UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Bases y algoritmos greedy en espacios de Banach

Natalia Accomazzo Scotti

Director: Daniel Carando

Diciembre de 2015

Agradecimientos

A mis viejos, por ser los mejores padres que podría tener. Porque fueron los primeros en decirme que estudie lo que me gusta, y que no me preocupe por si en el futuro va a ser redituable o no. Por enseñarme a valorarme. Por ayudarme económicamente y por darme mi primer y querido auto, que (con sus problemas) me permitió estudiar tan lejos de casa. Porque, otra vez, son lo mejor que hay. Gracias a mi hermana, por ser mi otra mitad. Por siempre creer en mí y escucharme hablar sobre cosas de las que no tiene idea.

A Dani, por ser un gran director. Por hacerse el tiempo entre sus muchas obligaciones para escucharme y ayudarme a resolver las dudas siempre que las tuve. Por enseñarme a redactar apropiadamente el asunto de un mail. Porque seguro tendrás correcciones para hacerme en estos agradecimientos. A Vicky y a Julián, por tomarse el tiempo para leer esta tesis.

A Bru, por ser mi sostén los últimos tres años. Por todas las historias que me contaste para levantarme el ánimo cada vez que me iba mal en un parcial. Por elegirme para seguir armando un camino juntos.

Al resto de mi familia, por acompañarme siempre y apoyarme en todas mis elecciones. A los Moretto, por ser mis tíos por elección. Por darme trabajo. Por el amor incondicional. A mis abuelas María, Celia y Elvira y a mis abuelos Oscar y Martín, porque siempre van a ser parte de mi vida.

A mis amigas, las de siempre. Las que vengo arrastrando desde el colegio y no me voy a sacar nunca de encima. A Eli, por estar desde siempre y para siempre.

En los muchos años que pasé en esta facultad conocí mucha gente a la cual le debo mucho, y seguro me voy a olvidar de mencionar a por lo menos la mitad. Acá va un intento:

A Meli, por ser mi prima, mi hermana y mi marido, pero sobre todo por ser una buena compañera y una mejor amiga. A Kohen, porque desde que te cortaste el pelo me caés mejor.

Gracias a Juli Campos y a Chebi, por ser mis compañeros desde el principio. Gracias a todo el hermoso grupo de gente del que consiste Klein's Bottle (Aye, Bru, Di, Euge, Jaz, Mati, Maxi, Pablo, Rafa, Santis y Sofi), y especialmente gracias a Diana, por ser su creadora y por ser merecedora de todo mi amor. Gracias por ser tanto más que un espacio topológico.

Gracias a Santi Vega por todas las veces que me explicaste algo. Sin vos hubiese sido mucho más áspero llegar hasta acá. Gracias a Santi Durán, por enseñarme el valor de los últimos días de estudio antes de rendir.

Gracias a Sofi y a Manu, por ser los mejores copilotos. Por todos los mates y los viajes compartidos.

A Mel y Luz, por compartir conmigo un gran verano en Rio de Janeiro. A Maxi, Rafa, Carlo y Mari, por organizar las juntadas (de estudio y otras) que hicieron que estos años se pasen volando. A Xime, por tu alegría. A los que todavía no mencioné pero también tuvieron mucho que ver: Diego, Fede, Bortz, Pau, Vero, Vir, Tincho, Facu, Marce, Juanma y tantos otros.

Gracias a todos los excelentes docentes que tuve a lo largo de las todas las materias que cursé, y a los que tuvieron la desgracia de tenerme como compañera de trabajo. Particularmente a Ezequiel y Juliana, que me soportaron durante mi peor cuatrimestre como ayudante de segunda.

Gracias a Ezequiel de vuelta, por hacer que una idea se convierta en un proyecto.

Gracias al mejor compañero, docente y amigo que conocí en estos años. Porque sin vos probablemente no hubiese pasado de Análisis I. Porque cuando sea grande quiero ser como vos. Gracias Mati.

Índice general

Introducción

En muchos contextos nos es útil representar una función como una serie con respecto a un sistema de funciones dado. Por ejemplo, en 1807 Fourier propuso representar a las funciones $2\pi-$periódicas como una serie con respecto al sistema trigonométrico. Este sistema tenía una ventaja importante: su ortogonalidad. Sabemos que si nuestra función f es un elemento de un espacio de Hilbert separable H, tenemos una base ortonormal (e_n) que nos permite pensar a f como una serie

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n.$$

Este sistema, además de ser ortogonal, tiene la ventaja de poder aproximar $\|f\|$ con los coeficientes de la serie. Nos referimos a la igualdad de Parseval, que nos dice que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Esta igualdad implica que si consideramos las sumas parciales

$$S_m(f) = \sum_{n=1}^{m} \langle f, e_n \rangle e_n,$$

entonces $S_m(f)$ nos provee de la mejor aproximación a f dentro del subespacio generado por $\{e_1, \ldots, e_m\}$. Sin embargo, en algunos casos, podría pasar que tengamos que tomar un m demasiado grande para que $S_m(f)$ se parezca a f. Por ejemplo, si los primeros 1000 coeficientes de f fueran cero, tendríamos que tomar un $m > 1000$ para que S_m sea no nula. Entonces nos preguntamos, dado un m, cómo podemos elegir un subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ de cardinalidad m tal que

$$S_A(f) = \sum_{n \in A} \langle f, e_n \rangle e_n$$

nos provea de la mejor aproximación a f de m términos. Por la igualdad de Parseval, está claro que los coeficientes que debemos elegir son los que tengan módulo más grande.

En el contexto de espacios de Banach X, la situación es un poco más complicada. En este caso, pediremos que el espacio tenga una base de Schauder (e_n), lo que nos permitirá representar a sus elementos de forma única. Hablaremos de bases de Schauder y de sus propiedades en el Capítulo 1. Motivados por lo que pasa en espacios de Hilbert, dado un elemento $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

vamos a elegir un subconjuto $A \subset \mathbb{N}$ de cardinal m tal que A contenga a los coeficientes de x de módulo más grande. De esta forma, definiremos

$$G_m(x) = \sum_{n \in A} a_n e_n.$$

Este algoritmo (conocido como *Thresholding Greedy Algorithm*) fue definido por Konyagin y Temlyakov en [Kon]. Claramente, G_m es un operador no lineal.

Nuestro objetivo en esta tesis es estudiar el algoritmo G_m. Para esto, definiremos distintas formas de "medir" el error de la aproximación. En el Capítulo 2 veremos cuáles son las bases para las cuales este algoritmo funciona mejor. Estas bases (que llamaremos *greedy*) son las que cumplen que

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \inf \left\{ \left\| x - \sum_{n \in A} c_n e_n \right\| : |A| \leq m, \; c_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Vemos así que las bases greedy van a ser las que cumplen que el error del algoritmo es casi como el de la mejor aproximación posible a x de $m-$términos. Veremos una forma de caractizar a esta bases y estudiaremos el caso de la base de Haar en $L^p[0,1]$.

A diferencia de lo que pasaba en el caso de los espacios de Hilbert, en un espacio de Banach ni siquiera está claro que $G_m(x)$ converja a x. El algoritmo greedy lo podemos ver como un reodenamiento de los coeficientes $(a_n(x))$, lo cual nos hace pensar en bases incondicionales. Hablaremos de este tipo de bases también en el Capítulo 1. Sin embargo, veremos que la incondicionalidad no es necesaria para que $G_m(x) \to x$. A una base que cumple esto la llamaremos *cuasi-greedy*. De esto hablaremos en el Capítulo 3.

En la definición de bases greedy le pedimos al algoritmo que aproxime casi tan bien como la mejor aproximación de m términos. Observemos que las mejores aproximaciones no siempre van a estar dadas por los coeficientes de x. Por este motivo, en [Dil] se definen nuevas formas de "medir" qué tan bien funciona el algoritmo. Vamos a decir que la base es *aproximadamente greedy* si cumple que

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \inf \left\{ \left\| x - \sum_{n \in A} a_n e_n \right\| : |A| \leq m \right\},$$

donde ahora los (a_n) son los coeficientes de x. De estas bases hablaremos en más detalle en el Capítulo 4.

Finalmente, en el Capítulo 5, estudiaremos qué podemos decir sobre la “base dual” de una base aproximadamente greedy. En el contexto de bases de Schauder, veremos que la sucesión de funciones biortogonales no siempre constituye una base, pero sí una sucesión básica. Sin embargo, podemos extender las definiciones anteriores a sucesiones básicas, simplemente tomando como espacio a $X_0 = [e_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Capítulo 1

Bases en espacios de Banach

En este capítulo daremos las definiciones y algunos resultados que utilizaremos a lo largo de esta tesis. Vamos a recordar las definiciones y resultados generales de bases y bases incondicionales. Veremos que la base de Fourier no es incondicional en L^p y que un espacio de Hilbert, una base es incondicional si y sólo si es una base de Haar. Estos resultados se pueden encontrar en [Al]

1.1 Bases de Schauder

A lo largo de este trabajo, X va a ser un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, y por X' vamos a notar a su espacio dual.

Definición 1.1.1. Una sucesión de elementos $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se dice una *base (de Schauder)* si para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares (a_n) tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Es claro de la definición que si X admite una base, entonces X concide con la clausura del subespacio generado por los (e_n), que notaremos $[e_n]$; y por lo tanto X es separable.

Definición 1.1.2. Sea X un espacio de Banach con base (e_n). Vamos a decir que (e_n) está *seminormalizada* si existe una constante $C > 0$ tal que

$$1/C \leq \|e_n\| \leq C$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

En este trabajo X va a ser siempre un espacio de Banach con base seminormalizada.

Vamos a definir ahora la *sucesión biortogonal* asociada a (e_n) como la sucesión de funcionales que cumplen

$$e'_m\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n\Big) = a_m.$$

Observemos que, aplicando e'_n a los elementos de la base, nos queda

$$e'_m(e_n) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = n; \\ 0, & \text{si } m \neq n. \end{cases}$$

Definamos también los operadores de sumas parciales S_n como

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^{n} e'_j(x) e_j.$$

es decir, S_n es la proyección en el subespacio $[e_1, \ldots, e_n]$.

Proposición 1.1.3. *Sea X un espacio de Banach con base (e_n). Entonces*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n\| < \infty.$$

Definición 1.1.4. Sea (e_n) base de X. La constante $K = \sup(\|S_n\|)$ se llama la *constante de la base*. Si $K = 1$, decimos que la base es *monótona*.

No es difícil ver que si consideramos

$$|||x||| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|$$

entonces esto nos define una nueva norma en X. Además, $(X, ||| \cdot |||)$ resulta un espacio de Banach, y ahora la base es monótona. Además, se puede probar que esta norma es equivalente a la norma original. De esta forma, vemos que siempre se puede renormalizar el espacio para que la base resulte monótona.

Observación 1.1.5. Sea (e_n) una base y sea K su constante. Sea C tal que $1/C \leq \|e_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$,

$$|e'_n(x)| \leq C \, \|e'_n(x) e_n\| \leq C \, \|S_n(x) - S_{n-1}(x)\| \leq 2KC \, \|x\|$$

y por lo tanto, e'_n es continua y $\|e'_n\| \leq 2KC$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición 1.1.6. Una sucesión (e_n) en X se dice una *sucesión básica* si es base de la clausura de $[e_n]_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposición 1.1.7. *Una sucesión (e_n) de elementos no nulos de un espacio X es una sucesión básica si y sólo si existe una constante K tal que*

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \Big\| \leq K \Big\| \sum_{k=1}^{m} a_k e_k \Big\|$$

para toda sucesión de escalares (a_k) y para todo par de naturales con $n \leq m$.

Es un hecho conocido que si (e_n) es una base para X, la sucesión biortogonal (e'_n) no necesariamente es una base para X'. Por ejemplo, la sucesión de elementos de ℓ_1 definida como

$$(e_n)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } n = k \\ 0, & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

es una base, a la que llamaremos base canónica de ℓ_1. Sin embargo, $\ell'_1 = \ell_\infty$ no admite ninguna base, ya que no es separable. Sí se puede probar que (e'_n) forma una sucesión básica en X'. Una condición que garantiza que los (e'_n) formen una base de X' es que el espacio sea reflexivo.

1.2 Bases incondicionales

Durante esta tesis nos va a importar un tipo especial de bases: las bases incondicionales.

Definición 1.2.1. Sea (x_n) una sucesión de elementos de X. Vamos a decir que la serie $\sum_n x_n$ *converge incondicionalmente* si $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge para toda permutación π de los naturales.

Proposición 1.2.2. *Dada una serie $\sum_n x_n$ en X, las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\sum_n x_n$ converge incondicionalmente;

(2) La serie $\sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}$ converge para toda sucesión creciente de enteros (n_k);

(3) La serie $\sum_n \varepsilon_n x_n$ converge para toda elección de signos (ε_n);

(4) Para cada $\varepsilon > 0$ existe un n tal que si F es un subconjunto finito de $\{n+1, n+2, \dots\}$ entonces

$$\Big\| \sum_{k \in F} x_k \Big\| < \varepsilon.$$

Definición 1.2.3. Una base (e_n) es llamada una *base incondicional* si la serie $\sum_n e'_n(x) e_n$ converge incondicionalmente para todo $x \in X$.

Veamos algunas propiedades de las bases incondicionales que usaremos más adelante:

Proposición 1.2.4. *Una base (e_n) es una base incondicional si y sólo si existe una constante K tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ y para todo par de sucesiones (a_n), (b_n) que satisfacen que $|a_n| \leq |b_n|$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \Big\| \leq K \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big\|. \tag{1.1}$$

A la menor constante K que satisface esto la llamaremos la constante de incondicionalidad de la base.

Corolario 1.2.5. *La base (e_n) es incondicional si y sólo si existe una constante C tal que para todo subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}$ los operadores de proyección P_S definidos por*

$$P_S \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} e'_n(x) e_n \right) = \sum_{n \in S} e'_n(x) e_n$$

son acotados y vale $\|P_S\| \leq C$. Además, si K es la constante de incondicionalidad, vale

$$C \leq K \leq 2C.$$

Demostración. Supongamos primero que (e_n) es incondicional. Dado $S \subset \mathbb{N}$ y dado $x \in X$, tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $S \subset \{1, \ldots, N\}$. Entonces, por la proposición anterior,

$$\Big\| \sum_{n \in S} e'_n(x) e_n \Big\| \leq K \Big\| \sum_{n=1}^{N} e'_n(x) e_n \Big\|.$$

Tomando límite en N, nos queda que vale

$$\|P_S(x)\| \leq K \|x\|.$$

Por otro lado, supogamos que existe C tal que $\|P_S\| \leq C$ para todo $S \subset \mathbb{N}$ finito y veamos que esto nos dice que la base es incondicional. Para esto, dado un $N \in \mathbb{N}$ y sucesiones (a_n), (b_n) que satisfacen que $|a_n| \leq |b_n|$ probemos que vale (1.1). Primero observemos que si (ε_n) es una elección de signos, podemos definir los conjuntos $B^+ := \{n \in \{1, \ldots, N\} : \varepsilon_n = 1\}$ y $B^- := \{n \in \{1, \ldots, N\} : \varepsilon_n = -1\}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n b_n e_n &= \Big\| \sum_{n \in B^+} b_n e_n - \sum_{n \in B^-} b_n e_n \Big\| \\
&\leq \Big\| P_{B^+} \Big(\sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big) \Big\| + \Big\| P_{B^-} \Big(\sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big) \Big\| \\
&\leq 2C \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big\|.
\end{aligned}$$

Luego, como $|a_n| \leq |b_n|$, debe existir un $t_n \in [0,1]$ tal que $a_n = (2t_n - 1)b_n$. Sea (ε_n) una elección de signos. Entonces,

$$\begin{aligned}\Big\|a_1e_1 + \sum_{n=2}^{N} \varepsilon_n b_n e_n\Big\| &= \Big\|t_1\Big(b_1 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n b_n e_n\Big) + (1-t_1)\Big(-b_1e_1 + \sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n b_n e_n\Big)\Big\| \\ &\leq t_1(2C)\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\Big\| + (1-t_1)(2C)\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\Big\| \\ &= (2C)\Big\|\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\Big\|.\end{aligned}$$

Ahora hacemos lo mismo para a_2. Es decir, escribimos

$$\sum_{n=1}^{2} a_n e_n + \sum_{n=3}^{N} \varepsilon_n b_n e_n = t_2\Big(a_1e_1 + b_2e_2 + \sum_{n=3}^{N} \varepsilon_n b_n e_n\Big) + (1-t_2)\Big(a_1e_1 - b_2e_2 + \sum_{n=3}^{N} \varepsilon_n b_n e_n\Big)$$

y usando lo anterior probamos la misma cota para la norma. Inductivamente, podemos probar que vale (1.1) con $K = 2C$. □

Veamos un ejemplo: vamos a probar que la base de Fourier $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ de $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ no es incondicional si $p \neq 2$ (si $p = 2$ forma una base ortogonal, y por lo tanto, incondicional). Para probar esto, recordemos el siguiente teorema de Orlicz:

Teorema 1.2.6. *Si $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ converge incondicionalmente en $L^p(\mu)$, entonces:*

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p^2 < \infty$ *si* $1 \leq p \leq 2$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p^p < \infty$ *si* $2 \leq p < \infty$.

Ejemplo 1.2.7. La base de Fourier no es incondicional en $L_p[0,1]$ si $p \neq 2$.

Para ver esto, sea $1 \leq p < 2$ y supongamos que la base es incondicional. Sea $f \in L_p[0,1]$, $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi ikt}$ con convergencia incondicional. Entonces, por el teorema de Orlicz,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \Big\|a_k e^{2\pi ikt}\Big\|_p^2 < \infty.$$

Como además, $\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$, esto nos dice f pertenece a $L_2[0,1]$. Si tomamos $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, vemos que f pertenece a $L^p[0,1]$ para todo $1 \leq p < 2$, pero no pertenece a $L^2[0,1]$. Esto contradice lo que vimos recién, y por lo tanto, la base de Fourier no puede ser incondicional.

