



**Universidad de Buenos Aires**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Matemática**

Tesis de Licenciatura

**Un estado del arte acerca de grafos perfectos y  
algunas variaciones**

Nina Pardal

Director: Dr. Guillermo A. Durán

Marzo de 2015

*«Hay tres cosas por las que vale la pena vivir:  
»el amor, el arte y el conocimiento.»*

*A. Balán*

# Agradecimientos

Ante todo, sepan disculpar lo conciso del texto, y sepan comprender que, en mi mente, el orden de los factores no altera el producto.

A mi amor incomparable, Guido. A mis más cercanos amigos desde hace ya muy lejanas épocas, Pablo, Mapi, Dani y Germán. A mi padre y madre. A mi director, Willy. A los compañeros y grandes amigos que compartieron –y siguen compartiendo– los mismos dolores, Sebastián, Juan y Noelia. A mis compañeros de andanzas en la música, dos personas muy raras como yo, Nacho y Sami. A los compañeros de largos viajes, atados por una herencia completamente falsa, Diego, Sandra, Lau, Gabi, Ale, Jesi y Nati.

El agradecimiento es el mismo para todos –salvo para Pablo porque sabe mucho de LaTeX–, a cada uno en la cantidad correspondiente.

Gracias por saber que mi habilidad de quejarme es infinita, equivalente a la paciencia que me han tenido. Gracias por ayudarme a remar en contra de mi propia corriente, tanto en las pequeñas cosas como en los momentos más difíciles. Gracias por entender que con amor y por amor es como mejor puedo hacer las cosas. Y gracias por creer en mí cuando yo no tenía la capacidad de hacerlo.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>7</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Definiciones y notación</b>	<b>3</b>
2.1. Definiciones generales . . . . .	3
2.2. Grafos perfectos . . . . .	7
2.3. Grafos clique-perfectos . . . . .	8
2.4. Grafos coordinados . . . . .	8
2.5. Grafos vecindad-perfectos . . . . .	8
<b>3. Grafos perfectos</b>	<b>11</b>
3.1. Caracterización . . . . .	11
3.1.1. Teorema Débil . . . . .	11
3.1.2. Teorema Fuerte . . . . .	17
3.2. Reconocimiento . . . . .	25
<b>4. Grafos clique-perfectos</b>	<b>29</b>
4.1. Otras clases de grafos . . . . .	29
4.2. Algunas familias de grafos clique-perfectos y clique-imperfectos . . . . .	33
4.3. Caracterizaciones parciales . . . . .	35
4.4. Grafos sin diamantes . . . . .	36
<b>5. Grafos coordinados</b>	<b>39</b>
5.1. Algunas definiciones . . . . .	39
5.2. Caracterizaciones parciales . . . . .	40
5.3. Grafos sin paws . . . . .	42
<b>6. Grafos vecindad-perfectos</b>	<b>45</b>
6.1. Preliminares . . . . .	45
6.2. Caracterizaciones parciales . . . . .	48
6.3. $P_4$ -tidy . . . . .	50
6.4. Cografos . . . . .	53

6.5. Árbol-cografos . . . . .	54
<b>7. Conclusiones y Problemas Abiertos</b>	<b>57</b>

# Resumen

Los grafos perfectos fueron definidos por Berge en 1961. Un grafo se dice perfecto cuando para todo subgrafo inducido coinciden el número cromático y el tamaño de una clique máxima. Los grafos perfectos son de gran interés desde el punto de vista algorítmico ya que para esta clase los problemas clásicos de optimización pueden resolverse en tiempo polinomial. A partir de esta clase se han definido y estudiado una gran cantidad de variantes de los mismos, entre ellas algunas que también se definen por la igualdad de 2 parámetros, como ser los grafos clique-perfectos, los grafos coordinados y los grafos vecindad-perfectos. Para estas clases una caracterización por subgrafos inducidos prohibidos no es conocida y para algunas de ellas también se desconoce la complejidad de su reconocimiento. En este trabajo se realizó un completo estado del arte de los grafos perfectos, que incluye las caracterizaciones estructurales conocidas como Teorema Débil y Teorema Fuerte -ambas conjeturadas por Berge pero demostradas en los años 1972 y 2002 respectivamente-, y algoritmos de reconocimiento polinomiales para esta clase. Se estudiaron además los avances parciales realizados en la misma dirección para las tres variaciones nombradas anteriormente.

# Capítulo 1

## Introducción

En la Teoría de Grafos es muy estándar centrarse en una clase en particular e intentar hallar una caracterización estructural de la misma, ya sea por características prohibidas o suficientes. La razón por la cual interesa obtener caracterizaciones estructurales es que éstas o bien permiten hallar algoritmos de reconocimiento polinomiales, o bien nos dan una idea de la complejidad computacional que puede tener este problema. Asimismo, conocer la complejidad de reconocimiento es un recurso más que útil para –entre otras cosas– resolver problemas de Optimización Combinatoria, tales como el TSP,  $k$ -coloreo, etc.

Este trabajo tiene como objetivo hacer un estado del arte sobre los resultados conocidos para ciertas clases de grafos muy estudiadas a lo largo de los últimos años.

Nuestro paradigma son los Grafos Perfectos. Fueron definidos en los años '60 por Claude Berge, quien casi al mismo tiempo conjeturó dos propiedades estructurales muy importantes –posteriormente llamadas Teorema Débil y Fuerte de los grafos perfectos– que fueron demostradas luego de 10 y 40 años respectivamente. Comenzaremos hablando de estos Teoremas en el Capítulo 2, donde daremos una demostración del Teorema Débil, y posteriormente una idea de la demostración del Teorema Fuerte. Gracias a este último y a nuevos avances estructurales, se pudieron hallar algoritmos polinomiales de reconocimiento para esta clase de grafos. Terminamos entonces este capítulo enumerando y dando una breve descripción de los pasos a seguir para la implementación de uno de estos algoritmos, el cual tiene complejidad  $\mathcal{O}(n^9)$ , como para dar un panorama completo de nuestro paradigma.

A partir de los grafos perfectos, han surgido nuevas variaciones y sub-clases, usando como idea principal en la definición el tomar dos parámetros relacionados por una desigualdad min-max. De esta forma surgieron los grafos Clique-Perfectos, Coordinados y Vecindad-perfectos, de los cuales se hablará en detalle en los Capítulos 3, 4 y 5 respectivamente. Para cualquiera de estas clases, y en contraposición a los resultados



obtenidos para grafos perfectos, aún no se conocen ni una caracterización general ni algoritmos de reconocimiento polinomial. Los avances en estos casos se han realizado de forma parcial, es decir, tomando restricciones a casos particulares de cada una de estas clases. Presentaremos en cada capítulo las caracterizaciones parciales correspondientes a cada una de estas clases y daremos la demostración de algunas de las mismas, y hablaremos –en caso de que se conozca algún resultado– de la complejidad del problema de reconocimiento en los casos particulares estudiados.

Concluimos el trabajo hablando de la relación existente entre todas las clases ya nombradas, haciendo una breve reseña de los resultados conocidos enunciados a lo largo de este trabajo, y hacia dónde se dirige la investigación para cada una de estas clases.

## Capítulo 2

# Definiciones y notación

En este capítulo comenzaremos enunciando las definiciones básicas de grafos, y posteriormente daremos una breve introducción a los *grafos perfectos* –que es la clase central de grafos que se estudiará en este trabajo– y a las variaciones que estudiaremos más en profundidad en los últimos capítulos.

### 2.1. Definiciones generales

Un grafo  $G$  es un par ordenado  $G = (V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto finito al que llamaremos vértices o nodos del grafo, y  $E \subseteq V \times V$  que contiene las denominadas aristas del grafo. Dado  $e = (u, v) = (v, u)$  con  $u \neq v$ , llamamos a  $u, v$  *extremos de la arista*  $e$ . El cardinal de ambos conjuntos se representará por  $|V|$  y  $|E|$ , y el cardinal de  $G$  se define como  $|V|$ . Diremos que dos vértices  $u, v$  en  $V$  son *adyacentes*, si y solo si  $(u, v) \in E$ .

Dado un grafo  $G = (V, E)$ , definimos su complemento  $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ , tomando  $\bar{V} = V$ , y  $\bar{E} = \{(u, v) \in \bar{V} \times \bar{V} \mid u \neq v \text{ y } (u, v) \notin E\}$ .

Un grafo  $G$  se dice *completo* si y solo si todos sus nodos son adyacentes entre sí, es decir para todo par  $u, v \in V$ , se tiene que  $(u, v) \in E$ . Notamos por  $K_n$  el grafo completo de  $n$  vértices, y en particular, a  $K_3$  también lo llamaremos *triángulo*.

Sea  $X$  un conjunto de vértices y  $v$  un vértice de  $G$  con  $v \notin X$ . Se dice que  $v$  es *completo a*  $X$  cuando  $v$  es adyacente a todos los vértices de  $X$ .

Se dice que  $v$  es *anticompleto a*  $X$  cuando  $v$  no es adyacente a ningún vértice de  $X$ . Sean  $X, Y$  dos conjuntos de vértices de  $G$ . Se dice que  $X$  es *(anti)completo a*  $Y$  cuando todo vértice de  $X$  es *(anti)completo a*  $Y$  (notar que la relación es simétrica).

Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Diremos que  $H = (X, F)$  es un *subgrafo de*  $G$  si  $X \subseteq V$ ,

$F \subseteq E$  y  $F \subseteq X \times X$ . Si se cumple que  $F = \{(u, v) \in E \mid u, v \in X\}$  diremos que  $H$  es un *subgrafo inducido de  $G$* . El subgrafo inducido  $H$  será notado  $G[X]$ . A lo largo de este trabajo siempre nos referiremos a subgrafos *inducidos*, salvo que se aclare lo contrario.

Un grafo  $G$  se dice *bipartito*, si sus vértices se pueden separar en dos subconjuntos disjuntos independientes  $A, B \subset V$ , es decir, si existen  $A, B \subset V$  tales que  $A \cup B = V$  y  $A \cap B = \emptyset$  tales que si  $u \in A$  y  $uv \in E$ , entonces  $v \in B$ . Al grafo bipartito tal que  $|A| = n, |B| = m$  y todos los vértices de  $A$  son adyacentes a todos los vértices de  $B$  lo llamamos *grafo bipartito completo* y lo notamos  $K_{n,m}$ .

Sean los grafos  $G = (V, E)$  y  $H = (X, F)$ . Un *isomorfismo de grafos* es una función  $f : V \rightarrow X$  tal que  $f$  es biyectiva y preserva la adyacencia, es decir que si  $(u, v) \in E$  entonces  $(f(u), f(v)) \in F$  y viceversa.

Un *camino* es un conjunto  $\{v_1 \dots v_n\}$  de vértices tal que  $v_i$  es adyacente a  $v_{i+1}$  para  $i$  entre 1 y  $n - 1$ . Otra forma en la que nos podremos referir a caminos es como aquellos subgrafos inducidos, acíclicos y conexos, tal que el grado de sus vértices es siempre menor o igual que 2. Notamos  $P_n$  al camino de longitud  $n$ .

Un *n-ciclo* es un camino de  $n$  vértices tal que  $v_n = v_1$ . Notamos al ciclo de  $n$  vértices como  $C_n$ , y su longitud es  $n$ .

Un *hole (o agujero)* es un subgrafo inducido de  $G$  que es isomorfo a un  $n$ -ciclo  $C_n$ , con  $n \geq 4$ .

Se dice *odd hole* si su longitud es impar, y *even hole* si su longitud es par.

Un *antihole (o anti-agujero)*: es un subgrafo inducido de  $G$  cuyo complemento es un hole en  $\overline{G}$ .

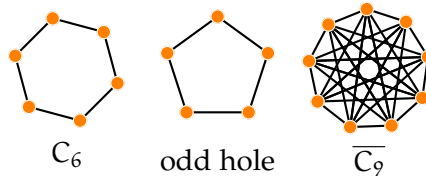


Figura 2.1: Ejemplos de ciclos, odd holes y antiholes.

Decimos que  $G$  es *conexo* si para todo  $u, v \in V$  existe un camino de  $u$  a  $v$  y *anti-conexo* cuando  $\overline{G}$  es conexo. A los subgrafos (anti)conexos maximales los llamaremos *componentes (anti)conexas de  $G$* . Las componentes anticonexas son llamadas también *anticomponentes*.

Decimos que  $G$  es un grafo *completo multipartito* si  $G$  no es anticonexo y todas sus componentes son conjuntos independientes.

Decimos que  $G$  es *co-conexo* si tanto  $G$  como  $\overline{G}$  son conexos.

La *distancia* entre dos vértices se define como la longitud del camino más corto entre ambos. El *diámetro de un grafo*  $G$  se define como la máxima distancia entre todos los pares de vértices de  $G$ .

Una clase de grafos  $\mathcal{C}$  es *hereditaria* si para todo  $G \in \mathcal{C}$ , todo subgrafo inducido de  $G$  también pertenece a  $\mathcal{C}$ .

Dado  $G = (V, E)$  y un vértice  $u$  definimos:

La *vecindad de un vértice*  $u$ , denotado como  $N(u)$ , está dado por todos los vértices adyacentes a  $u$ . Luego, el *grado del vértice*  $u$  será el número de vecinos que tiene. Observemos que de acuerdo a la definición,  $u \notin N(u)$ . En este caso decimos que  $N(u)$  es la *vecindad abierta de*  $u$ , y definimos a la *vecindad cerrada de*  $u$  como  $N[u] = N(u) \cup \{u\}$ .

Una *clique* en  $G$  es un subconjunto de vértices  $V'$  tal que para todo par de vértices de  $V'$  existe una arista que las conecta. Esto equivale a decir que el subgrafo inducido por  $V'$  es un grafo completo. El *tamaño de una clique* es el número de vértices que contiene.

Sea  $v \in V(G)$ , decimos que  $v$  es *universal* si  $N(v) = V(G)$ . Si  $N(v) = \emptyset$  entonces decimos que  $v$  es *aislado*. Si  $v$  es adyacente a un solo vértice decimos que  $v$  es *pendiente*; si su vecindario es una clique decimos que  $v$  es *simplicial*.

Un *conjunto independiente*  $V'$  es un subconjunto de vértices de  $V$  tal que ninguno de sus vértices es adyacente a otro. En otras palabras, cada arista de  $G$  contiene a lo sumo un vértice en  $V'$ . El *tamaño* de un conjunto independiente es el número de vértices que contiene.

**Observación 2.1.1.** Una clique es lo opuesto a un conjunto independiente, en el sentido que a cada clique del grafo  $G$  le corresponde un conjunto independiente en  $\overline{G}$ .

Consideremos una familia finita de conjuntos no vacíos. El *grafo intersección* de esta familia se obtiene representando cada conjunto por un vértice, donde dos vértices son adyacentes si y solo si los conjuntos correspondientes se intersecan.

El *grafo clique de un grafo*  $G$ , notado como  $K(G)$ , es el grafo de intersección de la familia de cliques maximales de  $G$ .

Sean  $G = (V, E), H = (X, F)$  grafos. El *grafo unión* de  $G$  y  $H$  es el grafo  $G \cup H = (V \cup X, E \cup F)$ .

Sean  $G, H$  grafos. Definimos el *grafo join* (y lo notamos  $G \vee H$ ) como el grafo unión de ambos con todas las aristas que conectan a  $G$  con  $H$ .

Sea  $G = (V, E)$  un grafo:

- $\omega(G)$ : es el tamaño de una clique de cardinal máximo.

- $\chi(G)$ : es la mínima cantidad de colores necesario para colorear los vértices, de manera tal que no haya dos vértices adyacentes con el mismo color.
- $\alpha(G)$ : es el tamaño de un conjunto independiente de cardinal máximo.
- $\kappa(G)$ : es la mínima cantidad de cliques necesaria para cubrir los vértices de  $G$ .

**Observación 2.1.2.** Es fácil ver que:  $\omega(G) \leq \chi(G)$ ,  $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ ,  $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ ,  $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$ .

Antes de comenzar a hablar de grafos perfectos y de resultados de estructura más formalmente, recordemos las siguientes definiciones de complejidad computacional:

Un *problema de decisión* es un problema que especifica una cadena de caracteres de datos de entrada y requiere como solución una respuesta por el *SI* o por el *NO*.

Sean  $\pi_1(I_1, Q_1), \pi_2(I_2, Q_2)$  dos problemas de decisión. Decimos que  $f : \pi_1 \rightarrow \pi_2$  es una *transformación polinomial* de  $\pi_1$  en  $\pi_2$  si  $f$  puede computarse en tiempo polinomial, y para toda instancia  $D \in I_1$ ,  $D$  produce respuesta *SI* para  $\pi_1$  si y solo si  $f(D)$  produce respuesta *SI* para  $\pi_2$ .

Si, dado un problema de decisión, existe un algoritmo capaz de entregar la respuesta correcta para toda cadena de datos de longitud  $n$  en a lo sumo  $p(n)$  pasos con  $p(n)$  un polinomio, entonces se dice que el problema *puede ser resuelto en tiempo polinomial*, y lo clasificamos como perteneciente a la *clase P*. Intuitivamente, se considera los problemas contenidos en  $P$  como aquellos que pueden ser resueltos en forma razonablemente rápida.

Un problema de decisión es *no-determinístico polinomial* –se dice que pertenece a la *clase NP*– cuando cualquier instancia que produce respuesta *SI*, posee una comprobación de correctitud llamada certificado que puede verificarse en tiempo polinomial en el tamaño de la instancia, es decir, puede verificarse en tiempo polinomial si la instancia efectivamente resuelve el problema dado.

Un problema de decisión pertenece a la *clase co-NP* cuando cualquier instancia que produce respuesta *NO* posee un certificado polinomial en el tamaño de la instancia.

Un problema de decisión  $\pi$  pertenece a la *clase NP-completo* cuando se satisfacen las siguientes condiciones:

- $\pi \in NP$
- Para todo problema  $\pi_0 \in NP$ , existe una transformación polinomial de  $\pi_0$  en  $\pi$ .

Un problema de decisión  $\pi$  pertenece a la clase *NP-hard* cuando se satisface la siguiente condición:

- Para todo problema  $\pi_0 \in \text{NP}$ , existe una transformación polinomial de  $\pi_0$  en  $\pi$ .

**Observación 2.1.3.**  $P \subseteq \text{NP}$ . Sin embargo, aún no se conoce si esta inclusión es estricta: uno de los principales problemas abiertos en teoría computacional es saber si  $P = \text{NP}$ . Una prueba de que o bien es estricta o bien es una igualdad, tendría profundas implicaciones para diversas ramas de la matemática y la computación como criptografía, inteligencia artificial, teoría de juegos, además de filosofía, economía y muchos otros campos.

## 2.2. Grafos perfectos

Los *grafos perfectos* fueron definidos por Berge en 1961 [3].

