UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

E-Teoría equivariante y la conjetura de Baum-Connes

Santiago Javier Vega

Director: Guillermo Cortiñas

Fecha de Presentación
11 de Marzo de 2015

Agradecimientos

El arte de agradecer suele ser uno difícil, sobre todo porque pocas líneas a veces no pueden hacer justicia a la gratitud. Espero que nadie se ofenda por omisión.

En primer lugar, gracias a mis padres por alentarme a lo largo de toda mi vida, por guiarme, por darme un empujón cuando lo necesitaba, por permitirme seguir el camino que quería y por nunca dejarme bajar los brazos. Gracias por muchísimas otras cosas más que hacen todos los días. Las hojas no alcanzan para agradecerles. Esta pequeña y trabajosa victoria está dedicada a ellos.

Gracias a mi hermana porque (aunque a veces diga que no lo hace) se que me apoya.

Gracias a los que me bancaron, me dieron su hombro y hicieron de días difíciles días soportables desde el inicio de la carrera: Santi, Carlinho, Manu y Luz; y también a aquellos que lo hicieron desde la mitad y sobre el final: Tincho, Rafa, Fede y Gonchu; gracias "vices".

Gracias Xava por las noches de pizzas y las largas charlas.

Gracias también a todos los que me acompañaron y me dieron una mano durante esta larga carrera, son muchos pero no han sido olvidados.

Gracias a Willie por soportar mis burradas y mi lento progreso, por enseñarme a escribir matemática y por los consejos.

Ha sido un gran viaje. Tal vez algo turbulento. Pero todavía no terminó.

Índice general

Introducción

En el área de la geometría no conmutativa, el estudio de las C*-álgebras es un problema importante. Comenzando con la K-teoría de Grothendieck y la K-teoría de Atiyah-Hirzebruch, junto con el teorema de Serre-Swan, los grupos K_0 y K_1 se convirtieron en fuertes invariantes no sólo para las C*-álgebras, sino para anillos en general. Posteriormente, concentrándose en el estudio de las álgebras de operadores, Kasparov desarrolló una generalización de la K-teoría y la K-homología de manera que se realizaran como una teoría bivariante [Kas88], lo que permitía un invariante más preciso. La K-teoría de Kasparov, o KK-teoría, fue sumamente exitosa en su objetivo y permitió el cálculo concreto de la K-teoría de varias álgebras. Aunque la definición original de Kasparov es muy concreta y con una motivación geométrica a partir de generalizar la teoría de indices, la KK-teoría resulta ser la teoría bivariante universal con respecto a estabilidad compacta, escisión para sucesiones exactas que admiten una sección completamente positiva e invarianza homotópica. Esto quiere decir que todo funtor $F : \mathcal{C}^* \to \mathfrak{Ab}$ que cumpla con dichas propiedades, se factoriza de manera única $F : \mathcal{C}^* \to \mathrm{KK} \to \mathfrak{Ab}$. El hecho que la KK-teoría no admitiese escisión para todas las sucesiones exactas era un problema que se deseaba solucionar. Higson definió entonces la E-teoría a partir de las propiedades universales de estabilidad compacta, escisión e invarianza homotópica [Hig90]. Aunque no pudo dar una construcción concreta, probó su existencia por métodos de categorías de fracciones, pero la falta de un descripción concreta de la E-teoría la hacía poco útil. Posteriormente Connes y Higson en [CH90-1] definieron los morfismos asintóticos como una manera de generalizar los casi-morfismos a las C*-álgebras. A partir de esta generalización, lograron simplificar muchas construcciones en lo que refiere a teoría de homotopía no conmutativa. Gracias a ello, concibieron una descripción muy concreta de la E-teoría. En sus definiciones originales, la KK-teoría de Kasparov y E-teoría de Connes y Higson son técnicamente complicadas. En [GHT00], Guentner, Higson y Trout dieron una descripción de la E-teoría que simplifica muchos de estos tecnicismos y por lo tanto consiguen una descripción más amena de toda la teoría. A lo largo de toda esta tesis, seguimos fuertemente el desarrollo hecho allí.

Tanto la KK-teoría como la E-teoría han demostrado ser herramientas muy útiles para estudiar la K-teoría de los productos cruzados de C*-álgebras. Sobre todo han tenido un gran impacto en el desarrollo (y eventual demostración) de distintos casos de la Conjetura de Baum-Connes para muchas clases de grupos y con coeficientes en distintas álgebras. Esta conjetura apunta a comprender la K-teoría de productos cruzados de C*-álgebras con un grupo G, a partir del estudio de una teoría de homología sobre el espacio universal para acciones propias de G. Esta tesis apunta a introducir una versión equivariante de la E-teoría junto con el desarrollo de algunas propiedades con el objetivo de probar la conjetura de Baum-Connes en dos casos sencillos: para grupos compactos con coeficientes arbitrarios (el Teorema de Green-Julg) y para grupos discretos con coeficientes en un álgebra propia (el Teorema de Green-Julg generalizado). Utilizamos este último resultado para aplicar el método de Dirac-Dirac inverso, que se ha utilizado para probar la conjetura en casos importantes [HK01]. En este trabajo estudiamos el caso no reducido y con coeficientes de la Conjetura de Baum-Connes, muchos de los resultados pueden adaptarse a la formulación original de la conjetura que refiere al caso de productos cruzados reducidos con grupos C*-exactos con coeficientes en $\mathbb{C}$; más generalmente, también pueden adaptarse dichos resultados a analizar la conjetura con productos cruzados reducidos con grupos C*-exactos con coeficientes en álgebras exactas.

El resto de la tesis está organizada de la siguiente forma. En el primer capítulo damos las definiciones preliminares de los elementos de estudio e introducimos los morfismos asintóticos junto con los resultados básicos que utilizaremos en toda la tesis. En el segundo capítulo introducimos algunos elementos de teoría de homotopía que son necesarios para probar las propiedades más importantes de la E-teoría. Particularmente definimos el morfismo de Connes-Higson que es la razón principal para introducir los morfismos asintóticos. En el tercer capítulo definimos la E-teoría y probamos las propiedades que necesitaremos. Finalmente en el cuarto capítulo, definimos los morfismos de estabilización y ensamble. Con éste último enunciamos la Conjetura de Baum-Connes para productos cruzados completos y con coeficientes. Luego procedemos a probar el teorema de Green-Julg, que es la afirmación de la Conjetura de Baum-Connes para el caso en que el grupo es compacto. Posteriormente introducimos los morfismos de inducción y compresión de álgebras para grupos discretos que permiten probar el teorema de Green-Julg generalizado. Finalizamos con una explicación del método de Dirac-Dirac dual para grupos discretos que se ha utilizado para probar la conjetura de Baum-Connes en diferentes casos.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo desarrollamos un poco el lenguaje, la notación y algunos resultados que serán necesarios para definir los grupos de E-teoría equivariante. Tratamos algunas propiedades sobre GC*-álgebras y productos cruzados. Luego hacemos la construcción de los morfismos asintóticos equivariantes y sus homotopías. A lo largo de todo el trabajo seguimos fuertemente el desarrollo hecho en [GHT00].

1.1. GC*-álgebras y productos cruzados

A lo largo de todo este trabajo, G referirá a un grupo topológico localmente compacto, Hausdorff y con base contable, aunque en capítulos posteriores nos restringiremos al caso discreto. Los ideales siempre serán biláteros y cerrados. Para muchos resultados de esta sección referimos a [Dav96] como una introducción a las C*-álgebras y cálculo funcional y a [Wil07] que hace un trabajo muy detallado sobre C*-sistemas dinámicos y productos cruzados.

GC*-álgebras

En el desarrollo de la teoría clásica de sistemas dinámicos, se analiza un espacio topológico localmente compacto Hausdorff X con la acción de un grupo G que actúa por homeomorfismos de manera continua; esta acción se traduce naturalmente al álgebra de funciones continuas que se anulan en infinito, $C_0(X)$. En el contexto de la geometría no conmutativa, el análogo de un espacio con una acción de G, es una C*-álgebra junto con una acción continua de G por $*$-isometrías. En muchos contextos, a este objeto se lo llama un C*-sistema dinámico, aquí hacemos la siguiente definición.

Una *GC*-álgebra* es una C*-álgebra A junto con una acción continua

$$\cdot : G \times A \to A,$$

de modo que para cada $g \in G$, $g \cdot (-) : A \to A$ es un $*$-automorfismo. Recordamos que para el caso de las C*-álgebras, los $*$-isomorfismos siempre son isometrías.

Los $*$-morfismos entre GC*-álgebras que preservan la acción de G decimos que son *equivariantes.*

Observación 1.1.1. *En el caso que $G = \{1\}$, una GC*-álgebra es simplemente una C*-álgebra. En el caso que G es discreto, dar una GC*-álgebra es dar un morfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}(A)$.*

Puede parecer restrictiva la condición de que la acción deba ser juntamente continua en ambas variables, pero en realidad, la siguiente proposición apunta a mostrar que ésta no es restricción alguna. Más generalmente, si tenemos una acción de G en una C*-álgebra A, no necesariamente continua, uno puede preguntarse que elementos "son continuos para G", en el sentido que, para cada $a \in A$, la función $G \ni g \mapsto g(a) \in A$ es continua.

Definición 1.1.2. *Sea A una C*-álgebra con acción de un grupo G por $*$-automorfismos. Un elemento $a \in A$ se dice G-*continuo *si la función*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow A \\ g &\longmapsto g \cdot a \end{aligned}$$

es continua.

Proposición 1.1.3. *Los elementos G-continuos de una C*-álgebra (con una acción no necesariamente continua de G), forman una GC*-álgebra.*

Demostración. Como G actúa por $*$-isomorfismos, es fácil ver que los elementos G-continuos forman un C*-subálgebra. Entonces, lo único que debemos ver es que la acción $\cdot : G \times A \to A$ restringida a los elementos G-continuos es continua. Sean $\varepsilon > 0$ y $a \in A$ un elemento G-continuo. Debemos ver que existen un entorno de la identidad U de G y un $\delta > 0$, de forma que si $g \in U$ y $\|a - b\| < \delta$ entonces $\|g(b) - a\| < \varepsilon$. En efecto, consideremos U de forma que $\|g(a) - a\| < \varepsilon/2$; este entorno existe debido a la G-continuidad de a. Entonces

$$\|g(b) - a\| \leq \|g(b) - g(a)\| + \|g(a) - a\| = \|b - a\| + \|g(a) - a\|,$$

en donde la última igualdad se debe a que g es una isometría. Esto nos dice que $\delta = \varepsilon/2$, sirve. $\square$

Antes de seguir con los productos cruzados de GC*-álgebras, damos aquí un herramienta que jugará un rol importante a la hora de analizar las extensiones de GC*-álgebras.

Definición 1.1.4. *Sea A una C*-álgebra. Una* unidad aproximada acotada y creciente *es una red $\{u_\lambda\}$ de elementos de A tal que cumple las siguientes propiedades.*

i) $0 \leq u_\lambda \leq 1$.

ii) *si* $\lambda \leq \lambda'$ *entonces* $u_\lambda \leq u_{\lambda'}$.

iii) $\|u_\lambda a - a\| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$ *y* $\|au_\lambda - a\| \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0$ *para todo* $a \in A$.

Recordemos que el *conmutador* de dos elementos a y b de una C*-álgebra A es

$$[a,b] = ab - ba.$$

Definición 1.1.5. *Sean A una GC*-álgebra* separable *y J una subálgebra que contenga el conmutador*

$$[A,J] = \operatorname{span}\{[a,j] : a \in A, j \in J\}$$

(como por ejemplo, en el caso de un ideal de A). Una unidad aproximada acotada y creciente $\{u_t\}_{t\in[1,+\infty)}$ de J decimos que es:

iv) continua *si la función $t \mapsto u_t$ es continua,*

v) cuasi-central para el par (A,J) *si para todo $a \in A$*

$$\lim_{t\to\infty} \|[u_t,a]\| = 0, \text{ y}$$

vi) G-equivariante *si*

$$\lim_{t\to\infty} \|g(u_t) - u_t\| = 0,$$

de manera uniforme sobre compactos de G.

En el resto del trabajo, cuando tengamos una unidad aproximada acotada, creciente, continua, cuasi-central para un par (A,J) y G-equivariante, diremos simplemente que tenemos una unidad aproximada para el par (A,J).

Teorema 1.1.6. *(El teorema técnico de Kasparov) Sean A una GC*-álgebra separable y J una subálgebra de A tal que $[A,J] \subseteq J$, entonces existe una unidad aproximada para el par (A,J).*

Demostración. Ver [Hig87] □

Necesitaremos una propiedad más al respecto de las unidades aproximadas, que será importante en la construcción de Connes-Higson expuesta en el capítulo 2.

Lema 1.1.7. *Sean A una GC*-álgebra separable, J una GC*-subálgebra con $[A,J] \subseteq J$, $\{u_t\}$ una unidad aproximada para el par (A,J) y $f \in C[0,1]$ tal que $f(0) = 0$. Dado que los elementos u_t son positivos, en particular son autoadjuntos y podemos calcular $f(u_t)$ mediante cálculo funcional. Entonces se tiene lo siguiente.*

i) Para todo $g \in G$

$$\lim_{t\to\infty} \|g(f(u_t)) - f(u_t)\| = 0$$

de manera uniforme sobre compactos de G.

ii) Dado $a \in A$,

$$\lim_{t\to\infty}[a, f(u_t)] = 0.$$

iii) La función $t \mapsto f(u_t)$ es G-continua.

iv) si además que $f(1) = 0$, entonces para cada $x \in J$,

$$\lim_{t\to\infty}\|f(u_t)x\| = 0.$$

Demostración. Para probar *i)* y *ii)*, debido al teorema de Stone-Weierstrass, alcanza probarlo para el caso en que f es polinomial; reduciendo más aún, es claro que la propiedad se mantiene para combinaciones lineales. Sólo falta verlo para las potencias $f(x) = x^n$.

En el caso de *i)* debemos ver que $\|g(u_t^n) - u_t^n\|$ tiende a 0. Procedemos por inducción. El caso $n = 1$ se sigue de la definición. Supongamos que vale para todo $1 \leq k < n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|g(u_t^n) - u_t^n\| &= \|g(u_t)^n - u_t^n - g(u_t)^{n-1}u_t + g(u_t)^{n-1}u_t\| \\
&= \|g(u_t)^{n-1}(g(u_t) - u_t) - (u_t^{n-1} - g(u_t)^{n-1})u_t)\| \\
&\leq \|g(u_t)^{n-1}\|\|g(u_t) - u_t\| + \|u_t^{n-1} - g(u_t)^{n-1}\|\|u_t\|.
\end{aligned}$$

Y como $\|g(u_t)^{n-1}\|$ y $\|u_t\|$ están acotados y $\|g(u_t) - u_t\|$ y$\|u_t^{n-1} - g(u_t)^{n-1}\|$ tienden a 0 por hipótesis inductiva, tenemos lo que queremos.

En el caso de *ii)*, si $a \in A$, debemos ver que $\|[a, u_t^n]\|$ tiende a 0. Nuevamente procedemos por inducción. El caso $n = 1$ se sigue de la definición. Para el caso $n = 2$ observemos que

$$\begin{aligned}
\|[a, u_t^2]\| &= \|au_t^2 - u_t^2 a\| \\
&= \|au_t^2 - u_t^2 a + u_t a u_t - u_t a u_t\| \\
&= \|(au_t - u_t a)u_t - u_t(u_t a - au_t)\| \quad \leq \|au_t - u_t a\|\|u_t\| + \|u_t\|\|u_t a - au_t\|.
\end{aligned}$$

Y dado que $\|u_t\|$ está acotado, se sigue del caso $n = 1$. Supongamos ahora que vale para todo $3 \leq k < n$, entonces

$$\begin{aligned}
\|[a, u_t^n]\| &= \|au_t^n - u_t^n a\| \\
&= \|au_t^n - u_t^n a + u_t a u_t^{n-1} - u_t a u_t^{n-1} + u_t^{n-1} a u_t - u_t^{n-1} a u_t\| \\
&= \|(au_t - u_t a)u_t^{n-1} - u_t^{n-1}(u_t a - au_t) - (u_t a u_t^{n-1} - u_t^{n-1} a u_t)\| \\
&= \|(au_t - u_t a)u_t^{n-1} - u_t^{n-1}(u_t a - au_t) - u_t(au_t^{n-2} - u_t^{n-2} a)u_t)\| \\
&= \|au_t - u_t a\|\|u_t^{n-1}\| + \|u_t^{n-1}\|\|u_t a - au_t\| + \|u_t\|\|au_t^{n-2} - u_t^{n-2} a\|\|u_t\|
\end{aligned}$$

Y como todos los términos están acotados, lo que queremos se sigue por hipótesis inductiva.

iii) se sigue de *i)* debido a la convergencia uniforme y el hecho que G es localmente compacto.

Finalmente, *iv)*, también alcanza para probarlo para polinomios. Lo probamos primero para el caso $f(x) = x(1-x)$. En ese caso, sucede que

$$\|f(u-t)x\| = \|u_t(1-u_t)b\| \leq \|b - u_t b\|$$

y este último término tiende a 0 según la definición de unidad aproximada. En el caso general, cualquier polinomio que satisface $f(0) = f(1) = 0$ es múltiplo de $x(1-x)$. Observando que para todo polinomio h se tiene que

$$\|h(u_t)u_t(1-u_t)x\| \leq \|h(u_t)\|\|u_t(1-u_t)x\|,$$

obtenemos lo deseado ya que $\|h(u_t)\|$ está acotado. □

Productos cruzados

Ahora construiremos el análogo topológico del producto cruzado de un anillo por un grupo. Naturalmente, se reemplazan las sumas por integrales y el producto natural se vuelve la convolución, pero para esto requerimos brindarle a G una medida. El siguiente resultado, muy conocido, soluciona este problema.

Teorema 1.1.8 (Existencia y unicidad de la medida de Haar y de la función modular)**.** *Sea G un grupo topológico localmente compacto y Hausdorff. Entonces G tiene una única medida μ (salvo multiplicar por una constante) invariante por la acción de G a izquierda llamada* la medida de Haar de G*. En particular, como $\mu\cdot g = \mu(- \cdot g^{-1})$ define una medida invariante a izquierda, se tiene que $\mu\cdot g = \Delta(g)\mu$, con $\Delta(g) \in \mathbb{R}_+$. La función $\Delta : G \to \mathbb{R}_+$ no depende de μ y es un morfismo de grupos continuo; se la llama la* función modular de G*.*

A la medida de Haar de un grupo G la notaremos con $\mathrm{d}g$, donde g será la variable de integración.

Demostración. Para la existencia y unicidad de la medida de Haar ver [Fol95, Teoremas 2.10 y 2.20]. Para la existencia de la función modular ver [Wil07, Lema 1.61] □

Una vez que le podemos brindar naturalmente a G una medida, si tenemos una GC*-álgebra A, podemos darle al conjunto

$$C_c(G, A) = \{f : G \to A : \ f \text{ es continua de soporte compacto}\}$$

una estructura de $*$-álgebra dada por la convolución,

$$(f \star h)(x) = \int_G f(g)g(h(g^{-1}x))\mathrm{d}g$$

y la involución

$$f^*(g) = \Delta(g)^{-1}g(f(g^{-1}))^*.$$

Este objeto posee la propiedad de extender ciertas representaciones de A, para explicitarla hacemos las siguientes definiciones.

Un *G-espacio de Hilbert* es un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, junto con un morfismo de grupos $\rho : G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ de modo que para todo $h \in \mathcal{H}$ la función $g \mapsto \rho(g)(h)$ es continua.

Una *$*$-representación covariante* de una GC*-álgebra A en un G-espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ es un $*$-morfismo $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de forma que

$$\pi(g \cdot a) = \rho(g)\pi(a)\rho(g)^{-1},$$

donde ρ es el morfismo que define la acción de G en $\mathcal{H}$.

Decimos además que π es *no degenerada* si

$$\pi(A)(\mathcal{H}) = \mathrm{span}\{\pi(a)(\xi) : a \in A, \xi \in \mathcal{H}\}$$

es denso en $\mathcal{H}$. Decimos que la representación es *fiel* si π es inyectiva.

Dada una $*$-representación covariante $\pi : A \to \mathcal{H}$, se obtiene una representación $\hat{\pi} : C_c(G, A) \to \mathcal{H}$ definida por

$$\langle \hat{\pi}(f)v, w\rangle = \int_G \langle \pi(f(g))g(v), w\rangle \mathrm{d}g.$$

Definición 1.1.9. *El* producto cruzado completo *asociado a la GC*-álgebra A es la C*-álgebra $C^*(G, A)$ dada por la completación de $C_c(G, A)$ por la norma*

$$\|f\| = \sup\{\|\hat{\pi}(f)\| \ : \ \pi \textit{ es una } *\textit{-representación covariante de } A\}$$

(Para ver la buena definición de $C^*(G, A)$ ver [Wil07, Lema 2.27])

En conclusión, $C^*(G, A)$ es la C*-álgebra con la propiedad universal de extender de manera única todas las $*$-representaciones covariantes de A y toda representación de $C^*(G, A)$ induce una única representación covariante de A.

Una propiedad importante de esta construcción refiere a la exactitud del funtor $C^*(G, -)$, pero antes damos el siguiente resultado que utilizaremos también en otros contextos.

Teorema 1.1.10 (Bartle-Graves)**.** *Sean A y B C*-álgebras y $\varphi : A \to B$ un $*$-morfismo suryectivo. Entonces existe una sección continua (no necesariamente lineal) $s : B \to A$ que satisface $s(0) = 0$.*

Demostración. Ver [BG52] □

Recordemos que un funtor se dice *exacto* si preserva sucesiones exactas de GC*-álgebras.

Lema 1.1.11. *$C_c(G, -)$ es exacto.*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta de GC*-álgebras,

$$0 \to \ker\varphi \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \to 0.$$

Aplicando $C_c(G,-)$ obtenemos la sucesión

$$0 \to C_c(G, \ker\varphi) \xrightarrow{i_*} C_c(G;A) \xrightarrow{\varphi_*} C_c(G,B) \to 0.$$

Es claro que la composición de los $*$-morfismos i_* y φ_* son nulos. Por otro lado también es claro que i_* es inyectivo. El hecho que φ_* es sobreyectivo se sigue del Teorema de Bartle-Graves 1.1.10. Falta ver sólo la exactitud en el medio, pero esto se deduce del hecho que si $\varphi_*(f) = 0$, entonces la imagen de f está contenida en $\ker\varphi$. □

Proposición 1.1.12. *$C^*(G,-)$ es exacto*

Demostración. Consideremos una sucesión exacta de GC*-álgebras,

$$0 \to \ker\varphi \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \to 0.$$

Aplicando $C^*(G,-)$ obtenemos la sucesión

$$0 \to C^*(G, \ker\varphi) \xrightarrow{i_*} C^*(G;A) \xrightarrow{\varphi_*} C^*(G,B) \to 0.$$

Es claro que la composición $\varphi_* \circ i_*$ es el morfismo nulo.

Veamos que i_* es inyectiva. Si π es una $*$-representación covariante no degenerada de $\ker\varphi$, entonces sobre la imagen $\pi(\ker\varphi)(\mathcal{H})$ podemos definir para cada $a \in A$

$$\tilde{\pi}(a)(\pi(i)(v)) = \pi(ai)(v).$$

Extendiendo por linealidad y por continuidad, esto define una $*$-representación covariante $\tilde{\pi}$ de A que extiende a π. Como esto sucede para cualquier representación no degenerada, i_* es inyectiva.

Finalmente debemos ver que $C^*(G,A)/C^*(G,\ker\varphi) = C^*(G,B)$. Para esto observemos que debido al lema anterior $C_c(G,B) = C_c(G,A)/C_c(G,\ker\varphi)$. En particular, φ_* tiene imagen densa; como por ser $*$-morfismo, también tiene imagen cerrada, φ_* es sobreyectivo. Finalmente, si π una $*$-representación de $C^*(G,B)$, podemos restringirla a una representación covariante $\tilde{\pi}$ de B. Pero toda representación covariante de B se corresponde con una representación covariante de A que se anula sobre $\ker\varphi$. Nuevamente, utilizando la propiedad universal del producto cruzado, obtenemos una representación covariante de $C^*(G,A)$ que es nula sobre $C^*(G,\ker\varphi)$ (ya que se restringe a la representación nula). Esto concluye que entonces que el núcleo de φ_* es $C^*(G,\ker\varphi)$. □

Por otro lado, para terminar la sección mencionamos que no sólo tenemos el producto cruzado completo, sino también el reducido.

Dado un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (*sin necesariamente una acción de* G), se le puede dar a $C_c(G,\mathcal{H})$ un producto interno definido por

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_G \langle \xi(g), \eta(g) \rangle \mathrm{d}g.$$

A la completación de $C_c(G, \mathcal{H})$ con la norma inducida por este producto interno la notamos $L^2(G, \mathcal{H})$. G actúa en $L^2(G, H)$ vía $(g \cdot \xi) = \xi(g^{-1}x)$.

Dadas una GC*-álgebra A y $\pi : A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una representación fiel y no degenerada, podemos definir una representación de $C_c(G, A)$ en $L^2(G, \mathcal{H})$ vía

$$\langle \hat{\pi}(f)(\xi), \eta \rangle = \int_G \langle \pi \circ f(g)(g \cdot \xi), \eta \rangle \mathrm{d}g.$$

Lema 1.1.13. *$\hat{\pi}$ es fiel*

Demostración. Ver [Wil07, Lema 2.26] □

Definición 1.1.14. *El* producto cruzado reducido *asociado a la GC*-álgebra A, es la C*-álgebra $C^*_{red}(G, A)$ dada por la completación de $C_c(G, A)$ como subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(G, \mathcal{H}))$.*

Es importante notar que, al igual que su análogo a nivel del producto tensorial, este producto cruzado no es exacto.

1.2. Morfismos asintóticos equivariantes

Los morfismos asintóticos permiten dar una construcción concreta de la E-teoría que, como dijimos en la introducción, se conocía en sentido abstracto (a través de sus propiedades universales) desde antes [Hig90]. Los morfismos asintóticos fueron definidos por primera vez (en su versión no equivariante) en [CH90-1, CH90-2], a partir de clases de equivalencia de familias asintóticas. La definición que usaremos aquí no será la original sino más bien seguiremos el enfoque dado en [GHT00], en términos del álgebra asintótica.

Sea A una GC*-álgebra. La acción de G pasa naturalmente a la C*-álgebra

$$C_b([1, +\infty), A) = \{f : [1, +\infty) \to A : \sup_t \|f(t)\| < \infty\}.$$

Sin embargo, es posible que esta acción no resulte continua, pero si nos restringimos a los elementos G-continuos, esta resulta una GC*-álgebra (ver Proposición 1.1.3) que denotamos por

$$\mathfrak{T}A := \{f \in C_b([1, +\infty), A) : f \text{ es } G\text{-continua}\}.$$

Al ideal de $\mathfrak{T}A$ dado por la funciones que tienden a 0 en infinito lo llamaremos $\mathfrak{T}_0A$.

Definición 1.2.1. *Sea A una GC*-álgebra. Llamamos* álgebra asintótica de A *al cociente*

$$\mathfrak{A}A := \mathfrak{T}A/\mathfrak{T}_0A.$$

Observación 1.2.2. *Notar que $\mathfrak{A}A$ es la C*-álgebra que resulta de completar $\mathfrak{T}A$ con la seminorma dada por*

$$\|f\|_{\mathfrak{A}} = \limsup_{t \to \infty} \|f(t)\|.$$

Definición 1.2.3. *Dadas GC^*-álgebras A y B , un* morfismo asintótico equivariante *φ de A en B es $*$-morfismo equivariante $\varphi : A \to \mathfrak{A}B$.*

Observamos que esta definición de morfismo asintótico es equivalente a la dada en [CH90-1, CH90-2]; hacemos una breve descripción aquí. Una *familia asintótica* es una familia de funciones $\varphi_t : A \to B$, parametrizada por $1 \leq t < +\infty$, de modo que para todo $a \in A$ la función $t \mapsto \varphi_t(a)$ es continua y que además, dados $a, b \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(a + \lambda b) - \varphi_t(a) - \lambda\varphi_t(b)\| = 0,\\
&\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(a)^* - \varphi_t(a^*)\| = 0,\\
&\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(ab) - \varphi_t(a)\varphi_t(b)\| = 0 \text{ y}\\
&\lim_{t\to\infty} \|\varphi_t(g \cdot a) - g \cdot \varphi_t(a)\| = 0.
\end{aligned}$$

Decimos que dos familias asintóticas $\{\psi_t\}$ y $\{\varphi_t\}$ son *equivalentes* si para todo $a \in A$ se tiene que $\psi_t(a) - \varphi_t(a) \to 0$ si $t \to +\infty$. Es claro que esta relación es de equivalencia.

Notemos ahora que cada clase de equivalencia de familias asintóticas define un morfismo asintótico equivariante considerando para cada $a \in A$, la clase de la función en $\mathfrak{A}B$ definida por la asignación $t \mapsto \varphi_t(a)$. Recíprocamente, dado un morfismo asintótico, podemos definir una clase de familias asintóticas dada por tomar una sección de la suryección $\mathfrak{T}B \to \mathfrak{A}B$ (dada por el Teorema de Bartle-Graves 1.1.10) y luego evaluando en cada t.

Observación 1.2.4. *Dada una GC^*-álgebra A, siempre poseemos un $*$-morfismo equivariante natural*

$$\alpha_A : A \to \mathfrak{T}A,$$

dado por la inclusión de A en $\mathfrak{T}A$ como las funciones constantes. En general notaremos a α_A y a su composición con el morfismo cociente $\mathfrak{T}A \to \mathfrak{A}A$ de la misma manera.

Homotopía de morfismos asintóticos

Para el desarrollo de la K-Teoría topológica, la homotopía de morfismos es una herramienta esencial para la construcción de la teoría y en el cálculo concreto para distintas álgebras; en el caso de la E-teoría, desarrollamos una teoría de homotopía para morfismos asintóticos. Otro objetivo de esta subsección será definir una categoría en donde los objetos sean C*-álgebras y sus morfismos sean clases de homotopía de morfismos asintóticos.

Aunque en el desarrollo de la teoría posterior nos centraremos sobre C*-álgebras separables, en esa sección no hacemos restricción sobre las C*-álgebras involucradas, y más aún, esto último facilitará algunas de las construcciones hechas originalmente por Connes y Higson en [CH90-1, CH90-2].

Si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado de la recta real y A una GC*-álgebra, definimos

$$IA := \{f : I \to A : f \text{ es continua}\}.$$

Llamaremos ev_0 y ev_1 a las evaluaciones en los extremos a y b respectivamente (aunque el intervalo I no se tratara del intervalo $[0, 1]$). La acción de G sobre IA está dada por la acción en la imagen, es decir $(g \cdot f)(t) = gf(t)$.

En un primer lugar la acción de G sobre IA podría no ser continua, pero el siguiente lema muestra que debido a la compacidad de I, si lo es.

Lema 1.2.5. *Si A es una GC*-álgebra, los elementos de IA son todos G-continuos.*

Demostración. Sea $f : I \to A$ continua. Debemos ver que, dado $\varepsilon > 0$ arbitrario, existe un entorno U de la unidad de G tal que si $g \in G$ entonces sucede que $\|f(t) - g(f(t))\| < \varepsilon$ para todo $t \in I$. Como I es compacto, existen $\delta > 0$ y finitos puntos $x_1, \dots, x_n \in I$ tales que $B_{\delta/2}(x_i)$ cubren a I y se cumple la implicación

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon/3.$$

Entonces existen $U_1, \dots, U_n$ entornos de la unidad de G de forma que $\|g(f(x_i)) - f(x_i)\| < \varepsilon/3$. Consideremos entonces $U = \cap_{1 \le i \le n} U_i$; afirmamos que éste sirve. En efecto, sean $t \in I$, x_i y $g \in G$ tal que $|x_i - t| < \delta$ entonces sucede que

$$\|f(t) - g(f(t))\| \le \|f(t) - f(x_i)\| + \|f(x_i) - g(f(x_i))\| + \|g(f(x_i)) - g(f(t))\|.$$

Como G actúa por $*$-isomorfismos, g es una isometría, por lo que podemos acotar la suma derecha por $3\varepsilon/3 = \varepsilon$, consiguiendo lo que queríamos probar. □

Corolario 1.2.6. *Sea A una GC*-álgebra y $I = [a, b]$ un intervalo. Entonces IA es una GC*-álgebra.*

Demostración. Esto se deduce del lema anterior y de la Proposición 1.1.3. □

Antes de continuar, observemos que las asignaciones

$$A \mapsto \mathfrak{T}A,\ A \mapsto \mathfrak{T}_0 A \text{ y } A \mapsto \mathfrak{A}A$$

son funtoriales. Dado un $*$-morfismo equivariante $\varphi : A \to B$, obtenemos un $*$-morfismo equivariante $\mathfrak{T}\varphi : \mathfrak{T}A \to \mathfrak{T}B$, dado por componer con φ, que además se restringe bien a $\mathfrak{T}_0$ (ya que φ manda 0 en 0). Esto induce en el cociente un $*$-morfismo equivariante $\mathfrak{A}\varphi : \mathfrak{A}A \to \mathfrak{A}B$. Denotamos a estos funtores simplemente por $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}_0$ y $\mathfrak{A}$ respectivamente. Como es usual, $\mathfrak{A}^n = \mathfrak{A} \circ \cdots \circ \mathfrak{A}$ representa a la composición repetida n veces y $\mathfrak{A}^0$ es el funtor identidad. Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Un morfismo n-asintótico equivariante de A en B es un $*$-morfismo equivariante $A \to \mathfrak{A}^n B$. Dos morfismos $\varphi_0, \varphi_1 : A \to \mathfrak{A}^n B$ se dicen *n-homotópicos* si existe un intervalo real cerrado I y un $*$-morfismo equivariante $\varphi : A \to \mathfrak{A}^n IB$ de forma que $\varphi_i = \mathfrak{A}^n(\mathrm{ev}_i) \circ \varphi$ (con $i = 0, 1$). A dicha φ la llamamos la *homotopía* entre φ_0 y φ_1. Cuando tenemos dos morfismos 0-homotópicos decimos simplemente que son homotópicos; esta es la noción usual de homotopía. Para el caso $n = 1$ obtenemos la definición hecha por Connes y Higson en [CH90-2].