Resta ver el caso $2 < p < \infty$: si $\{e^{2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ es base incondicional de $L_p[0,1]$, entonces su base dual en $(L_p[0,1])' = L_q[0,1]$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (es decir, la sucesión de funciones biortogonales que en este caso forma una base pues L^p es reflexivo) también es incondicional. Pero la base dual es $\{e^{-2\pi ikt}\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset L_q[0,1]$ con $1 < q < 2$, que por el caso anterior no puede ser incondicional. Esto nos da un absurdo, y por lo tanto, la base de Fourier en $L^p[0,1]$ no es incondicional.

Otra consecuencia del Teorema de Orlicz es que una base seminormalizada de un espacio de Hilbert es incondicional si y sólo si es una base de Riesz. Recordemos esta definición:

Definición 1.2.8. Sea H un espacio de Hilbert. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ se dice *base de Riesz* de H si existe un operador $T : H \to H$ lineal, acotado e inversible y (e_n) una base ortogonal tal que $T(x_n) = e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 1.2.9. *Sea H un espacio de Hilbert y sea (x_n) una base incondicional. Si llamamos $(y_n) \subset H$ a la sucesión biortogonal a (x_n), es decir, (y_n) es la sucesión que cumple*

$$\langle x, y\rangle = \begin{cases} 1, & si\ n = m; \\ 0, & si\ n \neq m; \end{cases}$$

entonces (y_n) es una base incondicional.

Demostración. Como H es reflexivo, (y_n) es una base. Veamos que es incondicional. Sea $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y_n \in H$ y sea (ε_n) una elección de signos. Entonces

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n a_n y_n \Big\| &= \sup_{\|x\|=1} \Big| \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n a_n y_n, x\rangle \Big| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n a_n \langle y, \sum_{m\in\mathbb{N}} b_m x_m\rangle \Big| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \Big| \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n a_n b_n \Big| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \Big| \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n b_n x_n\rangle \Big|. \end{aligned}$$

Usando Cauchy-Schwart y la incondicionalidad de (x_n), vemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|=1} \Big| \langle \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n y_n, \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n b_n x_n\rangle \Big| &\leq \|y\| \sup_{\|x\|=1} \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n b_n x_n \Big\| \\ &\leq K \|y\| . \end{aligned}$$

Ahora, razonando como en el Corolario 1.2.5, vemos que esto nos dice que (y_n) es incondicional. □

Proposición 1.2.10. *Sea H un Hilbert y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$. Entonces (x_n) es base de Riesz si y sólo si es una base incondicional seminormalizada de H.*

Demostración. Supongamos que (x_n) es una base de Riesz, sea $T : H \to H$ lineal, acotado e inversible tal que $T(x_n) = e_n$, (e_n) base ortogonal. Como T es acotado e inversible, tenemos que T^{-1} es acotado. Entonces,

$$\|x_n\| = \left\|T^{-1} e_n\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\|.$$

Además,

$$1 = \|e_n\| \leq \|T\| \, \|x_n\| \,,$$

con lo cual $1/\|T\| \leq \|x_n\| \leq \|T^{-1}\|$; lo que nos dice que la base es seminormalizada. Para ver que es incondicional, observemos que (e_n) es una base incondicional con constante 1. Sean $N \in \mathbb{N}$, (a_n) y (b_n) tal que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo n, y probemos que se cumple (1.1).

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \Big\| &= \Big\| T^{-1}\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n \Big) \Big\| \leq \Big\| T^{-1} \Big\| \, \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \Big\| \\ &\leq \Big\| T^{-1} \Big\| \, \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n e_n \Big\| \leq \Big\| T^{-1} \Big\| \, \|T\| \, \Big\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \Big\|. \end{aligned}$$

Esto nos dice que la base es incondicional, con constante $K \leq \|T^{-1}\| \, \|T\|$.

Para ver la otra implicación, supongamos que (x_n) es una base incondicional seminormalizada. Observemos que, como H es isomorfo a ℓ_2, podemos usar el teorema de Orlicz. Sea (e_n) una base ortogonal de H y definimos para cada $N \in \mathbb{N}$, $T_N : H \to H$ como:

$$T_N(x) = T_N\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \Big) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n.$$

Los T_N son lineales y acotados. Veamos que convergen puntualmente. Sea $x \in H$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ y sea $c > 0$ tal que $\|x_n\| \geq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\Big\| T_N\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \Big) \Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^2 \leq \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \|a_n x_n\|^2 < \infty$$

por Orlicz. Como esta cota vale para todo $N \in \mathbb{N}$, por Banach-Steinhaus los operadores (T_N) convergen puntualmente a un operador $T : H \to H$ lineal y acotado. Además, debe valer que $T(x_n) = e_n$ para todo n.

Sea $(y_n) \subset H$ la sucesión biortogonal a (x_n), que es una base incondicional por el lema anterior. Además, (y_n) es seminormalizada. Entonces, usando el mismo argumento que para (x_n), tenemos que podemos definir un operador $S : H \to H$ lineal y acotado, tal que $S(y_n) = e_n$. Como (x_n) y (e_n) son bases, es fácil ver que T es inyectivo. Para ver que es sobreyectivo, sea $z \in H$, $z = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n e_n$. Tenemos que ver que $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x_n$ define un elemento de H. Para eso, veamos que es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ y fijemos N_0 tal que, si $N, M \geq N_0$, vale que

$$\Big\| \sum_{n=N}^{M} a_n e_n \Big\| = \sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 < \varepsilon / \|S\|^2 \,.$$

Entonces, para $N, M \geq N_0$,

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{n=N}^{M} a_n x_n \Big\|^2 &= \sup_{\|y\|=1} \Big| \langle \sum_{n=N}^{M} a_n x_n, y \rangle \Big|^2 \\
&= \sup_{\|y\|=1} \Big| \sum_{n=N}^{M} a_n \langle x_n, y \rangle \Big|^2 \\
&\leq \sup_{\|y\|=1} \Big(\sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 \Big) \Big(\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x_n, y \rangle|^2 \Big) \\
&= \sup_{\|y\|=1} \Big(\sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 \Big) \|S(y)\|^2 \\
&\leq \|S\|^2 \sum_{n=N}^{M} |a_n|^2 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Entonces T es sobreyectiva, y por lo tanto, inversible. $\square$

Capítulo 2

Bases Greedy

En este capítulo nos ocuparemos de dar una definición formal del algoritmo greedy y daremos una caracterización de bases greedy que nos permitirá clasificar las bases con mayor facilidad. Además estudiaremos un caso particular de base: la base de Haar en $L^p([0,1])$.

2.1 Definiciones y propiedades básicas

El objetivo del algoritmo greedy es reordenar los coeficientes distintos de cero de forma tal que queden primero los de módulo máximo. Para cada $x \in X$ vamos a definir el *ordenamiento greedy de* x como la función $\rho : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $\rho(\mathbb{N}) \supset \{j : e'_j(x) \neq 0\}$ y tal que si $j < k$, entonces tenemos que

$$|e'_{\rho(j)}(x)| > |e'_{\rho(k)}(x)| \qquad \text{o} \qquad |e'_{\rho(j)}(x)| = |e'_{\rho(k)}(x)| \quad \text{y} \quad \rho(j) < \rho(k).$$

Vamos a definir m-ésima la aproximación greedy como

$$G_m(x) = \sum_{j=1}^{m} e'_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)}.$$

Notemos que sólo nos importa reordenar los coeficientes que son distintos de cero. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 2.1.1. Sea $x = (1, 0, -1, 1/2, 2, 0, 1/3, 0, 0, 0, \dots) \in c_0$. Entonces las aproximaciones greedy nos quedan

$$\begin{aligned} &G_1(x) = 2e_5, && G_2(x) = G_1(x) + e_1, && G_3(x) = G_2(x) - e_1 \\ &G_4(x) = G_3(x) + 1/2e_4, && G_5(x) = G_4(x) + 1/3e_7 && G_6(x) = x. \end{aligned}$$

Como el desarrollo de x es finito, nos queda que $G_m(x) = x$ para todo $m \geq 6$.

Ejemplo 2.1.2. Sea ahora $x \in c_0$ definido por

$$x_n = \begin{cases} 1/n, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Nos queda que

$$G_m(x) = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} e_{2n-1}.$$

En este caso, el ordenamiento greedy sólo considera los coeficientes distintos de cero. Notemos que en ambos ejemplos reordenamos la base canónica de c_0, que es incondicional, con lo cual teníamos garantizada la convergencia del algoritmo.

Queremos tener una forma de medir qué tan bueno es el algoritmo. Para (e_n) una base cualquiera, vamos a denotar

$$\sigma_m(x) = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{j \in A} \alpha_j e_j \right\| : |A| = m,\ \alpha_j \in \mathbb{R} \right\},$$

o sea, σ_m nos da la mejor aproximación a x de $m-$términos.

Observación 2.1.3. Dado $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, observemos que si S es cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $|S| = m$ entonces

$$\begin{aligned} \sigma_m(x) &= \inf \Big\{ \Big\| x - \sum_{j \in A} \alpha_j e_j \Big\| : |A| = m,\ \alpha_j \in \mathbb{R} \Big\} \\ &\leq \Big\| x - \sum_{j \in S} e'_j(x) e_j \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{j \notin S} e'_j(x) e_j \Big\|. \end{aligned}$$

Definición 2.1.4. Una base (e_n) se dice *greedy* si existe una constante C tal que, para todo $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \sigma_m(x).$$

A la menor de las constantes C que cumplan esto la llamaremos la *constante greedy* y la notaremos K_g.

Es decir, una base va a ser greedy cuando el algoritmo nos de casi la mejor aproximación a x de $m-$términos. Para que la base sea greedy lo mínimo que le tenemos que pedir al algoritmo es que converja. Una buena propiedad que nos garantiza que eso va a pasar es si la base fuera incondicional. Vamos a ver que si la base es greedy entonces resulta incondicional. Sin embargo, esta condición no es suficiente; en [Kon] Konyagin y Temlyakov probaron que además la base tiene que ser *democrática*.

Definición 2.1.5. Sea (e_n) una base. Vamos a decir que (e_n) es *democrática* si existe una constante Δ tal que cada vez que tenemos dos conjuntos de índices finitos $|A| \leq |B|$ se cumple

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \leq \Delta\Big\|\sum_{j\in B} e_j\Big\|.$$

Observación 2.1.6. En la definición de arriba basta con tomar conjuntos A y B tal que $|A| = |B|$.

Para ver esto, supongamos que existe una constante Δ tal que

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \leq \Delta\Big\|\sum_{j\in B} e_j\Big\|$$

para todo $|A| = |B|$. Sea ahora un subconjunto finito de los naturales $\tilde{B}$ tal que $|A| < |\tilde{B}|$. Tomemos un subconjunto $B \subset \tilde{B}$ que cumpla que $|A| = |B|$ y además $\min(\tilde{B}\backslash B) > \max(B)$. Entonces, si K es la constante de la base,

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \leq \Delta\Big\|\sum_{j\in \tilde{B}} e_j\Big\| \leq \Delta K\Big\|\sum_{j\in B} e_j\Big\|$$

y por lo tanto la base es democrática.

Empecemos viendo un teorema que caracteriza a las bases greedy.

Teorema 2.1.7. *Una base (e_n) es greedy si y sólo si es incondicional y democrática.*

Demostración. Supongamos que (e_n) es greedy con constante K_g.

Para un subconjunto finito $S \subset \mathbb{N}$, definimos la proyección en $[e_n]_{n\in S}$ como

$$P_S(x) = \sum_{j\in S} e'_j(x)e_j.$$

Como vimos en el Corolario 1.2.5, para ver que (e_n) es incondicional nos alcanza con mostrar que para cada conjunto S y para cada $x \in X$, se cumple

$$\|P_S(X)\| \leq (K_g + 1)\|x\|.$$

Fijemos S un conjunto de cardinalidad m, $x \in X$ y $\alpha > \sup\limits_{j\notin S} |e'_j(x)|$. Sea

$$y = x - P_S(x) + \alpha\sum_{j\in S} e_j.$$

Por la Observación 2.1.3, $\sigma_m(y) \leq \|x\|$. Además, es fácil ver que $G_m(y) = \alpha\sum_{j\in S} e_j$. Sabiendo que (e_n) es greedy,

$$\|x - P_S(x)\| = \|y - G_m(y)\| \leq K_g\sigma_m(y) \leq K_g\|x\|.$$

Veamos ahora que (e_n) es democrática. Sean $A, B \subset \mathbb{N}$ finitos, con $|A| = |B|$. Sea S otro conjunto tal que $|S| = |A| = m$ y $S \cap A = \emptyset = S \cap B$. Fijo $\varepsilon > 0$, sea

$$x = \sum_{n\in A} e_n + \sum_{n\in S}(1+\varepsilon)e_n.$$

Como (e_n) es greedy, tenemos que

$$\Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\| = \|x - G_m(x)\| \leq K_g\sigma_m(x) \leq K_g(1+\varepsilon)\Big\|\sum_{n\in S} e_n\Big\|.$$

Por otro lado, sea

$$y = \sum_{n\in S} e_n + \sum_{n\in B}(1+\varepsilon)e_n.$$

Al igual que antes,

$$\Big\|\sum_{n\in S} e_n\Big\| = \|y - G_m(y)\| \leq K_g\sigma_m(y) \leq K_g(1+\varepsilon)\Big\|\sum_{n\in B} e_n\Big\|.$$

Juntando ambas desigualdades, vemos que

$$\Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\| \leq K_g^2(1+\varepsilon)^2\Big\|\sum_{n\in B} e_n\Big\|.$$

Como ε era arbitrario, concluimos que (e_n) es democrática (con constante $\leq K_g^2$).

Supongamos ahora que (e_n) es incondicional con constante K y democrática con constante Δ. Fijo $m \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, veamos que $\|x - G_m(x)\| \leq C\sigma_m(x)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $B \subset \mathbb{N}$, $|B| = m$ tal que

$$p_m = \sum_{n\in B} \alpha_n e_n$$

verifique $\|x - p_m\| \leq \sigma_m(x) + \varepsilon$.

Por otro lado, tenemos

$$G_m(x) = \sum_{n\in S} e_n'(x)e_n = P_S(x)$$

para algún $|S| = m$. Entonces,

$$\|x - G_m(x)\| = \|x - P_S(x) + P_B(x) - P_B(x)\| = \|x - P_B(x) - P_{S\setminus B}(x) + P_{B\setminus S}(x)\|.$$

Como (e_n) es incondicional, tenemos que

$$\begin{aligned}\|x - P_B(x) - P_{S\setminus B}(x)\| &= \|x - P_{B\cup S}(x)\| \\ &= \|P_{\mathbb{N}\setminus(B\cup S)}(x - p_m)\| \\ &\leq K\|x - p_m\| \\ &\leq K(\sigma_m(x) + \varepsilon)\end{aligned}$$

y además,

$$\|P_{S\setminus B}(x)\| \leq K\|x - p_m\| \leq K(\sigma_m(x) + \varepsilon).$$

De la definición de G_m (dado que en S están los coeficientes de módulo máximo de x), debe valer que

$$\gamma := \min_{j\in S\setminus B} |e'_j(x)| \geq \max_{j\in B\setminus S} |e'_j(x)| := \beta.$$

Y por incondicionalidad de la base, como vimos en la Proposición 1.2.4,

$$\gamma\Big\|\sum_{j\in S\setminus B} e_j\Big\| = \Big\|\sum_{j\in S\setminus B} \gamma e_j\Big\| \leq K\Big\|\sum_{j\in S\setminus B} e'_j(x)e_j\Big\| = K\|P_{S\setminus B}(x)\| \tag{2.1}$$

y

$$\|P_{B\setminus S}(x)\| \leq \beta K\Big\|\sum_{j\in B\setminus S} e_j\Big\| \tag{2.2}$$

Observemos que $|S\setminus B| = |B\setminus S|$. Por (2.1) y (2.2) y usando que la base es democrática, obtenemos

$$\|P_{B\setminus S}(x)\| \leq K^2\Delta\|P_{S\setminus B}(x)\| \leq K^3\Delta(\sigma_m(x) + \varepsilon).$$

Concluimos que

$$\|x - G_m(x)\| \leq (K + K^3\Delta)(\sigma_m(x) + \varepsilon).$$

Como ε era arbitrario, (e_n) es greedy. □

Ejemplo 2.1.8. Consideremos los espacios ℓ_p, con $1 \leq p < \infty$, y c_0. Veamos que en estos espacios, la base canónica (e_n) es greedy. No es díficil verlo por definición, pero vamos a hacerlo viendo que son incondicionales y democráticas.

Veamos primero que son incondicionales. Para esto, tomemos $x \in X$ (donde X es cualquiera de los espacios anteriores) y escribamos

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)e_n.$$

Por la Proposición 1.2.2, nos alcanza con probar que para toda elección de signos (ε_n), la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n e'_n(x)e_n$ converge. Para ver esto, supongamos primero que $X = \ell_p$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, dada una elección de signos,

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n e'_n(x)e_n\Big\|_p = \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} |\varepsilon_n e'_n(x)|^p\Big)^{1/p} = \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} e'_n(x)e_n\Big\|_p < \infty.$$

Si ahora $X = c_0$, dada una elección de signos,

$$\Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon_n e'_n(x)e_n\Big\|_\infty = \sup|\varepsilon_n e'_n(x)| = \|x\|_\infty < \infty.$$

Concluimos que la base es incondicional. Para ver que es democrática, sea A un conjunto de cardinalidad m. Entonces

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|_p = \Big(\sum_{j\in A} 1\Big)^{1/p} = m^{1/p},$$

que sólo depende de m. Por otro lado, en el caso de c_0,

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|_\infty = 1.$$

Por lo tanto, en todos los casos la base es greedy.