**Definición 2.2.1.** Un grafo es *perfecto* si y solo si  $\omega(H) = \chi(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$  (también diremos en este caso que  $G$  es  $\chi$ -perfecto). Un grafo se dice  *$\alpha$ -perfecto* si  $\alpha(H) = \kappa(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$ .

**Definición 2.2.2.** Un grafo  $G$  se dice *minimalmente imperfecto* cuando  $G$  no es perfecto pero todo subgrafo inducido propio de  $G$  es perfecto. Esta misma definición se aplicará de forma análoga a otras clases de grafos de las cuales hablaremos a lo largo de este trabajo, por ej, grafos minimalmente clique-imperfectos, etc.

Hablaremos más en detalle sobre las caracterizaciones conocidas para la clase de grafos perfectos en el próximo capítulo.

A partir de la noción de grafo perfecto se han definido otras clases de grafos. Dado que la desigualdad min-max utilizada para definir a los grafos perfectos se cumple siempre para cualquier grafo, es claro que los grafos perfectos son aquellos que se obtienen al restringirse sólo a los grafos que cumplen la igualdad para cualquier subgrafo inducido. Las clases de grafos que veremos en este trabajo han sido todas definidas a partir de desigualdades min-max similares a la utilizada para definir a los grafos perfectos, siempre con la idea de restringirnos a la clase de grafos que sólo cumplen la igualdad para todo subgrafo inducido.

En las próximas secciones damos las nociones básicas para definir las clases que serán de importancia para este trabajo y de las cuales se hablará más en detalle en los últimos capítulos.

### 2.3. Grafos clique-perfectos

Se denomina *transversal de las cliques* a un conjunto de vértices de  $G$  que interseca a todas las cliques del grafo. Definimos entonces  $\tau_c(G)$  como el tamaño de un conjunto transversal de las cliques mínimo en  $G$ .

Un *conjunto independiente de cliques* es un subconjunto de cliques disjuntas dos a dos. Se define  $\alpha_c(G)$  como el tamaño de un conjunto independiente de cliques máximo de  $G$ .

Notemos que para cualquier grafo  $G$ , se verifica  $\alpha_c(G) \leq \tau_c(G)$ .

**Definición 2.3.1.** Un grafo  $G$  se dice *clique-perfecto* si  $\alpha_c(H) = \tau_c(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$  [30].

### 2.4. Grafos coordinados

Un *coloreo de cliques* es una asignación de colores para las cliques del grafo de manera tal que para todo par de cliques que se intersecan en algún vértice, se asignan colores distintos a cada una.

Se define entonces  $F(G)$  como la *cantidad mínima de colores que son necesarios para colorear a todas las cliques de  $G$* .

Por otro lado, se define  $M(G)$  como la *cantidad máxima de cliques de  $G$  que contienen un mismo vértice en común*, es decir, si definimos  $m_G(v)$  como la cantidad de cliques de  $G$  que contienen a  $v$ , entonces  $M(G) = \max\{m_G(v) \mid v \in G\}$ .

Notemos que para cualquier grafo  $G$ , se verifica  $M(G) \leq F(G)$ .

**Definición 2.4.1.** Un grafo  $G$  se dice *coordinado* si  $M(H) = F(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$  [10].

Decimos que  $G$  es *C-good* cuando  $M(G) = F(G)$  aunque no necesariamente  $G$  sea coordinado.

### 2.5. Grafos vecindad-perfectos

Notamos  $G[v]$  al subgrafo inducido por el conjunto  $N[v]$ .

Este concepto de cubrimiento de vecindad fue introducido por Sampathkumar y Neeralagi [42]

Dado un grafo  $G$ , decimos que  $C \subseteq V(G)$  es un *vecindad-cubrimiento*, o simplemente *conjunto vecindad* si cada arista y vértice de  $G$  pertenece a  $G[v]$  para algún  $v \in C$ .

Definimos  $\rho_n(G)$  como el tamaño del mínimo vecindad-cubrimiento.

Diremos que un par de elementos de  $E(G) \cup V(G)$  es *vecindad-independiente* si no existe ningún vértice  $v \in V(G)$  tal que ambos elementos pertenecen a  $G[v]$ . Luego, un conjunto  $S \subseteq E(G) \cup V(G)$  se dice un *conjunto vecindad-independiente* si cada par de elementos de  $S$  es vecindad-independiente.

Definimos  $\alpha_n(G)$  como el tamaño del máximo conjunto vecindad-independiente.

Dado que dos elementos distintos de un conjunto vecindad-independiente deben ser cubiertos por distintos vértices de un conjunto vecindad, es claro que para cualquier grafo se verifica:

$$\rho_n(G) \geq \alpha_n(G)$$

**Definición 2.5.1.** Decimos que un grafo  $G$  es *vecindad-perfecto* si se cumple  $\rho_n(H) = \alpha_n(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  [37].





## Capítulo 3

# Grafos perfectos

### 3.1. Caracterización

En esta sección nos dedicaremos a estudiar la caracterización de los grafos perfectos.

La *Teoría de grafos perfectos* nació con la introducción de esta clase de grafos por parte de *Claude Berge* en 1961 [3], y fue desarrollada a partir de un resultado obtenido en 1958 por *Tibor Gallai* [26], el cual puede ser interpretado como que el complemento de un grafo bipartito es perfecto. En sus trabajos, Berge unió el resultado de Gallai con varios otros resultados similares, definiendo los grafos perfectos y conjeturando, entre otras cosas, una caracterización de los mismos que luego fue probado como el *Teorema fuerte de los grafos perfectos*.

Esta clase de grafos resulta interesante desde el punto de vista algorítmico ya que, por ejemplo, hallar el tamaño de la clique máxima o hallar el número cromático son problemas NP-completos para grafos en general, mientras que para grafos perfectos ambos pueden ser resueltos en tiempo polinomial. Sin embargo, la caracterización de los grafos perfectos fue un problema que llevó mucho tiempo resolver.

#### 3.1.1. Teorema Débil

A continuación daremos una demostración del *Teorema Débil de Grafos Perfectos*. Este teorema, que es la primera caracterización estructural que se dio de esta clase de grafos, también fue enunciado como conjetura por Berge en 1961 [3] –aunque la conjetura originalmente planteada por Berge era que un grafo es perfecto si y solo si su complemento lo es– y posteriormente demostrado por Lóvasz [38] en 1972, y Fulkerson en el mismo año, quien lo hizo utilizando Teoría Poliedral de manera independiente a Lóvasz. Veremos a continuación la demostración propuesta por Lóvasz, la cual utiliza

teoría de grafos clásica.

**Teorema 3.1.1.** TEOREMA DÉBIL DE GRAFOS PERFECTOS (Lovász, 1972)

Dado un grafo  $G$ , son equivalentes:

- (I)  $\omega(H) = \chi(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$
- (II)  $\alpha(H) = \kappa(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$
- (III)  $\omega(H) \cdot \alpha(H) \geq |H|$  para todo subgrafo inducido  $H$  de  $G$

**Observación 3.1.2.** Observar que demostrar (i) si y solo si (II) es equivalente a probar que  $G$  es perfecto si y solo si  $\bar{G}$  es perfecto.

**Observación 3.1.3.** Este teorema también es equivalente a decir que  $G$  es  $\chi$ -perfecto si y solo si  $G$  es  $\alpha$ -perfecto.

### Preliminares

**Definición 3.1.4.** Dados un grafo simple  $G = (V, E)$  y un  $v \in V$ , decimos que el grafo  $G \circ v$  se obtiene mediante la multiplicación del vértice  $v$ , agregando un nuevo vértice  $v'$  que se conecta a todos los vértices de la vecindad de  $v$ , es decir,  $N(v) = N(v')$ .

En el caso más general, si  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y tenemos un vector de enteros no negativos  $h = (h_1, \dots, h_n)$ , construimos un nuevo grafo  $H = G \circ h$  sustituyendo cada  $v_i$  por un conjunto independiente de  $h_i$  vértices  $v_i^1, \dots, v_i^{h_i}$  tal que  $v_i^s$  y  $v_j^t$  son adyacentes en  $H$  si y solo si  $v_i$  y  $v_j$  son adyacentes en  $G$ . En este caso, decimos que  $H$  se obtiene de  $G$  por la multiplicación de vértices.

Observemos que por definición  $h_i$  puede ser cero. En ese caso  $H$  no contiene ninguna copia de  $v_i$  y tampoco contiene a  $v_i$ . Entonces todos los subgrafos inducidos de  $G$  se pueden obtener por la multiplicación de vértices de un vector formado por unos y ceros.

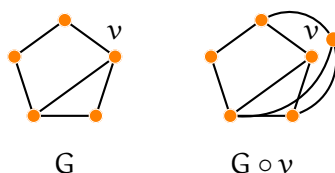


Figura 3.1: Ejemplo de multiplicación por un vértice.

**Lema 3.1.5.** *Dado un vector de enteros no negativos  $h = (h_1, \dots, h_n)$ , si  $G = (V, E)$  cumple (I) y (II) del teorema, entonces  $H = G \circ h$  también cumple (I) y (II).*

*Demostración.* Si  $G$  está formado por un solo vértice entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que vale para todo grafo con menos vértices que  $G = (V, E)$ .

Si algún  $h_i = 0$  entonces  $H = (G \setminus v_i) \circ h'$ , donde  $h' = (h_1, \dots, h_{i-1}, h_{i+1}, \dots, h_n)$ , y si  $G$  satisface (I) y (II) también los satisface  $G \setminus v_i$ . Luego  $H$  satisface (I) y (II) por hipótesis inductiva.

Supongamos entonces que  $h_i \geq 1$  para todo  $i = 1, \dots, n$ . Como  $H$  se obtiene a partir de una sucesión de operaciones del tipo  $G \circ v_i$ , alcanza con probar el resultado para este caso particular, es decir suponemos sin pérdida de generalidad que  $i = 1$ .

En primer lugar, veamos que  $H$  satisface (I). Sabemos por lo supuesto anteriormente que  $H$  se obtiene de  $G$  agregando un vértice  $v'_1$  que no es adyacente a  $v_1$  y que  $N(v'_1) = N(v_1)$ . Luego vale que  $\omega(H) = \omega(G)$ . Además, como sabemos que  $G$  es  $\omega(G)$ -coloreable, podemos colorear a  $H$  igual que  $G$ , asignándole a  $v'_1$  el mismo color que a  $v_1$ . Luego  $\chi(G) = \omega(G) = \omega(H)$  como queríamos probar -queda demostrado para todo subgrafo inducido de  $H$  ya que se desprende del hecho de que todo subgrafo inducido se puede obtener de  $H$  por multiplicación de vértices.

En segundo lugar, supongamos que  $G$  satisface (II) y veamos que se cumple  $\alpha(H) = \kappa(H)$ . Sea  $K$  un cubrimiento por cliques de  $G$  tal que  $|K| = \kappa(G) = \alpha(G)$ , y sea  $K_{v_1}$  la clique que contiene a  $v_1$ . Tenemos dos casos posibles:

**CASO 1:**  $v_1$  está contenido en un conjunto independiende máximo  $S \mid |S| = \alpha(G)$ .

En este caso, tomamos  $S' = S \cup \{v'_1\}$ , que es un conjunto independiende de  $H$  y entonces  $\alpha(H) = \alpha(G) + 1$ .

Luego,  $K \cup \{v'_1\}$  es un cubrimiento por cliques de  $H$ , y entonces vale que

$$\kappa(H) \leq \kappa(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(H) \leq \kappa(H)$$

**CASO 2:** Ningún conjunto independiende máximo de  $G$  contiene a  $v_1$ .

En ese caso, vale que  $\alpha(H) = \alpha(G)$ . Como  $|K| = \alpha(G)$ , y además, si dos vértices pertenecen al mismo conjunto independiende no son adyacentes, entonces cada clique de  $K$  interseca una única vez a todo conjunto maximal independiende.

En particular, si  $D = K_{v_1} \setminus \{v_1\}$ , como  $v_1$  no pertenece a ningún conjunto independiende máximo, entonces:

$$\kappa(G[V \setminus D]) = \alpha(G[V \setminus D]) = \alpha(G) - 1 = \alpha(H) - 1$$

Luego, si tomamos un cubrimiento por cliques de  $G[V \setminus D]$  de cardinal  $\alpha(H) - 1$  y le unimos la clique  $D \cup \{v_1\}$ , tenemos un cubrimiento de  $H$ , y entonces  $\kappa(H) = \alpha(H)$ . Se

utiliza el mismo argumento que en el lema anterior para ver que queda demostrado para todo subgrafo inducido de  $H$ .

□

**Lema 3.1.6.** *Sea un grafo  $G = (V, E)$  tal que todos sus subgrafos inducidos propios cumplen (II) del teorema 3.1.1 en la página 12, y sea  $H$  un grafo obtenido por multiplicación de vértices. Luego, si  $G$  cumple (III) del teorema 3.1.1, entonces  $H$  también lo cumple.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo que cumple (III) del teorema 3.1.1, y sea  $H$  el mínimo grafo obtenido de  $G$  por multiplicación de vértices que no cumple esta propiedad. Luego

$$\omega(H) \cdot \alpha(H) < |X| \tag{1}$$

donde  $|X|$  es el conjunto de vértices de  $H$ , pero (III) se cumple para todo subgrafo inducido de  $H$ .

Podemos suponer como en la demostración anterior que cada vértice de  $G$  fue multiplicado al menos por 1, y que existe un vértice  $u$  que fue multiplicado por un  $h_i \geq 2$ . Suponemos entonces sin pérdida de generalidad que  $i = 1$ , y tomamos  $U = \{u^1, \dots, u^h\}$  el conjunto formado por los vértices de  $H$  que correspondan a  $u$ .

Por la minimalidad de  $H$  sabemos que (III) se cumple en  $H[X \setminus u^1]$ , luego

$$\begin{aligned} |X| - 1 = |X \setminus u^1| &\leq \omega(H[X \setminus u^1]) \cdot \alpha(H[X \setminus u^1]) && \text{(por iii)} \\ &\leq \omega(H) \cdot \alpha(H) \\ &\leq |X| - 1 && \text{(por 1)} \end{aligned}$$

Luego, podemos definir

$$\begin{aligned} p &= \omega(H) = \omega(H[X \setminus u^1]) \\ q &= \alpha(H) = \alpha(H[X \setminus u^1]) \end{aligned}$$

y entonces se cumple que

$$pq = |X| - 1 \tag{2}$$

Por otro lado, dado que  $H[X \setminus U]$  se obtiene de  $G \setminus u$  por multiplicación de vértices, el lema 3.1.1 implica que  $H[X \setminus U]$  satisface (II).

Luego,  $H[X \setminus U]$  puede ser cubierto por un conjunto de  $q$  cliques de  $H$ , digamos  $K_1, \dots, K_q$ , y podemos asumir que los  $K_i$  son disjuntos dos a dos y que  $|K_1| \geq \dots \geq |K_q|$ .

Entonces es claro que:

$$\sum_{i=1}^q |K_i| = |X - U| = |X| - h = pq - (h - 1) \quad (\text{por 2})$$

y como  $|K_i| \leq p$ , como máximo  $h - 1$  de los  $K_i$  no contribuyen  $p$  a la suma, luego,

$$|K_1| = |K_2| = \dots = |K_{q-h+1}| = p$$

Sea entonces  $H'$  el subgrafo de  $H$  inducido por el conjunto  $X' = K_1 \cup \dots \cup K_{q-h+1} \cup \{u^1\}$ . Entonces, por (2):

$$|X'| = p(q - h + 1) + 1 < pq + 1 = |X| \quad (3)$$

luego, por la minimalidad de  $H$  y por (III),

$$\omega(H') \cdot \alpha(H') \geq |X'| \quad (4)$$

Sin embargo, sabemos que  $p = \omega(H) \geq \omega(H')$ , entonces

$$\alpha(H') \geq |X'|/p \quad (\text{por 4})$$

$$> q - h + 1 \quad (\text{por 3})$$

Tomamos un conjunto independiente  $S'$  de  $H'$ , tal que  $|S'| = q - h + 2$ . Sabemos que  $u_1 \in S'$ , pues si no fuera así  $S'$  contendría dos vértices de una misma clique (por definición de  $H'$ ).

Definimos entonces  $S = S' \cup U$ .  $S$  es un conjunto independiente de  $H$  de  $q + 1$  vértices, contradiciendo la definición de  $q$ .

□

Ahora sí estamos listos para dar la demostración del teorema 3.1.1

*Demostración.* Podemos suponer que el teorema vale para todos los grafos con menos vértices que  $G$ .

(I)  $\Rightarrow$  (III) Supongamos que podemos colorear  $G[A]$  con  $\omega(G[A])$  colores. Como hay a lo sumo  $\alpha(G[A])$  vértices de un mismo color, resulta que  $\omega(G[A]) \cdot \alpha(G[A]) \geq |A|$ .

(III)  $\Rightarrow$  (I) Sea  $G = (V, E)$  que cumple (III). Por hipótesis inductiva, todo subgrafo inducido propio de  $G$  satisface (I) – (III). Entonces alcanza con mostrar que  $\omega(G) = \chi(G)$ .

Si existe un conjunto independiente  $S \subseteq G$  tal que  $\omega(G[V \setminus S]) < \omega(G)$ , podemos pintar a  $S$  de color verde y luego pintar  $G[V \setminus S]$  con  $\omega(G) - 1$  otros colores. Luego tendríamos que  $\omega(G) = \chi(G)$ .

Supongamos ahora que, para cada subconjunto independiente  $S$  de  $G$ ,  $G[V \setminus S]$  tiene una clique  $K(S)$  de tamaño  $\omega(G)$ , y sea  $\mathcal{K}$  la colección de todos los subconjuntos independiente de  $G$ . Observemos que  $S \cap K(S) = \emptyset$ .

Para cada  $x_i \in V$ , definimos  $h_i$  como el número de cliques  $K(S)$  que contienen a  $x_i$ . Sea entonces  $H = (X, F)$  el grafo obtenido de  $G$  por multiplicar a cada  $x_i$  por  $h_i$ . Por un lado, sabemos por el lema 3.1.1,

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |X|$$

Por otro lado, usando argumentos combinatorios, se puede mostrar que:

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{x_i \in V} h_i \\ &= \sum_{S \in \mathcal{K}} |K(S)| = \omega(G)|\mathcal{K}| \end{aligned}$$

lo cual se puede justificar considerando la matriz de incidencia cuyas filas están indexadas por los vértices  $x_1, \dots, x_n$  y cuyas columnas corresponden a las cliques  $K(S)$  para cada  $S \in \mathcal{K}$ , ya que en este caso los  $h_i$  son iguales al número de coordenadas positivas en la fila  $i$ , y  $|K(S)|$  es igual al número de coordenadas positivas en su correspondiente columna, lo cual es por definición igual a  $\omega(G)$ .

