UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Bases de Riesz de Exponenciales

Diana Agustina Carbajal

Director: Carlos Cabrelli

Julio 2015

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a Carlos Cabrelli, por aceptar ser mi director y desde el día uno brindarme dedicación y paciencia, introduciéndome en esta área de la matemática tan linda y respondiendo mis dudas siempre con una sonrisa y buena predisposición. Estoy felíz de haber encontrado no sólo un gran director sino una excelente persona.

Es imposible plasmar en palabras lo agradecida que estoy con mi mamá, Mónica, por su inmenso cariño y apoyo incondicional, que incluso desde la distancia me transmite día a día y me ayuda a seguir adelante. También quiero agradecer a mis hermanos Julie, Mario y Pedro por acompañarme durante todo este largo camino y por ser tan geniales.

Eternamente agradecida a Carli, por su amor, por contenerme, aconsejarme y estar ahí siempre, por desconectarme de este mundo cuando me es necesario y por la paciencia infinita que me tuvo en estos últimos días. También gracias a su hermosa familia que siempre me recibió como una integrante más: Neli, Carlos y Leo.

Quiero agradecer a mis compañeros que lograron hacer que ir a la facultad sea divertido y verlos fuera de la facultad, ya sea en en reuniones o juntadas de estudio me hiciera muy felíz. A Kari, Diego, Marian, Dani y Nico por dar nuestros primeros pasos de la carrera juntos y formar una parte muy importante de mi vida desde entonces. A Pablo por ser mi compañero de estudio por excelencia y por presentarme a (mamá) Mari a quien agradezco también por haberme adoptado. Al grupo de gente espectacular que forma parte de la *Botella de Klein* y me sacan una sonrisa todos los días: (Kari, Pablo,) Aye, Bruno, Euge, Jaz, Mati, Maxi, Nati, Rafa, Santi D., Santi V. y Sofi. No puedo dejar de dar las gracias a Marce, por sus talleres, a Diego M., Facu, Juanma, Meli, Dani K., Lucho, Lara, Juli, Rocha, Yami, Xime, Andrés y seguro que me olvido de mucha más gente. También quiero dar gracias especiales a Tomás que en los últimos meses me dio palabras de aliento, me escuchó quejar mucho y me ayudó con las correcciones de esta tesis.

Gracias gigantes a todos los docentes del departamento de matemática de la UBA que me crucé, por tanta buena onda, dedicación y talento.

Fuera de la facultad quiero agradecer Camilo, Maru y Mequi, que me banca desde que éramos chiquitas, por no dejar de insistir en que nos juntemos a pesar de la falta de tiempo.

Finalmente, quiero reconocer la enorme ayuda que Carli, Kari, Sofi, Nati y Mari me brindaron estos últimos días, felíz de estar rodeada de gente tan linda.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Consideremos un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ medible de medida finita. En muchas aplicaciones del análisis armónico, es de gran importancia poder representar a una función $f \in L^2(\Omega)$ como combinación de exponenciales. Cuando uno encuentra un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ tal que las funciones $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e^{2\pi i \, \lambda \cdot t}\}_{\lambda \in \Lambda}$ forman una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, para cada función f se puede dar una única representación como $f(x) = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{2\pi i \, \lambda \cdot x}$ donde los coeficientes c_λ se calculan sencillamente haciendo el producto interno en $L^2(\Omega)$ entre f y $e^{2\pi i \, \lambda \cdot t}$. Los conjuntos Ω que presentan esta característica se denominan *conjuntos espectrales* y el conjunto de frecuencias Λ se llama *espectro* de Ω.

Una de dichas aplicaciones es el procesamiento de señales. Un problema muy frecuente en la teoría de señales es el de reconstruir una cierta señal continua de banda limitada a partir de un conjunto de muestras discreto. El resultado más clásico es el celebrado teorema del muestreo de Nyquist-Shannon, que afirma que una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier está soportada en el intervalo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ puede recuperarse a partir de sus muestras en los enteros $\{f(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Más aún, la formula de la recontrucción está dada por

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \, \frac{\operatorname{sen}(\pi \, (x-k))}{\pi \, (x-k)}.$$

La demostración de este teorema se basa en el conocido hecho de que el sistema $\{e^{2\pi i k t}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una base ortonormal en $L^2[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto espectral y Λ es un espectro de Ω, el teorema del muestreo de Nyquist-Shannon se puede generalizar. Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ es una función perteneciente al espacio de *Paley-Wiener* (ver definición 3.4.1), entonces f puede recuperarse mediante sus muestras

$\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ y la formula de reconstrucción es

$$f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\, \widehat{\chi_\Omega}(x-\lambda).$$

Desafortunadamente, encontrar una base ortonormal de exponenciales en $L^2(\Omega)$ no es algo sencillo. De hecho, existen conjuntos Ω que no son espectrales. Por ejemplo, la bola en dimensiones mayores o iguales que dos es uno de ellos. Incluso ciertas uniones de dos intervalos en la recta podría no gozar de una base ortonormal de exponenciales. De esto se hablará más al final del capítulo 4.

Cuando uno no puede hallar una base ortonormal de exponenciales, la segunda mejor opción son las bases de Riesz de exponenciales. Una base de Riesz $\{e^{2\pi i\,\lambda\cdot t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ en $L^2(\Omega)$ también nos da una representación única para cada función como combinación de exponenciales $f(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda e^{2\pi i\,\lambda\cdot x}$ de una manera robusta, que es lo suficientemente apropiada para resolver el problema del muestreo mencionado antes. Si bien la existencia de estas bases se pudo demostrar para algunos casos, este es un problema que en la actualidad se mantiene abierto para muchos conjuntos. Sin embargo, no se conoce ningún ejemplo de un conjunto Ω de medida positiva donde se haya probado que no admite una base de Riesz de exponenciales.

El objetivo de este trabajo es dar un recorrido sobre los resultados obtenidos respecto a las siguientes preguntas: dado $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, ¿cuándo puedo afirmar que es espectral? y si no lo es, ¿admite una base de Riesz de exponenciales?. Para ello, comenzaremos por el capítulo 2 dando las definiciones básicas y las notaciones que usaremos a lo largo de esta tesis. Luego, haremos un resumido repaso de los teoremas clásicos del análisis de Fourier.

Pasando al capítulo 3, encontraremos una introducción a tres objetos, en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que están intimamente relacionados. Estos son las sucesiones de Bessel, las bases de Riesz y los marcos. Cuando aplicamos estos conceptos en el espacio $L^2(\Omega)$ y los sistemas de exponenciales, surgen extensos resultados sobre la teoría del muestreo e interpolación. Veremos también que las frecuencias $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ de un sistema de exponenciales $\{e^{2\pi i\,\lambda\cdot t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ juegan un fuerte rol dentro de esta teoría.

En respuesta a la primer pregunta que planteamos, Fuglede conjeturó en 1974 que un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es espectral si y sólo si tesela por traslaciones a $\mathbb{R}^d$ sin solapamientos salvo un conjunto de medida nula [Fug74]. Si bien esta conjetura se probó que es falsa para muchos casos, existen otros donde sí se pudo demostrar. En el capítulo 4 nos centraremos en dicha discusión. En él, incluímos la prueba de una variación de la conjetura, obteniendo para ciertos conjuntos en $\mathbb{R}^d$, la existencia de bases ortonormales de exponenciales. Por otro lado, cuando Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ a un nivel $k > 1$ (ver definición 4.2.1), el resultado anterior no se mantiene. No obstante, sí es cierto que en ese caso Ω admite una base de Riesz de exponenciales. Este teorema fue recientemente probado primero por Grepstad y Lev en el 2014, usando como hipótesis que Ω sea un conjunto Riemann-integrable [GL14]. Más tarde, Kolountzakis en el 2015 hizo una prueba más general [Kol15] y su demostración también forma parte de este capítulo. Finalmente, daremos un ejemplo sencillo de un conjunto no espectral que admite una base de Riesz de exponenciales, basándonos en los resultados que la conjetura de Fuglede incentivó.

En el capítulo 5 nos ocuparemos de demostrar un resultado de Kozma y Nitzan del 2015, en el cual resuelven por completo el problema de hallar bases de Riesz de exponenciales sobre uniones finitas de intervalos en la recta real [KN15a]. La demostración de este teorema conlleva una técnica de disección del conjunto Ω en N subconjuntos y la traslación de ellos al intervalo $[0, \frac{1}{N}]$, para un número natural N conveniente. Esta técnica de disección y traslación fue primero utilizada en un trabajo que Olevskii y Ulanovskii realizaron en el 2011 sobre conjuntos no acotados que admiten sistemas de exponenciales completos en la recta real [OU11], el cual abordaremos en el capítulo 6.

Capítulo 2

Preliminares y notación

En este capítulo daremos las definiciones y notaciones que utilizaremos a lo largo de esta tesis. También mencionaremos varios conceptos preliminares que pueden ser necesarios para la comprensión de los contenidos. Las demostraciones de los enunciados de esta sección pueden ser encontradas en [Hei10].

Notación. Al referirnos a las exponenciales, en múltiples ocasiones usaremos la notación

$$e_\lambda(t) := e^{2\pi i \lambda \cdot t}, \quad \lambda \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}^d.$$

El producto $\lambda \cdot t$ es el producto escalar en $\mathbb{R}^d$, en ciertos casos lo notaremos como $\langle \lambda, t \rangle$ para mayor comprensión de los cálculos. Cuando no se especifica el subíndice λ, estamos usando la notación

$$e(t) := e^{2\pi i t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Notación. Dado un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ notaremos al sistema de exponenciales con frecuencias en Λ como

$$E(\Lambda) := \{e_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}.$$

Definición 2.0.1. Sea $x \in \mathbb{R}$. Definimos su *piso* $\lfloor x \rfloor$ como

$$\lfloor x \rfloor := \sup \{y \in \mathbb{Z} \,:\, y \leq x\}.$$

Definición 2.0.2. Sea $x \in \mathbb{R}$. Llamaremos *valor fraccional* de x al número

$$v(x) := x - \lfloor x \rfloor.$$

Observación 2.0.3. $v(x)$ es el único elemento en el conjunto $(x + \mathbb{Z}) \cap [0, 1)$. Puede ser pensado como el representante de x sobre el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Notación. Trabajaremos todo el tiempo con la medida de Lebesgue. Notaremos la medida de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^d$ de la manera $|E|$. También, todas las integrales son en el sentido de Lebesgue.

Definición 2.0.4. Si una propiedad P vale para todos los puntos de $E \setminus A$ donde $|A| = 0$, diremos que P vale para casi todo punto x en E y escribiremos P vale $ctp\, x \in E$.

Recordemos los espacios de Lebesgue:

Definición 2.0.5. Sea $E \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto medible. Para $1 \leq p < \infty$ se define

$$L^p(E) := \{f : E \to \mathbb{C} \text{ medibles } : \int_E |f|^p\, dx < \infty\}.$$

Para el caso $p = \infty$, primero debemos definir el supremo esencial de $|f|$ como

$$\sup_E \operatorname{ese} |f| := \inf \{M > 0 \,:\, |f(x)| \leq M \; ctp\, x \in E\}.$$

Luego,

$$L^\infty(E) := \{f : E \to \mathbb{C} \text{ medibles } : \sup_E \operatorname{ese} |f| < \infty\}.$$

Proposición 2.0.6. *Si $p_1 < p_2 \leq \infty$ y $|E| < \infty$ entonces $L^{p_2}(E) \subset L^{p_1}(E)$.*

Proposición 2.0.7. *En cada espacio de Lebesgue se puede definir una norma,*

$$\| f \|_{L^p(E)} := \left(\int_E |f|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\| f \|_{L^\infty(E)} := \sup_E \operatorname{ese} |f|.$$

Cuando $f = 0$ $ctp\, x \in E$ se tiene que $\|f\|_{L^p(E)} = 0$, incluso si f no es identicamente cero. Por lo tanto, para poder considerar $\| \cdot \|_{L^p(E)}$ como una norma, dos funciones se consideran idénticas si difieren en un conjunto de medida cero.

Proposición 2.0.8. *(Desigualdad de Hölder) f, g dos funciones medibles, p, $p' > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ entonces*

$$\int_E |fg|\, dx \leq \|f\|_{L^p(E)} \|g\|_{L^{p'}(E)}.$$

Teorema 2.0.9. *$(L^p(E), \| \cdot \|_{L^p(E)})$ es un espacio de Banach para $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema 2.0.10. *$(L^2(E), \langle \,, \rangle_{L^2(E)})$ es un espacio de Hilbert, donde el producto interno se define como*

$$\langle f, g \rangle_{L^2(E)} := \int_E f \bar{g}\, dx, \quad f, g \in L^2(E).$$

En este trabajo nos va a interesar principalmente estudiar los espacios de Lebesgue $L^1(\Omega)$ y $L^2(\Omega)$ con $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de medida finita. Por otro lado, recordemos los espacios de sucesiones p-sumables.

Definición 2.0.11. Dado $1 \leq p < \infty$, I un conjunto de indices numerable. Definimos

$$\ell^p(I) := \{x = \{x_k\}_{k\in I} \,:\, \sum_{k\in I} |x_k|^p < \infty\}.$$

Para $p = \infty$, definimos $\ell^\infty(I) := \{x = \{x_k\}_{k\in I} \,:\, \{x_k\}_{k\in I} \text{ es una sucesión acotada}\}$.

Proposición 2.0.12. *En cada espacio de sucesiones ℓ^p se puede definir una norma,*

$$\|x\|_{\ell^p(I)} := \left(\sum_{k\in I} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty,$$
$$\|x\|_{\ell^\infty(I)} := \sup_{k\in I} |x_k|.$$

Teorema 2.0.13. $\left(\ell^p(I), \|\cdot\|_{\ell^p(I)}\right)$ *es un espacio de Banach para* $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema 2.0.14. $\left(\ell^2(I), \langle\, , \,\rangle_{\ell^2(I)}\right)$ *es un espacio de Hilbert, donde el producto interno está dado por*

$$\langle x, y\rangle_{\ell^2(I)} := \sum_{k\in I} x_k \overline{y_k}, \quad \{x_k\}_{k\in I}, \{y_k\}_{k\in I} \in \ell^2(I).$$

A continuación, repasaremos el concepto de completitud de un conjunto en un espacio de Banach X y luego comenzaremos a enumerar algunos resultados clásicos del análisis armónico que utilizaremos frecuentemente.

Notación. Dado un conjunto $S = \{x_n\}_{k\in I}$, notaremos a las combinaciones lineales formadas por los elementos de S como $\text{span}(S)$.

Definición 2.0.15. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Decimos que $S = \{x_k\}_{k\in I}$ es *completo* en X si $\overline{\text{span}}(S) = X$, es decir, $\text{span}(S)$ es denso en X.

Definición 2.0.16. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. $S = \{x_k\}_{k\in I}$ se dice *minimal* en X si $x_k \notin \overline{\text{span}}\{x_j \,:\, j \neq k\}$ para todo $k \in I$.

Proposición 2.0.17. *Sea $(\mathcal{H}, \langle\, , \,\rangle)$ un espacio de Hilbert. Entonces $\{x_k\}_{k\in I} \subseteq \mathcal{H}$ es completo si y sólo si vale la siguiente afirmación:*

$$x \in \mathcal{H} \text{ y } \langle x_k, x\rangle = 0 \text{ para todo } k \Rightarrow x = 0.$$

Notación. En algunas ocasiones trabajaremos con el conjunto $\mathbb{T}$. Este conjunto es el intervalo $[0, 1]$ pensado cíclicamente, es decir, tomando la identificación $0 = 1$. También, puede ser definido como el intervalo $[0,1)$. Visto de esta forma, junto con la operación aditiva $(x+y) = v(x+y)$, resulta ser un grupo. Con esta formulación uno puede identificar a $\mathbb{T}$ con el grupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Además, este conjunto es isomorfo a S^1 como grupo y en el sentido topológico. S^1 es el toro en dimensión 1, razón por la cual llamaremos a $\mathbb{T}$ el *toro*.

Definición 2.0.18. Dada $f \in L^1(\mathbb{T})$, definimos sus *coeficientes de Fourier* como

$$\widehat{f}(k) := \langle f, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{T})} = \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi ikt}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Teorema 2.0.19. *El sistema $E(\mathbb{Z})$ es completo pero no una base en $L^1(\mathbb{T})$. Luego, se tiene que para toda $f \in L^1(\mathbb{T})$,*

$$\widehat{f}(k) = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{Z} \iff f = 0.$$

Teorema 2.0.20. *El sistema de exponenciales $E(\mathbb{Z})$ es una base ortonormal en $L^2(\mathbb{T})$. Por lo tanto, toda $f \in L^2(\mathbb{T})$ puede ser escrita de manera única como*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi ikx}, \quad x \in \mathbb{T}. \tag{2.1}$$

Llamaremos a esta descomposición la serie de Fourier de f. Además, vale la identidad de Parseval,

$$\| f \|^2_{L^2(\mathbb{T})} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Teorema 2.0.21. *(Riemann-Lebesgue) Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y $\widehat{f} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, entonces, f es continua y la serie de Fourier*

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi ikx}, \quad x \in \mathbb{T},$$

converge absolutamente y con $\| \cdot \|_{L^\infty(\mathbb{T})}$.

Los mismos resultados valen si nos extendemos a dimensiones mayores. Es decir, los coeficientes de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ son

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}^d} f(t)\, e^{-2\pi ik\cdot t}\, dt, \quad k \in \mathbb{Z}^d,$$

$E(\mathbb{Z}^d)$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{T}^d)$ y la serie de Fourier se escribe como

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi ik\cdot x}, \quad x \in \mathbb{T}^d.$$

Definición 2.0.22. Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos la *transformada de Fourier* de f como la función $\widehat{f} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ como

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, e^{-2\pi ix\cdot t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^d. \tag{2.2}$$

Teorema 2.0.23. *(Riemann-Lebesgue) $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \widehat{f}$ es continua y se tiene que $\widehat{f}(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.*

Definición 2.0.24. Definiremos como la *anti-transformada de Fourier* de $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a

$$\check{f}(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(t)\, e^{2\pi i x\cdot t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Teorema 2.0.25. *(Formula de inversión) Si $f, \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces f y $\widehat{f}$ son continuas y vale que*

$$f(x) = (\,\widehat{f}\,)^{\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, e^{2\pi i x\cdot t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Similarmente,

$$f(x) = (\,\check{f}\,)^{\wedge}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \check{f}(t)\, e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Corolario 2.0.26. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ entonces*

$$f = 0 \ ctp \iff \widehat{f} = 0 \ ctp.$$

Teorema 2.0.27. *Si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ entonces vale la igualdad de Plancherel*

$$\|\,\widehat{f}\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\,f\,\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposición 2.0.28. *Si $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ y $h(x) = f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, g(x-y)\, dy$ entonces $\widehat{h} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.*

Teorema 2.0.29. *Si $g(x) = -2\pi i x_k f(x)$ y $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, entonces $\widehat{f}$ es derivable respecto a x_k y $\partial x_k \widehat{f} = \widehat{g}$.*

En particular, si f es de soporte compacto, entonces $\widehat{f}$ es diferenciable.

Por ultimo, veamos la definición de operador adjunto entre espacios de Hilbert.

Definición 2.0.30. Sean $(\mathcal{H}, \langle,\rangle_{\mathcal{H}}), (\mathcal{K}, \langle,\rangle_{\mathcal{K}})$ dos espacios de Hilbert y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ un operador lineal acotado. El operador *adjunto* de T es el único operador lineal y acotado $T^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, T^*y\rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall\, x \in \mathcal{H},\ \forall\, y \in \mathcal{K}.$$

Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ verifica que $T = T^*$ se lo denomina *autoadjunto*.

Capítulo 3

Bases de Riesz y Marcos de exponenciales

La intención de este capítulo será introducir los conceptos básicos sobre sucesiones de Bessel, bases de Riesz y marcos en espacios de Hilbert. Luego, pasaremos al caso particular de los sistemas de exponenciales en $L^2(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto medible de medida finita. Muchos de los resultados enunciados en este capítulo pueden ser consultados en [Chr13], [Hei10] y [You01].

Desde ahora escribiremos las sucesiones $\{x_k\}$ sobreentendiendo que el índice pertenece a un conjunto ordenado y numerable I y por medio de $\mathcal{H}$ nos referiremos a un espacio de Hilbert dotado por la norma $\|\cdot\|$.

3.1 Sucesiones de Bessel

Definición 3.1.1. Una sucesión $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ se llama *sucesión de Bessel* si existe una constante $B > 0$ tal que

$$\sum_{k\in I} |\langle x, x_k\rangle|^2 \leq B\,\|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}. \tag{3.1}$$

Notemos que esto es equivalente a que el operador lineal $C : \mathcal{H} \to \ell^2(I)$, definido por $Cx = \{\langle x, x_k\rangle\}$ sea continuo. Llamaremos a este operador el *operador de análisis* de $\{x_k\}$.

Para el caso particular de sucesiones ortonormales en $\mathcal{H}$, esta desigualdad es cierta con $B = 1$ y se la conoce como *desigualdad de Bessel*.