Para continuar debemos mostrar que la relación de n-homotopía es de equivalencia, pero para esto requerimos dos lemas previos que se refieren a la naturaleza del funtor $\mathfrak{A}$.

Lema 1.2.7. *$\mathfrak{T}$ es exacto.*

Demostración. Consideremos la sucesión exacta dada por:

$$0 \to \ker\varphi \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\varphi} B \to 0$$

i induce canónicamente una inclusión $\mathfrak{T}\ker\varphi \trianglelefteq \mathfrak{T}A$ y además $\ker\mathfrak{T}\varphi = \mathfrak{T}\ker\varphi$. Resta ver la suryectividad de $\mathfrak{T}\varphi$.

Tomemos ahora $f \in \mathfrak{T}B$, y restrinjámosla a un intervalo compacto arbitrario I; debido al Teorema de Bartle-Graves 1.1.10 podemos levantar $f|_I \in IB$ a $\widetilde{f|_I} \in IA$. Observemos que como I es compacto, $\widetilde{f|_I}$ es un elemento G-continuo, por el Lema 1.2.5. Cubramos entonces $[1, +\infty)$ con intervalos cerrados $\{I_k = [k, k + 3/2]\}_{k\geq 1}$, y consideremos una partición de la unidad ψ_k subordinada a dichos intervalos. Consideremos la función

$$\tilde{f} : [1, +\infty) \to A, \quad \tilde{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \psi_k(t)\widetilde{f|_{I_k}}(t).$$

La suma anterior está bien definida ya que para cada t, a lo sumo dos $\psi_i(t)$ son no nulos. Dado que los I_k son cerrados y forman un cubrimiento localmente finito, $\tilde{f}$ es continua. Debemos ver ahora que $\tilde{f}$ es un elemento G-continuo de $\mathfrak{T}A$. Una manera de lograr esto es eligiendo cada levantado $\widetilde{f|_{I_k}}$ de manera que si $\varepsilon > 0$ exista un entorno de la identidad U independiente del intervalo I_k que cumpla con la propiedad de que, si $g \in U$, $\|g(\widetilde{f|_{I_k}}) - \widetilde{f|_{I_k}}\| < \varepsilon$. Veamos la existencia de un tal U.

Sea $\{u_\lambda\}$ una G-unidad aproximada para el par $(A, \ker\varphi)$ (ver Definición 1.1.4). Recordemos que cumple

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|g(u_\lambda) - u_\lambda\| = 0$$

y que dicha convergencia es uniforme sobre compactos de G. Sea U un entorno de la identidad con clausura compacta de la identidad en G, de forma que $\|g(f) - f\| < \varepsilon$. Veremos que este entorno sirve pero debemos elegir un levantado con cuidado. Sea $\widetilde{f_0|_I}$ un levantado arbitrario de $f|_I$, y consideramos

$$\widetilde{f|_I} = \widetilde{f_0|_I} - u_\lambda\widetilde{f_0|_I}$$

que también levanta f ya que $u_\lambda \in \ker\varphi$.

Como $\|g(f(t)) - f(t)\| < \varepsilon$, de acuerdo a la norma del cociente, esto quiere decir que para cada t existe un $x_{t,g} \in \ker\varphi$ de forma que

$$\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - x_{t,g}\| < \varepsilon.$$

Más aún, debido a la compacidad de I y la precompacidad de U, podemos tomar finitos $x_1, \ldots, x_n \in A$ y abiertos $V_1, \ldots V_n \subseteq U$,$B_1 \ldots, B_n \subseteq I$ tales que

$$\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - x_i\| < \varepsilon \qquad \forall g \in V_i \text{ y } t \in B_i.$$

Así

$$\begin{aligned}
&\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - u_\lambda \left[g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)}\right] \| = \\
&\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - u_\lambda \left[\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)}\right] - x_i + x_i - u_\lambda x_i + u_\lambda x_i\| \leq \\
&\|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - x_i\| + \|u_\lambda\| \|g(\widetilde{f_0|_I(t)}) - \widetilde{f_0|_I(t)} - x_i\| + \|x_i - u_\lambda x_i\|.
\end{aligned}$$

Tomando λ lo suficientemente grande, podemos acotar la expresión anterior por 3ε. De esta forma:

$$\begin{aligned}
&\|g(\widetilde{f|_I}) - \widetilde{f|_I}\| = \|g(\widetilde{f_0|_I - u_\lambda f_0|_I}) - \widetilde{f_0|_I + u_\lambda f_0|_I}\| \\
&= \|g(\widetilde{f_0|_I - u_\lambda f_0|_I}) - \widetilde{f_0|_I + u_\lambda f_0|_I} + u_\lambda g(\widetilde{f_0|_I}) - u_\lambda g(\widetilde{f_0|_I})\| \\
&= \|g(\widetilde{f_0|_I}) - \widetilde{f_0|_I} - u_\lambda \left[g(\widetilde{f_0|_I} - \widetilde{f_0|_I})\right] - (g(u_\lambda) - u_\lambda) g(\widetilde{f_0|_I})\| \\
&\leq \|g(\widetilde{f_0|_I}) - \widetilde{f_0|_I} - u_\lambda \left[g(\widetilde{f_0|_I} - \widetilde{f_0|_I})\right] \| + \|(g(u_\lambda) - u_\lambda)\| \|g(\widetilde{f_0|_I})\|.
\end{aligned}$$

Tomando λ lo suficientemente grande podemos conseguir que

$$\|g(\widetilde{f_0|_I}) - \widetilde{f_0|_I} - u_\lambda \left[g(\widetilde{f_0|_I} - \widetilde{f_0|_I})\right] \| + \|(g(u_\lambda) - u_\lambda)\| \|g(\widetilde{f_0|_I})\| < 4\varepsilon.$$

Dado que ε era arbitrario, el entorno U y el levantado $\tilde{f}|_I$ cumplen lo que buscábamos. □

Corolario 1.2.8. $\mathfrak{T}_0$ *es exacto.*

Demostración. Esto se deduce de que la sucesión exacta del teorema anterior

$$0 \to \mathfrak{T} \ker \varphi \xrightarrow{i_*} \mathfrak{T} A \xrightarrow{\varphi_*} \mathfrak{T} B \to 0$$

se restringe bien a los ideales $\mathfrak{T}_0$ correspondientes. □

Corolario 1.2.9. $\mathfrak{A}$ *es exacto.*

Demostración. Dado que $\mathfrak{T}_0$ y $\mathfrak{T}$ son exactos, se deduce del lema de los nueve aplicado al del diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{T}_0 A \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{T}_0 B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T} \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{T} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{T} B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{A} \ker\varphi \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A} A \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A} B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}.$$

$\square$

Lema 1.2.10. $\mathfrak{A}$ *preserva pullbacks: si* $\varphi_1 : B_1 \to B$ *y* $\varphi_2 : B_2 \to B$ *son* $*$*-morfismos equivariantes, el morfismo natural*

$$\mathfrak{A}(B_1 \oplus_B B_2) \to \mathfrak{A}B_1 \oplus_{\mathfrak{A}B} \mathfrak{A}B_2,$$

dado por $(t \mapsto f_1(t) \oplus f_2(t)) \mapsto f_1 \oplus f_2$ *es un isomorfismo.*

Demostración. Consideremos primero el morfismo natural

$$\begin{aligned} C_b([1,+\infty), B_1) \oplus_{C_b([1,+\infty),B)} C_b([1,+\infty), B_2) &\longrightarrow C_b([1,+\infty),(B_1 \oplus_B B_2)) \\ f_1 \oplus f_2 &\longmapsto (t \mapsto f_1(t) \oplus f_2(t)). \end{aligned}$$

Afirmamos que es un isomorfismo. En efecto, es claramente inyectivo y además, componiendo con las proyecciones

$$B_1 \oplus_B B_2 \to B_1 \qquad B_1 \oplus_B B_2 \to B_2,$$

para cada función en $C_b([1,+\infty),(B_1 \oplus_B B_2))$, se obtienen funciones en $C_b([1,+\infty), B_1)$ y $C_b([1,+\infty), B_2)$ cuyo par pertenece al pullback. Esto muestra la suryectividad. Este isomorfismo se restringe bien a $\mathfrak{T}$ y a $\mathfrak{T}_0$ ya que el morfismo preserva la acción de G (aunque no sea continua sobre $C_b([1,+\infty), -)$). Entonces tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 B_1 \oplus_{\mathfrak{T}_0 B} \mathfrak{T}_0 B_2 \arrow[r] & \mathfrak{T} B_1 \oplus_{\mathfrak{T} B} \mathfrak{T} B_2 \arrow[r] & \mathfrak{A} B_1 \oplus_{\mathfrak{A} B} \mathfrak{A} B_2 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0(B_1 \oplus_B B_2) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \mathfrak{T}(B_1 \oplus_B \mathfrak{T} B_2) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & \mathfrak{A}(B_1 \oplus_B B_2) \arrow[r] \arrow[u, dotted, "\cong"] & 0
\end{tikzcd}.$$

Por el lema de los cinco, el morfismo derecho es un isomorfismo. Esto concluye la demostración. □

Teorema 1.2.11. *La relación de n-homotopía de morfismos n-asintóticos equivariantes es de equivalencia.*

Demostración. La reflexividad y la simetría son inmediatas. Probamos a continuación la transitividad. Consideremos dos morfismos asintóticos equivariantes φ_0 y φ_1 de A en B, que son n-homotópicos via una homotopía $\Phi_1 : A \to \mathfrak{A}^n I_1 B$ y otro morfismo φ_2 que es n-homotópico a φ_1 vía una homotopía $\Phi_2 : A \to \mathfrak{A}^n I_2 B$. Reparametrizando, podemos suponer que I_1 y I_2 son intervalos consecutivos, de manera que Φ_1 y Φ_2 determinan un $*$-morfismo Φ de A en el pullback

$$\mathfrak{A}^n I_1 B \oplus_{\mathfrak{A}^n B} \mathfrak{A}^n I_2 B = \mathfrak{A}^n (I_1 B \oplus_B I_2 B) = \mathfrak{A}^n (I_1 \cup I_2) B$$

Aquí los pullbacks están dados por las evaluaciones en el punto que I_1 e I_2 comparten. El morfismo Φ es una n-homotopía de φ_0 en φ_2. □

La categoría de homotopía de GC*-álgebras

El objetivo de lo que sigue, como dijimos al comienzo de la sección, es establecer una categoría cuyos morfismos sean las clases de homotopía de morfismos asintóticos equivariantes entre GC*-álgebras. A la categoría de GC*-álgebras con los $*$-morfismos equivariantes como su clase de morfismos la notamos $G\mathcal{C}^*$. Cuando G es el grupo trivial, obtenemos la categoría de C*-álgebras $\mathcal{C}^*$. Sea $[[A, B]]_n$ el conjunto de clases de n-homotopía de morfismos n-asintóticos equivariantes. Observemos que este conjunto siempre tiene un elemento distinguido dado por el morfismo nulo. A continuación construimos el colímite $[[A, B]]$ de todos los conjuntos $[[A, B]]_n$. Consideremos el morfismo $\alpha_A : A \to \mathfrak{A}A$ definido en 1.2.4. Aplicando $\mathfrak{A}^n$ a este morfismo conseguimos un morfismo $\mathfrak{A}^n(\alpha_A) : \mathfrak{A}^n A \to \mathfrak{A}^{n+1} A$. Dado un $*$-morfismo equivariante $A \to \mathfrak{A}^n B$, podemos componerlo tanto con $\mathfrak{A}^n(\alpha_B)$ como con $\alpha_{\mathfrak{A}^n B}$. Esto da dos maneras diferentes de vincular $[[A, B]]_n$ con $[[A, B]]_{n+1}$, componiendo con dichos morfismos. Mostraremos que estas dos composiciones son homotópicas, pero antes requerimos del siguiente lema.

Lema 1.2.12. *Sean A y B GC^*-álgebras.*

i) Si φ_0,$\varphi_1 : A \to \mathfrak{A}^k B$ son $*$-morfismos equivariantes k-homotópicos entonces $\mathfrak{A}^j(\varphi_0)$ y $\mathfrak{A}^j(\varphi_1)$ son $(j + k)$-homotópicos.

ii) Si φ_0,$\varphi_1 : A \to \mathfrak{A}^k(\mathfrak{A}^j B)$ son $*$-morfismos equivariantes k-homotópicos, entonces son $(j + k)$-homotópicos.

Demostración. El item *i)* se deduce de aplicar $\mathfrak{A}^j$ a la homotopía.

Para *ii)*, primero construimos un $*$-morfismo equivariante $I\mathfrak{A}B \to \mathfrak{A}IB$, dado por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & I\mathfrak{T}_0 B \arrow[r] \arrow[d] & I\mathfrak{T}B \arrow[r] \arrow[d] & I\mathfrak{A}B \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 IB \arrow[r] & \mathfrak{T}IB \arrow[r] & \mathfrak{A}IB \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aqui las dos flechas verticales sólidas están dadas por mandar una función $f : I \to \mathfrak{T}B$ a la función $\hat{f} : [1, +\infty) \to IB$ dada por $\hat{f}(t)(s) = f(s)(t)$. Observemos ahora que este morfismo cumple que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
I\mathfrak{A}B \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ev}_t"] & \mathfrak{A}IB \arrow[d, "\mathfrak{A}(\mathrm{ev}_t)"] \\
\mathfrak{A}B \arrow[r, equal] & \mathfrak{A}B
\end{tikzcd}$$

conmuta. Repitiendo este procedimiento obtenemos un morfismo $I\mathfrak{A}^j B \to \mathfrak{A}^j IB$. Entonces dada una k-homotopía $\varphi : A \to \mathfrak{A}^k I(\mathfrak{A}^j B)$, componiendo conseguimos una $(j+k)$-homotopía $A \to \mathfrak{A}^k \mathfrak{A}^j IB$. $\square$

Proposición 1.2.13. *Las funciones*

$$\mathfrak{A}^n(\alpha_B)\circ - : [[A, B]]_n \to [[A, B]]_{n+1}$$

$$\alpha_{\mathfrak{A}^n B}\circ - : [[A, B]]_n \to [[A, B]]_{n+1}$$

son iguales.

Demostración. Alcanza con ver que $\mathfrak{A}^n(\alpha_B)$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^n B}$ son $(n+1)$-homotópicas. Considerando la cadena de morfismos

$$\alpha_{\mathfrak{A}^n B}, \mathfrak{A}(\alpha_{\mathfrak{A}^{n-1} B}), \mathfrak{A}^2(\alpha_{\mathfrak{A}^{n-2} B}), \ldots, \mathfrak{A}^n(\alpha_B)$$

y usando el lema anterior, alcanza con mostrar que para cualquier GC^*-álgebra B , los morfismos $\mathfrak{A}(\alpha_B), \alpha_{\mathfrak{A}B} : \mathfrak{A}B \to \mathfrak{A}^2 B$ son 2-homotópicos. Estas funciones son las inducidas por $\alpha_{\mathfrak{T}B}$ y $\mathfrak{T}(\alpha_B) : \mathfrak{T}B \to \mathfrak{T}^2 B$ que están definidas por

$$\alpha_{\mathfrak{T}B}(f)(s, t) = f(t)$$

$$\mathfrak{T}(\alpha_B)(f)(s, t) = f(s).$$

Consideramos entonces la 2-homotopía $H : \mathfrak{A}B \to \mathfrak{A}^2 IB$ dada por

$$H(f)(t_1, t_2, s) = \begin{cases} f(t_1) \text{ si } t_1 > st_2 \\ f(st_2) \text{ si } t_1 \leq st_2. \end{cases}$$

Cuando $s = 0$ obtenemos $\mathfrak{A}(\alpha_B)$; cuando $s = 1$, en el caso que $t_1 \leq t_2$ sucede que $H(t_1, t_2, 1)$ coincide con $\alpha_{\mathfrak{A}B}$. Ahora observemos que si D es una GC*-álgebra cualquiera, como notamos en la Observación 1.2.2, la clase de una función f en $\mathfrak{A}D$ está dada por la identificación bajo la seminorma

$$\|f - g\|_{\mathfrak{A}} = \limsup_{t\to\infty} \|f(t) - g(t)\|.$$

Si a la vez, $D = \mathfrak{A}B$, esto se traduce en

$$\|f - g\|_{\mathfrak{A}^2} = \limsup_{t_1\to\infty} \|f(t_1) - g(t_1)\|_{\mathfrak{A}} = \limsup_{t_1\to\infty} \limsup_{t_2\to\infty} \|f(t_1, t_2) - g(t_1, t_2)\|.$$

Entonces, dado que para t_1 fijo y t_2 lo suficientemente grande, $H(t_1, t_2, 1)$ y $\alpha_{\mathfrak{A}B}$ coinciden, al pasar al cociente en $\mathfrak{A}^2$ coinciden. □

Definición 1.2.14. *Llamamos $[[A, B]]$ al colímite de conjuntos punteados dado por el sistema*

$$[[A, B]]_0 \overset{\alpha_B}{\to} [[A, B]]_1 \overset{\alpha_{\mathfrak{A}B}}{\to} [[A, B]]_2 \overset{\alpha_{\mathfrak{A}^2B}}{\to} \dots$$

Proposición 1.2.15. *Si $\varphi : A \to \mathfrak{A}^j B$ y $\psi : B \to \mathfrak{A}^k C$ son $*$-morfismos equivariantes, la asignación*

$$(\varphi, \psi) \mapsto \mathfrak{A}^j(\psi) \circ \varphi$$

Define una ley de composición

$$[[A, B]] \times [[B, C]] \to [[A, C]]$$

que hace de los conjuntos $[[-, -]]$ los morfismos de una categoría, cuyos morfismos identidad están dados por las clases de los morfismos identidad correspondientes.

Demostración. Veamos primero que la composición no depende de la clase de homotopía ni de la clase del colímite. Sean entonces φ como en el enunciado y $\tilde{\varphi}$ otro homotópico a él, entonces componiendo ambos con ψ (del enunciado), obtenemos morfismos homotópicos $\psi \circ \varphi$ y $\psi \circ \tilde{\varphi}$ utilizando la homotopía original compuesta con el morfismo dado por $\mathfrak{A}I(\psi) : \mathfrak{A}IB \to \mathfrak{A}IC$.

El hecho que no depende de la clase del colímite es simplemente consecuencia del siguiente diagrama conmutativo y la posterior identificación en el colímite $[[A, C]]$.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{A}^n B \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_A} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha_{\mathfrak{A}^n B}} \\ \mathfrak{A}A & \xrightarrow[\mathfrak{A}(\varphi)]{} & \mathfrak{A}^{n+1} B \end{array}$$

Fijando ahora ψ, el hecho que no depende de su clase de homotopía es trivial utilizando la misma homotopía y aplicando $\mathfrak{A}^j$. Para ver que no depende de la clase en el colímite, se utiliza la Proposición 1.2.13.

Para la segunda afirmación sólo debemos ver que se satisface la asociatividad, pues es claro que las clases de las identidades funcionan como identidades para esta composición. A su vez esto se deduce de que si $\theta : C \to \mathfrak{A}^l D$ es un $*$-morfismo equivariante, ambas composiciones resultan en

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathfrak{A}^j B \xrightarrow{\mathfrak{A}^j \psi} \mathfrak{A}^{j+k} C \xrightarrow{\mathfrak{A}^{j+k}\theta} \mathfrak{A}^{j+k+l} D$$

□

A la categoría donde los objetos son las GC*-álgebras y los morfismos son los conjuntos punteados $[[-,-]]$ la llamamos la *categoría de homotopía de morfismos asintóticos equivariantes* y la notamos $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$. Hay un funtor canónico $G\mathcal{C}^* \to \mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$ que es la identidad en los objetos y manda un $*$-morfismo equivariante a su clase de 0-homotopía. Hacemos una observación importante: esta teoría amplía la originalmente dada por Connes y Higson en [CH90-2]. La ventaja aquí es que estamos trabajando con todas las GC*-álgebras y no sólo las separables, lo cual facilita la definición de la composición de morfismos, de cualquier manera en el caso separable se tiene este resultado que utilizaremos luego.

Teorema 1.2.16. *Si A y B son GC*-álgebras separables, entonces, la función canónica:*

$$[[A,B]]_1 \to [[A,B]]$$

es una biyección.

Demostración. Ver [GHT00, Teorema 2.16] □

1.3. Construcciones en $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$

Desarrollamos en esta sección extensiones del producto tensorial y del producto cruzado a la categoría $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$. Establecemos como referencia a [WO93, Apéndice T] para muchas de las propiedades al respecto de productos tensoriales que utilizaremos a lo largo del trabajo. En lo que sigue notamos como $\otimes$ al producto tensorial maximal de C*-álgebras. La acción de G pasa naturalmente al producto tensorial de dos GC*-álgebras por la acción diagonal, por lo que se puede extender el producto tensorial a $G\mathcal{C}^*$. El primer objetivo será establecer una extensión del producto tensorial para morfismos asintóticos y para eso requerimos varios resultados previos.

En general, si $F : G\mathcal{C}^* \to G\mathcal{C}^*$ es un funtor, y $f \in F(IB)$, siempre podemos considerar $\hat{f} : I \to F(B)$ dado por $t \mapsto F(\mathrm{ev}_t)(f)$. Pero esta función no es necesariamente continua con respecto a t, es decir, puede no ser un elemento de $IF(B)$.

Definición 1.3.1. *Decimos que un funtor $F : G\mathcal{C}^* \to G\mathcal{C}^*$ es* continuo *si para cualquier intervalo real I (no necesariamente cerrado), la familia ev_t induce un $*$-morfismo equivariante natural*

$$F(C_b(I,B)_G) \xrightarrow{\widehat{(-)}} C_b(I,F(B))_G, \quad \widehat{f}(t) = F(\mathrm{ev}_t)(f).$$

Aqui $C_b(I,-)_G$ es la restricción a los elementos G-continuos de $C_b(I,-)$.

Lema 1.3.2. *Sea D una GC*-álgebra. Entonces el funtor $-\otimes D : GC^* \to GC^*$ es continuo.*

Demostración. Primero veamos como se comporta la transformación de la definición sobre el producto tensorial algebraico (que denotamos $\odot$).

$$\begin{aligned} C_b(I,A)_G \odot D &\longrightarrow C_b(I, A\otimes D) \\ f\otimes d &\longmapsto (t \mapsto f(t)\otimes d). \end{aligned}$$

Veamos que $f(t)\otimes d$ es un elemento G-continuo. Sea $\varepsilon > 0$. como f y d son G-continuos, existe un entorno U de la identidad de G tal que

$$\|f - g(f)\| < \frac{\varepsilon}{2\|d\|} \text{ y } \|d - g(d)\| < \frac{\varepsilon}{2\|f\|} \qquad \forall g \in U.$$

Entonces si $g \in U$, tenemos para cada $t \in I$:

$$\begin{aligned} &\|g(f(t)\otimes d) - f(t)\otimes d\| = \|g(f(t))\otimes g(d) - f(t)\otimes d\| \\ &= \|g(f(t))\otimes g(d) - f(t)\otimes d + g(f(t))\otimes d - g(f(t))\otimes d\| \\ &\leq \|g(f(t))\otimes (g(d)-d)\| + \|(g(f(t)) - f(t))\otimes d\| \\ &\leq \|g(f(t))\|\|(g(d)-d)\| + \|(g(f(t)) - f(t))\|\|d\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Extendiendo por linealidad, es claro que es un $*$-morfismo, como también así la G equivarianza. Por otro lado

$$\|f(t)\otimes d\| = \|f(t)\|\|d\| \leq \|f\|\|d\| = \|f\otimes d\|.$$

Esto indica que el morfismo definido antes es contractivo. Usando la propiedad universal del producto tensorial maximal, podemos extender el morfismo a todo $C_b(I,A)_G \otimes D$. La naturalidad es obvia. □

Corolario 1.3.3. *Hay transformaciones naturales*

$$\mathfrak{T}(-)\otimes D \Rightarrow \mathfrak{T}(-\otimes D) : GC^* \to GC^*$$

y

$$\mathfrak{T}_0(-)\otimes D \Rightarrow \mathfrak{T}_0(-\otimes D) : GC^* \to GC^*.$$

Corolario 1.3.4. *Hay una transformación natural*

$$\mathfrak{A}(-)\otimes D \Rightarrow \mathfrak{A}(-\otimes D) : GC^* \to GC^*$$

Demostración. Como el producto tensorial maximal es exacto [Was94], tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0 A\otimes D \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{T}A\otimes D \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A}A\otimes D \arrow[r] \arrow[d, dotted] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{T}_0(A\otimes D) \arrow[r] & \mathfrak{T}(A\otimes D) \arrow[r] & \mathfrak{A}(A\otimes D) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd},$$

donde las flechas verticales sólidas son las transformaciones naturales dadas antes y la punteada es la inducida por éstas. $\square$

De la misma manera que enunciamos esto para "el lado derecho", tenemos su análogo izquierdo

Lema 1.3.5. *Hay una transformación natural*

$$D \otimes \mathfrak{A}(-) \Rightarrow \mathfrak{A}(D \otimes -) : G\mathcal{C}^* \to G\mathcal{C}^*.$$

Si tenemos un $*$-morfismo equivariante $\varphi : A \to \mathfrak{A}B$, podemos componer

$$A \otimes D \overset{\varphi \otimes id_D}{\longrightarrow} \mathfrak{A}B \otimes D \longrightarrow \mathfrak{A}(B \otimes D).$$

En general ignoramos la composición con la transformación natural y notamos a este morfismo asintótico $\varphi \otimes id_D$. Inductivamente podemos generalizar esta construcción para todo $\mathfrak{A}^n$. También podemos hacer lo mismo del lado izquierdo. Para finalmente extender este producto tensorial de morfismos asintóticos, falta ver la compatibilidad entre los dos "lados", que está dada por el siguiente lema.

Lema 1.3.6. *Sean $\varphi : A \to \mathfrak{A}^m B$ y $\psi : C \to \mathfrak{A}^n D$ $*$-morfismos equivariantes. Entonces las composiciones*

$$A \otimes C \overset{\varphi \otimes id_C}{\longrightarrow} \mathfrak{A}^m(B \otimes C) \overset{\mathfrak{A}^n(id_B \otimes \psi)}{\longrightarrow} \mathfrak{A}^{m+n}(B \otimes D)$$

y

$$A \otimes C \overset{id_A \otimes \psi}{\longrightarrow} \mathfrak{A}^n(A \otimes D) \overset{\mathfrak{A}^n(\varphi \otimes id_D)}{\longrightarrow} \mathfrak{A}^{m+n}(B \otimes D)$$

son homotópicas.

Demostración. Consideremos el morfismo dado por el producto tensorial

$$\varphi \otimes \psi : A \otimes C \to \mathfrak{A}^m B \otimes \mathfrak{A}^n D.$$

Observemos que tenemos los siguientes diagramas conmutativos. Por un lado tenemos

$$\begin{tikzcd}
 & \mathfrak{A}^n(B \otimes C) \arrow[dr, "\mathfrak{A}^n(id_B \otimes \psi)"] & \\
A \otimes C \arrow[ur, "\varphi \otimes id_C"] \arrow[r, "\varphi \otimes \psi"'] & \mathfrak{A}^m(B) \otimes \mathfrak{A}^n(D) \arrow[r, "\eta"'] & \mathfrak{A}^{n+m}(A \otimes D)
\end{tikzcd}$$

Aquí η es el morfismo inducido por la composición

$$\mathfrak{A}^m B \otimes \mathfrak{A}^n D \to \mathfrak{A}^m(B \otimes \mathfrak{A}^n D) \to \mathfrak{A}^m \mathfrak{A}^n B \otimes D.$$

Y por otro tenemos

$$\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "\varphi \otimes \psi"] \arrow[dr, "id_A \otimes \psi"'] & \mathfrak{A}^m(B) \otimes \mathfrak{A}^n(D) \arrow[r, "\mu"] & \mathfrak{A}^{n+m}(A \otimes D) \\
& \mathfrak{A}^n(A \otimes D) \arrow[ur, "\mathfrak{A}^n(\varphi \otimes id_D)"'] &
\end{tikzcd}.$$

Aquí μ es el morfismo inducido por la composición

$$\mathfrak{A}^m B \otimes \mathfrak{A}^n D \to \mathfrak{A}^n(\mathfrak{A}^m B \otimes D) \to \mathfrak{A}^m \mathfrak{A}^n B \otimes D.$$

Si vemos que η,$\mu : \mathfrak{A}^m B \otimes \mathfrak{A}^n D \to \mathfrak{A}^{n+m}(B \otimes D)$ son $n+m$-homotópicas, obtenemos lo que queremos. Haciendo un paso inductivo, sólo tenemos que probar el caso $n = m = 1$, esto es, debemos ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{A}B \otimes \mathfrak{A}D \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{A}(B \otimes \mathfrak{A}D) \arrow[d] \\
\mathfrak{A}(\mathfrak{A}B \otimes D) \arrow[r] & \mathfrak{A}^2(B \otimes D)
\end{tikzcd},$$

donde las flechas son las inducidas por las transformaciones naturales del lema anterior, conmuta. El camino superior está dado por

$$f \otimes h \mapsto f(t) \otimes h \mapsto f(t) \otimes h(s),$$

mientras que el inferior es

$$f \otimes h \mapsto f \otimes h(t) \mapsto f(s) \otimes h(t).$$

Entonces si utilizamos las homotopías del Lema 1.2.13 para las coordenadas h y f por separado y luego las concatenamos, obtenemos que ambas composiciones son homotópicas. □

Corolario 1.3.7. *Hay un bifuntor $\otimes : \mathfrak{A}G\mathcal{C} \times \mathfrak{A}G\mathcal{C} \to \mathfrak{A}G\mathcal{C}$ que es el producto tensorial de C*-álgebras en los objetos y a un par de morfismos (φ, ψ) le asigna la composición $(id \otimes \psi) \circ (\varphi \otimes id)$ (o equivalentemente $(\varphi \otimes id) \circ (id \otimes \psi)$)*

Observemos que en la construcción anterior se utilizaron dos propiedades del producto tensorial maximal: la exactitud y la continuidad. Si bien la segunda condición se extiende a la mayoría de los casos interesantes, la exactitud es restrictiva. Por ejemplo, no se extiende al caso del producto tensorial minimal, por lo que para reproducir esta construcción requerimos restringirnos a la subcategoría plena de $G\mathcal{C}^*$ dada por las C*-álgebras exactas (es decir, aquellas que son "playas" para el producto tensorial minimal). Las demostraciones de los teoremas análogos son idénticas.

Ya observamos al principio de este capítulo que el funtor $C^*(G, -)$ es exacto; para reproducir la construcción anterior, sólo debemos ver la continuidad.

Observación 1.3.8. *El funtor $C^*(G,-) : G\mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$ tiene por codominio a la categoría de C*-álgebras, por lo que la condición de continuidad se traduce a*

$$C^*(G, C_b(I,A)_G)) \xrightarrow{\widehat{(-)}} C_b(I, C^*(G,A)), \quad \widehat{f}(t) = F(\mathrm{ev}_t)(f).$$

Lema 1.3.9. *El funtor $C^*(G,-)$ es continuo.*

Demostración. Si $f \in C_c(G, C_b(I,A)_G)$, se tiene un elemento $\hat{f} \in C_b(I, C_c(G,A))$ dado por

$$\hat{f}(t)(g) = f(g)(t).$$

Primero veamos la buena definición. Para cada t el soporte de $\hat{f}(t)$ está incluido en el soporte de f, por lo que es compacto. El hecho que esto define un $*$-morfismo es obvio, salvo tal vez el hecho que $\hat{f}$ es una función continua con respecto a t. Para eso, consideramos $t, t' \in I$ observamos que

$$\|\hat{f}(t) - \hat{f}(t')\| = \|\mathrm{ev}_t \circ f - \mathrm{ev}_{t'} \circ f\| = \|f(-)(t) - f(-)(t')\|.$$

Usando ahora que f era originalmente continua y la compacidad del soporte, obtenemos finitos abiertos $U_1, \ldots, U_k$ de G, de forma que si $\|t - t'\| < \delta_i$ entonces $\|f(g)(t) - f(g)(t')\| < \varepsilon$ para cada $g \in U_i$, tomando δ como el mínimo de los δ_i, tenemos entonces que si $|t - t'| < \delta$ entonces

$$\|f(-)(t) - f(-)(t')\| < \varepsilon$$

Por lo tanto $\hat{f}$ es continua. Finalmente, el hecho de que el morfismo se extiende a todo el producto cruzado y es continua, se remite a la propiedad universal del producto cruzado. □

Repitiendo la construcción del producto tensorial obtenemos lo siguiente.

Corolario 1.3.10. *Hay un funtor, llamado el* funtor de descenso*, de $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$ en $\mathfrak{A}\mathcal{C}^*$, que es el producto cruzado con G en los objetos y a la clase de homotopía de un $*$-morfismo equivariante $\varphi : A \to \mathfrak{A}^k B$, le asigna la composición:*

$$C^*(G,A) \xrightarrow{\varphi} C^*(G, \mathfrak{A}^k B) \to \mathfrak{A}^k(C^*(G,B)).$$

Ambas construcciones que realizamos para el producto cruzado completo pueden hacerse para el producto cruzado reducido aunque nuevamente tenemos problemas con la exactitud. Para eso nos debemos restringirnos a grupos *C*-exactos*, es decir, los grupos para los cuales el funtor $C^*_{\mathrm{red}}(G,-)$ es exacto. Nuevamente, para este caso, los resultados análogos poseen demostraciones idénticas.

Capítulo 2

Extensiones de GC*-álgebras

El objetivo de este capítulo es analizar algunas de las construcciones clásicas en teoría de homotopía a partir de extensiones de GC*-álgebras y con su relación con los morfismos asintóticos equivariantes. En particular, realizamos la construcción del morfismo de Connes-Higson. En este capítulo, según el contexto, utilizamos las expresiones "sucesión exacta corta" y "extensión" de manera intercambiable.