Además, como a lo sumo una copia de cada vértice de  $G$  puede estar en una clique de  $H$ , resulta que,

$$\omega(H) \leq \omega(G)$$

Observemos que si un subconjunto independiente máximo de  $H$  contiene alguna copia de  $x_i$  entonces contendrá todas las demás copias. Y además, si nos quedamos con las filas de la matriz de incidencia mencionada anteriormente que corresponden a elementos en  $T$ , tenemos

$$\begin{aligned} \alpha(H) &= \max_{T \in \mathcal{K}} \sum_{S \in \mathcal{K}} h_i \\ &= \max_{T \in \mathcal{K}} \sum_{S \in \mathcal{K}} |T \cap K(S)| \\ &= |\mathcal{K}| - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

donde (1) vale pues  $|T \cap K(S)| \leq 1$  y  $|T \cap K(T)| = 0$ .

Todo esto implica que:

$$\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(H)(|K| - 1) < |X|$$

lo cual es una contradicción.

(II)  $\Leftrightarrow$  (III) Por todo lo demostrado anteriormente, tenemos las siguientes implicaciones:

$$G \text{ satisface (II)} \Leftrightarrow \overline{G} \text{ satisface (I)} \Leftrightarrow \overline{G} \text{ satisface (III)} \Leftrightarrow G \text{ satisface (III)}$$

que nos da el resultado que buscábamos.  $\square$

### 3.1.2. Teorema Fuerte

**Definición 3.1.7.** Diremos que un grafo  $G$  es *Berge* si no contiene como subgrafo inducido a  $C_{2k+1}$  ni a  $\overline{C_{2k+1}}$  para  $k \geq 2$ .

**Definición 3.1.8.** Un grafo  $G$  es *minimalmente imperfecto* si no es perfecto, pero todos sus subgrafos inducidos lo son.

**Observación 3.1.9.** Los grafos bipartitos y sus grafos de línea son dos ejemplos muy característicos de grafos perfectos. Por otro lado, los ciclos  $C_{2k+1}$  para  $(k \geq 2)$  no son grafos perfectos, ya que  $\alpha(C_{2k+1}) = k$  y  $\kappa(C_{2k+1}) = k + 1$  (o alternativamente,  $\omega(C_{2k+1}) = 2$  y  $\chi(C_{2k+1}) = 3$ ). Sin embargo, cualquier subgrafo propio de  $C_{2k+1}$  es perfecto, es decir,  $C_{2k+1}$  es minimalmente imperfecto. Luego, por el Teorema débil de 3.1.1, su complemento  $\overline{C_{2k+1}}$  también es minimalmente imperfecto.

Durante el segundo congreso internacional de Teoría de Grafos llevado a cabo en Halle-on-Saal en marzo de 1960, Claude Berge planteó el interrogante de si existen otros grafos minimalmente imperfectos además de los ciclos impares y sus complementos.

Cabe notar que, como los ciclos impares y sus complementos no son perfectos, es claro que si un grafo es perfecto entonces es necesariamente Berge. La propiedad recíproca, conjeturada por Berge en 1962 [4], se conoce como *Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos* y tomó 40 años demostrarla.

**Teorema 3.1.10.** (Chudnovsky, Robertson, Seymour, Thomas, 2002) [23] *Un grafo es perfecto si y solo si es Berge.*



**Observación 3.1.11.** Como observamos anteriormente, este teorema es equivalente a demostrar que los únicos grafos minimalmente imperfectos son  $C_{2k+1}$  y  $\overline{C_{2k+1}}$  con  $k \geq 2$ ).

Como muchos otros resultados obtenidos a partir de métodos estructurados, la prueba de este teorema es larga y técnica y no se dará en este trabajo, aunque sí se dará una breve descripción de la demostración en un caso particular, y posteriormente, las ideas principales de la demostración para el caso general. Cabe destacarlo entre los resultados conocidos de grafos perfectos ya que, además de ser una caracterización estructural fundamental, este teorema ha permitido obtener importantes conclusiones sobre la complejidad de ciertos problemas. A pesar de no utilizar la demostración misma del Teorema Fuerte, se ha podido gracias a éste y otros resultados estructurales, demostrar que el problema de reconocimiento de grafos Berge es polinomial. Antes de la prueba de este teorema, se había podido ver que el problema de reconocer grafos Berge es co-NP (Lovász 1983), pero no se sabía si tenía o no complejidad P.

Antes de llegar a la demostración del Teorema general, se ha llegado a caracterizaciones parciales, es decir restringiéndose siempre a alguna clase de grafos en particular. Algunas de estas clases son, por ejemplo, los grafos sin bulls [24], grafos sin paws [40, 32], grafos de línea [40], y en particular los grafos sin  $C_4$  [17], demostración de la cual hablaremos a continuación ya que la misma dió origen a la demostración para el caso general.

Comencemos dando algunas definiciones.

**Definición 3.1.12.** Decimos que un subconjunto  $S \subseteq V(G)$  es un *conjunto de corte de G* si  $G \setminus S$  tiene más componentes conexas que  $G$ . Diremos que un subconjunto  $S \subseteq V(G)$  es *estrellado* si existe un  $x$  tal que  $S = N[x]$ .

**Lema 3.1.13.** [15] *Un grafo minimalmente imperfecto no contiene un conjunto de corte estrellado.*

Una generalización de la idea de join de dos grafos:

**Definición 3.1.14.** Un grafo  $G$  es una *2-join* si existe una partición  $(H_1, H_2)$  de  $V(G)$  tales que existen  $A_i, B_i \subseteq H_i$  para  $i = 1, 2$ , que verifican:

1. Todos los vértices en  $A_1$  son adyacentes a todos los vértices de  $A_2$ , y lo mismo pasa entre  $B_1$  y  $B_2$ . Además, estos son los únicos vértices relacionados entre  $H_1$  y  $H_2$ .
2. Si  $i = 1, 2$ , existe al menos un camino en  $H_i$  que une a  $A_i$  con  $B_i$ . Si  $|A_i| = |B_i| = 1$ , entonces el grafo inducido por  $H_i$  no es un camino sin cuerdas.

**Lema 3.1.15.** [19] *Un grafo minimalmente imperfecto no contiene una 2-join.*

Estos lemas nos dicen que tanto las 2-join como los conjuntos de corte estrellados están prohibidos en todo grafo minimalmente imperfecto. Esto nos lleva a pesar equivalentemente que para que un grafo  $G$  sea perfecto es necesario que contenga a alguno de estos grafos como subgrafo inducido.

El siguiente resultado nos da una caracterización para aquellos grafos Berge sin  $C_4$ .

**Teorema 3.1.16.** [17] *Si  $G$  es un grafo Berge sin  $C_4$ , entonces o bien es bipartito, o es el grafo de línea de un grafo bipartito, o tiene un conjunto de corte estrellado, o una 2-join.*

Con este Teorema ahora es trivial demostrar la vuelta del Teorema Fuerte:

**Teorema 3.1.17.** *Si  $G$  es un grafo Berge sin  $C_4$  entonces  $G$  es perfecto.*

*Demostración.* Vamos a suponer que existe un grafo  $G$  Berge sin  $C_4$  que además verifica que  $G$  no es perfecto. Luego, podemos afirmar que existe un subgrafo  $H$  de  $G$  minimalmente imperfecto. Como ser Berge es hereditario,  $H$  es claramente Berge y no contiene  $C_4$  como subgrafo inducido. Luego, por el Teorema 3.1.16,  $H$  debe tener un conjunto de corte estrellado o una 2-join, ya que los grafos bipartitos y sus grafos de línea son perfectos. Sin embargo esto nos da un absurdo pues, por los lemas 3.1.13 y 3.1.15 un grafo minimalmente imperfecto no puede contener ninguno de estos grafos y entonces  $G$  es perfecto como queríamos demostrar.  $\square$

Con esto queda demostrada la caracterización para el caso de un grafo Berge sin  $C_4$ .

Teniendo en mente los lemas 3.1.13 y 3.1.15 y el Teorema 3.1.16 podemos observar que parte de la idea detrás de la demostración en este caso particular consiste en tomar grafos prohibidos para los grafos minimalmente imperfectos. Esto es parte de la idea para extender el Teorema 3.1.16 al caso general. Básicamente la idea detrás de la demostración del Teorema Fuerte consiste en mostrar que todo grafo Berge o bien pertenece a alguna clase de grafos (perfectos) bien conocida, o bien admite alguna característica que un grafo minimalmente imperfecto no puede tener.

Para adentrarnos en estas ideas, introduciremos algunas modificaciones a las estructuras definidas anteriormente y definiremos otras clases de grafos que nos ayudarán a darle forma a la caracterización.

**Definición 3.1.18.** Un grafo  $G$  se dice *double split* si dados  $n, m \geq 2$  en  $\mathbb{Z}$ , sus vértices se particionan en cuatro conjuntos  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ ,  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ ,  $C = \{c_1, \dots, c_n\}$  y  $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ , y sus aristas cumplen las siguientes condiciones:

1.  $a_i b_i \in E(G)$  para todo  $1 \leq i \leq m$  y  $c_j d_j \notin E(G)$  para todo  $1 \leq j \leq n$
2.  $\{a_i, b_i\}$  y  $\{a'_i, b'_i\}$  no poseen aristas entre sí para  $1 \leq i < i' \leq m$ , y  $\{c_j, d_j\}$  y  $\{c'_j, d'_j\}$  poseen las 4 aristas correspondientes para  $1 \leq j < j' \leq n$
3. Existen exactamente dos aristas entre  $\{a_i, b_i\}$  y  $\{c_j, d_j\}$  para todo  $1 \leq i \leq m$  y  $1 \leq j \leq n$ , y estas dos aristas son disjuntas.

El nombre proviene de que los grafos double split se pueden obtener de un split duplicando cada vértice. Observemos también que si  $G$  es double split, su complemento también lo es.

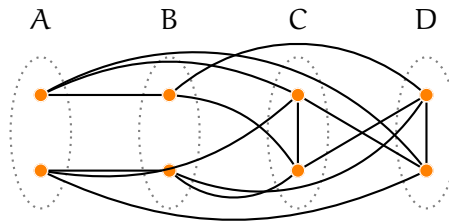


Figura 3.2: Grafo double split.

**Definición 3.1.19.** Un grafo  $G$  se dice *básico* si o bien  $G$  o  $\overline{G}$  es bipartito, o es el grafo de línea de un bipartito, o es un grafo double split.

Observemos que los grafos básicos son perfectos. Esto vale pues para grafos bipartitos es trivial; para los grafos de línea de bipartitos es un teorema de König (*König's edge-coloring Theorem* [33]); para sus complementos se desprende del Teorema Débil demostrado por Lovász; y por último, es fácil ver que un grafo double split es perfecto, y como observamos anteriormente, su complemento también será double split.

Ahora vamos a definir las «características» que se demostró existen en todo grafo Berge no básico. Primero damos la definición de un caso especial de la 2-join definida anteriormente, introducida por Cornuejols y Cunningham en [19].

**Definición 3.1.20.** Decimos que una partición  $(X_1, X_2)$  de  $V(G)$  es una *proper 2-join* si existen dos subconjuntos  $A_i, B_i \subseteq X_i$  para  $i = 1, 2$  tales que:

- Todo vértice de  $A_1$  es adyacente a todo vértice de  $A_2$ , y lo mismo para  $B_1, B_2$
- No existen otras aristas entre  $X_1$  y  $X_2$
- Para  $i = 1, 2$ , toda componente conexa del subgrafo  $G[X_i]$  interseca tanto a  $A_i$  como a  $B_i$

- Para  $i = 1, 2$ , si  $|A_i| = |B_i| = 1$  y  $G[X_i]$  es un camino que une los vértices de  $A_i$  y  $B_i$  entonces tiene longitud impar  $\geq 3$

Se demostró el siguiente resultado en [19]

**Teorema 3.1.21.** *Un grafo mínimamente imperfecto no admite una proper 2-join.*

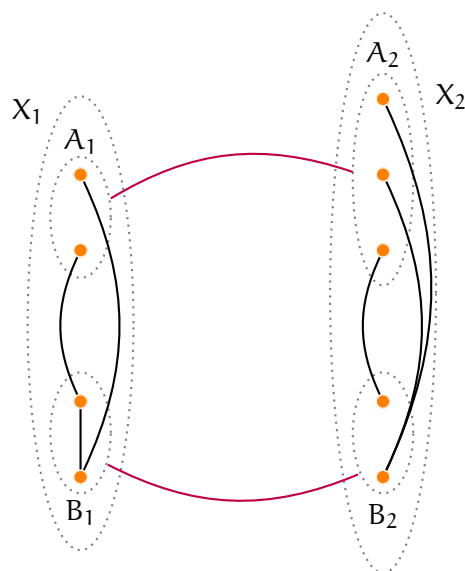


Figura 3.3: Ejemplo de proper 2-join.

Ya definimos en el capítulo anterior qué significa que  $X$  sea (anti)completo a  $Y$ . En este caso diremos que el par  $(X, Y)$  es (anti)completo. Utilizando esta noción se define una nueva posible descomposición. En el paper original de Chudnovsky et al. [23] se define *proper homogeneous pair*. Es inmediato viendo la definición que un proper homogeneous pair es equivalente a una  $M$ -join, que es lo que definiremos a continuación.

Posteriormente, Chudnovsky demostró en [16] como consecuencia de un Teorema de descomposición general para «trigrafos Berge» que los  $M$ -join no son necesarios para demostrar el Teorema Fuerte. Sin embargo nosotros seguiremos las ideas que hay detrás del primer paper para no ahondar en el concepto de trigrafo ya que es una generalización de un grafo y va más allá del alcance de este trabajo.

**Definición 3.1.22.** Una  $M$ -join de un grafo  $G$  es una partición en seis subconjuntos no vacíos  $(A, B, C, D, E, F)$  tales que:

- Todo vértice de  $A$  tiene un vecino y un no-vecino en  $B$ , y viceversa

- Los pares  $(C, A), (A, F), (F, B), (B, D)$  son completos
- Los pares  $(D, A), (A, E), (E, B), (B, C)$  son anticompletos

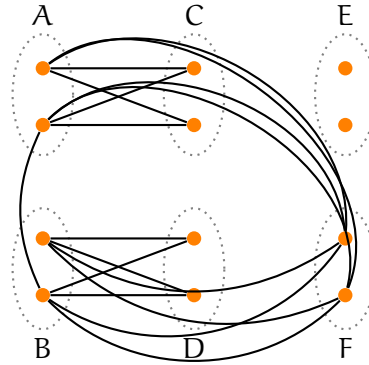


Figura 3.4: Ejemplo de M-join.

El siguiente resultado se debe a Chvátal y Sbihi, [24]

**Teorema 3.1.23.** *Un grafo mínimamente imperfecto no admite una M-join.*

Anteriormente definimos lo que es un *camino* en la página 4; análogamente definimos *anticamino* como un subgrafo inducido tal que su complemento es un camino. Si  $P$  es un camino notamos  $P^*$  a aquellos vértices cuyo grado es igual a 2; estos serán los *vértices internos*. La definición para anticamino es análoga.

Diremos que un par de subconjuntos  $(A, B)$  de  $V(G)$  es *balanceado* si no existe un camino de longitud impar entre dos vértices no adyacentes de  $B$  con interior en  $A$ , y no hay un anticamino de longitud impar con interior en  $B$  entre dos vértices adyacentes de  $A$ .

El tercer tipo de descomposición que utiliza la demostración fue definida por Chvátal [15].

**Definición 3.1.24.** Una *skew partition* de  $G$  es una partición  $(A, B)$  de  $V(G)$  tal que  $A$  no es conexo y  $B$  no es anticonexo.

A pesar de su elegancia, las *skew partitions* tienen un problema que las 2-join y M-join no poseen, y es que ningún grafo mínimamente imperfecto puede admitir una *skew partition*. De hecho ésta fue una conjetura abierta por Chvátal en [15], demostrada posteriormente por Chudnovsky et al. en el mismo paper [23]. Sin embargo este fue

un resultado obtenido a posteriori con respecto a la demostración del Teorema Fuerte, y durante la primera prueba los autores resuelven este problema tomando skew partitions *balanceadas*.

**Definición 3.1.25.** Decimos que una skew partition  $(A, B)$  de  $G$  es *loose* si existe algún vértice en  $B$  que no tiene vecinos en alguna componente de  $A$ , o si algún vértice de  $A$  es completo respecto a alguna anticomponente de  $B$ .

**Observación 3.1.26.** Se observa que todos los grafos double split no triviales admiten una skew partition, por lo que si se consideraran únicamente skew partitions sin pedir que sean balanceadas, no deberíamos considerar los grafos double split como básicos. Desafortunadamente, los grafos double split no triviales no admiten skew partitions balanceadas, y como ya observamos antes, las skew partition generales no alcanzan para demostrar el Teorema.

En la prueba principal, muchas de las skew partitions que se construyeron son loose, por lo tanto el siguiente lema es muy útil:

**Lema 3.1.27.** *Si  $G$  es un grafo Berge y admite un loose skew partition, entonces admite una skew partition balanceada.*

En líneas generales, se van enunciado resultados que demuestran que bajo ciertas condiciones un grafo Berge admite una skew partition balanceada. Todo esto se lleva a cabo para poder afirmar que un grafo mínimamente imperfecto no puede poseer una skew partition balanceada y luego con esto demostrar el resultado principal.

**Teorema 3.1.28.** *Si  $G$  es un grafo mínimamente imperfecto, entonces  $G$  no admite una skew partition balanceada. Como consecuencia de esto, ninguna skew partition de  $G$  es loose.*

El siguiente es el resultado principal del paper. Este tipo de resultados son muy usuales en Teoría de Grafos. Estos Teoremas describen la estructura de una clase particular de grafos básicamente planteando que «si un grafo no contiene un objeto de tipo  $X$  entonces cae dentro de una clase llamada básica o admite algún tipo de descomposición». Las demostraciones de estos teoremas siguen en general un mismo patrón; consisten básicamente en una combinación de los siguientes dos métodos:

1. Se elige de forma explícita un grafo  $H$  apropiado (es decir, se da una descripción bien concisa de su estructura), que no contenga  $X$  como subgrafo inducido, y que no sea básico. Luego se demuestra que posee alguna descomposición y que la misma puede extenderse a todo grafo que contenga a  $H$ . Esto demuestra el teorema para todos los grafos sin  $X$  que contengan a  $H$ , y por lo tanto, luego de este paso sólo queda por demostrar que el teorema vale en aquellos grafos sin  $X$  que no contengan a  $H$ .

2. Se elige un grafo  $B$  básico y «apropiadamente conectado» –donde el significado de conectado dependerá del contexto. Luego consideramos un grafo  $G$  sin  $X$  pero que sí contenga a  $B$  como subgrafo inducido. Luego extendemos  $B$  a un subgrafo maximal  $K$  «apropiadamente conectado» y que sea básico del mismo tipo que  $B$ . Se puede asumir además que  $K \neq G$  ya que es claro que en caso contrario el teorema quedaría demostrado. Por último, se prueba haciendo uso de la maximalidad de  $K$  que  $G \setminus K$  junto a  $K$  inducen una descomposición de  $G$ , y esto nos lleva a continuar la demostración concentrándonos en aquellos grafos  $G$  sin  $X$  que además no contengan a  $B$ .