Proposición 3.1.2. *Sea $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión de Bessel. Los siguientes enunciados son ciertos.*

1. *Si $c = \{c_k\} \in \ell^2(I)$, entonces las series $\sum_{k\in I} c_k\, x_k$ convergen incondicionalmente en $\mathcal{H}$ y el operador $R : \ell^2(I) \to \mathcal{H}$ definido por $Rc = \sum_{k\in I} c_k x_k$ define un operador lineal acotado.*

2. *El operador R es el adjunto del operador de análisis, es decir, $R = C^*$ y $\|R\| = \|C\| \leq B^{\frac{1}{2}}$. En consecuencia,*
$$\Big\| \sum_{k\in I} c_k\, x_k \Big\|^2 \leq B \sum_{k\in I} |c_k|^2, \quad \forall\, \{c_k\} \in \ell^2(I).$$

3. *Si $\{x_k\}$ es completo, entonces C es inyectivo y el rango de R es denso en $\mathcal{H}$.*

Por incondicional nos referimos a la siguiente definición:

Definición 3.1.3. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una serie infinita $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$, se dice que *converge incondicionalmente* si converge en cualquier orden. Es decir, dada cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} x_{\sigma(k)}$ converge.

Denominaremos al operador $R : \ell^2(I) \to \mathcal{H}$ *operador de síntesis* de $\{x_k\}$. Por otro lado, el *operador de marco* de $\{x_k\}$ es aquel definido como $S = RC : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Este es lineal, acotado, autoadjunto y positivo. Por definición,
$$Sx = RCx = \sum_{k\in I} \langle x, x_k\rangle\, x_k, \quad x \in \mathcal{H},$$
y por lo tanto
$$\langle Sx, x\rangle = \sum_{k\in I} \big|\, \langle x, x_k\rangle\, \big|^2. \tag{3.2}$$
Notar que si $\{e_k\}$ es una base ortonormal, entonces $S = I$.

Existen muchas caracterizaciones de las sucesiones de Bessel, en particular, remarcaremos la siguiente equivalencia.

Teorema 3.1.4. *$\{x_k\}$ es una sucesión de Bessel en $\mathcal{H}$ si y sólo si existen una sucesión ortonormal $\{e_k\}$ en $\mathcal{H}$ y un operador lineal acotado $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que $T(e_k) = x_k$ para cada $k \in I$.*

3.2 Bases de Riesz

Definición 3.2.1. Una sucesión $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ se dice *Base de Riesz de $\mathcal{H}$* si existen $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal, acotado e inversible y $\{e_k\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ tales que $T(e_k) = x_k$ para cada $k \in I$.

Como T es inversible, las bases de Riesz son acotadas por arriba y abajo (es decir, $0 < \inf_k \|x_k\| \leq \sup_k \|x_k\| < \infty$). Además, notemos que por el teorema 3.1.4, si $\{x_k\}$ es una base de Riesz, entonces es una sucesión de Bessel. Más aún, una base de Riesz es una base de Schauder incondicional.

Definición 3.2.2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Un conjunto de vectores $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ se dice *base de Schauder* si para todo $x \in X$, existen únicos escalares $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tales que

$$\|x - \sum_{k=1}^{n} c_k\, x_k\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Además, diremos que una base de Schauder $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es *incondicional* si para todo $x \in X$, la serie $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, x_k$ converge incondicionalmente.

Al ser una base de Schauder, las bases de Riesz proveen, para cada elemento en $\mathcal{H}$, una escritura como combinación lineal de sus elementos de manera única. Los coeficientes de dicha combinación lineal se obtienen a través de una sucesión biortogonal $\{y_k\}$ y el elemento de $\mathcal{H}$ se reconstruye a partir de $\{x_k\}$, como veremos a continuación en el teorema 3.2.5. Pero antes, definamos el concepto de sucesión biortogonal.

Definición 3.2.3. Sea $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$. La sucesión $\{y_k\} \subseteq \mathcal{H}$ se dice *biortogonal* de $\{x_k\}$ si

$$\langle x_k, y_j \rangle = \delta_{k,j}, \quad \forall\, k, j \in I.$$

Notemos que para el caso de una base ortonormal $\{e_k\}$, su biortogonal resulta ser el mismo $\{e_k\}$. Para saber la existencia y unicidad de una sucesión biortogonal tenemos el siguiente resultado.

Lema 3.2.4. *Sea $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$.*

1. *$\{x_k\}$ tiene una sucesión biortogonal si y sólo si $\{x_k\}$ es minimal.*

2. *Si $\{x_k\}$ tiene una sucesión biortogonal, entonces es única si y sólo si $\{x_k\}$ es completo.*

Teorema 3.2.5. *Si $\{x_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$, entonces existe una única sucesión $\{y_k\} \subseteq \mathcal{H}$ tal que*

$$x = \sum_{k\in I} \langle x, y_k \rangle\, x_k, \quad \forall x \in \mathcal{H}. \tag{3.3}$$

Además, $\{y_k\}$ también es una base de Riesz y es una sucesión biortogonal de $\{x_k\}$. Más aún, la serie (3.3) converge incondicionalmente para todo $x \in \mathcal{H}$.

Demostración. Como $\{x_k\}$ es una base de Riesz existen un operador lineal inversible y acotado T y $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$ base ortonormal tales que $T(e_k) = x_k$. Sea $x \in \mathcal{H}$, aplicando $T^{-1}x$ tenemos

$$T^{-1}x = \sum_{k\in I} \langle T^{-1}x, e_k \rangle \, e_k = \sum_{k\in I} \langle x, (T^{-1})^* e_k \rangle \, e_k.$$

Por lo tanto, tomando $y_k := (T^{-1})^* e_k$,

$$x = T\, T^{-1}x = \sum_{k\in I} \langle x, (T^{-1})^* e_k \rangle \, T e_k = \sum_{k\in I} \langle x, y_k \rangle \, x_k.$$

Como $(T^{-1})^*$ es acotado e inversible, $\{y_k\}$ resulta ser una base de Riesz. Además, $\langle x_k, y_j \rangle = \langle T e_k, (T^{-1})^* e_j \rangle = \langle e_k, e_j \rangle = \delta_{k,j}$ con lo cual son biortogonales. Además, esta sucesión biortogonal es única pues $\{x_k\}$ es completo. Finalmente, la convergencia incondicional se debe a que $\{x_k\}$ es una sucesión de Bessel. □

Dado que la sucesión biortogonal $\{y_k\}$ es también una base de Riesz, se puede usar el mismo teorema para afirmar que

$$x = \sum_{k\in I} \langle x, y_k \rangle \, x_k = \sum_{k\in I} \langle x, x_k \rangle \, y_k, \quad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Por ejemplo, pensemos en el caso particular de una base ortonormal. Es claro que si $\{e_k\}$ es una base ortonormal, entonces es una base de Riesz (basta tomar el operador identidad). Para estas bases, la descomposición en (3.3) es $x = \sum_{k\in I} \langle x, e_k \rangle \, e_k$ y uno puede analizar y sintetizar a x mediante el mismo sistema $\{e_k\}$.

Además, podemos ver que las expansiones (3.3) están dadas de una manera robusta en el sentido de que la norma en $\mathcal{H}$ de cada vector es equivalente a la norma $\ell^2(I)$ de sus coeficientes. Esto se debe a la siguiente caracterización de las bases de Riesz.

Teorema 3.2.6. *Sea $\{x_k\}$ una sucesión en $\mathcal{H}$. Entonces, $\{x_k\}$ es una base de Riesz si y sólo si es completa y existen constantes $A, B > 0$ tales que*

$$A \sum_{k\in I} |\, c_k \,|^2 \leq \|\sum_{k\in I} c_k x_k\|^2 \leq B \sum_{k\in I} |\, c_k \,|^2, \quad \forall \, \{c_k\} \in \ell^2(I). \tag{3.4}$$

Cuando la sucesión $\{x_k\}$ cumple (3.4) pero no es completa, se la llama *sucesión de Riesz*. Toda sucesión de Riesz es una base de Riesz sobre el espacio $\mathcal{H}_0 = \overline{span}\{x_k\}$. Nos referiremos a A y B como las *constantes de Riesz*. Cuando $\{e_k\}$ es una base ortonormal, $A = B = 1$ y se tiene la *igualdad de Parseval*

$$\|\sum_{k\in I} c_k e_k\|^2 = \sum_{k\in I} |\, c_k \,|^2.$$

Definición 3.2.7. Dos bases en X un espacio de Banach $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ se dicen *equivalentes* si para una sucesión $c = \{c_k\}$ se tiene que $\sum_{k\in I} c_k x_k$ converge si y sólo si $\sum_{k\in I} c_k y_k$ converge.

Esta definición resulta ser equivalente a que exista un operador lineal y acotado e inversible $T : X \to X$ tal que $T(x_k) = y_k$ para todo $k \in I$.

El teorema de Paley-Wiener introdujo una noción de estabilidad entre las bases de un espacio de Banach. Esto es, si $\{x_k\}$ es una base e $\{y_k\}$ es una sucesión que está "cerca" de $\{x_k\}$ entonces $\{y_k\}$ también es una base de X. La idea se basa en el hecho de que un operador lineal y acotado T es inversible si $\|I - T\| < 1$.

Teorema 3.2.8. *(Paley-Wiener) Sea $\{x_k\}$ una base en un espacio de Banach X. Si $\{y_k\}$ es una sucesión en X tal que*

$$\| \sum_{k=1}^{n} c_k\,(x_k - y_k)\| \leq \lambda\,\| \sum_{k=1}^{n} c_k x_k\,\|, \tag{3.5}$$

para una constante $0 \leq \lambda < 1$, escalares arbitrarios $c_1, \ldots, c_n$ y n cualquiera. Entonces $\{y_k\}$ es una base de X equivalente a $\{x_k\}$.

Demostración. Por hipótesis tenemos que si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ es convergente entonces $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(x_k - y_k)$ lo es. Como $\{x_k\}$ es una base en X, para todo $x \in X$ se tiene que $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ para alguna sucesión $c = \{c_k\}$. Definamos $T : X \to X$ que manda $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x_k - y_k)$. Luego, T es lineal y acotado. Además, $\|T\| \leq \lambda < 1$ por lo cual $I - T$ es inversible.

Finalmente, $(I - T)(x_k) = x_k - T(x_k) = x_k - (x_k - y_k) = y_k$ y se obtiene el resultado buscado. □

Este resultado en espacios de Hilbert nos da un criterio para decidir si una sucesión es una base de Riesz. El siguiente enunciado es una reformulación del teorema anterior sobre un Hilbert. Notemos que si $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ es equivalente a una base ortonormal quiere decir que es una base de Riesz.

Teorema 3.2.9. *(Paley-Wiener en un Hilbert) Sea $\{e_k\}$ una base ortonormal en $\mathcal{H}$ y $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ una sucesión tal que*

$$\| \sum_{k=1}^{n} c_k\,(e_k - x_k)\| \leq \lambda\,(\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3.6}$$

para una constante $0 \leq \lambda < 1$, escalares arbitrarios $c_1, \ldots, c_n$ y n cualquiera. Entonces $\{x_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$.

Observación 3.2.10. Si $\{x_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$ y $U : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador lineal, acotado e inversible tal que $U(x_k) = y_k$ para todo $k \in I$, entonces $\{y_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$.

Demostración. Esto es inmediato ya que si $\{x_k\}$ es una base de Riesz, entonces existen un operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ lineal, acotado e inversible y una base ortonormal $\{e_k\}$ tales que $T(e_k) = x_k$ para todo $k \in I$. Luego, $UT(e_k) = y_k$ y UT es acotado e inversible. Por lo tanto, $\{y_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$. □

Otro teorema de estabilidad entre bases ortonormales y bases de Riesz es el siguiente.

Teorema 3.2.11. *Si $\{e_k\}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}$ y $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ tal que*

$$\sum_{k\in I} |\langle x, e_k - x_k\rangle|^2 \leq \lambda \|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{H} \tag{3.7}$$

donde $\lambda < 1$, entonces $\{x_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$.

Demostración. Como $\{e_k\}$ es una base ortonormal en $\mathcal{H}$, para cada elemento $x \in \mathcal{H}$ tenemos que $x = \sum_{k\in I}\langle x, e_k\rangle e_k$. Por otro lado, definamos el operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $Tx = \sum_{k\in I}\langle x, x_k\rangle e_k$. Luego, vemos que

$$(I - T)(x) = \sum_{k\in I}\langle x, e_k - x_k\rangle e_k$$

es un operador lineal y acotado debido a (3.7). Más aún, $||I - T|| \leq \lambda < 1$, por lo tanto T es inversible y su operador dual T^* también lo es.

Observemos que $T^*(x) = \sum_{k\in I}\langle e_k, x\rangle x_k$, y que al evaluar sobre la base ortonormal tenemos que $T^*(e_j) = x_j$ para todo $j \in I$. De esto se deduce que $\{x_k\}$ es una base de Riesz. □

Incluso, esta estabilidad se puede generalizar entre dos bases de Riesz mediante el siguiente resultado que se desprende del teorema anterior.

Teorema 3.2.12. *Sea $\{x_k\}$ una base de Riesz en $\mathcal{H}$. Entonces existe $c > 0$ tal que para toda sucesión $\{y_k\} \subseteq \mathcal{H}$ que satisface*

$$\sum_{k\in I} \left|\langle x, x_k - y_k\rangle\right|^2 \leq c\|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}, \tag{3.8}$$

es una base de Riesz en $\mathcal{H}$.

Demostración. Dado que $\{x_k\}$ es una base de Riesz, existen un operador lineal, acotado e inversible $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ y una base ortonormal $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$ tales que $T(e_k) = x_k$. Luego, se ve que

$$\sum_{k\in I} \left| \langle x, x_k - y_k \rangle \right|^2 = \sum_{k\in I} \left| \langle x, T(e_k) - y_k \rangle \right|^2 = \sum_{k\in I} \left| \langle x, T(e_k - T^{-1}y_k) \rangle \right|^2 = \sum_{k\in I} \left| \langle T^* x, e_k - T^{-1}y_k \rangle \right|^2.$$

Entonces, notando que T^* es un operador inversible, podemos decir que

$$\sum_{k\in I} \left| \langle T^* x, e_k - T^{-1}y_k \rangle \right|^2 \leq c\|x\|^2 = c\|T^{*-1}T^*x\|^2 \leq c\|T^{*-1}\|^2\|T^*x\|^2.$$

Tomando $c < \frac{1}{\|T^{*-1}\|^2}$, lo anterior es equivalente a

$$\sum_{k\in I} \left| \langle x, e_k - T^{-1}y_k \rangle \right|^2 \leq \lambda\|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}$$

con $\lambda < 1$. Por el teorema 3.2.11, $\{T^{-1}y_k\}$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}$ y $T(T^{-1}y_k) = y_k$. Por la observación 3.2.10, $\{y_k\}$ resulta una base de Riesz en $\mathcal{H}$ como queríamos ver.

□

3.3 Marcos

Definición 3.3.1. $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ se dice un *marco* en $\mathcal{H}$ si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{k\in I} \left| \langle x, x_k \rangle \right|^2 \leq B\|x\|^2, \quad \forall\, x \in \mathcal{H}. \tag{3.9}$$

Las constantes A y B las llamaremos *constantes de marco*. Notemos que la definición de marco nos permite que en una misma sucesión se repitan elementos. Por ejemplo, si $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$ es una base ortonormal, tomando $\{x_k\} = \{e_1, e_1, e_2, e_2, \dots\}$ se consigue un marco con constantes $A = B = 2$. Entonces, de más está decir que un marco no necesariamente es una base. Lo que sí podemos deducir de la desigualdad izquierda en (3.9) es que un marco es completo.

Una base en $\mathcal{H}$ nos provee, para cada elemento de $\mathcal{H}$, una representación única como combinación lineal de los vectores de la base, $x = \sum c_k x_k$. Si bien esta unicidad es muy importante para la mayoría de los usos prácticos, en muchas aplicaciones la redundancia que un marco puede presentar en sus elementos, es una ventaja. Esto se ve, por ejemplo, en la aplicación de transmisión de datos. Si un coeficiente c_k de la serie se pierde durante la transmisión, en un marco podría ser posible reconstruir a x a partir de los coeficientes restantes.

Definición 3.3.2. Un marco se dice *ajustado* cuando $A = B$. Si además $A = B = 1$ entonces se dice *de Parseval*.

Recordemos la definición de operador de marco que dimos en la primer sección. Dado $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$, definimos el operador de análisis $Cx = \{\langle x, x_k\rangle\}$ y el de síntesis $Rc = \sum c_k x_k$, con $x \in \mathcal{H}$, $c \in \ell^2(I)$, luego, el operador de marco es la composición $S = RC : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ donde $Sx = \sum \langle x, x_k\rangle\, x_k$. Si tenemos que $\{x_k\}$ es un marco, por la desigualdad de la izquierda en (3.9), sabemos que en particular es una sucesión de Bessel. Por lo tanto, todos estos operadores son acotados y, en particular, S es un operador acotado, autoadjunto y positivo. Más aún, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 3.3.3. *Sea $\{x_k\}$ un marco en $\mathcal{H}$ con constantes de marco A y B. Entonces las siguientes afirmaciones son ciertas.*

1. *S es un isomorfismo topológico y $AI \le S \le BI$.*

2. *S^{-1} es un isomorfismo topológico y $B^{-1}I \le S^{-1} \le A^{-1}I$.*

3. *$\{S^{-1}x_k\}$ es un marco en $\mathcal{H}$ de constantes B^{-1} y A^{-1}.*

4. *Para cada $x \in \mathcal{H}$, se tiene la descomposición*

$$x = \sum_{k\in I} \langle x, S^{-1}x_k\rangle\, x_k = \sum_{k\in I} \langle x, x_k\rangle\, S^{-1}x_k \tag{3.10}$$

donde estas series convergen incondicionalmente en $\mathcal{H}$.

El marco $\{S^{-1}x_k\}$ del teorema se lo llama *marco dual canónico* de $\{x_k\}$ y lo notaremos como $\{\widetilde{x_k}\}$.

Los marcos son una generalización de las bases de Riesz. Esto se debe al siguiente resultado.

Proposición 3.3.4. *Una sucesión $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ es una base de Riesz si y sólo si es un marco que deja de ser un marco al quitarle un elemento.*

Dado que un marco nos garantiza la completitud, también podemos decir que una sucesión $\{x_k\}$ es una base de Riesz si y sólo si es un marco y una sucesión de Riesz.

Las bases de Riesz son la imagen por un operador lineal acotado e inversible de una base ortonormal. Si removemos la hipótesis de invertibilidad y sólo pedimos que el operador sea sobreyectivo, lo que obtendremos son marcos.

Teorema 3.3.5. *Una sucesión $\{x_k\} \subseteq \mathcal{H}$ es un marco de $\mathcal{H}$ si y sólo si existen $\{e_k\} \subseteq \mathcal{H}$ base ortonormal y un operador lineal, acotado y sobreyectivo $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tales que $T(e_k) = x_k$.*

Como T es acotado, los elementos de un marco están acotados superiormente. Pero a diferencia de las bases de Riesz, no es cierto que estén acotados inferiormente. Por ejemplo, si $\{e_k\}$ es la base ortonormal de un Hilbert $\mathcal{H}$, $\{e_1, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_2}{\sqrt{2}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \frac{e_3}{\sqrt{3}}, \dots\}$ resulta ser un marco de $\mathcal{H}$ y sus elementos no están acotado inferiormente.

3.4 Sistemas de exponenciales

De aquí en adelante nos ocuparemos únicamente en los sistemas de exponenciales $E(\Lambda) \subset L^2(\Omega)$ donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de medida finita y su conjunto de frecuencias $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. En este trabajo, vamos a identificar el espacio $L^2(\Omega)$ con los elementos de $L^2(\mathbb{R}^d)$ que se anulan afuera de Ω *ctp*. Notar que con esta identificación, $L^2(\Omega)$ resulta ser un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

El estudio de ciertas propiedades que un conjunto de frecuencias Λ pueda tener, es de gran importancia para la teoría de muestreo e interpolación. Esta teoría se desarrolló sobre los espacios de *Paley-Wiener* PW_Ω.

Definición 3.4.1. El espacio PW_Ω consiste en las funciones $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ que son la transformada

$$f(x) = \widehat{F}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} F(t)\, e^{-2\pi i x \cdot t}\, dt$$

de funciones $F \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $F = 0$ *ctp* fuera de Ω.

Notemos que al ser Ω de medida finita se tiene que

$$\widetilde{PW}_\Omega \subseteq L^2(\Omega) \subset L^1(\Omega),$$

es decir, las funciones F están en $L^1(\Omega)$ y por lo tanto f es una *función continua.*

Definición 3.4.2. Decimos que $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto *separado* si existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$|\lambda - \mu| > \delta, \quad \forall\, \lambda \neq \mu. \tag{3.11}$$

Definición 3.4.3. Se dice que un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ es un *conjunto de muestreo* para PW_Ω si el sistema de exponenciales $E(\Lambda)$ es un marco en $L^2(\Omega)$. Es decir, existen $A, B > 0$ tales que

$$A\|F\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \left| \langle F, e_\lambda \rangle \right|^2 \leq B\|F\|^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall\, F \in L^2(\Omega). \tag{3.12}$$

El hecho de que $E(\Lambda)$ sea un marco implica que para toda $F \in L^2(\Omega)$,

$$F = \sum_{\lambda \in \Lambda} \langle F, e_\lambda \rangle\, g_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} f(\lambda)\, g_\lambda \chi_\Omega,$$

donde $\{g_\lambda\}$ es el marco dual canónico de $E(\Lambda)$ en $L^2(\Omega)$. Con lo cual, transformando obtenemos

$$f = \widehat{F} = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\,(g_\lambda \chi_\Omega)\widehat{\ }. \tag{3.13}$$

Los coeficientes de esta descomposición $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ son un muestreo de f por Λ.