2.1. La construcción de Connes-Higson

Una de las principales razones por la cual es útil la introducción de los morfismos asintóticos refiere a la siguiente construcción. Ésta fue hecha originalmente en [CH90-1] en el contexto no-equivariante.

Recordemos que la *suspensión* de una C*-álgebra A es

$$\Sigma A = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Escibirmos por lo general $\Sigma = \Sigma\mathbb{C}$. Notemos que en particular $\Sigma A = \Sigma \otimes A$.

Teorema 2.1.1 (Construcción de Connes-Higson)**.** *Sean*

$$0 \to \ker\varphi \to A \xrightarrow{\theta} B \to 0$$

una sucesión exacta de GC-álgebras* separables *y* $\{u_t\}$ *una unidad aproximada para el par* $(A, \ker\theta)$*. Entonces existe un morfismo asintótico equivariante* $\sigma : \Sigma B \to \mathfrak{A}\ker\theta$ *de modo tal que para toda sección* $s : B \to A$ *(no necesariamente equivariante ni continua) de* θ*, la clase de* $\sigma(f \otimes a)$ *en* $\mathfrak{A}\ker\theta$ *coincide con la clase de la función*

$$h(t) = f(u_t)s(a).$$

Demostración. Probaremos en realidad algo ligeramente más fuerte que nos será útil a la hora de probar la Proposición 2.1.4. Sea J_0 una C*-subálgebra de $\ker\theta$ y sea $s : B \to A_0 \subseteq A$ una sección de θ de forma que $s : B \to A_0$ es un $*$-morfismo equivariante módulo J_0, es decir, s es lineal, multiplicativa, preserva la involución y la acción de G, salvo tal vez un elemento que pertenece a J_0. Supongamos además que $[A_0, J_0] \subseteq J_0$ y que $\{u_t\}$ es una unidad aproximada para el par (A_0, J_0). Entonces podemos construir σ como en el enunciado utilizando esta unidad aproximada y esta sección. El enunciado es el caso $J_0 = \ker\varphi$ y $A_0 = A$.

Para cada tensor elemental $f \otimes a \in \Sigma \otimes A = \Sigma A$ definimos la función en $\mathfrak{T}J_0$

$$h(f,a)(t) = f(u_t)s(a).$$

Veamos que en efecto $h(f,a)$ pertenece a $\mathfrak{T}J_0$. En primer lugar es continua con respecto a t ya que la asignación $t \mapsto u_t$ es continua según la Definición 1.1.5 ítem *iv)*. Por otro lado es un elemento G-continuo de $C_b([1,+\infty), J_0)$ por el Lema 1.1.7 ítem *iii)*. Si notamos el producto tensiorial algebraico como $\odot$, afirmamos que podemos extender h a un $*$-morfismo

$$\begin{aligned} \Sigma \odot A &\longrightarrow \mathfrak{A}\ker\theta \\ f \otimes a &\longmapsto h(f,a) \end{aligned}$$

Para esto debemos ver que es lineal en cada coordenada, que preserva la involución y que preserva el producto. Es claro que la asignación es lineal con respecto a f. Veamos que es lineal con respecto a la coordenada a. Observemos que si $a, b \in B$, entonces $s(a+b) - s(a) - s(b)$ es un elemento de J_0. Debido al ítem *iv)* del Lema 1.1.7, se sigue que

$$\lim_{t\to\infty} f(u_t)(s(a+b) - s(a) - s(b)) = 0.$$

Esto nos dice que $h(f, a+b)$ y $h(f,a) + h(f,b)$ tienen la misma clase en $\mathfrak{A}J_0$. Por la misma razón, si $\lambda \in \mathbb{C}$, sucede que las clases de $h(f, \lambda a)$ y $\lambda h(f,a)$ y las clases de $h(\overline{f}, a^*)$ y $h(f,a)^*$ también coinciden. Finalmente, para ver que preserva el producto debemos ver que que si f_1 y $f_2 \in \Sigma$ y $a, b \in B$ entonces se tiene que $h(f_1 f_2, ab)$ tiene la misma clase que $h(f_1, a)h(f_2, b)$. Para ello calculamos

$$\begin{aligned} &h(f_1f_2, ab)(t) - h(f_1,a)h(f_2,b)(t) = f_1(u_t)f_2(u_t)s(ab) - f_1(u_t)s(a)f_2(u_t)s(b) \\ &= f_1(u_t)f_2(u_t)s(ab) - f_1(u_t)s(a)f_2(u_t)s(b) + f_1(u_t)f_2(u_t)s(a)s(b) - f_1(u_t)f_2(u_t)s(a)s(b) \\ &= f_1(u_t)f_2(u_t)s(ab) - f_1(u_t)[s(a), f_2(u_t)]s(b) - f_1(u_t)f_2(u_t)s(a)s(b) \\ &= f_1(u_t)f_2(u_t)(s(ab) - s(a)s(b)) - f_1(u_t)[s(a), f_2(u_t)]s(b) \end{aligned}$$

Debido a los items *ii)* y *iv)* del Lema 1.1.7, el cálculo anterior concluye que $h(f_1f_2, ab)(t) - h(f_1,a)h(f_2,b)(t)$ tiende a 0 y por lo tanto $h(f_1f_2, ab)$ y $h(f_1,a)h(f_2,b)$ tienen la misma clase en $\mathfrak{A}J_0$. Usando entonces la propiedad universal del producto tensorial maximal, podemos extender el $*$-morfismo anterior a un $*$-morfismo $\sigma : \Sigma \otimes A \to \mathfrak{A}J_0 \subseteq \mathfrak{A}\ker\theta$. Para concluir la demostración debemos ver que esta construcción es independiente de la sección s antes elegida. Si $s' : B \to A_0$ es otra sección, entonces $s - s'$ tiene imagen en J_0, por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} f(u_t)(s(a) - s'(a)) = 0$$

debido al ítem *iv)* del Lema 1.1.7. Esto concluye lo que queríamos. □

Lema 2.1.2. *Sean A,B, $\theta : A \to B$ como en el lema anterior y $\{u_t\}$ y $\{v_t\}$ unidades aproximadas del par $(A, \ker\theta)$. Entonces*

$$w_t(s) = su_t + (1-s)v_t$$

es una unidad aproximada para el par $(IA, I\ker\theta)$.

Demostración. Se sigue del cálculo funcional que los w_t son positivos y crecientes. Es claro por lo tanto que forman una unidad aproximada creciente y acotada de $I\ker\theta$. Veamos que además es continua, cuasi-central para dicho par y G-equivariante. Primero veamos la continuidad. Sean $t, t' \in [1, +\infty)$ y $\varepsilon > 0$, queremos ver que si t y t' están más cerca que algún $\delta > 0$ entonces sucede que $\|w_t - w_{t'}\| < \varepsilon$. Como $s \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|w_t(s) - w_{t'}\| &= \|su_t + (1-s)v_t - su_{t'} - (1-s)v_{t'}\| \\
&= \|s(u_t - u_{t'}) + (1-s)(v_t - v_{t'})\| \\
&\leq \|s(u_t - u_{t'})\| + \|(1-s)(v_t - v_{t'})\| \\
&\leq \|u_t - u_{t'}\| + \|v_t - v_{t'}\|
\end{aligned}$$

Como $\{u_t\}$ y $\{v_t\}$ son continuas, existe δ de forma que si $|t - t'| < \delta$ entonces $\|u_t - u_{t'}\|$,$\|v_t - v_{t'}\| < \varepsilon/2$. El cálculo anterior muestra que dicho δ era el que necesitábamos. Veamos ahora la cuasi-centralidad. Observemos primero que si a es una función de IA entonces las funciones $[a, u_t]$ y $[a, v_t]$ son continuas. En efecto, si $s, s' \in [0,1]$ tenemos que

$$\|[a(s), u_t] - [a(s'), u_t]\| = \|[a(s) - a(s'), u_t]\| \leq 2\|a(s) - a(s')\|.$$

Como a es continua, se sigue del cálculo anterior que $[a, u_t]$ es continua. De la misma manera, $[a, v_t]$ es continua. Veamos ahora que $[a, w_t]$ tiende a 0 si t tiende a infinito. Observemos ahora que

$$\begin{aligned}
\|[a, w_t](s)\| &= \|a(s)(su_t + (1-s)v_t) - (su_t + (1-s)v_t)a(s)\| \\
&= \|s(a(s)u_t - u_t a(s)) + (1-s)(a(s)v_t - v_t a(s))\| \\
&\leq s\|(a(s)u_t - u_t a(s))\| + (1-s)\|(a(s)v_t - v_t a(s))\| \\
&\leq \|[a(s), u_t]\| + \|[a(s), v_t]\|.
\end{aligned}$$

Como $\{u_t\}$ y $\{v_t\}$ son cuasi-centrales, el calculo anterior concluye que para cada s existe un t de forma que $\|[a, w_t](s)\|$ tiende a 0. Sea ahora $\varepsilon > 0$. Como las funciones $[a, u_t]$ y $[a, v_t]$ son continuas, existe $\delta > 0$ de forma que $\|[a, u_t]\|, \|[a, v_t]\| < \varepsilon$. Sea $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_n = 1$ una partición de I, con $|s_i - s_{i+1}| < \delta$. Para cada s_i sea t_i de forma que si $t > t_i$ sucede que $\|[a, w_t](s_i)\| < \varepsilon/2$. Sean T el más grande de todos los t_i y $s \in [0,1]$ arbitrario. Existe i de forma que $\|s - s_i\| < \delta$. Por lo tanto, para todo $t > T$ sucede que

$$\|[a, w_t](s)\| \leq \|[a, w_t](s) - [a, w_t](s_i)\| + \|[a, w_t](s_i)\| < \varepsilon.$$

Lo que concluye la cuasi-centralidad de $\{w_t\}$. Finalmente, veamos la G-equivarianza. Sea $g \in G$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\|g(w_t)(s) - w_t(s)\| &= \|g(su_t + (1-s)v_t) - su_t + (1-s)v_t\| \\
&= \|sg(u_t) + (1-s)g(v_t) - su_t + (1-s)v_t\| \\
&\leq s\|g(u_t) - u_t\| + (1-s)\|g(v_t) - v_t\| \\
&\leq \|g(u_t) - u_t\| + \|g(v_t) - v_t\|.
\end{aligned}$$

Como $\{u_t\}$ y $\{v_t\}$ son cuasi-centrales, el cálculo anterior, muestra que $\{w_t\}$ es cuasi-central. $\square$

Teorema 2.1.3. *La clase de* 1*-homotopía del morfismo* $\sigma : \Sigma A \to \mathfrak{A}\ker\theta$ *que surge de la construcción de Connes-Higson, es independiente de la unidad aproximada elegida.*

Demostración. Sean $\{u_t\}$,$\{v_t\}$ unidades aproximadas del par $(A, \ker\theta)$ y

$$w_t(s) = su_t + (1-s)v_t$$

como en el lema anterior. Sea

$$\tilde{A} = \{f \in IA : \theta(f) \text{ es constante}\}.$$

Si consideramos entonces la sucesión exacta

$$0 \to IJ \to \tilde{A} \xrightarrow{\theta} B \to 0,$$

de la construcción de Connes-Higson utilizando w_t se obtiene un morfismo $\Sigma B \to \mathfrak{A}IJ$. Afirmamos que esta es la homotopía que buscamos. En efecto, como para cada $f \otimes a \in \Sigma B$ se tiene

$$\mathrm{ev}_i(f(w_t)s(a)) = \begin{cases} f(v_t)s(a) & i = 0 \\ f(u_t)s(a) & i = 1 \end{cases},$$

se sigue que es una homotopía entre las construcciones asociadas a u_t y a v_t respectivamente. $\square$

Al morfismo σ asociado a la sucesión exacta

$$0 \to \ker\theta \to A \xrightarrow{\theta} B \to 0$$

lo llamamos *el morfismo de Connes-Higson* de la sucesión.

Proposición 2.1.4. *El morfismo de Connes-Higson es natural con respecto a extensiones en la categoría* $\mathfrak{A}GC^*$*. Es decir, sea*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\theta_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A_0 \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\beta"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker\theta_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\theta_1"] & B_1 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

un diagrama conmutativo con filas son exactas. Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma B_0 \arrow[r, "\sigma_0"] \arrow[d, "\Sigma\gamma"] & \mathfrak{A}\ker\theta_0 \arrow[d, "\mathfrak{A}\alpha"] \\ \Sigma B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & \mathfrak{A}\ker\theta_1 \end{tikzcd}$$

es conmutativo en $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$*. Aquí* σ_0 *y* σ_1 *son los morfismos de Connes-Higson asociados a la primer y segunda fila de* (2.1.4) *respectivamente.*

Demostración. Primero hacemos una reducción que simplificará la demostración. Consideremos el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} A_1 \oplus_{B_1} B_0 \arrow[r] \arrow[d] & B_0 \arrow[d, "\gamma"] \\ A_1 \arrow[r, "\theta_1"] & B_1 \end{tikzcd}.$$

Observando que se tiene un morfismo $\ker\theta_1 \hookrightarrow A_1 \oplus_{B_1} B_0$ dado por incluir en la primera coordenada, podemos construir la sucesión exacta

$$0 \to \ker\theta_1 \to A_1 \oplus_{B_1} B_0 \to B_0 \to 0.$$

Esta sucesión da lugar al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\theta_0 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & A_0 \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\beta\oplus\theta_0"] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker\theta_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & A_1 \oplus_{B_1} B_0 \arrow[r] \arrow[d] & B_0 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker\theta_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\theta_1"] & B_1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Observemos entonces que para las filas central e inferior podemos utilizar la misma unidad aproximada de $\ker\theta_1$ para construir el morfismo de Connes-Higson, por lo tanto es obvio que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Sigma B_0 \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\Sigma\gamma"] & \mathfrak{A}\ker\theta_1 \arrow[d, equal] \\ \Sigma B_1 \arrow[r, "\sigma_1"] & \mathfrak{A}\ker\theta_1 \end{tikzcd}$$

conmuta. Aquí σ es el morfismo que surge de la construcción de Connes-Higson asociado a la fila central. Si vemos que el diagrama asociado a las filas superior y central conmuta salvo 1-homotopía, obtenemos lo que queremos. Reformulamos entonces lo que queremos probar para el caso en que $B_0 = B_1 = B$ y $\gamma = id$. Esto resulta en el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \ker\theta_0 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & A_0 \arrow[r, "\theta_0"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \ker\theta_1 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\theta_1"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Sean $\{u_t^0\}$ y $\{u_t^1\}$ unidades aproximadas para los pares $(\ker\theta_0, A_0)$ y $(\ker\theta_1, A_1)$ respectivamente. Sea
$$w_t(s) = (1-s)\alpha(u_t^0) + su_t^1$$
una función de $I\ker\theta_1$. *No* es necesariamente una unidad aproximada (ya que $\alpha(u_t^0)$ podría no serlo). Sea nuevamente $\tilde{A}_1$ la subálgebra de IA_1 de funciones que son constantes al componer con θ_1. Construimos entonces la siguiente sucesión exacta

$$0 \to I\ker\theta_1 \to \tilde{A}_1 \xrightarrow{(\theta_1)_*} B \to 0.$$

Construimos ahora una sección particular de $(\theta_1)_*$ a partir de una sección arbitraria $s_0 : B \to A_0$ de θ_0, luego componer con α y la inclusión natural de $A_1 \subseteq \tilde{A}_1$ como funciones constantes. Llamamos a dicha sección $s : B \to \tilde{A}_1$. Afirmamos que s es un $*$-morfismo equivariante módulo $\alpha_*(I\ker\theta_0)$. En efecto, para todo $a, b \in B$, $\lambda \in \mathbb{C}$ y $g \in G$ se tiene

$$s(a+\lambda b)-s(a)-s(\lambda b) = \beta(\underbrace{s_0(a+b) - s_0(a) - s_0(\lambda b)}_{\in\ker\theta_0}) = \alpha(s_0(a+b)-s_0(a)-s_0(\lambda b)),$$

$$s(ab) - s(a)s(b) = \beta(\underbrace{s_0(ab) - s_0(a)s_0(b)}_{\in\ker\theta_0}) = \alpha(s_0(ab) - s_0(a)s_0(b)),$$

$$s(a^*) - s(a)^* = \beta(\underbrace{s_0(a^*) - s_0(a)^*}_{\in\ker\theta_0}) = \alpha(s_0(a^*) - s_0(a)^*) \qquad \text{y}$$

$$s(g(a)) - g(s(a)) = \beta(\underbrace{s_0(g(a)) - g(s_0(a))}_{\in\ker\theta_0}) = \alpha(s_0(g(a) - g(s_0(a))).$$

Imitando entonces la Construcción de Connes-Higson 2.1.1, tenemos un morfismo $\tau : \Sigma B \to \mathfrak{A}I\ker\theta_1$ definido en los tensores elementales por

$$\tau(f \otimes a) = f(w_t)s(a).$$

Considerando que

$$\mathrm{ev}_i(f(w_t)s(a)) = \begin{cases} f(\alpha(u_t^0))s(a) & i = 0 \\ f(u_t^1)s(a) & i = 1 \end{cases}$$

y que
$$f(\alpha(u_t^0))s(a) = \alpha(f(u_t^0)s_0(a))$$
junto con el hecho que el morfismo que surge de la construcción de Connes-Higson no depende de la sección utilizada, obtenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Sigma B & \xrightarrow{\sigma_0} & \mathfrak{A}\ker\theta_0 \\ \Big\downarrow{=} & & \Big\downarrow{\mathfrak{A}\alpha} \\ \Sigma B & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathfrak{A}\ker\theta_1 \end{array}$$

conmuta salvo la homotopía τ. □

Las siguientes dos propiedades del morfismo de Connes-Higson permitirán describirlo mejor para algunos casos particulares. Esto a su vez será útil en la siguiente sección.

Proposición 2.1.5. *Sean*

$$0 \to \ker\theta \to A \xrightarrow{\theta} B \to 0$$

una sucesión exacta y $\sigma : \Sigma A \to \mathfrak{A}\ker\theta$ el morfismo de Connes-Higson asociado a ella. Si C es una GC-álgebra entonces el morfismo de Connes-Higson $\sigma_C : \Sigma A \otimes C \to \mathfrak{A}\ker\theta \otimes C$ asociado a la sucesión*

$$0 \to \ker\theta \otimes C \to A \otimes C \xrightarrow{\theta} B \otimes C \to 0$$

es igual a $\sigma \otimes id_C$ en la categoría $\mathfrak{A}GC^*$.

Demostración. Sean $\{u_t\}$ una unidad aproximada para el par $(A, \ker\theta)$ y $\{v_t\}$ una unidad aproximada de C. Afirmamos que $\{u_t \otimes v_t\}$ es una unidad aproximada para el par $(A \otimes C, \ker\theta \otimes C)$. Por cálculo funcional $u_t \otimes v_t$ son positivos y crecientes y es fácil ver que forman una unidad aproximada. El hecho de que es continua, cuasi-central y G-equivariante se deduce fácilmente de la identidad de la norma maximal del producto tensorial
$$\|a \otimes c\| = \|a\|\|c\|.$$
Sea $s : B \to A$ una sección de θ y $s' : B\otimes C \to A\otimes C$ una sección (no necesariamente continua) que cumpla
$$s'(b \otimes c) = s(b) \otimes c.$$
Con estas secciones construimos los morfismos de Connes-Higson σ y σ_C respectivamente. Para ver que $\sigma \otimes id$ y σ_C son iguales alcanza ver que son iguales sobre los tensores elementales $f\otimes a\otimes c$. Entonces alcanza ver que $(f(u_t)a)\otimes c$ y $f(u_t\otimes v_t)(a\otimes c)$ son iguales en $\mathfrak{A}(\ker\theta \otimes C)$. Por el teorema de Stone-Weierstrass alcanza probarlo

para los casos en los que f es polinomial. Como claramente se extiende por linealidad y multiplicación, alcanza probarlo para el caso $f(x) = x(1-x)$. En ese caso se tiene

$$\begin{aligned}
\|f(u_t \otimes v_t)(a \otimes c) - (f(u_t)a) \otimes c\| &= \|(u_t \otimes v_t)(1 - u_t \otimes v_t)(a \otimes c) - (u_t(1-u_t)a) \otimes c\| \\
&= \|(u_t(1-u_t)a \otimes (v_t(1-v_t)c - c)\| \\
&\leq \|(u_t(1-u_t)a\| \|(v_t(1-v_t)c - c)\| \\
&\leq \|(1-u_t)a\| \|(v_t(1-v_t)c - c)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0.
\end{aligned}$$

Entonces $(f(u_t)a) \otimes c$ y $f(u_t \otimes v_t)(a \otimes c)$ son asintóticamente iguales, lo que muestra que en $\mathfrak{A}(\ker\theta \otimes C)$ son iguales. □

Sea A una GC*-álgebra. El *cono* de A es

$$CA = \{f \in C([0,1], A) : f(0) = 0\}.$$

Observación 2.1.6. *El cono de una GC*-álgebra A es lo mismo que el cono del morfismo id : $A \to A$. Tiene la propiedad de ser* contráctil*, en el sentido que la identidad y el morfismo nulo son homotópicos. La homotopía $H : CA \to ICA$ es $H(f)(s)(t) = f(st)$.*

Recordemos también que la inversión $\widetilde{(\cdot)} : \Sigma \to \Sigma$ es el automorfismo dado por recorrer el intervalo de manera inversa:

$$\widetilde{f}(x) = f(1-x).$$

Aunque existe una inclusión natural $\Sigma \subseteq C\mathbb{C}$, utilizamos la inclusión “torcida” dada por $\widetilde{\Sigma} \subseteq C\mathbb{C}$. Esto facilitará algunos tecnicismos.

Proposición 2.1.7. *Sea*

$$0 \to \Sigma \xrightarrow{\widetilde{(\cdot)}} C\mathbb{C} \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} \mathbb{C} \to 0$$

la sucesión exacta natural. Entonces el morfismo de Connes-Higson $\sigma : \Sigma \to \mathfrak{A}\Sigma$ asociado a dicha sucesión es igual a la identidad en la categoría $\mathfrak{A}GC^*$.

Demostración. Construiremos σ a partir de una sección y una unidad aproximada particulares que demostrarán lo que buscamos. Si $t \geq 2$ definimos la función $u_t \in \Sigma$ dada por interpolar linealmente

$$u_t(0) = 0, \qquad u_t(t^{-1}) = 1, \qquad u_t(1-t^{-1}) = 1, \qquad u_t(1) = 0.$$

Si $1 \leq t < 2$, fijamos $u_t = u_2$. Afirmamos que $\{\widetilde{u_t}\}$ es una unidad aproximada para el par $(C\mathbb{C}, \widetilde{\Sigma})$. Los u_t son todos positivos y crecen con t. Por otro lado tienden puntualmente a la función constante 1, de manera que se ve fácilmente que es una unidad aproximada de Σ. Claramente es continua con respecto a t y como son

C*-álgebras conmutativas y con acción de G trivial, se deduce que es una unidad aproximada para el par $(C\mathbb{C}, \Sigma)$. Definimos ahora una sección de $\mathrm{ev}_1 : C\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos la función $s(\lambda)$ como la función dada por interpolar linealmente

$$s(\lambda)(0) = 0, \qquad s(\lambda)(1/3) = 0, \qquad s(\lambda)(2/3) = \lambda, \qquad s(\lambda)(1) = \lambda.$$

La función $s : \mathbb{C} \to C\mathbb{C}$ es una sección de ev_1. Construimos entonces el morfismo de Connes-Higson $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ con $\{u_t\}$ y s. Calculamos entonces $\widetilde{\sigma(f)}$. Si $t \geq 3$ y $0 \leq x \leq 1/3$ se tiene $s(1)(x) = 0$ por lo que

$$\widetilde{\sigma(f)(t)}(x) = f(u_t)(x)s(1)(x) = f(u_t)(x) \cdot 0 = 0.$$

Si $1/3 \leq x \leq 1 - t^{-1}$, se tiene que $u_t(x) = 1$ por lo que

$$\widetilde{\sigma(f)(t)}(x) = f(u_t)(x)s(1)(x) = f(1)s(1)(x) = 0.$$

Finalmente si $1 - t^{-1} \leq x \leq 1$, entonces $u_t(x) = t(1 - x)$ y $s(1)(x) = 1$, por lo que

$$\widetilde{\sigma(f)(t)}(x) = f(u_t)(x)s(1)(x) = f(t(1 - x)).$$

En donde vemos f extendida por 0 en $[0, +\infty)$. Teniendo esta consideración, $\sigma(f)$ es exactamente la clase de la función $f(t(1-x))$. Usando la homotopía $H(f)(s, t, x) = f(s(1 - x) + (1 - s)tx)$ tenemos que $\widetilde{\sigma(f)}$ es homotópico a la clase de la función constantemente $f(1 - x)$, componiendo con la inversión, obtenemos lo que deseábamos. $\square$

2.2. Teoría de homotopía

El objetivo de esta sección es dar algunos resultados que serán de mucha utilidad en el capítulo siguiente. Principalmente, queremos probar un resultado clásico en teoría de homotopía que identifica el núcleo de un epimorfismo con su cono. Esta es una de las razones más importantes para introducir los morfismos asintóticos, ya que permite esta identificación de manera natural salvo suspensión. Comenzamos con algunas construcciones clásicas en teoría de homotopía.

Sea $\theta : A \to B$ un $*$-morfismo equivariante. El *cono de θ* es

$$C_\theta = \{(f, a) \in CB \oplus A : f(1) = \theta(a)\} = CB \oplus_B A.$$

Es decir, es el pullback del diagrama

$$\begin{tikzcd} C_\theta \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\theta"] \\ CB \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] & B \end{tikzcd}$$

.

Observemos que hay una aplicación, que por abuso notamos $\mathrm{ev}_1 : CA \to C_\theta$, dada por $\mathrm{ev}_1(f) = (\theta(f), f(1))$. También, si $J = \ker\theta$, tenemos una inclusión natural $\Sigma J \to CA$. En el caso que θ es sobreyectivo, se tiene una sucesión exacta

$$0 \to \Sigma J \to CA \xrightarrow{\mathrm{ev}_1} C_\theta \to 0. \tag{2.1}$$

Por otro lado, también tenemos una inclusión canónica $J \hookrightarrow C_\theta$ dada por $x \mapsto (0, x)$. Esto está bien definido ya que $\theta(x) = 0$.

Teorema 2.2.1. *La suspensión de la inclusión natural, $\Sigma\iota : \Sigma J \to \Sigma C_\theta$ y el morfismo de Connes-Higson asociado a* (2.1)*, $\sigma : \Sigma C_\theta \to \mathfrak{A}\Sigma J$, son morfismos inversos en la categoría $\mathfrak{A}GC^*$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Sigma J \arrow[r, "\widetilde{(\cdot)}"] \arrow[d, equal] & CJ \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] \arrow[d] & J \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Sigma J \arrow[r, "\widetilde{(\cdot)}"] & CA \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] & C_\theta \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \; . \tag{2.2}$$

Observemos que la fila superior es la sucesión exacta de la Proposición 2.1.7 luego de tensorizar con J. Según la Proposición 2.1.4, obtenemos un diagrama conmutativo en $\mathfrak{A}GC^*$

$$\begin{tikzcd} \Sigma J \arrow[r, "\sigma_J"] \arrow[d, "\Sigma\iota"] & \mathfrak{A}\Sigma J \arrow[d, equal] \\ \Sigma C_\theta \arrow[r, "\sigma"] & \mathfrak{A}\Sigma J \end{tikzcd} \; .$$

Aquí σ_J es el morfismo de Connes-Higson asociado a la primera fila de (2.2). Según la Proposición 2.1.5, se tiene que $\sigma_J = \sigma_{\mathbb{C}} \otimes id_J$, donde $\sigma_{\mathbb{C}}$ es el morfismo de Connes-Higson asociado la la sucesión de la Proposición 2.1.7. Se sigue de esa misma proposición que $\sigma_J = id \otimes id_J = id_{\Sigma J}$. Esto muestra que $\sigma \circ \Sigma\iota = id$. Veamos la otra composición. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Sigma J \arrow[r, "\widetilde{(\cdot)}"] \arrow[d, "\Sigma\iota"] & CA \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] \arrow[d, "\varphi"] & C_\theta \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Sigma C_\theta \arrow[r] & CC_\theta \arrow[r] & C_\theta \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \; . \tag{2.3}$$

Aquí φ es el morfismo definido por $\varphi(f)(t) = (f_t, f(t))$, en donde $f_t(x) = f(x+1-t)$ pensado a f extendida por 0 en fuera del intervalo $[0, 1]$. Observemos que la fila inferior es la sucesión exacta de la Proposición 2.1.7 luego de tensorizar con C_θ. Según la Proposición 2.1.4, obtenemos un diagrama conmutativo en $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$

$$\begin{tikzcd} \Sigma C_\theta \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{A}\Sigma J \arrow[d, "\mathfrak{A}\Sigma\iota"] \\ \Sigma C_\theta \arrow[r, "\sigma_{C_\theta}"] & \mathfrak{A}\Sigma C_\theta \end{tikzcd}.$$

Aquí σ_{C_θ} es el morfismo de Connes-Higson asociado a la segunda fila de (2.3). Al igual que antes, según las Proposiciones 2.1.5 y 2.1.7, obtenemos que $\sigma_{C_\theta} = id$. Esto concluye que $\Sigma\iota \circ \sigma = id$. □

El siguiente resultado describe mejor el morfismo de Connes-Higson en relación al teorema anterior.

Proposición 2.2.2. *Sea $\sigma : \Sigma B \to \mathfrak{A}J$ el morfismo de Connes-Higson asociado a la sucesión exacta*

$$0 \to J \to A \xrightarrow{\theta} B \to 0.$$

Entonces la composición

$$\Sigma^2 A \xrightarrow{\Sigma\sigma} \mathfrak{A}(\Sigma J) \xrightarrow{\mathfrak{A}\Sigma\iota} \mathfrak{A}\Sigma C_\theta$$

es igual a la suspensión de la inclusión canónica $\Sigma^2 A \to \Sigma C_\theta$ en la categoría $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Sigma J \arrow[r] \arrow[d, "\Sigma\iota"] & \Sigma A \arrow[r, "\Sigma\theta"] \arrow[d, "\varphi"] & \Sigma B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Sigma C_\theta \arrow[r] & CC_\theta \arrow[r, "\mathrm{ev}_1"] & C_\theta \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Aquí φ está definida de la misma manera que en la demostración del Teorema 2.2.1. Según el Teorema 2.1.4, se tiene el diagrama conmutativo en $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$

$$\begin{tikzcd} \Sigma^2 A \arrow[r, "\sigma_\Sigma"] \arrow[d] & \mathfrak{A}\Sigma J \arrow[d, "\mathfrak{A}\Sigma\iota"] \\ \Sigma C_\theta \arrow[r, "\sigma_{C_\theta}"] & \mathfrak{A}\Sigma C_\theta \end{tikzcd}.$$

Aquí σ_Σ y σ_{C_θ} son los morfismos de Connes-Higson asociados a la primera y segunda fila respectivamente. Según la Proposición 2.1.5, se tiene que $\sigma_\Sigma = id_\Sigma \otimes \sigma = \Sigma\sigma$ y al igual que antes, debido a las Proposiciones 2.1.5 y 2.1.7, se tiene que $\sigma_{C_\theta} = id$. Entonces el diagrama anterior concluye lo que queríamos. □

2.3. Extensiones

El objetivo de esta sección es introducir las extensiones de GC*-álgebras y su relación con el morfismo de Connes-Higson en un nivel más profundo. Aunque no utilizaremos estos resultados, los explicitamos aquí por motivos de completitud de la teoría. Además, muchos de los resultados a continuación pueden generalizarse a extensiones de más de 1-paso, definiendo una categoría de extensiones con el producto de Yoneda de extensiones. Esta generalización da un contexto apropiado para hacer una "teoría de homotopía estable y homología no conmutativa" universal. En el caso no equivariante, esto último se desarrolla en [Tho03] y en [HLT99]. No seguimos dicho enfoque en este trabajo.

Definición 2.3.1. *Sean A y B dos GC*-álgebras. Dos extensiones de B por A*

$$0 \to A \to C \to B \to 0$$

$$0 \to A \to C' \to B \to 0$$

se dicen:

i) isomorfas *si existe un morfismo $\varphi : C \to C'$ de forma tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & C \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

conmuta, o

ii) homotópicas *si existe un diagrama conmutativo con filas exactas*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & IA \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & C'' \arrow[r] \arrow[u, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C' \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Observemos que en *i)*, se tiene que φ es un isomorfismo por el lema de los cinco.

Lema 2.3.2. *Sean A, B GC^*-álgebras y*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & C \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & B \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & C' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

un isomorfismo de dos extensiones de B por A. Entonces dichas extensiones son homotópicas.