El siguiente Teorema fue demostrado aplicando estas dos técnicas un total de 12 veces, definiendo unas clases de grafos Berge  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{11}$  tal que cada clase es subclase de la anterior.

**Teorema 3.1.29.** *Si  $G$  es un grafo Berge entonces vale alguna las siguientes afirmaciones:*

1.  $G$  es básico
2.  $G$  o  $\overline{G}$  admiten una proper 2-join
3.  $G$  admite una  $M$ -join
4.  $G$  admite una skew partition balanceada

Suponiendo verdadero este Teorema demostraremos a continuación el Teorema Fuerte 3.1.10.

*Demostración del Teorema 3.1.10.* ( $\Rightarrow$ ) es trivial, como ya se mencionó antes.

( $\Leftarrow$ ) Supongamos que  $G$  es Berge y mínimamente imperfecto para llegar a un absurdo.

En primer lugar, como todo grafo básico es perfecto, luego  $G$  no puede ser básico.

Además, por el Teorema 3.1.21 un grafo mínimamente imperfecto no admite una proper 2-join. De la misma forma, por el Teorema Débil 3.1.1,  $\overline{G}$  también es mínimamente imperfecto y por la misma razón no admite un proper 2-join.

Por el Teorema 3.1.23 se sabe que un grafo mínimamente imperfecto no admite una  $M$ -join.

Por último, se demostró en [23] el Teorema 3.1.28, y luego un grafo mínimamente imperfecto tampoco admite una skew partition balanceada.

Con todo esto, llegamos a una contradicción del Teorema 3.1.29, y por lo tanto  $G$  debe ser perfecto.  $\square$

## 3.2. Reconocimiento

Como vimos en la sección anterior, gracias al Teorema Fuerte 3.1.10 sabemos que un grafo es perfecto si y solo si es Berge. En esta sección daremos el esquema y las ideas más importantes detrás de un algoritmo polinomial que determina en  $\mathcal{O}(n^2)$  si un grafo es Berge o no. Este algoritmo es el resultado del trabajo de dos grupos de investigación en paralelo. Primeramente existían dos algoritmos distintos polinomiales de reconocimiento de grafos Berge. Posteriormente y dado que utilizaban ideas muy similares, ambos grupos decidieron unificar conceptos en un solo algoritmo, el cual fue publicado en el paper «*Cleaning for Bergeness*» (Cornuéjols, Chudnovsky, Liu, Seymour and Vuskovic, 2005) [18].

### Un algoritmo polinomial de reconocimiento de grafos Berge [18])

El algoritmo comienza recibiendo como input un grafo  $G$ , y decide o bien que  $G$  es Berge, o bien que  $G$  no contiene ciclos impares. Luego, para detectar si  $G$  es Berge, se aplica primero el algoritmo a  $G$  y luego a  $\overline{G}$ .

**Definición 3.2.1.** Sean  $G$  un grafo y  $C$  un *shortest odd hole* de  $G$ . Decimos que  $v \in G \setminus C$  es *C-major* si sus vecinos en  $C$  no pertenecen a ningún camino de longitud dos en  $C$ .

Llamaremos *clean* a  $C$  si no contiene vértices *C-major* en  $G$ .

Por último, si  $C$  es un ciclo impar en  $G$ ,  $X \subseteq V(G)$  se dice un *cleaner para C* si  $X$  contiene todos los vértices *C-major* y además  $X \cap V(C)$  está incluido en un camino de longitud dos en  $C$ .

**Observación 3.2.2.** Observemos que si  $X$  es un cleaner para  $C$ ,  $C$  resulta clean en  $G \setminus X$ .

Si  $G$  no es Berge entonces sabemos que existe un odd hole (ciclo impar) en  $G$ ; en particular, existirá un shortest odd hole  $C$  (un ciclo impar mínimo). Si  $C$  es clean, existe una forma polinomial de detectar odd holes en  $G$  –si existen. Sea  $M = \{v \in G \setminus C \mid v \text{ es } C\text{-major}\}$ . Si conocemos  $M$ , podemos borrarlo y obtener un grafo clean corriendo el algoritmo *detector de clean odd holes* en lo que queda de  $G$ . Básicamente éste será el primer paso del algoritmo.

Sin embargo, como no conocemos  $C$ , la idea es enumerar polinomialmente varios conjuntos  $X \subseteq V$  tales que si existe  $C$ , necesariamente uno de estos conjuntos  $X$  nos garantizará que  $M$  está incluido en  $X$  y será disjunto de  $C$ . En este caso, aplicamos el *detector de clean shortest odd holes* en  $G \setminus X$ , para cada  $X$ . Luego, el segundo paso del algoritmo será reducir el problema al caso "clean".

Para comenzar, debemos eliminar dos configuraciones: *pirámides y joyas*



**Definición 3.2.3.** Una *pirámide* en un grafo  $G$  es un subgrafo inducido formado por la unión de un triángulo  $\{b_1b_2b_3\}$ , un cuarto vértice  $a$  y 3 caminos inducidos  $P_1, P_2, P_3$  que satisfacen:

- Para  $i = 1, 2, 3, P_i$  es un camino entre  $a$  y  $b_i$
- Para  $1 \leq i < j \leq 3, a$  es el único vértice en ambos caminos  $P_i$  y  $P_j$ , y  $(b_i, b_j)$  es la única arista de  $G$  entre  $V(P_i) \setminus \{a\}$  y  $V(P_j) \setminus \{a\}$
- $a$  es adyacente a, como mucho, uno de los  $\{b_i\}$

**Observación 3.2.4.** Toda pirámide es una subdivisión de  $K_4$ .

**Definición 3.2.5.** Una secuencia  $v_1, \dots, v_5, P$  se dice una *joya* en  $G$  si:

- $v_1, \dots, v_5$  son vértices distintos
- $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_1)$  son aristas del grafo
- $(v_1, v_3), (v_2, v_4)$  no son aristas de  $G$
- $P$  es un camino inducido de  $G$  entre  $v_1$  y  $v_4$  tal que  $v_2, v_3$  y  $v_5$  no tienen vecinos en común con el interior de  $P$ .

**Observación 3.2.6.** Todo grafo que contenga una pirámide o una joya tiene un odd hole.

Describiremos a continuación las distintas subrutinas del algoritmo final, y daremos algunas ideas detrás de la implementación de las mismas.

#### Algoritmo para reconocer pirámides

- **Input:** un grafo  $G$
- **Output:** O bien encuentra una pirámide en  $G$  (y por lo tanto un odd hole), o determina que  $G$  no contiene pirámides.
- **Tiempo de ejecución:**  $\mathcal{O}(n^9)$

#### Algoritmo para reconocer joyas

- **Input:** un grafo  $G$
- **Output:** O bien encuentra una joya en  $G$  (y por lo tanto un odd hole), o determina que  $G$  no contiene joyas.
- **Tiempo de ejecución:**  $\mathcal{O}(n^6)$

**Detector de clean shortest odd holes**

- **Input:** un grafo  $G$  que no contenga ni pirámides ni joyas
- **Output:** Determina una de las siguientes posibilidades:
  1.  $G$  contiene un odd hole
  2. No existen shortest odd holes en  $G$
- **Tiempo de ejecución:**  $\mathcal{O}(n^4)$

**Idea del algoritmo:**

1. Para todos los pares posibles de vértices distintos  $u, v$  en  $G$ , hallar un camino mínimo  $P(u, v)$  entre ellos, si existe.
2. Para todos los posibles  $u, v, w$  vértices distintos en  $G$ , chequear si existen los caminos  $P(u, v), P(v, w), P(w, u)$  y si es así, si su unión es un odd hole.
3. Si encontramos un odd hole: *Output:*  $G$  contiene un odd hole.
4. Si no, una vez testeadas todas las 3-uplas: *Output:* No existe un clean shortest odd hole en  $G$ .

**Algoritmo para Cleaning**

**Teorema 3.2.7.** Existe un algoritmo polinomial de complejidad  $\mathcal{O}(n^6)$ , que toma como input un grafo  $G$ , y cuyo output es una alguna de las dos siguientes opciones:

- O bien genera  $\mathcal{O}(n^5)$  subconjuntos de  $V(G)$  tales que, si  $C$  es un shortest odd hole en  $G$  y todo vértice  $C$ -major tiene al menos 4 vecinos en  $C$ , entonces alguno de estos subconjuntos es un cleaner para  $C$ ,
- O bien determina que  $G$  no es Berge –pues encuentra un odd hole o un odd anti-hole.

**Un algoritmo para determinar si  $G$  es Berge**

- **Input:** un grafo  $G$
- **Output:** determina si  $G$  es Berge o no.
- **Tiempo de ejecución:**  $\mathcal{O}(n^9)$

**Idea del algoritmo:**

1. Dado  $G$ , ejecuta los algoritmos para determinar si  $G$  posee pirámides o joyas (en caso de que sí posea, *Output*: " $G$  no es Berge")
2. Ejecuta el *Algoritmo para Cleaning*, y supone que se obtienen  $\mathcal{O}(n^5)$  subconjuntos  $X$  de vértices (caso contrario, *Output*: " $G$  no es Berge"). Notar que la hipótesis del algoritmo que pide que cada vértice  $C$ -major tiene al menos 4 vecinos en  $C$  vale para cualquier shortest odd hole  $C$  ya que  $G$  no contiene pirámides.
3. Para cada subconjunto  $X$ , enumerar todos los  $Y \subseteq X$  tal que  $|Y| \leq 3$ , y aplicar el algoritmo *Detector de clean shortest odd holes* para cada grafo  $G \setminus (X \setminus Y)$
4. Si  $G$  contiene un odd hole, entonces alguno de estos subgrafos tendrá un clean shortest hole  $C$ , y será detectado por el algoritmo.
5. Si luego de ejecutar este procedimiento no se encuentra un odd hole en  $G$ , ejecutar de 1-4 de vuelta en  $\overline{G}$ .
6. Si se detecta un odd hole en  $\overline{G}$ , *Output*: " $G$  no es Berge". Caso contrario, *Output*: " $G$  es Berge"

## Capítulo 4

# Grafos clique-perfectos

Recordemos que, como se definió en 2.3.1, un grafo es clique-perfecto si y solo si  $\alpha_c(H) = \tau_c(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$ . Aunque el nombre «clique-perfecto» fue introducido en el año 2000 por Guruswami y Pandu Rangan [30], la igualdad entre  $\alpha_c$  y  $\tau_c$  fue estudiada mucho antes por Berge en el contexto de hipergrafos balanceados.

Es importante mencionar que los grafos clique-perfectos no son ni una subclase ni una superclase de los grafos perfectos en general, aunque ambas clases tienen intersección no vacía –por ejemplo antiholes de longitud  $6k + 3$  son clique-perfectos pero no perfectos, y antiholes de longitud  $6k + 2$  son perfectos pero no clique-perfectos, y los antiholes de longitud  $6k$  pertenecen a ambas. Otra cosa que vale la pena notar – además de que esta clase de grafos no es cerrada por complementos– es que a veces la igualdad  $\alpha_c(G) = \tau_c(G)$  vale para un grafo  $G$  pero no se mantiene para sus subgrafos inducidos.

Contrariamente al caso de los grafos perfectos, no se conoce aún una caracterización de los grafos clique-perfectos por subgrafos inducidos prohibidos minimales. Sólo se conocen resultados para ciertas clases de grafos, algunos de los cuales serán enunciados en la segunda sección de este capítulo. Por otro lado, también es un problema abierto para esta clase el saber si existe o no un algoritmo de reconocimiento de complejidad polinomial.

### 4.1. Otras clases de grafos

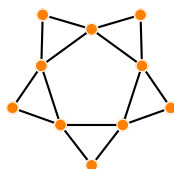
Comenzaremos esta sección dando definiciones que nos servirán tanto para ejemplificar algunas clases de grafos clique-perfectos, como para las caracterizaciones parciales que veremos en la última sección.

**Definición 4.1.1.** Un grafo  $G$  es un *grafo de comparabilidad* si existe un orden parcial en  $V(G)$  tal que dos vértices de  $G$  son adyacentes si y solo si son comparables por ese orden.

**Definición 4.1.2.** Una *cuerda de un ciclo* es una arista cuyos extremos son dos vértices no consecutivos del ciclo. Un grafo  $G$  se dice *cordal* si todo ciclo de longitud mayor o igual que cuatro tiene una cuerda.

**Definición 4.1.3.** Definimos un grafo como *dualmente cordal* si es el grafo clique de algún grafo cordal.

**Definición 4.1.4.** Si  $n \geq 3$ , se define un *n-sol* como el grafo cuyo conjunto de vértices es  $\{v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}$ , de modo que  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es completo,  $N(w_i) = \{v_i, v_{i+1}\}$ , para  $i = 1, \dots, k-1$ , y  $N(w_n) = \{v_1, v_n\}$ . Un *sol par* es un sol tal que  $n$  es par. Análogamente se define *sol impar*.



n-sol

**Definición 4.1.5.** Si  $r \geq 3$  impar, un *r-sol generalizado* es un grafo compuesto por un ciclo  $C_r$  tal que si dos vértices consecutivos  $u, v \in C_r$  forman una clique con algún otro vértice  $w$  del ciclo, entonces existe un vértice  $z \notin C_r$  tal que  $N(z) = \{u, v\}$ . Además, todo vértice del grafo o bien pertenece a  $C_r$ , o bien forma una clique con dos vértices consecutivos de  $C_r$  (a estos se los denomina *impropios*).

**Ejemplo.** Cualquier odd hole es claramente un *r-sol generalizado*; cualquier sol impar también.

**Definición 4.1.6.** Sea  $k \geq 2$ :

- Un *vikingo* es un grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{a_1, \dots, a_{2k+1}, b_1, b_2\}$ ,  $k \geq 2$ , donde  $a_1, \dots, a_{2k+1}$  forman un ciclo con una única cuerda  $a_2a_4$ ,  $b_1$  es adyacente a  $a_2$  y  $a_3$ ,  $b_2$  es adyacente a  $a_3$  y  $a_4$ , y esas son todas las aristas de  $G$ .
- Un *2-vikingo* es un grafo  $G$  tal que  $V(G) = \{a_1, \dots, a_{2k+1}, b_1, b_2, b_3\}$ , donde  $a_1, \dots, a_{2k+1}$  forman un ciclo con sólo dos cuerdas  $a_2a_4$  y  $a_3a_5$ ,  $b_1$  es adyacente a  $a_2$  y  $a_3$ ,  $b_2$  es adyacente a  $a_3$  y  $a_4$ ,  $b_3$  es adyacente a  $a_4$  y  $a_5$ , y esas son todas las aristas de  $G$ .

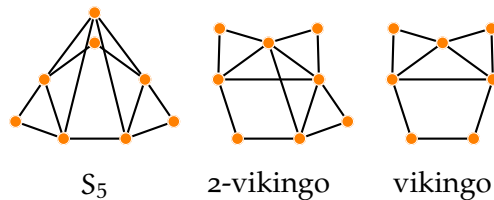
**Definición 4.1.7.** Sea  $k \geq 2$ :

- Definimos el grafo  $S_k$  como sigue:
  - \*  $V(S_k) = \{a_1, \dots, a_{2k+1}, b_1, b_2, b_3\}$ , donde  $\{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$  forma un ciclo con una única cuerda  $a_3a_5$
  - \*  $b_1$  es adyacente a  $a_1$  y  $a_2$
  - \*  $b_2$  es adyacente a  $a_4$  y  $a_5$
  - \*  $b_3$  es adyacente a  $a_1, a_2, a_3$  y  $a_4$ ,

y no hay otras aristas en  $S_k$ .

- Definimos  $T_k$  de la siguiente forma:
  - \*  $V(S_k) = \{a_1, \dots, a_{2k+1}, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ , donde  $\{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$  forman un ciclo con dos cuerdas  $a_2a_4$  y  $a_3a_5$
  - \*  $b_1$  es adyacente a  $a_1$  y  $a_2$
  - \*  $b_2$  es adyacente a  $a_1, a_2$  y  $a_3$
  - \*  $b_3$  es adyacente a  $a_1, a_2, a_3, a_4, b_2$  y  $b_4$
  - \*  $b_4$  es adyacente a  $a_3, a_4$  y  $a_5$
  - \*  $b_5$  es adyacente a  $a_4$  y  $a_5$ ,

y no hay otras aristas en  $T_k$ .



**Definición 4.1.8.** Definimos el grafo  $Q_n$  para  $n \geq 3$  como sigue:  $V(Q_n) = \{u_1, \dots, u_n\} \cup \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $v_1, \dots, v_n$  inducen  $\overline{C_n}$ , y para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $N_{Q_n}(u_i) = V(Q_n) \setminus \{v_i\}$ .

**Definición 4.1.9.** Decimos que una familia de conjuntos  $S$  satisface la *propiedad de Helly* si cada subfamilia que consiste de conjuntos que se intersecan dos a dos, tiene intersección no vacía.

**Definición 4.1.10.** Un grafo se dice *arco-circular* si es el grafo intersección de alguna familia finita de arcos de una circunferencia. Una representación de un grafo arco-circular es una colección de arcos, cada uno correspondiendo a un único vértice del

grafo, tal que dos intervalos se intersecan si y solo si los correspondientes vértices son adyacentes.

Un grafo *arco-circular Helly* (*ACH*) es un grafo arco-circular que admite una representación cuyos arcos satisfacen la propiedad de Helly. En particular, en una representación arco-circular Helly del grafo, para cada clique hay un punto en el círculo que pertenece a los arcos correspondientes a los vértices de la clique y a ninguno más. Llamamos a este punto un *ancla de la clique*, y notamos que puede no ser único.

**Definición 4.1.11.** Un grafo es *clique-Helly* (*CH*) si sus cliques satisfacen la propiedad de Helly, y es *clique-Helly hereditario* (*CHH*) si *H* es clique-Helly para todo subgrafo inducido *H* de *G*.

**Definición 4.1.12.** Decimos que un grafo es *K-perfecto* si su grafo de cliques  $K(G)$  es perfecto.

**Definición 4.1.13.** Definimos las siguientes clases:

- Un *diamante* es un grafo isomorfo a  $K_4 \setminus \{e\}$ , donde *e* es una arista de  $K_4$ . Un grafo se dice *sin diamantes* (o *diamond-free*) si no contiene un diamante.
- Un *paw* es un triángulo con una hoja adyacente a uno de sus vértices. Un grafo se dice *paw-free* si no contiene un paw.
- Un *bull* es un triángulo con dos hojas adyacentes a distintos vértices del mismo.
- Un *claw* es un grafo isomorfo a  $K_{1,3}$ . Un grafo se dice *claw-free* si no contiene un claw.
- Una *rueda* (o *wheel*)  $W_j$  es un grafo de  $j + 1$  vértices tal que  $j$  de ellos inducen un  $C_j$  y vértice restante es universal.
- Una *gema* (o *gem*) es un grafo de cinco vértices tal que cuatro de ellos inducen  $P_4$  y el quinto vértice es universal. Un grafo se dice *gem-free* si no contiene una gema.
- Llamamos *grafo de línea* de *G* al grafo de intersección de las aristas de *G*, y lo notamos  $L(G)$ . Un grafo *F* es un *grafo de línea* si existe un grafo *H* tal que  $L(H) = F$ . Claramente los grafos de línea son una subclase de los grafos claw-free.