Veamos ahora que en el teorema anterior no podemos sacar ninguna de las dos condiciones, puesto que son independientes entre sí.

Democrática no implica incondicional: Sea X el espacio de las sucesiones $(x_1, x_2, \dots)$ que cumplen que

$$\|x\| := \sup_{N\in\mathbb{N}} \Big|\sum_{n=1}^{N} x_n\Big| < \infty.$$

X dotado de esta norma es un espacio de Banach. Consideremos en X los vectores canónicos (que en este espacio sólo forman una sucesión básica). Claramente (e_n) es democrática, dado que si A es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$

$$\Big\|\sum_{n\in A} e_n\Big\| = |A|.$$

Si (e_n) fuera incondicional, tendría que existir una constante K tal que

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} e_n\Big\| \le K\Big\|\sum_{n=1}^{m}(-1)^n e_n\Big\|$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Pero

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} e_n\Big\| = m \quad \text{y} \quad \Big\|\sum_{n=1}^{m}(-1)^n e_n\Big\| = 1.$$

Incondicional no implica democrática: Consideremos la base canónica de $\ell_p \oplus_1 \ell_q$, con $p < q$. Es decir, la base formada por $\{(e_n^p, 0)\} \cup \{(0, e_n^q)\}$, donde (e_n^t) es la base canónica de ℓ_t. Esta base es incondicional puesto que ambas e_n^p y e_n^q lo son. Sin embargo, no son democráticas. Para ver esto, dado $m \in \mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m} e_n^p\Big\| = m^{1/p} \quad \text{y} \quad \Big\|\sum_{n=1}^{m} e_n^q\Big\| = m^{1/q}.$$

Como $p < q$, no puede existir una constante Δ tal que $m^{1/p} \le \Delta m^{1/q}$ para todo $m \in \mathbb{N}$; lo que nos dice que la base no es democrática.

Una pregunta natural que nos surge es qué pasa en los espacios L^p. Una base muy utilizada es la base de Fourier $(e^{2\pi inx})_{n\in\mathbb{Z}}$. Pero esta base no puede ser greedy si $p \neq 2$, puesto que no es incondicional. En la próxima sección vamos a estudiar una base que sí es greedy en $L^p([0,1])$: la base de Haar.

2.2 La base de Haar en $L^p([0,1])$

Definamos en el intervalo $[0,1]$ la sucesión de funciones dada por $H_1(x) = 1$ y para $n = 2^k + s$ con $k = 0, 1, \dots$ y $s = 1, \dots, 2^k$,

$$H_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}); \\ -1, & \text{si } x \in [\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Notemos que

$$\|H_n\|_p = \left(\int_0^1 |H_n(x)|^p\, dx\right)^{1/p} = \left(\frac{1}{2^k}\right)^{1/p}$$

que tiende a cero cuando $n \to \infty$. Es decir, la base de Haar no está seminormalizada, y por lo tanto no puede ser democrática.

El objetivo de esta sección es mostrar que la base de Haar *normalizada* en $L^p[0,1]$, dada por $(H_n^{(p)}) := (H_n/\|H_n\|_p)$ es greedy para todo $1 < p < \infty$. En el caso $p = 1$ se puede ver que la base no es incondicional (y por el Teorema 2.1.7, no puede ser greedy), y en el caso $p = \infty$, el sistema ni siquiera forma una base (pues cualquier espacio con base es separable). En el caso $p = 2$, $L^2([0,1])$ resulta ser un espacio de Hilbert y $(H_n^{(2)})$ una base ortonormal y, por lo tanto, greedy.

Vamos a empezar probando que la base de Haar es incondicional, lo que en particular nos dice que $(H_n^{(p)})$ lo es. Veamos una demostración de Burkholder [Bur] de este hecho. Para esto, necesitaremos dos lemas.

Lema 2.2.1. *Sea $p > 2$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para $0 \leq t \leq 1$ tenemos*

$$t^p - p^p q^{-p}(1-t)^p \leq p^2 q^{1-p}(t - \frac{1}{q}).$$

Demostración. Para $0 \leq t \leq 1$ definimos

$$f(t) = t^p - p^p q^{-p}(1-t)^p - p^2 q^{1-p}(t - \frac{1}{q}).$$

Entonces,

$$f'(t) = pt^{p-1} + p^{p+1}q^{-p}(1-t)^{p-1} - p^2 q^{1-p}$$

y

$$f''(t) = p(p-1)t^{p-2} - (p-1)p^{p+1}q^{-p}(1-t)^{p-2}.$$

Observemos que $f(0) = -p^p q^{-p} + p^2 q^{-p} < 0$ y $f(1) = 1 - pq^{1-p}$. Como $p > 2$, tenemos que $(1-1/p)^{p-1} > 1/p$ y por lo tanto $pq^{1-p} > 1$, y $f(1) < 0$. Además, $f(\frac{1}{q}) = 0$,

$$f'(\frac{1}{q}) = pq^{1-p} + p^2 q^{-p} - p^2 q^{1-p} = p^2 q^{1-p}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}) - p^2 q^{1-p} = 0$$

y

$$f''(\frac{1}{q}) = p(p-1)q^{2-p} - (p-1)p^3 q^{-p} = p(p-1)q^{-p}(q^2 - p^2) < 0.$$

Entonces la función f tiene un máximo local en $t = \frac{1}{q}$.

Supongamos que existe un $0 < s < 1$ tal que $f(s) > 0$. Pero entonces deben existir al menos tres soluciones de la ecuación $f'(t) = 0$ y por el teorema de Rolle, al menos dos soluciones de la ecuación $f''(t) = 0$. Esto no puede pasar, ya que

$$f'''(t) = p(p-1)(p-2)(t^{p-3} + p^p q^{-p}(1-t)^{p-3}) > 0$$

para todo $0 < t < 1$. □

En el próximo lema vamos a introducir una función que nos va a permitir probar el teorema de Burkholder.

Lema 2.2.2. *Sea $p > 2$ y definamos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por*

$$\varphi(x, y) = (|x| + |y|)^{p-1}\left((p-1)|x| - |y|\right).$$

(1) Si $1/p + 1/q = 1$, vale la siguiente desigualdad para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(p-1)^p |x|^p - |y|^p \geq pq^{1-p}\varphi(x, y).$$

(2) φ es $\mathcal{C}^2$ y satisface

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 2\left|\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right| \geq 0.$$

Demostración. Probemos (1). Si en el lema anterior ponemos $t = |y|(|x| + |y|)^{-1}$ (para $(x, y) \neq (0, 0)$), obtenemos

$$|y|^p - p^p q^{-p}|x|^p \leq pq^{1-p}(|y| - (p-1)|x|)(|x| + |y|)^{p-1}.$$

Entonces

$$p^p q^{-p}|x|^p - |y|^p \geq pq^{1-p}\varphi(x, y).$$

Esto prueba lo que queríamos, ya que $p^p q^{-p} = (p/q)^p = (p-1)^p$.

Veamos ahora (2). Primero notemos que φ es $\mathcal{C}^2$ pues $p > 2$. Para probar la desigualdad, es claro que basta probarla para $x > 0, y > 0$. Sea $u = x + y$ y $v = (p-1)x - y$. Entonces $\varphi(x,y) = u^{p-1}v$. Luego,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = (p-1)(p-2)u^{p-3}v - 2(p-1)u^{p-2}.$$

y

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = (p-1)(p-2)u^{p-3}v + 2(p-1)^2u^{p-2}.$$

Y por lo tanto,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 2(p-1)(p-2)u^{p-3}(u+v) \geq 0.$$

Por otro lado,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} = (p-1)(p-2)u^{p-3}(u+v).$$

□

Teorema 2.2.3. *Sea $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Sea $p^* = \max(p,q)$. Entonces, la base de Haar (H_k) es incondicional en $L_p[0,1]$, con constante de incondicionalidad menor a $p^* - 1$. Es decir,*

$$\Big\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j a_j H_j\Big\|_p \leq (p^*-1)\Big\|\sum_{j=1}^n a_j H_j\Big\|_p,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, escalares $a_1, \ldots, a_n$ y signos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Demostración. Supongamos primero que $p > 2$, con lo cual nos queda que $p^* = p$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, llamemos $f_0 = g_0 = 0$ y definamos para $1 \leq k \leq n$,

$$f_k = \sum_{j=1}^k a_j H_j \qquad \text{y} \qquad g_k = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j a_j H_j.$$

Vamos a probar de forma inductiva en k que

$$\int_0^1 \varphi(f_k(s), g_k(s))\,ds \geq 0.$$

Es claro que el caso $k = 0$ vale. Para el paso inductivo, llamemos

$$F(t) = \int_0^1 \varphi((1-t)f_{k-1}(s) + tf_k(s), (1-t)g_{k-1}(s) + tg_k(s))\,ds$$

para $0 \leq t \leq 1$. Queremos probar que $F(1) \geq 0$ sabiendo que $F(0) \geq 0$.

Sean $u_t = (1-t)f_{k-1} + tf_k$ y $v_t = (1-t)g_{k-1} + tg_k$. Entonces,

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u_t,v_t)(f_k(s) - f_{k-1}(s)) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u_t,v_t)(g_k(s) - g_{k-1}(s))\,ds \\ &= a_k \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u_t,v_t)H_k(s)\,ds + a_k\varepsilon_k \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u_t,v_t)H_k(s)\,ds. \end{aligned}$$

Notemos que $u_0(s) = f_{k-1}(s)$ y $v_0(s) = g_{k-1}(s)$, y estas funciones se mantienen constantes en el soporte de H_k (pues si $j \leq k$, entonces $\text{sop}(H_k) \subset \text{sop}(H_j)$ o $\text{sop}(H_k) \cap \text{sop}(H_j) = \emptyset$). Pero entonces $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(u_0, v_0)$ son también constantes en $\text{sop}(H_k)$, y como las funciones H_k son impares, concluimos que $F'(0) = 0$.

Derivando una vez más,

$$F''(t) = a_k^2 \left(\int_0^1 \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 x}(u_t, v_t) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 y}(u_t, v_t) + 2\varepsilon_k \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y}(u_t, v_t)\, ds \right).$$

Por el Lema 2.2.2, $F''(0) \geq 0$. Entonces 0 es un mínimo de F y por lo tanto $F(1) \geq F(0) \geq 0$.

Ahora, tomando $x = f_n$ e $y = g_n$ en (1) del Lema 2.2.2 e integrando a ambos lados, obtenemos

$$\int_0^1 (p-1)^p |f_n(s)|^p - |g_n(s)|^p\, ds \geq \int_0^1 pq^{p-1}\varphi(f_n(s), g_n(s))\, ds \geq 0$$

lo que completa la demostración en el caso $p > 2$.

Resta ver el caso $1 < p < 2$. Definamos f_n y g_n como antes, y tomemos g_n' tal que:

$$g_n' = \sum_{j=1}^n b_j H_j, \quad \|g_n'\|_q = 1 \text{ y } \|g_n\|_p = \int_0^1 g_n(s) g_n'(s)\, ds.$$

Observemos que

$$\int_0^1 H_k(s) H_j(s)\, ds = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, \\ |I_k| & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|g_n\|_p &= \sum_{j=1}^n a_j b_j \varepsilon_j |I_j| = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n a_j H_j(s) \right) \left(\sum_{k=1}^n \varepsilon_k b_k H_k(s) \right) ds \\ &\leq \|f_n\|_p \left\| \sum_{j=1}^n b_j \varepsilon_j H_j \right\|_q \leq \|f_n\|_p (q-1) \|g_n'\|_q \\ &\leq (q-1) \|f_n\|_p . \end{aligned}$$

□

Para probar que la base de Haar normalizada es greedy, tenemos que demostrar que es democrática. Primero observemos quiénes son estas funciones: Al igual que antes, definimos $H_1^{(p)}(x) = 1$ para todo $x \in [0,1]$ y para $n = 2^k + s$ con $k = 0, 1, \dots$ y $s = 1, \dots, 2^k$,

$$H_n(x) = \begin{cases} 2^{k/p}, & \text{si } x \in [\frac{2s-2}{2^{k+1}}, \frac{2s-1}{2^{k+1}}); \\ -2^{k/p}, & \text{si } x \in [\frac{2s-1}{2^{k+1}}, \frac{2s}{2^{k+1}}]; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Teorema 2.2.4. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces existen dos constante $c_p \leq C_p$ que dependen sólo de p tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo subconjunto $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| = n$,*

$$c_p n^{1/p} \leq \Big\| \sum_{j \in A} H_j^{(p)} \Big\| \leq C_p n^{1/p}.$$

En particular este teorema nos dice que la base es democrática. Lo demostraremos en tres pasos:

Lema 2.2.5. *Sea $0 < q < \infty$. Entonces existe una constante $d_q > 0$ tal que para toda elección de enteros $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ y conjuntos medibles $E_j \subset [0,1]$ $(j = 1, \ldots, k)$ se tiene*

$$\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^k 2^{n_j/q} \chi_{E_j}(x) \right)^q dx \leq d_q \sum_{j=1}^k 2^{n_j} m(E_j),$$

donde χ_{E_j} denota la función característica de E_j.

Demostración. Sea $f(x) = \sum_{j=1}^k 2^{n_j/q} \chi_{E_j}(x)$ y sean $E_j' = E_j \setminus \bigcup_{i=j+1}^{k} E_i$. Entonces si $x \in E_j'$,

$$f(x) \leq \sum_{i=1}^{j} 2^{n_i/q} \leq \sum_{i=1}^{n_j} 2^{i/q} = \frac{2^{(n_j+1)/q} - 1}{2^{1/q} - 1} \leq 2^{n_j/q} \frac{2^{1/q}}{2^{1/q} - 1}.$$

Llamemos $d_q^{1/q} = \frac{2^{1/q}}{2^{1/q}-1}$. Tenemos que

$$\int_0^1 f(x)^q \, dx = \sum_{j=1}^k \int_{E_j'} f(x)^q \, dx \leq d_q \sum_{j=1}^k 2^{n_j} m(E_j') \leq d_q \sum_{j=1}^k 2^{n_j} m(E_j).$$

□

Lema 2.2.6. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces, existe una constante C_p que sólo depende de p tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, todo $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| = n$ y toda elección de signos $(\varepsilon_t) = \pm 1$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{t \in A} \varepsilon_t H_t^{(p)} \Big\|_p \leq C_p n^{1/p}.$$

Demostración. Sean $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ todos los naturales tal que existe un $t \in A$ con $m(\operatorname{sop} H_t^{(p)}) = 2^{-n_i}$. Para $j = 1, \ldots, k$ definimos $A_j = \{t \in A : t = 2^{n_j} + s, s = 1, \ldots, 2^{n_j}\}$. Es decir, A_j son todos los índices de A que corresponden al nivel 2^{-n_j} de la base.

Definimos también $E_j = \bigcup_{t \in A_j} \operatorname{sop}(H_t^{(p)})$. Nos queda que $|A_j| = 2^{n_j} m(E_j)$, y por lo tanto $n = \sum_{j=1}^k 2^{n_j} m(E_j)$.

Además, si $t, s \in A_j$, $t \neq s$ se tiene que $\operatorname{sop}(H_t^{(p)}) \cap \operatorname{sop}(H_s^{(p)}) = \emptyset$. Entonces,

$$\Big| \sum_{t \in A} \varepsilon_t H_t^{(p)}(x) \Big| \leq \sum_{j=1}^k \Big| \sum_{t \in A_j} \varepsilon_t H_t^{(p)}(x) \Big| = \sum_{j=1}^k 2^{n_j/p} \chi_{E_j}(x)$$

para todo $x \in [0,1]$. Entonces, por el Lema 2.2.5,

$$\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)} \Big\|_p \leq \left(\int_0^1 \Big(\sum_{j=1}^k 2^{n_j/p} \chi_{E_j}(x) \Big)^p dx \right)^{1/p} \leq d_p^{1/p} \left(\sum_{j=1}^k 2^{n_j} m(E_j) \right)^{1/p} \leq d_p^{1/p} n^{1/p}.$$

Tomando $C_p = d_p^{1/p}$ tenemos lo que queríamos. □

Probamos la cota superior del teorema, nos resta ver la cota inferior.

Lema 2.2.7. *Sea $1 < p < \infty$. Entonces existe una constante c_p tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| = n$ y toda elección de signos $\varepsilon_t = \pm 1$ se tiene*

$$\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)} \Big\| \geq c_p n^{1/p}.$$

Demostración. Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Por dualidad, sabemos que

$$\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)} \Big\|_p = \sup_{\|g\|_q = 1} \int_0^1 \Big(\sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)}(x) \Big) g(x)\, dx.$$

Por otro lado, observemos que

$$\int_0^1 H_j^{(p)}(x) H_k^{(q)}(x)\, dx = \int_0^1 2^{m/p} H_j(x) 2^{l/q} H_k(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j; \\ 1, & \text{si } k = j. \end{cases}$$

Tomemos

$$g(x) = \frac{\sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(q)}}{\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(q)} \Big\|_q}.$$

Por lo anterior,

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)} \Big\|_p &\geq \frac{1}{\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(q)} \Big\|_q} \int_0^1 \Big(\sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(p)}(x) \Big) \Big(\sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(q)}(x) \Big) dx \\ &= \frac{n}{\Big\| \sum_{t\in A} \varepsilon_t H_t^{(q)} \Big\|_q} \\ &\geq \frac{n}{C_q n^{1/q}} \\ &= c_p n^{1/p} \end{aligned}$$

donde C_q lo elegimos como en el Lema 2.2.6. □

De los Teoremas 2.2.3 y 2.2.4 concluimos que la base de Haar normalizada es greedy en $L_p[0,1]$.