Demostración. Consideremos el *cilindro* de φ, $cyl(\varphi)$ dado por el pullback

$$\begin{tikzcd}
cyl(\varphi) \arrow[r] \arrow[d] & IC' \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
C \arrow[r, "\varphi"] & C'
\end{tikzcd}.$$

Definimos los morfismos

$$\begin{aligned} \gamma : IA &\longrightarrow cyl(\varphi) \\ f &\longmapsto (\alpha' \circ f, \alpha(f(1))) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \delta : cyl(\varphi) &\longrightarrow IB \\ (f, c) &\longmapsto \beta' \circ f \end{aligned}$$

Observemos que γ está bien definida ya que $\alpha' \circ f(1) = \varphi(\alpha f(1))$. Afirmamos que la sucesión

$$0 \to IA \xrightarrow{\gamma} cyl(\varphi) \xrightarrow{\delta} IB \to 0$$

es exacta. En efecto, es claro que γ es inyectiva y δ es sobreyectiva por el Teorema de Bartle-Graves 1.1.10 junto al hecho que φ es un isomorfismo. También, la composición $\delta \circ \gamma$ es nula ya que $\beta' \circ \alpha' = 0$. Finalmente, si $\beta'(f) = 0$, esto significa que la imagen de f en C' está incluida en la imagen de α, por lo que podemos levantar f a A. Entonces podemos formar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & C' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IA \arrow[r, "\gamma"] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & cyl(\varphi) \arrow[r, "\delta"] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0 \circ \pi_1"'] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1 \circ \pi_2"] & IB \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Esto no es exactamente lo que deseamos, ya que no es una homotopía de extensiones. Sin embargo, si tomamos la inclusión $B \subseteq IB$ como las funciones constantes, podemos formar el pullback

$$\begin{tikzcd}
cyl(\varphi) \oplus_{IB} B \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"] \\
cyl(\varphi) \arrow[r, "\gamma"] & IB
\end{tikzcd}.$$

Entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha'"] & C' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IA \arrow[r, "\binom{\gamma}{0}"] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & cyl(\varphi) \oplus_{IB} B \arrow[r] \arrow[u, "(\mathrm{ev}_0 \circ \pi_1, 0)"'] \arrow[d, "(\mathrm{ev}_1 \circ \pi_2, 0)"] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] & C \arrow[r, "\beta"] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

tiene filas exactas y es la homotopía que buscábamos. □

Lema 2.3.3. *La relación de homotopía de extensiones es de equivalencia.*

Demostración. Comenzamos con la transitividad. Sean

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IA \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & C' \arrow[r] \arrow[u, "\varphi_1"'] \arrow[d, "\varphi_2"'] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & IA \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & C'' \arrow[r] \arrow[u, "\psi_2"'] \arrow[d, "\psi_3"'] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dos homotopías. Tomando el pullback

$$\begin{tikzcd} C' \oplus_{C_2} C'' \arrow[r] \arrow[d] & C' \arrow[d, "\varphi_2"] \\ C'' \arrow[r, "\psi_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

conseguimos la homotopía

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_1 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & IA \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & C' \oplus_{C_2} C'' \arrow[r] \arrow[u, "(\varphi_1, 0)"'] \arrow[d, "(0, \psi_3)"'] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & C_3 \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que prueba lo que queremos. La reflexividad se deduce del lema anterior y la simetría se deduce de aplicar la inversión del intervalo I a IA. □

Definición 2.3.4. *Sean A y B dos GC*-álgebras* separables. *Notamos por $ext(A, B)$ al conjunto de clases de homotopía de extensiones de B por A.*

El hecho de que $ext(A, B)$ es en efecto un conjunto se debe al invariante de Busby, que establece una biyección

$$ext(A, B) \cong \mathrm{Hom}(B, Q(A))/\sim,$$

donde $Q(A)$ es el álgebra de Calkin de A y $\sim$ es la relación de homotopía débil [HLT99, Definición 1.1]. Ver [WO93, Capítulo 3] y [Bus68].

Tenemos también una asignación

$$\Sigma : ext(A, B) \to ext(\Sigma(A), \Sigma(B))$$

dada por tomar una extensión

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} C \xrightarrow{\psi} B \to 0$$

y asignarle la extensión

$$0 \to \Sigma A \xrightarrow{\widetilde{\varphi}} \Sigma C \xrightarrow{\psi} \Sigma B \to 0.$$

Aquí $\widetilde{\varphi}$ es φ compuesta con la inversión $\widetilde{(\cdot)} : \Sigma C \to \Sigma C$. Es evidente que esta asignación está bien definida ya que Σ preserva las homotopías.

Teorema 2.3.5. *Sean A y B dos GC*-álgebras separables. Existe una función*

$$\sigma : ext(A,B) \to [[\Sigma B, A]]$$

que a una extensión le asigna el morfismo de Connes-Higson asociado a dicha extensión.

Demostración. Lo único que falta ver es que extensiones homotópicas resultan en morfismos homotópicos. Esto es evidente a partir de la Proposición 2.1.4. □

Surge la pregunta natural al respecto de si σ es una biyección. La respuesta es negativa. Sin embargo existe un procedimiento que es inverso salvo suspensión que detallamos a continuación.

Teorema 2.3.6. *Sean A y B dos GC*-álgebras separables y $\varphi : A \to \mathfrak{A}B$ un $*$-morfismo equivariante. Entonces existe una extensión*

$$0 \to \Sigma B \to E_\varphi \to A \to 0$$

cuya clase de homotopía sólo depende de la clase de 1-homotopía de φ.

Demostración. Definimos E_φ según el pullback

$$\begin{array}{ccc} E_\varphi & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathfrak{T}B_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}B \end{array}.$$

Aquí $\mathfrak{T}B_1$ es la subálgebra de $\mathfrak{T}B$ de funciones que se anulan en 1 y π es el morfismo cociente. Observemos que $\ker \pi$ son las funciones de $\mathfrak{T}B$ que se anulan en 1 y en infinito, por lo que existe un isomorfismo $\ker \pi \cong \Sigma B$, de manera que tenemos un inclusión canónica $\Sigma B \subseteq \mathfrak{T}B_1$, pero al igual que en el caso del cono, consideramos la inclusión "torcida". El hecho que E_φ es un pullback, junto al hecho que se tiene el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma B & \longrightarrow & E_\varphi & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \varphi & & \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma B & \longrightarrow & \mathfrak{T}B_1 & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{A}B & \longrightarrow & 0 \end{array},$$

cuya segunda fila es exacta, muestran que la sucesión

$$0 \to \Sigma B \to E_\varphi \to A \to 0$$

es exacta. Para ver que la clase de homotopía de dicha extensión, sólo depende de la clase de homotopía, consideremos una homotopía $H : A \to \mathfrak{A}(IB)$ de modo que

$\mathfrak{A}(\mathrm{ev}_0)\circ H = \varphi$. Entonces, repitiendo la construcción anterior, tenemos un diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma A \arrow[r] & E_\varphi \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & I\Sigma A \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{ev}_0"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"'] & E_H \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[u, equal] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma A \arrow[r] & E_{\mathfrak{A}(\mathrm{ev}_1)\circ H} \arrow[r] & B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Lo que muestra que la clase de homotopía de la extensión E_φ sólo depende de φ. □

Corolario 2.3.7. *Sean A y B dos GC*-álgebras separables. Existe una función*

$$\lambda : [[A, B]] \to ext(\Sigma B, A)$$

Demostración. El teorema anterior nos da una función

$$\lambda : [[A, B]]_1 \to ext(\Sigma B, A).$$

Concluimos la afirmación utilizando la biyección $[[A, B]] \cong [[A, B]]_1$ del Teorema 1.2.16. □

A continuación explicitamos la relación entre σ y λ. Antes requerimos una extensión de la Proposición 2.1.7

Proposición 2.3.8. *El morfismo de Connes-Higson $\sigma : \mathfrak{A}\Sigma \to \mathfrak{A}\Sigma$ asociado a la sucesión*

$$0 \to \Sigma \to \mathfrak{T}\mathbb{C}_1 \to \mathfrak{A}\mathbb{C} \to 0$$

es igual a la identidad en $\mathfrak{A}GC^*$

Demostración. Procedemos de la misma manera que en la Proposición 2.1.7. Sea $\{u_t\}$ la misma unidad aproximada que en la Proposición 2.1.7. Sea $s : \mathfrak{A}\mathbb{C} \to \mathfrak{T}\mathbb{C}_1$ la sección definida por

$$s([f])(t) = f(t)h(t)$$

Donde $h : [1, \infty) \to \mathbb{C}$ está definida por interpolar linealmente

$$h(1) = 0, \qquad h(1/3) = 0, \qquad h(t) = 1 \quad \forall t \geq 2/3.$$

La demostración concluye de la misma manera que en la Proposición 2.1.7. □

Teorema 2.3.9. *Sean A y B dos GC*-álgebras separables y $\varphi : A \to \mathfrak{A}B$ un $*$-morfismo equivariante. Entonces el morfismo de Connes-Higson $\sigma : \Sigma A \to \mathfrak{A}\Sigma B$ asociado a la extensión*

$$0 \to \Sigma B \to E_\varphi \to A \to 0$$

es igual a $\Sigma\varphi$ en $\mathfrak{A}GC^*$.

Demostración. Tomemos primero el diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_\varphi \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma B \arrow[r] & \mathfrak{T}B_1 \arrow[r] & \mathfrak{A}B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}.$$

Usando la proposición anterior junto con la Proposición 2.1.4 obtenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\Sigma\varphi"] & \mathfrak{A}\Sigma B \arrow[d, "id"] \\
\Sigma B \arrow[r, "id"] & \mathfrak{A}\Sigma B
\end{tikzcd}$$

lo que concluye la demostración. □

Corolario 2.3.10. *Sea σ y λ como en el Teorema 2.3.5 y el Corolario 2.3.7. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
[[A,B]] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\lambda"] & [[\Sigma A, \Sigma B]] \\
ext(\Sigma B, A) \arrow[ur, "\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

conmuta

Aunque escapa al propósito de este trabajo, el procedimiento también es inverso en el sentido opuesto, como notamos en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.11. *Sean A y B dos GC*-álgebras separables y*

$$0 \to A \to C \to B \to 0 : \xi \in ext(A,B)$$

una extensión de B por A. Entonces, si $\sigma : \Sigma B \to \mathfrak{A}A$ es el morfismo de Connes-Higson asociado a la extensión ξ, la extensión

$$0 \to \Sigma A \to E_\sigma \to \Sigma B \to 0$$

es homotópica a la extensión $\Sigma\xi$.

Demostración. Ver [HLT99, Lema 1.2] □

Corolario 2.3.12. *Sean σ y λ como en el Teorema 2.3.5 y el Corolario 2.3.7 respectivamente. Entonces se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} ext(A,B) \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\sigma"] & ext(\Sigma A, \Sigma B) \\ {[[\Sigma B, A]]} \arrow[ur, "\lambda"] & \end{tikzcd}$$

.

Si procedemos a tomar las estabilizaciones

$$\{A,B\} = \underset{\rightarrow}{\text{colím}}\, [[\Sigma^n A, \Sigma^n B]]$$

$$\mathrm{Ext}(A,B) = \underset{\rightarrow}{\text{colím}}\, ext(\Sigma^n A, \Sigma^n B)$$

Los Corolarios 2.3.12 y 2.3.10, permiten afirmar que $\{A,B\} \cong \mathrm{Ext}(A,B)$. Dicha identificación permite un desarrollo de la E-teoría equivariante a partir de extensiones. En el caso no-equivariante, esto está realizado en [Tho03] y en [HLT99].

Capítulo 3

E-Teoría equivariante

El objetivo de este capítulo será definir los grupos de E-teoría equivariante y a su vez desarrollar sus propiedades más importantes. Daremos también algunas de las propiedades que utilizaremos en el desarrollo posterior. A lo largo de todo este trabajo, los espacios de Hilbert serán siempre separables (es decir, tienen una base ortonormal contable). Cuando de espacios de Hilbert se trate, $\otimes$ notará a el producto tensorial de espacios de Hilbert. También, a partir de esta sección, todas las C*-álgebras con las que trabajaremos serán separables aunque no lo explicitaremos. De la misma manera, los grupos tendrán siempre una base contable. Nos restringimos en $G\mathcal{C}^*$ y $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$ a las subcategorías plenas de las C*-álgebras separables, pero no hacemos distinción en la notación.

3.1. Definiciones

Llamamos a

$$\mathcal{H} = L^2(G) \oplus L^2(G) \oplus \cdots = L^2(G \times \mathbb{N})$$

el G-espacio de Hilbert *estándar*, donde $L^2(G)$ es el espacio de Hilbert de las funciones cuadrado integrables dado por la medida de Haar de G. Debemos observar que en nuestro caso, dado que G posee base contable, $L^2(G)$ es separable [Fol95, p. 201]. En particular, $\mathcal{H}$ es separable.

La primera propiedad del espacio estándar viene a que “absorbe” a todos los espacios de Hilbert (separables).

Teorema 3.1.1. *Sea $\mathcal{H}_0$ un G-espacio de Hilbert separable, entonces hay un isomorfismo unitario equivariante*

$$\mathcal{H}_0 \otimes \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$$

Demostración. Ver [MP84, Teorema 2.4] □

Además de la topología dada por la norma de operadores, la topología en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con la que solemos trabajar es la llamada $*$-*fuerte*; dado un espacio topológico X, decimos que una función $f : X \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es *continua con la topología $*$-fuerte* si para todo $\xi \in \mathcal{H}$, las funciones $\mathrm{ev}_\xi \circ f$ y $\mathrm{ev}_\xi \circ f^*$ son continuas. Siendo una topología de convergencia puntual, la topología $*$-fuerte en general no es metrizable.

Lema 3.1.2. *Si $v : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una isometría, entonces hay un camino de isometrías continuo para la topología $*$-fuerte que une v con $id_{\mathcal{H}}$*

Demostración. Observemos primero que podemos escribir $\mathcal{H}$ como $L^2(G) \otimes \mathcal{H}_0$, donde $\mathcal{H}_0 \cong \ell^2(\mathbb{N})$ con acción de G trivial. Supongamos ahora que poseemos isometrías W_t $(0 < t \leq 1)$ de $\mathcal{H}_0$, de forma que el camino $f(t) = W_t$ es continuo con la topología $*$-fuerte. Supongamos además que

$$\lim_{t\to 0} W_t W_t^* = 0 \quad \text{(convergencia $*$-fuerte)}$$

$$W_1 = id_{\mathcal{H}_0}.$$

Entonces el camino

$$v_t = (id_{L^2(G)} \otimes W_t)v(id_{L^2(G)} \otimes W_t^*) + (id_{\mathcal{H}} - id_{L^2(G)} \otimes W_t W_t^*), \tag{$\star$}$$

es el deseado. En efecto, como la convergencia $*$-fuerte es puntual y $\|W_t\| \leq 1$, es claro que v_t es continua con la topología $*$-fuerte si W_t lo era. Un cálculo directo muestra que v_t es una isometría y que $v_1 = v$. Falta ver que $v_0 = id_{\mathcal{H}}$, para ello observemos que

$$\|(id_{L^2(G)} \otimes W_t)v(id_{L^2(G)} \otimes W_t^*)\| \leq \|v\|\|W_t\|^2 = \|v\|\|W_t W_t^*\|.$$

De manera que el primer sumando de $(\star)$ tiende a 0 y el segundo tiende a la identidad. Para ver la existencia de dichos W_t, consideremos en $L^2(0,1)$ los operadores

$$W_t(f)(s) = \begin{cases} t^{-1/2} f(s/t) & \text{si } s \leq t \\ 0 & \text{si } s > t \end{cases},$$

que cumplen lo deseado. □

Recordemos que la *topología estricta* de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es la inducida por la familia de seminormas

$$\|T\|_K = \|TK\| + \|KT\|$$

con K un operador compacto.

Lema 3.1.3. *La topología $*$-fuerte coincide con la topología estricta sobre conjuntos acotados en norma.*

Demostración. Supongamos que $T_\lambda \to T$ estrictamente. Entonces si p es la proyección ortogonal sobre un subespacio de dimensión 1, tenemos que $T_\lambda p \to Tp$ y $pT_\lambda \to pT$ en norma. Como tomar adjunto es continuo esto implica que $T_\lambda p \to Tp$ y $T_\lambda^* p \to T^* p$. Como p es arbitrario, T_λ converge $*$-fuerte a T. Recíprocamente, supongamos que $T_\lambda \to T$ $*$-fuerte y que $\|T_\lambda\| \leq M$. Sea $\varepsilon > 0$. Dicha convergencia nos permite asegurar que para cualquier operador de rango finito F, se tienen las convergencias en norma $T_\lambda F \to TF$ y $T_\lambda^* F \to T^* F$. Sean K un operador compacto y F un operador de rango finito de modo tal que $\|K - F\| < \varepsilon/3M$. Sea λ_0 tal que $\|T_\lambda F - TF\| < \varepsilon/3$ para todo $\lambda > \lambda_0$. Entonces

$$\|T_\lambda K - TK\| \leq \|T_\lambda K - T_\lambda F\| + \|T_\lambda F - TF\| + \|TF - TK\| < \varepsilon.$$

Como $\|T_\lambda\| \leq M$, por el principio de acotación uniforme se tiene que $\|T\| \leq M$. Esto muestra que $\|T_\lambda K - TK\|$ tiende a 0. De manera similar utilizando $T_\lambda^* F \to T^* F$, se obtiene que $\|KT_\lambda - KT\|$ tiende a 0. $\square$

Si $v \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una isometría, tenemos un $*$-morfismo dado por conjugar

$$\mathrm{conj}_v := v(-)v^* : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Dado que $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un ideal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, conj_v se puede restringir bien a $\mathrm{conj}_v : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H})$.

Corolario 3.1.4. *Sean v y w isometrías. Los $*$-endomorfismos conj_v y conj_w de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ inducidos por conjugación son homotópicos.*

Demostración. Usando los Lemas 3.1.2 y 3.1.3, obtenemos un camino continuo para la topología estricta que une dos isometrías. Como la acción por conjugación en $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ hace de un camino continuo para la topología estricta uno continuo para la topología de la norma, tenemos lo deseado. $\square$

Observando entonces que tenemos un equivalencia unitaria equivariante $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H} \cong \mathcal{H}$, según el Corolario 3.1.4, la clase de homotopía del isomorfismo $\mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ no depende de la equivalencia unitaria antes elegida. Esto nos permite dar una operación para morfismos que llegan a $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ componiendo con el $*$-morfismo

$$\Delta : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Aquí el primer morfismo es la inclusión como operadores diagonales. Esto define una operación sobre el conjunto $[[A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$ de la siguiente manera. Tomemos dos clases $[\varphi], [\psi] \in [[A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$, podemos suponer que dichas clases están dadas por $\varphi : A \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ y $\psi : A \to \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, y que además $k \leq n$. Entonces, usando el Lema 1.2.10 obtenemos el morfismo

$$A \xrightarrow{\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi} \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathfrak{A}^n(B \otimes (\mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}))).$$

Aquí $\mathfrak{A}^{n-k}\psi : A \to \mathfrak{A}^n B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es un abuso de notación para la composición

$$A \xrightarrow{\alpha_A} \mathfrak{A}A \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}A}} \mathfrak{A}^2 A \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}^2 A}} \dots \xrightarrow{\alpha_{\mathfrak{A}^{n-k-1}A}} \mathfrak{A}^{n-k} A \xrightarrow{\mathfrak{A}^{n-k}\psi} \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Es decir, la restricción de $\mathfrak{A}^{n-k}\psi$ a A. Componiendo $\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi$ con

$$\mathfrak{A}^n(B \otimes (\mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H}))) \xrightarrow{\mathfrak{A}^n(id_B \otimes \Delta)} \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

se obtiene la clase de un elemento en $[[A, B\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})]]$. En el caso que $k \geq n$ utilizamos $\mathfrak{A}^{k-n}\varphi \oplus \psi$.

Proposición 3.1.5. *El conjunto $[[A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$ con la operación antes definida es un monoide conmutativo y el elemento neutro para esta operación es el morfismo nulo.*

Demostración. Veamos que la operación está bien definida. Sean $\varphi : A \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, $\varphi' : A \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ y $\psi : A \to \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ $*$-morfismos equivariantes. Podemos suponer que $k \leq n$, de lo contrario hacemos un procedimiento análogo. Sea por otro lado $H : A \to \mathfrak{A}^n(IB \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ una n-homotopía entre φ y φ'. Entonces $\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi$ y $\varphi' \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi$ son n-homotópicas con la homotopía

$$A \xrightarrow{H \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi} \mathfrak{A}^n(IB \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus IB \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) = \mathfrak{A}^n(I(B \oplus B) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Aquí $\mathfrak{A}^{n-k}\psi : A \to \mathfrak{A}^n(I(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ es la n-homotopía constante $\mathfrak{A}^{n-k}\psi$. Por lo tanto al componer con Δ definen la misma clase de homotopía. Veamos ahora que la operación no depende de la clase en el colímite. Sean $\varphi : A \to \mathfrak{A}^n B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $\psi : A \to \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ $*$-morfismos equivariantes. Veamos primero que no depende de la clase del colímite con respecto a la variable φ. Veamos entonces que $(\alpha_{\mathfrak{A}^n B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})} \circ \varphi) \oplus \mathfrak{A}^{n+1-k}\psi$ y $\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi$ tienen la misma clase en $[[A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$; esto alcanza para ver lo deseado. Afirmamos que $\mathfrak{A}^{n+1-k}\psi : A \to \mathfrak{A}^{n+1-k} B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ está en la misma clase que el morfismo

$$A \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \xrightarrow{\mathfrak{A}^k(\alpha)} \mathfrak{A}^{k+1}(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \xrightarrow{\mathfrak{A}^{k+1}(\alpha)} \dots \xrightarrow{\mathfrak{A}^n(\alpha)} \mathfrak{A}^{n+1}(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Aquí $\alpha = \alpha_{B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})}$. En efecto, esto se deduce de la Proposición 1.2.13 y que α es una transformación natural. Pero esto último muestra entonces que $(\alpha_{\mathfrak{A}^n B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})} \circ \varphi) \oplus \mathfrak{A}^{n+1-k}\psi$ tiene la misma clase que $\alpha_{\mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))} \circ (\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi)$, por lo que en el colímite son iguales. Veamos ahora que no depende de la clase en el colímite en la variable ψ. Podemos suponer que $k < n$ (el caso $k = n$ se deduce de lo anterior); veamos entonces que las clases de $\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi$ y $\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\alpha \circ \psi)$ coinciden en el colímite. Pero más aún, afirmamos que $\mathfrak{A}^{n-k}\psi$ y $\mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\alpha \circ \psi)$ son homotópicas. En efecto, los morfismos $\mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\alpha) \circ \mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\psi)$ y $\alpha_{\mathfrak{A}^{n-1} B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})} \circ \mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\psi)$ son homotópicos según el lema 1.2.13. Por otro lado $\alpha_{\mathfrak{A}^{n-1} B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})} \circ \mathfrak{A}^{n-(k-1)}(\psi)$ es igual a $\mathfrak{A}^{n-k}\psi$ restringido a A debido a la naturalidad de α. Esto era lo que deseamos.

Para ver que la operación es asociativa, observemos que por el Corolario 3.1.4, el isomorfismo $\mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es independiente de como asociemos, por lo que Δ es asociativa. Por la misma razón, el morfismo $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$ dado por $id \oplus 0$ es homotópico a la identidad, lo que muestra que el morfismo nulo sirve como neutro para la operación.

Finalmente, para ver la conmutatividad, sólo hay que observar que las asignaciones de $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathcal{K}(\mathcal{H})$ en $\mathcal{K}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{H})$ dadas por

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ y } (A, B) \mapsto \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

son conjugadas vía una rotación, por lo que al componer con Δ definen la misma clase usando nuevamente el Corolario 3.1.4. $\square$

Proposición 3.1.6. *El monoide conmutativo* $[[A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$ *es un grupo abeliano.*

Demostración. Veremos que el elemento inverso está dado por el automorfismo de Σ definido por la inversión $\tilde{f}(t) = f(1-t)$. Para esto, observaremos que la operación dada por "concatenar lazos" de Σ coincide con la operación antes definida. La "concatenación" de dos morfismos $\varphi : A \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})), \psi : A \to \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ con $k \leq n$ está dada por primero construir el morfismo

$$A \xrightarrow{\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi} \mathfrak{A}^n(\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \longrightarrow \mathfrak{A}^n((\Sigma \oplus \Sigma) \otimes B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

y luego concatenar los dos lazos de $\Sigma \oplus \Sigma$ en uno solo:

$$\mathfrak{A}^n((\Sigma \oplus \Sigma) \otimes B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \xrightarrow{\star} \mathfrak{A}^n(\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

Es claro que el inverso de esta operación (que a priori no es conmutativa) es la inversión.

Finalmente, veamos que esta operación coincide con la anterior, para eso, alcanza con observar la cadena de homotopías

$$(\varphi \star \mathfrak{A}^{n-k}\psi) \sim (\varphi + 0 \star 0 + \mathfrak{A}^{n-k}\psi) \sim (\varphi \star 0 + 0 \star \mathfrak{A}^{n-k}\psi) \sim (\varphi + \mathfrak{A}^{n-k}\psi).$$

Esto imita el argumento de Hilton-Eckmann [EH61]. □

Con estos resultados podemos definir los grupos de E-teoría equivariante.

Definición 3.1.7. *Sean* A *y* B GC^**-álgebras. Definimos el* grupo de E-teoría equivariante *de* A *y* B *como*

$$\mathrm{E}_G(A, B) = [[\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$$

Proposición 3.1.8. *Los grupos de* E*-teoría equivariante forman conjuntos de morfismos de una categoría aditiva. En otras palabras hay un morfismo de grupos*

$$\mathrm{E}_G(A, B) \otimes \mathrm{E}_G(B, C) \to \mathrm{E}_G(A, C)$$

que cumple la ley de asociatividad y posee morfismos identidades.

Demostración. El hecho que los grupos de E-teoría equivariante sirven como morfismos de una categoría se deduce que $[[-, -]]$ son morfismos de una categoría. Falta ver el hecho que forman parte de una categoría aditiva. Para ello debemos ver que la composición es bilineal y la existencia de productos. Veamos la bilinealidad. Probamos primero la composición a izquierda. Consideremos morfismos $\varphi : \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, $\psi : \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^k(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ y $\eta : \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Podemos suponer además que $k \leq n \leq m$. Debemos ver que los morfismos

$$\mathfrak{A}^{m-n}\eta \circ (\varphi \oplus \mathfrak{A}^{n-k}\psi)$$

y

$$(\mathfrak{A}^{m-n}\eta \circ \varphi) \oplus (\mathfrak{A}^{m-n}\eta \circ \mathfrak{A}^{n-k}\psi)$$

son m-homotópicos luego de aplicar Δ. Para eso alcanza con ver que los morfismos

$$\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\eta} \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

$$\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\eta \oplus \eta} \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \oplus \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \xrightarrow{\Delta} \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

son m-homotópicos. Pero dado que las inclusiones $\Sigma \oplus 0$ y $0 \oplus \Sigma$ en Σ dadas por la concatenación de lazos $\star$, son homotópicas a la identidad, se tiene que la restricción de cada composición a cada copia de $\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es homotópica a η, de manera que ambas composiciones son homotópicas.

Probamos ahora la composición a derecha. Consideremos morfismos $\varphi : \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^n(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, $\psi : \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^k(C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ y $\eta : \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{A}^m \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Al igual que antes podemos suponer que $k \leq n \leq m$. La linealidad a derecha se deduce de que

$$(\mathfrak{A}^{m-k}\psi \oplus \eta) \circ \mathfrak{A}^{m-n}\varphi = (\mathfrak{A}^{m-k}\psi \circ \mathfrak{A}^{m-n}\varphi \oplus \eta \circ \mathfrak{A}^{m-n}\varphi).$$

Solo resta ver la existencia de productos. Debido al Lema 1.2.10 y a la Proposición 1.2.13 el producto coincide con el producto de C*-álgebras. □

La categoría de E-*teoría equivariante* E_G, es la categoría donde los objetos son C*-álgebras y los morfismos están dados por los grupos de E-teoría equivariante. Hay un funtor canónico $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^* \to \mathrm{E}_G$ que es la identidad en los objetos y a un morfismo $\varphi \in [[A, B]]$ lo envía a la clase $id \otimes \varphi \otimes id \in \mathrm{E}_G(A, B)$. En general diremos E_G-teoría en lugar de E-teoría G-equivariante.

3.2. Propiedades funtoriales de E_G

Continuamos ahora con el desarrollo de las propiedades más importantes de E_G como funtor. Nos importarán aquellas que son clásicas en el contexto de la K-teoría; entre las que desarrollamos en este capítulo se encuentran la estabilidad por operadores compactos, la semi-exactitud y la periodicidad de Bott.

Sean R una categoría aditiva y $F : G\mathcal{C}^* \to R$ un funtor.

i) F es $\mathcal{K}$-*estable* (o simplemente estable) si para toda GC*-álgebra A y toda descomposición de $\mathcal{H}$ como suma ortogonal de subespacios G-invariantes $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$, el morfismo inducido por la inclusión

$$A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i) \to A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

va a un isomorfismo al aplicarse F.

ii) F es $\mathbb{M}_n$-*estable* si para toda GC*-álgebra A la inclusión $A \xrightarrow{-\otimes e_{00}} A \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{M}_n(A)$ va a un isomorfismo al aplicarse F.

iii) F es *semi-exacto* (o medio-exacto o 1/2-exacto) si dada una sucesión exacta

$$0 \to J \to A \to B \to 0,$$

al aplicar F resulta en una sucesión exacta

$$F(J) \to F(A) \to F(B).$$

iv) F es *exacto partido* (o exacto escindido o ex/acto) si dada una sucesión exacta

$$0 \to J \to A \to B \to 0,$$

que además se parte, resulta en una sucesión exacta

$$0 \to F(J) \to F(A) \to F(B) \to 0.$$

v) F es *invariante homotópico* si dados dos morfismos $\varphi, \psi : A \to B$ que son homotópicos, resulta que $F(\varphi) = F(\psi)$.

Observación 3.2.1. *E_G posee invarianza homotópica tautológicamente, ya que según la definición de los grupos de E_G-teoría está dados por clases de homotopía.*

Comenzaremos con probar la estabilidad por operadores compactos, que requiere una proposición previa sencilla.

Proposición 3.2.2. *Sea $\mathcal{H}'$ un G-espacio de Hilbert separable arbitrario y $\varphi : A \to B$ es un $*$-morfismo, de forma que $\varphi \otimes id : A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}') \to B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}')$ es homotópico a un $*$-isomorfismo, entonces el elemento asociado a φ en $\mathrm{E}_G(A, B)$ es inversible.*

Demostración. Dado que $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ es isomorfo (equivariantemente) a $\mathcal{H}$, se deduce de la invarianza homotópica de E_G. $\square$

Con esta proposición tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3 (Estabilidad compacta)**.** *Supongamos que $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ es una descomposición de $\mathcal{H}$ en subespacios ortogonales G-invariantes. Sea $B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i) \to B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ el $*$-morfismo inducido por la inclusión. Entonces el morfismo inducido en E_G-teoría*

$$\mathrm{E}_G(A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i)) \longrightarrow \mathrm{E}_G(A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

es un isomorfismo.

Demostración. Observemos que el morfismo $id \otimes i : \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i) \to \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ inducido por la isometría $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_i \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ es homotópico a un isomorfismo por el Corolario 3.1.4. Esto nos dice que la clase del morfismo inducido por la inclusión en $\mathrm{E}_G(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i), B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$, es inversible por la proposición anterior. Este morfismo es el que da el isomorfismo del enunciado. $\square$

De la misma manera tenemos la versión contravariante de esta última proposición.

Proposición 3.2.4. *Supongamos que* $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}$ *es una descomposición de* $\mathcal{H}$ *en subespacios ortogonales* G*-invariantes. Sea* $B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i) \to B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ *el* $*$*-morfismo inducido por la inclusión. Entonces el morfismo inducido en* E_G*-teoría*

$$\mathrm{E}_G(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), A) \to \mathrm{E}_G(B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_i), A)$$

es un isomorfismo.

Observación 3.2.5. *Es un hecho conocido que un funtor* $\mathcal{K}$*-estable es* $\mathbb{M}_2$*-estable y que un un funtor* $\mathbb{M}_2$*-estable es* $\mathbb{M}_n$*-estable para todo* $n \geq 1$. [Cor11, Ejercicio 2.2.3 y Lema 7.1.2]

Continuamos con la semi-exactitud, para ello requerimos algunas observaciones al respecto del comportamiento de los grupos de E_G-teoría junto con las construcciones que vimos en el capítulo 2.

Sea $\theta : A \to B$ un $*$-morfismo equivariante. Entonces se tiene una aplicación $C_\theta \to A$ definida por $(f, a) \mapsto a$. Por otro lado tiene una inclusión de ΣB en C_θ dada por $f \mapsto (f, 0)$. Como para $f \in \Sigma B$ se tiene que $f(0) = 0$, esto está bien definido. Estos morfismos dan lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \Sigma B \longrightarrow C_\theta \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Si $J = \ker\theta$, se tiene también una inclusión canónica $J \hookrightarrow C_\theta$, $x \mapsto (0, x)$. La aplicación canónica $C_\theta \to CB$, $(f, a) \mapsto f$ es sobreyectiva si θ lo es y dan lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow J \longrightarrow C_\theta \longrightarrow CB \longrightarrow 0.$$

Proposición 3.2.6. *Sean* $\theta : A \to B$ *un* $*$*-morfismo equivariante sobreyectivo,* $J = \ker\theta$ *y* D *una* GC^**-álgebra. Entonces la sucesión*

$$\mathrm{E}_G(D, C_\theta) \to \mathrm{E}_G(D, A) \xrightarrow{\theta_*} \mathrm{E}_G(D, B)$$

es exacta.

Demostración. La composición de los morfismos es nula, ya que la asignación $(f, a) \mapsto \theta(a)$ es homotópica a 0 mediante la homotopía dada por $H(f, a)(s) = f(s)$. Por otro lado debemos ver que todo morfismo que es nulo al componer con θ viene desde el cono de éste.

Notamos $D' = \Sigma D \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $A' = \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $B' = \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $\theta' = \Sigma\theta \otimes id$

Sea $\varphi : D' \to \mathfrak{A}^n A'$ tal que $\theta \circ \varphi : D' \to \mathfrak{A}^n B'$ es n-homotópica a 0, entonces existe un $*$-morfismo $\eta : D' \to \mathfrak{A}^n IB'$ tal que al componer con la evaluación en 1 recuperamos $\theta \circ \varphi$ y al evaluar en 0 tenemos el morfismo nulo; esto último nos dice que en realidad, la imagen de η cae en $\mathfrak{A}^n CB'$ (ya que en 0 se evalúa a 0 y $\mathfrak{A}$ es exacto).

Ahora, podemos definir el morfismo $\varphi \oplus \eta : D' \to \mathfrak{A}^n A' \oplus_{\mathfrak{A}^n B'} \mathfrak{A}^n CB'$, y, según el Lema 1.2.10, tenemos que $\mathfrak{A}^n A' \oplus_{\mathfrak{A}^n B'} \mathfrak{A}^n CB' \cong \mathfrak{A}^n(A' \oplus_B CB') = \mathfrak{A}^n(C_{\theta'})$. Según las identificaciones que hicimos, la aplicación $\mathrm{E}_G(D, C_\theta) \to \mathrm{E}_G(D, A)$ envía la clase de $\varphi \oplus \eta$ en la de φ. $\square$

Posponemos su versión contravariante hasta después de analizar el caso covariante.
En vista de esta última proposición, para concluir la semi-exactitud sólo resta ver lo siguiente.

