos

$$\begin{aligned}
[\lambda x, y] = [\alpha x + \beta i x, y] &= [\alpha x, y] + [\beta i x, y] \\
&= \alpha[x, y] + \beta[ix, y] \\
&= \alpha[x, y] + \beta i[x, y] = (\alpha + \beta i)[x, y] = \lambda[x, y] \qquad x, y \in X
\end{aligned}$$

(b) Para ver la antihomogeneidad en la segunda variable calculamos para $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
[x, \lambda y] &= \|\lambda y\| \left(\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\|\lambda y + hx\| - \|\lambda y\|}{h} + i \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\|i\lambda y + hx\| - \|i\lambda y\|}{h} \right) \\
&= |\lambda| \|y\| \left(|\lambda| \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\|\lambda y + h\frac{x}{\lambda}\| - \|\lambda y\|}{h} + i|\lambda| \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{\|iy + h\frac{x}{\lambda}\| - \|iy\|}{h} \right) \\
&= |\lambda|^2 \left[\frac{x}{\lambda}, y \right] \\
&= \frac{\lambda\overline{\lambda}}{\lambda}[x, y] \\
&= \overline{\lambda}[x, y] \qquad x, y \in X.
\end{aligned}$$

(d) Dados $x, y \in X$ tomamos $\lambda \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ tal que $|[x, y]| = \lambda[x, y]$ y sale por una cuenta directa. ■

Proposición A.0.10. $(X, \|.\|)$ *es estrictamente convexo si y sólo si* $x, y \in X \setminus \{0\}$ *satisfacen* $[x, y] = \|x\|\|y\|$ *entonces resulta que* $x = \lambda y$ *con* $\lambda > 0$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sean $x, y \in X \setminus \{0\}$ tales que $[x, y] = \|x\|\|y\|$, entonces:

$$(\|x\| + \|y\|)\|y\| = [x, y] + [y, y] = [x + y, y] \leq (\|x + y\|)\|y\| \leq (\|x\| + \|y\|)\|y\|$$

de donde $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$ y $x = \lambda y$ con $\lambda > 0$.

$(\Leftarrow)$ Supongamos ahora que tenemos x, y no nulos tales que $\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$, entonces vale que

$$Re\{[x, x + y]\} = \|x\|\|x + y\| \quad \text{o bien} \quad Re\{[y, x + y]\} = \|y\|\|x + y\|$$

pues por (d) de la *definición A.0.2* valen

$$Re\{[x, x + y]\} \leq \|x\|\|x + y\| \quad \text{o bien} \quad Re\{[y, x + y]\} \leq \|y\|\|x + y\|$$

y si ambas son estrictas, entonces resulta que

$$\|x + y\|^2 = Re\{[x, x + y]\} + Re\{[y, x + y]\} < (\|x\| + \|y\|)\|x + y\| = \|x + y\|^2$$

lo cual es absurdo. Sin perdida de generalidad, supongamos que vale $Re\{[x, x + y]\} = \|x\|\|x + y\|$, entonces $[x, x + y] = \|x\|\|x + y\|$ y por hipótesis es $x = \lambda(x + y)$ con $0 < \lambda < 1$, es decir, $x = \frac{\lambda}{1-\lambda}y$. ■

Proposición A.0.11. *Sea* $(X, \|.\|)$ *un espacio de Banach con semi-producto interno compatible* $[\cdot, \cdot]$. X *es estrictamente convexo si y sólo si siempre que* $[x, y] = 0$ *con* $x \neq 0$ *entonces* $\|x + y\| > \|y\|$.

Demostración. El resultado es válido si $y = 0$, supongamos que $y \neq 0$.

($\Rightarrow$) Supongamos que tenemos $[x, y] = 0$ con $x, y \in S_X$ entonces

$$\|y\|^2 = [x + y, y] \leq \|x + y\|\|y\|$$

y $\|x + y\| \geq \|y\|$. Si fuera un "=", entonces $x + y \in S_X$ y para $0 < t < 1$ tenemos

$$\begin{aligned} \|y\|^2 &= [tx + y, y] \\ &\leq \|tx + y\|\|y\| \\ &= \|tx + ty - ty + y\|\|y\| \\ &\leq \big(t\|x + y\| + (1 - t)\|y\|\big)\|y\| \\ &< \|y\| \end{aligned}$$

donde el "<" se debe a que X es *estrictamente convexo* (*proposición* 1.1.25), resultando que $\|y\| < 1$, este absurdo viene de suponer que podía valer $\|x + y\| = \|y\|$ y por lo tanto es $\|x + y\| > \|y\|$.