Capítulo 3

Bases Cuasi-Greedy

En el capítulo anterior vimos un tipo de bases para las cuales el algoritmo greedy nos da la mejor aproximación de m términos para cada $x \in X$. Sin embargo, este tipo de bases no son tan comunes de encontrar: vimos que son las que cumplen con ser incondicionales y democráticas. En este capítulo vamos a ver qué propiedades podemos encontrar si le pedimos lo mínimo al algoritmo, si sólo le pedimos que converja a x para todo $x \in X$. Este capítulo está basado en el trabajo [Dil].

3.1 Definiciones y propiedades básicas

Definición 3.1.1. La base (e_n) se dice *cuasi-greedy* si $G_m(x) \to x$ para todo $x \in X$.

Veamos una definición equivalente, que nos va a permitir trabajar más fácilmente.

Teorema 3.1.2. *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) La base (e_n) es cuasi-greedy.

(2) Existe una constante C tal que $\sup_m \|G_m(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in X$.

Demostración. Veamos primero que (2) implica (1). Sea $x \in X$, $x = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j'(x)e_j$ y $\varepsilon > 0$. Sea $x_0 \in X$ tal que $x_0 = \sum_{j\in A} e_j'(x_0)e_j$ con $|A| < \infty$ y $e_j'(x_0) \neq 0$ para todo $j \in A$ y tal que $\|x - x_0\| < \varepsilon$.

Tomando m grande, podemos asegurar que $G_m(x - x_0) = \sum\limits_{j\in B} e_j'(x - x_0)e_j$ con $A \subset B$ y $G_m(x) = \sum\limits_{j\in B} e_j'(x)e_j$. Como $A \subset B$, vemos que

$$G_m(x) - x_0 = \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j - \sum_{j\in A} e_j'(x_0)e_j = G_m(x - x_0).$$

Entonces,

$$\|x - G_m(x)\| \leq \|x - x_0\| + \|G_m(x) - x_0\| \leq \|x - x_0\| + C\,\|x - x_0\| \leq (C+1)\varepsilon.$$

Para ver la otra implicación, probemos el siguiente lema.

Lema 3.1.3. *Si (2) no vale, entonces para toda constante K y conjunto finito $A \subset \mathbb{N}$ existe un conjunto finito $B \subset \mathbb{N}$ disjunto con A y un vector $x = \sum_{n \in B} a_n e_n$ tal que $\|x\| = 1$ y $\|G_m(x)\| \geq K$ para algún m.*

Demostración. Dado $\Omega \subset \mathbb{N}$, llamemos $P_\Omega(x) = \sum_{n\in\Omega} e'_n(x)e_n$. Sea $M = \max_{\Omega\subset A} \|P_\Omega\|$.

Como estamos suponiendo que (2) no vale, entonces dada una constante K_1 grande (que vamos a definir más adelante), debe existir $x_1 \in X$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_1\| = 1$ y $\|G_m(x_1)\| \geq K_1$. Definimos ahora

$$x_2 = x_1 - \sum_{n\in A} e'_n(x_1)e_n.$$

Podemos suponer que $x_2 \neq 0$. Si lo fuera, tendríamos que $x_1 = G_m(x_1)$. Pero entonces $1 = \|x_1\| \geq K_1$, lo cual es absurdo si tomamos $K_1 > 1$. Observemos que

$$\|x_2\| \leq \|x_1\| + \left\|\sum_{n\in A} e'_n(x_1)e_n\right\| \leq M + 1.$$

Además, dado que $e'_n(x_2) = e'_n(x_1)$ para todo $n \notin A$,

$$G_m(x_1) = G_k(x_2) + P_\Omega(x_1) \qquad \text{para algún } k \leq m,\ \Omega \subset A$$

Deducimos que $\|G_k(x_2)\| \geq K_1 - M$. Si $x_3 = x_2/\|x_2\|$, vemos que

$$\|G_k(x_3)\| = \frac{\|G_k(x_2)\|}{\|x_2\|} \geq \frac{K_1 - M}{M+1}.$$

Definamos

$$\delta = \inf\{|e'_n(G_k(x_3))| : |e'_n(G_k(x_3))| \neq 0\}.$$

Tomemos $B_1 \subset \mathbb{N}$ finito tal que para todo $n \notin B_1$, $|e'_n(x_3)| \geq \delta/2$. Sea η tal que $\eta(|A|+|B_1|)2K < \delta$, donde K es la constante de la base, y tomemos x_4 tal que $\|x_3 - x_4\| < \eta$. Modifiquemos todos los coeficientes de x_4 en A y en B_1 de modo tal que el resultante x_5 tenga los mismos coeficientes que x_3 en esos lugares. De esta forma, $G_k(x_5) = G_k(x_3)$ y x_5 es de la forma $x_5 = \sum_{n\in B} e'_n(x_5)e_n$, con B finito y disjunto con A. Veamos que $x_5/\|x_5\|$ cumple lo que queríamos. Tenemos que

$$\|x_4 - x_5\| \leq \sum_{n\in A\cup B_1} \|e'_n(x_4 - x_5)e_n\| \leq 2K(|A| + |B_1|)\eta < \delta.$$

Entonces $\|x_5\| \leq \|x_4\| + \delta \leq 1 + \eta + \delta \leq C$. Por lo tanto,

$$\left\|G_k\left(\frac{x_5}{\|x_5\|}\right)\right\| \geq \frac{K_1 - M}{C(M+1)} \geq K$$

si tomamos K_1 lo suficientemente grande. □

Volvamos a la demostración del Teorema 3.1.2. Supongamos que (2) no vale. Sea $b = \sup(\|e'_n\|)$ (que es finito, como vimos en la Observación 1.1.5). Para $K = 2$, por el lema anterior, debe existir un y_1 de norma uno y de desarrollo finito (digamos $y_1 = \sum_{n\in B_1} e'_n(y_1)e_n$) y un $m_1 \in \mathbb{N}$, tal que $\|G_{m_1}(y_1)\| \geq 2b$. Sea $0 < \varepsilon_1 < 1/2$ tal que si $e'_n(y_1) \neq 0$, se cumple que $|e'_n(y_1)| \geq \varepsilon_1$. Aplicando el lema nuevamente para $K = (2b)^2\varepsilon_1^{-1}$ y $A = B_1$, debe existir un y_2 de norma uno y de la forma $y_2 = \sum_{n\in B_2} e'_n(y_2)e_n$ con B_2 finito y disjunto con B_1, y un $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\|G_{m_2}(y_2)\| \geq (2b)^2\varepsilon_1^{-1}$. Tomamos ahora un $0 < \varepsilon_2 < 1/4$ tal que si $e'_n(y_2) \neq 0$, $|e'_n(y_2)| \geq \varepsilon_2$.

De esta forma, ahora podemos construir una sucesión (y_n) de norma uno para todo $n \in \mathbb{N}$, de la forma $y_n = \sum_{j\in B_n} e'_j(y_n)e_j$ con los B_n todos finitos y disjuntos entre sí, una sucesión decreciente $\varepsilon_n < 1/2^n$ que cumplen que si $e'_j(y_n) \neq 0$, entonces $|e'_j(y_n)| \geq \varepsilon_n$ y una sucesión de naturales m_n tal que $\|G_{m_n}(y_n)\| \geq (2b)^n \prod_{j=1}^{n-1} \varepsilon_j^{-1}$. Sea $x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_j}{b}\right) y_n$. Esta serie es convergente en X, dado que

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\prod_{j=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_j}{b}\Big)y_n\Big\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{n-1}|\varepsilon_j/b| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b2^{n-1}} < \infty.$$

Escribamos $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n e_n$. Veamos cómo son estos coeficientes b_n. Si $n \in B_k$, como los conjuntos B_s son disjuntos,

$$b_n = \left(\prod_{s=1}^{k-1}\frac{\varepsilon_s}{b}\right) e'_n(y_k).$$

Dado un índice j fijo, supongamos primero que $n \in B_k$ con $k \leq j$. Entonces

$$|b_n| \geq \prod_{s=1}^{k-1}\frac{\varepsilon_s}{b}|e'_n(y_k)| \geq \prod_{s=1}^{k}\frac{\varepsilon_s}{b}b \geq b\prod_{s=1}^{j}\frac{\varepsilon_s}{b}.$$

Por otro lado, si $k > j$

$$|b_n| = \left(\prod_{s=1}^{k-1}\frac{\varepsilon_s}{b}\right)|e'_n(y_k)| \leq b\prod_{s=1}^{k-1}\frac{\varepsilon_s}{b} \leq b\prod_{s=1}^{j}\frac{\varepsilon_s}{b}.$$

Por lo tanto,

$$\inf\{|b_n| : n \in \bigcup_{s=1}^{j} B_s\} \geq \max\{|b_n| : n \notin \bigcup_{s=1}^{j} B_s\}.$$

Entonces, si tomamos como $k = \sum_{s=1}^{j-1}|B_s| + m_j$,

$$G_k(x) = \sum_{n\leq j-1}\left(\prod_{s=1}^{n-1}\frac{\varepsilon_s}{b}\right)y_n + \left(\prod_{s=1}^{j-1}\frac{\varepsilon_s}{b}\right)G_{m_j}(y_j).$$

Y como $\left\| \sum_{n\leq j-1}(\prod_{s=1}^{n-1} \frac{\varepsilon_s}{b})y_n\right\|$ está acotado para todo j,

$$\|G_k(x)\| \geq \left(\prod_{s=1}^{j-1} \frac{\varepsilon_s}{b}\right) \left\|G_{m_j}(y_j)\right\| - C \geq 2^j b - C.$$

Entonces $G_k(x)$ no puede converger a x. □

Definición 3.1.4. Definimos la *constante cuasi-greedy* K_c como la menor constante que cumple simultáneamente:

$$\|G_m(x)\| \leq K_c\|x\| \qquad \text{y} \qquad \|x - G_m(x)\| \leq K_c\|x\|, \qquad x \in X.$$

Es claro que las bases greedy son cuasi-greedy. Veamos con un ejemplo que no vale la vuelta, de hecho, las bases cuasi-greedy no son necesariamente incondicionales. Primero definamos las siguientes notaciones, que nos serán útiles en este ejemplo.

Notación. Sean $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vamos a decir que $f \ll g$ si existe una constante C tal que $f(n) \leq Cg(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Y vamos a decir que $f \asymp g$ si existen dos constantes C_1, C_2 tal que $C_1 g(n) \leq f(n) \leq C_2 g(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.1.5. Sea X el espacio de todas las sucesiones $(x_1, x_2, \dots) \in \ell_2$ tal que

$$\|x\|_+ := \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big|\sum_{j=1}^{n} x_j/\sqrt{j}\Big| < \infty.$$

Si tomamos $\|\cdot\| = \max(\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_+)$, entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. En este espacio, la sucesión de vectores canónicos (e_n) forma una sucesión básica democrática y cuasi-greedy, pero no incondicional.

Veamos primero que es democrática. Para esto, tomemos $A \subset \mathbb{N}$ con $|A| = m$. Entonces,

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|_2 = \sqrt{m}$$

y

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|_+ = \sum_{j\in A} 1/\sqrt{j} \leq \sum_{j=1}^{m} 1/\sqrt{j} \leq 2\sqrt{m}.$$

Por lo tanto,

$$\sqrt{m} \leq \Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \leq 2\sqrt{m}$$

lo que nos dice que la sucesión básica es democrática.

Veamos que no es incondicional. Para eso, estimemos las siguientes normas. Si $m \geq 2$,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{j}} e_j\Big\| \geq \sum_{j=1}^{m} 1/j \geq \log(m).$$

Por otro lado,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\frac{(-1)^j}{\sqrt{j}}e_j\Big\|_2=\Big(\sum_{j=1}^{m}1/j\Big)^{1/2}\asymp\sqrt{\log(m)}$$

y, como la serie $\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j/j<\infty$, tenemos que sus sumas parciales están acotadas,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{j}}e_j\Big\|_+=\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{j=1}^{n}(-1)^j/j\Big|\leq C$$

para todo $m\in\mathbb{N}$. Esto nos dice que, si tomamos m suficientemente grande,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{j}}e_j\Big\|\asymp\sqrt{\log(m)},$$

y por lo tanto no puede ser incondicional.

Por último, probemos que es cuasi-greedy. Para eso, por el teorema anterior, nos alcanza con mostrar que existe una constante C tal que

$$\|G_m(x)\|\leq C,\qquad\text{para todo } m\in\mathbb{N},\quad\text{para todo }\ \|x\|=1.$$

Sea x tal que $\|x\|=1$ y sea $m\in\mathbb{N}$. Sea $A\subset\mathbb{N}$ tal que $G_m(x)=\sum_{j\in A}e_j'(x)e_j$. Como $\|x\|=1$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{\infty}|e_j'(x)|^2\leq 1,\qquad\text{y}\ \Big|\sum_{j=1}^{M}\frac{e_j'(x)}{\sqrt{j}}\Big|\leq 1\quad\text{para todo } M.$$

Es claro que $\|G_m(x)\|_2\leq\|x\|_2\leq 1$. Nos queda acotar $\|G_m(x)\|_+$. Sea $\alpha:=\min_{j\in A}|e_j'(x)|$. Si $\alpha=0$, entonces $G_m(x)=x$ y por lo tanto tenemos lo que queríamos. Si $\alpha>0$, para $N\in\mathbb{N}$ definimos:

$$A^+(N):=\{j\in A:j>N\},\qquad A^-(N):=\{j\in A:j\leq N\}.$$

Notemos que

$$\|G_m(x)\|_+=\sup_{N\in\mathbb{N}}\Big|\sum_{j\in A^-(N)}e_j'(x)j^{-1/2}\Big|.$$

Usando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}\sum_{j\in A^+(N)}|e_j'(x)|j^{-1/2}&\leq\Big(\sum_{j\in A^+(N)}|e_j'(x)|^{3/2}\Big)^{2/3}\Big(\sum_{j>N}j^{-3/2}\Big)^{1/3}\\&\ll N^{-1/6}\Big(\sum_{j\in A^+(N)}|e_j'(x)|^{3/2}(|e_j'(x)|/\alpha)^{1/2}\Big)^{2/3}\\&=(N\alpha^2)^{-1/6}\Big(\sum_{j\in A^+(N)}|e_j'(x)|^2\Big)^{2/3}\\&\ll(N\alpha^2)^{-1/6}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Sea $N_\alpha := [\alpha^{-2}]+1$, donde por $[\cdot]$ nos referimos a la parte entera inferior. Entonces, si $M \leq N_\alpha$,

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{j\in A^-(M)} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| &\leq \Big|\sum_{j=1}^{M} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| + \Big|\sum_{\substack{j\notin A^-(M)\\ j\leq M}} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| \\ &\leq 1+\alpha\sum_{j=1}^{M} j^{-1/2} \leq 1+2\alpha M^{1/2} \\ &\ll 1.\end{aligned}$$

Por otro lado, si $M > N_\alpha$, por (3.1) y por lo anterior,

$$\Big|\sum_{j\in A^-(M)} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| \leq \Big|\sum_{j\in A^-(N_\alpha)} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| + \Big|\sum_{j\in A^+(N_\alpha)} e'_j(x)j^{-1/2}\Big| \ll 1.$$

Por lo tanto,

$$\|G_m(x)\|_+ \leq C$$

lo que nos dice que la base es cuasi-greedy.

En el ejemplo anterior vimos que las bases cuasi-greedy no son necesariamente incondicionales. Sin embargo, tienen algunas propiedades en común. Vamos a probar dos lemas que nos serán útiles más adelante:

Lema 3.1.6. *Sea (e_n) una base con constante cuasi-greedy K_c, y sea A un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Entonces, para cualquier elección de signos $\varepsilon_j = \pm 1$, se tiene:*

$$\frac{1}{2K_c}\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{j\in A}\varepsilon_j e_j\Big\| \leq 2K_c\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \tag{3.2}$$

y, por lo tanto, para cualquier elección de números reales $(a_j)_{j\in A}$

$$\Big\|\sum_{j\in A} a_j e_j\Big\| \leq 2K_c \max_{j\in A}|a_j|\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|. \tag{3.3}$$

Demostración. Primero notemos que si $B \subset A$ y $\varepsilon > 0$, podemos definir

$$x = \sum_{j\in B}(1+\varepsilon)e_j + \sum_{j\in A\setminus B} e_j.$$

Como (e_n) es cuasi-greedy por hipótesis, el Teorema 3.1.2 nos dice que si $m = |B|$,

$$\|G_m(x)\| = \Big\|\sum_{j\in B}(1+\varepsilon)e_j\Big\| \leq K_c\Big\|\sum_{j\in B}(1+\varepsilon)e_j + \sum_{j\in A\setminus B} e_j\Big\|.$$

Haciendo $\varepsilon \to 0$, obtenemos

$$\Big\|\sum_{j\in B} e_j\Big\| \leq K_c\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \tag{3.4}$$

y por lo tanto, para cualquier elección de signos $\varepsilon_j = \pm 1$, se tiene

$$\Big\|\sum_{j\in A}\varepsilon_j e_j\Big\| \le \Big\|\sum_{j:\varepsilon_j=1} e_j\Big\| + \Big\|\sum_{j:\varepsilon_j=-1} e_j\Big\| \le 2K_c\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|.$$

Esto nos da la desigualdad del lado derecho.

Para la otra, usando nuevamente (3.4), tenemos que

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| = \Big\|\sum_{j:\varepsilon_j=1}\varepsilon_j e_j - \sum_{j:\varepsilon_j=-1}\varepsilon_j e_j\Big\| \le \Big\|\sum_{j:\varepsilon_j=1}\varepsilon_j e_j\Big\| + \Big\|\sum_{j:\varepsilon_j=-1}\varepsilon_j e_j\Big\| \le 2K_c\Big\|\sum_{j\in A}\varepsilon_j e_j\Big\|.$$

Con esto probamos (3.2).