Proposición 3.2.7. *Sea $\theta : A \to B$ un $*$-morfismo equivariante suryectivo. Entonces el morfismo canónico $J \to C_\theta$ induce un isomorfismo en E_G.*

Demostración. Pero esto se deduce inmediatamente del Teorema 2.2.1 □

Corolario 3.2.8. $\mathrm{E}_G(D, -)$ *es semi-exacto para todo D.*

Esto nos permite dar una sucesión exacta larga de los grupos de E_G-teoría de la manera clásica.

Teorema 3.2.9. *Sea*

$$0 \to J \to A \to B \to 0,$$

sucesión exacta de GC^*-álgebras. Entonces existe un morfismo $\partial \in \mathrm{E}_G(\Sigma B, J)$ de forma que la sucesión

$$\mathrm{E}_G(D, \Sigma A) \to \mathrm{E}_G(D, \Sigma B) \xrightarrow{\partial_*} \mathrm{E}_G(D, J) \to \mathrm{E}_G(D, A)$$

es exacta. El morfismo es el inducido por la inclusión $\Sigma B \to C_\theta$ y la inversa en E_G-teoría del morfismo $J \to C_\theta$. En particular ∂ es una transformación natural con respecto a extensiones.

Demostración. Según el Corolario 3.2.8, $\mathrm{E}_G(D, -)$ es semi-exacto e invariante homotópico. En el caso no equivariante, se tiene el hecho más general que concluye que el resultado vale para cualquier funtor con estas características ([Bla98, Teorema 21.4.3]). La demostración para el caso equivariante es idéntica, reemplazando $*$-morfismos por $*$-morfismos equivariantes. □

Corolario 3.2.10. *[Escisión] Sea*

$$0 \to J \to A \to B \to 0,$$

una sucesión exacta de GC^*-álgebras. Entonces hay una sucesión exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots \longrightarrow & \mathrm{E}_G(D, \Sigma^2 J) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(D, \Sigma^2 A) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(D, \Sigma^2 B) \\
 & & & & & \downarrow \\
 & \mathrm{E}_G(D, \Sigma B) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(D, \Sigma A) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(D, \Sigma J) \\
 & \downarrow & & & & \\
 & \mathrm{E}_G(D, J) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(D, A) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(D, B)
\end{array}$$

.

En realidad, podemos dar una descripción más precisa del morfismo de conexión ∂.

Proposición 3.2.11. *El morfismo de conexión ∂ es exactamente el inducido por la composición con el morfismo de Connes-Higson.*

Demostración. Observemos que el morfismo ∂ está unívocamente determinado por el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(D,\Sigma B) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr] & & \mathrm{E}_G(D,J) \arrow[dl] \\ & \mathrm{E}_G(D,C_\theta) & \end{tikzcd}.$$

Sin embargo, la Proposición 2.2.2 concluye que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(D,\Sigma B) \arrow[rr, "\sigma_*"] \arrow[dr] & & \mathrm{E}_G(D,J) \arrow[dl] \\ & \mathrm{E}_G(D,C_\theta) & \end{tikzcd}$$

conmuta, por lo que $\partial = \sigma_*$. □

Es debido a un teorema de Cuntz [Cun84] (para el caso no equivariante) que para todo funtor $H : \mathcal{C}^* \to \mathfrak{Ab}$ $\mathcal{K}$-estable, semi-exacto e invariante homotópico la teoría de homotopía $H_n := H \circ \Sigma^n$ satisface periodicidad de Bott. Adaptamos el argumento aquí.

Sea $S \in \mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ el *shift a derecha*

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Llamamos *álgebra de Toeplitz* a la C*-álgebra generada por S

$$\tau := C^*(S)$$

Teorema 3.2.12 (Coburn)**.** *Sean τ el álgebra de Toeplitz y $\mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N}))$ el álgebra de operadores compactos de $\ell^2(\mathbb{N})$. Entonces hay una sucesión exacta*

$$0 \to \mathcal{K}(\ell^2) \to \tau \to C(\mathbb{S}^1) \to 0.$$

Demostración. Ver [Cob67] □

Corolario 3.2.13. *Sea $\tau_0 \subseteq \tau$ la preimagen de $\Sigma \subseteq C(\mathbb{S}^1)$. Entonces tenemos tenemos la sucesión exacta*

$$0 \to \mathcal{K}(\ell^2) \to \tau_0 \to \Sigma \to 0. \qquad (\star)$$

Teorema 3.2.14 (Periodicidad de Bott)**.** *El morfismo*

$$\partial \in \mathrm{E}_G(\Sigma^2, \mathcal{K}(\ell^2))$$

inducido por la sucesión exacta ($\star$) *es inversible.*

Demostración. Probaremos que la composición con ∂ es un isomorfismo, esto es equivalente a lo que deseamos. Utilizando escisión (Corolario 3.2.10), alcanza con probar que $E_G(D, \tau_0) = 0$ para toda GC*-álgebra D. En el caso caso no-equivariante Cuntz ([Cun84, Sección 4]) prueba que para todo funtor $F : \mathcal{C}^* \to \mathfrak{Ab}$ que sea $\mathcal{K}$-estable, semi-exacto e invariante homotópico, se tiene que $F(\tau_0) = 0$. Como hay un funtor pleno y fiel $\mathcal{C}^* \hookrightarrow G\mathcal{C}^*$ definido por enviar a una C*-álgebra a la GC*-álgebra con acción de G trivial, se tiene que $E_G(D, \tau_0) = 0$. □

Corolario 3.2.15. *El morfismo $\partial_A = \partial \otimes id_A \in \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, A)$ inducido por*

$$0 \to A \otimes \mathcal{K}(\ell^2(\mathbb{N})) \to A \otimes \tau_0 \to \Sigma A \to 0$$

es inversible.

Demostración. El inverso de ∂_A es simplemente $\partial^{-1} \otimes id_A$. □

Ahora que hemos desarrollado el caso covariante, procedemos a demostrar las versiones contravariantes de los resultados anteriores.

De la misma manera que el producto tensiorial maximal se extiende a la categoría $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$, podemos extenderlo a E_G. El producto tensorial en E_G es el bifuntor dado por el producto tensorial en los objetos y el producto tensorial de morfismos asintóticos en los morfismos, al igual que en la categoría $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$. En particular tenemos un funtor suspensión dado por $\Sigma \otimes -$ en los objetos y por

$$\Sigma : \mathrm{E}_G(A, B) \to \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma B)$$

en los morfismos.

Proposición 3.2.16. *Sean A y B GC*-álgebras. Entonces el morfismo inducido por la suspensión*

$$\Sigma : \mathrm{E}_G(A, B) \to \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma B)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Si probamos que $\Sigma^2 : \mathrm{E}_G(A, B) \to \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, \Sigma^2 B)$ es un isomorfismo para todo A y B entonces, observando las composiciones dadas por

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(A,B) \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "\cong"] & \mathrm{E}_G(\Sigma A,\Sigma B) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\cong"'] & \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A,\Sigma^2 B) \arrow[r] & \mathrm{E}_G(\Sigma^3 A,\Sigma^3 B) \end{tikzcd}$$

,

se sigue que $\Sigma : \mathrm{E}_G(A,B) \to \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma B)$ es un isomorfismo.

Para ver que Σ^2 es un isomorfismo, veamos que es el morfismo dado por precomponer $\partial_A \in \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, A)$ y componer con $\partial_B^{-1} \in \mathrm{E}_G(B, \Sigma^2 B)$. Dado que ambos son isomorfismos esto es suficiente para probar lo que deseamos. En efecto, si tomamos un elemento de $\varphi \in \mathrm{E}_G(A,B)$ y precomponemos con ∂_A^{-1} y luego con $\partial_B \in$, obtenemos

$$\partial_B \circ \varphi \circ \partial_A^{-1} \in \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, \Sigma^2 B),$$

que está dado por

$$(\partial^{-1} \otimes id_B) \circ (id_{\Sigma^2} \otimes \varphi) \circ (\partial \otimes id_A) = id_{\Sigma^2} \otimes \varphi = \Sigma^2 \varphi.$$

□

Lema 3.2.17. *Sean $\theta : A \to B$ un $*$-morfismo equivariante y D una GC^*-álgebra. Entonces la sucesión*

$$\mathrm{E}_G(C_\theta, \Sigma D) \longrightarrow \mathrm{E}_G(\Sigma B, \Sigma D) \xrightarrow{\Sigma\theta^*} \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma D)$$

es exacta.

Demostración. Notamos nuevamente $D' = \Sigma D \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $A' = \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $B' = \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ y $\theta' = \Sigma\theta \otimes id$. Probaremos que si $\varphi : B' \to \mathfrak{A}^n D'$ es un morfismo que al precomponer con θ' es n-homotópico al morfismo nulo, entonces la suspensión $\Sigma\varphi$ proviene de una composición del tipo

$$\Sigma B' \to C_{\theta'} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}^n \Sigma D'$$

para algún ψ. Por la Proposición 3.2.16 esto concluye el resultado.

Sean $\eta : A' \to \mathfrak{A}^n C D'$ la homotopía que conecta $\varphi \circ \theta'$ con 0 y $C\varphi : CB' \to \mathfrak{A}^n CD'$ inducido por φ. Consideremos entonces

$$C_{\theta'} = CB' \oplus_B' A' \xrightarrow{C\varphi \oplus \eta} \mathfrak{A}^n (CD' \oplus_D CD').$$

Utilizamos ahora el isomorfismo $\lambda : CD' \oplus_D CD' \to \Sigma D'$ definido por

$$\lambda(f,g) = \begin{cases} f(t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2 \\ g(1-t) & \text{si } 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Se verifica entonces $\psi = \lambda \circ (C\varphi \oplus \eta)$ es el morfismo deseado. □

Teorema 3.2.18. *Si D es una GC^*-álgebra entonces $\mathrm{E}_G(-, D)$ es semi-exacto.*

Demostración. Veremos que si $\theta : A \to B$ es un $*$-morfismo equivariante sobreyectivo, entonces la sucesión

$$\mathrm{E}_G(\Sigma B, \Sigma D) \to \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma D) \to \mathrm{E}_G(\Sigma C_\theta, \Sigma D)$$

es exacta. Usando entonces por la Proposición 3.2.16 que Σ induce un isomorfismo en los grupos de E_G-teoría y el isomorfismo canónico $\ker\theta \to C_\theta$ tendremos la exactitud deseada. Sea $\alpha : C_\theta \to A$ el morfismo canónico, dado por la proyección en la segunda coordenada. Como α es sobreyectivo y $\ker\alpha = \Sigma B$, se tienen morfismos

$$\beta : \Sigma A \to C_\alpha \quad \text{y} \quad \tau : \Sigma B \to C_\alpha$$

Debido a la Proposición 2.2.1 sabemos que τ induce un isomorfismo en E_G. Por otro lado, debido al Lema 3.2.17 sabemos que la sucesión

$$\mathrm{E}_G(C_\alpha, \Sigma D) \xrightarrow{\beta^*} \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma D) \xrightarrow{\Sigma\alpha^*} \mathrm{E}_G(\Sigma C_\theta, \Sigma D)$$

es exacta. Entonces consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{E}_G(C_\alpha, \Sigma D) & \xrightarrow{\beta^*} & \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma D) & \xrightarrow{\Sigma\alpha^*} & \mathrm{E}_G(C, \Sigma D) \\
\Big\downarrow \tau & & \Big\downarrow = & & \Big\downarrow = \\
\mathrm{E}_G(\Sigma B, \Sigma D) & \xrightarrow{\Sigma\theta^*} & \mathrm{E}_G(\Sigma A, \Sigma D) & \xrightarrow{\Sigma\alpha^*} & \mathrm{E}_G(\Sigma B, \Sigma D)
\end{array}.$$

Lo que deseamos ver es que la fila inferior es exacta; dado que τ es un isomorfismo, para ver la exactitud alcanza con ver que el diagrama conmuta. El cuadrado derecho es obviamente conmutativo, pero el cuadrado izquierdo a priori no lo es ya que $\tau \circ \Sigma\theta \neq \beta$. Por otro lado si consideramos la inversión $\widetilde{(\cdot)} : \Sigma B \to \Sigma B$, afirmamos que la composición

$$\Sigma A \xrightarrow{\Sigma\theta} \Sigma B \xrightarrow{\sim} \Sigma B \xrightarrow{\tau} C_\alpha$$

es homotópica a β. En efecto, la composición toma una función $f \in \Sigma A$, la compone con θ, invierte su orientación y luego la incluye en la segunda coordenada de C_α de manera que resulta en

$$\tau(\widetilde{\Sigma\theta(f)})(t) = (0, (\theta \circ f(1-t), 0)).$$

En cambio β incluye ΣA en la primera coordenada de C_α, lo que resulta en

$$\beta(f)(t) = (f(t), (0, 0)).$$

Para ver que estos morfismos son homotópicos, proponemos la homotopía dada por

$$H(f)(s) = (f(st), (\theta \circ f(1-(1-s)t), f(s)))$$

Debemos ver que esta homotopía está bien definida. Para ello debemos ver que su imagen está en C_α. Cuando $t = 1$, sucede que $f(st) = f(s)$ y $\theta \circ f((1-(1-s)t)) = \theta \circ f(s)$; estas son las condiciones para que el par $(\theta \circ f(1-(1-s)t), f(s))$ pertenezca a C_θ y por lo tanto, que $H(f)(s)$ esté en C_α. Finalmente, cuando $s = 0$ obtenemos $\tau(\widetilde{\Sigma\theta(f)})$ y cuando $s = 1$ obtenemos β. □

Ahora que tenemos que $\mathrm{E}_G(-, D)$ es semi-exacto, podemos adaptar todos los resultados del caso covariante al caso contravariante con demostraciones análogas.

Teorema 3.2.19. *Sea*

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

una sucesión exacta de GC-álgebras. Entonces existe un morfismo $\partial \in \mathrm{E}_G(\Sigma B, J)$ de forma que la sucesión*

$$\mathrm{E}_G(\Sigma A, D) \leftarrow \mathrm{E}_G(\Sigma B, D) \xleftarrow{\partial^*} \mathrm{E}_G(J, D) \leftarrow \mathrm{E}_G(A, D)$$

es exacta. El morfismo es el inducido por la inclusión $\Sigma B \to C_\theta$ y la inversa en E_G-teoría del morfismo $J \to C_\theta$. En particular ∂ es una transformación natural con respecto a extensiones.

Corolario 3.2.20 (Escisión)**.** *Si*

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

es una sucesión exacta de GC-álgebras entonces hay una sucesión exacta larga*

$$\begin{array}{ccccc}
\ldots \longleftarrow \mathrm{E}_G(\Sigma^2 J, D) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, D) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(\Sigma^2 B, D) \\
 & & & & \uparrow \\
\mathrm{E}_G(\Sigma B, D) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(\Sigma A, D) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(\Sigma J, D) \\
\uparrow & & & & \\
\mathrm{E}_G(J, D) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(A, D) & \longleftarrow & \mathrm{E}_G(B, D)
\end{array}.$$

Corolario 3.2.21 (Periodicidad de Bott)**.** *Hay isomorfismos naturales*

$$\mathrm{E}_G(A, B) \cong \mathrm{E}_G(\Sigma^2 A, B) \quad \mathrm{E}_G(A, B) \cong \mathrm{E}_G(A, \Sigma^2 B)$$

Observación 3.2.22. *El hecho de que tanto en el caso covariante como en el contravariante E_G admita sucesiones exactas largas, nos dice que además es un funtor exacto partido, ya que si la sucesión exacta se parte, la sucesión exacta larga se puede desacoplar con ceros. Esto en particular nos dice que $\mathrm{E}_G : \mathfrak{A}G\mathcal{C}^* \to \mathrm{E}_G$ es un funtor aditivo.*

3.3. E-teoría y K-teoría

Como última sección de este capitulo, resaltamos una propiedad importante acerca de de $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\{1\}}$ (es decir la E_G-teoría con $G = \{1\}$, el grupo trivial), que es que éste recupera la K-teoría cuando la en la primera variable introducimos $\mathbb{C}$. Esta será una propiedad importante que utilizaremos más adelante. Por otro lado este resultado implica que los grupos de la forma $\mathrm{E}(\mathbb{C}, -)$ poseen las mismas propiedades que K_0 (como por ejemplo que es invariante por equivalencias Morita y preserva colímites filtrantes contables). Para probar esto requerimos algunos lemas.

Recordemos que los conjuntos $[-,-]$ representan las clases de homotopía de $*$-morfismos y que A^+ representa la unitarización de la C*-álgebra A.

Lema 3.3.1. *Sea A una C*-álgebra. Entonces se tiene un isomorfismo canónico*

$$[\Sigma, A \otimes \mathcal{K}] \cong K_1(A)$$

Demostración. Un morfismo $\varphi : \Sigma \to B$, es lo mismo que un elemento unitario en la unitarización B^+ que es 1 módulo B. Esto se deduce de tomar la imagen de la función $f(z) = z$ en $C(\mathbb{S}^1) = \Sigma^+$ vía la extensión $\varphi^+ : C(\mathbb{S}^1) \to B^+$. Recordemos que el conjunto de dichos unitarios forman el grupo $\mathrm{U}^+(B)$. Se sigue de ésto que $[\Sigma, B] = \mathrm{U}^+(B)/\mathrm{U}^+(B)_0$. Por lo tanto $[\Sigma, A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})] = \mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))/\mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))_0$. Pero $\mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))/\mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ es exactamente $K_1(A)$ ya que como K_1 es estable

$$\begin{aligned} K_1(A) = K_1(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) &\cong \operatorname*{colím}_{n\to\infty} \mathrm{U}_n^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))/\mathrm{U}_n^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))_0 \\ &= \operatorname*{colím}_{n\to\infty} \mathrm{U}^+(\mathbb{M}_n(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})))/\mathrm{U}^+(\mathbb{M}_n(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})))_0 \\ &\cong \mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))/\mathrm{U}^+(A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))_0 \end{aligned}$$

□

Lema 3.3.2. *Sean A y B C*-álgebras. Entonces*

$$\mathrm{E}(A, B) \cong [[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$$

Demostración. Consideremos la inclusión $id \otimes e_{11} : \Sigma A \to \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ como operadores de rango 1 en algún subespacio de $\mathcal{H}$. Afirmamos que la función

$$\mathrm{E}(A, B) = [[\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]] \xrightarrow{(id \otimes e_{11})^*} [[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]$$

es una biyección. Para eso consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd} {[[\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]} \arrow[r, "(id \otimes e_{11})^*"] \arrow[d, "- \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}"] & {[[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]} \arrow[d, "- \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}"] \\ {[[\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]} \arrow[r] & {[[\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}), \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]]} \end{tikzcd}.$$

La flecha inferior está dada por la composición con $id_A \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})} \otimes e_{11} : \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Es fácil ver que dicho diagrama conmuta salvo el isomorfismo de intercambiar dos copias de $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. Afirmamos ahora que tanto $- \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ como $(id_A \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})} \otimes e_{11})^*$ son biyecciones. En el caso de $(id_A \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})} \otimes e_{11})^*$ se deduce de que la inclusión $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$ es homotópica a un isomorfismo ya que proviene de la isometría $\mathcal{H} \otimes \mathbb{C} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ (esto se debe al Lema 3.1.2). Veamos que $- \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ induce una biyección. Sea $v : \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ una isometría tal que $vv* = 1_{\mathcal{H}} \otimes e_{11}$, dicha isometría puede construirse fácilmente. Definimos el isomorfismo $\mu : \mathcal{K} \to \mathcal{K} \otimes \mathcal{K}$, $\mu(T) = v^*(T \otimes e_{11})v$, su inverso está dado por $\mu^{-1}(T) = vTv^*$. Observemos que tanto $id \otimes \mu^{-1}$ como $id \otimes e_{11}$ inducen biyecciones entre los conjuntos de clases de homotopía de morfismos asintóticos. Notemos ahora que la composición $id \otimes e_{11} \circ id \otimes \mu^{-1}$ es exactamente la conjugación por v. Como conj_v y $id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ son homotópicos (nuevamente por el Lema 3.1.2), se sigue que $- \otimes id_{\mathcal{K}(\mathcal{H})}$ coincide con la composición $id \otimes e_{11} \circ id \otimes \mu^{-1}$ que es una biyección. Esto concluye la demostración. □

Lema 3.3.3. *Sea B una C*-álgebra. Entonces hay una biyección canónica*

$$[\Sigma, B] \cong [[\Sigma, B]]$$

Demostración. Según el Teorema 1.2.16 hay una biyección $[[\Sigma, B]] \cong [[\Sigma, B]]_1$. Entonces alcanza ver que toda clase de homotopía de un $*$-morfismo $\varphi : \Sigma \to \mathfrak{A}B$ se corresponde de manera única con la clase de homotopía de un $*$-morfismo $\Sigma \to B$. Es claro que hay una función canónica que envía una clase de homotopía de $[\Sigma, B]$ en una clase en $[[\Sigma, B]]_1$ utilizando la inclusión $B \subseteq \mathfrak{A}B$. Comenzamos con la suryectividad. Utilizamos la propiedad de Σ de ser *semiprojectivo* [Bla98, Ejercicio 4.7.1]. Es decir, sea A una C*-álgebra $J \trianglelefteq A$ un ideal de A de forma que existen ideales J_n, con $J_n \subsetneq J_{n+1}$ y $J = \overline{\cup_n J_n}$. Entonces para todo morfismo $\psi : \Sigma \to A/J$ existe un morfismo $\overline{\psi} : \Sigma \to A/J_n$ de forma que la composición de $\overline{\psi}$ con el morfismo natural $A/J_n \to A/J$ es ψ. En nuestro caso $A = C_b([1, +\infty), B)$ y $J = C_0([1, +\infty), B)$. Observemos que podemos escribir J como la unión creciente de ideales $J_n = C_0([1, n), B)$. Entonces existe un morfismo $\overline{\varphi} : \Sigma \to C_b([1, \infty), B)/C_0([1, n), B) = C_b([n, \infty), B)$. Entonces definimos $\tilde{\varphi} : \Sigma \to C_b([1, \infty), B)$ como

$$\tilde{\varphi}(f)(t) = \begin{cases} \overline{\varphi}(f)(n) \text{ si } t \leq n \\ \overline{\varphi}(f)(t) \text{ si } t > n \end{cases}$$

Puede verse fácilmente que la clase de $\tilde{\varphi}$ en $\mathfrak{A}B$ es la misma clase que φ. Por otro lado, como $\mathrm{ev}_t \circ \tilde{\varphi}$ es un $*$-morfismo para todo t, $\tilde{\varphi}$ es homotópica al morfismo constante $\psi(f)(t) = \tilde{\varphi}(f)(1)$. Por lo que la clase de homotopía de $\psi : \Sigma \to B$ se corresponde con la misma clase de homotopía de $\tilde{\varphi}$. Esto muestra la suryectivdad. Para ver la inyectividad alcanza ver que toda homotopía $\Sigma \to \mathfrak{A}(IB)$ se corresponde con una homotopía $\Sigma \to IB$. Pero esto se hace de la misma manera que antes, reemplazando B con IB. Esto concluye la demostración. □

Teorema 3.3.4. $\mathrm{E}(\mathbb{C}, A) \cong K_0(A)$

Demostración. Según los lemas anteriores tenemos los isomorfismos:

$$\mathrm{E}(\mathbb{C}, A) \cong [[\Sigma, \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]] \cong [\Sigma, \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})] \cong K_1(\Sigma A)$$

Finalmente, por periodicidad de Bott para la K-teoría topológica [Bla98, Sección 9], se sigue que $K_1(\Sigma A) = K_0(A)$. □

Capítulo 4

La conjetura de Baum-Connes

El objetivo de este capítulo es utilizar la E-teoría equivariante para formular y probar algunos casos de la conjetura de Baum-Connes. Esta conjetura tiene su raíz en buscar comprender la K-Teoría de productos cruzados de C*-álgebras a través de la comprensión de una homología (basada en la E-teoría equivariante) de un espacio con una acción propia de G con cierta propiedad universal. Esto sigue el espíritu de la KK-Teoría desarrollada por Kasparov.

El estudio de los espacios y álgebras propias lo desarrollaremos en las dos primeras secciones, luego formularemos la conjetura de Baum-Connes para productos cruzados completos y con coeficientes en su versión para E_G-teoría y finalmente veremos las demostraciones para casos particulares de la conjetura (el teorema de Green-Julg y su generalización para grupos discretos). En la última sección aplicamos este resultado para dar un método de prueba de la conjetura de Baum-Connes conocido como el método Dirac-Dirac dual.

4.1. Acciones y álgebras propias

Un espacio topológico X junto con una acción continua de G se dice un *G-espacio propio* si cumple las siguientes propiedades.

i) Es paracompacto y Hausdorff.

ii) Su espacio de órbitas, X/G, es paracompacto y Hausdorff.

iii) Para cada $x \in X$ existe un entorno equivariante U de x y un subgrupo compacto K de G junto con una función continua equivariante $U \to G/K$.

En la mayoría de los casos que trabajaremos (pero no en todos) X será localmente compacto. En [Pal61], el autor muestra en el caso que G es discreto y X localmente compacto, que esta definición es equivalente al hecho que la función que da la estructura de G-espacio, $G \times X \to X \times X$ sea propia (es decir, preimagen de conjuntos compactos es compacto). En el caso que G no es discreto la condición *iii)* no sólo implica que la función de estructura es propia sino que además agrega una condición sobre secciones de la acción.

Observación 4.1.1. *La condición iii) implica que todo G-espacio propio puede cubrirse por abiertos de forma tal que cada uno admita una función equivariante a un espacio homogéneo G/K.*

Sea X un G-espacio propio; un conjunto $C \subseteq X$ se dice *G-compacto* si es la G-saturación de un compacto K, es decir, $C = G \cdot K$. Equivalentemente, el conjunto de órbitas de C, C/G, es un conjunto compacto de X/G.

Recordemos que el álgebra de multiplicadores de una C*-álgebra A es la C*-álgebra unital $M(A)$, que contiene a A como ideal y está caracterizada por la siguiente propiedad universal: si B es una C*-álgebra unital que contiene a A como ideal entonces existe un único morfismo unital $B \to M(A)$ que restringido a A es la inclusión $A \subseteq M(A)$. Para ver su existencia y consultar algunas de sus propiedades ver [WO93, Capítulo 2]. Alternativamente, $M(A)$ se puede definir como el conjunto de *centralizadores dobles*. Un centralizador doble es un par (L, R) de funciones $L, R : A \to A$ (no necesariamente lineales ni continuas) que satisfacen

$$L(x)y = xR(y) \qquad \forall x, y \in A.$$

En particular, para definir un multiplicador de A alcanza con definirlo a partir de su multiplicación con elementos de A (de ahí su nombre). Si A es una GC*-álgebra, la acción de G se extiende a $M(A)$, este hecho se deduce de la propiedad universal de $M(A)$ de la siguiente manera. Sea $g \in G$ y $g\cdot : A \to A$ el $*$-isomorfismo asociado a la acción de g. Tomemos la composición de $g\cdot$ con la inclusión $A \to M(A)$. Debido a la propiedad universal de $M(A)$, existe un $*$-morfismo $\hat{g}\cdot : M(A) \to M(A)$ que extiende a $g\cdot$. Es fácil ver que la asignación $g \mapsto \hat{g}$, define un morfismo de grupos $G \to \mathrm{Aut}(M(A))$. La continuidad de la acción se deduce de que extiende a la acción de A.

En el caso particular en que $A = C_0(X)$, con X un espacio localmente compacto, Hausdorff y con base contable, se tiene que $M(C_0(X)) = C_b(X) = C(\beta X)$. Aquí βX es la compactificación de Stone-Čech de X.

Definición 4.1.2. *Sea X un G-espacio propio. Una GC*-álgebra A se dice* propia sobre X *si tiene las siguientes propiedades.*

i) El G-espacio X es propio, localmente compacto y posee una base contable.

ii) Existe un $*$-morfismo equivariante $\pi : C_0(X) \to M(A)$ cuya imagen está en el centro de $M(A)$ y $\pi(C_0(X))A$ es denso en A.

Si X está claro del contexto o no nos importa mencionarlo decimos simplemente que A es propia. Al morfismo π en *ii)* lo llamamos el *morfismo estructural.*

Observación 4.1.3. *Si G es compacto, entonces el espacio de un punto, $*$, es un G-espacio propio y por lo tanto toda GC*-álgebra es propia sobre $*$. Esto se debe a que que $C_0(*) = \mathbb{C}$ y $\mathbb{C} \to M(A)$ dada por mandar la unidad en la unidad cumple con $\mathbb{C}1_{M(A)} \cdot A = A$.*

Recordemos que la topología *estricta* de $M(A)$ es la dada por la familia de seminormas

$$\|x\|_a = \|xa\| \text{ y } {}_a\|x\| = \|ax\|,$$

con $a \in A$. La observación más importante de esta topología es que $M(A)$ es la completación estricta de A y que una unidad aproximada de A es lo mismo que una red convergente estricta a $1 \in M(A)$ [WO93, Observación 2.3.2 y Lema 2.3.3].

Lema 4.1.4. *Sean A una GC*-álgebra propia sobre X y su π su morfismo estructural. Entonces si vemos a $C_0(X) \subseteq C_b(X)$, se tiene que π restringido a un conjunto acotado es continuo con la topología estricta.*

Demostración. Sea $\{u_\lambda\}$ una red acotada en $C_0(X)$ que es convergente en la topología estricta, es decir, existe u tal que para toda función $f \in C_0(X)$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|u_\lambda f - uf\| = 0.$$

Sean $a \in A$ y $\varepsilon > 0$. Según la condición *iii)* de la Definición 4.1.2,existen $g_1, \ldots, g_n \in C_0(X)$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$ de forma que

$$\|\sum_{i=1}^{n} \pi(g_i)a_i - a\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por otro lado, sea λ lo suficientemente grande como para que

$$\|u_\lambda g_i - ug_i\| < \frac{\varepsilon}{3n\|a_i\|} \qquad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\|\pi(u_\lambda)a - \pi(u)a\| \\
&= \|\pi(u_\lambda)a - \pi(u)a - \pi(u_\lambda)\sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i + \pi(u_\lambda)\sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i\| \\
&= \|\pi(u_\lambda)\left[a - \sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i\right] - \pi(u)a + \pi(u_\lambda)\sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i \\
&+ \pi(u)\sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i - \pi(u)\sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i\| \\
&= \|\pi(u_\lambda)\left[a - \sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i\right] - \pi(u)\left[a - \sum_{i=1}^{n}\pi(g_i)a_i\right] + \sum_{i=1}^{n}\pi(u_\lambda g_i - ug_i)a_i\| \\
&\leq \|\pi(u_\lambda)\|\frac{\varepsilon}{3} + \|\pi(u)\|\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto muestra lo que queríamos probar. □

Lema 4.1.5. *Sea A una GC*-álgebra propia sobre X. Entonces el morfismo estructural $\pi : C_0(X) \to M(A)$, se extiende a un morfismo equivariante unital $\hat{\pi} : C_b(X) \to M(A)$.*

Demostración. Sean $\{u_\lambda\}$ una unidad aproximada de $C_0(X)$ y $f \in C_b(X)$. Definimos un multiplicador $\widetilde{\pi}(f) : C_0(X)A \to C_0(X)A$ por

$$\hat{\pi}(f)\left(\sum_{i=1}^{n} \pi(g_i)a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \pi(fg_i)a_i.$$

Observar que esto está bien definido ya que si

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(g_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(h_i)b_i$$

entonces utilizando una unidad aproximada se concluye que

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(fg_i)a_i = \sum_{i=1}^{n} \pi(fh_i)b_i$$

Extendemos dicho multiplicador a A por continuidad. Esto claramente define un $*$-morfismo $\widetilde{\pi} : C_b(X) \to M(A)$. Finalmente, observemos que dicho multiplicador es unital ya que $\widetilde{\pi}(1)$ es el multiplicador identidad, que es la unidad de $M(A)$. □

Corolario 4.1.6. *Dar una estructura de GC^*-álgebra propia sobre X a A es lo mismo que dar un morfismo equivariante unital $C_b(X) \to M(A)$ que sobre conjuntos acotados es continuo para la topología estricta.*

Demostración. Los Lemas 4.1.4 y 4.1.5 indican que dicha estructura se extiende y que el morfismo resulta estricto continuo sobre acotados. Recíprocamente, dado dicho morfismo, utilizando una unidad aproximada acotada de $C_0(X)$ (que converge estrictamente a 1 en $C_b(X)$) se tiene que $\pi(C_0(X))A$ es denso en A. □

Lema 4.1.7. *Sean X e Y G-espacios propios localmente compactos y $f : Y \to X$ una función continua equivariante. Entonces $C_0(Y)$ es una GC^*-álgebra propia sobre X.*

Demostración. Como $M(C_0(Y)) = C_b(Y)$, afirmamos que $f^* : C_0(X) \to C_b(Y)$ sirve como morfismo estructural. Para ver esto sólo debemos observar que $f^*(C_0(X))C_0(Y)$ es denso en $C_0(Y)$. Esto se deduce de usar el teorema de Stone-Weierstrass junto con el hecho que $f^*(C_0(X))C_0(Y)$ separa puntos. □

En general, existe cierta libertad para la elección del espacio base de una GC^*-álgebra propia, como refleja la siguiente proposición.

Proposición 4.1.8. *Sean A una GC^*-álgebra propia sobre X, Y un G-espacio propio, localmente compacto y con base contable y $f : X \to Y$ es una función continua equivariante. Entonces $f^* : C_b(Y) \to C_b(X)$ compuesto con el morfismo estructural de A, le da a A una estructura de GC^*-álgebra propia sobre Y.*

Demostración. Sea $\pi : C_b(X) \to \mathcal{Z}(M(A))$ el morfismo estructural extendido según el Lema 4.1.5. El lema anterior junto con el Corolario 4.1.6 muestra que $f^* : C_b(Y) \to C_b(X)$ es continua con la topología estricta sobre conjuntos acotados y es unital. Entonces la composición $\pi \circ f^*$ sirve como morfismo estructural para A sobre Y. □

A partir de este punto, obviamos la mención del morfismo π para relajar la notación.