Intentando encontrar una caracterización de los grafos clique-perfectos por subgrafos minimales prohibidos, se han estudiado algunos casos particulares que se desprenden de las definiciones anteriores. De esta forma se han definido, entre otros, los grafos *arco-circulares sin gemas*, o los grafos *sin {gemas- $W_4$ , bull }*, grafos *sin paws*,  *$P_4$ -tidy*, y otras clases definidas a partir de subgrafos inducidos prohibidos, para las cuales hay resultados parciales que se mencionarán más adelante.

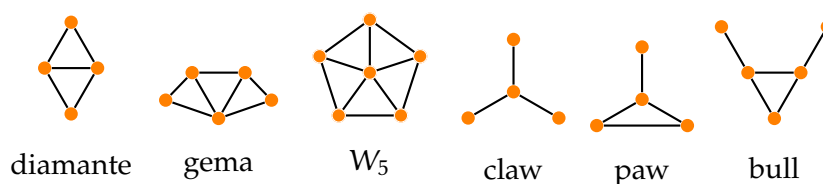


Figura 4.1: Algunas clases de grafos.

## 4.2. Algunas familias de grafos clique-perfectos y clique-imperfectos

**Proposición 4.2.1.** [1] *Los grafos de comparabilidad son grafos clique-perfectos.*

**Observación 4.2.2.** Los grafos dualmente cordales (4.1.3) en general no son clique-perfectos, pues la igualdad  $\alpha_c(G) = \tau_c(G)$  no se mantiene para todos sus subgrafos inducidos. Por ejemplo,  $W_5$  es dualmente cordal y cumple la igualdad, pero contiene a  $C_5$  como subgrafo inducido, y  $\alpha_c(C_5) = 2$ , mientras que  $\tau_c(C_5) = 3$ .

**Proposición 4.2.3.** [7] *El complemento de un grafo acíclico es clique-perfecto.*

*Demostración.* Sea  $G$  el complemento de un grafo acíclico. Si  $G$  contiene un vértice universal  $v$ , entonces es claro que toda clique de  $G$  contiene a  $v$ . Luego podemos afirmar que  $\alpha_c(G) = \tau_c(G) = 1$ .

En el caso de que  $G$  no contenga un vértice universal,  $\tau_c(G) > 1$ , y como  $\bar{G}$  es acíclico entonces contiene un vértice  $w$  de grado 1. Si  $z$  es el único vecino de  $w$  en  $\bar{G}$ , entonces toda clique de  $G$  que no contenga a  $z$  debe contener a  $w$  por maximalidad. Luego  $\tau_c(G) = 2$ . Por otro lado, toda componente conexa de  $\bar{G}$  es un árbol con al menos dos vértices, luego podemos obtener dos conjuntos maximales independientes disjuntos en  $G$  y entonces  $\alpha_c(G) = 2$ . Como la clase de los grafos acíclicos es hereditaria, la igualdad vale para todos los subgrafos inducidos de  $G$ .  $\square$

**Proposición 4.2.4.** [30] [25] *Un hole es clique-perfecto si y solo si es par.*

**Teorema 4.2.5.** [11] *Los grafos  $r$ -sol generalizado y los antiholes de longitud  $t$  con  $t = 1, 2 \pmod{3}, t \geq 5$  no son clique-perfectos.*

**Observación 4.2.6.** Del teorema anterior se desprende que los grafos perfectos no son una subfamilia de los clique-perfectos.

Cabe destacar que los odd holes y los antiholes cuyo número de vértices no es múltiplo de 3 son subgrafos inducidos prohibidos para la clase de grafos clique-perfectos. De hecho, todos estos son *subgrafos inducidos prohibidos minimales*, y la clase de  $r$ -soles



generalizados es una familia de subgrafos prohibidos para la clase de clique-perfectos que contiene propiamente a los soles impares y odd holes, aunque desafortunadamente, no todo  $r$ -sol generalizado es minimalmente clique-imperfecto –con respecto a sus subgrafos inducidos. En la próxima sección hablaremos más en detalle de estos y otros grafos minimalmente clique-imperfectos.

**Proposición 4.2.7.** [7] *Los vikingos y 2-vikingos son grafos clique-imperfectos.*

*Demostración.* Es fácil ver que los vikingos y 2-vikingos son  $2k + 1$ -soles generalizados, siendo el ciclo impar en ambos casos el formado por  $\{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$ , y el conjunto de vértices impropios es  $\{b_1, b_2\}$  y  $\{b_1, b_2, b_3\}$ , respectivamente.  $\square$

**Proposición 4.2.8.** *Sea  $k \geq 2$ . Entonces  $S_k$  y  $T_k$  son clique-imperfectos.*

*Demostración.* Toda clique de  $S_k$  contiene al menos dos vértices de  $\{a_1, \dots, a_{2k+1}\}$ , luego  $\alpha_c(S_k) \leq k$ . Lo mismo vale para  $T_k$ . Por otro lado, consideramos en  $S_k$  la familia de cliques  $\{a_1, a_2, b_1\}$ ,  $\{a_2, a_3, b_3\}$ ,  $\{a_3, a_4, b_3\}$ ,  $\{a_4, a_5, b_2\}$  y, si  $k = 2$ ,  $\{a_5, a_1\}$ , y si  $k > 2$ ,  $\{a_5, a_6\}, \dots, \{a_{2k+1}, a_1\}$ . Ningún vértice de  $S_k$  pertenece a más de dos de estas  $2k + 1$  cliques, luego  $\tau_c(S_k) \geq k + 1$ . Entonces se tiene  $\alpha_c(S_k) \leq k < k + 1 \leq \tau_c(S_k)$ , y entonces  $S_k$  es clique-imperfecto.

Análogamente, tomamos la siguiente familia de cliques en  $T_k$ :  $\{a_1, a_2, b_1\}$ ,  $\{a_2, a_3, b_2, b_3\}$ ,  $\{a_3, a_4, b_3, b_4\}$ ,  $\{a_4, a_5, b_5\}$  y, si  $k = 2$ ,  $\{a_5, a_1\}$ , y si  $k > 2$ ,  $\{a_5, a_6\}, \dots, \{a_{2k+1}, a_1\}$ . Ningún vértice de  $T_k$  pertenece a más de dos de estas  $2k + 1$  cliques y entonces  $\tau_c(T_k) \geq k + 1$ , y se sigue como en el caso de  $S_k$ .  $\square$

**Observación 4.2.9.** [7] Los vikingos, 2-vikingos,  $S_k$  y  $T_k$  para  $k \geq 2$  son minimalmente clique-imperfectos.

Se ha caracterizado en [39] a aquellos grafos  $G$  tales que  $K(G)$  es completo (y por lo tanto  $\alpha_c(G) = 1$ ) y no existe ningún vértice universal (es decir,  $\tau_c(G) > 1$ ).

**Teorema 4.2.10.** [39] *Si  $k \geq 1$ ,  $\alpha_c(Q_{2k+1}) = 1$  y  $\tau_c(Q_{2k+1}) = 2$ . Más aún, si  $G$  es un grafo tal que  $\alpha_c(G) = 1$  y  $\tau_c(G) > 1$ , entonces  $G$  contiene algún  $Q_{2k+1}$  para algún  $k \geq 1$ .*

Como corolario de este teorema, podemos decir que  $Q_{2k+1}$  no es clique-perfecto. Más aún, si  $n = 1, 2 \pmod{3}$ ,  $n \geq 5$ , como  $Q_n$  contiene a  $\overline{C_n}$ , no sólo no es clique-perfecto sino que tampoco es minimalmente clique-imperfecto.

**Proposición 4.2.11.** [7] *Sea  $k \geq 1$ . Entonces  $Q_{6k}$  es clique-perfecto, y  $Q_{6k+3}$  es minimalmente clique-imperfecto.*

### 4.3. Caracterizaciones parciales

Como ya comentamos anteriormente, la lista de subgrafos minimales prohibidos para la clase de grafos clique-perfectos no se conoce, sin embargo hay algunos resultados parciales en esta dirección. Dedicaremos esta sección a hablar de aquellos resultados y demostraremos alguno de ellos.

Para algunas clases de grafos, es suficiente excluir a las familias de grafos clique-imperfectos mostrados en la sección 4.1 para garantizar que son clique-perfectos.

**Teorema 4.3.1.** [37] *Sea  $G$  un grafo cordal. Entonces  $G$  es clique-perfecto si y solo si no contiene ningún sol impar como subgrafo inducido.*

**Teorema 4.3.2.** [8] *Sea  $G$  un grafo de línea. Entonces  $G$  es clique-perfecto si y solo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es un odd hole o un 3-sol.*

**Teorema 4.3.3.** [9] *Sea  $G$  un grafo CHH sin claws. Luego  $G$  es clique-perfecto si y solo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es un odd hole o un antihole de longitud 7.*

**Teorema 4.3.4.** *Sea  $G$  un grafo ACH, entonces  $G$  es clique-perfecto si y solo si no contiene un 3-sol, un antihole de longitud 7, un odd hole, un vikingo, un 2-vikingo o alguno de los gráficos  $S_k$  o  $T_k$ .*

**Teorema 4.3.5.** [41] *Sea  $G$  un grafo arco-circular sin gemas. Son equivalentes:*

1.  $G$  es clique-perfecto
2.  $G$  es coordinado
3.  $G$  es  $K$ -perfecto hereditario
4.  $G$  es perfecto
5.  $G$  no contiene odd holes

El siguiente resultado se demostrará en el próximo capítulo.

**Teorema 4.3.6.** [12] *Sea  $G$  un grafo sin paws. Luego, son equivalentes:*

1.  $G$  es clique-perfecto
2.  $G$  es coordinado
3.  $G$  es perfecto

**Teorema 4.3.7.** [7] *Sea  $G$  un grafo libre de diamantes. Entonces  $G$  es clique-perfecto si y solo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es un  $r$ -sol generalizado.*

## 4.4. Grafos sin diamantes

Daremos a continuación la demostración del teorema 4.3.7.

### Preliminares

**Lema 4.4.1.** [11] *Sea  $G$  un grafo. Entonces:*

1.  $\alpha_c(G) = \alpha(K(G))$
2.  $\tau_c(G) \geq \kappa(K(G))$ . Más aún, si  $G$  es clique-Helly entonces  $\tau_c(G) = \kappa(K(G))$

**Teorema 4.4.2.** *Un grafo  $G$  es clique-Helly hereditario si y solo si no contiene  $k$ -pirámides, para  $k = 0, 1, 2, 3$ .*

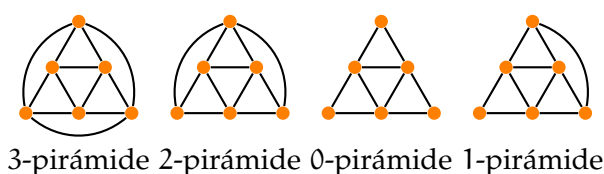


Figura 4.2: Pirámides.

**Corolario 4.4.3.** *Un grafo libre de diamantes es CHH.*

**Proposición 4.4.4.** *Sea  $\mathcal{L}$  una clase de grafos hereditaria, que es CHH y tal que todo grafo en  $\mathcal{L}$  es  $K$ -perfecto. Entonces todo grafo en  $\mathcal{L}$  es clique-perfecto.*

*Demostración.* Sea  $G$  un grafo en  $\mathcal{L}$ , y sea  $H$  un subgrafo inducido de  $G$ . Como  $\mathcal{L}$  es hereditaria entonces  $H \in \mathcal{L}$ , entonces es  $K$ -perfecto. Como  $\mathcal{L}$  es una clase CHH,  $H$  es clique-Helly y entonces por el lema 4.4.1,  $\alpha_c(H) = \alpha(K(H)) = \kappa(K(G)) = \tau_c(H)$ , luego el resultado queda demostrado.  $\square$

**Teorema 4.4.5.** [7] *Sea  $G$  un grafo libre de diamantes. Si  $G$  no contiene ningún  $r$ -sol generalizado entonces  $K(G)$  es perfecto.*

*Demostración.* Por el Teorema Fuerte de los grafos perfectos de la página 17, alcanza con probar que  $K(G)$  no contiene odd holes ni odd antiholes. Por [21], que  $G$  sea libre de diamantes implica que  $K(G)$  lo es, y entonces podemos afirmar que no contiene ningún antihole de longitud mayor o igual que 7 –pues un diamante induce un grafo clique que contiene un subgrafo isomorfo a  $\overline{C_7}$ . Supongamos entonces que  $K(G)$  contiene un odd hole  $k_1 \dots k_{2n+1}$ , donde  $k_1, \dots, k_{2n+1}$  son cliques de  $G$ . Entonces  $G$

contiene un ciclo impar  $v_1 \dots v_{2n+1}v_1$ , con  $v_i \in k_i \cap k_{i+1}$  y en ninguna otra clique  $k_j$ . Entonces como  $G$  no contiene ningún  $r$ -sol generalizado, podemos suponer que alguna arista de este ciclo, digamos  $v_1v_2$ , es en un triángulo con otro vértice del ciclo, digamos  $v_m$ . Observemos que  $v_1, v_2$  pertenecen a  $k_2$  y  $v_m$  no. Como  $k_2$  es una clique, existe un  $w \in k_2$  que no es vecino de  $v_m$  (pero sí lo es de  $v_1, v_2$ ) y entonces el conjunto  $\{v_1, v_2, v_m, w\}$  induce un diamante, lo cual es un absurdo.  $\square$

*Demostración del Teorema 4.3.7.* Por el teorema 4.2.5, sabemos que si  $G$  es clique-perfecto entonces ningún subgrafo inducido de  $G$  es un  $r$ -sol generalizado.

Por el corolario directo de teorema 4.4.2 sabemos que un grafo libre de diamantes es CHH. Luego, como la clase de grafos libres de diamantes sin  $r$ -sol generalizados es hereditaria, la vuelta queda demostrada por el Teorema 4.4 y la Proposición 4.4.4.  $\square$

**Observación 4.4.6.** Esta caracterización no lleva a un algoritmo de reconocimiento polinomial para grafos clique-perfectos libres de diamantes. La complejidad del reconocimiento de  $r$ -sol generalizados aún no se conoce, aún para grafos libres de diamantes. Sin embargo, hay otras caracterizaciones aquí mostradas que sí conducen a algoritmos polinomiales para los problemas de reconocer si un grafo es clique-perfecto en las clases respectivas, a saber, para grafos de línea, complementos de bosques, sin {gemas- $W_4$ -bull} y grafos sin paws [41].



## Capítulo 5

# Grafos coordinados

Los grafos coordinados y los grafos  $K$ -perfectos fueron definidos en [10] mientras se buscaban caracterizaciones para grafos clique-perfectos; ciertamente las tres clases están fuertemente relacionadas [11] [10]. De hecho, se demostró en [10] que los grafos coordinados son una subclase de los grafos perfectos.

Recordemos entonces que de acuerdo a lo expuesto en la página 8, se definen los grafos coordinados como aquellos para los cuales se verifica  $F(G) = M(G)$  para todo subgrafo inducido.

El problema de reconocimiento para grafos coordinados es NP-completo. Más aún, este problema es NP-completo aún restringido a la clase de los grafos  $\{\text{gem-}W_4\text{-}C_4\}$ -free con  $M(G) \leq 3$  [45].

**Ejemplo.** En [10] se demuestra que los ciclos pares son coordinados, y que los ciclos impares  $C_{2k+1}$  con  $k \geq 2$  no lo son, ya que  $M(C_{2k+1}) = 2$  y  $F(C_{2k+1}) = 3$  para  $k \geq 2$ .

Los grafos bipartitos son un ejemplo de grafos tanto clique-perfectos como coordinados [33] [34].

### 5.1. Algunas definiciones

**Definición 5.1.1.** Definimos:

- $2P_4$  al grafo formado por dos caminos  $P_4$  separados.
- Llamamos  $R$  al grafo compuesto por dos caminos  $P_{4,1} = \{p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{1,4}\}$ ,  $P_{4,2} = \{p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}, p_{2,4}\}$  y una arista  $\{e\}$  que une  $p_{1,2}$  con  $p_{2,2}$ .
- Llamamos *trinity* al grafo con vértices  $\{v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3\}$ , donde  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es un triángulo y  $w_i$  es adyacente únicamente a  $v_i$  para  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

**Definición 5.1.2.** Un *árbol* es un grafo acíclico conexo. Equivalentemente, un árbol  $T$  es un grafo conexo con  $|V(T)| - 1$  aristas, o un grafo acíclico de  $|V(T)| - 1$  aristas.

Un *bosque* es un grafo acíclico, o equivalentemente, un bosque es un grafo donde toda componente conexa es un árbol.

**Definición 5.1.3.** Sea  $G$  un grafo y  $v, w \in G$ . Decimos que  $v$  *domina a*  $w$  si  $N(w) \subseteq N(v)$ . Los vértices  $v$  y  $w$  se dicen *mellizos* cuando  $N(v) = N(w)$  en  $G$  y se dice que son *antimellizos* cuando  $N(v) = N(w)$  en  $\overline{G}$ .

**Definición 5.1.4.** Decimos que un árbol  $T$  es un *c-árbol* si existe una raíz  $v$  tal que:

- Todo vértice distinto de  $v$  tiene grado a lo sumo 2.
- El diámetro de  $T$  es menor o igual a 7.
- Todo vértice está a distancia menor a 5 de  $v$ .
- $T$  no tiene antimellizos.

**Definición 5.1.5.** Un *c-bosque* es un bosque donde toda componente conexa es un *c-árbol* y existe a lo sumo una componente conexa con más de 2 vértices.

**Teorema 5.1.6.** [10] Si  $G$  es coordinado entonces  $G$  no contiene *odd holes* ni *antiholes* de longitud distinta a 4 o 6.

El siguiente es un corolario directo del Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos 3.1.10 y del Teorema 5.1.6

**Teorema 5.1.7.** Si  $G$  es coordinado entonces  $G$  es perfecto.

**Lema 5.1.8.** [44] Sea  $\mathcal{G}$  una clase de grafos hereditaria. Luego son equivalentes:

- Todo grafo de  $\mathcal{G}$  es coordinado
- Todo grafo de  $\mathcal{G}$  es *C-good*

## 5.2. Caracterizaciones parciales

Como en el caso de los grafos clique-perfectos, se desconoce aún una caracterización por subgrafos prohibidos minimales de los grafos coordinados, sin embargo se conocen resultados parciales restringidos a ciertas clases de grafos. En esta sección enunciaremos estos resultados y posteriormente demostraremos alguno de ellos. Todas las caracterizaciones de las que hablaremos a continuación conducen a algoritmos polinomiales para los problemas de reconocer si un grafo es coordinado en las clases respectivas.