Veamos que vale (3.3). Dividiendo a ambos lados por $\max|a_j|$ de ser necesario, podemos suponer que $|a_j| \le 1$ para todo $j \in A$. Fijemos un índice $j_0 \in A$, y tomemos un $t \in [0,1]$ tal que $2t-1 = a_{j_0}$. Para este j_0, fijemos $\varepsilon_{j_0} = 1$ y $\varepsilon'_{j_0} = -1$. Tomemos, para los otros $j \in A$, $\varepsilon_j = \varepsilon'_j = \pm 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}\Big\|a_{j_0}e_{j_0} + \sum_{j\neq j_0}\varepsilon_j e_j\Big\| &= \Big\|t\sum_{j\in A}\varepsilon_j e_j + (1-t)\sum_{j\in A}\varepsilon'_j e_j\Big\| \\ &\le t\Big\|\sum_{j\in A}\varepsilon_j e_j\Big\| + (1-t)\Big\|\sum_{j\in A}\varepsilon'_j e_j\Big\| \\ &\le 2K_c\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|.\end{aligned}$$

Podemos ahora modificar otro índice j_1 tomando una combinación convexa de $a_{j_0}e_{j_0}+e_{j_1}+\sum\varepsilon_j e_j$ y $a_{j_0}e_{j_0}+(-1)e_{j_1}+\sum\varepsilon_j e_j$, y haciendo la misma cuenta de arriba, vemos que vale

$$\Big\|a_{j_0}e_{j_0} + a_{j_1}e_{j_1} + \sum\varepsilon_j e_j\Big\| \le 2K_c\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|.$$

Ahora podemos seguir modificando los coeficientes hasta llegar a lo que buscamos. □

Lema 3.1.7. *Sea (e_n) una base con constante cuasi-greedy K_c. Supongamos que $x \in X$ tiene ordenamiento greedy ρ. Entonces:*

$$|e'_{\rho(m)}|\Big\|\sum_{j=1}^{m} e_{\rho(j)}\Big\| \le 4K_c^2\|x\|. \tag{3.5}$$

Por lo tanto, si A es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ y $(a_j)_{j\in A}$ son números reales,

$$\min_{j\in A}|a_j|\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| \le 4K_c^2\Big\|\sum_{j\in A} a_j e_j\Big\|. \tag{3.6}$$

Demostración. Probemos (3.5). Sean $a_j = e'_j(x)$, y $\varepsilon_j = \operatorname{sgn} a_j$. Tomamos $1/|a_{\rho(0)}| = 0$. Llamemos $H_j(x) = x - \sum_{i=1}^{j} a_{\rho(i)}e_{\rho(i)}$.

Dado $1 \leq j \leq m$, observemos que $H_{j-1}(x) - H_m(x) = \sum_{i=j}^{m} a_{\rho(i)} e_{\rho(i)}$, con lo cual

$$\Big(\frac{1}{|a_{\rho(j)}|} - \frac{1}{|a_{\rho(j-1)}|}\Big)(H_{j-1}(x) - H_m(x)) = \varepsilon_{\rho(j)} e_{\rho(j)} + \sum_{i=j+1}^{m} \frac{a_{\rho(i)}}{|a_{\rho(j)}|} e_{\rho(i)} - \sum_{i=j}^{m} \frac{a_{\rho(i)}}{|a_{\rho(j-1)}|} e_{\rho(i)}.$$

Sumando en j,

$$\begin{aligned} |a_{\rho(m)}| \Big\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{\rho(j)} e_{\rho(j)} \Big\| &= |a_{\rho(m)}| \Big\| \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{1}{|a_{\rho(j)}|} - \frac{1}{|a_{\rho(j-1)}|}\Big)(H_{j-1}(x) - H_m(x)) \Big\| \\ &\leq 2K_c \|x\| |a_{\rho(m)}| \sum_{j=1}^{m} \Big(\frac{1}{|a_{\rho(j)}|} - \frac{1}{|a_{\rho(j-1)}|}\Big) \\ &= 2K_c \|x\|. \end{aligned}$$

Aplicando (3.2),

$$|e'_{\rho(m)}| \Big\| \sum_{j=1}^{m} e_{\rho(j)} \Big\| \leq 2K_c |e'_{\rho(m)}| \Big\| \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_{\rho(j)} e_{\rho(j)} \Big\| \leq 4K_c^2 \left\| x \right\|.$$

Para ver (3.6), basta tomar $x = \sum_{j \in A} a_j e_j$ y aplicar (3.5). □

3.2 La función fundamental

Definición 3.2.1. Dada una base (e_n), definimos la *función fundamental* $\varphi(n)$ por

$$\varphi(n) = \sup_{|A| \leq n} \left\| \sum_{k \in A} e_k \right\|.$$

Observación 3.2.2. Muchas veces nos va a interesar estudiar el comportamiento asintótico de φ. Para esto, observemos que, para $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{|A|=n} \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \leq \varphi(n).$$

Por otro lado, si K es la constante de la base y $B \subset \mathbb{N}$ con $|B| \leq n$,

$$\Big\| \sum_{j \in B} e_j \Big\| \leq K \Big\| \sum_{j \in \tilde{B}} e_j \Big\| \leq K \sup_{|A|=n} \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\|$$

donde $\tilde{B} = B \cup \{\max B + 1\} \cup \cdots \cup \{\max B + |B| - n\}$. Tomando supremo sobre $|B| \leq n$,

$$\sup_{|A|=n} \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \leq \varphi(n) \leq K \sup_{|A|=n} \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\|$$

y por lo tanto tiene su mismo comportamiento asintótico.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplos 3.2.3. (1) Si $X = \ell_p$ y (e_n) es la base canónica. Para calcular φ, tomemos $|A| \leq n$,

$$\Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\|_p = |A|^{1/p} \leq n^{1/p}.$$

Tomando supremo, vemos que $\varphi(n) = n^{1/p}$.

(2) Si $X = c_0$ y (e_n) es la base canónica, no es difícil ver que $\varphi(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(3) En el Teorema 2.2.4 vimos que la base de Haar normalizada en $L_p[0,1]$ cumple que

$$c_p n^{1/p} \leq \Big\| \sum_{j\in A} H_j^{(p)} \Big\| \leq C_p n^{1/p}.$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $|A| = n$. Es decir, $\varphi(n) \asymp n^{1/p}$

Definición 3.2.4. La *función fundamental dual* está dada por

$$\varphi'(n) = \sup_{|A|\leq n} \left\| \sum_{k\in A} e'_k \right\|.$$

Notemos que φ y φ' son subaditivas (es decir, $\varphi(m+n) \leq \varphi(m)+\varphi(n)$) y crecientes. También se puede ver que $\varphi(n)/n$ y $\varphi'(n)/n$ son decrecientes, dado que, para cualquier conjunto A con $|A| = n$, tenemos:

$$\frac{1}{n}\Big\| \sum_{k\in A} e_k \Big\| = \frac{1}{n}\Big\| \frac{1}{n-1} \sum_{k\in A}\sum_{j\neq k} e_j \Big\| \leq \frac{1}{n-1}\varphi(n-1).$$

Para cualquier conjunto A y escalares $\{a_j : j \in A\}$, realizando una cuenta similar a la hecha para probar (3.3), se cumple

$$\Big\| \sum_{j\in A} a_j e_j \Big\| \leq \max_{j\in A} |a_j| \max_{\pm} \Big\| \sum_{j\in A} \pm e_j \Big\|.$$

Y por lo tanto

$$\Big\| \sum_{j\in A} a_j e_j \Big\| \leq 2\varphi(|A|) \max_{j\in A} |a_j|. \tag{3.7}$$

Observación 3.2.5. (e_k) es democrática con constante Δ si y sólo si

$$\Delta^{-1}\varphi(|A|) \leq \Big\| \sum_{k\in A} e_k \Big\| \leq \varphi(|A|) \qquad \text{para todo } |A| < \infty. \tag{3.8}$$

Veamos esto: si (e_n) es democrática es claro que cumple esta condición.

Supongamos ahora que vale (3.8) y probemos que es democrática. Para esto, sean $|A| \leq |B|$. Entonces,

$$\Big\| \sum_{k\in A} e_k \Big\| \leq \varphi(|A|) \leq \varphi(|B|) = \Delta(\Delta^{-1}\varphi(|B|)) \leq \Delta \Big\| \sum_{k\in B} e_k \Big\|.$$

Observación 3.2.6. Si $\varphi \asymp 1$ entonces (e_n) es equivalente a la base canónica de c_0. Para ver esto, supongamos $\varphi(m) \leq C$ para todo m. Por (3.7),

$$\Big\| \sum_{k\in A} a_k e_k \Big\| \leq \varphi(|A|) \max_{k\in A} |a_k| \leq C \max_{k\in A} |a_k|.$$

Por otro lado, supongamos que $\tilde{C}$ es tal que $1/\tilde{C} \leq \|e_n\| \leq \tilde{C}$ y K la constante de la base. Dado $k \in A$,

$$|a_k| \leq \tilde{C}\, \|a_k e_k\| \leq \tilde{C} 2K \Big\| \sum_{j\in A} a_j e_j \Big\|.$$

Tomando máximo en k, tenemos que

$$\max_{k\in A} |a_k| \leq \tilde{C} 2k \Big\| \sum_{k\in A} a_k e_k \Big\|.$$

Esto nos dice que (e_n) es equivalente a la base canónica de c_0.

Capítulo 4

Otros tipos de bases

En este capítulo vamos a estudiar dos tipos de bases "intermedias" entre greedy y cuasi-greedy. Probaremos teoremas que las caracterizan, tal como hicimos con las bases greedy.

4.1 Bases aproximadamente greedy

Para una base cualquiera (e_n) vamos a notar

$$\tilde{\sigma}_m(x) = \inf \left\{ \left\| x - \sum_{j \in A} e_j'(x) e_j \right\| : |A| \leq m \right\}.$$

Es decir, $\tilde{\sigma}_m$ estima la mejor aproximación a x de $m-$términos usando los coeficientes de la base. Notemos que $\sigma_m(x) \leq \tilde{\sigma}_m(x)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. El siguiente ejemplo muestra que no vale la igualdad.

Ejemplo 4.1.1. Sea X el espacio de todas las sucesiones $x = (x_1, x_2, \dots)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente. Tomemos en X la norma

$$\|x\| = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n=1}^{N} x_n \right|$$

y como base la base canónica. Si tomamos $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1/2^n e_n$. Entonces, si $m \in \mathbb{N}$, es claro que

$$\tilde{\sigma}_m(x) = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^m}.$$

Calculemos ahora $\sigma_m(x)$. Tomemos como $A = \{1, 2, \dots, m-1, m+1\}$. Si m es par, sea y con soporte en A tal que

$$x - y = \Big(-\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}, -\frac{1}{2^{m+1}}, \dots, -\frac{1}{2^{m+1}}, \underbrace{\frac{1}{2^m}}_{m}, -\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+2}}, \frac{1}{2^{m+3}}, \dots\Big).$$

Entonces, si $N \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\Big|\sum_{n=1}^{N}(x-y)_n\Big| \leq \frac{1}{2^{m+1}}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\sigma_m(x) \leq 1/2^{m+1} < \tilde{\sigma}_m(x)$.

Ahora, si m es impar, podemos hacer la misma cuenta tomando y con soporte en A que cumpla

$$x-y = (-\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+1}}, -\frac{1}{2^{m+1}}, \dots, -\frac{1}{2^{m+1}}, 0, \underbrace{\frac{1}{2^m}}_{m}, -\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^{m+2}}, \frac{1}{2^{m+3}}, \dots).$$

Definición 4.1.2. Una base (e_n) es *aproximadamente greedy* si existe una constante C tal que

$$\|x - G_m(x)\| \leq C\tilde{\sigma}_m(x)$$

Notemos que greedy $\Rightarrow$ aproximadamente greedy $\Rightarrow$ cuasi-greedy y en ningún caso vale la vuelta. Sin embargo, veremos que si pedimos que la base sea cuasi-greedy y democrática, entonces es aproximadamente greedy. Para esto, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.3. *Sea (e_n) una base cuasi-greedy con constante K_c y democrática con constante Δ. Entonces, para todo $x \in X$, si ρ es el ordenamiento cuasi-greedy se cumple:*

$$|e'_{\rho(m)}(x)| \leq \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(m)}\,\|x\|$$

y

$$\sup_{k>m}|e'_{\rho(k)}(x)| \leq \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(m+1)}\,\|x\|\,.$$

Demostración. La primera desigualdad se sigue de (3.8) y del Lema 3.1.7, que nos dicen que

$$|e'_{\rho(m)}(x)| \leq \frac{\Delta}{\varphi(m)}|e'_{\rho(m)}(x)|\Big\|\sum_{j=1}^{m}e_{\rho(j)}\Big\| \leq \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(m)}\|x\|.$$

La segunda desigualdad se desprende de la primera, observando que si $k > m$,

$$|e_{\rho(k)}(x)| \leq |e'_{\rho(m+1)}(x)| \leq \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(m+1)}\,\|x\|\,. \qquad \square$$

Teorema 4.1.4. *Sea (e_n) una base. Son equivalentes:*

(1) (e_n) es aproximadamente greedy.

(2) (e_n) es cuasi-greedy y democrática.

(3) Para algún (resp., todo) $\lambda > 1$ existe una constante $C = C_\lambda$, tal que

$$\left\| x - G_{[\lambda m]} x \right\| \leq C_\lambda \sigma_m(x),$$

donde $[\lambda m]$ representa la parte entera superior de λm.

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Es inmediato de la definición que (e_n) es cuasi-greedy, dado que $\tilde{\sigma}_m(x) \leq \sigma_m(x) \to 0$ cuando $m \to \infty$. Supongamos ahora que $|A| \leq |B|$. Sea $\delta > 0$ y

$$x = \sum_{j \in A} e_j + \sum_{j \in B \setminus A} (1+\delta) e_j.$$

Luego, si $r = |B \setminus A|$, tenemos $x - G_r(x) = \sum_{j \in A} e_j$. Además, como $r = |B| - |B \cap A| \geq |A| - |A \cap B| = |A \setminus B|$,

$$\tilde{\sigma}_r(x) \leq \left\| x - \sum_{j \in A \setminus B} e'_j(x) e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j \in B} e'_j(x) e_j \right\| \leq \left\| \sum_{j \in B} e_j \right\| + \delta \left\| \sum_{j \in B \setminus A} e_j \right\|.$$

Como (e_n) es aproxidamente greedy, juntando lo anterior, tenemos que

$$\left\| \sum_{j \in A} e_j \right\| = \| x - G_r(x) \| \leq C \tilde{\sigma}_r(x) \leq C \left(\left\| \sum_{j \in B} e_j \right\| + \delta \left\| \sum_{j \in B \setminus A} e_j \right\| \right).$$

Haciendo $\delta \to 0$, se sigue que (e_n) es democrática.

Veamos ahora que (2) implica (1). Supongamos (e_n) cuasi-greedy con constante K_c y democrática con constante Δ. Fijo $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, queremos ver que $\| x - G_m(x) \| \leq C \tilde{\sigma}_m(x)$. Sea $|A| = m$ tal que

$$G_m(x) = \sum_{j \in A} e'_j(x) e_j.$$

Sea $|B| = r \leq m$. Entonces

$$x - G_m(x) = \left(x - \sum_{j \in B} e'_j(x) e_j \right) + \sum_{j \in B \setminus A} e'_j(x) e_j - \sum_{j \in A \setminus B} e'_j(x) e_j.$$

Si llamamos $s = |A \setminus B|$ tenemos, por la definición de $G_m(x)$, que

$$\sum_{j \in A \setminus B} e'_j(x) e_j = G_s\Big(x - \sum_{j \in B} e'_j(x) e_j \Big).$$

Además, como $|B| \leq |A|$, tenemos que $|B\backslash A| \leq s$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j\in B\backslash A} e_j'(x)e_j \Big\| &\leq 2K_c \left(\max_{j\in B\backslash A} |e_j'(x)| \right) \varphi(s) && \text{(por (3.3))} \\
&\leq 2K_c \Big(\min_{j\in A\backslash B} |e_j'(x)| \Big) \varphi(s) \\
&\leq 8K_c^3 \Delta \Big\| \sum_{j\in A\backslash B} e_j'(x)e_j \Big\| && \text{(por Lema 4.1.3)} \\
&= 8K_c^3 \Delta \Big\| G_s\Big(x - \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j \Big) \Big\| \\
&\leq 8K_c^4 \Delta \Big\| \Big(x - \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j \Big) \Big\|.
\end{aligned}$$

Se sigue que

$$\begin{aligned}
\|x - G_m(x)\| &\leq \Big\| \sum_{j\in B\backslash A} e_j'(x)e_j \Big\| + \Big\| G_s\Big(x - \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j \Big) \Big\| + \Big\| x - \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j \Big\| \\
&\leq (8K_c^4\Delta + K_c + 1) \Big\| x - \sum_{j\in B} e_j'(x)e_j \Big\|.
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre todos los conjuntos $|B| \leq m$,

$$\|x - G_m(x)\| \leq (8K_c^4\Delta + K_c + 1)\tilde{\sigma}_m(x).$$

Esto nos dice que la base (e_n) es aproximadamente greedy. Por lo tanto, probamos que (1) y (2) son equivalentes.