Observemos que en el caso particular de una base ortonormal de exponenciales $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ en $L^2(\Omega)$, para cada $f \in PW_\Omega$ obtenemos la formula de reconstrucción

$$f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\,\widehat{e_\lambda \chi_\Omega}(x) \quad ctp\, x \in \mathbb{R}^d,$$

que es lo mismo que

$$f(x) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\,\widehat{\chi_\Omega}(x-\lambda) \quad ctp\, x \in \mathbb{R}^d,$$

lo cual nos da una generalización del teorema clásico del muestreo. Esta es la razón por la cual Λ recibe el nombre conjunto de muestreo.

Definición 3.4.4. Un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ se llama *conjunto de interpolación* para PW_Ω si el sistema de exponenciales $E(\Lambda)$ es una sucesión de Riesz. Esto es, existen $A, B > 0$ tales que

$$A \sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2 \le \Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda) e_\lambda \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \le B \sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2, \quad \forall\, c \in \ell^2(\Lambda). \tag{3.14}$$

Si $E(\Lambda)$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\Omega)$, tomando el conjunto $\mathcal{H}_0 = \overline{\operatorname{span}}\, E(\Lambda)$, se tiene que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $\mathcal{H}_0$. Por lo tanto, dada una sucesión $\{c(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, podemos construir una función $F = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\, g_\lambda \chi_\Omega$, donde por $\{g_\lambda\}$ estamos notando la sucesión biortogonal de $E(\Lambda)$. Como $\{g_\lambda\}$ es una sucesión de Bessel, la serie converge y $F \in L^2(\Omega)$. Luego, transformando conseguimos una función $f = \widehat{F} \in PW_\Omega$ tal que dado $\mu \in \Lambda$,

$$f(\mu) = \langle F, e_\mu \rangle = \Big\langle \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\, g_\lambda, e_\mu \Big\rangle = c(\mu). \tag{3.15}$$

De aquí proviene el nombre de Λ como conjunto de interpolación.

Cuando $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$ tenemos que Λ es un conjunto de muestreo e interpolación para el espacio PW_Ω. Dando así, para cada función en PW_Ω, una forma de recuperarla solamente conociendo sus muestras $\{f(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$.

Observación 3.4.5. Tanto en (3.12) como en (3.14) se puede ver que las desigualdades de la derecha son en realidad una consecuencia de que Λ sea separado y por lo tanto, pueden omitirse de las definiciones. En particular, la desigualdad de la derecha en (3.12) es la desigualdad de la definición de sucesión de Bessel, con lo cual se deduce que si Λ separado, entonces $E(\Lambda)$ es sucesión de Bessel.

Demostración. Para (3.12) notemos que $F \in L^2(\Omega)$ si y sólo si $f = \widehat{F} \in PW_\Omega$ y que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \left| \langle F, e_\lambda \rangle \right|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2.$$

Además, $\|F\|_2^2 = \|f\|_2^2$ por Plancherel. Luego, es equivalente probar que para toda $f \in PW_\Omega$ vale que $\sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \le B\|f\|_2^2$.

Sea $\delta > 0$ la separación de Λ como en (3.11). Definimos la función

$$h(x) = C \prod_{j=1}^{d} h_0(x_j), \tag{3.16}$$

donde $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ y $h_0(x_j) = \chi_{[-\epsilon,\epsilon]}(x_j)$. Fijemos ϵ suficientemente pequeño para que $h(x)$ esté soportada dentro de $|x| < \frac{\delta}{2}$ y C lo ajustamos de manera tal que $|\widehat{h}(x)| \ge 1$ para todo $x \in \Omega$.

Dada cualquier función $f \in PW_\Omega$, podemos construir una función $g \in PW_\Omega$ tal que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, h(x-y)\, dy = \int_{|x-y|<\frac{\delta}{2}} g(y)\, h(x-y)\, dy.$$

Dado que $\widehat{f} = \widehat{g}\,\widehat{h}$ podemos elegir a g, por ejemplo, como la antitransformada de

$$\widehat{g}(x) = \begin{cases} \frac{\widehat{f}(x)}{\widehat{h}(x)} & x \in \Omega \\ 0 & x \notin \Omega \end{cases}$$

y luego,

$$\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 = \|\widehat{g}\,\widehat{h}\|_2^2 \ge \|\widehat{g}\|_2^2 = \|g\|_2^2.$$

Por otra parte, usando Hölder vemos que

$$|f(x)|^2 \le \|h\|_2^2 \int_{|x-y|<\frac{\delta}{2}} |g(y)|^2\, dy,$$

que combinado con la desigualdad anterior nos da que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} |f(\lambda)|^2 \le \|h\|_2^2 \sum_{\lambda\in\Lambda} \left(\int_{|\lambda-y|<\frac{\delta}{2}} |g(y)|^2\, dy \right) \overset{(*)}{\le} \|h\|_2^2 \|g\|_2^2 \le B\|f\|_2^2,$$

donde $B = \|h\|_2^2$. En $(*)$ lo que usamos fue que los conjuntos $\{y \in \mathbb{R}^d : |\lambda - y| < \frac{\delta}{2}\}$ son disjuntos, por la separabilidad de Λ y la unión sobre todos los $\lambda \in \Lambda$ está contenida en $\mathbb{R}^d$. Con esto queda demostrada la desigualdad derecha de (3.12).

Para el caso de (3.14), tomemos cualquier sucesión $\{c(\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda} \in \ell^2(\Lambda)$. Para $F = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\, e_\lambda$, usando Hölder y la Besselianidad, que demostramos cierta en el caso anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|F\|^2_{L^2(\Omega)} = \langle F, F\rangle_{L^2(\Omega)} &= \left|\sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda)\, \langle F, e_\lambda\rangle\right| \\
&\leq \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |\, \langle F, e_\lambda\rangle\, |^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq B\|F\|_{L^2(\Omega)} \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Si dividimos ambos lados por $\|F\|_{L^2(\Omega)}$ y elevamos al cuadrado obtenemos que $\|F\|^2_{L^2(\Omega)} \leq B\sum_{\lambda\in\Lambda} |c(\lambda)|^2$ como queríamos probar. □

Por otro lado, si pensamos por un momento con la dimensión uno. Cuando el conjunto $E(\Lambda)$ es una base de Riesz sobre un conjunto acotado tenemos que Λ es separado, como afirmaremos a continuación.

Observación 3.4.6. Si $E(\Lambda) \subset L^2(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado, es una sucesión de Riesz entonces $\Lambda \subset \mathbb{R}$ debe ser separado.

Demostración. Supongamos que para cada $\epsilon > 0$ existen $\lambda, \mu \in \Lambda$ tales que $|\lambda - \mu| < \epsilon$. Entonces existe un elemento f perteneciente a la sucesión biortogonal de $E(\Lambda)$ tal que $\widehat{f}(\lambda) = \langle f, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} = 1$ y $\widehat{f}(\mu) = \langle f, e_\mu\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$. Como f tiene soporte compacto, $\widehat{f}$ es derivable. Por el teorema del valor medio, tenemos que existe c entre λ y μ tal que $|\widehat{f}(\lambda) - \widehat{f}(\mu)| = |\widehat{f}\,'(c)||\lambda - \mu|$, luego resulta que $|\widehat{f}\,'(c)| > \frac{1}{\epsilon}$ y por lo tanto $\|\widehat{f}\,'\|_{L^\infty(\Omega)} > \frac{1}{\epsilon}$.

Ahora, recordando que $\widehat{f}\,' = \widehat{g}$ donde $g = -2\pi i x f$, vemos que $\frac{1}{\epsilon} < \|\widehat{g}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|g\|_{L^1(\Omega)} \leq C\,\|f\|_{L^2(\Omega)}$ (por la desigualdad de Hölder y Ω acotado). Esto implica que el conjunto biortogonal de $E(\Lambda)$ no está acotado superiormente, lo cual es absurdo. □

Si el conjunto Ω no fuera acotado esto no es verdad.

Surge la pregunta sobre cuándo podemos decir que Λ es un conjunto de muestreo o interpolación. Beurling y Landau encontraron fuertes conexiones entre los conjuntos de muestreo e interpolación y sus respectivas densidades.

Definición 3.4.7. Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto numerable. Definimos su *densidad de Beurling inferior* como

$$D^-(\Lambda) := \lim_{r\to\infty} \left(\inf_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{\#([x-r, x+r)^d \cap \Lambda)}{(2r)^d}\right). \tag{3.17}$$

Análogamente, definimos su *densidad de Beurling superior* como

$$D^+(\Lambda) := \lim_{r\to\infty}\left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \frac{\#([x-r,x+r)^d \cap \Lambda)}{(2r)^d}\right). \tag{3.18}$$

Cuando $D^-(\Lambda) = D^+(\Lambda) = D(\Lambda)$ decimos que Λ tiene *densidad de Beurling uniforme* y nos referimos a $D(\Lambda)$ como su densidad.

Beurling probó condiciones suficientes para que Λ sea un conjunto de muestreo o interpolación cuando Ω es un intervalo en la recta real.

Teorema 3.4.8. *(Beurling) Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}$ un conjunto separado y $\Omega = (-a, a) \subset \mathbb{R}$. Entonces se tiene que*

1. *Si $D^-(\Lambda) > |\Omega|$ entonces Λ es un conjunto de muestreo para PW_Ω.*
2. *Si $D^+(\Lambda) < |\Omega|$ entonces Λ es un conjunto de interpolación para PW_Ω.*

Cuando nos movemos a dimensiones mayores, las condiciones suficientes sobre Λ son más dificiles de encontrar. Por otra parte, Landau [Lan67] consiguió condiciones necesarias sobre Λ para cualquier Ω compacto.

Teorema 3.4.9. *(Landau) Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto separado y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto compacto. Entonces vale que*

1. *Si Λ es un conjunto de muestreo para PW_Ω, entonces $D^-(\Lambda) \geq |\Omega|$.*
2. *Si Λ es un conjunto de interpolación para PW_Ω, entonces $D^+(\Lambda) \leq |\Omega|$.*

En dimensión uno, si $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$ donde Ω acotado, entonces Λ es separado, por lo que vimos en la observación 3.4.6. De el teorema de Landau se deduce entonces que $D(\Lambda) = |\Omega|$.

Además, siguiendo en dimensión uno, el teorema de estabilidad de Paley-Wiener, que mencionamos en la sección 2, aplicado sobre sistemas de exponenciales nos provee del siguiente resultado.

Teorema 3.4.10. *(Paley-Wiener sobre sistema de exponenciales) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ un conjunto acotado de medida positiva y $\Lambda = \{\lambda_k\}$ una sucesión de números reales tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. Luego, existe una constante $\eta = \eta(\Omega, \Lambda)$ tal que si una sucesión $\Gamma = \{\gamma_k\}$ satisface*

$$|\lambda_k - \gamma_k| < \eta, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

entonces $E(\Gamma)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$, como f tiene soporte compacto, $\widehat{f}$ es derivable. Además, $\widehat{f}\,' = \widehat{g}$ donde $g = -2\pi i x f$ y $\|g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ para una constante C_1 que depende de Ω. luego, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_{\lambda_k} - e_{\gamma_k}\rangle|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(\lambda_k) - \widehat{f}(\gamma_k)|^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}\,'(c_k)|^2 \, |\lambda_k - \gamma_k|^2 \\ &< \eta^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, e_{c_k}\rangle|^2, \end{aligned} \tag{3.19}$$

donde c_k es un número entre λ_k y γ_k que nos brinda el teorema del valor medio. Por la observación 3.4.6 sabemos que Λ es separado, por lo tanto, tomando η lo suficientemente pequeño, el conjunto $\{c_k\}$ también es separado. Por la observación 3.4.5, sabemos que entonces $E(\{c_k\})$ es una sucesión de Bessel, con lo cual $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, e_{c_k}\rangle|^2 \leq C_2 \|g\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Luego, siguiendo con la desigualdad en (3.19) obtenemos que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_{\lambda_k} - e_{\gamma_k}\rangle|^2 < \eta^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle g, e_{c_k}\rangle|^2 \leq \eta^2 C_2 \|g\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \eta^2 C_1 C_2 \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por el teorema 3.2.12 sabemos que existe una constante $c > 0$ tal que si

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\langle f, e_{\lambda_k} - e_{\gamma_k}\rangle|^2 \leq c\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)},$$

entonces $E(\Gamma)$ es una base de Riesz. Por lo tanto, basta tomar η lo suficientemente pequeño para que se cumpla esta condición y $E(\Gamma)$ resulte ser una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. □

Este teorema nos dice que si uno hace pequeñas perturbaciones de las frecuencias de una base de Riesz de exponenciales, el resultado sigue siendo una base de Riesz de exponenciales. En el caso de $\Omega = [0,1]$ y $\Lambda = \mathbb{Z}$ este teorema vale para cualquier constante $\eta < \frac{1}{4}$. Este hecho fue demostrado por Kadec en [Kad64], y a continuación lo enunciaremos.

Teorema 3.4.11. *(Teorema $\frac{1}{4}$ Kadec) Si $\Lambda = \{\lambda_k\}$ es una sucesión de números reales tales que*

$$|\lambda_k - k| \leq \eta < \frac{1}{4}, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

entonces $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2[0,1]$.

Kadec también probó que si una sucesión verifica que $|\lambda_k - k| = \frac{1}{4}$ no necesariamente se cumple que $E(\Lambda)$ sea una base de Riesz.

Capítulo 4

La conjetura de Fuglede

Muchos resultados sobre la existencia de bases ortonormales de exponenciales fueron motivados por la conjetura de Fuglede (1974) [Fug74]. Esta conjetura establece una relación entre los conjuntos espectrales y los que teselan por traslaciones. Veamos unas definiciones.

Definición 4.0.1. Decimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto espectral si existe un conjunto discreto $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ tal que el sistema de exponenciales $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$. En tal caso, diremos que Λ es un espectro de Ω.

Definición 4.0.2. Decimos que el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ si

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega + \lambda = \mathbb{R}^d \quad \text{donde la unión es casi disjunta: } |(\Omega + \lambda) \cap (\Omega + \lambda^{'})| = 0 \quad \forall\, \lambda \neq \lambda^{'}. \tag{4.1}$$

Por ejemplo, veamos las figuras 4.1 y 4.2 de conjuntos que teselan al plano.

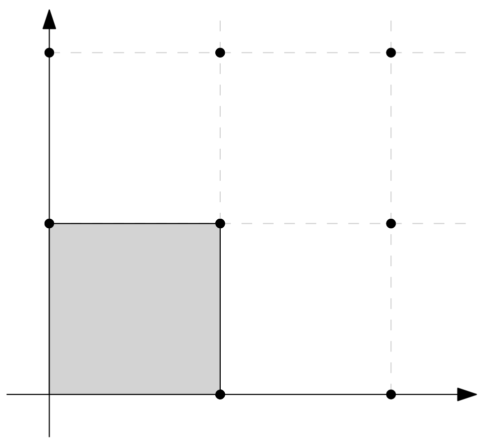


Figura 4.1: El cuadrado unitario tesela al plano por traslaciones de $\mathbb{Z}^d$.

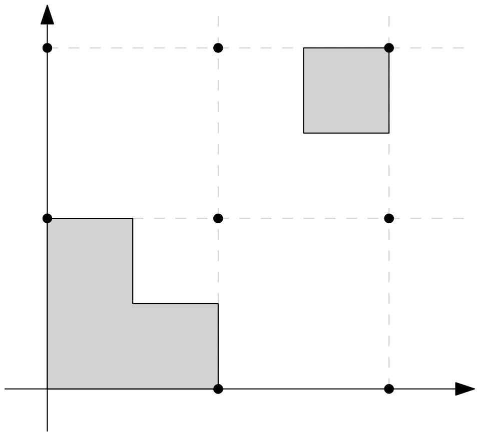


Figura 4.2: Si le sacamos una porción y la trasladamos por un elemento en $\mathbb{Z}^2$, también tesela por traslaciones de $\mathbb{Z}^2$.

La conjetura de Fuglede dice que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto espectral si y sólo si Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de un algún conjunto discreto. Se ha podido probar que esta conjetura es falsa en ambas direcciones cuando $d \geq 3$, pero se mantiene abierta para las dimensiones uno y dos. (Ver [Tao04, Mat05, KM06a, KM06b, FMM06, FR06]).

Sin embargo, existen algunos casos particulares donde la conjetura resulta ser cierta. Por ejemplo, si se pide que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sea un conjunto convexo, vale una de las implicaciones: si tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones, entonces es un conjunto espectral. Más aún, si además se toma $d = 2$ también vale la recíproca [IKT03]. Otro caso donde es cierta es cuando $\Omega \subset \mathbb{R}$ es unión de dos intervalos disjuntos, que fue demostrado por Laba [Lab01]. Un ejemplo para este último es

$$\Omega = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[1, \frac{3}{2}\right], \quad \Lambda = 2\mathbb{Z} \cup 2\mathbb{Z} - \frac{1}{2}.$$

Fuglede probó, en el mismo artículo donde enuncia la conjetura, que si uno agrega a las hipótesis que el espectro de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y el conjunto de traslaciones son un retículo, la conjetura es cierta. De hecho, este teorema es el que motivó la conjetura y lo probaremos a continuación, basándonos en la demostración dada por Iosevich [Ios].

4.1 El Teorema de Fuglede para retículos

El Teorema de Fuglede para retículos que probaremos en esta sección dice lo siguiente.

Teorema 4.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible de medida finita. Entonces, Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ por un retículo completo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ si y sólo si el sistema $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} : \lambda^* \in \Lambda^*\}$ es una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, donde $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^d$ es el retículo dual de Λ.*

Empecemos por definir un retículo completo y su dual.

Definición 4.1.2. Un retículo Λ es un subgrupo aditivo discreto de $\mathbb{R}^d$. Decimos que Λ es completo si existe una matriz inversible M de tamaño $d \times d$ tal que $\Lambda = M\mathbb{Z}^d$.

Definición 4.1.3. Dado un retículo completo $\Lambda = M\mathbb{Z}^d$, donde $M = [v_1|v_2|\dots|v_n]$, llamamos dominio fundamental de Λ a $\mathcal{Q}_\Lambda = \{x \in \mathbb{R}^d : \ x = \sum \alpha_k v_k, \ 0 \leq \alpha_k < 1\} = M[0,1)^d$. Este es un conjunto de representantes del cociente $\mathbb{R}^d/\Lambda$.

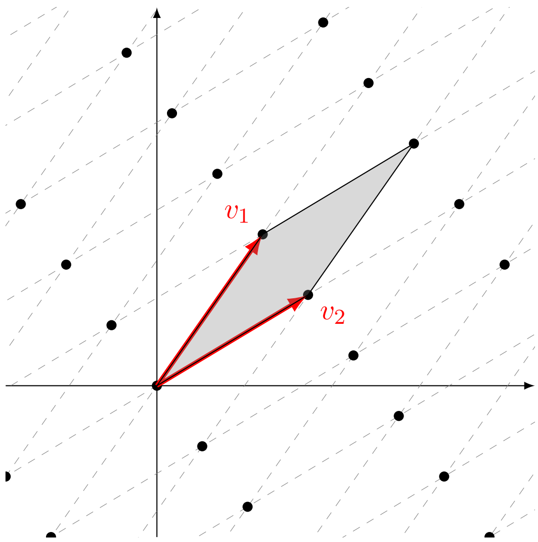


Figura 4.3: El paralelogramo formado por los vectores v_1 y v_2 es un dominio fundamental.

Definición 4.1.4. Dado un retículo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, definimos como su retículo dual a $\Lambda^* = \{\lambda^* \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda^*, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}, \ \forall \lambda \in \Lambda\}$.

Proposición 4.1.5. *Sea $\Lambda = M\mathbb{Z}^d$ un retículo completo, entonces el retículo dual es $\Lambda^* = (M^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$. En particular, Λ^* también es un retículo completo.*

Demostración. Supongamos $\lambda^* \in \Lambda^*$, entonces $\langle \lambda^*, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Como $\Lambda = M\mathbb{Z}^d$, se obtiene que $\langle \lambda^*, Mn \rangle \in \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^d$ o, lo que es equivalente, $n^t M^t \lambda^* \in \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{Z}^d$. Si tomamos $n = e_j$ donde e_j es el vector canónico, tenemos que $e_j M^t \lambda^* \in \mathbb{Z}$ para $j = 1, \dots, d$. Esto significa que $M^t \lambda^* \in \mathbb{Z}^d$ y por lo tanto $\lambda^* \in (M^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$.

Por el otro lado, debemos ver que cada elemento $\lambda^* \in (M^t)^{-1}\mathbb{Z}^d$ está en Λ^*, es decir que $\langle \lambda^*, \lambda \rangle \in \mathbb{Z}$ para cada $\lambda \in \Lambda$. Dado que $\langle (M^t)^{-1}n, Mm \rangle = \langle n, m \rangle \in \mathbb{Z}$ para todo $n, m \in \mathbb{Z}^d$, queda completada la demostración. □

El dominio fundamental de un retículo completo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ es un conjunto espectral y su espectro está dado por el dual Λ^*, como veremos a continuación.