Proposición 4.1.9. *Sean A una GC^*-álgebra propia sobre X y B una GC^*-álgebra cualquiera, entonces $A \otimes B$ es una GC^*-álgebra propia sobre X.*

Demostración. Observemos que $M(A) \subseteq M(A) \otimes M(B) \subseteq M(A \otimes B)$. Es fácil ver que esta inclusión es unital y estricta continua sobre acotados, de manera que el resultado se deduce del Corolario 4.1.6. □

Ejemplo 4.1.10. *Si A es una GC^*-álgebra, $C_0(X, A) = C_0(X) \otimes A$ es una GC^*-álgebra propia sobre X.*

Las álgebras propias serán nuestro principal objeto de estudio a la hora de abordar la conjetura de Baum-Connes.

Definición 4.1.11. *Sea A una GC^*-álgebra propia sobre X. El* soporte *de un elemento $a \in A$ es el complemento del abierto W más grande en X tal que $f \cdot a =$ para toda $f \in C_0(W)$. Si U es un abierto de X, escribimos $A(U)$ para el subconjunto de elementos de A que tienen soporte en U. Si el soporte de un elemento es compacto, decimos que tiene soporte compacto. A los elementos con soporte compacto los notamos $A_c(X)$.*

Notar que $A_c(X)$ es denso en A. Por otro lado, si U es un abierto equivariante, entonces $A(U)$ es claramente una GC^*-álgebra propia sobre U ya que $A(U) = \overline{C_0(U)A}$. Notar también que $A(U)$ es propia sobre X.

Lema 4.1.12. *Sean A una GC^*-álgebra propia sobre X y $U \subseteq X$ un abierto. Entonces $A(U)$ es un ideal de $A = A(X)$. Si además U es equivariante entonces tenemos la sucesión exacta corta dada por*

$$0 \to A(U) \to A \to A/A(U) \to 0$$

y el cociente es una GC^*-álgebra propia sobre $X \setminus U$.

Demostración. Es claro que $A(U)$ es un ideal de A pues si $a \in A$ y $x \in A(U)$ entonces

$$\begin{aligned} f \cdot ax &= a(f \cdot x) = 0 \\ f \cdot xa &= (f \cdot x)a = 0 \end{aligned} \qquad \text{para toda } f \in C_0(X \setminus \overline{U})$$

y es claramente cerrado. Por otro lado, la proyección al cociente $A/A(U)$ induce un morfismo $\eta : M(A) \to M(A/A(U))$ que además es continuo con la topología estricta [WO93, Proposición 2.3.7]. Sea ahora $\pi : C_0(X) \to M(A)$. Tomando el morfismo $\eta \circ \pi$, éste se factoriza por $C_0(X)/C_0(U) = C_0(X \setminus U)$, lo que muestra que sirve como morfismo estructural. □

4.2. Los morfismos de estabilización y de ensamble

El objetivo de esta sección es definir y mostrar algunas propiedades de los morfismos de estabilización y de ensamble. Éstos son necesarios para definir y probar los resultados que deseamos acerca de la conjetura de Baum-Connes. Comenzamos con el morfismo de estabilización.

Estabilización

Definición 4.2.1. *Una función* de corte θ *("cut-off") para un G-espacio propio, localmente compacto y con base contable X, es una función continua y acotada $\theta : X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que cumple las siguientes propiedades.*

i) La intersección de sop θ *con cualquier subconjunto G-compacto de X es un conjunto compacto.*

ii) Para todo $x \in X$,

$$\int_G \theta(g^{-1}x)^2 \mathrm{d}g = 1$$

Siempre existen funciones de corte para un G-espacio propio [BCH94, Proposición 3.4]. Sean A una GC*-álgebra, $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ una representación covariante fiel y $k \in C_c(G \times G, A)$. Entonces k determina un operador $K \in \mathcal{B}(L^2(G, \mathcal{H}_A))$ vía el núcleo

$$K(\xi)(h) = \int_G \pi \circ k(h, g)(\xi(g))\mathrm{d}g.$$

Lema 4.2.2. *Sean A una GC*-álgebra y $\pi : A \to \mathcal{H}_A$ una representación covariante fiel. Vía la identificación $L^2(G, \mathcal{H}_A) = L^2(G) \otimes \mathcal{H}_A$, el operador K pertenece a $\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \pi(A)$.*

Demostración. El isomorfismo $L^2(G) \otimes \mathcal{H} \cong L^2(G, \mathcal{H})$ está dado en los tensores elementales por $\xi \otimes v \mapsto \xi \cdot v$. Veamos entonces como opera K sobre la imagen de los tensores elementales

$$K(\xi \cdot v)(h) = \int_G \pi \circ k(h, g)(\xi(g)v)\mathrm{d}g = \int_G \xi(g)\pi(k(h, g))(v)\mathrm{d}g.$$

Supongamos ahora que k es de la forma

$$k(h, g) = \sum_{i=1}^{n} f_i(h, g)a_i. \qquad (*)$$

Aquí, cada $f_i : G \times G \to \mathbb{C}$ es una función continua de soporte compacto y $a_i \in A$. Entonces $K(\xi \cdot v)(h)$ resulta

$$\begin{aligned}\int_G \xi(g)\pi(k(h,g))(v)\mathrm{d}g &= \int_G \xi(g) \sum_i f_i(h,g)\pi(a_i)(v)\mathrm{d}g \\ &= \sum_i \left(\int_G \xi(g) f_i(h,g)\mathrm{d}g \right) \pi(a_i)(v).\end{aligned}$$

Como cada f_i es continua de soporte compacto, las integrales

$$\int_G \xi(g) f_i(h,g)\mathrm{d}g$$

determinan operadores de Hilbert-Schmidt sobre $L^2(G)$, que son operadores compactos. En conclusión $K(\xi \cdot v)$ pertenece a $\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \pi(A)$. Usando la densidad de los tensores elementales en $L^2(G) \otimes \mathcal{H}$ y que todo elemento $k \in C_c(G \times G, A)$ puede aproximarse por elementos de la forma $(*)$, tenemos lo deseado. □

Dado que en el lema anterior π es fiel, es un $*$-isomorfismo con su imagen, identificamos $A \cong \pi(A)$.

Observación 4.2.3. *Si $\rho : G \to \mathrm{U}(\mathcal{H})$ es la acción de G en $\mathcal{H}$, el operador $\rho(g)K\rho(g)^*$ está dado por el núcleo*

$$k^g(h,h') = g(k(g^{-1}h, g^{-1}h'))$$

Procedemos a definir el morfismo de estabilización.

Lema 4.2.4. *Sea $a \in A_c(X)$ y θ una función de corte de X. Entonces el núcleo*

$$k_a(h,h') = h(\theta)h'(\theta)a \tag{4.1}$$

tiene soporte compacto.

Demostración. Sea $f \in C_c(X)$ una función con el mismo soporte que a. Fijemos $h, h \in G$. El soporte de la función $h(\theta)h'(\theta)f$ es

$$\mathrm{sop}\ k_a(h,h') = \{x \in \mathrm{sop}\ \theta : hx, h'x \in \mathrm{sop}\ a\}.$$

Notar que dicho conjunto es cerrado y está contenido en $\mathrm{sop}\ \theta \cap G \cdot \mathrm{sop}\ a$, por lo que es compacto según la Definición 4.2.1 *i)*. Consideremos la función

$$\begin{aligned}\lambda : G \times G \times \mathrm{sop}\ \theta &\to X \times X \times X \\ (h,h',x) &\mapsto (hx, h'x, x)\end{aligned}$$

Como el producto de funciones propias es propia y las funciones de estructura son propias como notamos después de la definición de espacio propio, λ es una función propia. Sea $\pi : G \times G \times \mathrm{sop}\ \theta \to G \times G$ la proyección en las primeras dos coordenadas. Afirmamos que el soporte de k_a está en $\pi(\lambda^{-1}(\mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ \theta \cap G \cdot \mathrm{sop}\ a))$. En efecto, si $k_a(h,h')$ no es nulo, entonces existe algún $x \in \mathrm{sop}\ k_a(h,h')$, por lo que $\lambda(h,h',x) \in \mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ \theta \cap G \cdot \mathrm{sop}\ a$. Finalmente, como $\pi(\lambda^{-1}(\mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ a \times \mathrm{sop}\ \theta \cap G \cdot \mathrm{sop}\ a))$ es compacto porque λ es propia, $\mathrm{sop}\ k_a$ también lo es. □

Definición 4.2.5. *Sean A una GC^*-álgebra propia sobre X, con una representación covariante y fiel en $\mathcal{H}$ y θ es una función de corte para X. Definimos el morfismo de estabilización*

$$\kappa : A \to \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes A$$

como el morfismo que a cada elemento $a \in A_c(X)$ le asigna el operador asociado al núcleo (4.1) *y luego extendiendo por continuidad.*

Proposición 4.2.6. *Sea A una GC^*-álgebra propia sobre un G-espacio X. El morfismo de estabilización $\kappa : A \to \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes A$ es en efecto un $*$-morfismo.*

Demostración. Alcanza con ver que κ restringido a $A_c(X)$ es un $*$-morfismo. Sea $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ una representación covariante fiel. Estudiaremos a κ con imagen en $\mathcal{B}(L^2(G, \mathcal{H}_A))$. Sean $a, b \in A_c(X)$. La linealidad es clara; veamos que preserva el producto. Por un lado se tiene que

$$\kappa(ab)(\xi)(h = \int_G \pi(h(\theta)g(\theta)ab)(\xi)(g)\mathrm{d}g.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\kappa(a)(\kappa(b)(\xi)(h)) &= \int_G \pi(h(\theta)g(\theta)a)(\kappa(b)(\xi)(g))\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(h(\theta)g(\theta)a)\left(\int_G \pi(g(\theta)s(\theta)b)(\xi(s))\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}g \\
&= \int_G \int_G \pi(h(\theta)g(\theta)a)\pi(g(\theta)b)(\xi(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}g \\
&= \int_G \int_G \pi(h(\theta)g(\theta)^2 s(\theta)ab)(\xi(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(h(\theta) \int_G g(\theta)^2\mathrm{d}g s(\theta)ab)(\xi(s))\mathrm{d}s \\
&= \int_G \pi(h(\theta)s(\theta)ab)(\xi(s))\mathrm{d}s \\
&= \kappa(ab)(\xi)(h).
\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el teorema de Fubini para intercambiar las variables de integración y el hecho que $\int_G g(\theta)^2\mathrm{d}g$ es la función constante 1 de acuerdo a su definición 4.2.1 *ii)*. Veamos ahora que preserva la involución. Sea $a \in A_c(X)$, calculamos el siguiente producto interno en $L^2(G, \mathcal{H}_A)$.

$$\begin{aligned}
\langle \kappa(a)(\xi), \zeta \rangle &= \int_G \langle \kappa(a)(\xi)(h), \zeta(h) \rangle \mathrm{d}h \\
&= \int_G \int_G \langle \pi(h(\theta)g(\theta)a)(\xi(g)), \zeta(h) \rangle \mathrm{d}g\mathrm{d}h \\
&= \int_G \int_G \langle \xi(g), \pi(h(\theta)g(\theta)a)^*(\zeta(h)) \rangle \mathrm{d}g\mathrm{d}h \\
&= \int_G \langle \xi(g), \int_G \pi(g(\theta)h(\theta)a^*)(\zeta(h))\mathrm{d}h \rangle \mathrm{d}g \\
&= \langle \xi, \kappa(a^*)(\zeta) \rangle
\end{aligned}$$

Aquí hemos utilizado el el teorema de Fubini para intercambiar las variables de integración y el hecho que $g(\theta)^* = g(\theta)$ ya que θ tiene imagen real. El cálculo anterior muestra que $\kappa(a)^* = \kappa(a^*)$. Esto concluye la demostración. □

Proposición 4.2.7. *Sea A una GC^*-álgebra propia sobre un G-espacio X. Entonces la clase de homotopía de κ es independiente de la función de corte θ elegida.*

Demostración. Dadas dos funciones de corte θ y θ', se tiene que para cada $0 \leq t \leq 1$, $\theta_t = \sqrt{t\theta^2 + (1-t)\theta'^2}$ también es una función de corte. Sean κ_θ y $\kappa_{\theta'}$ los morfismos de estabilización asociados a θ y θ' respectivamente. Entonces definimos el $*$-morfismo equivariante $H : A_c(X) \to I(\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes A)$ como el morfismo que asigna a cada a el operador asociado al núcleo

$$k(t)_a(h, h') = h(\theta_t)h'(\theta_t)a.$$

Al igual que antes esto está bien definido y es en efecto un $*$-morfismo. Extendiendo por continuidad obtenemos una homotopía $H : A \to I(\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes A)$. Es claro que $\mathrm{ev}_1 \circ H = \kappa_\theta$ y $\mathrm{ev}_0 \circ H = \kappa_{\theta'}$. Esto era lo que queríamos ver. □

En el caso que G es compacto, por ejemplo, una función de corte está dada por la función constantemente 1, y en ese caso $\kappa(a)$ es el operador asociado al núcleo constante a.

Teorema 4.2.8. *Si A es una GC^*-álgebra propia y $\mathcal{H}$ es el espacio de Hilbert estándar, entonces*

$$\kappa \otimes id : A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

es homotópico a un isomorfismo. Más aún, identificando $\mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \cong \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $\kappa \otimes id$ resulta homotópico a la identidad.

Demostración. Consideremos las inclusiones canónicas

$$i : \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathbb{C} \oplus L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

y

$$j : \mathbb{C} \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \to \mathcal{K}(\mathbb{C} \oplus L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

Observemos que en el segundo caso, j está dada por

$$j(\lambda \otimes T) = \lambda e \otimes T,$$

donde e es la proyección ortogonal de $\mathbb{C} \oplus L^2(G)$ sobre $\mathbb{C}$. Ambos son morfismos homotópicos a isomorfismos según el Teorema 3.1.1 y el Lema 3.1.2 ya que están inducidos por isometrías. Supongamos que la composición

$$A \xrightarrow{\kappa} A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \to A \otimes \mathcal{K}(\mathbb{C} \oplus L^2(G)) \tag{$\star$}$$

es homotópica a $a \mapsto a \otimes e$. Entonces obtenemos el resultado del enunciado, ya que en dicho caso, al tensorizar $(\star)$ con $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ obtenemos $id_A \otimes j$. Luego componiendo $(\star)$ con el inverso de i, obtenemos lo que deseamos. Probamos a continuación que $(\star)$ es homotópica a $a \mapsto a \otimes e$.

Sea $\mathcal{H}_A$ un G-espacio de Hilbert con una representación covariante fiel $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$. En lo que sigue identificamos A con su imagen. Si $a \in A$ es un elemento con soporte compacto, definimos

$$\eta(a) : L^2(G, \mathcal{H}_A) \to \mathcal{H}_A$$

por

$$\eta(a)(\xi) = \int_G \pi(g(\theta) \cdot a)(\xi(g))\mathrm{d}g,$$

donde θ es una función de corte para X. Mostraremos ahora varias propiedades que satisfacen tanto η como κ. Sean $a, b \in A_c(X)$.

1. $\eta(a)^*\eta(b) = \kappa(a^*b)$

   Antes debemos calcular $\eta(a)^* : \mathcal{H}_A \to L^2(G, \mathcal{H}_A)$. Sea $v \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \eta(a)(\xi), v\rangle &= \langle \int_G \pi(g(\theta) \cdot a)(\xi(g))\mathrm{d}g, v\rangle \\
&= \int_G \langle \pi(g(\theta) \cdot a)(\xi(g)), v\rangle \,\mathrm{d}g \\
&= \int_G \langle \xi(g), \pi(a^*(g(\theta))^*)(v)\mathrm{d}g \\
&= \langle \xi, \eta(a)^*(v)\rangle_{L^2(G,\mathcal{H})}.
\end{aligned}$$

Por lo que $\eta(a)^*(v)(g) = \pi(a^*g(\theta))(v)$. (Notar que $g(\theta)^* = g(\theta)$ porque θ tiene imagen real). Calculemos ahora $\eta(a)^*\eta(b)$

$$\begin{aligned}
(\eta(a)^*\eta(b))(\xi)(h) &= \eta(a)^* \left(\int_G \pi(g(\theta)\cdot b)(\xi(g))\mathrm{d}g \right)(h) \\
&= \pi(a^*h(\theta)) \left(\int_G \pi(g(\theta)\cdot b)(\xi(g))\mathrm{d}g \right) \\
&= \int_G \pi(a^*h(\theta)g(\theta)b)(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(a^*bh(\theta)g(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \kappa(a^*b)(\xi)(h)
\end{aligned}$$

2. $\eta(a)\eta(b)^* = \pi(ab^*)$.

$$\begin{aligned}
(\eta(a)\eta(b)^*)(v) &= \eta(a)\left(\pi(b^*g(\theta))(v)\right) \\
&= \int_G \pi(ag(\theta))(\pi(b^*g(\theta))(v))\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(ab^*g(\theta)^2)(v)\mathrm{d}g \\
&= \pi\left(ab^* \int_G g(\theta)^2\mathrm{d}g\right)(v) \\
&= \pi(ab^*)(v)
\end{aligned}$$

En la última igualdad hemos utilizado el hecho que $\int_G g(\theta)^2\mathrm{d}g$ es la función constantemente 1, de acuerdo a la definición de función de corte (Definición 4.2.1 *ii)*).

3. $\pi(a)\eta(b) = \eta(ab)$.

$$\begin{aligned}
(\pi(a)\eta(b))(\xi) &= \pi(a)\left(\int_G \pi(g(\theta)\cdot b)(\xi(g))\mathrm{d}g \right) \\
&= \int_G \pi(a)\pi(g(\theta)\cdot b)(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(abg(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \eta(ab)(\xi).
\end{aligned}$$

4. $\eta(a)\kappa(b) = \eta(ab)$.

$$
\begin{aligned}
(\eta(a)\kappa(b))(\xi) &= \eta(a)\left(\int_G \pi(bh(\theta)g(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g\right) \\
&= \int_G \pi(ah(\theta))\left(\int_G \pi(bh(\theta)g(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g\right)\mathrm{d}h \\
&= \int_G\int_G \pi(ah(\theta)h(\theta)g(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g\mathrm{d}h \\
&= \int_G \pi(abg(\theta)\int_G h(\theta)^2\mathrm{d}h)(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \int_G \pi(abg(\theta))(\xi(g))\mathrm{d}g \\
&= \eta(ab)(\xi).
\end{aligned}
$$

Aquí hemos utilizado el teorema de Fubini para intercambiar las variables de integración y el que $\int_G g(\theta)^2\mathrm{d}g$ es la función constante 1 de acuerdo a su definición (Definición 4.2.1 *ii)*). Todas estas propiedades muestran que para cada $s \in [0,1]$, la función

$$
a \mapsto \begin{pmatrix} s^2\pi(a) & s(1-s^2)^{1/2}\eta(a) \\ s(1-s^2)^{1/2}\eta(a^*)^* & (1-s^2)\kappa(a) \end{pmatrix}
$$

define un $*$-morfismo

$$
H(s) : A_c(X) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \oplus L^2(G,\mathcal{H}_A)) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes (\mathbb{C} \oplus L^2(G))).
$$

Este morfismo se puede extender a A por continuidad. Queda así definida una homotopía H. Ahora si $s = 0$ obtenemos la composición ($\star$) y si $s = 1$ obtenemos $a \otimes e$. Lo único que falta ver es que la imagen de la homotopía cae en realidad en $A \otimes \mathcal{K}(\mathbb{C} \oplus L^2(G))$, esto puede hacerse de la misma manera que el Lema 4.2.2. □

Corolario 4.2.9. *Sea A una GC^*-álgebra propia. Entonces el morfismo de estabilización define un elemento inversible de $\mathrm{E}_G(A, A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$. Y bajo la identificación*

$$
\mathrm{E}_G(A, A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \cong \mathrm{E}_G(A, A),
$$

el morfismo de estabilización induce la identidad.

Demostración. Esto se deduce del teorema anterior junto a la Proposición 3.2.2. □

El siguiente resultado es una generalización del Lema 3.3.2 al caso equivariante.

Proposición 4.2.10. *Sea A una GC^*-álgebra propia. Entonces para toda GC^*-álgebra B se tiene*

$$
\mathrm{E}_G(A, B) = [[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]].
$$

Demostración. La composición con κ da un isomorfismo

$$
\mathrm{E}_G(A, B) \to [[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]].
$$

Su inverso está dado por tensorizar con $\mathcal{K}(\mathcal{H})$

$$
[[\Sigma A, \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})]] \to \mathrm{E}_G(A, B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \cong \mathrm{E}_G(A, B).
$$

□

Ensamble

El morfismo de ensamble es la que da lugar a la conjetura de Baum-Connes. Paul Baum y Alain Connes definieron en [BC88, BCH94] este morfismo como un método de estudiar la K-teoría de productos cruzados de C*-álgebras a través de estudiar la K-homología del espacio propio universal $\mathcal{E}G$. En su formulación original la conjetura de Baum-Connes refiere al álgebra de grupo reducida de G o, lo que es lo mismo, el producto cruzado reducido $C^*_{red}(G, \mathbb{C})$. El estudio que le damos en este trabajo refiere al caso con coeficientes posiblemente distintos que $\mathbb{C}$ y para productos cruzados completos; este tratamiento sirve para los casos en los que los productos cruzados completos y reducidos coinciden (para las cuales existen grandes familias de grupos en lo que esto sucede sucede). Además, el contexto E-teórico se comporta mejor con los productos cruzados completos más que con los reducidos.

Sean Y un G-espacio propio y B una GC*-álgebra. Definimos $\mathrm{E}_G(Y, B)$ como

$$\mathrm{E}_G(Y, B) = \varinjlim \mathrm{E}_G(C_0(X), B).$$

Aquí el colímite está tomado sobre todos los G-subespacios $X \subseteq Y$ que son localmente compactos, G-compactos y con base contable. Detallamos un poco mejor los morfismos de transición del colímite. Sean X y X' son dos G-subespacios de Y localmente compactos, G-compactos y con base contable. Supongamos que $X \subseteq X'$. Afirmamos entonces que X es cerrado en X'. Esto se deduce de considerar los espacios de órbitas X/G y X'/G de la siguiente manera. Como X es G-compacto, se tiene que X/G es compacto. Además, se verifica fácilmente que $X/G \subseteq X'/G$ como subespacios topológicos. Como X'/G es Hausdorff, X/G es cerrado en X'/G. Como para la acción de un grupo, la función cociente $\pi : X' \to X'/G$ es cerrada, se tiene que $X = \pi^{-1}(X/G)$ es cerrado. Esto implica que la inclusión $X \to X'$ es una función propia (ya que entonces la preimagen de un compacto es un conjunto compacto). Entonces tenemos un $*$-morfismo equivariante $C_0(X') \to C_0(X)$, dado por la restricción, que induce en E_G-teoría el morfismo

$$\mathrm{E}_G(C_0(X), B) \to \mathrm{E}_G(C_0(X'), B).$$

Si X es un G-espacio propio, G-compacto, localmente compacto y con base contable y θ es una función de corte de X, entonces la función $p : G \to C_0(X)$ dada por

$$p(g) = g(\theta)\theta$$

es una proyección de $C_c(G, C_0(X))$. En efecto, p es una proyección ya que

$$\begin{aligned}(p \star p)(g) &= \int_G p(h)h(p(h^{-1}g))\mathrm{d}h \\ &= \int_G h(\theta)\theta g(\theta)h(\theta)\mathrm{d}g \\ &= \int_G h(\theta)^2\mathrm{d}hg(\theta)\theta \\ &= g(\theta)\theta.\end{aligned}$$

Por otro lado, como X es G-compacto, el soporte de θ es compacto. Sean $\lambda : G\times X \to X \times X$ la función que da la estructura de G-espacio a X y $\pi : G \times X \to G$ la proyección en la primera coordenada. Supongamos que existe $g \in G$ tal $p(g)$ es no nulo. Entonces existe un $x \in \text{sop}\ \theta$ de forma tal que $g^{-1}x \in \text{sop}\ \theta$; esto concluye (cambiando x por gx) que $\lambda(g, x) \in \text{sop}\ \theta \times \text{sop}\ \theta$. Esto muestra que el soporte de p está contenido en $\pi(\lambda^{-1}(\text{sop}\ \theta))$, como λ es propia, sop p es compacto. Llamamos a p *la proyección básica*. Notar que, al igual que antes, p depende de la elección de la función de corte; sin embargo, la clase de homotopía del morfismo

$$\begin{aligned} p : \mathbb{C} &\longrightarrow C^*(G, C_0(X)) \\ 1 &\longmapsto p \end{aligned}$$

es independiente de la función de corte elegida por la misma razón que el morfismo de estabilización κ lo es (Proposición 4.2.7).

Observación 4.2.11. *Como vimos en el Corolario 1.3.10, el funtor $C^*(G, -)$ pasa a la categoría $\mathfrak{A}G\mathcal{C}^*$ de manera natural, y por lo tanto induce un funtor $C^*(G, -) : \mathrm{E}_G \to \mathrm{E}$ que es el producto cruzado en los objetos. Al igual que en el Corolario 1.3.10, lo llamamos el funtor de descenso.*

Sean X un G-espacio propio, G-compacto, localmente compacto y con base contable y B una GC*-álgebra. El *morfismo de ensamble de Baum-Connes*, $\mu : \mathrm{E}_G(C_0(X), B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B))$ se define como la composición

$$\mathrm{E}_G(C_0(X), B) \xrightarrow{descenso} \mathrm{E}(C^*(G, C_0(X)), C^*(G, B)) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B)).$$

Aquí la segunda flecha es la inducida por $\mathbb{C} \to C^*(G, C_0(X))$ definida por $1 \mapsto p$. Observemos que si $X \subseteq X'$ son dos G-espacios propios, localmente compactos y con base contable, entonces es fácil ver que se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(C_0(X), B) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d] & \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B)) \\ \mathrm{E}_G(C_0(X'), B) \arrow[ur, "\mu"] & \end{tikzcd}$$

.

Definición 4.2.12. *Sea Y es un G-espacio propio y B una GC*-álgebra. El* morfismo de ensamble de Baum-Connes

$$\mu : \mathrm{E}_G(Y, B) = \underrightarrow{colím}\, \mathrm{E}_G(C_0(X), B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B))$$

es el morfismo inducido en el colímite por la familia

$$\{\mu : \mathrm{E}_G(C_0(X), B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B))\}_{X\subseteq Y}$$

donde X varía sobre todos los conjuntos G-compactos, localmente compactos y con base contable.

Observación 4.2.13. *Observar que de la definición se deduce fácilmente que el morfismo de ensamble es natural con respecto la variable B.*

Un G-espacio propio Y se dice *universal* si:

- Para cada G-espacio propio Z existe una función continua equivariante $Z \to Y$.
- La función del ítem anterior es única salvo homotopía equivariante.

En [BCH94, Apéndice 1] se muestra que para todo grupo topológico Hausdorff, localmente compacto y con base contable G, siempre existe un G-espacio propio universale; es único salvo equivalencia homotópica equivariante. Lo notamos $\mathcal{E}G$. De la unicidad también se desprende que $\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B)$ es independiente del modelo que uno elija de $\mathcal{E}G$. Por ejemplo, en el caso que G es compacto, $\mathcal{E}G = \star$.

Conjetura 4.2.14 (Conjetura de Baum-Connes para productos cruzados completos y con coeficientes)**.** *Sea G es un grupo topológico Hausdorff, localmente compacto y con base contable y B una GC^*-álgebra separable. Entonces el morfismo de ensamble*

$$\mu : \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B)),$$

es un isomorfismo de grupos.

La conjetura en su formulación original refiere a productos cruzados *reducidos* y en el caso que el álgebra de coeficientes B son los números complejos $B = \mathbb{C}$. El objetivo del resto este capítulo es tratar el caso de esta conjetura para grupos compactos y discretos y cuando el álgebra B es propia.

4.3. Los teoremas de Green-Julg

El teorema de Green-Julg dice que la conjetura de Baum-Connes es válida para el caso en que el grupo G es compacto. El objetivo de esta sección será mostrar una demostración de este hecho, junto a una generalización al caso en que G es discreto y los coeficientes forman una GC*-álgebra propia. Esto último lo realizamos gracias al desarrollo de las álgebras inducidas.

El teorema de Green-Julg

Teorema 4.3.1 (Green-Julg)**.** *Si G es un grupo compacto y A es una GC^*-álgebra entonces el morfismo de ensamble*

$$\mu : \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, A))$$

es un isomorfismo.

Recordemos que en el caso que G es compacto, todas las GC*-álgebras son propias como vimos en la Observación 4.1.3. Separaremos la demostración del teorema en varias partes para una mayor claridad.

Proposición 4.3.2. *Sea G un grupo compacto y A una GC^*-álgebra. Entonces existe un $*$-isomorfismo*

$$\psi : C^*(G, A) \to \{A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))\}^G,$$

donde $\{\cdot\}^G$ es la subálgebra de puntos fijos por la acción de G.

Demostración. Sea $\pi : A \to \mathcal{H}_A$ una representación covariante fiel y no degenerada de A en un G-espacio de Hilbert $\mathcal{H}_A$. Definimos la siguiente acción de G en $L^2(G, \mathcal{H}_A)$:

$$\psi(g)(\xi)(h) = \xi(hg).$$

Una observación pertinente de esta definición es que hemos adoptado la multiplicación a derecha de G en vez de la izquierda. Dado que G es compacto, no requerimos introducir la función modular en la representación.

Junto a esta acción introducimos una representación covariante (que por abuso de notación también llamamos ψ) de A en $L^2(G, \mathcal{H}_A)$ definida por

$$\psi(b)(\xi)(h) = \pi(h \cdot b)(\xi(h)).$$

Un cálculo directo muestra que efectivamente esta es una representación covariante.

Por la propiedad del producto cruzado podemos extenderla a una representación

$$\psi : C^*(G, A) \to \mathcal{B}(L^2(G, \mathcal{H}_A)).$$

Esta representación está dada por enviar a una función de soporte compacto $f : G \to B$ a

$$\begin{aligned}\psi(f)(\xi)(h) &= \int_G \psi(f(g))(\psi(g)(\xi)(h))\mathrm{d}g \\ &= \int_G \pi(h(f(g))(\xi)(hg))\mathrm{d}g \\ &= \int_G \pi(h(f(h^{-1}g))(\xi)(g))\mathrm{d}g.\end{aligned}$$

En otras palabras, $\psi(f)$ está representada por el núcleo $k_f(h, g) = hf(h^{-1}g)$. De acuerdo con la Observación 4.2.3, esto implica k_f está fijo por la acción de G, por lo que pertenece a $\{A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))\}^G$. Por otro lado, si suponemos que $k^g = k$ para todo $g \in G$, entonces

$$gk(g^{-1}h, g^{-1}h') = k(h, h') \quad \forall h, h' \in G.$$

Tomando $g = h$ se obtiene

$$hk(1, h^{-1}h') = k(h, h') \quad \forall h, h' \in G.$$

De manera que definiendo $f(h') = k(1, h')$, se concluye que todo operador en $\{A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))\}^G$ asociado a un núcleo de soporte compacto, es de la forma k_f para alguna $f \in C_c(G, A)$. Usando un argumento de densidad igual al del Lema 4.2.2, concluimos que $\psi : C^*(G, A) \to \{A \otimes \mathcal{K}(L^2(G))\}^G$ es sobreyectiva. La inyectivdad se sigue del hecho que ψ es la "forma integrada" de la representación π, que era fiel (ver [Wil07, Lema 2.26]). $\square$

Observación 4.3.3. *El isomorfismo ψ de la proposición anterior es natural con respecto a A en el siguiente sentido, si $\varphi : A \to B$ es un $*$-morfismo equivariante, se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{array}{ccc} C^*(G,A) & \xrightarrow{\varphi_*} & C^*(G,B) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_A} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_B} \\ A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) & \xrightarrow{\varphi \otimes id} & B \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \end{array} .$$

A continuación veremos que ψ permite definir un inverso al morfismo de ensamble. Observemos primero que se tiene un morfismo de grupos

$$\mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G,A)) \to \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G,A)),$$

simplemente pensando $C^*(G,A)$ como una GC*-álgebra con acción trivial. Definimos entonces ν como el único morfismo que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G,A)) & \xrightarrow{\psi_*} & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \\ \uparrow & & {\scriptstyle \kappa}\uparrow{\scriptstyle \cong} \\ \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G,A)) & \xrightarrow{\nu} & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A) \end{array} .$$

Demostración del Teorema 4.3.1. Afirmamos que ν es el inverso de μ. Para eso probamos por separado que ambas composiciones dan la identidad.

1. $\nu \circ \mu = id$.

Sea $[\varphi] \in \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, B)$, según la Proposición 4.2.10, esta clase está representada por un $*$-morfismo

$$\varphi : \Sigma \to \mathfrak{A}^n(\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Consideremos entonces el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & \xrightarrow{p} & C^*(G,\Sigma) & \xrightarrow{\varphi_*} & \mathfrak{A}^n(C^*(G, \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))) \\ & & \downarrow{\scriptstyle \psi_\Sigma} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})}} \\ & & \Sigma\mathcal{K}(L^2(G)) & \xrightarrow{\varphi \otimes id} & \mathfrak{A}^n(\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))) \end{array} .$$

Aquí p es el $*$-morfismo inducido por la proyección básica, que a cada función f le asigna la función $p \cdot f$. Esto está bien definido ya que la acción de G sobre Σ es trivial. Observemos entonces que la composición de la primera fila es exactamente $\mu[\varphi]$. Al componerla con la flecha vertical derecha obtenemos $\kappa\nu\mu[\varphi]$. La siguiente observación es que la composición $\psi_\Sigma \circ p$ es κ. En efecto, dado que G es compacto y $\mathcal{E}G = *$, la función de corte θ no es otra cosa que la función $* \to \{1\} \subset \mathbb{R}$. De manera que $p(f)$ resulta ser la función constante f. Por esa razón $\psi_\Sigma(p(f))$, está representada por el núcleo constante f, y dado que $\kappa(f)$ también está representada por el núcleo constante f ya $\theta = 1$, tenemos lo deseado. Del diagrama anterior se concluye entonces que $\kappa\nu\mu[\varphi] = (\varphi \otimes id) \circ \kappa$.