**Teorema 5.2.1.** [44] *Sea  $G$  un grafo. Entonces  $L(G)$  es coordinado si y solo si  $L(G)$  es perfecto y no contiene el grafo de línea de un trinity.*

Observemos que el grafo de línea de un trinity es la pirámide.

Ya que determinar si un grafo es perfecto puede resolverse en tiempo polinomial, el siguiente resultado es consecuencia de ello y del teorema 5.2.1:

**Teorema 5.2.2.** *El problema de determinar si un grafo de línea es coordinado puede ser resuelto en tiempo polinomial.*

**Teorema 5.2.3.** [12] *Sea  $G$  sin paws. Luego son equivalentes:*

1.  $G$  es perfecto
2.  $G$  es clique-perfecto
3.  $G$  es coordinado

**Teorema 5.2.4.** [44] *Sea  $G$  un bosque. Son equivalentes:*

1.  $\bar{G}$  es coordinado.
2.  $G$  no contiene ni un  $2P_4$  ni un  $R$ .
3. El bosque  $G'$  que se obtiene de identificar los antimellizos de  $G$  es un  $c$ -bosque.

**Corolario 5.2.5.** *Sea  $G$  el complemento de un bosque. Entonces  $G$  es coordinado si y solo si no contiene  $2\bar{P}_4$  ni  $\bar{R}$ .*

**Corolario 5.2.6.** *Los grafos  $2\bar{P}_4$  y  $\bar{R}$  son minimalmente no coordinados.*

**Teorema 5.2.7.** [44] *El problema de determinar si el complemento de un bosque es coordinado puede ser resuelto en tiempo lineal.*

**Teorema 5.2.8.** [44] *Sea  $G$  sin gems,  $W_4$  ni bulls. Entonces son equivalentes:*

1.  $G$  es clique-perfecto.
2.  $G$  es coordinado.
3.  $G$  es perfecto.



### 5.3. Grafos sin paws

En esta sección, damos una caracterización por subgrafos prohibidos de los grafos coordinados restringida a la clase de grafos sin paws, concretamente, demostraremos el teorema 5.2.3. Los grafos sin paws son interesantes de analizar pues contienen grafos con un número exponencial de cliques, mientras que en la mayor parte de las clases donde se conoce una caracterización por subgrafos prohibidos o un algoritmo de reconocimiento polinomial para grafos coordinados (o también para clique-perfectos) el número de cliques está acotado polinomialmente. Ejemplos de esto serían la clase de grafos cordales, los grafos sin diamantes, grafos de línea o grafos arco-circulares Helly (ACH).

**Lema 5.3.1.** *Si  $G$  es un grafo sin paws y  $G$  no es anticonexo, entonces las anticomponentes de  $G$  son conjuntos independientes, es decir,  $G$  es un grafo completo multipartito.*

*Demostración.* Sea  $A$  una anticomponente de  $G$ , supongamos que  $A$  no es un conjunto independiente. Si  $|A| = 1$  no hay nada que demostrar. Supongamos entonces que  $|A| > 1$ , y que existen  $u, v \in A$  tales que  $(u, v)$  es una arista de  $G$ . Observemos que como  $A$  es una anticomponente de  $G$ ,  $A$  debe ser una componente conexa de  $\overline{G}$ , y por lo tanto debe existir  $w \in A \setminus \{u, v\}$ . Por otro lado, como  $G$  no es anticonexo sabemos que entonces  $\overline{G}$  no es conexo, y por lo tanto sabemos que existe  $z \in G \setminus A$ , y que  $z$  pertenece a otra componente conexa de  $\overline{G}$ . Por lo tanto, podemos concluir que  $(u, z), (v, z), (w, z)$  son aristas de  $G$ , luego se obtiene un absurdo ya que estas aristas junto con  $(u, v)$  forman un paw un  $G$ .  $\square$

**Lema 5.3.2.** *Sea  $G$  un grafo sin paws conexo y anticonexo. Entonces  $G$  no contiene triángulos.*

*Demostración.* Observemos que  $G$  no puede ser  $K_3$  ya que en ese caso  $G$  no sería anticonexo. Supongamos entonces que existe un triángulo, es decir, sea  $V' = \{v_1, v_2, v_3\}$  tal que el subgrafo inducido por  $V'$  es  $K_3$ . Como  $G$  no es  $K_3$ , existe al menos un  $u \in G$  que no pertenece a  $V'$ . Luego, si  $G$  es conexo existe un camino  $P$  entre  $u$  y –por ejemplo–  $v_1$  y entonces podemos hallar un paw en  $G$ , llegando a un absurdo.  $\square$

**Proposición 5.3.3.** *Sea  $G$  un grafo conexo. Son equivalentes:*

1.  $G$  es perfecto, sin paws y tiene como máximos dos componentes anticonexas
2.  $G$  es bipartito

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2) : Si  $G$  no es anticonexo, por el lema 5.3.1 las anticomponentes son conjuntos independientes. Como  $G$  posee como máximo dos anticomponentes, luego  $G$  es bipartito. En el caso que  $G$  sea anticonexo, dado que  $G$  es conexo y sin

paws, por el lema 5.3.2 sabemos que  $G$  no contiene  $K_3$ . Además, como  $G$  es perfecto, no contiene odd holes, y por lo tanto no contiene ningún ciclo impar. Luego podemos afirmar que es bipartito.

(2)  $\Rightarrow$  (1) : Si  $G$  es bipartito entonces no contiene ciclos impares. En particular, no contiene ningún  $K_3$  como subgrafo inducido y entonces no puede tener paws. Además, es claro que tiene como máximo dos anticomponentes pues por el lema 5.3.1 éstas deben ser conjuntos independientes.  $\square$

Tenemos entonces este corolario trivial

**Corolario 5.3.4.** *Sea  $G$  un grafo sin paws, conexo y anticonexo. Luego,  $G$  es perfecto si y solo si  $G$  es bipartito.*

Los grafos completos multipartitos son una subclase de los grafos distancia-hereditarios. En [35] se demuestra que los grafos distancia-hereditarios son grafos clique-perfectos, por lo tanto los grafos completos multipartitos son clique-perfectos.

**Teorema 5.3.5.** *Si  $G$  es un grafo completo multipartito entonces  $G$  es coordinado.*

*Demostración.* Los grafos completos multipartitos son claramente una clase hereditaria. Luego por el lema 5.1.8 alcanza con probar que son C-good.

Sea  $G$  un grafo completo multipartito, y sean  $A_1, \dots, A_k$  ( $k \geq 1$ ) sus anticomponentes. Suponemos sin pérdida de generalidad que  $|A_1| \leq \dots \leq |A_k|$ . Sea  $b = |A_k|$ , es decir, el cardinal de la anticomponente más grande.

Si  $b = 1$  entonces  $G$  es completo y es trivialmente C-good. Suponemos entonces que  $b > 1$ .

Cada clique tiene exactamente un vértice en cada anticomponente, luego  $m(v) = \prod_{i=1, i \neq j}^k |A_i|$  para todo  $v \in A_j$ , para todo  $1 \leq j \leq k$ . Y como  $A_1$  es la anticomponente más pequeña, resulta  $M(G) = \prod_{i=2}^k |A_i|$ .

Más aún, existe una correspondencia biunívoca entre las cliques de  $G$  y las secuencias en  $\mathcal{A} = \{[a_1, \dots, a_k], \text{ con } 0 \leq a_i \leq |A_i| - 1\}$ . Definimos la función  $c : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_0$  como sigue:

$$c(0, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=2}^k a_i b^{i-2} \quad (1)$$

$$c(a_1, a_2, \dots, a_k) = c(0, r(a_2 - a_1, |A_2|), \dots, r(a_k - a_1, |A_k|)) , \text{ si } a_1 > 0 \quad (2)$$

donde  $r(x, y)$  denota el resto de la división entera  $x/y$ . Usaremos  $c$  como un coloreo de cliques para  $G$ .

La cantidad de secuencias en  $\mathcal{A}$  tales que  $a_1 = 0$  es  $\prod_{i=2}^k |A_i|$ , luego la función  $c$  usará a lo sumo  $M(G)$  colores. Luego, si  $c$  es un coloreo válido entonces es claro que  $M(G) = F(G)$  y entonces  $G$  será  $C$ -good.

Veamos entonces que  $c$  es un coloreo válido para  $G$ . Sean  $a = [a_1, \dots, a_k]$ ,  $a' = [a'_1, \dots, a'_k]$  tales que  $c(a) = c(a')$ . Vamos a probar que, o bien  $a = a'$ , o bien  $a$  no interseca a  $a'$ , es decir,  $a_i \neq a'_i$  para todo  $1 \leq i \leq k$ .

Por definición, usando (1) y (2):

$$c(a) = c(0, r(a_2 - a_1, |A_2|), \dots, r(a_k - a_1, |A_k|)) = \sum_{i=2}^k r(a_i - a_1, |A_i|) b^{i-2}$$

y de la misma forma,

$$c(a') = \sum_{i=2}^k r(a'_i - a'_1, |A_i|) b^{i-2}$$

Como  $c(a) = c(a')$ , se tiene que:

$$c(a) = \sum_{i=2}^k r(a_i - a_1, |A_i|) b^{i-2} = \sum_{i=2}^k r(a'_i - a'_1, |A_i|) b^{i-2} = c(a')$$

Observemos entonces que  $b > 1$ , y que  $0 \leq r(a_i - a_1, |A_i|), r(a'_i - a'_1, |A_i|) < |A_i| \leq b$ , para todo  $i$  entre 2 y  $k$ . Por la unicidad de la representación de un número en base  $b$ , resulta que  $r(a_i - a_1, |A_i|) = r(a'_i - a'_1, |A_i|)$ ,  $2 \leq i \leq k$ . Es decir,  $(a_i - a_1) \equiv (a'_i - a'_1) \pmod{|A_i|}$  si  $2 \leq i \leq k$ . Luego,  $a_i \equiv a'_i \pmod{|A_i|}$  si y solo si  $a_1 \equiv a'_1 \pmod{|A_i|}$ . Pero como  $0 \leq a_i, a'_i \leq |A_i|$ , y  $0 \leq a_1, a'_1 \leq |A_1| \leq |A_i|$ , queda claro que:  $a_1 = a'_1$  si y solo si  $a_1 \equiv a'_1 \pmod{|A_i|}$  si y solo si  $a_i = a'_i$  si y solo si  $a_i \equiv a'_i \pmod{|A_i|}$ . Y por lo tanto, si  $a_1 = a'_1$  entonces  $a_i = a'_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ . Y de la misma forma,  $a_1 \neq a'_1$  entonces  $a_i \neq a'_i$ ,  $2 \leq i \leq k$ . Es decir, o bien  $a = a'$ , o bien las cliques que representa cada uno no se intersecan.

□

## Capítulo 6

# Grafos vecindad-perfectos

La clase de los grafos *vecindad-perfectos* fue definida en 1986 por Lehel y Tuza [37]. Ellos observaron que los *odd holes* y *odd antiholes* no son *vecindad-perfectos*, y entonces como consecuencia del Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos visto en la sección 3.1.2, si un grafo es *vecindad-perfecto* entonces debe ser perfecto. Sin embargo, como ya mencionamos antes, aunque aún no se conoce una caracterización por subgrafos mínimos prohibidos, se han hecho avances en direcciones parciales, es decir, restringidos a ciertas clases de grafos sí se han encontrado caracterizaciones por subgrafos mínimos prohibidos para la clase de grafos *vecindad-perfectos*. Por otro lado, tampoco se conoce la complejidad computacional de un algoritmo de reconocimiento para esta clase. De hecho, se sabe que hallar  $\alpha_n(G)$  y  $\rho_n(G)$  es un problema NP-completo aún para grafos *split* con ciertas restricciones [20], aunque hay algunos algoritmos de reconocimiento lineales para encontrarlos si nos restringimos a grafos de intervalos [37], y más generalmente, para grafos fuertemente cordales [14].

Siguiendo la dinámica de los capítulos anteriores, primero daremos una sección de definiciones y resultados previos que necesitaremos, luego expondremos las caracterizaciones parciales conocidas y por último demostraremos algunas de ellas.

### 6.1. Preliminares

**Definición 6.1.1.** Se define  $m(G)$  como el número de cliques de  $G$ . Para cualquier grafo siempre se cumple que  $\alpha(G) \leq m(G)$ .

Un grafo *trivialmente perfecto* es aquel tal que  $\alpha(H) = m(H)$  para todo subgrafo inducido.

El nombre fue elegido pues resulta trivial que un grafo *trivialmente perfecto* es perfecto. Golumbic demostró en [29] una caracterización –entre otras– de estos grafos

como aquellos que no contienen  $C_4$  ni  $P_4$ .

**Definición 6.1.2.** Un *cografo* se define de recursivamente utilizando las siguientes reglas:

- Un solo vértice es un cografo
- Si  $G$  es un cografo, su complemento  $\overline{G}$  también es un cografo
- Si  $G$  y  $H$  son grafos, también lo es su unión disjunta  $G \cup H$

Se ha demostrado en [22] que esta clase de grafos son aquellos sin  $P_4$ .

Existe un resultado de Seinsche [43] sobre grafos que será utilizado más adelante.

**Teorema 6.1.3.** [43] *Para todo grafo  $G$  libre de  $P_4$  que tenga al menos dos vértices, o bien  $G$  no es conexo o bien  $\overline{G}$  no lo es.*

Las clases de grafos  $P_4$  y árbol-cografos son superclases de grafos.

**Definición 6.1.4.** Un grafo  $G$  es  $P_4$ -tidy si para todo subconjunto  $A$  de 4 vértices que induce un  $P_4$  en  $G$ , existe al menos un vértice  $v$  tal que  $G[A] \cup \{v\}$  es un grafo con dos  $P_4$ 's inducidos.

Definimos la clase de los grafos  $P_4$ -sparse como la que consiste de aquellos grafos  $G$  tales que todo subconjunto de cinco vértices induce al menos un  $P_4$  en  $G$ .

Hay un resultado que extiende el teorema enunciado por Seinsche para la clase de los grafos  $P_4$ -tidy. Antes de enunciarlo debemos definir algunas clases de grafos llamadas *urchins* (erizos) y *starfish* (estrellas de mar).

Un grafo *starfish* es aquel tal que su conjunto de vértices puede descomponerse en tres subconjuntos disjuntos  $S, C, R$  de forma que se cumplan las siguientes condiciones:

- $S = \{s_1, \dots, s_t\}$  es un conjunto independiente y  $C = \{c_1, \dots, c_t\}$  es una clique, con  $t \geq 2$
- $R$  puede ser vacío. En caso de no serlo, sus vértices son adyacentes a todos los vértices de  $C$  y no son adyacentes a ningún vértice de  $S$
- $s_i$  es adyacente a  $c_j$  si y solo si  $i = j$

Se define análogamente un grafo *urchin* como un grafo cuyos vértices pueden partirse en tres subconjuntos disjuntos  $S, C$  y  $R$  que cumplen las primeras dos condiciones expuestas para grafos starfish pero en vez de la última debe satisfacer:

- $s_i$  es adyacente a  $c_j$  si y solo si  $i \neq j$

**Observación 6.1.5.** Es claro que un urchin es el complemento de un starfish, y viceversa.

Llamamos *fat urchin* (respectivamente *fat starfish*) a un tomar un urchin (resp. un starfish) cuya partición es  $(S, C, R)$  y sustituir exactamente un vértice de  $S$  o  $C$  por  $K_2$  o por un  $2K_1$ .

En ambos casos (urchin o starfish) llamamos a  $S$  *ends* de  $G$ , a  $C$  *body* de  $G$  y a  $R$  *head* de  $G$ .

**Teorema 6.1.6.** [28] Si  $G$  es un grafo  $P_4$ -tidy entonces se cumple una de las dos condiciones siguientes:

1. O bien  $G$  no es conexo o  $\overline{G}$  no lo es
2.  $G$  es isomorfo a  $C_5, P_5, \overline{P_5}$ , un starfish, un urchin, un fat starfish o un fat urchin

El Teorema anterior lleva a un algoritmo de reconocimiento en tiempo lineal para la clase de grafos  $P_4$ -tidy, así como algoritmos polinomiales para muchos problemas conocidos de optimización restringidos a esta clase [28].

**Definición 6.1.7.** Un *árbol-cografo* se define de forma recursiva igual que un cografo, pero utilizando como elemento base un árbol en vez de un vértice.

**Definición 6.1.8.** Un *conjunto dominante* de un grafo  $G$  es un conjunto  $A \subseteq V(G)$  tal que para cada  $v \in V(G)$  o bien pertenece a  $A$  o bien es adyacente a algún vértice de  $A$ .

Un *conjunto totalmente dominante* es un subconjunto  $A \subseteq V(G)$  tal que todo vértice de  $V(G)$  es adyacente a al menos un vértice de  $A$ .

Un *conjunto  $k$ -independiente* de  $G$  es un conjunto de vértices tal que para todo par de vértices en él no hay caminos en  $G$  de longitud  $k$  o menos que los conecten.

El *número de dominación*  $\gamma(G)$  es el tamaño del mínimo conjunto dominante en  $G$ , y el *número de  $k$ -independencia*  $\alpha_k(G)$  es el tamaño del máximo conjunto  $k$ -independiente de  $G$ .

Es fácil ver que la siguiente desigualdad vale para todo grafo  $G$ :

$$\gamma(G) \geq \alpha_2(G)$$

Determinar  $\gamma(G)$  es un problema NP-completo para grafos en general [27], y determinar  $\alpha_2(G)$  es NP-completo incluso para grafos split [20].

Estos parámetros se relacionan con otros definidos anteriormente a través de las siguientes desigualdades, que valen para todo grafo:

$$\begin{aligned}\gamma(G) &\leq \rho_n(G) \leq \tau_c(G), \\ \alpha_2(G) &\leq \alpha_n(G) \leq \alpha_c(G)\end{aligned}$$

**Definición 6.1.9.** Un conjunto  $A \subseteq V(G)$  es un *cubrimiento por vértices* de  $G$  si toda arista  $e \in E(G)$  incide en al menos un vértice perteneciente a  $A$ . Notamos  $\tau(G)$  al tamaño de un cubrimiento por vértices mínimo en cantidad de nodos.

**Definición 6.1.10.** Un *matching*  $\mathcal{M}$  de un grafo  $G$  es un conjunto de aristas de  $G$  disjuntas por los vértices, es decir, dos aristas distintas pertenecientes a  $\mathcal{M}$  no comparten vértices. Si  $\mathcal{M}$  es un matching, decimos que  $\mathcal{M}$  es *maximal* si es maximal respecto de la inclusión, y decimos que es *máximo* si es de tamaño máximo.

Llamamos  $\nu(G)$  al tamaño de un matching máximo para  $G$ , es decir, la cantidad máxima de aristas independientes.