Teorema 4.1.6. *Dado un retículo completo Λ y su dual Λ^*, el dominio fundamental $\mathcal{Q}_\Lambda$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ y el sistema $\{\frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} : \lambda^* \in \Lambda^*\}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)$.*

Demostración. Primero, comprobemos que el sistema es ortonormal en $L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)$. Sean $\lambda^*, \lambda^{*'} \in \Lambda^*$ donde $\lambda^* = (M^t)^{-1}n$ y $\lambda^{*'} = (M^t)^{-1}m$ con $n, m \in \mathbb{Z}^d$. Mediante la sustitución $M^{-1}t = u$ y utilizando además que $|\mathcal{Q}_\Lambda| = |\det M|$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*}, \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^{*'}} \right\rangle_{L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)} &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} e^{-2\pi i \langle t, \lambda^* - \lambda^{*'} \rangle} \, dt \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} e^{-2\pi i \langle t, (M^t)^{-1}(n-m) \rangle} \, dt \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} e^{-2\pi i \langle M^{-1}t, (n-m) \rangle} \, dt \\ &= \frac{|\det M|}{|\mathcal{Q}_\Lambda|} \int_{[0,1]^d} e^{-2\pi i \langle u, (n-m) \rangle} \, du \\ &= \delta_{n-m}.\end{aligned}$$

Para ver que el sistema es además una base debemos ver que es completo. Supongamos $f \in L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)$ tal que $\langle f, \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} \rangle_{L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)} = 0$ para cada $\lambda^* \in \Lambda^*$ donde $\lambda^* = (M^t)^{-1}n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^d$. Haciendo la sustitución $t = Mu$, obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} f(t)\, e^{-2\pi i \langle \lambda^*, t \rangle} \, dt = \frac{|\det M|}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \int_{[0,1]^d} f(Mu)\, e^{-2\pi i \langle \lambda^*, Mu \rangle} \, du \\ &= |\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1]^d} f(Mu)\, e^{-2\pi i \langle (M^t)^{-1}n, Mu \rangle} \, du \\ &= |\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}} \int_{[0,1]^d} f(Mu)\, e^{-2\pi i \langle n, u \rangle} \, du .\end{aligned}$$

Esto quiere decir que $\langle f \circ M, e_n \rangle_{L^2[0,1]^d} = 0$ para cada $n \in \mathbb{Z}^d$. Como ya sabemos, el sistema $E(\mathbb{Z}^d)$ es completo en $L^2[0,1]^d$, entonces $f \circ M = 0$. Dado que M es una matriz inversible, obtenemos que $f = 0$ y finalmente $\{\frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} : \lambda^* \in \Lambda^*\}$ es completo en $L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)$.

Nos resta probar que $\mathcal{Q}_\Lambda$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ. Es claro que $[0,1]^d$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de $\mathbb{Z}^d$ ya que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} [0,1]^d + k = \mathbb{R}^d.$$

Multiplicando por la matriz M tenemos que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} M[0,1]^d + Mk = \mathbb{R}^d.$$

Esto es equivalente a

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{Q}_\Lambda + \lambda = \mathbb{R}^d,$$

como queríamos ver. $\square$

Otra forma de caracterizar que el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ está dada por el siguiente resultado.

Teorema 4.1.7. *Sea $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$, el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ si y sólo si*

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x+\lambda) = 1 \quad ctp\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.2}$$

Demostración. Supongamos que (4.2) vale. Entonces es cierto que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \Omega + \lambda = \mathbb{R}^d$. Más aún, si existen $\lambda \neq \lambda' \in \Lambda$ tales que $|(\Omega+\lambda)\cap(\Omega+\lambda')| > 0$, la suma en (4.2) sería más grande que 1, lo cual es una contradicción.

Reciprocamente, definamos $\Phi(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x+\lambda)$. Si Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ, sabemos que $\Phi(x) \geq 1$ $ctp\, x \in \mathbb{R}^d$. Ahora, supongamos que el conjunto $E := \{x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x) > 1\}$ tiene medida positiva. Para cada $x \in E$ existen $\lambda \neq \lambda'$ tales que $x+\lambda,\, x+\lambda' \in \Omega$. Si construimos los conjuntos $E_{\lambda,\lambda'} := \{x \in E : x+\lambda,\, x+\lambda' \in \Omega\}$, estos cubren a E. Es decir,

$$E = \bigcup_{\lambda\neq\lambda'} E_{\lambda,\lambda'}$$

y por lo tanto, al menos uno de ellos debe tener medida positiva. Sin embargo, cada uno de dichos conjuntos verifica que $E_{\lambda,\lambda'} \subset (\Omega-\lambda)\cap(\Omega-\lambda')$ que por (4.1) tienen medida nula, con lo cual llegamos a un absurdo. El absurdo provino de suponer que la medida de E era positiva, por lo que se deduce que $\Phi(x) = 1$ $ctp\, x \in \mathbb{R}^d$. □

Proposición 4.1.8. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de medida finita y $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *El sistema $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal en $L^2(\Omega)$.*
2. $\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{f\chi_\Omega}(\lambda)|^2$ *para toda* $f \in L^2(\Omega)$.
3. $|\Omega|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{\chi_\Omega}(x+\lambda)|^2, \quad ctp\, x \in \mathbb{R}^d.$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Por la igualdad de Parseval,

$$\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle f, \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda\rangle|^2.$$

Luego, es suficiente ver que $\langle f, \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\widehat{f}(\lambda)$. Esto es inmediato ya que

$$\langle f, \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\int_\Omega f(t)\, e^{-2\pi i\lambda\cdot t}\, dt = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^d} f(t)\chi_\Omega(t)\, e^{-2\pi i\lambda\cdot t}\, dt = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, \widehat{f\chi_\Omega}(\lambda).$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Si elegimos $f(t) = e_{-x}(t)\,\chi_\Omega(t)$, con $x \in \mathbb{R}^d$ entonces $\|f\|^2_{L^2(\Omega)} = |\Omega|$ y $f \in L^2(\Omega)$. Por (2), vemos que

$$|\Omega| = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{e_{-x}\,\chi_\Omega}(\lambda)|^2 = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{\chi_\Omega}(x+\lambda)|^2,$$

multiplicando por $|\Omega|$ en ambos lados,

$$|\Omega|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{\chi_\Omega}(x+\lambda)|^2$$

lo cual vale para todo $x \in \mathbb{R}^d$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $\mu \in \Lambda$, entonces

$$|\Omega|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda} |\widehat{\chi_\Omega}(\lambda-\mu)|^2 = |\widehat{\chi_\Omega}(0)|^2 + \sum_{\lambda\neq\mu} |\widehat{\chi_\Omega}(\lambda-\mu)|^2.$$

Notemos que $\widehat{\chi_\Omega}(0) = \int_\Omega \chi_\Omega(t)\, e^{-2\pi i 0\cdot t}\, dt = |\Omega|$ y luego

$$|\Omega|^2 = |\Omega|^2 + \sum_{\lambda\neq\mu} |\widehat{\chi_\Omega}(\lambda-\mu)|^2.$$

Como consecuencia, $\widehat{\chi_\Omega}(\lambda-\mu) = 0$ siempre que $\lambda \neq \mu$. Recordar que

$$\widehat{\chi_\Omega}(\lambda-\mu) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega(t) e^{-2\pi i(\lambda-\mu)\cdot t}\, dt = \int_\Omega e_\mu(t)\overline{e_\lambda(t)}\, dt.$$

Por lo cual $E(\Lambda)$ es ortogonal y $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal.

Por otra parte, probemos que $\{\, e_x \,:\, x \in \mathbb{R}^d\}$ es completo en $L^2(\Omega)$. Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que $\langle f, e_x\rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Esto quiere decir que $\int_\Omega f(t)\, e^{-2\pi i x\cdot t}\, dt = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$ y como resultado $\widehat{f\chi_\Omega}(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$. Entonces $f = 0$ *ctp* en Ω y el sistema es completo.

Consideremos ahora el conjunto $S = \operatorname{span}\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}\, e_\lambda :\ \lambda \in \Lambda\} \subseteq L^2(\Omega)$. Afirmamos que la función definida por $g(t) := e_x(t)\,\chi_\Omega(t)$ pertenece al conjunto S. En efecto, uno puede reescribir (3) como

$$\|e_x\chi_\Omega\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{\lambda\in\Lambda} |\langle e_x, e_\lambda\rangle_{L^2(\Omega)}|^2,$$

donde la expresión de la derecha es $\|P_S(g)\|^2_{L^2(\Omega)}$ siendo P_S la proyección ortogonal sobre S. Obtenemos que

$$\|g\|^2_{L^2(\Omega)} = \|P_S(g)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Por otro lado,

$$\|g\|^2_{L^2(\Omega)} = \|P_S(g)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|P_{S^\perp}(g)\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Luego, $\|P_{S^\perp}(g)\|^2_{L^2(\Omega)} = 0$ y por lo tanto $P_{S^\perp}(g) = 0$ o, equivalentemente, $P_S(g) = g$, lo que nos da que $g \in S$.

Finalmente, obtenemos $\{ e_x : x \in \mathbb{R}^d\} \subseteq S$ y como span$\{ e_x : x \in \mathbb{R}^d\}$ es denso en $L^2(\Omega)$, entonces $\overline{S} = L^2(\Omega)$ y el sistema $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es completo en $L^2(\Omega)$. Finalmente, tenemos que $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, como queríamos ver. □

Teorema 4.1.9. *(Fuglede) Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto de medida finita, $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ un retículo completo y $\Lambda^* \subset \mathbb{R}^d$ su retículo dual. Entonces, son equivalentes:*

1. $\sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x + \lambda) = 1$ *ctp* $x \in \mathbb{R}^d$.
2. $\sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(x + \lambda^*)|^2 = |\Omega|^2$ *ctp* $x \in \mathbb{R}^d$.

Demostración. Antes de empezar con la prueba de este teorema, definamos

$$f(x) := \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x + \lambda), \qquad F(x) := \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(x + \lambda^*)|^2.$$

(1) ⇒ (2). Supongamos $f(x) = 1$, Por el teorema 4.1.7, esto es equivalente decir que Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ. También, como vimos en el teorema 4.1.6, $\mathcal{Q}_{\Lambda^*}$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ^* y $\{\frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathcal{Q}_{\Lambda^*})$.

Chequeemos que $F \in L^1(\mathcal{Q}_{\Lambda^*})$. Utilizando el teorema de la convergencia monótona y haciendo la sustitución $u = t + \lambda^*$ vemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}} |F(t)|\, dt &= \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}} \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(t + \lambda^*)|^2\, dt = \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}} |\widehat{\chi_\Omega}(t + \lambda^*)|^2\, dt \\ &= \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}+\lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(u)|^2\, du = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\chi_\Omega}(u)|^2\, du < +\infty\end{aligned}$$

lo cual nos dice que $F \in L^1(\mathcal{Q}_{\Lambda^*})$.

Computemos los coeficientes de Fourier de F. Para cada $\lambda \in \Lambda$, $\widehat{F}(\lambda) = \langle F, \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} e_\lambda \rangle_{L^2(\mathcal{Q}_{\Lambda^*})}$. Sustituyendo $u = t + \lambda^*$ y aplicando el teorema de la convergencia monótona, esto es

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\lambda) &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}} \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(t + \lambda^*)|^2\, e^{-2\pi i\lambda\cdot t}\, dt \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}} |\widehat{\chi_\Omega}(t + \lambda^*)|^2\, e^{-2\pi i\lambda\cdot t}\, dt \\ &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda^*\in\Lambda^*} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}+\lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(u)|^2\, e^{-2\pi i\lambda\cdot(u-\lambda^*)}\, du.\end{aligned}$$

Notar que $e^{-2\pi i\lambda\cdot\lambda^*} = 1$ porque $\langle \lambda, \lambda^* \rangle \in \mathbb{Z}$ ya que Λ^* es el retículo dual de Λ. Entonces la última expresión de más arriba es igual a

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} \int_{\mathcal{Q}_{\Lambda^*}+\lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(u)|^2 \, e^{-2\pi i\lambda\cdot u} \, du \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\chi_\Omega}(u)|^2 \, e^{-2\pi i\lambda\cdot u} \, du \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\chi_\Omega}(u) \overline{e^{2\pi i\lambda\cdot u} \, \widehat{\chi_\Omega}(u)} du \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\chi_\Omega}(u) \overline{\widehat{\chi_\Omega}(u+\lambda)} du \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega(u) \, \chi_\Omega(u+\lambda) \, du \\
&= \frac{|\Omega \cap (\Omega+\lambda)|}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned}$$

Recodemos que como Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ, entonces $|(\Omega+\lambda) \cup (\Omega+\lambda')| = 0$ cuando $\lambda \neq \lambda'$ como se definió en (4.1). Por esta razón, el resultado del cálculo que hicimos es

$$\widehat{F}(\lambda) = \begin{cases} \frac{|\Omega|}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|^{\frac{1}{2}}} & \lambda = 0 \\ 0 & \lambda \neq 0 \end{cases}$$

y en consecuencia, la función F se reconstruye como

$$F(x) = \frac{|\Omega|}{|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}|} \tag{4.3}$$

Por otro lado, nuevamente por el teorema 4.1.7, pero esta vez invirtiendo los roles, sabemos que $\mathcal{Q}_\Lambda$ tesela a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de Λ y $\{\frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} \ : \ \lambda^* \in \Lambda^*\}$ es una base ortonormal en $L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)$.

Computemos los coeficientes de Fourier f, mediante $\widehat{f}(\lambda^*) = \langle f, \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} \rangle_{L^2(\mathcal{Q}_\Lambda)}$ donde $\lambda^* \in \Lambda^*$. Haciendo uso de el teorema de la convergencia monótona y el cambio de variables $u = t + \lambda$, esto nos da

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\lambda^*) &= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(t+\lambda) \, e^{-2\pi i\lambda^*\cdot t} \, dt \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{\mathcal{Q}_\Lambda} \chi_\Omega(t+\lambda) \, e^{-2\pi i\lambda^*\cdot t} \, dt \\
&= \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega(u) \, e^{-2\pi i\lambda^*\cdot u} \, du \\
&= \frac{\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*)}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Se ve que $\widehat{f}(0) = \frac{\widehat{\chi_\Omega}(0)}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} = \frac{|\Omega|}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}}$. Como $f(x) = 1$, necesariamente

$$\widehat{f}(\lambda^*) = \begin{cases} |\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}} & \lambda^* = 0 \\ 0 & \lambda^* \neq 0 \end{cases}$$

de lo que se deduce que $\frac{|\Omega|}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}} = |\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}$ y por lo tanto

$$|\Omega| = |\mathcal{Q}_\Lambda|. \tag{4.5}$$

Como sabemos que

$$|\mathcal{Q}_\Lambda| = |M[0,1)^d| = |\det M|, \qquad |\mathcal{Q}_{\Lambda^*}| = |(M^t)^{-1}[0,1)^d| = \left|\frac{1}{\det M}\right|,$$

tenemos que

$$|\mathcal{Q}_{\Lambda^*}| = |\mathcal{Q}_\Lambda|^{-1}.$$

Si juntamos esto con (4.5) y (4.3), obtenemos que $F = |\Omega|^2$ como queríamos ver.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supongamos que $F(x) = |\Omega|^2$. Por lo visto en (4.3), sabemos que $|\Omega|^2 = |\Omega||\mathcal{Q}_\Lambda|$ y en consecuencia, $|\Omega| = |\mathcal{Q}_\Lambda|$. Si reemplazamos este resultado en (4.4) se llega a que

$$\widehat{f}(\lambda^*) = \frac{\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*)}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}.$$

Ahora, necesitamos saber qué valores toma $\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*)$ sobre los $\lambda^* \in \Lambda^*$, para esto, notemos que como $F(x) = \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(x + \lambda^*)|^2 = |\Omega|^2$, si evaluamos en 0 se obtiene

$$F(0) = \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} |\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*)|^2 = |\Omega|^2.$$

Dado que $\widehat{\chi_\Omega}(0) = |\Omega|$,

$$|\Omega|^2 + \sum_{\lambda^* \neq 0} |\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*)|^2 = |\Omega|^2,$$

de lo cual se deduce que

$$\widehat{\chi_\Omega}(\lambda^*) = \begin{cases} |\Omega| & \lambda^* = 0 \\ 0 & \lambda^* \neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, $\widehat{f}(0) = \frac{\widehat{\chi_\Omega}(0)}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}}$ y nos da que

$$\widehat{f}(\lambda^*) = \begin{cases} |\Omega|^{\frac{1}{2}} & \lambda^* = 0 \\ 0 & \lambda^* \neq 0 \end{cases}$$

Finalmente, la reconstrucción de f nos da $f(x) = \frac{1}{|\mathcal{Q}_\Lambda|^{\frac{1}{2}}}|\Omega|^{\frac{1}{2}} = \frac{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} = 1$ que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Juntando la proposición 4.1.8 con el teorema 4.1.9 vemos que es equivalente que el sistema $\{\frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} e_{\lambda^*} : \lambda^* \in \Lambda^*\}$ sea una base ortonormal en $L^2(\Omega)$ a que Ω tesele a $\mathbb{R}^d$ por traslaciones del retículo Λ. Con esto queda probado el teorema 4.1.1 de Fuglede para retículos.

4.2 Multiteselados por retículos y bases de Riesz

En la sección anterior probamos la conjetura de Fuglede para el caso de conjuntos que teselan $\mathbb{R}^d$ al ser trasladados por retículos. Allí por teselar nos referimos estrictamente a cubrir el espacio sin solapamientos (salvo por conjuntos de medida cero). Cuando uno permite que el conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ tesele con multiplicidad, no es cierto que el conjunto sea espectral [IKT03]. Sin embargo, Grepstad y Lev [GL14], demostraron que si un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, Riemann-integrable (es decir, que el borde del conjunto tenga medida nula) y acotado, es un multiteselado por un retículo, entonces admite una base de Riesz de exponenciales. Más tarde, Kolountzakis [Kol15] pudo probarlo sin la hipótesis de Riemann-integrable. Nos ocuparemos en esta sección de desarrollar dicho trabajo.

Definición 4.2.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ medible. Diremos que Ω tesela $\mathbb{R}^d$ por traslaciones de $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ a nivel $k \in \mathbb{N}$ si

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\Omega(x + \lambda) = k \quad ctp\, x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.6}$$

Cuando no especificamos k, asumimos que $k = 1$.

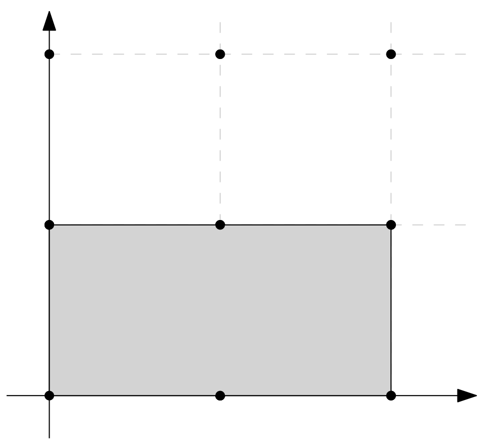


Figura 4.4: El rectángulo de base 2 y altura 1, multitesela al plano a nivel 2 por traslaciones de $\mathbb{Z}^2$.

El teorema que queremos demostrar es el siguiente.

Teorema 4.2.2. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es acotado, medible y tesela a $\mathbb{R}^d$ a nivel k por traslaciones de un retículo Λ. Entonces existen vectores $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ tales que las exponenciales*

$$\{e_{(a_j+\lambda^*)} : j = 1, \ldots, k, \ \lambda^* \in \Lambda^*\}, \tag{4.7}$$

forman una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. Los vectores $a_1, \ldots, a_k$ pueden ser elegidos para depender sólo de Λ y k y no de Ω.

Para ello probaremos primero dos lemas que nos serán de utilidad.

Lema 4.2.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible. Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ a nivel k cuando es trasladado por un retículo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ si y sólo si podemos escribir*

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \cup R, \tag{4.8}$$

donde R tiene medida cero y los Ω_j son medibles, disjuntos y cada uno tesela (a nivel 1) a $\mathbb{R}^d$ por Λ.

Demostración. Es claro que si Ω es la unión de k conjuntos disjuntos que teselan a $\mathbb{R}^d$ salvo un conjunto de medida cero, entonces Ω tesela k veces.

Reciprocamente, supongamos que Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ a nivel k. Sea $\mathcal{Q}_\Lambda$ un dominio fundamental de Λ. Para todo $x \in \mathcal{Q}_\Lambda$, salvo un conjunto de medida cero que llamaremos E, sabemos que $\sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_\Omega(x+\lambda) = k$. Tomemos $\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una enumeración de los elementos en Λ y definamos

$$i_j(x) = \{n \in \mathbb{N} : \sum_{s=1}^{n} \chi_\Omega(x+\lambda_s) = j\}, \quad j = 1, \ldots, k,$$

y los conjuntos

$$E_{j,n} = \{x \in \mathcal{Q}_\Lambda \setminus E : i_j(x) = n\}.$$

Estos $E_{j,n}$ son medibles ya que se pueden escribir como la intersección de los conjuntos

$$E_{j,n} = \{x \in \mathcal{Q}_\Lambda \setminus E : \sum_{s=1}^{n} \chi_\Omega(x+\lambda_s) = j\} \bigcap \{x \in \mathcal{Q}_\Lambda \setminus E : \sum_{s=1}^{n-1} \chi_\Omega(x+\lambda_s) = j-1\},$$

donde cada uno de ellos es medible por ser la preimagen de un punto por una función medible.