Probemos ahora que (2) implica (3) para todo $\lambda > 1$. Sean $m, r \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in X$ y para cada $\varepsilon > 0$, elegimos un y tal que $\|y\| < \sigma_m(x) + \varepsilon$. Notemos que este y va a ser de la forma

$$y = x - \sum_{j\in A} \alpha_j e_j = \sum_{j\notin A} e_j'(x)e_j + \sum_{j\in A} e_j'(y)e_j,$$

con A un conjunto de cardinalidad m. Sea $v = \sum_{j\notin A} e_j'(x)e_j$ y sea $B \subset \mathbb{N}$, $|B| = r$ tal que

$$G_r(y) = \sum_{j\in B} e_j'(y)e_j.$$

Sea $s = |A \cap B|$ donde $0 \leq s \leq \min(r, m)$. Entonces

$$\begin{aligned}
y - G_r(y) &= \sum_{j\notin A} e_j'(x)e_j + \sum_{j\in A\backslash B} e_j'(y)e_j - \sum_{j\in B\backslash A} e_j'(y)e_j \\
&= \sum_{j\notin A} e_j'(x)e_j + \sum_{j\in A\backslash B} e_j'(y)e_j - \sum_{j\in B\backslash A} e_j'(x)e_j.
\end{aligned}$$

Por otro lado, como $|B\backslash A| = r - s$, por definición de $G_r(y)$ se tiene que

$$v - G_{r-s}(v) = \sum_{j\notin A} e_j'(x)e_j - \sum_{j\in B\backslash A} e_j'(x)e_j.$$

Por lo tanto,

$$(y - G_r(y)) - (v - G_{r-s}(v)) = \sum_{j \in A \setminus B} e'_j(y) e_j.$$

Por el Lema 4.1.3,

$$\max_{j \in A \setminus B} |e'_j(y)| \leq \sup_{j > r} |e'_{\rho(j)}(y)| \leq \frac{4K_c^2 \Delta}{\varphi(r+1)} \|y\|.$$

Entonces, por (3.3),

$$\begin{aligned}\|(y - G_r(y)) - (v - G_{r-s}(v))\| = \Big\| \sum_{j \in A \setminus B} e'_j(y) e_j \Big\| &\leq 2K_c \max_{j \in A \setminus B} |e'_j(y)| \Big\| \sum_{j \in A \setminus B} e_j \Big\| \\ &\leq \frac{8K_c^3 \Delta \varphi(m)}{\varphi(r+1)} \|y\|.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\tilde{\sigma}_{m+r}(x) \leq \tilde{\sigma}_{m+r-s}(x) \leq \|v - G_{r-s}(v)\|.$$

Por lo tanto, usando lo que vimos más arriba,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{m+r}(x) &\leq \|v - G_{r-s}(v)\| \\ &\leq \|y - G_r(y)\| + \|(y - G_r(y)) - (v - G_{r-s}(v))\| \\ &\leq K_c \|y\| + \frac{8K_c^3 \Delta \varphi(m)}{\varphi(r+1)} \|y\|.\end{aligned}$$

Dado que $\|y\| < \sigma_m(x) + \varepsilon$ y ε es arbitrario, tenemos

$$\tilde{\sigma}_{m+r}(x) \leq \left(K_c + \frac{8K_c^3 \Delta \varphi(m)}{\varphi(r+1)} \right) \sigma_m(x).$$

Por último, sea $\lambda > 1$ y $r = [\lambda m] - m$. Habíamos visto en la sección 3.2 que $\varphi(n)/n$ es decreciente, con lo cual tenemos que $\varphi(m)/\varphi(r+1) \leq m/(r+1)$. A su vez, $m/(r+1) \leq 1/(\lambda - 1)$ lo que resulta en

$$\tilde{\sigma}_{[\lambda m]}(x) \leq \left(\frac{8K_c^3 \Delta}{\lambda - 1} + K_c \right) \sigma_m(x).$$

Esto, teniendo en cuenta que (e_n) es aproximadamente greedy, implica (3) con $C_\lambda \asymp (\lambda - 1)^{-1}$.

Nos queda ver que (3) implica (2). Sea $\lambda > 1$. Veamos primero que (e_n) resulta cuasi-greedy. Para esto, dado $m \in \mathbb{N}$, elegimos un n tal que $[(n-1)\lambda] \leq m < [n\lambda]$. Observemos que la resta $[n\lambda] - [(n-1)\lambda] \leq 3\lambda$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\|x - G_m(x)\| &\leq \left\| x - G_{[n\lambda]}(x) \right\| + \left\| (x - G_{[n\lambda]}(x)) - (x - G_m(x)) \right\| \\ &\leq C_\lambda \sigma_n(x) + \left\| \sum_{j=m+1}^{[n\lambda]} e'_{\rho(j)}(x) e_{\rho(j)} \right\| \\ &\leq C_\lambda \sigma_n(x) + \sum_{j=m+1}^{[n\lambda]} |e'_{\rho(j)}(x)| \left\| e_{\rho(j)} \right\| \\ &\leq C_\lambda \sigma_n(x) + 3\lambda C |e'_{\rho(m)}|\end{aligned}$$

donde C es tal que $\|e_n\| \leq C$. Esta última expresión tiende a cero cuando m es grande. Supongamos que sabemos que $\left\| \sum_{j \in D} e_j \right\| \geq \varphi(m)/C_\lambda$. Veamos que esto nos dice que (e_n) es democrática. Dado m, podemos encontrar n tal que $[(n-1)\lambda] < m \leq [n\lambda]$. Notemos que, por ser φ multiplicativa, tenemos que $\varphi(m) \leq \varphi([n\lambda]) \leq [\lambda]\varphi(n)$. Sea $|A| = m$ y $|D| = [n\lambda]$ tal que $A \subset D$.

$$\Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \geq \Big\| \sum_{j \in D} e_j \Big\| - \Big\| \sum_{j \in D \setminus A} e_j \Big\| \geq 1/C_\lambda \varphi(n) - 3\lambda$$
$$\geq \frac{1}{[\lambda] C_\lambda} \varphi(m) - 3\lambda.$$

Por la Observación 3.2.6, sabemos que si φ es acotada, entonces (e_n) es equivalente a la base canónica de c_0, que es democrática. Si no, podemos un elegir un m_0 tal que para todos los $m \geq m_0$,

$$\frac{1}{[\lambda] C_\lambda} \varphi(m) - 3\lambda \geq \frac{1}{2[\lambda] C_\lambda} \varphi(m)$$

y por lo tanto, existe un constante Δ tal que $\left\| \sum_{j \in A} e_j \right\| \geq \Delta^{-1} \varphi(|A|)$ para todo A finito. Nos falta probar que $\left\| \sum_{j \in D} e_j \right\| \geq \varphi(m)/C_\lambda$.

Sea $|A| \leq m$. Para todo subconjunto B de cardinalidad $[\lambda m]$ disjunto con A tenemos (tomando como $x = \sum_{j \in A} e_j + (1+\delta) \sum_{j \in B} e_j$)

$$\Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \leq C_\lambda \sigma_m \left(\sum_{j \in A \cup B} e_j \right) \leq C_\lambda \Big\| \sum_{j \in D} e_j \Big\|$$

con $D \subset A \cup B$ y $|D| \geq [\lambda m]$. Entonces, maximizando sobre todos los subconjuntos $|A| \leq m$ obtenemos

$$\inf_{|D| = [\lambda m]} \Big\| \sum_{j \in D} e_j \Big\| \geq \varphi(m)/C_\lambda$$

y por lo tanto (e_n) es democrática. □

4.2 Bases parcialmente greedy

Definición 4.2.1. Una base (e_n) es *parcialmente greedy* si existe una constante C tal que, para todo $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$, tenemos

$$\|x - G_m(x)\| \leq C \|R_m(x)\|$$

donde $R_m(x) = \sum\limits_{j>m} e_j'(x) e_j$. Es decir, $G_m(x)$ aproxima al menos tan bien como $S_m(x)$.

Observación 4.2.2. Dado que $\sigma_m(x) \leq \tilde{\sigma}_m(x) \leq \|R_m(x)\|$ y $\|R_m(x)\| \to 0$ cuando $m \to \infty$, tenemos que:

$$\text{greedy} \Rightarrow \text{aproximadamente greedy} \Rightarrow \text{parcialmente greedy} \Rightarrow \text{cuasi-greedy.}$$

Definición 4.2.3. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{N}$. Notamos $A < B$ si para todo $m \in A$, $n \in B$ tenemos que $m < n$. Definimos que una base (e_n) es *conservativa* si existe una constante Γ tal que

$$\Big\| \sum_{k \in A} e_k \Big\| \leq \Gamma \Big\| \sum_{k \in B} e_k \Big\| \qquad \text{si } \ |A| \leq |B| \quad \text{y} \quad A < B.$$

Observación 4.2.4. Veamos que en la definición anterior basta tomar conjuntos A, B tal que $|A| = |B|$ y $A < B$. Supongamos que A, B son tal que $|A| < |B|$, $A < B$. Entonces debe existir un subonjunto $\tilde{B} \subset B$ tal que $|\tilde{B}| = |A|$ y $A < \tilde{B} < B \backslash \tilde{B}$ (basta tomar los $|A|$ primeros elementos de B).

Como (e_n) es base, vale que

$$\Big\| \sum_{j \in \tilde{B}} e_j \Big\| \leq C \Big\| \sum_{j \in B} e_j \Big\|$$

donde C es la constante de la base.

Pero entonces

$$\Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \leq \Gamma \Big\| \sum_{j \in \tilde{B}} e_j \Big\| \leq C\Gamma \Big\| \sum_{j \in B} e_j \Big\|$$

Veamos el análogo a los Teoremas 2.1.7 y 4.1.4.

Teorema 4.2.5. *Una base (e_n) es parcialmente greedy si sólo si es cuasi-greedy y conservativa.*

Demostración. Supongamos primero que (e_n) es parcialmente greedy con constante K_p. Sabemos que (e_n) es cuasi-greedy. Para ver que es conservativa, sean A, B subconjuntos tal que $A < B$ y $|A| \leq |B| = m$. Sea $r = \max A$ y sea $D = [1, r] \backslash A$. Dado $\delta > 0$, definimos

$$x = \sum_{j \in A} e_j + (1 + \delta) \sum_{j \in D \cup B} e_j.$$

Observemos que $|D \cup B| = r$, con lo cual

$$x - G_r(x) = \sum_{j \in A} e_j.$$

Y además,

$$R_r(x) = (1 + \delta) \sum_{j \in B} e_j.$$

Haciendo $\delta \to 0$, tenemos que:

$$\Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \leq K_p \Big\| \sum_{j\in B} e_j \Big\|$$

con lo cual la base resulta conservativa.

Supongamos ahora que (e_n) es cuasi-greedy con constante K_c y conservativa con constante Γ. Para ver que es parcialmente greedy, sea $x \in X$ y $m \in \mathbb{N}$; y sea ρ el ordenamiento greedy. Definimos $D = \{\rho(j) : j \leq m,\ \rho(j) \leq m\}$ y $B = \{\rho(j) : j \leq m,\ \rho(j) > m\}$. Sea $A = [1, m]\backslash D$. Entonces $|A| = |B| = r$ y $A < B$.

Observemos que:

$$\begin{aligned} x - G_m(x) = x - \sum_{j\in D\cup B} e'_j(x)e_j &= x - \left(\sum_{j=1}^{m} e'_j(x)e_j - \sum_{j\in A} e'_j(x)e_j + \sum_{j\in B} e'_j(x)e_j \right) \\ &= R_m(x) + \sum_{j\in A} e'_j(x)e_j - \sum_{j\in B} e'_j(x)e_j. \end{aligned}$$

Además,

$$\Big\| \sum_{j\in B} e'_j(x)e_j \Big\| = \|R_m(x) - G_r(R_m(x))\| \leq K_c \|R_m x\|$$

y

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j\in A} e'_j(x)e_j \Big\| &\leq 2K_c \max_{j\in A} |e'_j(x)| \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \\ &\leq 2K_c\Gamma \min_{j\in B} |e'_j(x)| \Big\| \sum_{j\in B} e_j \Big\| \\ &\leq 8K_c^3\Gamma \Big\| \sum_{j\in B} e'_j(x)e_j \Big\| && \text{(por (3.5))} \\ &\leq 8K_c^4\Gamma \|R_m(x)\|. \end{aligned}$$

Juntando estas desigualdades, vemos que

$$\|x - G_m(x)\| \leq (1 + K_c + 8K_c^4\Gamma) \|R_m(x)\|$$

lo que nos dice que (e_n) es conservativa. □

Capítulo 5

Dualidad

En este capítulo nos interesa estudiar qué podemos decir sobre la sucesión biortogonal asociada a una base (e_n). En la primer sección vamos a estudiar el concepto de *bases bidemocráticas*, que nos dará una forma natural de extender el concepto de bases democráticas. Luego, utilizaremos esto para caracterizar cuándo podemos decir que ambas (e_n) y (e'_n) son aproximadamente greedy. Este capítulo está basado en [Dil].

5.1 Bases bidemocráticas

Recordemos que en el Capítulo 3 habíamos definido la función fundamental φ como

$$\varphi(n) = \sup_{|A| \leq n} \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\|$$

y la función fundamental dual φ' como

$$\varphi'(n) = \sup_{|A| \leq n} \Big\| \sum_{j \in A} e'_j \Big\|.$$

Definición 5.1.1. Sea (e_n) una base democrática. Vamos a decir que (e_n) tiene la *propiedad de regularidad superior* (PRS) si existe un número entero $r > 2$ tal que

$$\varphi(rn) \leq \frac{1}{2} r \varphi(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Observación 5.1.2. Se desprende de la definición que $\varphi(r^k n) \leq 2^{-k} r^k \varphi(n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que tener esta propiedad es equivalente a la existencia de un $0 < \beta < 1$ y una constante C tal que, si $n > m$,

$$\varphi(m) \leq C \left(\frac{m}{n} \right)^{\beta} \varphi(n). \tag{5.1}$$

Supongamos que (e_n) tiene la PRS. Sea $m > n$ y k tal que $r^{k-1} \leq \frac{m}{n} \leq r^k$, con lo cual tenemos

$$\varphi(m) = \varphi\left(\frac{m}{n}n\right) \leq \varphi(r^k n) \leq 2^{-k} r^k \varphi(n).$$

Fijemos β tal que $\left(\frac{r}{2}\right)^k \leq r^{k\beta}$. Basta tomarlo tal que $(1-\beta)\ln(r) \leq \ln(2)$. Entonces,

$$2^{-k} r^k \varphi(n) \leq r^{k\beta}\varphi(n) = r^{(k-1)\beta} r^\beta \varphi(n) \leq \left(\frac{m}{n}\right)^\beta r^\beta \varphi(n).$$

Tomando $C = r^\beta$ tenemos (5.1)

Supongamos ahora que vale (5.1). Tenemos que, para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(rn) \leq C r^\beta \varphi(n) \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para probar que (e_n) tiene la PRS basta con encontrar un $r > 2$ tal que $Cr^\beta \leq \frac{1}{2}r$ y esto lo podemos hacer pues $r^{1-\beta} \to \infty$ cuando $r \to \infty$.

Definición 5.1.3. Sea (e_n) una base democrática. Vamos a decir que (e_n) tiene la *propiedad de regularidad inferior* (PRI) si existe un $r > 1$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\varphi(rn) \geq 2\varphi(n).$$

Observación 5.1.4. Al igual que antes, que (e_n) tenga la PRI es equivalente a la existencia de un $0 < \alpha < 1$ y una constante c tal que, si $m > n$,

$$\varphi(m) \geq c\left(\frac{m}{n}\right)^\alpha \varphi(n).$$

Recordemos algunas definiciones:

Definición 5.1.5. Sea X un espacio de Banach. Decimos que X tiene tipo p para $1 \leq p \leq 2$ si existe una constante C tal que

$$\left(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right\|^p\right)^{1/p} \leq C\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p\right)^{1/p}, \qquad x_1,\dots,x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}$$

donde Ave denota el promedio.

La menor constante C que cumple esto se llama *la constante de tipo* p y la denotaremos $T_p(X)$. Observemos que todo espacio tiene tipo 1 (por desigualdad triangular). Decimos que X tiene *tipo no trivial* si X tiene tipo p para algún $p > 1$.

Vamos a definir también que X tenga cotipo q para $2 \leq q \leq \infty$ si existe una constante C tal que

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q\right)^{1/q} \leq C\left(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\left\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\right\|^q\right)^{1/q}, \qquad x_1,\dots,x_n \in X,\ n \in \mathbb{N}.$$

A la menor de las constantes C que cumplen esto la llamamos *la constante de cotipo* q y la denotaremos $C_q(X)$. Como antes, se puede ver que todo espacio tiene cotipo ∞. Para ver esto, observemos que el caso $n = 1$ es trivial y razonemos por inducción. Si $n = 2$, lo que tenemos que ver es que para cualquier $x, y \in X$ se cumple

$$\max(\|x\|, \|y\|) \leq C\frac{1}{2^2}(\|x-y\| + \|x+y\| + \|-x-y\| + \|-x+y\|) = \frac{1}{2}(\|x-y\| + \|x+y\|).$$

Es fácil ver que esto se cumple con $C = 1$ por la desigualdad tringular. Para el caso general tomemos $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n-1}$ y $\overline{x} = (x_2, \dots, x_n)$, y definamos

$$\overline{\varepsilon} \cdot \overline{x} = \sum_{j=2}^{n} \varepsilon_j x_j \in X.$$

Entonces, lo que debemos probar es que

$$\frac{1}{2^n}\Big(\sum_{\overline{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \overline{\varepsilon} \cdot \overline{x}\|\Big) \geq \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|.$$

Tomando como $y = \overline{\varepsilon} \cdot \overline{x}$ y usando el caso $n = 2$, obtenemos

$$\sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + y\| \geq 2\max(\|x_1\|, \|y\|).$$

Pero entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\Big(\sum_{\overline{\varepsilon}} \sum_{\varepsilon_1 = \pm 1} \|\varepsilon_1 x_1 + \overline{\varepsilon} \cdot \overline{x}\|\Big) &\geq \max\Big(\|x_1\|, \frac{1}{2^{n-1}}\Big\|\sum_{\overline{\varepsilon}} \overline{\varepsilon} \cdot \overline{x}\Big\|\Big) \\ &\geq \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|.\end{aligned}$$

Decimos que X tiene *cotipo no trivial* si X tiene cotipo q para algún $q < \infty$.