($\Leftarrow$) Ver [To70]. ■

Teorema A.0.12 (Teorema de Representación de Riesz)**.** *Si* $(X, \|.\|)$ *es un espacio de Banach uniformemente convexo con semi-producto interno continuo, dado* $f \in X^*$, *existe un único* $y_0 \in X$ *tal que* $f = y_0^*$, *es decir, la aplicación dual* $y \mapsto y^*$ *tal que*

$$y^*(x) = [x, y] \qquad \forall\, x \in X$$

es biyectiva. Además es isométrica.

Demostración. Si $f(x) = 0 \;\; \forall\, x \in X$, entonces tomamos $y_0 = 0$ en X. Si $f^* \neq 0$, entonces $N := Ker(f)$ es un hiperplano cerrado de X y por la *proposición* A.0.7 existe $y_0 \neq 0$ normal a N. Cuando $x \in N$ e $y = \lambda y_0$ con $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que $f(x) = 0 = [x, y]$, mientras que para $x = y_0$ e $y = \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$ tenemos que $f(x) = f(y_0) = [x, y]$. Ya que todo $x \in X$ se escribe de manera única como $x = z + \lambda y_0$ con $z \in N$, y_0 normal a N y $\lambda = f(z)/f(y_0)$, nos queda que

$$f(x) = f(z + \lambda y_0) = f(z) + \lambda f(y_0) = [z, y] + \lambda[y_0, y] = [z + \lambda y_0, y] = [x, y] \qquad x, y \in X.$$

probando la existencia.

Para ver la unicidad, supongamos que existen $y \neq y' \in X$ tales que

$$[x, y] = f(x) = [x, y'] \qquad \forall\, x \in X.$$

En particular, $\|y\|^2 = [y, y] = [y, y'] \leq \|y\|\|y'\|$, de donde $\|y\| \leq \|y'\|$ y por lo tanto $\|y\| = \|y'\|$. Pero entonces $[y, y'] = \|y\|\|y'\|$ y, usando la *proposición* A.0.10, es $y = y'$.

Para ver que el mapa dual es una isometría notemos que

$$|f(x)| = |[x, y_0]| \leq \|x\|\|y_0\| \leq \|y_0\| \qquad x \in S_X$$

entonces $\|f\| \leq \|y_0\|$, mientras que tomando $y_0/\|y_0\| \in S_X$ obtenemos $\|f\| \geq \|y_0\|$. ■

Proposición A.0.13. *Si* $(X, \|.\|)$ *es un espacio de Banach uniforme con único semi-producto interno* $[\cdot,\cdot]$ *entonces* X^* *es uniforme con único semi-producto interno* $[\cdot,\cdot]_*$ *dado por*

$$[x^*, y^*]_* = [y, x] \qquad x, y \in X \tag{A.3}$$

Demostración. Que X^* es uniforme se debe a la *proposición 1.1.29*, con lo cual tiene un único semi-producto interno que lo notamos por $[\cdot,\cdot]_*$. Entonces, usando el mapa dual de X^* en $X^{**} = X$ junto con la reflexividad de X, podemos escribir

$$[x^*, y^*]_* = y^{**}(x^*) = x^*(y) = [y, x] \qquad x, y \in X.$$

■

Proposición A.0.14 (D.O. Koehler [Ko71])**.** *Sean* $(X, \|.\|)$ *un espacio de Banach uniformemente diferenciable Fréchet con semi-producto interno continuo* $[\cdot,\cdot]$ *y* $T : X \to X$ *un operador lineal acotado, entonces* T *es una isometría si y sólo si* T *preserva el semi-producto interno, es decir,*

$$[Tx, Ty] = [x, y] \qquad x, y \in X. \tag{A.4}$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Como el semi-producto interno es único (*proposición A.0.9*) y T es una isometría podemos definir

$$\begin{aligned} [[\cdot,\cdot]] : X \times X &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longmapsto [Tx, Ty] \end{aligned}$$

que resulta un semi-producto interno sobre X y por unicidad, vale (A.4).

$(\Leftarrow)$ Si T satisface (A.4) entonces en particular es

$$\|Tx\|^2 = [Tx, Tx] = [x, x] = \|x\|^2 \qquad x \in X$$

de donde T es una isometría. ■

Bibliografía

[Ar50] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950) 337-404.