Para $j = 1, \ldots, k$ definimos $\Omega_j = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_{j,n}+\lambda_n)$. Estos conjuntos son unión numerable de medibles, por lo tanto son medibles. Además, es fácil ver que son disjuntos. En efecto, sea $j \neq j'$ y supongamos que hay un elemento $x \in \Omega_j \cup \Omega_{j'}$. Luego, como $\mathcal{Q}_\Lambda$ tesela a $\mathbb{R}^d$, existen únicos $y \in \mathcal{Q}_\Lambda$ y $\lambda_n \in \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $x = y + \lambda_n$. Como $x \in \Omega_j$ se deduce que $y \in E_{j,n}$ y por lo tanto $\sum_{s=1}^{n} \chi_\Omega(y+\lambda_s) = j$. Por el otro lado, $x \in \Omega_{j'}$ implica que $y \in E_{j',n}$, con lo cual $\sum_{s=1}^{n} \chi_\Omega(y+\lambda_s) = j'$, llegando así a un absurdo.

Probemos que cada Ω_j tesela a $\mathbb{R}^d$ por Λ. Para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$, existen únicos $y \in \mathcal{Q}_\Lambda$ y $\lambda \in \Lambda$ tales que $x = y + \lambda$. Tomando $n = i_j(y)$, tenemos que $y \in E_{j,n}$. Luego, $y + \lambda_n \in E_{j,n} + \lambda_n \subset \Omega_j$ y finalmente $x = (y + \lambda_n) + (\lambda - \lambda_n)$.

Por último, vemos que $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \Omega_k \cup R$ donde $R = \Omega \setminus \Omega_1 \cap \cdots \cap \Omega_k$ tiene medida cero por estar contenido en $E + \Lambda$. Para ello, basta ver que para todo $x \in \Omega \setminus R$, $x \in \Omega_j$ para algún $j = 1, \ldots, k$. Esto es inmediato porque si $x \in \Omega \setminus R$ existen únicos $y \in \mathcal{Q}_\Lambda$ y $\lambda_n \in \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tales que $x = y + \lambda_n$. Tomando $j = \sum_{s=1}^{n} \chi_\Omega(y+\lambda_s)$, tenemos que $y \in E_{j,n}$, por lo cual, $x \in \Omega_j$.

□

Lema 4.2.4. *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es acotado, medible y tesela a $\mathbb{R}^d$ a nivel k por traslaciones de un retículo $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$. Entonces existen $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ tales que lo siguiente es cierto.*

Por cada $f \in L^2(\Omega)$ existen únicas funciones medibles $f_j : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, k$ tales que

1. *Las f_j son Λ-periódicas.*

2. *Las f_j están en L^2 para todo dominio que tesele a nivel 1 por Λ.*

3. *Tenemos la descomposición*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} e_{a_j}(x)\, f_j(x) \quad ctp\, x \in \Omega. \tag{4.9}$$

Finalmente, tenemos que

$$A\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \le \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \le B\|f\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.10}$$

donde $0 < A, B < \infty$ que dependen sólo de Ω, Λ y k pero no de f.

Demostración. Usando el lema 4.2.3, podemos escribir a Ω como la unión disjunta

$$\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k \cup R,$$

donde cada Ω_j es un teselado a nivel 1 por Λ. De esta manera, para casi todo $x \in \mathbb{R}^d$ podemos definir los valores $w_j(x) \in \Omega_j$ y $\lambda_j(x) \in \Lambda$ como los únicos que verifican que

$$w_j(x) = x + \lambda_j(x). \tag{4.11}$$

Estos mapeos w_j son funciones medibles que preservan la medida sobre los dominios fundamentales de Λ. Para probar eso, definamos los conjuntos

$$E_{j,\lambda} = \{x \in \Omega_1 \,:\, x + \lambda \in \Omega_j\} \quad j = 1, \dots, k,\ \lambda \in \Lambda,$$

que son medibles por ser la intersección $E_{j,\lambda} = (\Omega_1 + \lambda) \cap \Omega_j$ de conjuntos medibles. Además, $\Omega_1 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_{j,\lambda}$. Con lo cual, podríamos escribir a los $w_j(x)$ de la siguiente forma

$$w_j(x) = x + \sum_{\lambda\in\Lambda} \chi_{E_{j,\lambda}}(x)\lambda,$$

y se ve entonces que son funciones medibles. El hecho de que preseva la medida se debe a que es una función que traslada los conjuntos.

Sea $f \in L^2(\Omega)$. Queremos construir las funciones f_j como pide el lema. Observemos que, como queremos que sean Λ-periódicas, basta construirlas sobre el conjunto Ω_1 y luego extenderlas a $\mathbb{R}^d$ por periodicidad.

Podemos reescribir la descomposición (4.9) de la siguiente manera. Para cada $x \in \Omega_1$ y $r = 1, \dots, k$:

$$f(w_r(x)) = \sum_{j=1}^{k} e_{a_j}(x - \lambda_r(x))\, f_j(x).$$

Esta ecuación se puede ver como un sistema lineal de tamaño $k \times k$ $F = M\widetilde{F}$ donde $F := \{f(w_r(x))\}_r$, $\widetilde{F} := \{f_j(x)\}_j$ y $M := \{e_{a_j}(x - \lambda_r(x))\}_{r,j}$. Es decir,

$$\begin{bmatrix} f(w_1(x)) \\ f(w_2(x)) \\ \vdots \\ f(w_k(x)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\big(a_1 \cdot (x - \lambda_1(x))\big) & \cdots & e\big(a_k \cdot (x - \lambda_1(x))\big) \\ e\big(a_1 \cdot (x - \lambda_2(x))\big) & \cdots & e\big(a_k \cdot (x - \lambda_2(x))\big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e\big(a_1 \cdot (x - \lambda_k(x))\big) & \cdots & e\big(a_k \cdot (x - \lambda_k(x))\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_k(x) \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Aquí estamos notando $e(t \cdot x) = e_t(x)$.

Notemos que el sistema (4.12) y su matriz $M = M(x) \in \mathbb{C}^{k\times k}$ dependen de $x \in \Omega_1$. Factorizando a M, podemos reescribirla como

$$M(x) = N(x)\, D(x), \tag{4.13}$$

donde $N = N(x) := \{e(-a_j \cdot \lambda_r(x))\}_{r,j}$ y $D = D(x) := \operatorname{diag}\Big(e(a_1 \cdot x), \dots, e(a_k \cdot x)\Big)$. Cuando uno varía $x \in \Omega_1$, la cantidad de matrices diferentes $N(x)$ (fijados los a_j) es finita y no depende de f. Esto se debe a que los $\lambda_r(x)$ forman parte de los elementos de Λ que están en el conjunto $\Omega - \Omega$ que es acotado, ya que Ω es acotado.

Veamos ahora que los vectores $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ pueden ser elegidos de forma tal que todas las (finitas) matrices N sean invertibles. En efecto, el determinante de dichas matrices es

$$\det N(x) = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{Sg}(\sigma)\, e\Big(-\sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \lambda_{\sigma(j)}(x)\Big), \tag{4.14}$$

donde S_k denota el grupo de permutaciones de $\{1, \ldots, k\}$. Fijemos $x \in \Omega_1$. Por como definimos los $\lambda_r(x)$ y dado que los Ω_r son disjuntos, no puede haber dos $\lambda_r(x)$ iguales. Pensemos a la expresión (4.14) como una función del vector $a := (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{dk}$. De esta manera, nos queda que es un polinomio trigonométrico no idénticamente nulo, ya que las frecuencias

$$\lambda_\sigma(x) = (\lambda_{\sigma(1)}(x), \ldots, \lambda_{\sigma(k)}(x)) \in \mathbb{R}^{dk}, \quad \sigma \in S_k, \tag{4.15}$$

son todas distintas, precisamente por que los $\lambda_r(x)$ son distintos. Luego, los ceros de este polinomio forman un conjunto de medida cero.

Al tener finitas matrices N, tenemos finitos de dichos polinomios trigonométricos. La unión de los conjuntos de ceros de todos estos polinomios tiene medida cero. Entonces, podemos encontrar un $a \in \mathbb{R}^{dk}$ donde ninguno de ellos se anule y, por lo tanto, todas las matrices N resultan invertibles.

Dada dicha elección de $a \in \mathbb{R}^{dk}$, para cada $x \in \Omega_1$ tenemos que el sistema (4.12) tiene solución con la siguiente forma

$$\widetilde{F}(x) = D(x)\, N^{-1}(x)\, F(x). \tag{4.16}$$

Debido a que $\|D(x)\| = 1$ para cualquier x y que, tanto $\|N(x)\|$ como $\|N^{-1}(x)\|$, se pueden acotar por el máximo de las normas para las finitas posibles matrices, existen C_1 y C_2 constantes tales que

$$\|F(x)\|^2 \leq \|N(x)\|^2 \|D(x)\|^2 \|\widetilde{F}(x)\|^2 \leq \frac{1}{C_1} \|\widetilde{F}(x)\|^2 \quad \text{y}$$
$$\|\widetilde{F}(x)\|^2 \leq \|D(x)\|^2 \|N^{-1}(x)\|^2 \|F(x)\|^2 \leq C_2 \|F(x)\|^2,$$

Finalmente, vale que

$$C_1 \|F(x)\|^2_{\ell^2} \leq \|\widetilde{F}(x)\|^2_{\ell^2} \leq C_2 \|F(x)\|^2_{\ell^2},$$

lo cual es equivalente a que

$$C_1 \sum_{r=1}^{k} |f(w_r(x))|^2 \leq \sum_{j=1}^{k} |f_j(x)|^2 \leq C_2 \sum_{r=1}^{k} |f(w_r(x))|^2.$$

Integrando sobre Ω_1 obtenemos

$$C_1 \sum_{r=1}^{k} \int_{\Omega_1} |f(w_r(x))|^2 dx \leq \sum_{j=1}^{k} \int_{\Omega_1} |f_j(x)|^2 dx \leq C_2 \sum_{r=1}^{k} \int_{\Omega_1} |f(w_r(x))|^2 dx. \tag{4.17}$$

Haciendo el cambio de variables $u = w_r(x)$, se ve que

$$\int_{\Omega_1} |f(w_r(x))|^2 dx = \int_{\Omega_r} |f(u)|^2 du = \|f\|^2_{L^2(\Omega_r)}.$$

Además, al ser los conjuntos Ω_r disjuntos, $\sum_{r=1}^k \|f\|^2_{L^2(\Omega_r)} = \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$. Por lo tanto (4.17) es equivalente a

$$C_1\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq C_2\|f\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{4.18}$$

Notemos que por periodicidad, sabemos que $\|f_j\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \|f_j\|^2_{L^2(\Omega_r)}$ con $r = 1, \ldots, k$ y entonces $\sum_{r=1}^k \|f_j\|^2_{L^2(\Omega_1)} = \sum_{r=1}^k \|f_j\|^2_{L^2(\Omega_r)} = \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)}$. Por lo tanto, tomando la suma sobre $r = 1, \ldots, k$ de (4.18) se ve que

$$A\|f\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq B\|f\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{4.19}$$

donde $A = kC_1$ y $B = kC_2$, que es la desigualdad (4.10) que buscabamos. La unicidad de la descomposición (4.9) se debe a que por cada elección de $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$, el sistema lineal (4.12) admite una única solución. $\square$

Demostración del teorema 4.2.2. Ya nos encontramos listos para demostrar el teorema.

Demostración. Sea $f \in L^2(\Omega)$. Por el lema 4.2.4 sabemos que existen vectores $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^d$ y $f_1, \ldots, f_k$ funciones medibles que descomponen a f como en (4.9). Como las f_j están en $L^2(D)$ para cualquier dominio D que tesele a nivel 1 por Λ, podemos aplicar el teorema de Fuglede para retículos, que probamos en la sección anterior 4.1, que dice que $\{e_{\lambda^*} : \lambda^* \in \Lambda^*\}$ forma una base ortogonal en $L^2(D)$, por lo cual

$$f_j(x) = \sum_{\lambda^* \in \Lambda^*} f_{j,\lambda^*}\, e_{\lambda^*}(x) \quad j = 1, \ldots, k, \tag{4.20}$$

con

$$\|f_j\|^2_{L^2(D)} = \sum_{\lambda * \in \Lambda^*} |f_{j,\lambda^*}|^2. \tag{4.21}$$

Dado que las f_j son Λ-periódicas, y que $e_{\lambda^*}(x + \lambda) = e_{\lambda^*}(x)$, este resultado se puede extender a todo Ω.

Por otro lado, la descomposición de f en (4.9) se puede componer con el resultado obtenido en (4.20) y nos queda

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{\lambda * \in \Lambda^*} f_{j,\lambda^*}\, e_{(a_j+\lambda^*)}(x).$$

De esto se deduce la completitud del sistema de exponenciales (4.7).

Para ver que es una sucesión de Riesz, buscamos dos constantes $A, B > 0$ tales que

$$A \sum_{j,\lambda^*} |f_{j,\lambda^*}|^2 \leq \Big\| \sum_{j,\lambda^*} f_{j,\lambda^*}\, e_{(a_j+\lambda^*)}(x) \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq B \sum_{j,\lambda^*} |f_{j,\lambda^*}|^2.$$

Por (4.21) esto es lo mismo que

$$A\|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big\| \sum_{j,\lambda^*} f_{j,\lambda^*}\, e_{(a_j+\lambda^*)}(x) \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq B\|f_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tomando la suma sobre los $j = 1, \dots, k$ se tiene

$$\frac{A}{k} \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \Big\| \sum_{j,\lambda^*} f_{j,\lambda^*}\, e_{(a_j+\lambda^*)}(x) \Big\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{B}{k} \sum_{j=1}^{k} \|f_j\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Estas constantes $\frac{A}{k}, \frac{B}{k} > 0$ existen, gracias a (4.10) que nos da el lema 4.2.4. Finalmente, el sistema (4.7) es una base de Riesz como queríamos probar.

Para que la elección de los $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$ no dependa de Ω, debemos recordar la demostración del lema 4.2.4. La idea era encontrar $a_1, \dots, a_k$ para los cuales ninguno de los polinomios trigonométricos en (4.14) se anule en dichos vectores. Fijado un Ω, vimos que había finitos de estos. Ahora, si dejamos variar Ω, entonces, hay a lo sumo numerables de dichos polinomios. Esto se debe a que los $\lambda_r(x) \in \Lambda$ que es numerable.

Cada polinomio trigonométrico es no idénticamente nulo, por lo cual su conjunto de ceros tiene medida cero. Luego, la unión de todos los conjuntos de ceros tiene medida cero, esto es, por ser unión numerable de conjuntos de medida cero. Esto nos dice que existen $a_1, \dots, a_k$ de forma tal que ningún polinomio en (4.14) se anule, sin importar la elección de Ω. De todas formas, esta prueba no nos da valores uniformes para las constantes $A, B > 0$, que sí van a depender de Ω. □

Agora, Antezana y Cabrelli [AAC15] probaron la recíproca del teorema 4.2.2.

Teorema 4.2.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto medible y acotado. Si $L^2(\Omega)$ admite una base de Riesz de la forma*

$$\{e_{(a_j+\lambda^*)} \,:\, j = 1, \dots, k,\ \lambda^* \in \Lambda^*\}, \tag{4.22}$$

para algunos $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^d$, entonces Ω tesela a $\mathbb{R}^d$ a nivel k por traslaciones del retículo Λ.

Además, en el mismo artículo incluyeron un contraejemplo donde el teorema 4.2.2 no vale cuando Ω no es acotado.

4.3 Ejemplo de un conjunto no espectral con base de Riesz de exponenciales

Como ya mencionamos en la introducción de esta tesis, existen conjuntos que no gozan de una base ortonormal de exponenciales. Por ejemplo, el mismo Fuglede [Fug01] probó que incluso la bola en dos o más dimensiones no tiene una base ortonormal de exponenciales. La razón de esto, es que pedir ortonormalidad de un sistema de exponenciales es un requerimiento muy fuerte. Este precisa que las diferencias del conjunto de frecuencias esté contenido en los ceros de la función $\widehat{\chi_\Omega}$.

Lo que acabamos de decir se demuestra fácilmente. Supongamos que λ y $\mu \in \Lambda$. Estas frecuencias verifican que $e_\lambda \perp e_\mu$ si y sólo si

$$0 = \int_\Omega e_\lambda \overline{e_\mu}\, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\Omega(t)\, e^{-2\pi i(\mu-\lambda)t}\, dt = \widehat{\chi_\Omega}(\mu-\lambda).$$

Luego, la ortogonalidad del sistema $E(\Lambda)$ es equivalente a pedir que $\Lambda - \Lambda \subseteq \{\widehat{\chi_\Omega} = 0\} \cup \{0\}$. En el caso de la bola B de dimensión $d > 1$, $\widehat{\chi_B}$ es la función de Bessel de orden d. Fuglede prueba que no existe un conjunto infinito $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ con $d > 1$ tal que las diferencias $\Lambda - \Lambda$ están contenidas en los ceros de la función de Bessel.

En el comienzo de este capítulo vimos algunos conjuntos para los cuales la conjetura de Fuglede es cierta. En esos casos, la conjetura nos permite construir, de una manera más simple, contraejemplos de conjuntos que no son espectrales. Es decir, si uno encontrara un conjunto que no tesele bajo ninguna traslación, por Fuglede, este no puede admitir una base ortonormal de exponenciales.

Uno de los casos donde dijimos que vale la conjetura de Fuglede era el de la unión de dos intervalos disjuntos en la recta. Luego, basta con encontrar dos intervalos disjuntos que no puedan teselar a la recta para obtener un conjunto que no es espectral. Esto se consigue simplemente tomando dos intervalos cuya distancia sea menor que el largo de cada intervalo. Por ejemplo,

$$\Omega = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]. \tag{4.23}$$

No importa cómo traslademos al conjunto, no hay forma de cubrir el hueco $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ sin solaparse con él mismo. Por lo tanto, Ω no puede teselar a $\mathbb{R}$ por ninguna traslación y, por ende, no tiene base ortonormal de exponenciales.

Sin embargo, sí es verdad que el Ω del ejemplo (4.23) multitesela a $\mathbb{R}$. Tomando el retículo $\Lambda = \frac{1}{4}\mathbb{Z}$, tenemos que Ω tesela a la recta a nivel 4 por traslaciones de Λ. Por el teorema 4.2.2, esto nos brinda la existencia de una base de Riesz de exponenciales sobre Ω.

Este hecho se puede generalizar de la siguiente manera:

Teorema 4.3.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}$ *una unión finita de intervalos* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{L}[a_j, b_j]$*, cuyos extremos* $a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L$ *son racionales, entonces existe una base de Riesz de exponenciales en* $L^2(\Omega)$*.*

Demostración. Dado que a_j y b_j son racionales, podemos escribirlos como $a_j = \frac{p_j}{q_j}$, $b_j = \frac{r_j}{s_j}$ con $p_j, r_j \in \mathbb{Z}$ y $q_j, s_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tomando el mínimo común denominador de estos números, $m = \text{mcm}(q_1, \ldots, q_L, s_1, \ldots, s_L)$, y definiendo el conjunto $\Lambda = \frac{1}{m}\mathbb{Z}$, encontramos un retículo por el cual Ω multitesela. Por el teorema 4.2.2, se tiene que entonces existe una base de Riesz para $L^2(\Omega)$, como queríamos demostrar. $\square$

Más aún, se puede probar que para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ que sea unión finita de intervalos, podemos encontrar una base de Riesz de exponenciales. De eso nos ocuparemos en el siguiente capítulo.

Capítulo 5

Conjuntos que admiten bases de Riesz de exponenciales

En el capítulo anterior vimos que para ciertos conjuntos no es posible encontrar bases ortonormales de exponenciales pero sí bases de Riesz de exponenciales. Dado este hecho, surge la necesidad de encontrar condiciones para la existencia de bases de Riesz de exponenciales sobre conjuntos no espectrales. Esto fue conseguido para algunos casos particulares. Por ejemplo, Grepstad, Lev y más tarde Kolountzakis probaron el caso de conjuntos que multiteselan por reticulados (ver capítulo 4, sección 4.2). Otro resultado conocido es el de los poligonos simétricos y convexos [LR00].

Por otra parte, Gady Kozma y Shahaf Nitzan [KN15a] demostraron que sobre conjuntos formados por uniones finitas de intervalos en $\mathbb{R}$ es posible encontrar bases de Riesz de exponenciales. Poco tiempo después, generalizaron este resultado sobre $\mathbb{R}^d$, probando que los conjuntos formados por uniones finitas de rectángulos en $\mathbb{R}^d$ admiten una base de Riesz de exponenciales [KN15b].

A pesar de estos avances, hoy en día se conocen muy pocos ejemplos donde se sepa cómo construir una base de Riesz de exponenciales. En particular, el caso de la bola en dimensión mayor o igual a dos todavía sigue abierto. Sin embargo, tampoco se encontraron contraejemplos de conjuntos de medida positiva que no admitan una base de Riesz de exponenciales.

Durante este capítulo, haremos detalladamente todos los pasos necesarios para poder probar el caso de la unión finita de intervalos en $\mathbb{R}$. El enunciado del teorema que queremos probar es como sigue.