**Definición 6.1.11.** Decimos que un grafo  $G$  es *fuertemente vecindad-perfecto* si  $\alpha_2(H) = \rho_n(H)$  para todo  $H$  subgrafo inducido de  $G$ .

Decimos que  $G$  es *minimalmente no fuertemente vecindad-perfecto* si no es fuertemente vecindad-perfecto pero todo subgrafo inducido propio lo es.

**Observación 6.1.12.** Claramente todo grafo fuertemente vecindad-perfecto es vecindad-perfecto, ya que valen las siguientes desigualdades para todo grafo  $G$ :

$$\alpha_2(G) \leq \gamma(G) \leq \alpha_n(G) \leq \rho_n(G)$$

sumado a la igualdad que se utiliza para la definición de grafo fuertemente vecindad-perfecto se obtiene el resultado. Más aún, es cierto que si  $G$  es vecindad-perfecto entonces es fuertemente vecindad-perfecto si y solo si  $\alpha_2(H) = \alpha_n(H)$  para todo subgrafo inducido  $H$ .

## 6.2. Caracterizaciones parciales

En esta sección presentaremos las caracterizaciones por subgrafos inducidos prohibidos para los grafos vecindad-perfectos conocidas para ciertas clases. Como ya dijimos anteriormente, Lehel y Tuza definieron en 1986 los grafos vecindad-perfectos y demostraron en el mismo paper una caracterización para la clase de grafos cordales y para los grafos sin triángulos.

**Teorema 6.2.1.** [6] [36] *Todos los grafos balanceados son vecindad-perfectos*

**Teorema 6.2.2.** [37] [46] *Sea  $G$  un grafo cordal. Son equivalentes:*

1.  $G$  es vecindad-perfecto
2.  $G$  es clique-perfecto
3.  $G$  es balanceado
4.  $G$  no contiene ningún sol impar

**Corolario 6.2.3.** [37] *Todos los grafos de intervalos son vecindad-perfectos.*

**Teorema 6.2.4.** [46] *Sea  $G$  un grafo sin paws. Luego son equivalentes:*

1.  $G$  es vecindad-perfecto
2.  $G$  es perfecto y CHH
3.  $G$  es balanceado
4.  $G$  no contiene odd holes ni 3-pirámides
5. Toda componente de  $G$  es o bien un grafo bipartito, o bien es el join de un grafo completo bipartito con un grafo completo

**Teorema 6.2.5.** [37] *Si  $G$  es un grafo sin triángulos, entonces  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si es bipartito.*

Lehel y Tuza definieron como primer ejemplo los grafos *trivialmente vecindad-perfectos* como aquellos para los cuales  $\rho_n(H) = 1$  para todo subgrafo inducido  $H$ .

**Teorema 6.2.6.** [37] *La clase de los grafos trivialmente vecindad-perfectos coincide con la clase de los grafos trivialmente perfectos.*

En [31] los autores definen los grafos *mínimalmente no vecindad-perfectos* y demuestran algunas caracterizaciones parciales. Decimos que un grafo  $G$  es *mínimalmente no vecindad-perfecto* si no es vecindad-perfecto pero todo subgrafo inducido sí lo es.

**Teorema 6.2.7.** [31] *Si  $G$  es minimalmente no vecindad-perfecto y  $\alpha_n(G) = 1$  entonces  $G$  es una  $o$ -pirámide o una 3-pirámide (o lo que es igual, un 3-sol y  $\overline{3K_2}$ ).*

**Teorema 6.2.8.** [31] *Un cografo es vecindad-perfecto si y solo si no contiene a  $\overline{3K_2}$  como subgrafo inducido.*



**Teorema 6.2.9.** [31] *Si  $G$  es bipartito, el grafo de línea  $L(G)$  es vecindad-perfecto.*

**Teorema 6.2.10.** [46] *Sea  $G$  un grafo  $P_4$ -tidy. Luego  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si no contiene 0-pirámides, 3-pirámides ni  $C_5$ .*

**Teorema 6.2.11.** [46] *Si  $G$  es un grafo árbol-cografo,  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si no contiene 3-pirámides ni  $P_6 \vee 3K_1$ .*

Todas las demostraciones de las siguientes caracterizaciones se han dado en [46]. Las mismas están basadas en las caracterizaciones para grafos clique-perfectos restringidas a estas mismas clases que enunciamos en el capítulo anterior.

**Teorema 6.2.12.** *Si  $G$  es un grafo ACH entonces  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si es clique-perfecto.*

**Teorema 6.2.13.** *Si  $G$  es un grafo sin gems arco-circular, entonces  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si no contiene ni odd holes ni 3-pirámides como subgrafos inducidos.*

Para dos subclases de los grafos CHH, los grafos sin diamantes y los grafos CHH sin claws:

**Teorema 6.2.14.** *Si  $G$  es un grafo sin diamantes entonces es vecindad perfecto si y solo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es un  $r$ -sol generalizado o, equivalentemente, si  $G$  no contiene ciclos impares propios.*

**Teorema 6.2.15.** *Si  $G$  es un grafo clique-Helly hereditario y sin claws, entonces  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si ningún subgrafo inducido de  $G$  es un odd hole o un antihole de longitud 7.*

### 6.3. $P_4$ -tidy

Daremos a continuación algunos resultados que utilizaremos en la demostración del Teorema 6.2.10. En [46] se da una caracterización de los grafos fuertemente vecindad-perfectos por subgrafos inducidos prohibidos, además de un Teorema que caracteriza a los grafos minimalmente no vecindad-perfectos con complemento no conexo, es decir, aquellos formados por el join de dos subgrafos no nulos.

**Teorema 6.3.1.** [46] *Si  $G$  es un grafo, son equivalentes:*

1.  $G$  es fuertemente vecindad-perfecto
2.  $G$  es vecindad-perfecto y no contiene  $C_4$ ,  $C_6$  ni  $P_6$

3.  $G$  no contiene ningún sol impar y es  $P_6$ -free cordal

**Teorema 6.3.2.** [46] Los únicos grafos mínimamente no vecindad-perfectos con complemento no conexo son  $C_4 \vee 2K_1$ ,  $C_6 \vee 3K_1$  y  $P_6 \vee 3K_1$ .

Ahora sí comenzaremos a demostrar la caracterización para esta clase, viendo primero qué valores toman los parámetros  $\alpha_n(G)$  y  $\rho_n(G)$  para grafos  $P_4$ -tidy conexos y co-conexos:

**Teorema 6.3.3.** Si  $G$  es un grafo no trivial  $P_4$ -tidy conexo y co-conexo, entonces vale alguna de las siguientes:

1.  $G$  es isomorfo a  $C_5$ , luego  $\rho_n(G) = 3$  y  $\alpha_n(G) = 2$
2.  $G$  es isomorfo a  $P_5$  o  $\overline{P_5}$ , luego  $\rho_n(G) = \alpha_n(G) = 2$
3.  $G$  es un starfish con  $t$  ends o un fat starfish saliendo de un end y  $\alpha_n(G) = \rho_n(G) = t$
4.  $G$  es un urchin o un fat urchin con al menos 3 ends,  $\alpha_n(G) = 1$ ,  $\rho_n(G) = 2$

*Demostración.* Como  $G$  es  $P_4$ -tidy conexo y co-conexo, por el Teorema ?? sabemos que  $G$  es isomorfo a  $C_5$ ,  $P_5$ ,  $\overline{P_5}$ , un urchin, un starfish, un fat urchin o un fat starfish. Vamos a ver los valores de  $\alpha_n(G)$  y  $\rho_n(G)$  en cada caso.

Primero supongamos que  $G$  es un starfish cuya partición es  $(S, C, R)$  con  $|S| = t$ , o un fat starfish que sale de sustituir un vértice  $c \in C$  por un  $K_2$ , o por sustituir un vértice  $s \in S$  por  $K_2$  o por un  $2K_1$ . En todos los casos existe un conjunto vecindad de tamaño  $t$  formado por tomar  $t$  vértices de  $C$ :

- Si  $G$  es un starfish sin sustitución de vértices en  $C$  entonces tomamos todo  $C$ .
- Si  $G$  es un starfish tal que un vértice  $c \in C$  fue sustituido por  $K_2$  o  $2K_1$ , tomamos sólo uno de los vértices por los cuales  $c$  fue sustituido.
- Si  $G$  es un fat starfish que surge de sustituir un vértice  $c \in C$  por  $2K_1$  entonces  $C \setminus \{c\} \cup \{s\}$  es un conjunto vecindad de tamaño  $t$  para  $G$  –donde  $s$  era el único vecino de  $c$  en  $S$ .

Luego  $\rho_n(G) \leq t$ .

Ahora, en todos los casos previos, si tomamos  $t$  aristas que conecten  $S$  con  $C$ , obtenemos un conjunto vecindad-independiente de tamaño  $t$ . En los casos en que un vértice fue sustituido por  $K_2$  o por  $2K_1$  elegimos sólo una de las dos aristas de  $S$  a  $C$  que genera esta sustitución, y luego todas las demás aristas que conectan  $S$  con  $C$ . En el caso de un starfish que no es fat, tomamos todas las aristas de  $S$  a  $C$ . Luego, en todos

los casos hallamos un conjunto vecindad-independiente de tamaño  $t$ , por lo tanto  $\alpha_n(G) \geq t$ . Y como en general vale  $\alpha_n(G) \leq \rho_n(G)$  tenemos que  $\alpha_n(G) = \rho_n(G) = t$ .

Observemos que tanto un urchin como un fat urchin que tienen menos de 3 ends, son lo mismo que un starfish o un fat starfish. Luego podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $G$  no es un starfish y la única posibilidad que nos queda es que  $G$  sea un urchin con al menos 3 ends.

Entonces, si  $G$  es un urchin con partición  $(S, C, R)$  tal que  $|S| = t \geq 3$ , queremos ver que  $\alpha_n(G) = 1$  y  $\rho_n(G) = 2$ . Como ningún vértice de  $G$  es universal es claro que podemos afirmar que  $\rho_n(G) \geq 2$ . Más aún, si tomamos dos vértices de  $C$  cuidando que ninguno de ellos provenga de la sustitución por  $K_2$  o  $2K_1$  –en el caso que  $G$  sea un fat urchin– claramente obtenemos un conjunto vecindad. Luego,  $\rho_n(G) = 2$ .

Veamos ahora que efectivamente no puede existir un conjunto vecindad-independiente de tamaño 2. Si  $G$  es un urchin o un fat urchin, todos sus vértices y aristas pertenecen a la vecindad formada por al menos  $t - 1$  vértices de  $C$ . Esto vale pues todas las aristas entre vértices de  $R \cup C$  están en la vecindad formada por los  $t$  vértices de  $C$ , y todas las aristas entre vértices de  $S$  y  $C$  están en el vecindario de  $t - 1$  vértices de  $C$ .

Luego, si tomamos dos aristas o dos vértices cualesquiera, como  $t \geq 3$ , debe haber al menos un vértice de  $C$  que incluye a ambos en su vecindad y entonces  $\alpha_n(G) = 1$ . □

**Teorema 6.3.4.** *Si  $G$  es un grafo  $P_4$ -tidy,  $G$  es vecindad-perfecto si y solo si no contiene 0-pirámides, ni 3-pirámides ni  $C_5$ .*

*Demostración.* Si  $G$  es vecindad-perfecto entonces no puede contener 0-pirámides, ni 3-pirámides ni  $C_5$  como subgrafos inducidos ya que ninguno de estos grafos es vecindad-perfecto y la clase de grafos vecindad-perfectos es hereditaria.

Veamos entonces que si  $G$  es  $P_4$ -tidy y no contiene a ninguno de estos grafos entonces debe ser vecindad-perfecto. Supongamos que no lo es. Luego, debe contener algún subgrafo inducido minimalmente no vecindad-perfecto; llamémoslo  $H$ . Como  $H$  es minimal, debe ser conexo. Si  $\bar{H}$  no es conexo, tenemos que  $H$  es un grafo minimalmente no vecindad-perfecto con complemento no conexo, lo que por el Teorema 6.3.2 significa que entonces  $G$  es  $C_4 \vee 2K_1 = 3$ -pirámide,  $C_6 \vee 3K_1$  o  $P_6 \vee 3K_1$ . Por otro lado, como la clase de grafos  $P_4$ -tidy es hereditaria, entonces  $H$  debe ser  $P_4$ -tidy, por lo cual no puede ser ni  $C_6 \vee 3K_1$  ni  $P_6 \vee 3K_1$ . Esto es porque cualquiera de los dos grafos cumple que existen conjuntos de 4 vértices tal que tienen al menos dos vértices adyacentes –cualquier subconjunto de  $C_6$ , o los 4 vértices centrales de  $P_6$ – y esto induce dos  $P_4$ 's, por lo tanto no serán  $P_4$ -tidy. Luego, si  $\bar{H}$  no es conexo entonces  $H$  sólo puede ser una 3-pirámide.

Supongamos ahora que tanto  $H$  como  $\overline{H}$  son conexos. Dado que  $H$  es minimalmente no vecindad-perfecto,  $\alpha_n(H)$  debe ser distinto de  $\rho_n(H)$ , lo cual significa –por el Teorema 6.3.3– que  $H$  debe ser  $C_5$  o bien un urchin o fat urchin con al menos 3 ends. Además, en el caso que sea un urchin o fat urchin con al menos 3 ends, el mismo Teorema nos dice que entonces  $\alpha_n(H) = 1$  y  $\rho_n(H) = 2$ . Sin embargo, por el Teorema 6.2.7, los únicos grafos minimalmente no vecindad-perfectos con  $\alpha_n(H) = 1$  son las 3-pirámides y las o-pirámides, y el único de estos que además es urchin es la o-pirámide. Luego si  $H$  es conexo y co-conexo, debe ser  $C_5$  o o-pirámide.

Finalmente, concluimos que  $H$  en cualquier caso debe ser isomorfo a  $C_5$ , o a una 3-pirámide o a una o-pirámide y esto demuestra el Teorema.  $\square$

**Corolario 6.3.5.** *Si  $G$  es un grafo  $P_4$ -sparse, entonces es vecindad-perfecto si y solo si no contiene ni 3-pirámides ni o-pirámides.*

*Demostración.* Como la clase de los grafos  $P_4$ -sparse es una subclase de los grafos  $P_4$ -tidy, esta caracterización es una consecuencia directa del Teorema 6.3.4 y del hecho de que los únicos subgrafos inducidos prohibidos de la clase de los grafos vecindad-perfectos restringida a los grafos  $P_4$ -tidy que además no son  $P_4$ -sparse, es  $C_5$ .  $\square$

## 6.4. Cografos

En esta sección demostraremos la caracterización enunciada en el Teorema 6.4.1. Para esto usaremos el resultado enunciado por Seinsche en la página 46 anteriormente y el Teorema 6.2.7.

**Teorema 6.4.1.** *Un cografo es vecindad-perfecto si y solo si no contiene a  $\overline{3K_2}$  como subgrafo inducido.*

*Demostración.* Es inmediato del Teorema 6.4.1 que si  $G$  es vecindad-perfecto no puede contener a  $\overline{3K_2}$  pues éste es un grafo minimalmente no vecindad-perfecto.

Demostraremos la vuelta del Teorema por inducción en la cantidad de vértices  $n$  del cografo  $G$ . La prueba es trivial si  $n \leq 4$ . Supongamos entonces que  $n \geq 5$ , y que el resultado vale para todo cografo que tiene como máximo 4 vértices.

Si  $G$  no fuera conexo entonces alcanzaría con utilizar inducción y el hecho de que tanto  $\rho_n$  como  $\alpha_n$  son funciones aditivas sobre la colección de componentes de un grafo para obtener  $\rho_n(G) = \alpha_n(G)$ .

Supongamos entonces que  $G$  es conexo. Luego, del Teorema 6.1.3 vale que  $\overline{G}$  no es conexo. Sean entonces  $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_p$ , ( $p \geq 2$ ) sus componentes tal que cada  $G_i$  o bien tiene un solo vértice, o bien es desconexo.

En el caso que  $p \geq 3$ , podemos suponer que existe un  $G_i$  compuesto de un único vértice, ya que en caso contrario, podemos tomar dos vértices no adyacentes en cada  $G_1, G_2, G_3$ , y ver que estos 6 vértices nos inducen un  $\overline{3K_2}$ . Por lo tanto, supongamos que  $G_3$  posee un único vértice  $x$ . Luego  $x$  es universal en  $G$  y entonces  $\rho_n(G) = \alpha_n(G) = 1$ .

Ahora veamos qué sucede si  $p = 2$ . Sean  $A, B$  los conjuntos de vértices de  $G_1, G_2$  respectivamente. Si alguno de los dos contiene un único vértice entonces éste será universal y podemos concluir lo mismo que en el caso anterior. Por lo tanto supongamos que ambos contienen más de un vértice. Además como tanto  $G_1$  como  $G_2$  no son conexos, sean  $A_1, \dots, A_h$  y  $B_1, \dots, B_k$  los conjuntos de vértices de las componentes conexas de cada uno respectivamente, y suponemos que  $k \geq h \geq 2$ .

Observemos que cada  $G_{A_i}$  —es decir, el subgrafo generado por  $A_i$  en  $G$ — no puede contener un  $C_4$  pues tomando los 4 vértices de un  $C_4$  en  $A_i$  junto con un vértice de  $B_1$  y otro vértice de  $B_2$  induce un  $\overline{3K_2}$ .

No es difícil ver que todo grafo conexo sin  $C_4$  ni  $P_4$  tiene un vértice universal: supongamos que no lo tiene, entonces existen dos vértices  $u, v$  que no se conectan mediante una arista. Es claro por hipótesis que no hay un  $P_4$  entre ellos. Además, si existiera un camino de longitud igual a 2 entre  $u$  y  $v$  (de longitud 1 no puede ser porque sería la arista  $uv$ ), digamos  $u, w, v$  entonces como no existe un vértice universal debe existir otro vértice  $z$  tal que  $w$  no se conecta a  $z$ . Sin embargo, existe un camino desde  $u$  a  $z$  (o desde  $v$  a  $z$ ) que nos lleva a tener un  $P_4$ , y esto es un absurdo. Luego, cada  $G_{A_i}$  tiene un vértice universal  $a_i$ .