[BV03] J.A. Ball, V. Vinnikov, Reproducing Kernel Spaces and Applications, Formal Reproducing Kernel Hilbert Spaces: The Commutative and Noncommutative Settings, Springer Basel AG (2003) 77-134.

[CCLL02] P.G. Casazza, O. Christensen, S. Li, A. Lindner, On Riesz-Fischer sequences and lower frame Bounds, Z. Anal. Anwend., 21 (2) (2002) 305-314.

[Dr03] S.S. Dragomir, Semi-Inner Products and Applications (2003).

[FHY15] G.E. Fasshauer, F.J. Hickernell, Q. Ye, Solving support vector machines in reproducing kernel Banach spaces with positive definite functions, Appl. Comput. Harmon. Anal., 38 (2015) 115-139.

[Ga00] A.G. García, Orthogonal sampling formulas: a unified approach. SIAM Rev., 42 (3) (2000) 499-512.

[Ga15] A.G. García, Operator Theory, Sampling Theory and Reproducing Kernel Hilbert Spaces, Springer Basel (2015) 1-22.

[GHM14] A.G. García, M.A. Hernández-Medina, M.J. Muñoz-Bouzo, The Kramer Sampling Theorem Revisited, Acta Appl. Math., 133 (1) (2014) 87-111.

[Gi67] J.R. Giles, Classes of semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 129 (1967) 436-446.

[GP13] A.G. García, A. Portal, Sampling in Reproducing Kernel Banach Spaces, Mediterr. J. Math., 10 (3) (2013) 1401-1417.

[GS02] A.G. García, F.H. Szafraniec, A converse of the Kramer Sampling Theorem, Sampl. Theory Signal Image Process. 1 (1) (2002) 53-61.

[GSP13] P.G. Georgiev, L. Sánchez-González, P.N. Pardalos, Reproducing Kernel Banach Spaces, Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics, Springer New York (2013) 39-57.

[HNS09] D. Han, M.Z. Nashed, Q. Sun, Sampling expansions in reproducing kernel Hilbert and Banach spaces, Numerical Functional Analysis and Optimization, 30 (9-10) (2009) 971-987.

[He10] C. Heil, A Basis Theory Primer expanded edition, Springer (2010).

[KA64] L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, Functional Analysis in Normed Spaces, Macmillan New York (1964).

[Ko71] D.O. Koehler, A note on some operator theory in certain semi-inner-product spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971) 363-366.

[Kr59] H.P. Kramer, A Generalized Sampling Theorem, J. Math. Phys. 38 (1959) 68-72.

[Lu61] G. Lumer, Semi-inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961) 29-43.

[Me98] R.E. Megginson, An Introduction to Banach Space Theory, Graduate Text in Math, Springer - Verlag (1998).

[Sa97] S. Saitoh, Integral Transforms, Reproducing Kernels and Their Applications, Pitman Research Notes in Mathematics Series 369, Longman Harlow (1997).

[St08] D. T. Stoeva, X_d-Riesz Bases in separable Banach spaces, "Collection of papers, ded. to the 60th Anniv. of M. Konstantinov", (2008).

[St09] D.T. Stoeva, X_d-Frames in Banach spaces and their duals, IJPAM 52, No. 1 (2009) 1-14. (invited paper)

[SZH13] G. Song, H. Zhang, F.J. Hickernell, Reproducing kernel Banach spaces with the ℓ_1 norm, Appl. Comput. Harmon. Anal. 34 (2013) 96-116.

[To70] E. Torrance, Strictly convex spaces via semi-inner-product space orthogonality, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970) 108-110.

[Ye06] J. Yeh, Real Analysis, Theory of Measure and Integration, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (2006).

[Yo80] R.M. Young, An introduction to nonharmonic Fourier series, Academic Press New York (1980).

[ZXZ09] H. Zhang, Y. Xu, J. Zhang, Reproducing kernel Banach spaces for machine learning, J. Mach. Learn. Res. 10 (2009) 2741-2775.

[ZXZ11] H. Zhang, Y. Xu, J. Zhang, Frames, Riesz bases, and sampling expansions in Banach spaces via semi-inner products, Appl. Comput. Harmon. Anal. 31 (2011) 1-25.

[ZZ13] H. Zhang, J. Zhang, Vector-valued reproducing kernel Banach spaces with applications to multi-task learning, J. Complexity 29 (2013) 195-215.