Teorema 5.0.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$ una unión finita de intervalos. Entonces existe un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$*

tal que las funciones $E(\Lambda)$ forman una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. Más aún, si $\Omega \subseteq [0,1]$ entonces Λ puede ser elegido de manera tal que $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$.

5.1 El lema básico

En esta sección probaremos un lema general que luego será utilizado a lo largo de la construcción de una base de Riesz de exponenciales para unión finita de intervalos. El lema describe cómo se puede obtener una base de Riesz de exponenciales sobre un conjunto Ω, sabiendo que existen bases de Riesz sobre algunos conjuntos relacionados con Ω.

Definición 5.1.1. Sea N un número natural. Dado $\Omega \subseteq [0,1]$, definimos

$$A_k := \left\{t \in \left[0, \frac{1}{N}\right] \;:\; t + \frac{j}{N} \in \Omega \text{ para exactamente } k \text{ valores de } j \in \{0, \dots, N-1\}\right\}.$$

$$A_{\geq n} := \bigcup_{k=n}^{N} A_k. \tag{5.1}$$

Lema 5.1.2. *Si existen $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N \subseteq N\mathbb{Z}$ tales que el sistema $E(\Lambda_n)$ es una base de Riesz en $L^2(A_{\geq n})$, $n = 1, \dots, N$, entonces el sistema $E(\Lambda)$ donde*

$$\Lambda := \bigcup_{j=1}^{N} (\Lambda_j + j)$$

es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Observemos que es equivalente probar el lema asumiendo que

$$\Lambda_n \subset N\mathbb{Z} + n \qquad \Lambda = \bigcup_{j=1}^{N} \Lambda_j$$

donde todavía vale que $E(\Lambda_n)$ es una base de Riesz para $A_{\geq n}$ pues las bases de Riesz son invariantes por traslaciones. Además, de esta manera los Λ_n son conjuntos disjuntos.
Para ver que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz basta ver que es un marco y una sucesión de Riesz. Para fluidez de la notación, sobreentenderemos que la norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$.

Marco. Para probar que $E(\Lambda)$ es un marco en $L^2(\Omega)$ tenemos que ver que existe una constante $A > 0$ tal para toda función $f \in L^2(\Omega)$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \geq A\|f\|^2. \tag{5.2}$$

La desigualdad de la derecha en la definición de marco se satisace ya que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto separado.

Para $n \in \{1, \ldots, N\}$ llamaremos f_n a la restricción de f en

$$B_n := \{t \in \Omega \,:\, t + \frac{j}{N} \in \Omega \text{ para exactamente } n \text{ enteros } j's\}. \tag{5.3}$$

Notemos que si uno corta B_n en N secciones, traslada cada una de ellas al $[0, \frac{1}{N}]$ y toma la unión, el resultado es A_n.

Para probar (5.2) es suficiente ver que para cada $n = 1, \ldots, N$ tenemos que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \geq c\,\|f_n\|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \|f_k\|^2. \tag{5.4}$$

donde $c > 0$ es una constante que no depende de f. En efecto, si (5.4) valiera, entonces para cada sucesión de números positivos $\{\delta_n\}_{n=1}^N$ que verifican que $\sum_{n=1}^N \delta_n = 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 &= \sum_{n=1}^N \delta_n \sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \overset{5.4}{\geq} \sum_{n=1}^N \delta_n (c\,\|f_n\|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \|f_k\|^2) \\
&= \sum_{n=1}^N c\,\delta_n\,\|f_n\|^2 - \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} \delta_n \|f_k\|^2 \\
&= \sum_{n=1}^N (c\,\delta_n - \sum_{k=n+1}^N \delta_k) \|f_n\|^2.
\end{aligned}$$

En el último paso utilizamos que

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{n-1} \delta_n\,\|f_k\|^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{k=n+1}^N \delta_k\,\|f_n\|^2.$$

Si la sucesión $\{\delta_n\}$ se elige de manera tal que

$$\delta_n > \frac{2}{c} \sum_{k=n+1}^N \delta_k \qquad \forall\, n \in \{1, \ldots, N\}. \tag{5.5}$$

tomando $A = \frac{1}{2} c \min \delta_n$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 &\overset{5.5}{\geq} \sum_{n=1}^N (c\,\delta_n - \frac{c}{2}\,\delta_n) \|f_n\|^2 = \sum_{n=1}^N \frac{c}{2}\,\delta_n \|f_n\|^2 \\
&\geq \frac{c}{2} \min \delta_n \sum_{n=1}^N \|f_n\|^2 = A\|f\|^2.
\end{aligned}$$

En este último paso utilizamos que $\sum_{n=1}^N \|f_n\|^2 = \|f\|^2$ debido a que los B_n son conjuntos disjuntos, y las f_n son restringir a f a cada uno de ellos. Finalmente se obtuvo que $\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f, e_\lambda \rangle|^2 \geq A\|f\|^2$ que es lo que queríamos ver.

Por lo tanto, si vemos que (5.4) es cierto, probaríamos que $E(\Lambda)$ es un marco en $L^2(\Omega)$. Para ello, fijemos un $n \in \{1, \dots, N\}$ de aquí en adelante. Para cada x, $y \in \mathbb{C}$,

$$|x+y|^2 \geq \frac{1}{2}|x|^2 - |y|^2. \tag{5.6}$$

Veamos rápidamente que vale dicha desigualdad.

$$|x|^2 \leq \big(|x+y| + |y|\big)^2 = |x+y|^2 + 2|x+y||y| + |y|^2 \leq 2\big(|x+y|^2 + |y|^2\big).$$

En el último paso lo que usamos es que $2|x+y||y| \leq |x+y|^2 + |y|^2$ ya que

$$0 \leq |x+y|^2 - 2|x+y||y| + |y|^2 = (|x+y| - |y|)^2.$$

Aplicando esta desigualdad con $x = \big\langle \sum_{k=n}^{N} f_k,\, e_\lambda \big\rangle$ e $y = \big\langle \sum_{k=1}^{n-1} f_k,\, e_\lambda \big\rangle$ tenemos que

$$\big|\langle f, e_\lambda\rangle\big|^2 \overset{5.6}{\geq} \frac{1}{2}\Big|\Big\langle \sum_{k=n}^{N} f_k,\, e_\lambda\Big\rangle\Big|^2 - \Big|\Big\langle \sum_{k=1}^{n-1} f_k,\, e_\lambda\Big\rangle\Big|^2.$$

Llamemos $f_{\geq n} := \sum_{k=n}^{N} f_k$. Tomando la suma sobre todos los $\lambda \in \Lambda$ nos da

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\langle f, e_\lambda\rangle\big|^2 \geq \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\langle f_{\geq n},\, e_\lambda\rangle\big|^2 - \sum_{\lambda\in\Lambda} \Big|\Big\langle \sum_{k=1}^{n-1} f_k,\, e_\lambda\Big\rangle\Big|^2$$

como $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ y $\Omega \subset [0,1]$ vale la desigualdad de Bessel $\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\big\langle \sum_{k=1}^{n-1} f_k,\, e_\lambda\big\rangle\big|^2 \leq \big\| \sum_{k=1}^{n-1} f_k \big\|^2$, luego

$$\geq \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\langle f_{\geq n},\, e_\lambda\rangle\big|^2 - \Big\| \sum_{k=1}^{n-1} f_k \Big\|^2.$$

Nuevamente, si utilizamos que los B_n son disjuntos, nos queda

$$= \frac{1}{2}\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\langle f_{\geq n},\, e_\lambda\rangle\big|^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \|f_k\|^2.$$

Por lo tanto, para obtener la desigualdad de (5.4) nos faltaría comprobar que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} \big|\langle f_{\geq n},\, e_\lambda\rangle\big|^2 \geq c\,\|f_n\|^2 \tag{5.7}$$

donde $c > 0$ no depende de f. Recodemos que $\Lambda = \bigcup_{j=1}^{N} \Lambda_j$ y que $\Lambda_j \subseteq N\mathbb{Z} + j$. Para todo $\lambda = Na + j$ con $a \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\langle f_{\geq n}, e_\lambda\rangle = \int_0^1 f_{\geq n}(t)\overline{e_\lambda}(t)\,dt = \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\frac{l}{N}}^{\frac{l+1}{N}} f_{\geq n}(t)\overline{e_\lambda}(t)\,dt.$$

Haciendo el cambio de variables $t = u + \frac{l}{N}$ sobre cada sumando obtenemos

$$= \int_0^{\frac{1}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} f_{\geq n}\Big(u + \frac{l}{N}\Big)\, e_{-\lambda}\Big(u + \frac{l}{N}\Big)\, du. \tag{5.8}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} e_{-\lambda}\Big(u + \frac{l}{N}\Big) &= e^{-2\pi i\lambda\left(u+\frac{l}{N}\right)} = e^{-2\pi i\lambda u} e^{-2\pi i\lambda\frac{l}{N}} \\ &= e^{-2\pi i aN\frac{l}{N}} e^{-2\pi i\frac{jl}{N}} = e^{-2\pi i\frac{jl}{N}} = e\Big(\frac{-jl}{N}\Big). \end{aligned}$$

Aquí, notamos por $e(t) := e_1(t)$. Luego, siguiendo con la cuenta en (5.8), tenemos

$$\begin{aligned} \langle f_{\geq n}, e_\lambda\rangle &= \int_0^{\frac{1}{N}} \sum_{l=0}^{N-1} f_{\geq n}\Big(u + \frac{l}{N}\Big)\, e\Big(\frac{-jl}{N}\Big)\, e_{-\lambda}(u)\, du \\ &= \int_0^{\frac{1}{N}} h_j(u)\overline{e_\lambda}(u)\, du = \langle h_j, e_\lambda\rangle. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donde

$$h_j(t) := \chi_{A_{\geq n}}(t) \sum_{l=0}^{N-1} f_{\geq n}\Big(u + \frac{l}{N}\Big)\, e\Big(\frac{-jl}{N}\Big).$$

Fijemos un $j \leq n$. Ahora, como $E(\Lambda_j)$ es una base de Riesz para $A_{\geq j}$ (por hipótesis) y como h_j está soportada en $A_{\geq n} \subset A_{\geq j}$, partiendo del resultado en (5.9) vemos que

$$\sum_{\lambda\in\Lambda_j} \left|\langle f_{\geq n}, e_\lambda\rangle\right|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \left|\langle h_j, e_\lambda\rangle\right|^2 \geq c\,\|h_j\|^2 \tag{5.10}$$

donde c es la contante de Riesz para Λ_j. Tomando la suma sobre todos los j nos da

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda\in\Lambda} \left|\langle f_{\geq n}, e_\lambda\rangle\right|^2 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} \left|\langle f_{\geq n}, e_\lambda\rangle\right|^2 \\ &\overset{5.10}{\geq} c\sum_{j=1}^{n} \|h_j\|^2 \geq c\sum_{j=1}^{n} \|h_j\chi_{A_n}\|^2. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Para cada $t \in A_n$ los valores de $v := \{h_j(t)\}_j$ están dados por el producto de la matriz $L := \{e(\frac{-jl}{N})\}_{jl}$ de tamaño $n \times N$ con el vector $w := \{f_{\geq n}(t + \frac{l}{N})\}_l$. Es decir

$$\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \\ \vdots \\ h_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(0) & e(\frac{-1}{N}) & \cdots & e(\frac{-(N-1)}{N}) \\ e(0) & e(\frac{-2}{N}) & \dots & e(\frac{-2(N-1)}{N}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e(0) & e(\frac{-n}{N}) & \dots & e(\frac{-n(N-1)}{N}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\geq n}(t+0) \\ f_{\geq n}(t+\frac{1}{N}) \\ \vdots \\ f_{\geq n}(t+\frac{N-1}{N}) \end{bmatrix}$$

Como $t \in A_n$, hay exactamente n valores diferentes del vector v que no son cero. Si consideramos sólo esos valores podemos eliminar las columnas correspondientes de la matriz L y pensar que es una matriz cuadrada de $n \times n$ de Vandermonde, que resulta ser inversible ya que los números $e(\frac{-l}{N})$ son diferentes. Las columnas que se eliminen van a depender de $t \in A_n$ pero a lo sumo hay $\binom{N}{n}$ matrices distintas para todas las posibles elecciones de $t \in A_n$. Sea C el máximo de las normas de la inversa de dichas matrices. Entonces

$$C\|v\| \geq \|w\|,$$

$$\sum_{j=1}^{n} |h_j(t)|^2 \geq \frac{1}{C} \sum_{l=0}^{N-1} \left| f_{\geq n}\Big(t + \frac{l}{N}\Big) \right|^2 .$$

Integrando sobre $t \in A_n$ y luego haciendo la sustitución $u = t + \frac{l}{N}$ en cada sumando, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|h_j \chi_{A_n}\|^2 \, dt &\geq \frac{1}{C} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{A_n} \left| f_{\geq n}\Big(t + \frac{l}{N}\Big) \right|^2 dt = \frac{1}{C} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{A_n} \left| f_n\Big(t + \frac{l}{N}\Big) \right|^2 dt \\
&= \frac{1}{C} \sum_{l=0}^{N-1} \int_{A_n + \frac{l}{N}} |f_n(u)|^2 \, du = \frac{1}{C} \int_{B_n} |f_n(u)|^2 \, du \\
&= \frac{1}{C} \|f_n\|^2 .
\end{aligned}$$

Si juntamos este resultado con (5.11) llegamos a que

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |\langle f_{\geq n}, e_\lambda \rangle|^2 \overset{5.11}{\geq} c \sum_{j=1}^{n} \|h_j \chi_{A_n}\|^2 \geq \frac{c}{C} \|f_n\|^2 = c' \, \|f_n\|^2 .$$

La constante $c' > 0$ no depende de f. Finalmente, por lo dicho en (5.7) y (5.4), se desprende que $E(\Lambda)$ es un marco en $L^2(\Omega)$.

Sucesión de Riesz. Para probar que $E(\Lambda)$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\Omega)$ basta ver que existe una constante $A > 0$ tal que para cada sucesión $\{a_\lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$,

$$\left\| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, e_\lambda \right\|^2 \geq A \sum_{\lambda \in \Lambda} |a_\lambda|^2 .$$

Nuevamente, La desigualdad de la derecha en la definición de sucesión de Riesz se satisace ya que $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ es un conjunto separado.

Para probar esto usaremos un argumento parecido al dado en la prueba de marco. Veamos que es suficiente ver que para cada $n = 1, \ldots, N$ tenemos que

$$\int_{\Omega} \left| \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda \, e_\lambda \right|^2 dt \geq c \sum_{\lambda \in \Lambda_n} |a_\lambda|^2 - \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda \in \Lambda_j} |a_\lambda|^2 . \tag{5.12}$$

En efecto, supongamos que vale, entonces para cada sucesión de números positivos $\{\delta_n\}$ tales que $\sum_{n=1}^{N} \delta_n = 1$ se obtiene que

$$\int_\Omega \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt = \sum_{n=1}^{N} \delta_n \int_\Omega \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt \overset{5.12}{\geq} \sum_{n=1}^{N} \delta_n \Big(c \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2 - \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |a_\lambda|^2 \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c\,\delta_n \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2 - \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=n+1}^{N} \delta_n \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |a_\lambda|^2$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \Big(c\,\delta_n - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j \Big) \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2.$$

En el último paso usamos que

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{j=n+1}^{N} \delta_n \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |a_\lambda|^2 = \sum_{n=1}^{N} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2.$$

Si tomamos la sucesión $\{\delta_n\}$ de forma tal que

$$\delta_n > \frac{2}{c} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_k \qquad \forall n \in \{1, \ldots, N\}. \tag{5.13}$$

y tomamos $A = \frac{1}{2} c_2 \min \delta_n$ se llega a que

$$\int_\Omega \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt \geq \sum_{n=1}^{N} \Big(c\,\delta_n - \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j \Big) \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2 \overset{5.13}{\geq} \sum_{n=1}^{N} \Big(c\,\delta_n - \frac{c}{2}\delta_n \Big) \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2$$

$$\geq \frac{c}{2} \min \delta_n \sum_{n=1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2 = A \sum_{\lambda\in\Lambda} |a_\lambda|^2$$

que es lo que queríamos ver.

Luego, si queremos mostrar que $E(\Lambda)$ es una sucesión de Riesz basta ver que (5.12) es cierto. Para ello, fijemos $n \in \{1, \ldots, N\}$. Recordando la desigualdad vista en (5.6) y tomando esta vez $x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda$ e $y = \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda$ se ve que

$$\int_\Omega \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt \overset{5.6}{\geq} \frac{1}{2} \int_\Omega \Big| \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt - \int_\Omega \Big| \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt.$$

Dado que el conjunto $\bigcup_{j=n+1}^{N} \Lambda_j \subset \mathbb{Z}$ y $\Omega \subset [0,1]$ tenemos la desigualdad $\| \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda \|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |a_\lambda\, e_\lambda|^2$. Luego,

$$\int_\Omega \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt \geq \frac{1}{2} \int_\Omega \Big| \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda \Big|^2 dt - \sum_{j=n+1}^{N} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} |a_\lambda\, e_\lambda|^2.$$

Llamemos

$$f := \chi_\Omega \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda.$$

Se ve que para probar (5.12) nos faltaría demostrar que

$$\int_\Omega |f(t)|^2\, dt \geq c \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2. \tag{5.14}$$

Al igual que en el caso anterior, necesitamos trasladar el problema a $A_{\geq n}$ para poder usar las hipótesis del lema. Fijemos $t \in A_{\geq n}$ y $l \in \{0, \dots, N-1\}$ tal que $t + \frac{l}{N} \in \Omega$ y escribamos

$$f\Big(t + \frac{l}{N}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda\Big(t + \frac{l}{N}\Big) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e\Big(\lambda t + \frac{\lambda l}{N}\Big).$$

Notemos que $\Lambda_j \subset N\mathbb{Z} + j$ entonces $\lambda = Na + j$ donde $a \in \mathbb{Z}$ y vale que

$$e\Big(\lambda t + \frac{\lambda l}{N}\Big) = e^{2\pi i \lambda t} e^{2\pi i \frac{\lambda l}{N}} = e^{2\pi i \lambda t} e^{2\pi i \frac{jl}{N}}.$$

Entonces,

$$f\Big(t + \frac{l}{N}\Big) = \sum_{j=1}^{n} e\Big(\frac{jl}{N}\Big) \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda(t).$$

Como antes, vemos que el vector $v := \{f(t + \frac{l}{N})\}_l$ es el resultado de multiplicar la matriz $L := \{e(\frac{jl}{N})\}_{l,j}$ con el vector $w := \{\sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda(t)\}_j$. Notemos que l se mueve sólo sobre los valores tales que $t + \frac{l}{N} \in \Omega$, digamos que hay k de dichos valores y que entonces L es una matriz de tamaño $k \times n$. Además, como $t \in A_{\geq n}$ entonces $k \geq n$. Si tomamos todos los menores de tamaño $n \times n$ de L, cada uno de ellos es una matriz de Vandermonde que es inversible. Tomemos C el máximo de las normas de las matrices inversas de todos los menores de tamaño $n \times n$ de L. Entonces,

$$C\|v\| \geq \|w\|,$$

y por lo tanto, para cada $t \in A_{\geq n}$ tenemos

$$\sum_{l=0}^{N-1} \Big| f\Big(t + \frac{l}{N}\Big)\Big|^2 \geq \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda_j} a_\lambda\, e_\lambda(t)\Big|^2 \geq \frac{1}{C} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda\, e_\lambda(t)\Big|^2. \tag{5.15}$$

Integando sobre $t \in \Omega$ obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(t)|^2\, dt \geq \int_{B_{\geq n}} |f(t)|^2\, dt &= \int_{A_{\geq n}} \sum_{l=0}^{N-1} \Big| f\Big(t + \frac{l}{N}\Big)\Big|^2\, dt \\ &\overset{5.15}{\geq} \frac{1}{C} \int_{A_{\geq n}} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda\, e_\lambda(t)\Big|^2\, dt.\end{aligned}$$

Ahora, como $E(\Lambda_n)$ es una base de Riesz sobre $A_{\geq n}$ (por hipótesis) tenemos que

$$\int_{\Omega} |f(t)|^2\, dt \geq \frac{1}{C}\int_{A_{\geq n}} \Big| \sum_{\lambda\in\Lambda_n} a_\lambda\, e_\lambda(t)\Big|^2 dt \geq \frac{c}{C}\sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2 = c' \sum_{\lambda\in\Lambda_n} |a_\lambda|^2. \tag{5.16}$$

donde c es la constante de Riesz para $E(\Lambda_n)$. Juntando este resultado con (5.14) y (5.12), probamos que $E(\Lambda)$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\Omega)$.

Ya vimos que $E(\Lambda)$ es un marco y una sucesión de Riesz en $L^2(\Omega)$. En conclusión, $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$ como queríamos probar. □

La idea de "disección y traslación" del conjunto Ω, que fue utilizada en la demostración de este lema, fue pensada en [OU11] para probar que en conjuntos no acotados de $\mathbb{R}$ de medida finita se puede encontrar un sistema de exponenciales completo. Hablaremos más de esto en el capítulo 6.

5.2 Resultados previos

En lo que sigue, utilizaremos el lema 5.1.2 para obtener bases de Riesz de exponenciales en intervalos. Por último, daremos un corolario, previo al teorema que queremos demostrar, en donde se encuentran bases de Riesz de exponenciales sobre ciertas uniones finitas de intervalos.