Consideremos ahora el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa"] & \mathfrak{A}^n(\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \arrow[d, "\mathfrak{A}^n(\kappa)"] \\
\Sigma\mathcal{K}(L^2(G)) \arrow[r, "\varphi \otimes id"] & \mathfrak{A}^n(\Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))
\end{tikzcd}.$$

La composición superior no es otra cosa que $\kappa[\varphi]$ y, por el paso anterior, la composición inferior es $\kappa\nu\mu[\varphi]$. Dado que κ es un isomorfismo, $[\varphi] = \nu\mu[\varphi]$.

2. $\mu \circ \nu = id$.

Sea $[\varphi] \in \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, A))$ la clase del $*$-morfismo

$$\varphi : \Sigma \to \mathfrak{A}^n(\Sigma C^*(G, A) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)).$$

Donde $\mathcal{H}_0$ un espacio de Hilbert sin acción de G o, equivalentemente, con la acción trivial. Consideramos φ como $*$-morfismo equivariante, tomando la acción trivial de G en Σ y en $\mathfrak{A}^n(\Sigma C^*(G, B) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_0))$. Antes de continuar hacemos la siguiente observación que facilitará algunas de las construcciones posteriores. Considerando que $\mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$ y Σ tienen acción de G trivial, se sigue de las propiedades universales del producto cruzado y del producto tensorial que

$$\Sigma C^*(G, A) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_0) = C^*(G, \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)).$$

En lo que sigue de la demostración hacemos tal identificación y notamos $A' = \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}_0)$. Consideremos ahora el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"] & C^*(G, \Sigma) \arrow[d, "\varphi_*"] \\
\mathfrak{A}^n(C^*(G, A')) \arrow[r, "\mathfrak{A}^n(\hat{p})"] \arrow[d, "="] & \mathfrak{A}^n(C^*(G, C^*(G, A')) \arrow[d, "\mathfrak{A}^n(\psi_*)"] \\
\mathfrak{A}^n(C^*(G, A')) \arrow[r, "\mathfrak{A}^n(\kappa_*)"] & \mathfrak{A}^n(C^*(G, A' \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))
\end{tikzcd}.$$

Procedemos a explicar los morfismos involucrados en el diagrama a continuación: $\hat{p}$ es el morfismo dado por la proyección básica que manda a un elemento f a $p \cdot f$; ψ_* es el morfismo inducido por la composición con morfismo $\psi_{C^*(G,A')}$. Finalmente, κ_* está inducida por la composición con el morfismo de estabilización $\kappa : A' \to A' \otimes L^2(G)$.

Es fácil ver que el cuadrado superior del diagrama conmuta. Afirmamos que el cuadrado inferior conmuta salvo homotopía. Para esto analicemos los morfismos $\psi_* \circ \hat{p}$ y κ_*. Como $\theta = 1$ ya que G es compacto, $\hat{p}$ es la inclusión de $C^*(G, A')$ en $C^*(G, C^*(G, A'))$ como las funciones constantes. Esto nos dice que $\psi_* \circ \hat{p}(f)$ es la función constante $\psi(f)$ como operador en $A' \otimes L^2(G)$ representado por el núcleo

$$\psi(f)(h, h') = hf(h^{-1}h')$$

Por otro lado $\kappa_*(f)$ es la función que a cada $g \in G$ le asigna el operador $\kappa(f(g))$, pero como $\theta = 1$, se tiene que $\kappa(f(g)) = f(g)$, donde vemos a $f(g)$ como operador de $A' \otimes \mathcal{K}(L^2(G))$ de la siguiente manera

$$\kappa(f(g)) = \int_G \pi(f(g))(\xi(g_1))\mathrm{d}g_1 = \pi(f(g))\left(\langle \xi, 1 \rangle\right).$$

Así, $\kappa(f(g))$ actúa por $f(g)$ en $\mathcal{H}_A$ y por la proyección a las constantes en $L^2(G)$.

Si identificamos $C^*(G, A' \otimes \mathcal{K}(L^2(G)))$ con $\{A' \otimes \mathcal{K}(L^2(G)) \otimes \mathcal{K}(L^2(G))\}^G$, $\psi_* \circ \hat{p}(f)$ es el operador representado por el núcleo constante $A' \otimes L^2(G)$-valuado $\psi(f)$, esto sucede ya que $\psi(f)$ tiene acción de G trivial. Este operador, al igual que antes, se traduce a la acción de $\psi(f)$ en $\mathcal{H}_A \otimes L^2(G)$ y a la proyección a las constantes en la otra copia de $L^2(G)$. Por otra parte $\kappa_*(f)$ es el operador representado por el núcleo $A' \otimes L^2(G)$-valuado

$$\kappa_*(f)(k, k') = k\kappa(f(k^{-1}k'))$$

Como $\kappa(f(g)) = f(g)$, esto es simplemente $k(f(k^{-1}k'))$. Observemos entonces que si intercambiamos las copias de $\mathcal{K}(L^2(G))$ obtenemos un isomorfismo que envía $\kappa_*(f)$ en $\psi_* \circ \hat{p}(f)$. Como este intercambio de las copias está inducido por el isomorfismo unitario que intercambia las copias de $L^2(G)$, según el Lema 3.1.4, el cuadrado inferior conmuta salvo homotopía.

Finalmente, la composición $\mathfrak{A}^n(\psi_*) \circ \varphi_* \circ p$ es exactamente $\kappa\mu\nu[\varphi]$. De acuerdo a la conmutatividad del diagrama, esto es lo mismo que que $\mathfrak{A}^n(\kappa_*)\varphi = \kappa[\varphi]$, usando que κ es un isomorfismo se obtiene $\mu\nu[\varphi] = [\varphi]$. □

Inducción y compresión

El objetivo de esta subsección es el de construir una herramienta que sirva para generalizar el teorema de Green-Julg. Aunque la construcción sirve en muchos casos para cualquier grupo, nos centramos en el caso discreto. Por lo tanto, a partir de esta subsección, hasta el final del capítulo G denotará a *un grupo discreto contable.*

Definición 4.3.4. *Sean $H \subseteq G$ un subgrupo finito y A una H-C^*-álgebra. Definimos* el álgebra inducida $\mathrm{Ind}_H^G A$ *como*

$$\mathrm{Ind}_H^G A = \{f \in C_0(G, A) : f(gh) = h^{-1}f(g), \forall g \in G, h \in H\}$$

Observemos que G actúa sobre $\mathrm{Ind}_H^G A$ por traslación a izquierda, es decir

$$(g \cdot f)(g') = f(g^{-1}g').$$

Dado que G es discreto, la condición de G-continuidad es vacua, por lo que $\mathrm{Ind}_H^G A$ es una GC*-álgebra. Además, $\mathrm{Ind}_H^G A$ es una GC*-álgebra propia sobre G/H, pensando $C_0(G/H)$ como funciones de $C_0(G)$ que son constantes sobre los cosets izquierdos de H. La multiplicación de $C_0(G/H)$ en $\mathrm{Ind}_H^G A$ es simplemente la multiplicación punto a punto.

Tenemos también una construcción recíproca a la del álgebra inducida.

Definición 4.3.5. *Sea $H \subseteq G$ un subgrupo finito de G y A una GC*-álgebra propia sobre G/H, la* compresión *de A a H es*

$$\mathrm{Comp}_H^G A = \mathbb{1}_{eH} \cdot A,$$

donde eH es el coset de la identidad en G/H y $\mathbb{1}$ es la función indicadora.

Observemos que la compresión está bien definida, ya que como G es discreto, $\mathbb{1}_{eH} \in C_0(G/H)$

Lema 4.3.6. *Sea B una GC*-álgebra propia sobre G/H. Entonces $\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Comp}_H^G B) \cong B$ como GC*-álgebras.*

Demostración. Sean $\mathbb{1}_{eH}$ la función indicadora del coset de la identidad de G/H y $A = \mathrm{Comp}_H^G B$. A es una subálgebra de B que es H-invariante. Definimos entonces un $*$-morfismo $\varphi : \mathrm{Ind}_H^G A \to B$ por

$$f \mapsto \sum_{[g] \in G/H} gf(g).$$

Como $f \in \mathrm{Ind}_H^G A$, el elemento $gf(g)$ no depende del representante de la clase $[g]$. Aunque esta suma es (posiblemente) infinita, podemos definirlo sobre los elementos de $\mathrm{Ind}_H^G A$ que tienen soporte finito, que es una unión creciente de C*-subálgebras; esto permite extender la definición a todo $\mathrm{Ind}_H^G A$.

El inverso de este $*$-morfismo está dado por la aplicación $\psi : B \to \mathrm{Ind}_H^G A$

$$b \to f_b(g) = \mathbb{1}_{eH}(g^{-1}(b)).$$

En efecto

$$\begin{aligned}
\psi \circ \varphi(f)(g) &= \mathbb{1}_{eH} g^{-1}\Big(\sum_{[g_1]\in G/H} g_1 f(g_1)\Big) \\
&= \sum_{[g_1]\in G/H} \mathbb{1}_{eH} g^{-1} g_1 f(g_1) \\
&= \sum_{[g_1]\in G/H} \mathbb{1}_{eH} g^{-1} g_1 (\mathbb{1}_{eH} f(g_1)) \\
&= \sum_{[g_1]\in G/H} \mathbb{1}_{eH} g^{-1} g_1 (\mathbb{1}_{eH}) g^{-1} g_1 (f(g_1)) \\
&= \sum_{[g_1]\in G/H} \delta_{g,g_1} g^{-1} g_1 (f(g_1)) \\
&= f(g).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi \circ \psi(b) &= \sum_{[g_1]\in G/H} g_1(\mathbb{1}_{eH} g_1^{-1}(b)) \\
&= \sum_{[g_1]\in G/H} \mathbb{1}_{g_1 H} b \\
&= 1 \cdot b = b.
\end{aligned}$$

□

Tenemos también el resultado recíproco.

Lema 4.3.7. *Sea A una H-C*-álgebra. Entonces* $\mathrm{Comp}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G A) \cong A$. *En particular A es isomorfa a una subálgebra de* $\mathrm{Ind}_H^G A$

Demostración. De manera similar a la prueba del lema anterior definimos dos morfismos inversos. Por un lado se tiene $\mathrm{ev}_e : \mathrm{Comp}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G A) \to A$, la evaluación en el elemento identidad de G. El morfismo inverso $A \to \mathrm{Comp}_H^G(\mathrm{Ind}_H^G A)$ es el definido por enviar un elemento A a la función $f(g) = \mathbb{1}_H(g) g^{-1}(a)$. Un cálculo rápido muestra que en efecto, estas dos operaciones son inversas. □

Antes de continuar, observemos que la operación de inducir es funtorial con respecto a $*$-morfismos H-equivariantes. La funtorialidad está dada por enviar un morfismo $\varphi : A \to B$ a

$$\mathrm{Ind}_H^G \varphi : \mathrm{Ind}_H^G A \to \mathrm{Ind}_H^G B$$

dado por φ_*. Sin embargo, hacemos una descripción alternativa de $\mathrm{Ind}_H^G \varphi$ que será más útil para hacer cálculos posteriormente. Según los Lemas 4.3.6 y 4.3.7 podemos identificar a una H-C*-álgebra A como subálgebra de $\mathrm{Ind}_H^G A$. Afirmamos que éstas inclusiones son naturales, en el sentido que dado un $*$-morfismo H-equivariante

$\varphi : A \to B$ obtenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, hook] & B \arrow[d, hook] \\ \mathrm{Ind}_H^G A \arrow[r, "\mathrm{Ind}_H^G \varphi"] & \mathrm{Ind}_H^G B \end{tikzcd}.$$

En efecto, el diagrama conmuta ya que para todo $g \in G$, tenemos que

$$\varphi(\mathbb{1}_{eH}(g)g^{-1}(a)) = \mathbb{1}_{eH}(g)g^{-1}(\varphi(a)).$$

Esto se deduce del hecho que φ es H equivariante y que $\mathbb{1}_{eH}(g)g^{-1}(a)$ sólo es no nulo cuando g está en H. Por esta razón el isomorfismo expresado en el Lema 4.3.6 también es natural. Se puede pensar entonces que $\mathrm{Ind}_H^G A$ es el "álgebra ambiente" de A que en el Lema 4.3.6 es B. Teniendo esta consideración, un manera alternativa de definir $\mathrm{Ind}_H^G \varphi$, sería identificar $\mathrm{Ind}_H^G A$ con $\mathrm{Ind}_H^G(\mathbb{1}_{eH}\mathrm{Ind}_H^G A)$ aplicar φ_* y luego hacer la identificación recíproca con B. Esta composición resulta en

$$\Phi(f) = \sum_{g \in G/H} g(\varphi(g^{-1}(f)\mathbb{1}_{eH})).$$

Esto puede verse inmediatamente que es lo mismo que φ_*.

Observación 4.3.8. *Observar en particular que si $f = f\mathbb{1}_{eH}$ entonces $\mathbb{1}_{eH}\Phi(f) = \varphi(f)$. Esto se condice con restringir y correstringir φ_* a A y B.*

Lema 4.3.9. Ind_H^G *es continuo y exacto.*

Observación 4.3.10. *La condición de continuidad sobre el funtor*

$$\mathrm{Ind}_H^G : H\mathcal{C}^* \to G\mathcal{C}^*$$

se traduce a que $\mathrm{Ind}_H^G C_b(I, A)_H$ tiene una transformación natural a $C_b(I, \mathrm{Ind}_H^G A)_G$ inducida por las evaluaciones.

Demostración del Lema 4.3.9. La exactitud es clara salvo tal vez el hecho que preserva epimorfismos. Sea $\varphi : A \to B$ un epimorfismo y una sección continua $s : B \to A$ (no necesariamente lineal) del mismo, esta sección existe según el Teorema de Bartle-Graves 1.1.10. Sea $f \in \mathrm{Ind}_H^G B$. Aunque $s \circ f$ es una función continua, no necesariamente pertenece a $\mathrm{Ind}_H^G A$, para eso, usando que H es finito definimos la función

$$\tilde{f}(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(s \circ f)(gh).$$

Es claro que $\varphi_*(\tilde{f}) = f$, falta ver que $\tilde{f} \in \mathrm{Ind}_H^G A$. Para eso calculamos $\tilde{f}(h'g)$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(gh') &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h(s \circ f)(gh'h) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} h'^{-1}h(s \circ f)(gh) \\ &= h'^{-1}\tilde{f}(g). \end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{f} \in \mathrm{Ind}_H^G A$.

Continuamos con la condición de continuidad. Debemos ver que la aplicación

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G(C_b(I,A)_H) &\longrightarrow C_b(I,\mathrm{Ind}_H^G A)_G\\ f(g)(t) &\longmapsto \hat{f}(t)(g)=f(g)(t)\end{aligned}$$

está bien definida. El hecho que $\tilde{f} \in C_b(I,\mathrm{Ind}_H^G A)$ es continua es claro salvo tal vez la continuidad con respecto a t. Para eso sean $t,t' \in I$; observemos que

$$\|\hat{f}(t)-\hat{f}(t')\| = \|\mathrm{ev}_t \circ f - \mathrm{ev}_{t'} \circ f\| = \|f(-)(t)-f(-)(t')\|.$$

Supongamos ahora que f tiene soporte compacto. Como f es continua, por la compacidad del soporte, obtenemos finitos abiertos $U_1,\ldots,U_k$ de G, de forma que si $\|t-t'\|<\delta_i$ entonces $\|f(g)(t)-f(g)(t')\|<\varepsilon$ para cada $g\in U_i$, tomando δ como el mínimo de los δ_i, tenemos entonces que si $|t-t'|<\delta$ entonces

$$\|f(-)(t)-f(-)(t')\|<\varepsilon.$$

Por lo que $\hat{f}$ es continua. Si f no tiene soporte compacto, con un argumento de densidad obtenemos lo que queremos.

Falta ver el hecho que f es G-continua, pero esto es trivialmente cierto ya que G es discreto. □

Como Ind_H^G es continuo y exacto, existe un morfismo natural

$$\mathrm{Ind}_H^G\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}\mathrm{Ind}_H^G,$$

de la misma manera que en el capítulo 1.

Lema 4.3.11. *Dada A una H-C^*-álgebra y B una GC^*-álgebra, entonces hay un isomorfismo*

$$\mathrm{Ind}_H^G A\otimes B \cong \mathrm{Ind}_H^G(A\otimes B),$$

que sobre los tensores elementales está definida por

$$f\otimes b \mapsto (g\mapsto f(g)\otimes g^{-1}b).$$

Demostración. Se puede ver fácilmente que el $*$-morfismo definido por el enunciado cumple lo requerido. □

Sea $H\subseteq G$ un subgrupo finito. Notemos que el espacio de Hilbert estándar para G se puede restringir a H obteniendo el espacio de Hilbert estándar para H. El lema anterior nos permite concluir que dado un $*$-morfismo

$$\varphi:\Sigma A\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\to\mathfrak{A}^n(\Sigma B\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

y aplicando Ind_H^G obtenemos

$$\mathrm{Ind}_H^G\varphi:\Sigma\mathrm{Ind}_H^G A\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\to\mathfrak{A}^n(\Sigma\mathrm{Ind}_H^G B\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

De esta manera obtenemos un morfismo

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H(A, B) \to \mathrm{E}_G(\mathrm{Ind}_H^G A, \mathrm{Ind}_H^G B).$$

Más aún, esto nos da un funtor $\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H \to \mathrm{E}_G$, ya que el hecho de que preserva composiciones se deduce de su funtorialidad a nivel de H-C*-álgebras. Procedemos a generalizar esta construcción un poco más.

Sean A una GC*-álgebra propia sobre Y, $X \subseteq Y$ un cerrado y $H \subseteq G$ un subgrupo finito. Definimos

$$A[X] = A/A(Y \setminus X)$$

Si X es un H-compacto, que debido a la finitud de H, es lo mismo que un conjunto compacto H-invariante y $X \subseteq Z \subseteq Y$ es un G-compacto, podemos definir el $*$-morfismo G-equivariante

$$\begin{aligned} A[Z] &\longrightarrow \mathrm{Ind}_H^G A[X] \\ a &\longmapsto f(g) = [g^{-1}(a)]. \end{aligned}$$

En donde los corchetes $[\cdot]$ significan tomar la proyección al cociente $A[Z] \to A[X]$. Esto nos permite definir la composición

$$\mathrm{E}_H(A[X], B) \xrightarrow{\mathrm{Ind}_H^G} \mathrm{E}_G(\mathrm{Ind}_H^G A[X], \mathrm{Ind}_H^G B) \to \mathrm{E}_G(A[Z], \mathrm{Ind}_H^G B).$$

Tomando colímite sobre todos los $X \subseteq Z$ compactos H-invariantes tenemos

$$\mathrm{Ind}_H^G : \varinjlim \mathrm{E}_H(A[X], B) \to \mathrm{E}_G(A[Z], \mathrm{Ind}_H^G B).$$

En el caso particular que $A = C_0(Z)$ obtenemos

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H(Z, B) \to \mathrm{E}_G(Z, \mathrm{Ind}_H^G B).$$

Analizamos este morfismo con un poco de detalle ya que será útil más adelante. La clase de un elemento en $\mathrm{E}_H(Z, B)$ está representada por

$$\varphi : \Sigma C_0(X) \to \mathfrak{A}^n(\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})).$$

Aquí $X \subseteq Z$ es un conjunto compacto H-invariante. Identificando B con una subálgebra de $\mathrm{Ind}_H^G B$ como en la discusión posterior al Lema 4.3.7, el morfismo de inducción envía φ a

$$\Phi : \Sigma C_0(Z) \to \mathfrak{A}^n(\Sigma \mathrm{Ind}_G^H B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

definida por

$$\Phi(f) = \sum_{[g] \in G/H} g\varphi(g^{-1}(f)|_X)$$

Aquí $|_X$ significa la restricción a X dada por el cociente $C_0(Z) \to C(X)$. Observemos que esto está bien definido ya que sobre $\Sigma C_c(Z)$ la suma es finita y después extendemos a $C_0(Z)$ por continuidad. Ahora tomamos colímite sobre todos los conjuntos $Z \subseteq Y$ que son G-compactos. Entonces obtenemos *el morfismo de inducción*

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H(Y, B) \to \mathrm{E}_G(Y, \mathrm{Ind}_H^G B).$$

El objetivo de esta subsección será ver que este morfismo es un isomorfismo en el caso que $Y = \mathcal{E}G$. Para esto estudiaremos otro morfismo relacionado, que será más fácil de analizar.

Definición 4.3.12. *Sean H un subgrupo finito de G, A una GC^*-álgebra propia sobre G/H y B una GC^*-álgebra cualquiera. El* morfismo de compresión

$$\mathrm{Comp}_H^G : \mathrm{E}_G(A, B) \to \mathrm{E}_H(\mathrm{Comp}_H^G A, B),$$

está dado por la composición con la inclusión $\mathrm{Comp}_H^G A \hookrightarrow A$.

Observación 4.3.13. *Antes de continuar hacemos descripción del morfismo de estabilización que será necesaria en el siguiente lema. Como en nuestro caso H es un subgrupo finito de G, notemos que podemos identificar $L^2(G/H)$ con el subespacio de $L^2(G)$ conformado por las funciones H-invariantes. Si podemos elegir una función de corte θ que sea H-*invariante*, el morfismo de estabilización se podrá correstringir a $\kappa : A \to A \otimes L^2(G/H)$. Tomando $\theta = \mathbb{1}_{eH}$, el morfismo de estabilización queda definido por*

$$\kappa(a) = \sum_{[g] \in G/H} \mathbb{1}_{gH} a \otimes e_g$$

donde e_g es la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\mathbb{1}_{gH}$.

Lema 4.3.14. *El morfismo de compresión es un isomorfismo.*

Demostración. Definiremos un morfismo de “inflación”

$$I_H^G : \mathrm{E}_H(\mathrm{Comp}_H^G A, B) \to \mathrm{E}_G(A, B)$$

que será el inverso del morfismo de compresión. Notamos $A' = \Sigma A \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $B' = \Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $C = \mathrm{Comp}_H^G A$ y $C' = \Sigma C \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Observemos que C' es la compresión de A' debido al Lema 4.3.11. Un elemento de $\mathrm{E}_H(C, B)$ está representado por un $*$-morfismo H-equivariante

$$\varphi : C' \to \mathfrak{A}^n B'.$$

Definimos la *inflación* de φ

$$\Phi : A' \to \mathfrak{A}^n(B' \otimes \mathcal{K}(L^2(G/H)))$$

como

$$\Phi(a) = \sum_{[g] \in G/H} g(\varphi(\mathbb{1}_{eH}\, g^{-1} \cdot a)) \otimes e_g.$$

Aquí e_g es la proyección ortogonal al subespacio de dimensión uno generado por la función indicadora del coset gH. La suma anterior la interpretamos como la extensión natural del morfismo definido sobre los elementos de A_c.

Si procedemos a inflar y luego comprimimos, obtenemos

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbb{1}_{eH}a) &= \sum_{[g]\in G/H} g(\varphi(\mathbb{1}_{eH}g^{-1}(\mathbb{1}_{eH}a)))\otimes e_g\\ &= \sum_{[g]\in G/H} g(\varphi(\delta_{g,e}g^{-1}(a)))\otimes e_g\\ &= \varphi(a)\otimes e_e.\end{aligned}$$

Identificando $\varphi(a)\otimes e_e$ con $\varphi(a)$ en $\mathrm{E}_H(C,B)$ (ya que e_e es H-invariante), tenemos que $\mathrm{Comp}^G_H \circ I^G_H(\varphi) = \varphi$. Procedemos a calcular la otra composición. Sea $\Psi : A' \to \mathfrak{A}^n B'$ un $*$-morfismo G-equivariante que representa una clase de $\mathrm{E}_G(A,B)$. Si aplicamos el morfismo de compresión y luego inflamos obtenemos el morfismo

$$\Phi : A' \to \mathfrak{A}^n(B'\otimes \mathcal{K}(L^2(G/H)))$$

definido por

$$\begin{aligned}\Phi(a) &= \sum_{[g]\in G/H} g(\Psi(\mathbb{1}_{eH}\, g^{-1}\cdot a))\otimes e_g\\ &= \sum_{[g]\in G/H} \Psi(\mathbb{1}_{eH}a)\otimes e_g\end{aligned}$$

Pero esto es exactamente la composición

$$A' \xrightarrow{\kappa} A'\otimes\mathcal{K}(L^2(G/H)) \xrightarrow{\Psi\otimes id} \mathfrak{A}^n(B'\otimes\mathcal{K}(L^2(G/H))),$$

que según el Teorema 4.2.8, induce la misma clase que Ψ en E_G-teoría. □

A continuación probamos un lema que es el primer paso a mostrar lo que deseamos.

Lema 4.3.15. *Sean H y J subgrupos finitos de G y B una H-C^*-álgebra. Entonces el morfismo de inducción*

$$\mathrm{Ind}^G_H : \mathrm{E}_H(G/J,B) \to \mathrm{E}_G(G/J,\mathrm{Ind}^G_H B)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Comenzamos observando que la compresión de $C_0(G/J)$ es simplemente $C_0(eJ) = C_0(\star) = \mathbb{C}$. Según el lema anterior tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Comp}^G_J : \mathrm{E}_G(G/J,\mathrm{Ind}^G_H B) \xrightarrow{\cong} \mathrm{E}_J(\star,\mathrm{Ind}^G_H B).$$

Mostraremos que la composición de inducción y compresión

$$\mathrm{E}_H(G/J,B) \xrightarrow{\mathrm{Ind}^G_H} \mathrm{E}_G(G/J,\mathrm{Ind}^G_H B) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Comp}^G_H} \mathrm{E}_J(\star,\mathrm{Ind}^G_H B) \qquad (1)$$

es un isomorfismo. De acuerdo al lema anterior, obtenemos el resultado del enunciado.

Para simplificar notación, escribimos $D = \mathrm{Ind}_H^G B$. Notemos que la compresión de D a H es B, por lo que $B = D[eH] = D[\star]$. Sean $X \subseteq G/J$, $Y \subseteq G/H$. Definimos

$$A'[X] = \Sigma C_0(X) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$$

y

$$D'[Y] = \Sigma D[Y] \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}).$$

La clase de un elemento de $\mathrm{E}_H(G/J, D[\star])$ está representada por un $*$-morfismo H-equivariante

$$\varphi : A'[X] \to \mathfrak{A}^n(D'[\star])$$

donde X es un conjunto finito H-invariante. La composición (1) envía dicho morfismo al morfismo $\psi : A'[\star] \to D'[G/H]$, definido por

$$\psi(a) = \sum_{[g] \in G/H} g(\varphi(g^{-1}(a)|_X).$$

En donde estamos viendo $A'[\star]$ como subálgebra de $A'[G/J]$ vía compresión. Observemos además que en este caso la suma es finita, de manera que está bien definida. Teniendo una descripción de la composición (1), procedemos a definir el morfismo inverso

$$\mathrm{E}_J(\star, D[G/H]) \to \mathrm{E}_H(G/J, D[\star]). \tag{2}$$

Para ésto observemos primero que $D[G/H]$, como JC*-álgebra, es un colímite filtrante de subálgebras $D[Y]$, donde Y varía sobre todos los subconjuntos finitos J-invariantes. Por otro lado, el Teorema de Green-Julg 4.3.1 nos permite asegurar que $\mathrm{E}_J(\star, D[Y])$ es isomorfo a $\mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(J, D[Y])) \cong K_0(C^*(J, D[Y]))$ 3.3.4. Como K_0 preserva colímites filtrantes [Bla98, Sección 5.2], obtenemos

$$\mathrm{E}_J(\star, D[G/H]) \cong \underset{\to}{\mathrm{colím}}\, \mathrm{E}_J(\star, D[Y]).$$

Por lo tanto, todo elemento de $\mathrm{E}_J(\star, D[G/H])$ se puede expresar como un morfismo

$$\psi : A'[\star] \to \mathfrak{A}^n(D'[Y])$$

con $Y \subseteq G/H$ finito J-invariante. Definimos ahora nuestro inverso (2). Sea $\psi : A'[\star] \to \mathfrak{A}^n(D'[Y])$ un $*$-morfismo H-equivariante con $Y \subseteq G/H$ finito J-invariante. Definimos (2) como el morfismo que envía ψ a $\varphi : A'[G/J] \to \mathfrak{A}^n(D'[\star] \otimes \mathcal{K}(L^2(G/J)))$ definida por

$$\varphi(a) = \sum_{[g] \in G/J} [g(\psi(g^{-1}a|_{eJ})] \otimes e_g.$$

Aquí $|_{eJ}$ significa la restricción de $g^{-1}a$ a $A'[\star]$ y los corchetes significan la restricción a $D'[\star]$; al igual que en la discusión anterior, e_g es la proyección ortogonal de $L^2(G/J)$ en el subespacio generado por $\mathbb{1}_{gJ}$. Observemos nuevamente que la suma es finita.

Como una observación que será útil para realizar los cálculos, notemos que restringir a una subálgebra del tipo $A[X]$ o $D[Y]$es exactamente multiplicar por la función indicadora $\mathbb{1}_X$ o $\mathbb{1}_Y$. También notemos que $g(1_X)$ es la función $\mathbb{1}_X(g^{-1}x)$ que se traduce en $\mathbb{1}_g X$.

Tomemos ahora un morfismo $\varphi : A'[X] \to \mathfrak{A}^n(D'[\star])$, con $X \subseteq G/J$ finito H-invariante. Aplicando (1) y luego (2) se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(a) &= \sum_{[h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH}\, h\, \psi(h^{-1}(a)\mathbb{1}_{eJ}) \otimes e_g \\ &= \sum_{[g]\in G/H} \mathbb{1}_{eH}\, h \left(\sum_{[g]\in G/J} g\, \varphi(g^{-1}(h^{-1}(a)\mathbb{1}_{eJ})\mathbb{1}_X) \right) \otimes e_h \\ &= \sum_{[g]\in G/H, [h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH} hg(\varphi((hg)^{-1}(a\mathbb{1}_{hJ}\mathbb{1}_{gX})) \otimes e_h.\end{aligned}$$

Considerando ahora que la imagen de φ está en $\mathfrak{A}^n(D'[\star])$, por lo que $\varphi(a) = \mathbb{1}_{eH}\varphi(a)$, obtenemos

$$\tilde{\varphi}(a) = \sum_{[g]\in G/H, [h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH} hg(\mathbb{1}_{eH})\varphi((hg)^{-1}(a\mathbb{1}_{hJ}\mathbb{1}_{gX})) \otimes e_h.$$

Dado que $\mathbb{1}_{eH} hg(\mathbb{1}_{eH})$ es no nulo si y sólo si, $hg \in H$ y además φ es H equivariante se sigue que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(a) &= \sum_{[g]\in G/H, [h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH} hg(\mathbb{1}_{eH})\varphi((hg)^{-1}(a\mathbb{1}_{hJ}\mathbb{1}_{gX})) \otimes e_h \\ &= \sum_{[g]\in G/H, [h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH}\varphi(a\mathbb{1}_{hJ}\mathbb{1}_{gX}) \otimes e_h \\ &= \sum_{[h]\in G/J} \varphi(a\mathbb{1}_{hJ} \underbrace{\sum_{[g]\in G/H} \mathbb{1}_{gX}}_{=1}) \otimes e_h \\ &= \sum_{[h]\in G/J} \varphi(a\mathbb{1}_{hJ}) \otimes e_h.\end{aligned}$$

Por lo que $\tilde{\varphi}$ es la composición

$$A'[X] \xrightarrow{\kappa} A'[X] \otimes \mathcal{K}(L^2(G/J)) \xrightarrow{\varphi\otimes id} \mathfrak{A}^n(D'[\star] \otimes \mathcal{K}(L^2(G/J))),$$

que según el Teorema 4.2.8, induce la misma clase que φ en E_H-teoría. Veamos ahora la otra composición. Sea $\psi : A'[\star] \to \mathfrak{A}^n(D'[Y])$ un $*$-morfismo J-equivariante con

$Y \subseteq G/H$ finito J-invariante. Aplicando (2) y luego (1) se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(a) &= \sum_{[g]\in G/H} g\,\varphi(g^{-1}(a)\mathbb{1}_X) \\ &= \sum_{[g]\in G/H} g\left(\sum_{[h]\in G/J} \mathbb{1}_{eH} h\psi(h^{-1}(g^{-1}(a)\mathbb{1}_X)\mathbb{1}_{eJ})\right) \otimes g(e_h) \\ &= \sum_{[g]\in G/H,[h]\in G/J} \mathbb{1}_{gH} gh\psi((gh)^{-1}(a\mathbb{1}_{gX}\mathbb{1}_{ghJ})) \otimes g(e_h)\end{aligned}$$

Dado que $a \in A'[\star]$, se tiene que $a = \mathbb{1}_{eJ}a$, por lo que los términos no nulos son necesariamente aquellos que $gh \in J$. Entonces, como ψ es J-equivariante, se tiene

$$\tilde{\psi}(a) = \sum_{[g]\in G/H,[h]\in G/J} \mathbb{1}_{gH}\psi(a\mathbb{1}_{gX}) \otimes g(e_h)$$

Como $\psi = \mathbb{1}_{eH}\psi$ según la Observación 4.3.8, tenemos que necesariamente $g = e$. Si llamamos e_J a la proyección ortogonal en el subespacio generado por las indicadoras $\mathbb{1}_h$, tenemos que e_J es la suma de todos los e_h. En particular, e_J es J-invariante. Considerando esto llegamos a

$$\tilde{\psi}(a) = \psi(a) \otimes e_J$$

Pero esto es exactamente la composición

$$A'[\star] \xrightarrow{\psi} \mathfrak{A}^n(D'[G/H]) \xrightarrow{id\otimes e_J} \mathfrak{A}^n(D'[G/H] \otimes \mathcal{K}(L^2(G/J))),$$

que por estabilidad compacta (Proposición 3.2.3) induce la misma clase que ψ en E_J-teoría. □

Procedemos a probar el teorema principal de esta sección.