Proposición 5.1.6. *(1) Si (e_n) es una base aproximadamente greedy de un espacio de Banach con cotipo no trivial, entonces (e_n) tiene la propiedad de regularidad inferior.*

(2) Si (e_n) es una base aproximadamente greedy de un espacio de Banach con tipo no trivial, entonces (e_n) tiene la propiedad de regularidad inferior y superior.

Demostración. Probemos (1). Sabemos que ser aproximadamente greedy es equivalente a ser cuasi-greedy y democrática. Sea K_c la constante cuasi-greedy y Δ la constante democrática. Supongamos que X tiene cotipo $q < \infty$ con constante $C_q(X)$. Tomemos conjuntos $B_1, \dots, B_m$ disjuntos dos a dos con $|B_k| = n$ y sea $A = \cup_{k=1}^{n} B_k$.

Vimos que vale $\varphi(n) \leq \Delta\Big\|\sum_{j \in B_k} e_j\Big\|$ para $k = 1, \dots, m$. Además, el lema 3.1.6, nos decía que, para cualquier elección de signos,

$$\Big\|\sum_{j \in B_k} e_j\Big\| \leq 2K_c\Big\|\sum_{j \in B_k} \varepsilon_j e_j\Big\|.$$

Usando estas dos cosas,

$$
\begin{aligned}
m^{1/q}\varphi(n) &\leq \Delta \left(\sum_{k=1}^{m} \Big\| \sum_{j \in B_k} e_j \Big\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \Delta 2K_c \left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j \in B_k} \varepsilon_j e_j \Big\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \Delta 2K_c C_q(X) \left(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j \in A} \varepsilon_j e_j \Big\|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \Delta 4K_c^2 C_q(X) \Big\| \sum_{j \in A} e_j \Big\| \\
&\leq \Delta 4K_c^2 C_q(X) \varphi(mn).
\end{aligned}
$$

Veamos que esto implica que (e_n) tiene la PRI, para alguna constante c y $\alpha = 1/q$. Sean $m > n$ y k tal que $kn \leq m \leq (k+1)n$. Por lo que vimos recién, y tomando $c_1 = (\Delta 4K^2 C_q(X))^{-1}$

$$
\varphi(m) \geq \varphi(kn) \geq c_1 k^{1/q} \varphi(n) \geq c(k+1)^{1/q} \varphi(n) \geq c \left(\frac{m}{n} \right)^{1/q} \varphi(n).
$$

Ahora veamos (2). Como tipo no trivial implica cotipo no trivial obtenemos la PRI (ver Teorema 11.1.14 de [Al]). Veamos que tiene la PRS. Para esto, al igual que antes,

$$
\begin{aligned}
\varphi(nm) &\leq 2K_c \Delta \left(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j \in A} \varepsilon_j e_j \Big\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq 2K_c \Delta T_p(X) \left(\sum_{k=1}^{m} \operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j = \pm 1} \Big\| \sum_{j \in B_k} \varepsilon_j e_j \Big\|^p \right)^{1/p} \\
&\leq 4K_c^2 \Delta T_p(X) m^{1/p} \varphi(n).
\end{aligned}
$$

Esto implica que (e_n) tiene la PRS para alguna constante C y $\beta = 1/p$. □

Definición 5.1.7. Decimos que una base (e_n) es *bidemocrática* si existe una constante Δ tal que

$$
\varphi(n)\varphi'(n) \leq \Delta n.
$$

Proposición 5.1.8. *Si (e_n) es bidemocrática con constante Δ, entonces (e_n) y (e'_n) son democráticas (con constante Δ) y ambas cumplen que, para cada conjunto $A \subset \mathbb{N}$ finito,*

$$
\frac{1}{2\Delta}\varphi(|A|) \leq \Big\| \sum_{j \in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \leq 2\varphi(|A|) \quad y \quad \frac{1}{2\Delta}\varphi(|A|) \leq \Big\| \sum_{j \in A} \varepsilon_j e'_j \Big\| \leq 2\varphi(|A|)
$$

Demostración. Sea A un conjunto finito. Tenemos que

$$|A| \leq \Big\| \sum_{j\in A} e'_j \Big\| \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \leq \varphi'(|A|) \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\|.$$

Por lo tanto,

$$\Delta^{-1}\varphi(|A|) \leq (\Delta|A|)^{-1}\varphi(|A|)\varphi'(|A|) \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \leq \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\|.$$

Esto nos dice que (e_n) es democrática con constante Δ. Podemos proceder análogamente para (e'_n).

Sea $(\varepsilon_j)_{j\in A}$ una elección de signos ± 1. Luego,

$$|A| \leq \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e'_j \Big\| \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \leq 2\varphi'(|A|) \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\|.$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{2\Delta}\varphi(|A|) \leq \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \leq 2\varphi(|A|).$$

Podemos proceder análogamente para (e'_n). $\square$

Proposición 5.1.9. *Una base (e_n) es bidemocrática si y sólo si existe una constante C tal que, para todo $A \subset \mathbb{N}$ finito,*

$$\Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \Big\| \sum_{j\in A} e'_j \Big\| \leq C|A|$$

Demostración. Una implicación es clara. Supongamos entonces que vale la cota de arriba con $C \geq 1$ y veamos que (e_n) es bidemocrática. Pasando a una norma equivalente de ser necesario, podemos asumir que (e_n) y (e'_n) son monótonas. Por definición de φ y φ', existen dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$ con $|A| \leq n$ y $|B| \leq n$ tal que

$$\Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \geq \frac{1}{2}\varphi(n), \qquad \Big\| \sum_{j\in B} e'_j \Big\| \geq \frac{1}{2}\varphi'(n).$$

Como estamos suponiendo que (e_n) y (e'_n) son monotónas, podemos asumir que $|A| = |B| = n$. Sean $D = A \cup B$ y $E = D\backslash A$.

Supongamos que vale $\left\|\sum_{j\in D} e_j\right\| \geq (1/8C)\varphi(n)$ y $\left\|\sum_{j\in D} e'_j\right\| \geq (1/8C)\varphi'(n)$. En este caso obtenemos

$$\varphi(n)\varphi'(n) \leq 2^6C^2 \Big\| \sum_{j\in D} e_j \Big\| \Big\| \sum_{j\in D} e'_j \Big\| \leq 2^6C^3|D| \leq 2^7C^3 n.$$

Supongamos ahora que falla alguna de las dos desigualdades. Basta analizar alguno de los casos, supongamos que vale $\left\|\sum_{j\in D} e_j\right\| < (1/8C)\varphi(n)$. Entonces,

$$\Big\| \sum_{j\in E} e_j \Big\| \geq \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| - \Big\| \sum_{j\in D} e_j \Big\| > \frac{\varphi(n)}{2} - \frac{\varphi(n)}{8C} > \frac{\varphi(n)}{4}.$$

Por otro lado, como debe valer $\left\|\sum_{j\in E} e_j\right\| \left\|\sum_{j\in E} e'_j\right\| \le Cn$, tenemos

$$\Big\|\sum_{j\in E} e'_j\Big\| \le 4Cn\varphi(n)^{-1}.$$

Por el mismo motivo, tenemos

$$\Big\|\sum_{j\in A} e'_j\Big\| \le 2Cn\varphi(n)^{-1}.$$

Por lo tanto,

$$\Big\|\sum_{j\in D} e'_j\Big\| \le 6Cn\varphi(n)^{-1}$$

y entonces

$$n \le |D| \le \Big\|\sum_{j\in D} e_j\Big\|\Big\|\sum_{j\in D} e'_j\Big\| \le \left(\frac{\varphi(n)}{8C}\right)\left(\frac{6Cn}{\varphi(n)}\right) = \frac{3n}{4}$$

lo que nos da una contradicción. □

Proposición 5.1.10. *Sea* (e_n) *una base cuasi-greedy y democrática. Si además* (e_n) *tiene la PRS, entonces* (e_n) *es bidemocrática.*

Demostración. Supongamos que (e_n) es cuasi-greedy con constante K_c y democrática con constante Δ. Supongamos que además tiene la PRS, es decir, $\varphi(m) \le C(m/n)^\beta\varphi(n)$ para todo $m > n$. Sea A un subconjunto finito de $\mathbb{N}$ de cardinalidad n . Elegimos $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $\sum_{j\in A} e'_j(x) > \frac{1}{2}\Big\|\sum_{j\in A} e'_j\Big\|$. Sea ρ el ordenamiento greedy de x.

En el Lema 4.1.3 habíamos visto que $|e'_{\rho(k)}(x)| \le \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(k)}\|x\|$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi(n)\Big\|\sum_{j\in A} e'_j\Big\| &\le 2\varphi(n)\sum_{j\in A}|e'_j(x)| \\
&\le 2\varphi(n)\sum_{k=1}^{n}|e'_{\rho(k)}(x)| \\
&\le 8K_c^2\Delta\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi(n)}{\varphi(k)} \\
&\le 8K_c^2\Delta C n^\beta\sum_{k=1}^{n}k^{-\beta} \\
&\le 8K_c^2\Delta C n^\beta\frac{n^{1-\beta}}{1-\beta} = C_1 n.
\end{aligned}$$

Tomando supremo sobre los conjuntos $|A| \le n$,

$$\varphi(n)\varphi'(n) \le C_1 n.$$ □

Corolario 5.1.11. *Sea* (e_n) *una base cuasi-greedy de un espacio de Hilbert. Entonces* (e_n) *es bidemocrática.*

Para probar este corolario, primero recordemos dos resultados:

Teorema 5.1.12 (Desigualdad de Kahane-Khintchine)**.** *Para cada $1 \leq p < \infty$ existe una constante C_p tal que para todo espacio de Banach X y toda sucesión finita (x_n) de elementos de X, se cumple que*

$$\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \Big\| \leq \Big(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \Big\|^p \Big)^{1/p} \leq C_p \operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \Big\|.$$

Teorema 5.1.13 (Ley del paralelogramo generalizada)**.** *Sea H un espacio de Hilbert, y sea (x_j) una sucesión finita de elementos de H. Entonces,*

$$\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j x_j \Big\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2 .$$

Ambos resultados pueden encontrarse, por ejemplo, en [Al]. Veamos un teorema de [Wot] que nos dirá que, en las condiciones del Corolario 5.1.11, la base (e_n) es democrática.

Definición 5.1.14. Dada una sucesión (a_n), notamos (a_n^*) al reordenamiento no decreciente de $(|a_n|)$. Definimos

$$\|(a_n)\|_{2,\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n} a_n^* \qquad \text{y} \qquad \|(a_n)\|_{2,1} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^*}{\sqrt{n}}.$$

Teorema 5.1.15. *Sea (e_n) una base cuasi-greedy, normalizada de un espacio de Hilbert H. Entonces existen constantes c, C tal que si $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e_n$,*

$$c \|(a_n)\|_{2,\infty} \leq \|x\| \leq C \|(a_n)\|_{2,1} .$$

Demostración. Supongamos (e_n) cuasi-greedy con constante K_c, y sea A un subconjunto de los naturales finito. Recordemos que, por el Lema 3.1.6, para cualquier elección de signos (ε_j) se cumple

$$\frac{1}{2K_c} \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \leq \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \leq K_c \Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\|.$$

Tomando promedio y usando el Teorema 5.1.12 con $p = 2$, vemos que

$$\Big\| \sum_{j\in A} e_j \Big\| \asymp \operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \asymp \Big(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Por otro lado, por el Teorema 5.1.13, sabemos que

$$\Big(\operatorname*{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1} \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\|^2 \Big)^{1/2} = \Big(\sum_{j\in A} \|e_j\|^2 \Big)^{1/2} = \sqrt{|A|},$$

y por lo tanto, $\left\|\sum_{j\in A} e_j\right\| \asymp \sqrt{|A|}$. Sea $x = \sum a_n e_n \in H$ tal que $\max |a_n| \leq 1$. Reordenemos los (a_n) de forma tal que $|a_n| \searrow 0$, y llamemos $n_k = |\{n : |a_n| \geq 2^{-k}\}|$. Pongamos $n_0 = 0$. Entonces,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\Big\| = \Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s e_s\Big\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big\|\sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s e_s\Big\|.$$

Otra vez usando el Lema 3.1.6, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\Big\|\sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} a_s e_s\Big\| &\leq 2K_c \sum_{k=1}^{\infty} \max_{n_{k-1}+1\leq s\leq n_k} |a_s| \Big\|\sum_{s=n_{k-1}+1}^{n_k} x_s\Big\| \\ &\leq 2K_c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}\sqrt{n_k} \\ &= 2K_c \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k+1}\sqrt{n_k}.\end{aligned}$$

Además, como para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} |a_n| \frac{1}{\sqrt{n}} \geq 2^{-k+1}\sqrt{n_k},$$

sumando en k tenemos

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\Big\| \leq 4K_c \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{\sqrt{n}},$$

lo que prueba la primer desigualdad.

Para probar la otra desigualdad, primero observemos que si X es un espacio de Banach, e (y_n) es tal que $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ converge en X y $\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} y_n\right\| \leq C$, entonces si $(\alpha_n) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_n \searrow 0$; la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n y_n$ converge y $\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n\right\| \leq C\alpha_1$. Para esto, si llamamos $B_N = \sum_{n=1}^{N} y_n$ vale que

$$\sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n = \alpha_N B_N - \sum_{n=1}^{N} B_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{n=N+1}^{M} \alpha_n y_n\Big\| &= \Big\|\alpha_M B_M - \alpha_N B_N + \sum_{n=N}^{M-1} B_n(\alpha_{n+1} - \alpha_n)\Big\| \\ &\leq \alpha_M C + \alpha_N C + C\sum_{n=N}^{M-1}(\alpha_n - \alpha_{n+1}) = 2\alpha_N C \to 0.\end{aligned}$$

Nos queda que la serie es convergente en X. Además, para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N} \alpha_n y_n\Big\| \leq \alpha_N \|B_N\| + \sum_{n=1}^{N} \|B_n\| (\alpha_n - \alpha_{n+1}) \leq C\alpha_1.$$

Ahora consideremos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$, y supongamos que los (a_n) están ordenados tal que $|a_n| \searrow 0$. Como la base es cuasi-greedy, sabemos que $\sup_N \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\right\| \leq K_c \|x\|$. Sea $N \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\left\|\sum_{s=1}^{k} a_{N+1-s} e_{N+1-s}\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n - \sum_{n=1}^{k} a_n e_n\right\| \leq 2K_c \|x\|.$$

Tomando supremo en k, $\sup_k \left\|\sum_{s=1}^{k} a_{N+1-s} e_{N+1-s}\right\| \leq 2C \|x\|$. Llamemos $y_s = a_{N+1-s} x_{N+1-s}$ y tomemos $\alpha_s = |a_N||a_{N+1-s}|^{-1}$. Entonces, por la observación anterior,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{|a_{N+1-s}} a_{N+1-s} e_{N+1-s}\right\| \leq 2K_c \|x\| \alpha_1 = 2K_c \|x\|.$$

Por otro lado, por (3.2)

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{|a_n|}{|a_{N+1-s}|} a_{N+1-s} e_{N+1-s}\right\| = |a_N| \left\|\sum_{s=1}^{N} \varepsilon_s e_{N+1-s}\right\| \geq \frac{|a_N|}{2K_c} \left\|\sum_{s=1}^{N} e_s\right\|.$$

Esto nos dice que

$$|a_N|\sqrt{N} \leq C|a_N| \left\|\sum_{n=1}^{N} e_n\right\| \leq C' \|x\|$$

para algunas constantes adecuadas. Esto nos dice que $c\|(a_n)\|_{2,\infty} \leq \|x\|$. □

Observación 5.1.16. Sea A un conjunto de cardinal n. Tomando $x = \sum\limits_{j \in A} e_j$ en el teorema anterior (y notando que $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{j}} \leq 2\sqrt{n}$),

$$c\sqrt{n} \leq \left\|\sum_{j \in A} e_j\right\| \leq C2\sqrt{n}.$$

Esto nos dice que $\varphi(n) \asymp \sqrt{n}$ y que (e_n) es democrática.

Ahora podemos probar el Corolario 5.1.11:

Demostración del Corolario 5.1.11. Por la observación anterior, sabemos que (e_n) es democrática y $\varphi(n) \asymp \sqrt{n}$. Esto nos dice que (e_n) tiene la PRS:

$$\varphi(m) \leq C\sqrt{m} = C\left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \sqrt{n} \leq C_1 \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} \varphi(n).$$

Por la Proposición 5.1.10 tenemos que (e_n) es bidemocrática. □

Observación 5.1.17. La Proposición 5.1.10 es falsa si la base no es cuasi-greedy. Para ver esto, analicemos el siguiente ejemplo. Sea (e_n^p) la base canónica en ℓ_p. Definimos una base normalizada (f_n) en $\ell_2 \oplus_2 \ell_p$ de la siguiente forma:

$$f_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_n^2 + e_n^p), \qquad f_{2n} = \frac{1}{2} e_n^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_n^p.$$

Recordemos que el espacio $\ell_p \oplus_2 \ell_p$ consiste del conjunto $\{(x,y) : x \in \ell_2, y \in \ell_p\}$ dotado de la norma $\|(x,y)\| = (\|x\|_2^2 + \|y\|_p^2)^{1/2}$.