Lema 5.2.1. *Sea $\Omega \subseteq [0,1]$ un intervalo. Entonces existe una sucesión $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$.*

Demostración. Antes de comenzar a probar el lema veamos un caso particular.

Afirmación 5.2.2. Sea η una constante que verifica el teorema de estabilidad de Paley-Wiener (ver teorema 3.4.10) en $\Omega = [0,1]$ con la base de Riesz $E(\mathbb{Z})$. Entonces existe una sucesión $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2[0,\eta]$.

Si $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2[0,1]$, entonces, $E(\frac{1}{\eta}\Lambda)$ es otra base de Riesz en $L^2[0,\eta]$. Probemos este hecho.

Sea $g \in L^2[0,\eta]$ tal que para todo $\lambda \in \Lambda$,

$$0 = \int_0^{\eta} g(t)\, e^{2\pi i \frac{1}{\eta}\lambda t}\, dt = \eta \int_0^1 g(\eta u)\, e^{-2\pi i \lambda u}\, du,$$

entonces $g(\eta u) = 0$ en $L^2[0,1]$ y luego $g = 0$ en $L^2[0,\eta]$ lo cual nos da la completitud de $E(\frac{1}{\eta}\Lambda)$. Además, dado $\{c_\lambda\} \in \ell^2(\Lambda)$,

$$\Big\| \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\, e^{2\pi i \frac{1}{\eta}\lambda t}\Big\|^2_{L^2[0,\eta]} = \int_0^{\eta} \big|\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\, e^{2\pi i \frac{1}{\eta}\lambda t}\big|^2\, dt = \eta \int_0^1 \big|\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\, e^{2\pi i \lambda u}\big|^2\, du = \eta \Big\|\sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\, e^{2\pi i\lambda u}\Big\|^2_{L^2[0,1]},$$

con lo cual, conociendo las constantes de Riesz $A, B > 0$ para el sistema $E(\Lambda)$ en $L^2[0,1]$, encontramos constantes de Riesz para el sistema $E(\frac{1}{\eta}\Lambda)$ en $L^2[0,\eta]$ de la siguiente forma:

$$\eta A \sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda|^2 \leq \left\| \sum_{\lambda\in\Lambda} c_\lambda\, e^{2\pi i \frac{1}{\eta}\lambda t} \right\|^2_{L^2[0,\eta]} \leq \eta B \sum_{\lambda\in\Lambda} |c_\lambda|^2.$$

Si ahora tomáramos un conjunto $\Lambda = \{\lambda_n\} \subseteq \mathbb{Z}$ de manera tal que $|\frac{n}{\eta} - \lambda_n| < 1$ (esto es, $|n - \eta\,\lambda_n| < \eta$) el teorema de estabilidad de Paley-Wiener nos da que el conjunto $\{\eta\,\lambda_n\}$ forma una base de Riesz en $L^2[0,1]$ (ya que sabemos que $E(\mathbb{Z})$ lo es) y por lo tanto $\Lambda = \{\lambda_n\}$ forma una base de Riesz en $L^2[0,\eta]$, concluyendo así la prueba de la afirmación.

Ahora sí, procedamos a demostrar el lema. Podemos suponer que $\Omega = [0, b]$ (si no, dado $\Omega = [a, b]$, encontramos un Λ para el cual $E(\Lambda)$ sea una base de Riesz en $[0, b-a]$ y ese mismo Λ sirve para $[a, b]$). Sea η como en la afirmación 5.2.2. Notemos que existe un número N tal que $v(Nb) \leq \eta$. Aquí denotamos $v(\cdot)$ como el valor fraccional.

En efecto, si b es un número racional, $b = \frac{p}{q}$ donde $p, q \in \mathbb{N}$ basta con tomar $N = q$ y entonces $Nb = p \in \mathbb{N}$ por lo tanto $v(Nb) = v(p) = 0 \leq \eta$. Para el caso donde b es un número irracional, podemos recurrir al Teorema de Aproximación de Kronecker:

Teorema. *(Kronecker) La sucesión de valores fraccionales de múltiplos enteros $\{v(n\alpha)\}_n$ donde α es un número real irracional, es densa en el intervalo $[0,1]$.*

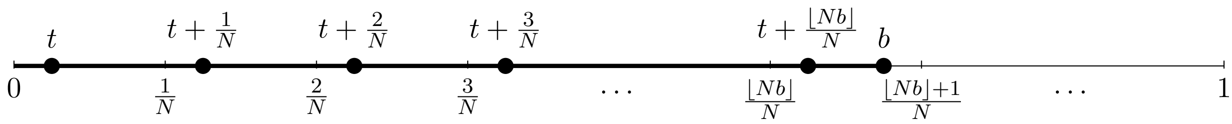
Como b es irracional y $\eta < 1$, el teorema nos asegura que existe N tal que $v(Nb) \leq \eta$. La demostración de este teorema se puede ver en el apéndice.

Recordemos la definición dada en (5.1) de los conjuntos $A_{\geq n}$. Para el conjunto $\Omega = [0, b]$ y N, los conjuntos $A_{\geq n}$ son

$$\begin{aligned} A_{\geq n} &= \left[0, \frac{1}{N}\right] && 1 \leq n \leq \lfloor Nb \rfloor \\ A_{\geq \lfloor Nb \rfloor + 1} &= \left[0, \frac{v(Nb)}{N}\right] && \\ A_{\geq n} &= \emptyset && \lfloor Nb \rfloor + 2 \leq n \leq N \end{aligned}$$

Para entender esto mejor, veamos el siguiente gráfico donde se observa a Ω dentro del intervalo $[0,1]$, partido en fracciones de tamaño $\frac{1}{N}$. También notemos, como se marca en el gráfico, que $\frac{v(Nb)}{N}$ es la distancia de $\frac{\lfloor Nb \rfloor}{N}$ a b.

Si $t \in A_{\geq n}$ entonces t es un elemento en $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ que al trasladarlo por $\frac{j}{N}$ cae en Ω por lo menos n veces.



Si $1 \leq n \leq \lfloor Nb \rfloor$ todos los $t \in \left[0, \frac{1}{N}\right]$ caen por lo menos n veces en Ω al ser trasladados. Si $n = \lfloor Nb \rfloor + 1$, sólo los t que sean menores que $\frac{v(Nb)}{N}$ caen por lo menos n veces en Ω. Por último, si $n \geq \lfloor Nb \rfloor + 2$ entonces ningún t verifica que al trasladarlo cae por lo menos $\lfloor Nb \rfloor + 2$ veces en Ω ya que para ese momento, el trasladado se sale fuera del intervalo Ω.

Si queremos aplicar el lema 5.1.2, debemos encontrar una base de Riesz de exponenciales con frecuencias en $N\mathbb{Z}$ para cada $A_{\geq n}$. Para el conjunto $\left[0, \frac{1}{N}\right]$ alcanza con tomar $E(N\mathbb{Z})$ como base de Riesz. Para el conjunto $\left[0, \frac{v(Nb)}{N}\right]$ podemos utilizar la afirmación 5.2.2. Esto es pues si uno reescala el intervalo a $\left[0, v(Nb)\right]$, como $v(Nb) \leq \eta$, la afirmación nos dice que entonces existe una base de Riesz de exponenciales con frecuencias $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ en $L^2\left[0, v(Nb)\right]$ y por lo tanto, existe una base de Riesz de exponenciales con frecuencias $N\Lambda \subseteq N\mathbb{Z}$ en $L^2\left[0, \frac{v(Nb)}{N}\right]$.

Finalmente, las hipótesis del lema 5.1.2 valen, por lo cual podemos aplicarlo y afirmar que existe un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$ como queríamos ver. $\square$

El lema 5.2.1 implica que para ciertos conjuntos Ω que son unión finita de intervalos, existe una base de Riesz de exponenciales con frecuencias en $\mathbb{Z}$. Este es un resultado menos general que lo que buscamos probar. A continuación enunciamos y demostramos este corolario.

Corolario 5.2.3. *Sea $\Omega \subset [0,1]$ una unión infinta de intervalos $\Omega = \bigcup_{j=1}^{L} [a_j, b_j]$. Si los numeros $\{1, a_1, \dots, a_L, b_1, \dots, b_L\}$ son linealmente independientes sobre los racionales entonces existe una sucesión $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz sobre Ω.*

Demostración. Enunciaremos una generalización del Teorema de Aproximación de Kronecker que se encuentra demostrada en el apéndice:

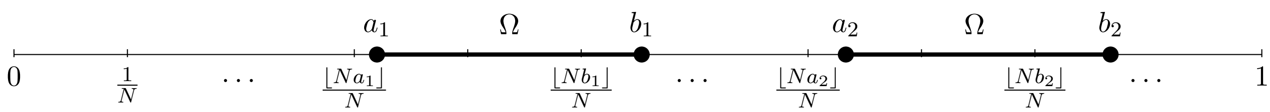
Teorema. *Para L números reales tales que $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ la sucesión de vectores $\left\{\left(v(N\alpha_1), \dots, v(N\alpha_L)\right) : N = 1, 2, \dots\right\}$ es densa en $[0,1]^L$.*

Aplicando este teorema a nuestro caso, como $\{1, a_1, \dots, a_L, b_1, \dots, b_L\}$ son linealmente independientes sobre los racionales, tenemos que los vectores $(v(Na_1), \dots, v(Na_L), v(Nb_1), \dots, v(Nb_L))$

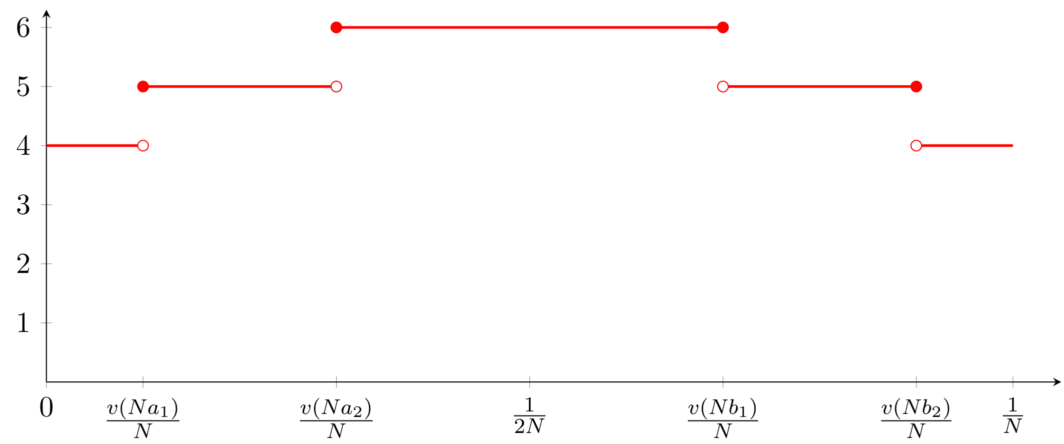
son densos en $[0,1]^{2L}$. En particular, existe un N tal que

$$v(Na_1),\ldots,v(Na_L) < \frac{1}{2} < v(Nb_1),\ldots,v(Nb_L).$$

Definamos la función $\Phi(t) = \#\{\, j \,:\, t + \frac{j}{N} \in \Omega\}$ donde $t \in [0, \frac{1}{N}]$ y notemos que esta función crece en cada $\frac{v(Na_i)}{N}$ y decrece en cada $\frac{v(Nb_i)}{N}$. Para dar mayor claridad a esta afirmación, demos un ejemplo con dos intervalos, $\Omega = [a_1,b_1] \cup [a_2,b_2]$ donde $\frac{v(Na_1)}{N} < \frac{v(Na_2)}{N} < \frac{1}{2N} < \frac{v(Nb_1)}{N} < \frac{v(Nb_2)}{N}$.



El gráfico de Φ para este ejemplo es el siguiente



Luego, se obtiene que Φ es una función creciente en $[0, \frac{1}{2N}]$ y decreciente en $[\frac{1}{2N}, \frac{1}{N}]$. En particular, el conjunto $A_{\geq n} = \{\, t \in [0, \frac{1}{N}] \,:\, \Phi(t) \geq n \,\}$ es un intervalo para todo n. Si lo reescalamos a $NA_{\geq n} \subseteq [0,1]$ sigue siendo un intervalo y podemos utilizar el lema 5.2.1 para afirmar que existe un conjunto $\Lambda_n \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda_n)$ es una base de Riesz en $L^2(NA_{\geq n})$. Esto implica que $N\Lambda_n \subseteq N\mathbb{Z}$ forma una base de Riesz $E(N\Lambda_n)$ en $L^2(A_{\geq n})$ para cada n. Finalmente, por el lema 5.1.2, se puede construir un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz sobre Ω, que es lo que queríamos ver. □

5.3 Resultados auxiliares

La prueba del teorema en el caso general requiere entender el posible orden que los elementos $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ puedan tener. Veamos algunos resultados al respecto.

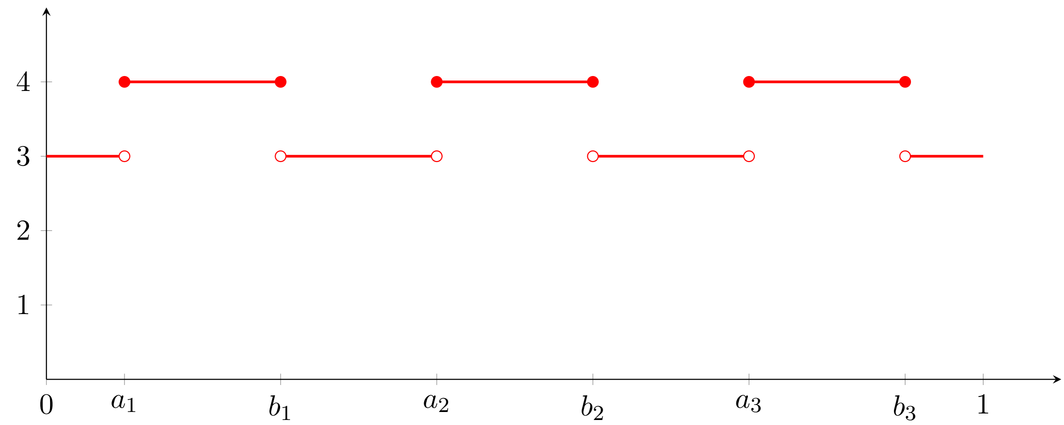
Lema 5.3.1. *Sean L un número natural y $a_1 \leq \cdots \leq a_L$, $b_1 \leq \cdots \leq b_L \in [0,1]$ $2L$ números. Definimos*

$$\Phi(t) = \sum_{l=1}^{L} \chi_{[0,b_l]}(t) + \sum_{l=1}^{L} \chi_{[a_l,1]}(t) \qquad B_{\geq n} = \Phi^{-1}[n, 2L] \quad 1 \leq n \leq 2L.$$

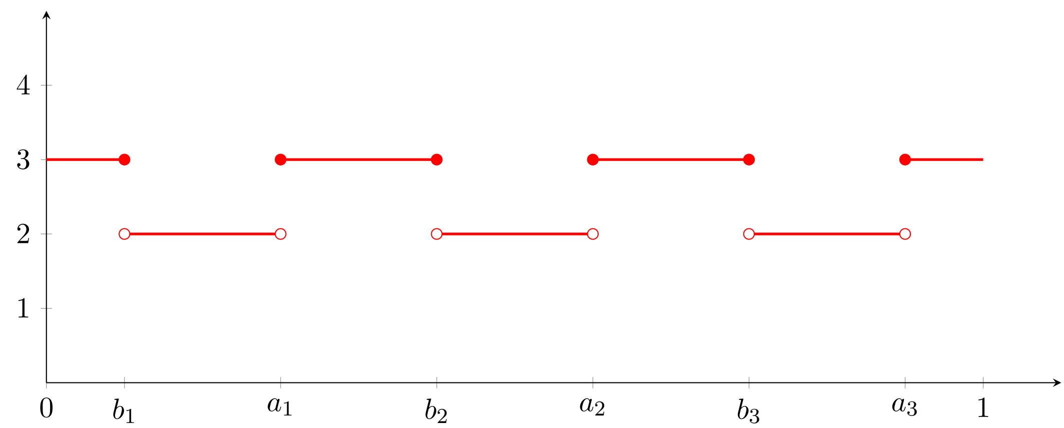
Entonces los $B_{\geq n}$ son uniones de a lo sumo L intervalos (cuando se consideran cíclicos). Además, si existe algún n tal que $B_{\geq n}$ es unión de exáctamente L intervalos, entonces las sucesiones a_l y b_l se entrelazan (es decir que $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq \dots$ o $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq \dots$).

Es importante comprender a qué nos referimos cuando decimos que consideramos a los intervalos cícliclos. Pensemos en el intervalo $[0,1]$ como el toro $\mathbb{T}$. Aquí, el $0 = 1$, por lo cual la unión de los intervalos $[0,b] \cup [a,1]$ pensada en $\mathbb{T}$ forma un sólo intervalo.

Hagamos un gráfico para entender este concepto mejor, pensemos que $a_1 \leq b_1 \leq a_2 \leq b_2 \leq a_3 \leq b_3$ son seis números que se entrelazan. El gráfico de Φ para este ejemplo se vería de esta forma.



Es claro que $B_{\geq 4}$ es la unión de exactamente 3 intervalos, $[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup [a_3,b_3]$. Ahora, si los números se entrelazan en el orden $b_1 \leq a_1 \leq b_2 \leq a_2 \leq b_3 \leq a_3$ el gráfico Φ pasaría a ser:



En este caso, el conjunto $B_{\geq 3}$ se ve que es la unión $[0, b_1] \cup [a_1, b_2] \cup [a_2, b_2] \cup [a_3, 1]$, pero, pensando al $[0, 1]$ cíclicamente, nos quedan sólo 3 intervalos. Veamos la demostración de este lema.

Demostración. Es fácil ver que función Φ crece sólo en los a_l y decrece sólo en los b_l. Por lo tanto, los conjuntos $B_{\geq n}$ son una unión de intervalos cíclicos de la forma $[a_l, b_j]$, $1 \leq l, j \leq L$. Como sólo hay $2L$ posibles extremos, los conjuntos $B_{\geq n}$ son unión de a lo sumo L intervalos.

Supongamos ahora que las sucesiones no se entrelazan. Esto quiere decir que para algún $1 \leq l < L$, ningún b_j pertenece al intervalo $[a_l, a_{l+1}]$. En consecuencia, si $B_{\geq n}$ es un conjunto que contiene un intervalo cuyo extremo izquierdo es a_l, no puede contener un intervalo cuyo extremo izquierdo sea a_{l+1}. De esto se deduce que todos los conjuntos $B_{\geq n}$ son unión de a lo sumo $L - 1$ intervalos. □

Lema 5.3.2. *Sean $a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L \in \mathbb{R}$ todos distintos. Entonces existen infinitos $N \in \mathbb{N}$ tales que las sucesiones de valores fraccionales $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ no se entrelazan.*

Dado que la demostración de este lema utiliza argumentos de un estilo diferente al que venimos realizando, la dejaremos para la sección en el apéndice dedicada a este lema.

5.4 Prueba del Teorema 5.0.1

Demostración. Probaremos la segunda parte del teorema. Es decir, supondremos que $\Omega \subseteq [0, 1]$ y encontraremos un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. Comenzaremos haciendo inducción en L, donde L es el número de intervalos en Ω.

El caso $L = 1$ vale por el lema 5.2.1. Asumamos entonces que vale para para todos los enteros positivos menores que L. Denotemos $\Omega = \cup_{l=1}^{L} [a_l, b_l]$. Por el lema 5.3.2 existe un $N \in \mathbb{N}$ arbitrariamente grande tal que las sucesiones de valores fraccionales $v(Na_l)$ y $v(Nb_l)$ no se entrelazan. Pidamos además que N sea lo suficientemente grande para que cada intervalo $[a_l, b_l]$ contenga al menos un elemento de la forma k/N.

Estudiaremos ahora a los conjuntos $A_{\geq n}$. Como cada intervalo $[a_l, b_l]$ contiene un elemento de $\frac{1}{N}\mathbb{Z}$, entonces podemos particionarlo por traslaciones de los conjuntos $[\frac{v(Na_l)}{N}, \frac{1}{N}]$, $[0, \frac{v(Nb_l)}{N}]$ y $[0, \frac{1}{N}]$. Si aplicamos el lema 5.3.1 tomando

$$a_i^{\text{lema } 5.3.1} = v(Na_i) \qquad b_i^{\text{lema } 5.3.1} = v(Nb_i)$$

obtenemos que $B_{\geq n}$ (ver definición en el lema 5.3.1) tiene a lo sumo $L - 1$ intervalos, ya que $v(Na_l)$ y $v(Nb_l)$ no se entrelazan. Ahora, observemos que $NA_{\geq n} = B_{\geq n}$ (no necesariamente el mismo n debido a los pedazos $[0, \frac{1}{N}]$, pero no afecta a nuestro objetivo). Luego, $NA_{\geq n}$ es unión de a lo sumo $L-1$ intervalos y podemos aplicar nuestra hipótesis inductiva para construir bases de Riesz de exponenciales con frecuencias en $\mathbb{Z}$ para cada uno de estos conjuntos. Al reescalar, obtenemos bases de Riesz de exponenciales con frecuencias en $N\mathbb{Z}$ para cada $A_{\geq n}$.