Teorema 4.3.16. *Sean H un subgrupo finito de G y B una H-C^*-álgebra. Entonces el morfismo de inducción*

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H(\mathcal{E}G, B) \to \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, \mathrm{Ind}_H^G B)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Usaremos el hecho que $\mathcal{E}G$ se puede realizar como complejo simplicial [BCH94, Sección 2]. Tomado eso en consideración y que los grupos $\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, \mathrm{Ind}_H^G B)$ son un colímite filtrante de $\mathrm{E}_G(Z, \mathrm{Ind}_H^G B)$ con Z un subcomplejo G-finito debemos probar que el morfismo de inducción

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{E}_H(Z, B) \to E_G(Z, \mathrm{Ind}_H^G B)$$

es un isomorfismo. Lo haremos por inducción el la dimensión del subcomplejo Z. Si la dimensión es 0, entonces Z, de acuerdo con el condición *iii)* de la definición de

G-espacio propio al comienzo de este capítulo, es una unión disjunta de cocientes G/J con J finito. En este caso el resultado se deduce del Lema 4.3.15. Supongamos ahora que $n \geq 1$ y que el morfismo de inducción es un isomorfismo para todos los subcomplejos propios G-finitos de dimensión menor o igual que $n-1$ y para cualquier H-C*-álgebra B. Sea entonces Z_{n-1} el $(n-1)$-esqueleto de Z_n y sea $U = Z_n \setminus Z_{n-1}$. De acuerdo con esto, U es una unión disjunta de n-símplices abiertos y por otro lado $C_0(U)$ es propia sobre los baricentros de los símplices que lo conforman; más aún, si Z_0 es el conjunto de los baricentros, se tiene el isomorfismo $C_0(U) \cong \Sigma^n C_0(Z_0)$, dado por “expandir” los baricentros a los símplices abiertos. Sea entonces $A = C_0(Z_n)$ y $D = C_0(U)$, de forma que $A/D = C_0(Z_{n-1})$. Como D es propia sobre Z_0, podemos describir a $\mathrm{E}_H(U, B)$ como el colímite

$$\mathrm{E}_H(U,B) = \varinjlim_{X \subseteq Z_0} \mathrm{E}_H(D[X], B)$$

donde X son los subconjuntos compactos H-invariantes. Esta descripción está dada por “expandir” los subconjuntos compactos H-invariantes, de la misma manera que Z_0. En particular, tenemos que los morfismos de inducción

$$\mathrm{E}_H(U,B) = \varinjlim_{X \subseteq Z_0} \mathrm{E}_H(D[X], B) \to \mathrm{E}_G(D[Z_0], \mathrm{Ind}_H^G B) = \mathrm{E}_G(C_0(U), \mathrm{Ind}_H^G B)$$

$$\mathrm{E}_H(U,B) = \varinjlim_{X \subseteq Z_n} \mathrm{E}_H(D[X], B) \to \mathrm{E}_G(D[Z_n], \mathrm{Ind}_H^G B) = \mathrm{E}_G(C_0(U), \mathrm{Ind}_H^G B)$$

son iguales. Como $D \cong \Sigma^n C_0(Z_0)$, dado que Ind_H^G conmuta con tomar productos tensoriales (Lema 4.3.11), podemos usar Periodicidad de Bott (Corolario 3.2.21) y el hecho que Σ induce un isomorfismo en E-teoría (Proposición 3.2.16) obteniendo

$$\mathrm{E}_H(U,B) \cong \begin{cases} \mathrm{E}_H(Z_0, B) & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathrm{E}_H(Z_0, \Sigma B) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y el morfismo anterior se traduce en el morfismo de inducción

$$\varinjlim_{X \subseteq Z_0} \mathrm{E}_H(X, \Sigma^i B) \to \mathrm{E}_G(Z_0, \mathrm{Ind}_H^G \Sigma^i B),$$

con $i = 0$ o 1 según corresponda. Por lo tanto, usando la hipótesis inductiva, se tiene el morfismo de inducción $\mathrm{E}_H(U, B) \to \mathrm{E}_G(C_0(U), B)$ es un isomorfismo. De la misma manera consideremos A/D como espacio propio sobre Z_n o bien como espacio propio sobre Z_{n-1}. Entonces los morfismos de inducción

$$\mathrm{E}_H(A/D, B) = \mathrm{E}_H(A/D[Z_{n-1}], B) = \varinjlim_{X \subseteq Z_{n-1}} \mathrm{E}_H(A/D[X], B) \to \mathrm{E}_G(A/D[Z_{n-1}], \mathrm{Ind}_H^G B)$$

$$\mathrm{E}_H(A/D, B) = \mathrm{E}_H(A/D[Z_n], B) = \varinjlim_{X \subseteq Z_n} \mathrm{E}_H(A/D[X], B) \to \mathrm{E}_G(A/D[Z_n], \mathrm{Ind}_H^G B)$$

también son iguales. Como por hipótesis inductiva el morfismo superior es un isomorfismo, el inferior también lo es. Finalmente consideremos la sucesión exacta

$$0 \to D \to A \to A/D \to 0.$$

Considerando que D, A y A/D son álgebras propias sobre Z_n, observemos que los morfismos involucrados preservan la multiplicación por elementos de $C_0(Z_n)$; en otras palabras, los morfismos son $C_0(Z_n)$-lineales. Esto permite restringir la sucesión exacta anterior a sucesiones exactas de la forma

$$0 \to D[X] \to A[X] \to A/D[X] \to 0$$

para todo $X \subseteq Z_n$ compacto H-invariante. De manera que tenemos un diagrama conmutativo de sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd}
\ldots & \mathrm{E}_G(D[Z_n], \mathrm{Ind_H^G B}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_H^G"] & \mathrm{E}_G(A[Z_n], \mathrm{Ind_H^G B}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_H^G"] & \mathrm{E}_G(A/D[Z_n], \mathrm{Ind_H^G B}) \arrow[l] \arrow[d, "\mathrm{Ind}_H^G"] \\
\ldots & \mathrm{E}_H(D[X], B) \arrow[l] & \mathrm{E}_G(A[X], B) \arrow[l] & \mathrm{E}_G(A/D[X], B) \arrow[l]
\end{tikzcd}.$$

Recordar que por periodicidad de Bott, las sucesiones exactas largas son periódicas. Tomando colímite en la fila inferior, los morfismos verticales asociados a D y a A/D son isomorfismos según lo que vimos antes. Utilizando el lema de los cinco, obtenemos que que el morfismo asociado a A es un isomorfismo. Ésto era lo que queríamos ver. □

El teorema de Green-Julg generalizado

El objetivo de esta subsección es probar un teorema similar al de Green-Julg pero para grupos discretos contables, con la restricción de que el álgebra de coeficientes sea propia.

Sea $H \subseteq G$ un grupo finito. Dado que $B \subseteq \mathrm{Ind}_H^G B$, tenemos una inclusión canónica

$$j : C^*(H, B) \to C^*(G, \mathrm{Ind}_H^G B), \tag{3}$$

definida por enviar a una función de soporte compacto en H a la misma función en G. Esto está bien definido pues G es discreto.

Observemos que $\mathcal{E}G$ también es un modelo de espacio propio universal de H. Esto se deduce fácilmente utilizando la caracterización de espacio universal en [BCH94, Proposición 1.8 y Corolario 1.9].

Ya que G es discreto, podemos escribir los elementos de $C_c(G, B)$ como

$$\sum_{g \in G} b_g \mathbb{1}_g$$

con finitos b_g no nulos. Así, los elementos de $C^*(G, B)$ son límites en objetos de esa forma.

Lema 4.3.17. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, \mathrm{Ind}_H^G B) \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, \mathrm{Ind}_H^G B)) \\
\mathrm{E}_H(\mathcal{E}G, B) \arrow[u, "\mathrm{Ind}_H^G"] \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(H, B)) \arrow[u, "j_*"']
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $\varphi : \Sigma C_0(X) \to \mathfrak{A}^n(\Sigma B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ un $*$-morfismo H-equivariante con $X \subseteq \mathrm{G}H$ un conjunto finito H-invariante, que representa una clase de $\mathrm{E}_H(\mathcal{E}G, B)$. Aplicando el morfismo de inducción a φ obtenemos el morfismo G equivariante

$$\Phi(a) = \sum_{[g]\in G/H} g\varphi(g^{-1}(a)\mathbb{1}_X).$$

En lo que sigue, generalmente definimos las funciones de $\Sigma C_0(X)$ sobre los tensores elementales, para que sea más claro. Recordamos también que pensamos a Σ como GC*-álgebra con acción trivial. Si aplicamos el morfismo de ensamble a Φ obtenemos el $*$-morfismo

$$\psi_{11} : \Sigma\mathfrak{A}^n(C^*(G, \Sigma\mathrm{Ind}_H^G B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

definido por

$$\psi_{11}(f) = \sum_{g\in G} \Phi(f \otimes \theta g(\theta))\mathbb{1}_g.$$

Aquí θ es la función de corte de $Z = G \cdot X$. El uso del doble subíndice será útil después.

Por otro lado la composición $j_* \circ \mu$ resulta en el morfismo

$$\psi_{22} : \Sigma \to \mathfrak{A}^n(C^*(G, \Sigma\mathrm{Ind}_H^G B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})))$$

$$\psi_{22}(f) = \frac{1}{|H|} \sum_{h\in H} \varphi(f \otimes \mathbb{1}_X)\mathbb{1}_h$$

Aquí, $\frac{\mathbb{1}_X}{|H|}$ es exactamente la función de corte de X como H-espacio propio. Debemos ver que estas funciones son n-homotópicas. Para eso, veremos que son n-homotópicas luego de componer con las inclusiones $\mathcal{K}(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{K}(\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}) = \mathbb{M}_2(\mathcal{K}(\mathcal{H}))$. De acuerdo a la estabilidad compacta, esto concluye el argumento. Sea entonces la función (no morfismo)

$$\psi_{21} : \Sigma \to \mathfrak{A}^n(\Sigma\mathrm{Ind}_H^G B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$$

definida por

$$\psi_{21}(f) = \frac{1}{|H|^{1/2}} \sum_{g\in G} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f \otimes g(\theta))\mathbb{1}_g$$

Aquí estamos pensando a $\mathbb{1}_{eH}$ como multiplicador de $\mathrm{Ind}_G^H B$. Definimos también $\psi_{12}(f) = \psi_{21}(f^*)^*$. Afirmamos que se cumplen las identidades $\psi_{ij}(f_1)\psi_{jk}(f_2) = \psi_{ik}(f_1 f_2)$. Para los casos $i = j = k = 1, 2$, la afirmación se reduce a que ψ_{11} y ψ_{22} son $*$-morfismos. Analizamos los otros casos.

1. $\psi_{11}(f_1)\psi_{12}(f_2) = \psi_{12}(f_1 f_2)$.

$$\begin{aligned}
\psi_{11}(f_1)\psi_{12}(f_2) &= \left(\sum_{g\in G}\Phi(f_1\otimes\theta g(\theta))\mathbb{1}_g\right)\left(\frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G} g(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes g^{-1}(\theta)))\mathbb{1}_g\right)\\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\sum_{st=g}\Phi(f_1\otimes\theta s(\theta))st(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes t^{-1}(\theta)))\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\sum_{s\in G}\Phi(f_1\otimes\theta s(\theta))\mathbb{1}_{gH}\Phi(f_2\otimes s(\theta)))\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\sum_{s\in G}\mathbb{1}_{gH}\Phi(f_1 f_2\otimes\theta s(\theta)^2)\mathbb{1}_g.
\end{aligned}$$

Utilizando que $\sum_{s\in G} s(\theta)^2$ es la función constantemente 1 según la Definición 4.2.1 *ii)*.

$$\begin{aligned}
\psi_{11}(f_1)\psi_{12}(f_2) &= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\mathbb{1}_{gH}\Phi(f_1 f_2\otimes\theta\sum_{s\in G}s(\theta)^2)\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G} g(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 f_2\otimes g^{-1}\theta)\mathbb{1}_g\\
&= \psi_{12}(f_1 f_2).
\end{aligned}$$

2. $\psi_{21}(f_1)\psi_{11}(f_2) = \psi_{21}(f_1 f_2)$.
   Este caso se deduce de tomar el caso (1.) y aplicar la involución $*$.

3. $\psi_{22}(f_1)\psi_{21}(f_2) = \psi_{21}(f_1 f_2)$.

$$\begin{aligned}
\psi_{22}(f_1)\psi_{21}(f_2) &= \left(\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\varphi(f_1\otimes\mathbb{1}_X)\mathbb{1}_h\right)\left(\frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes g(\theta))\mathbb{1}_g\right)\\
&= \frac{1}{|H|^{3/2}}\sum_{g\in G}\sum_{st=g,s\in H}\varphi(f_1\otimes\mathbb{1}_X)s(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes t(\theta)))\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{3/2}}\sum_{g\in G}\sum_{s\in H}\varphi(f_1\otimes\mathbb{1}_X)\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{3/2}}\sum_{g\in G}|H|\varphi(f_1\otimes\mathbb{1}_X)\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g\\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}}\sum_{g\in G}\varphi(f_1\otimes\mathbb{1}_X)\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2\otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g.
\end{aligned}$$

Dado que $\varphi(f_1 \otimes \mathbb{1}_X) = \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes \mathbb{1}_Z)$ según la Observación 4.3.8, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\psi_{22}(f_1)\psi_{21}(f_2) &= \frac{1}{|H|^{1/2}} \sum_{g\in G} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes \mathbb{1}_X)\Phi(f_2 \otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g \\
&= \frac{1}{|H|^{1/2}} \sum_{g\in G} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 f_2 \otimes g(\theta))\mathbb{1}_g \\
&= \psi_{21}(f_1 f_2).
\end{aligned}$$

4. $\psi_{12}(f_1)\psi_{22}(f_2) = \psi_{12}(f_1 f_2)$
   Este caso se deduce de tomar el caso (3.) y aplicar la involución $*$.
5. $\psi_{12}(f_1)\psi_{21}(f_2) = \psi_{11}(f_1 f_2)$

$$\begin{aligned}
\psi_{12}(f_1)\psi_{21}(f_2) &= \frac{1}{|H|}\left(\sum_{g\in G} g(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes g^{-1}(\theta)))\mathbb{1}_g\right)\left(\sum_{g\in G}(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2 \otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g\right) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{st=g} \mathbb{1}_{sH}\Phi(f_1 \otimes \theta)s(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2 \otimes t(\theta))\mathbb{1}_g \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{st=g} \mathbb{1}_{sH}\Phi(f_1 f_2 \otimes \theta g(\theta)) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}(\sum_{s\in G} \mathbb{1}_{sH})\Phi(f_1 f_2 \otimes \theta g(\theta)) \\
&= \sum_{g\in G} \Phi(f_1 f_2 \otimes \theta g(\theta)) \\
&= \psi_{11}(f_1 f_2).
\end{aligned}$$

6. $\psi_{21}(f_1)\psi_{12}(f_2) = \psi_{22}(f_1 f_2)$

$$\begin{aligned}
\psi_{21}(f_1)\psi_{12}(f_2) &= \frac{1}{|H|}\left(\sum_{g\in G}(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes g(\theta)))\mathbb{1}_g\right)\left(\sum_{g\in G} g(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2 \otimes g^{-1}(\theta)))\mathbb{1}_g\right) \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{st=g} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes s(\theta))g(\mathbb{1}_{eH}\Phi(f_2 \otimes t^{-1}(\theta)))\mathbb{1}_g \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in G}\sum_{st=g} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes s(\theta))\mathbb{1}_{gH}\Phi(f_2 \otimes s(\theta)))\mathbb{1}_g \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\sum_{s\in G} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 \otimes s(\theta))\Phi(f_2 \otimes s(\theta)))\mathbb{1}_g \\
&= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H}\sum_{s\in G} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 f_2 \otimes s(\theta)^2)\mathbb{1}_g.
\end{aligned}$$

Utilizando que $\sum_{g\in G} s(\theta)^2$ es la función constantemente 1 según la Definición 4.2.1

ii), tenemos

$$\psi_{21}(f_1)\psi_{12}(f_2) = \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H} \mathbb{1}_{eH}\Phi(f_1 f_2 \otimes \mathbb{1}_Z)\mathbb{1}_g.$$

De acuerdo con la Observación 4.3.8, esto es lo mismo que

$$\begin{aligned}\psi_{21}(f_1)\psi_{12}(f_2) &= \frac{1}{|H|}\sum_{g\in H} \varphi(f_1 f_2 \otimes 1_X)\mathbb{1}_g \\ &= \psi_{22}(f_1 f_2).\end{aligned}$$

Estas identidades permiten definir para cada $s \in [0,1]$ un $*$-morfismo

$$\psi_* : \Sigma \to \mathfrak{A}^n(\mathbb{M}_2(C^*(G, \Sigma\mathrm{Ind}_H^G B \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))))$$

vía

$$f \mapsto \begin{pmatrix} s^2\psi_{11}(f) & s(1-s^2)^{1/2}\psi_{12}(f) \\ s(1-s^2)\psi_{21}(f) & (1-s^2)\psi_{22}(f)\end{pmatrix}$$

que define una homotopía entre ψ_{11} y ψ_{22}. □

Lema 4.3.18. *La inclusión j de 3 induce un isomorfismo*

$$j_* : \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(H,B)) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, \mathrm{Ind}_H^G B)).$$

Demostración. Si $A = C^*(G, \mathrm{Ind}_H^G B)$, entonces j identifica $C^*(H,B)$ con $\mathbb{1}_{eH}A\mathbb{1}_{eH}$. Como también $A\mathbb{1}_{eH}A = A$, el enunciado se sigue de que $\mathrm{E}(\mathbb{C}, -) = K_0$ (Teorema 3.3.4) preserva equivalencias Morita [Bla98]. □

Teorema 4.3.19 (Teorema de Green-Julg generalizado)**.** *Sean G un grupo discreto contable y B una GC^*-álgebra propia. Entonces el morfismo de ensamble*

$$\mu : \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, B)$$

es un isomorfismo

Demostración. Supongamos que B es propia sobre G/H para algún H finito. Entonces $B \cong \mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Comp}_H^G B)$. Según los Lemas 4.3.17, 4.3.18 y los Teoremas 4.3.16 4.3.1, el morfismo de ensamble es un isomorfismo. Por otro lado, si B es propia sobre Y y existe una función continua equivariante $Y \to G/H$, B es propia sobre G/H (Proposición 4.1.8) y entonces el morfismo de ensamble es un isomorfismo. Más generalmente, sea B una GC*-álgebra propia sobre un espacio Y y supongamos que Y puede cubrirse con finitos abiertos G-equivariantes U_i, de forma que para cada uno existe una función continua equivariante $U_i \to G/H$. Entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to B(U_i) \to B(Y) \to B(Y)/B(U_i) \to 0.$$

Observemos que $B(Y)/B(U_i)$ es propia sobre $Y \setminus U_i$ y éste puede cubrirse con $n-1$ abiertos. Utilizando entonces la sucesión exacta larga de E-teoría junto al lema de los cinco y un paso inductivo, se deduce que el morfismo de ensamble es un isomorfismo para B. Observemos que un caso particular de la situación anterior es cuando Y es G-compacto.

Sea entonces B una GC*-álgebra propia sobre Y con Y un G-espacio propio arbitrario. Tomando una unión creciente de G-compactos de Y, obtenemos una descomposición de B como un colímite de subálgebras B_n de B. Como para cada una de las subálgebras B_n el morfismo de ensamble es un isomorfismo, si probamos que el morfismo canónico

$$\underset{\rightarrow}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B_n) \to \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B)$$

es un isomorfismo, obtenemos lo deseado. Ahora procedemos a utilizar el hecho que $\mathcal{E}G$ puede ser cubierto por subconjuntos de la forma

$$G \times_H W = G \times W/(gh, w) \sim (g, hw)$$

con W contráctil de manera H-invariante (esto se deduce de su construcción en [BCH94, Apéndice 1]). Observemos que se sigue de la definición que $\mathrm{Ind}_H^G C_0(W) = C_0(G \times_H W)$. Considerando esto, podemos describir el colímite $\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B_n)$ como el colímite filtrante de grupos $\mathrm{E}_G(U, B_n)$, donde los conjuntos U varían sobre uniones finitas de abiertos de la forma $G \times_H W$. Notar que cada uno de los grupos $\mathrm{E}_G(U, B_n)$ es a su vez un colímite, ya que U podría no ser G-compacto. Utilizando nuevamente escisión y el lema de los cinco, concluimos que para probar lo que deseamos alcanza con probar que el morfismo

$$\underset{n\to\infty}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}_G(G \times_H W, B_n) \to \mathrm{E}_G(G \times_H W, B)$$

es un isomorfismo. Para eso tomemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \underset{n\to\infty}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}_G(G \times_H W, B_n) & \longrightarrow & \mathrm{E}_G(G \times_H W, B) \\ \cong \big\downarrow \mathrm{Comp}_H^G & & \cong \big\downarrow \mathrm{Comp}_H^G \\ \underset{n\to\infty}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}_G(W, B_n) & \longrightarrow & \mathrm{E}_H(W, B) \end{array}.$$

Como W es contráctil de manera H-equivariante, el morfismo de la fila inferior es

$$\underset{n\to\infty}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}_G(\star, D_n) \to \mathrm{E}_H(\star, B),$$

que debido al Teorema de Green-Julg 4.3.1 es

$$\underset{n\to\infty}{\operatorname{colím}}\ \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(H, B_n)) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(H, B)).$$

Como $\mathrm{E}(\mathbb{C}, -) = K_0$ y K_0 preserva colímites filtrantes, esto es un isomorfismo. Dado que los morfismos de compresión son isomorfismos por Lema 4.3.14, el morfismo de la fila superior es un isomorfismo. Esto concluye la demostración. $\square$

4.4. Aplicación a la conjetura de Baum-Connes

A continuación, mostramos como aplicar el Teorema Green-Julg generalizado para dar una condición suficiente para la conjetura de Baum-Connes sea cierta para el grupo G. Este método es el conocido como Dirac-Dirac dual.

Teorema 4.4.1. *Sea G un grupo discreto contable de modo tal que existe una GC^*-álgebra propia A y una factorización de la identidad de $\mathbb{C}$ por A en E_G-teoría. Es decir, existen morfismos $\alpha \in \mathrm{E}_G(A, \mathbb{C})$ y $\beta \in \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A)$ de modo que $[id_{\mathbb{C}}] = \alpha \circ \beta \in \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces, para toda GC^*-álgebra B, el morfismo de ensamble*

$$\mu : \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, B)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B \otimes \mathbb{C}) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "id \otimes \beta_*"] & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B \otimes \mathbb{C})) \arrow[d, "id \otimes \beta_*"] \\
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B \otimes A) \arrow[r, "\mu", "\cong"'] \arrow[d, "id \otimes \alpha_*"] & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B \otimes A)) \arrow[d, "id \otimes \alpha_*"] \\
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B \otimes \mathbb{C}) \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B \otimes \mathbb{C}))
\end{tikzcd}.$$

Como $B \otimes A$ es propia, según la Proposición 4.1.9, su morfismo de ensamble es un isomorfismo por el Teorema 4.3.19 Por otro lado, usando que el diagrama conmuta, se sigue que el morfismo de ensamble para B es un retracto de un isomorfismo, por lo que también es un isomorfismo. □

En general, no sólo es de interés poder explicitar cuando el morfismo de ensamble resulta un isomorfismo, sino también estudiar los casos donde resulta un monomorfismo o un epimorfismo. Concluimos con un resultado que muestra cuando el ensamble es inyectivo. Para ello requerimos un lema previo.

Lema 4.4.2. *Sean X un G-espacio propio G-compacto, A una GC^*-álgebra propia. Supongamos que existen elementos $\alpha \in \mathrm{E}_G(A, \mathbb{C})$ y $\beta \in \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A)$ de modo que, para cualquier subgrupo finito $H \subseteq G$, su composición en E_H-teoría es la identidad. Entonces la composición*

$$C_0(X) \otimes \mathbb{C} \xrightarrow{id \otimes \beta} C_0(X) \otimes D \xrightarrow{id \otimes \alpha} C_0(X) \otimes \mathbb{C}$$

es un isomorfismo en $\mathrm{E}_G(C_0(X), C_0(X))$.

Demostración. Probaremos que la composición con $id \otimes \alpha\beta$ es un isomorfismo en E_G-teoría, esto muestra lo que deseamos. Sea C una GC*-álgebra. Supongamos primero que X admite una función continua y equivariante $X \to G/H$ para algún subgrupo finito H. De acuerdo con el Lema 4.3.14 tenemos un isomorfismo dado por compresión

$$\mathrm{E}_G(C_0(X), C) \cong \mathrm{E}_H(C_0(W), C),$$

en donde W es la preimagen en X del coset de la identidad eH. Considerando el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(C_0(X), C) \arrow[r, "id \otimes \alpha\beta^*"] \arrow[d, "\mathrm{Comp}_H^G"', "\cong"] & \mathrm{E}_G(C_0(X), C) \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{Comp}_H^G"] \\ \mathrm{E}_H(C_0(W), C) \arrow[r, "id \otimes \alpha\beta^*"] & \mathrm{E}_H(C_0(W), C) \end{tikzcd},$$

y que en E_H-teoría tenemos que $id \otimes \alpha\beta^*$ es la identidad, obtenemos lo que buscábamos. Supongamos ahora que X puede cubrirse por n abiertos U_i de modo tal que cada uno admite una función continua y equivariante $U_i \to G/H_i$ para algún H_i subgrupo finito. Entonces, haciendo un paso inductivo, probamos lo que deseamos utilizando el diagrama conmutativo con sucesiones exactas largas

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E}_G(C_0(X \setminus U_i), C) \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha\beta^*"] & \mathrm{E}_G(C_0(X), C) \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha\beta^*"] & \mathrm{E}_G(C_0(U_i), C) \arrow[r] \arrow[d, "id \otimes \alpha\beta^*"] & \dots \\ \mathrm{E}_G(C_0(X \setminus U_i), C) \arrow[r] & \mathrm{E}_G(C_0(X), C) \arrow[r] & \mathrm{E}_G(C_0(U_i), C) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

y el lema de los cinco. Finalmente, observamos que como X es G-compacto que es un G-espacio propio, admite un cubrimiento finito por dichos U_i. □

Teorema 4.4.3. *A una GC^*-álgebra propia. Supongamos que existen elementos $\alpha \in \mathrm{E}_G(A, \mathbb{C})$ y $\beta \in \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, A)$ de modo que, para cualquier subgrupo finito $H \subseteq G$, su composición en E_H-teoría es la identidad. Entonces para toda GC^*-álgebra B el morfismo de ensamble*

$$\mu : \mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B) \to \mathrm{E}(\mathbb{C}, C^*(G, B))$$

admite una retracción. En particular es inyectivo.

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B\otimes\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B\otimes\mathbb{C})) \\
\Big\downarrow id\otimes\beta_* & & \Big\downarrow id\otimes\beta_* \\
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B\otimes A) & \xrightarrow[\cong]{\mu_{B\otimes A}} & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B\otimes A)) \\
\Big\downarrow id\otimes\alpha_* & & \Big\downarrow id\otimes\alpha_* \\
\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B\otimes\mathbb{C}) & \xrightarrow{\mu_B} & \mathrm{E}_G(\mathbb{C}, C^*(G, B\otimes\mathbb{C}))
\end{array}.$$

Como $B\otimes D$ es un álgebra propia, según la Proposición 4.1.9, el morfismo de ensamble es un isomorfismo por el Teorema 4.3.19. Analizamos ahora las flechas verticales derechas. Sea $\varphi : C_0(X)\to B$ un morfismo en E_G-teoría, donde X un conjunto G-compacto de $\mathcal{E}G$. Esto representa un elemento de $\mathrm{E}_G(\mathcal{E}G, B)$. La composición $id\otimes\alpha_*\circ id\otimes\beta_*$ aplicada al morfismo φ resulta en la composición en E_G-teoría

$$C_0(X)\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\varphi\otimes id} B\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{id\otimes(\alpha\circ\beta)} B\otimes\mathbb{C}.$$

Según el Lema 1.3.6, esto es lo mismo que la composición

$$C_0(X)\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{id\otimes(\alpha\circ\beta)} C_0(X)\otimes\mathbb{C}\xrightarrow{\varphi\otimes id} B\otimes\mathbb{C}.$$

Se sigue por lo tanto del lema anterior que la composición de las flechas del lado derecho resultan en un isomorfismo. Podemos definir una sección de de μ_B como

$$\nu := id\otimes\alpha_*\circ\mu_{B\otimes A}^{-1}\circ id\otimes\beta_*.$$

En efecto, el hecho que $\mu_B\nu\mu_B=\mu_B$ se deduce de que el diagrama conmuta. Por otro lado, el hecho que las flechas verticales derechas resultan en un isomorfismo muestran que μ_B es inyectiva. Esto concluye la demostración. □

Puede verse además que la clase de dicho morfismo en E_G-teoría es independiente de la factorización por una álgebra propia [GHT00, Proposición 14.5], por lo que necesariamente dicho elemento es un idempotente de $\mathrm{E}_G(\mathbb{C},\mathbb{C})$ (esto se deduce de que al componerlo con si mismo se obtiene otra factorización). Esto es el análogo a lo que en KK-teoría se denomina un "*elemento-gamma*" para el grupo G. Según el lema anterior la existencia del elemento-gamma implica que el morfismo de ensamble admite una retracción y si el elemento-gamma es la identidad entonces el morfismo de ensamble es un isomorfismo.

Bibliografía

[BG52] Robert G. Bartle and Lawrence M. Graves, *Mappings between function spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **72** (1952), 400–413. ↑6

[BC88] Paul Baum and Alain Connes, *K-theory for discrete groups*, Operator algebras and applications, Vol.1, 1988, pp. 1–20, DOI 10.1007/978-1-4612-3762-41. ↑71

[BCH94] Paul Baum, Alain Connes, and Nigel Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, C^*-algebras: 1943–1993 (San Antonio, TX, 1993), 1994, pp. 240–291, DOI 10.1090/conm/167/1292018. ↑64, 71, 73, 87, 89, 94

[Bla98] Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Second, Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. ↑51, 58, 85, 93

[Bus68] Robert C. Busby, *Double centralizers and extensions of C^*-algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **132** (1968), 79–99. MR0225175 (37 #770) ↑37

[Cob67] L. A. Coburn, *The C^*-algebra generated by an isometry*, Bulletin of the American Mathematical Society **73** (1967), 722–726. ↑52

[CH90-1] Alain Connes and Nigel Higson, *Almost homomorphisms and KK-theory*, Unpublished manuscript (1990), 1-32. ↑v, 8, 9, 23

[CH90-2] Alain Connes and Nigel Higson, *Déformations, morphismes asymptotiques et K-théorie bivariante*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique **311** (1990), no. 2, 101–106. ↑8, 9, 11, 17

[Cor11] Guillermo Cortiñas, *Algebraic v. topological K-theory: a friendly match*, Topics in algebraic and topological K-theory, Lecture Notes in Math., vol. 2008, Springer, Berlin, 2011, pp. 103–165, DOI 10.1007/978-3-642-15708-03. MR2762555 (2012c:19001) ↑50

[Cun84] Joachim Cuntz, *K-theory and C^*-algebras*, Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis (Bielefeld, 1982), 1984, pp. 55–79, DOI 10.1007/BFb0072018. ↑52, 53

[Dav96] Kenneth R. Davidson, *C^*-algebras by example*, Fields Institute Monographs, vol. 6, American Mathematical Society, Providence, RI, 1996. MR1402012 (97i:46095) ↑1

[EH61] B. Eckmann and P. J. Hilton, *Group-like structures in general categories. I. Multiplications and comultiplications*, Math. Ann. **145** (1961/1962), 227–255. MR0136642 (25 #108) ↑47

[Fol95] Gerald B. Folland, *A course in abstract harmonic analysis*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995. ↑5, 43

[GHT00] Erik Guentner, Nigel Higson, and Jody Trout, *Equivariant E-theory for C^*-algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society **148** (2000), no. 703, viii+86, DOI 10.1090/memo/0703. ↑v, 1, 8, 17, 97

[Hig87] Nigel Higson, *On a technical theorem of Kasparov*, Journal of Functional Analysis **73** (1987), no. 1, 107–112, DOI 10.1016/0022-1236(87)90059-0. ↑3

[Hig90] Nigel Higson, *Categories of fractions and excision in KK-theory*, J. Pure Appl. Algebra **65** (1990), no. 2, 119–138, DOI 10.1016/0022-4049(90)90114-W. MR1068250 (91i:19005) ↑v, 8

[HK01] Nigel Higson and Gennadi Kasparov, *E-theory and KK-theory for groups which act properly and isometrically on Hilbert space*, Invent. Math. **144** (2001), no. 1, 23–74, DOI 10.1007/s002220000118. MR1821144 (2002k:19005) ↑vi

[HLT99] T. G. Houghton-Larsen and Klaus Thomsen, *Universal (co)homology theories*, K-Theory **16** (1999), no. 1, 1–27, DOI 10.1023/A:1007714104644. MR1673935 (2000f:19005) ↑34, 37, 40, 41

[Kas88] G. G. Kasparov, *Equivariant KK-theory and the Novikov conjecture*, Inventiones Mathematicae **91** (1988), no. 1, 147–201, DOI 10.1007/BF01404917. ↑v

[MP84] J. A. Mingo and W. J. Phillips, *Equivariant triviality theorems for Hilbert C^*-modules*, Proceedings of the American Mathematical Society **91** (1984), no. 2, 225–230, DOI 10.2307/2044632. ↑43

[Pal61] Richard S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2) **73** (1961), 295–323. MR0126506 (23 #A3802) ↑59

[Tho03] Andreas B. Thom, *Connective E-theory and bivariant homology for C^*-algebras*, 2003. ↑34, 41

[Was94] Simon Wassermann, *Exact C^*-algebras and related topics*, Lecture Notes Series, vol. 19, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1994. ↑18

[WO93] N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^*-algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach. ↑17, 37, 60, 61, 63

[Wil07] Dana P. Williams, *Crossed products of C^*-algebras*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 134, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007. ↑1, 5, 6, 8, 74