Veamos que si $1 < p < 2$, $\varphi(n) \asymp n^{1/p}$ y $\varphi'(n) \asymp \sqrt{n}$. Para esto, sea A un subconjunto de los naturales de cardinalidad n. Si llamamos $P = \{j \in A : j \text{ par}\}$ e $I = \{j \in A : j \text{ impar}\}$,

$$\Big\| \sum_{j\in A} f_j \Big\| \leq \Big\| \sum_{j\in P} f_j \Big\| + \Big\| \sum_{j\in I} f_j \Big\|.$$

Nos alcanza con acotar cada una de estas normas.

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j\in P} f_j \Big\| &= \Big\| \sum_{j\in P} \frac{1}{2} e_{j/2}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} e_{j/2}^p \Big\| \\ &= \left(\sum_{j\in P} \Big(\frac{1}{2}\Big)^2 + \Big[\sum_{j\in P} \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^p \Big]^{2/p} \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\frac{1}{4}|A| + \frac{3}{4}|A|^{2/p} \right)^{1/2} \qquad (5.2) \\ &\leq |A|^{1/p}. \end{aligned}$$

De la misma forma acotamos la norma de la suma sobre los índices impares de A. Veamos la cota inferior:

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{j\in A} f_j \Big\| &= \left(\sum_{j\in P} \frac{1}{4} + \sum_{j\in I} \frac{1}{2} + \Big[\sum_{j\in P} \Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^p + \sum_{j\in I} \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^p \Big]^{2/p} \right)^{1/2} \\ &\geq \left(\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)^p |P| + \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^p |I| \right)^{1/p}. \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Supongamos que $|P| \geq |A|/2$, entonces (siguiendo la cuenta de arriba)

$$\Big\| \sum_{j\in A} f_j \Big\| \geq \frac{\sqrt{3}}{2^{1/p+1}} |A|^{1/p}.$$

Es claro que si $|P| < |A|/2$, entonces $|I| \geq |A|/2$ y podemos hacer la misma cuenta. Con esto probamos que $\varphi(n) \asymp n^{1/p}$.

Observemos que en el único momento que usamos que $1 < p < 2$ fue en (5.2). Por lo tanto, teniendo en cuenta que $(\ell_2 \oplus_2 \ell_p)' = \ell_2 \oplus_2 \ell_{p'}$, podemos hacer las mismas cuentas para f_n'; con la salvededad de que en (5.2) nos queda:

$$\left(\frac{1}{4}|A| + \frac{3}{4}|A|^{2/p'} \right)^{1/2} \leq |A|^{1/2}.$$

Además, en (5.3), podemos razonar de forma análoga para llegar a que

$$\Big\| \sum_{j\in A} f_j' \Big\| \geq c|A|^{1/2}.$$

De esta forma, tenemos que $\varphi'(n) \asymp \sqrt{n}$.

Esto nos dice que ambas (f_n) y (f'_n) son democráticas y tienen la PRS. Sin embargo, (f_n) no es bidemocrática, pues $\varphi(n)\varphi'(n) \asymp n^{1/p+1/2}$.

5.2 Dualidad de bases aproximadamente greedy

Teorema 5.2.1. *Sea (e_n) una base greedy con la PRS. Entonces, (e'_n) es una sucesión básica greedy. En particular, si (e_n) es una base greedy de un espacio de Banach X con tipo no trivial, entonces (e'_n) es una base greedy de X'.*

Demostración. Como (e_n) es incondicional (por ser greedy), (e'_n) es incondicional. Nos faltaría ver que es democrática, pero esto se sigue de la Proposición 5.1.10, ya que vimos que (e_n) bidemocrática implica que (e'_n) sea democrática.

Por otro lado, como X tiene tipo no trivial, entonces no contiene subespacios isomorfos a c_0 o ℓ_1 (ya que estos espacios tienen tipo trivial). Pero si esto pasa y X tiene base incondicional, entonces (e'_n) es base de X' (puesto que X debe ser reflexivo por el teorema de James [Jam]). $\square$

Teorema 5.2.2. *Sea (e_n) una base cuasi-greedy de un espacio de Banach X. Entonces son equivalentes:*

(1) (e_n) es bidemocrática.

(2) (e_n) y (e'_n) son ambas aproximadamente greedy.

(3) (e_n) y (e'_n) son ambas parcialmente greedy.

Demostración. Veamos primero que (1) implica (2). Sabemos que ser aproximadamente greedy es equivalente a ser cuasi-greedy y democrática. Además, la Proposición 5.1.8 nos decía que si (e_n) es bidemocrática entonces (e_n) y (e'_n) deben ser democráticas. Sólo nos falta probar que (e'_n) es cuasi-greedy. Para eso, tomemos $x' \in X'$ y $x \in X$, y llamemos G'_m al operador greedy correspondientes a la sucesión básica (e'_n).

Primero notemos que si $|A| = m$,

$$\sum_{j\in A} |x'(e_j)| \leq \|x'\| \sup_{\varepsilon_j=\pm1} \Big\| \sum_{j\in A} \varepsilon_j e_j \Big\| \leq 2\varphi(m) \|x'\| .$$

Entonces, si $G'_m(x') = \sum_{j\in A} x'(e_j)e'_j$, y tomamos $k \notin A$,

$$|x'(e_k) - (G'_m(x'))(e_k)| = |x'(e_k)| \leq \frac{1}{m+1} \sum_{j\in A\cup\{k\}} |x'(e_j)|.$$

Y por lo tanto,

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |(x' - G'_m(x'))(e_j)| \leq \frac{2\varphi(m+1)}{m+1} \|x'\| .$$

Por otro lado, habíamos visto en el Lema 4.1.3 que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |e'_j(x - G_m(x))| \leq \frac{4K_c^2}{\varphi(m+1)} \|x\| .$$

Recordemos que también vimos que $\left\| \sum_{j\in A} a_j e_j \right\| \leq 2\varphi(|A|) \max |a_j|$.

Supongamos que $G_m(x) = \sum_{j\in A} e'_j(x)e_j$ y $G'_m(x') = \sum_{j\in B} x'(e_j)e'_j$, con $|A| = |B| = m$. Entonces,

$$\begin{aligned} |(x' - G'_m(x'))(G_m(x))| &= \Big| \Big(\sum_{j\in A\setminus B} x'(e_j)e'_j \Big)(x) \Big| \\ &\leq \Big\| \sum_{j\in A\setminus B} x'(e_j)e'_j \Big\| \|x\| \\ &\leq 4\frac{\varphi(m+1)\varphi'(m)}{m+1} \|x\| \|x'\| \\ &\leq 4\Delta \|x\| \|x'\| . \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} |(G'_m(x'))(x - G_m(x))| &= \Big| x' \Big(\sum_{j\in B\setminus A} e'_j(x)e_j \Big) \Big| \\ &\leq \|x'\| 2\varphi(m) \frac{4K_c^2\Delta}{\varphi(m+1)} \|x\| \\ &\leq 8K_c^2\Delta \|x\| \|x'\| . \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} (G'_m(x'))(x) = \sum_{j\in B} x'(e_j)e'_j(x) &= x'\Big(\sum_{j\in B\setminus A} e'_j(x)e_j \Big) + x'\Big(\sum_{j\in A} e'_j(x)e_j \Big) - x'\Big(\sum_{j\in A\setminus B} e'_j(x)e_j \Big) \\ &= x'(G_m(x)) + (G'_m(x'))(x - G_m(x)) - (x' - G'_m(x'))(G_m(x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|G'_m x'(x)| \leq (K_c + 4\Delta + 8K_c^2\Delta) \|x\| \|x'\|$$

y entonces

$$\|G'_m x'\| \leq (K - c + 4\Delta + 8K_c^2\Delta) \|x'\| .$$

Esto nos dice que (e'_n) es una sucesión básica cuasi-greedy.

Ya sabíamos que (2) implica (3), así que sólo nos resta probar que (3) implica (1). En el Teorema 4.2.5, vimos que (3) implica que tanto (e_n) como (e'_n) son cuasi-greedy y conservativas.

Supongamos que K_c es la constante cuasi-greedy para (e_n) y (e'_n) y Γ es la constante conservativa también para ambas.

Supongamos ahora que A es un subconjunto finito de $\mathbb{N}$. Para $x \in [e_j]_{j\notin A}$, sea $y = \sum_{j\in A} e_j + x$. Supongamos que $|e'_j(x)| \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces

$$\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\| = \Big\|\sum_{|e'_j(y)=1} e'_j(y)e_j\Big\| \leq \Big\|\sum_{|e'_j(y)|\leq 1} e'_j(y)e_j\Big\| + \Big\|\sum_{|e'_j(y)|<1} e'_j(y)e_j\Big\|$$
$$\leq 2K_c \|y\|.$$

Por continuidad, $\left\|\sum_{j\in A} e_j\right\| \leq 2K_c \|y\|$ para todo $x \in [e_j]_{j\notin A}$. Por el teorema de Hanh-Banach, si llamamos $E = [e_j]_{j\notin A}$, debe exitir un $x' \in X'$, $\|x'\| = 1$ tal que $x' = 0$ en E y $x'(\sum_{j\in A} e_j) = \mathrm{dist}(\sum_{j\in A} e_j, E)$. Pero esto nos dice que $x' = \sum_{j\in A} x'(e_j)e'_j$ y

$$\left|x'\left(\sum_{j\in A} e_j\right)\right| = \inf_{x\in E}\Big\|\sum_{j\in A} e_j - x\Big\| \geq \frac{1}{2K_c}\Big\|\sum_{j\in A} e_j\Big\|. \tag{5.4}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$. Sean A_0, B_0 tal que $|A_0|, |B_0| \leq m$ y

$$\Big\|\sum_{j\in A_0} e_j\Big\| \geq \frac{1}{2}\varphi(m), \qquad \Big\|\sum_{j\in B_0} e'_j\Big\| \geq \frac{1}{2}\varphi'(m).$$

Sea A un subconjunto de $\mathbb{N}$ con $|A| = 2m$ y $A > \max(A_0, B_0)$.

Notemos que si $D \subset A$ y $|D| \geq m$, como $D > A_0, B_0$ y ambas (e_n) y (e'_n) son conservativas con constante Γ,

$$\Big\|\sum_{j\in D} e_j\Big\| \geq \frac{1}{2\Gamma}\varphi(m), \qquad \Big\|\sum_{j\in D} e'_j\Big\| \geq \frac{1}{2\Gamma}\varphi'(m).$$

Ahora sea $u' \in [e'_j]_{j\in A}$ tal que $\sum_{j\in A} |u'(e_j)|^2$ sea mínimo con respecto a $\|u'\| \leq 1$ y

$$\sum_{j\in A} u'(e_j) \geq \frac{\varphi(m)}{4\Gamma K_c}. \tag{5.5}$$

Esto se puede hacer porque el x' que tomamos en (5.4) cumple esta desigualdad.

Sea $G'_m(u') = \sum_{j\in B} u'(e_j)e'_j$ con $B \subset A$ y $|B| = m$. Sea $D = A\backslash B$. Observemos que, por el Lema 3.1.7, tenemos

$$\min_{j\in B} |u'(e_j)|\Big\|\sum_{j\in B} e'_j\Big\| \leq 4K_c^2$$

y, como $\varphi'(m)\frac{1}{2\Gamma} \leq \left\|\sum_{j\in B} e'_j\right\|$

$$\min_{j\in B} |u'(e_j)| \leq \frac{8K_c^2\Gamma}{\varphi'(m)}.$$

Al igual que antes, por (5.4) podemos encontrar un $v' \in [e'_j]_{j\in D}$ con $\|v'\| = 1$ y

$$\sum_{j\in D} v'(e_j) \geq \frac{\varphi(m)}{4\Gamma K_c}.$$

Como estamos asumiendo que u' es minimal, se puede ver que

$$\sum_{j\in A}((1-t)u'(e_j)+tv'(e_j))^2 \geq \sum_{j\in A} u'(e_j)^2.$$

para todo $0 \leq t \leq 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in A} u'(e_j)^2 &\leq \sum_{j\in A} u'(e_j)v'(e_j) \\
&\leq \min_{j\in B} |u'(e_j)| \sum_{j\in D} |v'(e_j)| \\
&\leq \frac{8K_c^2\Gamma}{\varphi'(m)} v'\left(\sum_{j\in D} \varepsilon_j e_j\right) \\
&\leq \frac{8K_c^2\Gamma}{\varphi'(m)} \max_{\varepsilon_j=\pm 1} \left\| \sum_{j\in D} \varepsilon_j e_j \right\| \\
&\leq \frac{16K_c^2\Gamma\varphi(m)}{\varphi'(m)}.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto, por (5.5),

$$\begin{aligned}
(\varphi(m))^2 &\leq 2^4\Gamma^2K_c^2\left(\sum_{j\in A}|u'(e_j)|\right)^2 \\
&\leq 2^4\Gamma^2K_c^2 m \sum_{j\in A} u'(e_j)^2 \\
&\leq \frac{2^8\Gamma^3K_c^4 m\varphi(m)}{\varphi'(m)}
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\varphi(m)\varphi'(m) \leq 2^8\Gamma^3K_c^4 m,$$

con lo cual (e_n) es bidemocrática. □

Corolario 5.2.3. *Sea X un espacio de Banach con tipo no trivial. Si (e_n) es una base cuasi-greedy, entonces (e'_n) es una sucesión básica cuasi-greedy en X'.*

Demostración. Como X tiene tipo no trivial, entonces (e_n) tiene la PRS, y por lo tanto, es bidemocrática. El teorema anterior nos da el resultado. □

Ejemplo 5.2.4. Mostremos con un ejemplo que si $\varphi : \mathbb{N} \to (0, +\infty)$ es una función creciente que cumple que $\varphi(1) = 1$, $\varphi(n)/n$ es decreciente pero no cumple (5.1) para ningún $\beta > 0$, entonces es posible construir un espacio de Banach X con base greedy (e_n) con función fundamental equivalente a φ tal que su sucesión biortogonal (e'_n) no es cuasi-greedy. Este ejemplo nos muestra que la condición "(e_n) tiene la PRS" en 5.2.1 es necesaria. Lo podemos encontrar en [Dil].

Definamos el espacio de sucesiones X_φ como la completación de c_{00} para la norma

$$\|x\| = \sup_n \sup_{\substack{|A|=n \\ A<n}} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{k\in A} |x_k|.$$

Recordemos que c_{00} es el espacio de todas las sucesiones (a_n) que son eventualmente cero, dotado de la norma supremo. Es claro que la base canónica es incondicional en X. Además, es democrática. Para ver esto, sea $|A| = n$,

$$\Big\| \sum_{k\in A} e_k \Big\| = \sup_m \sup_{\substack{|B|=m \\ m<B}} \frac{\varphi(m)}{m} |B \cap A| \leq \varphi(n).$$

Por otro lado, supongamos que n es par. Entonces como $|\{k \in A : k > n/2\}| \geq n/2$, podemos elegir $B \subset A$, $|B| = n/2$ y $B > n/2$. Además, debe valer

$$\varphi(n/2)2/n \geq \varphi(n)/n.$$

Entonces,

$$\Big\| \sum_{k\in A} e_k \Big\| \geq \varphi(n/2)2/n \sum_{k\in B} |1| \geq \varphi(n)/2.$$

Si n es impar, podemos hacer la misma cuenta de arriba con $(n-1)/2$. Entonces (e_n) es democrática, y su función fundamental es equivalente a φ. Supongamos que la sucesión básica (e'_n) es democrática con constante Δ. Notemos que si $|A| = n$, $A > n$ entonces

$$\Big| \sum_{k\in A} e'_k(x) \Big| \leq \frac{n}{\varphi(n)} \Big(\frac{\varphi(n)}{n} \sum_{k\in A} |e'_k(x)| \Big) \leq \frac{n}{\varphi(n)} \|x\|,$$

y por lo tanto, $\|\sum_{k\in A} e'_k\| \leq n/\varphi(n)$. Como estamos suponiendo que (e'_n) es democrática, tenemos que

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} e'_k \Big\| \leq \Delta n/\varphi(n).$$

Tomemos ahora

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi(k)} e_k.$$

Como φ es creciente,

$$\|x\| = \sup_m \sup_{\substack{|B|=m \\ m<B}} \frac{\varphi(m)}{m} \sum_{k\in B} |e'_k(x)| \leq \sup_m \frac{\varphi(m)}{m} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{\varphi(k)} \leq 1.$$

Además,

$$\Big\| \sum_{k=1}^{n} e'_k \Big\| \geq \Big| \sum_{k=1}^{n} e'_k(x) \Big| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi(k)}$$

y por lo tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\varphi(k)} \leq \Delta \frac{n}{\varphi(n)}.$$

Si tomamos n, m, con $m \geq 2$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{\varphi(n)} \log(m) &\leq \frac{n}{\varphi(n)} \sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{mn} \frac{1}{\varphi(k)} \\ &\leq \Delta \frac{mn}{\varphi(mn)}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\varphi(mn) \leq \Delta / \log(m) m\varphi(n)$. Tomando m suficientemente grande esto contradice 5.1 y esto nos dice que (e'_n) no puede ser democrática (y, por lo tanto, no puede ser greedy).

Bibliografía

[Al] Albiac, F., y Kalton, N. *Topics in Banach spaces.* Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag. (2006).

[Bur] Burkholder, D. *A proof of Pełczyński's conjecture for the Haar system.* Studia Mathematica, 1(91), 79-83. (1988).

[Dil] Dilworth, S. J., Kalton, N. J., y Kutzarova, D. *On the existence of almost greedy bases in Banach spaces.* Studia Math, 159(1), 67-101. (2003).

[Jam] R. C. James. *Bases and reflexivity of Banach spaces.* Ann. of Math., 52:518–527. (1950)

[Kon] Konyagin, S. V., y Temlyakov, V. N. *A remark on greedy approximation in Banach spaces.* East J. Approx, 5(3), 365-379. (1999).

[Wot] Wojtaszczyk, P. *Greedy algorithm for general biorthogonal systems.* Journal of Approximation Theory, 107(2), 293-314. (2000).