Si elegimos un vértice arbitrario  $b_i \in B_i$  para cada  $i = 1, \dots, h$ , y definimos  $S = \{a_1, \dots, a_h\}$  y  $M = \{a_1 b_1, \dots, a_h b_h\}$ , luego, es fácil ver que  $S$  es un vecindad-cubrimiento y  $M$  es un conjunto de aristas vecindad-independiente de  $G$ . Luego es inmediato que  $\alpha_n(G) = \rho_n(G) = h$ .  $\square$

## 6.5. Árbol-cografos

Utilizaremos en la demostración de la caracterización de los árbol-cografos un resultado muy conocido, el Teorema de König-Egerváry:

**Teorema 6.5.1** (TEOREMA DE KÖNIG-EGERVÁRY). *En un grafo bipartito el matching de máximo tamaño equivale al mínimo tamaño de un cubrimiento por vértices, es decir,  $\tau(G) = \nu(G)$ .*

**Teorema 6.5.2.** *Si  $G$  es un árbol-cografo conexo y co-conexo, entonces vale una de las siguientes afirmaciones:*

1.  $G$  es un árbol y  $\rho_n(G) = \alpha_n(G) = \nu(G) = \tau(G)$
2.  $G$  es un co-árbol conexo y  $\rho_n = 2$

*Demostración.* Por la definición de árbol-cografo podemos decir que si  $G$  es conexo y co-conexo entonces  $G$  debe ser un árbol con complemento conexo, o un co-árbol conexo.

En el caso que  $G$  sea un árbol, sabemos que entonces es bipartito. Observamos en [37,42] que cualquier grafo bipartito  $G$  cumple:

$$\alpha_n(G) = \nu(G)$$

$$\rho_n(G) = \tau(G)$$

Luego el Teorema de König-Egerváry 6.5.1 implica que  $\alpha_n(G) = \nu(G) = \rho_n(G) = \tau(G)$ .

Por otro lado, si  $G$  es un co-árbol conexo, entonces  $G$  tiene el menos una hoja. Esta hoja y su único vecino en  $G$  forman un conjunto vecindad de  $G$  de tamaño 2. Más aún, como el complemento de  $G$  es conexo, no puede haber conjuntos vecindad de tamaño 1 porque esto implicaría la existencia de un vértice universal y de un vértice aislado en  $G$ . Con esto queda claro que  $\rho_n(G) = 2$ .  $\square$

**Corolario 6.5.3.** *No hay árbol-cografos conexos y co-conexos que sean minimalmente no vecindad-perfectos.*

*Demostración.* Si un grafo  $G$  es conexo y co-conexo a la vez, entonces por el Teorema 6.5.2  $G$  debe ser un árbol o un co-árbol. Más aún, un árbol no puede ser no vecindad-perfecto. Si  $G$  en cambio es un co-árbol, entonces por el mismo Teorema debe ser  $\rho_n(G) = 2$ . Sin embargo por el Teorema 6.2.7, los únicos grafos minimalmente no vecindad-perfectos con  $\alpha_n(G) = 1$  son las 0-pirámides y las 3-pirámides. Dado que ninguno de ellos es un co-árbol, se deduce que si  $G$  es minimalmente no vecindad-perfecto entonces  $G$  no puede ser un árbol-cografo conexo y co-conexo.  $\square$

Ahora sí demostramos el Teorema 6.2.11

*Demostración del Teorema 6.2.11.* La ida es clara dado que si  $G$  es vecindad-perfecto no puede contener 3-pirámides o  $P_6 \vee 3K_1$  como subgrafos inducidos pues ambos son grafos minimalmente no vecindad-perfectos.

Debemos ver entonces que si no contiene a ninguno de estos grafos como subgrafos inducidos entonces será vecindad-perfecto. Supongamos entonces que  $G$  no es vecindad-perfecto. Luego,  $G$  debe contener un subgrafo inducido  $H$  minimalmente no vecindad-perfecto. Claramente, por minimalidad,  $H$  debe ser conexo.

En el caso que  $\overline{H}$  no es conexo entonces  $H$  es un grafo minimalmente no vecindad-perfecto con complemento no conexo, y entonces por el Teorema 6.3.2 debe ser isomorfo a  $C_4 \vee 2K_1 = 3$ -pirámide, o  $C_6 \vee 3K_1$  o bien  $P_6 \vee 3K_1$ . Sin embargo  $C_6 \vee 3K_1$  no

es un árbol-cografo pues claramente no es un árbol ni un co-árbol, y tampoco es la unión disjunta ni el join de dos árbol-cografos. Luego, si  $\bar{H}$  no es conexo entonces  $H$  debe ser una 3-pirámide o bien  $P_6 \vee 3K_1$ .

En el caso que  $\bar{H}$  sí es conexo, entonces  $H$  será un árbol-cografo conexo y co-conexo, y entonces por el Corolario 6.5.3 si  $H$  es minimalmente no vecindad-perfecto entonces no puede ser un árbol-cografo conexo y co-conexo y luego este caso no puede suceder.

Por lo tanto  $H$  debe ser isomorfo a una 3-pirámide o a  $P_6 \vee 3K_1$ , y esto demuestra el Teorema ya que supusimos que  $H$  era un subgrafo inducido de  $G$ .  $\square$

## Capítulo 7

# Conclusiones y Problemas Abiertos

Como bien establecimos durante todo este trabajo, los grafos clique-perfectos, coordinados y vecindad-perfectos son clases de grafos que han sido definidos basándose en una idea similar a aquella que define a los grafos perfectos –es decir, tomando dos parámetros y definiendo una desigualdad de tipo min-max, para luego definir estas clases como aquellas que cumplen la igualdad para todo subgrafo inducido. Sin embargo, a pesar de haber sido definidas como variaciones de los mismos, los grafos coordinados y los vecindad-perfectos resultan ser subclases de los grafos perfectos. Esto no sucede con los grafos clique-perfectos.

Luego de que se demostrara el Teorema Fuerte de los Grafos Perfectos 3.1.10, la caracterización de los mismos por subgrafos inducidos prohibidos quedó cerrada. Como explicamos en el capítulo dedicado a esta clase, este teorema junto con otros resultados estructurales dieron lugar a algoritmos de reconocimiento polinomiales. Como ya mencionamos, los grafos perfectos son una clase interesante de estudiar pues los problemas clásicos – $k$ -coloreo, TSP, etc.– resultan polinomiales restringidos a esta clase. Esto resulta del hecho de que el reconocimiento de los mismos es polinomial, y que para la mayor parte de estos problemas se utiliza *Programación Lineal*, que también tiene complejidad polinomial. Por lo tanto, un problema abierto para esta clase de grafos es saber si existen algoritmos combinatorios polinomiales para estos problemas clásicos que se resuelven usualmente con PL –por ej,  $k$ -coloreo. Otro problema abierto sería conocer una cota inferior de la complejidad algorítmica de reconocimiento, dado que lo mejor que se tiene hasta el momento es un algoritmo de complejidad  $\mathcal{O}(n^9)$  (descrito en el Capítulo 2, página 25).

Para las demás clases expuestas en este trabajo el panorama aún es incierto. La lista de grafos minimalmente clique-imperfectos aún no se conoce, lo mismo para los grafos minimamente no coordinados, y para los grafos minimamente no vecindad-perfectos. Esto sucede dado que la cantidad de grafos minimalmente no coordinados/cli-



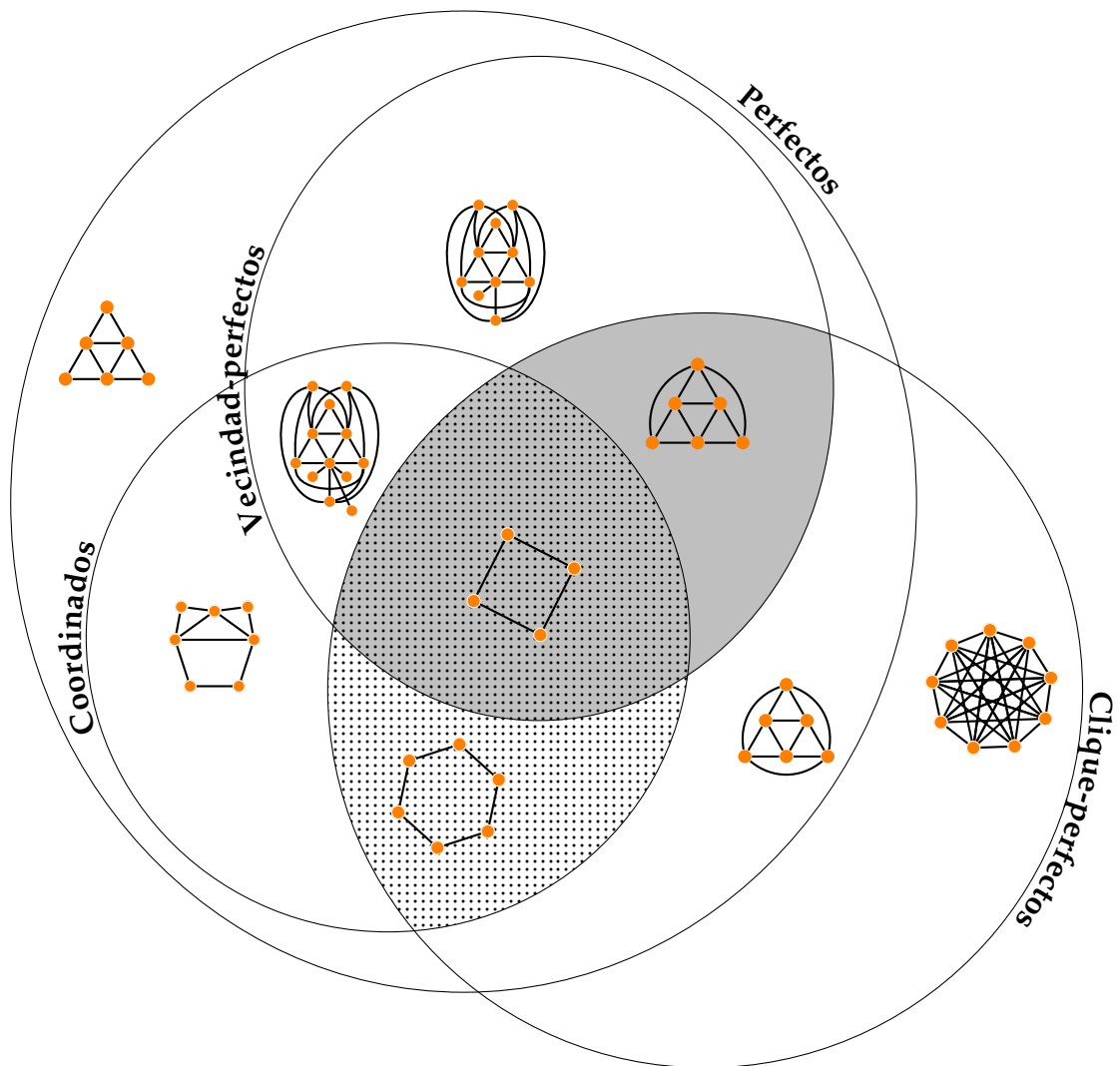


Figura 7.1: Relación entre las clases de grafos estudiadas en este trabajo, y ejemplos. Observar que no todos los grafos de ejemplo son minimales.

perfectos/vecindad-perfectos dificulta la tarea de encontrar caracterizaciones por subgrafos prohibidos minimales.

Aún no se conoce la complejidad del problema de reconocimiento tanto para grafos clique-perfectos como para vecindad-perfectos. En el caso de los grafos coordinados, el reconocimiento de esta clase es un problema NP-completo. Incluso, se demostró en [44] que este problema es NP-completo restringiéndose al caso de grafos coordinados tales que  $M = 3$  (realizando una reducción a 3-col). Además, dado un grafo  $G$ , se desconoce la complejidad computacional de verificar la igualdad entre los paráme-

tros  $M(G)$  y  $F(G)$ . Para los grafos vecindad-perfectos, se analizó en distintos casos la complejidad computacional del problema de hallar los parámetros óptimos  $\alpha_n(G)$  y  $\rho_n(G)$ , es decir, los problemas de hallar un mínimo conjunto vecindad y un máximo vecindad-cubrimiento. En algunos casos se han encontrado algoritmos lineales o polinomiales –es el caso de los cografos– aunque en otras clases se ha demostrado que este problema es NP-completo, por ejemplo para grafos split.



# Bibliografía

- [1] V. Balachandhran, P. Nagavamsi, and C. Pandu Rangan; *Clique-transversal and clique-independence on comparability graphs*, Information Processing Letters 58, 181–184, 1996.
- [2] Berge, C.; *Les problèmes de coloration en théorie des graphes*. Publ. Inst. Stat. Univ. Paris 9, 123-160, 1960.
- [3] Berge, C.; *Färbung von Graphen, deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind*, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe, 114-115, 1961.
- [4] Berge, C.; *Sur une conjecture relative au problème des codes optimaux*, Comm. 13ieme Assemblée Gen URSI, Tokyo, 1962.
- [5] Berge, C.; *Six Papers on Graph Theory*, Calcutta: Indian Statistical Institute, 1–21, 1963.
- [6] Berge, C. and Las Vergnas M.; *Sur un théorème du type König pour hypergraphes*. Ann. New York Acad. Sci., 175:32–40, 1970.
- [7] F. Bonomo; *On subclasses and variations of perfect graphs*, Tesis de Doctorado, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2005.
- [8] F. Bonomo, M. Chudnovsky, and G. Durán, *Partial characterizations of cliqueperfect graphs I: subclasses of claw-free graphs*, Discrete Applied Mathematics, 156(7):1058–1082, 2008.
- [9] F. Bonomo, M. Chudnovsky, and G. Durán, *Partial characterizations of cliqueperfect graphs II: Diamond-free and Helly circular-arc graphs*, Discrete Applied Mathematics, 309(11):3485–3499, 2009.
- [10] F. Bonomo, G. Durán, and M. Groshaus; *Coordinated graphs and clique graphs of clique-Helly perfect graphs*. Utilitas Mathematica, 72:175–191, 2007.
- [11] F. Bonomo, G. Durán, M. Groshaus, and J. L. Szwarcfiter; *On clique-perfect and  $K$ -perfect graphs*. Ars Combinatoria, 80:97–112, 2006.
- [12] F. Bonomo, G. Durán, F. Soullignac and G. Sueiro, *Partial characterizations of clique-perfect and coordinated graphs: superclasses of triangle-free graphs*, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2009.
- [13] A. Brandstädt, V. Chepoi, and F. Dragan; *Clique  $r$ -domination and clique  $r$ - packing problems on dually chordal graphs*, SIAM Journal on Discrete Mathematics 10, 109–127, 1997.
- [14] A. Brandstädt, V. D. Chepoi, and F. F. Dragan; *Clique  $r$ -domination and clique  $r$ -packing problems on dually chordal graphs*; SIAM J. Discrete Math., 10(1):109–127, 1997.
- [15] V. Chvátal; *Star cutsets and perfect graphs*, J. Combin Theory B 39, 189-199, 1985.

- [16] M. Chudnovsky; *Berge trigraphs*, Journal of Graph Theory Volume 53, Issue 1, pages 1–55, 2006.
- [17] M. Conforti, G. Cornuejols, C. Vuskovic; *Square-Free Perfect Graphs*, Journal of Combinatorial Theory B 90, 257-307, 2004.
- [18] G. Cornuejols, M. Chudnovsky, X. Liu, P. Seymour and K. Vuskovic; *Recognizing Berge Graphs*, Combinatorica 25, 143-186, 2005.
- [19] G. Cornuejols y W. H. Cunningham; *Composition for perfect graphs*, Discrete Math. 160, 165-175, 1996.
- [20] G. J. Chang, M. Farber, and Z. Tuza; *Algorithmic aspects of neighborhood numbers*, SIAM J. Discrete Math., 6(1):24–29, 1993.
- [21] L. Chong-Keang and P. Yee-Hock; *On graphs without multicliques edges*, Journal of Graph Theory 5, 443–451, 1981.
- [22] D. G. Corneil, Y. Perl, and L. K. Stewart; *A linear recognition algorithm for cographs*, SIAM J. Comput. 14, 926-934, 1985.
- [23] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas; *The Strong Perfect Graph Theorem*, Annals of Mathematics, 164 (1): 51–229, 2006.
- [24] V. Chvátal, N. Sbihi; *Bull-free Berge graphs are perfect*, Graphs and Combinatorics 3, 127-139, 1987.
- [25] G. Durán, M. C. Lin, and J. L. Szwarcfiter; *On clique-transversals and clique-independent sets*, Annals of Operations Research, 116(1):71–77, 2002.
- [26] Gallai, T.; *Maximum-minimum Sätze über Graphen*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 9 (3-4): 395–434.
- [27] M. R. Garey and D. S. Johnson; *Computers and intractability*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979.
- [28] V. Giakoumakis, F. Roussel, and H. Thuillier; *On  $P_4$ -tidy graphs*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci., 1(1):17–41 (electronic), 1997.
- [29] M.C Golumbic; *Trivially perfect graphs*, Discrete Math., 24, pp. 105–107, 1978.
- [30] V. Guruswami and C. Pandu Rangan; *Algorithmic aspects of clique-transversal and clique-independent sets*, Discrete Applied Mathematics, 100(3):183–202, 2000.
- [31] A. Gyárfás, D. Kratsch, J. Lehel, and F. Maffray; *Minimal nonneighborhood-perfect graphs*, J. Graph Theory, 21(1):55–66, 1996.
- [32] W. L. Hsu; *How to color claw-free perfect graphs*, Ann. Discrete Math. 11, 189-197, 1981.
- [33] D. König; *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, Mathematische Annalen 77, 453–465, 1916.
- [34] D. König; *Graphok és Matrixok*, Matematikai és Fizikai Lapok 38, 116–119, 1931.
- [35] C.M. Lee and M.S. Chang; *Distance-hereditary graphs are clique-perfect*, Discrete Applied Mathematics 154(3), 525–536, 2006.
- [36] J. Lehel; *Neighbourhood-perfect line graphs*. Graphs Combin., 10(4):353– 361, 1994.
- [37] J. Lehel and Z. Tuza; *Neighborhood perfect graphs*, Discrete Mathematics 61, 93–101, 1986.
- [38] Lovász, László; *A characterization of perfect graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 1: 95–98, 1972.
- [39] C. Lucchesi, C. Picinin de Mello, and J. Szwarcfiter; *On clique-complete graphs*, Discrete Mathematics 183, 247–254, 1998.

- [40] K. R. Parthasarthy, G. Ravindra; *The strong perfect graph conjecture is true for  $K_{1,3}$ -free graphs*, J. Combin. theory, 21, 212-223, 1976.
- [41] M. Safe; *On structural characterizations of graph classes related to perfect graphs and the König property*, Tesis de Doctorado, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2011.
- [42] E. Sampathkumar and P. S. Neeralagi; *The neighbourhood number of a graph*. Indian J. Pure Appl. Math., 16(2):126-132, 2, 12, 45, 1985.
- [43] S. Seinsche; *On a property of the class of  $n$ -colorable graphs*, J. Combinatorial Theory B 16, 191-193, 1974.
- [44] F. Soulignac, G. Sueiro; *Sobre caracterizaciones parciales de grafos coordinados*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2006.
- [45] F. Soulignac and G. Sueiro; *NP-hardness of the recognition of coordinated graphs*, Annals of Operations Research, 169 (1), pp. 17-34, 2009.
- [46] X. Warnes; *Structural and Algorithmic Results on Neighborhood-Perfect Graphs and Neighborhood Numbers*, Tesis de Licenciatura, Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina, 2014.