Finalmente, gracias a el lema 5.1.2, encontramos un conjunto $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ tal que $E(\Lambda)$ es una base de Riesz en $L^2(\Omega)$. Con esto se concluye la prueba del teorema. $\square$

Capítulo 6

Sistemas de exponenciales completos

En el trabajo realizado por Olevskii y Ulanovskii [OU11] se probó que para cualquier conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ de medida finita, no necesariamente acotado, se puede construir un sistema de exponenciales $E(\Lambda)$ completo en $L^2(\Omega)$ donde su conjunto de frecuencias $\Lambda \subset \mathbb{R}$ tiene la densidad crítica $D(\Lambda) = |\Omega|$.

Recientemente, Nitzan, Olevskii y Ulanovskii [NOU14] probaron que para todos los conjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}$ de medida finita, no necesariamente acotados, se puede encontrar un marco de exponenciales. Para demostrar esto, utilizaron el resultado obtenido por Marcus, Spielman y Srivastava en [MSS15], donde se prueba la conjetura de Kadison-Singer.

Lo que veremos en este capítulo es el desarrollo en detalle los resultados necesarios para obtener un sistema de exponenciales completo para un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ de medida finita.

6.1 Conjuntos de unicidad

Definición 6.1.1. Sea $\mathcal{F}$ un espacio de funciones continuas en la recta real $\mathbb{R}$. Un conjunto Λ se dice conjunto de unicidad para $\mathcal{F}$ si verifica

$$f \in \mathcal{F}, \quad f|_\Lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0. \tag{6.1}$$

En este caso vamos a considerar a $\mathcal{F}$ como el conjunto de funciones PW_Ω donde $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no necesariamente acotado, pero su medida es finita. Recordemos que PW_Ω es el conjunto de funciones que son la transformada de una función $F \in L^2(\mathbb{R})$, $F = 0$ fuera de Ω.

Observación 6.1.2. Si $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de unicidad para PW_Ω entonces $E(\Lambda)$ es completo en $L^2(\Omega)$.

Demostración. Sea $F \in L^2(\Omega)$ entonces su transformada $\widehat{F} = f \in PW_\Omega$. Supongamos que $\langle F, e_\lambda \rangle_{L^2(\Omega)} = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Esto es

$$0 = \int_\Omega F \overline{e_\lambda} dt = f(\lambda) \quad \forall\, \lambda \in \Lambda.$$

Como Λ es un conjunto de unicidad en PW_Ω, $f = 0$ y por lo tanto $F = 0$ dando así la completitud del sistema de exponenciales. □

6.2 Resultado auxiliar

Lema 6.2.1. *Sea w un peso en L^1 sobre un conjunto $A \subset \mathbb{T}$, $|A| < 1$, $w(t) \geq 1$ entonces existe una sucesión de conjuntos disjuntos $\Lambda_j \subset \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ tales que:*

1. *Todo sistema de exponenciales $E(\Lambda_j)$ es completo en $L^2(A, w)$.*
2. *Dos enteros consecutivos no pueden pertenecer a distintos Λ_j.*

Demostración. Para comenzar, notemos que $L^2(A, w) \subseteq L^1(A)$. Consideremos una función $f \in L^2(A, w)$, se obtiene rápidamente mediante Hölder que

$$\|f\|_{L^1(A)} = \int_A |f|\, dt \leq \int_A |f|\, w\, dt \leq \left(\int_A |f|^2 w\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A w\, dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(A,w)} \|w\|_{L^1(A)}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

usando aquí que $w \geq 1$ y que $w \in L^1(A)$.

El próximo paso será probar la siguiente afirmación: $\{e^{2\pi i k t}\}_{|k| \geq n}$ es completo en $L^2(A, w)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para ello, fijemos un n y supongamos que tenemos una función $g \in L^2(A, w)$ tal que $\langle g, e_k \rangle_{L^2(A,w)} = 0 \quad \forall\, |k| \geq n$. Esto es,

$$0 = \int_A g\, \overline{e_k}\, w\, dt = \int_\mathbb{T} (\chi_A\, g\, w\,)\, \overline{e_k}\, dt \quad \forall\, |k| \geq n.$$

Queremos ver que $g = 0$. Si llamamos $f := \chi_A\, g\, w$, la ecuación de arriba es equivalente a la siguiente

$$\widehat{f}(k) = 0 \quad \forall\, |k| \geq n. \tag{6.2}$$

Esta nueva función f además pertenece a $L^1(\mathbb{T})$. Esto es fácil de ver ya que por Hölder,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} &= \int_\mathbb{T} |f|\, dt = \int_\mathbb{T} |\chi_A\, g\, w\,|\, dt = \int_A |\, g\, w^{\frac{1}{2}}\, w^{\frac{1}{2}}\,|\, dt \\ &\leq \left(\int_A |\, g\,|^2\, w\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_A w\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|g\|_{L^2(A,w)} \|w\|_{L^1(A)}^{\frac{1}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Luego, como ya sabemos que $E(\mathbb{Z})$ es completo en $L^1(\mathbb{T})$, podemos escribir a f de la siguiente forma

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi ikx}\, \widehat{f}(k) \overset{(6.2)}{=} \sum_{|k|<n} e^{2\pi ikx}\, \widehat{f}(k).$$

Esta escritura nos dice que f es un polinomio trigonométrico que se anula en $T \setminus A$, donde este conjunto tiene medida positiva. En consecuencia, $f = 0$ *ctp* y, por lo tanto, $g = 0$ *ctp*. Con esto se concluye que $\{e^{2\pi ikt}\}_{|k|\geq n}$ es completo en $L^2(A, w)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ como habíamos afirmado.

Una vez probado este resultado, podemos utilizarlo como herramienta para demostrar el lema. Para ello iremos construyendo los Λ_j deseados mediante un proceso inductivo. Consideremos una biyección entre los conjuntos numerables

$$\begin{aligned} q : \mathbb{N} &\to \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\mathbb{Z}^2 \times \{n\}\Big) \\ m &\mapsto ((j(m), l(m)), n(m)) \end{aligned}$$

Caso $m = 1$:

Agregamos al conjunto $\Lambda_{j(1)}$ las finitas frecuencias en $\mathbb{Z}$ necesarias para aproximar a la función $e^{2\pi il(1)t}$ mediante polinomios trigonométricos con un error menor que $\frac{1}{n(1)}$ en $L^2(A, w)$. Esto se puede hacer ya que $E(\mathbb{Z})$ es completo en $L^2(A, w)$.

Paso inductivo:

En el m-ésimo paso de la inducción tenemos $q(m) = ((j(m), l(m)), n(m))$. Sea

$$N = \max\Big\{\, |k| \,:\, k \in \Lambda_{j(r)},\, 1 \leq r \leq m-1 \Big\}$$

donde N es la frecuencia en módulo más grande que agregamos hasta el $(m-1)$-ésimo paso. Ahora, como $\{e^{2\pi ikt}\}_{|k|\geq N+2}$ es completo en $L^2(A, w)$, existe un polinomio trigonométrico formado por finitas de dichas exponenciales que aproxima a la función $e^{2\pi il(m)t}$ con un error menor que $\frac{1}{n(m)}$ en $L^2(A, w)$. Agregamos al conjunto $\Lambda_{j(m)}$ las frecuencias de tal polinomio. Notemos que como $|k| \geq N + 2$ nos estamos asegurando que dos enteros consecutivos no pertenezcan a distintos Λ_j.

La biyección q itera infinitas veces sobre $\mathbb{Z}^2$ y para cada $\epsilon > 0$, $l \in \mathbb{Z}$ y $j \in \mathbb{N}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$q(m) = ((j, l), n(m))$$

donde $n(m)$ es un natural que cumple que $\frac{1}{n(m)} < \epsilon$. Es decir, existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{M_l} \in \Lambda_j$ y $a_1, \ldots, a_{M_l} \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|e^{2\pi ilt} - \sum_{r=1}^{M_l} a_r e^{2\pi i\lambda_r t}\|_{L^2(A,w)} < \frac{1}{n(m)} < \epsilon.$$

Dado que $\{e^{2\pi ilt}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ a su vez son completos en $L^2(A,w)$, $\{e^{2\pi i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda_j}$ es completo en $L^2(A,w)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Los conjuntos $\Lambda_j \subset \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$ construidos en este proceso inductivo son los que buscabamos para probar el lema. □

Notación. Denotaremos $\Omega_{\mathbb{T}} := (\Omega + \mathbb{Z}) \cap \mathbb{T}$.

6.3 Prueba del teorema

Teorema 6.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$, $|\Omega| < \infty$ y $|\Omega_{\mathbb{T}}| < 1$ entonces existe un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $D(\Lambda) = 1$ tal que es un conjunto de unicidad para PW_Ω.*

Demostración. La idea de esta prueba será hacer uso del lema 6.2.1 previamente demostrado. Pero antes vamos a requerir la definición de ciertos conjuntos y funciones que nos serán de utilidad para nuestro objetivo.

Sea $w(t) = \#\{k \in \mathbb{Z} : t + k \in \Omega\}$ donde $t \in \mathbb{T}$ y sea $A_j = \{t \in \mathbb{T} : w(t) = j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Observemos que A_j son los puntos en el toro que al ser trasladados por todos los enteros, caen en Ω exactamente j veces. Consideremos también $A_\infty = \{t \in \mathbb{T} : w(t) = +\infty\}$, el conjunto de los puntos del toro tales que en infinitas traslaciones por los enteros pertenecen a Ω. Este último conjunto tiene medida cero, ya que de ser positiva, tendríamos que $|\Omega| = +\infty$. Además, tenemos que $\mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cup A_\infty$ y estas uniones son disjuntas.

Sea f una función en PW_Ω, luego $f(x) = \int_{\mathbb{R}} F(t)\, e^{-2\pi ixt}\, dt$ con $F \in L^2(\Omega)$ y $\mathrm{sop}(F) \subseteq \Omega$. Como ya sabemos, $\mathbb{T}$ tesela a $\mathbb{R}$ por traslaciones de los enteros, es decir que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{T}}(t+k) = 1.$$

Por lo tanto podemos multiplicar esa suma por F de la siguiente manera

$$F(t) = F(t) \sum_{k\in\mathbb{Z}} \chi_{\mathbb{T}}(t+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F(t)\chi_{\mathbb{T}}(t+k).$$

Llamemos F_k a la nueva función definida por

$$F_k(t) := F(t-k)\chi_{\mathbb{T}}(t). \tag{6.3}$$

Se ve fácilmente que F_k tiene su soporte dentro de $\Omega_{\mathbb{T}}$. Ahora podemos reescribir a F como

$$F(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t+k). \tag{6.4}$$

Por otra parte, definamos

$$G(a,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\, e^{2\pi i k a}, \quad 0 \le a < 1\,, \quad t \in \mathbb{T}. \tag{6.5}$$

A continuación probaremos algunas propiedades de G. Empecemos por ver que $G \in L^2(\Omega_{\mathbb{T}}, \frac{1}{w})$ para todo $a \in [0,1)$, para ello comenzaremos por lo que ya sabemos: $F \in L^2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{T}$ tesela a $\mathbb{R}$ por traslaciones de los enteros,

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} |F(t)|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}+k} |F(t)|^2\, dt,$$

mediante un sencillo cambio de variables y utilizando el teorema de la convergencia monótona, se ve que

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |F(t-k)|^2 dt \overset{(6.3)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |F_k(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|^2 dt. \tag{6.6}$$

Observar que este resultado implica que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|^2 < +\infty$ *ctp* $t \in \mathbb{T}$. Es decir que la sucesión dada por $\{F_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ pertenece a $\ell^2(\mathbb{Z})$ *ctp* $t \in \mathbb{T}$.

Por otro lado, tenemos que

$$\int_{\Omega_{\mathbb{T}}} |G(a,t)|^2 \frac{1}{w(t)}\, dt \overset{(6.5)}{=} \int_{\Omega_{\mathbb{T}}} |\sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\, e^{2\pi i k a}\,|^2 \frac{1}{w(t)}\, dt \le \int_{\Omega_{\mathbb{T}}} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|)^2 \frac{1}{w(t)}\, dt,$$

dado que el soporte de las F_k está en $\Omega_{\mathbb{T}}$ podemos extender la integral a todo $\mathbb{T}$, obteniendo

$$= \int_{\mathbb{T}} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|)^2 \frac{1}{w(t)}\, dt.$$

Además, recordemos que $\mathbb{T} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cup A_\infty$, por lo cual

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|)^2 \frac{1}{w(t)}\, dt.$$

Notemos que en cada A_j, $w(t) = j$ y además $F_k = 0$ salvo en exactamente j enteros distintos k_i, $i = 1, \ldots, j$. Se sigue que

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} (\sum_{i=1}^{j} |F_{k_i}(t)|)^2 \frac{1}{j}\, dt,$$

y aplicando la desigualdad de Cauchy-Shwartz a cada sumando,

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \Big((\sum_{i=1}^{j} |F_{k_i}(t)|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{j} 1)^{\frac{1}{2}} \Big)^2 \frac{1}{j}\, dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \sum_{i=1}^{j} |F_{k_i}(t)|^2 \frac{j}{j}\, dt \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)|^2\, dt.
\end{aligned}$$

Si juntamos este resultado con lo obtenido en (6.6), resulta que $\int_{\Omega_{\mathbb{T}}} |G(a,t)|^2 \frac{1}{w(t)}\, dt < +\infty$ y por lo tanto $G \in L^2(\Omega_{\mathbb{T}}, \frac{1}{w})$ para todo $a \in [0,1)$ como queríamos ver.

Otra propiedad que cumple G es que es continua respecto a la variable a *ctp* $t \in \Omega_{\mathbb{T}}$. Esto se debe a que, como $E(\mathbb{Z})$ es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{T})$, G se puede pensar como la serie de Fourier con coeficientes $\{F_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ en casi todo punto. Más aún, $\{F_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$ *ctp* $t \in \mathbb{T}$, ya que al estar $F \in L^1(\mathbb{R})$ hacemos un cálculo muy parecido al de antes y obtenemos

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}} |F(t)| dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}+k} |F(t)|\, dt$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |F(t-k)|^2 dt \overset{(6.3)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}} |F_k(t)| dt = \int_{\mathbb{T}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |F_k(t)| dt.$$

Luego, por el teorema de Riemann-Lebesgue, G debe ser continua.

Dado $\nu \in \mathbb{Z}$, veamos que se verifica la siguiente igualdad:

$$f(\nu + a) = \int_{\mathbb{T}} G(a,t)\, e^{-2\pi i(\nu+a)t}\, dt. \tag{6.7}$$

Comenzaremos por el lado derecho de la igualdad. El primer paso es utilizar convergencia mayorada para extraer la sumatoria afuera de la integral.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\, e^{2\pi i k a} \Big)\, e^{-2\pi i(\nu+a)t}\, dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k a} \int_{\mathbb{T}} F_k(t)\, e^{-2\pi i(\nu+a)t}\, dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k a} \int_{\mathbb{T}} \Big(F_k(t)\, e^{-2\pi i a t} \Big)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt \\
&\overset{(6.3)}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k a} \int_{\mathbb{T}} \Big(F(t-k)\, e^{-2\pi i a t} \Big)\, e^{-2\pi i \nu t}\, dt,
\end{aligned}$$

mediante el cambio de variables $u = t - k$,

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{2\pi i k a} \int_{\mathbb{T}+k} \Big(F(u)\, e^{-2\pi i a(u+k)} \Big)\, e^{-2\pi i \nu(u+k)}\, du \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{T}+k} \Big(F(u)\, e^{-2\pi i a u} \Big)\, e^{-2\pi i \nu u}\, du.
\end{aligned}$$

Nuevamente, utilizando el argumento de que $\mathbb{T}$ tesela a $\mathbb{R}$ por traslaciones de los enteros, esta suma de integrales es en realidad una integral sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} \Big(F(u)\, e^{-2\pi i(\nu+a)u} \Big)\, du \\ &= f(\nu + a). \end{aligned}$$

Pasaremos a utilizar el lema 6.2.1 tomando a $A = \Omega_{\mathbb{T}}$ y $w(t) = \#\{k \in \mathbb{Z} : t + k \in \Omega\}$ como lo habíamos definido al comienzo. El lema nos dice que existe una sucesión de conjuntos $\Lambda(n,j) \subset \mathbb{Z}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j < n$ el conjunto $E(\Lambda(n,j))$ es completo en $L^2(\Omega_{\mathbb{T}}, w)$. Además, no hay dos enteros consecutivos que pertenezcan a distintos $\Lambda(n,j)$. Definamos los siguientes conjuntos

$$\Lambda_n := \bigcup_{j=0}^{n} \Big(\Lambda(n,j) + \frac{j}{n} \Big) \qquad \Lambda := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n. \tag{6.8}$$

Observar que por la construcción de los Λ_n, en cada intervalo de longitud 1 hay a lo sumo un $\lambda \in \Lambda$. En particular, Λ es un conjunto separado.

Además, por la misma razón, es claro que su densidad es $D(\Lambda) \leq 1$. Sin perdida de generalidad, uno puede suponer que $D(\Lambda) = 1$ ya que si uno agregara al conjunto convenientes frecuencias bien separadas, podría alcanzar la densidad $D(\Lambda) = 1$ y esto no afectaría los subsiguientes cálculos. Veamos que Λ es el conjunto de unicidad para PW_Ω que estabamos buscando.

Sea $f \in PW_\Omega$ tal que $f(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Queremos ver que entonces $f = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < n$ y $\nu \in \Lambda(n,j)$ se tiene que $\nu + \frac{j}{n} \in \Lambda_n \subset \Lambda$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 = f(\nu + \frac{j}{n}) &\overset{(6.7)}{=} \int_{\mathbb{T}} G(\frac{j}{n}, t)\, e^{-2\pi i(\nu+\frac{j}{n})t}\, dt \\ &= \int_{\mathbb{T}} G(\frac{j}{n}, t)\, e^{-2\pi i\frac{j}{n}t}\, \frac{1}{w(t)}\, e^{-2\pi i\nu t}\, w(t)\, dt. \end{aligned}$$

Como $E(\Lambda(n,j))$ es completo en $L^2(\Omega_{\mathbb{T}}, w)$, se deduce que

$$G(\frac{j}{n}, t)\, e^{-2\pi i\frac{j}{n}t}\, \frac{1}{w(t)} = 0 \quad ctp\, t \in \Omega_{\mathbb{T}}$$

y luego $G(\frac{j}{n}, t) = 0$. Como G es continua respecto a la primer variable $cpt\, t \in \Omega_{\mathbb{T}}$ se obtiene que

$$0 = G(a,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_k(t)\, e^{2\pi ika} \tag{6.9}$$

en el $[0,1)$, cpt $t \in \Omega_{\mathbb{T}}$. De aquí nos gustaría poder deducir que $f = 0$ para culminar con la prueba. Recordemos que, como ya dijimos más atras, $\{F_k(t)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ son los coeficientes de Fourier de la serie en (6.9) y $F_k(t) = 0$ $ctp\, t \in \mathbb{T}$. Finalmente, por (6.4) se obtiene que $F = 0$ $ctp\, t \in \Omega$ y por ende, $f = 0$. Esto prueba que $\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de unicidad para PW_Ω, que es lo que queríamos demostrar. □

6.4 Corolarios

Corolario 6.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$, un conjunto tal que $|\Omega| = 1$, entonces existe un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $D(\Lambda) = 1$ tal que es un conjunto de unicidad para PW_Ω.*

Demostración. En el teorema 6.3.1 probamos el caso en el que $|\Omega_{\mathbb{T}}| < 1$. Nos basta analizar el caso donde $|\Omega_{\mathbb{T}}| = |\Omega| = 1$.

Veamos que $\Lambda = \mathbb{Z}$ es un conjunto de unicidad para PW_Ω en ese caso. Sabemos que $\Lambda = \mathbb{Z}$ es conjunto de unicidad en $PW_{\mathbb{T}}$, ya que $E(\mathbb{Z})$ es una base ortonormal para $L^2(\mathbb{T})$. Lo mismo sigue valiendo sobre Ω. En efecto, es ortonormal en $L^2(\Omega)$ pues

$$\int_\Omega e_j\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\Omega\cap[k,k+1]} e_j\,dt = \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\Omega+k)\cap[0,1]} e_j\,dt = \int_{\Omega_{\mathbb{T}}} e_j\,dt = \int_{\mathbb{T}} e_j\,dt = \delta_j.$$

Para ver la completitud hacemos una cuenta similar. Sea $f \in L^2(\Omega)$ tal que para todo $j \in \mathbb{Z}$

$$0 = \int_\Omega f\,\overline{e_j}\,dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\Omega\cap[k,k+1]} f\,\overline{e_j}\,dt = \int_{\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(\Omega+k)\cap[0,1]} f\,\overline{e_j}\,dt = \int_{\Omega_{\mathbb{T}}} f\,\overline{e_j}\,dt = \int_{\mathbb{T}} f\,\overline{e_j}\,dt.$$

Entonces $f = 0$. □

Corolario 6.4.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$, un conjunto tal que $|\Omega| < \infty$, entonces existe un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}$, $D(\Lambda) = |\Omega|$ tal que es un conjunto de unicidad para PW_Ω.*

Demostración. El enunciado vale cuando $|\Omega| = 1$ por el corolario 6.4.1. En el caso contrario, podemos encontrar un $a > 0$ de manera tal que $|a\Omega| = 1$ ($a = \frac{1}{|\Omega|}$). Luego, existe un conjunto separado $\Lambda \subset \mathbb{R}$ de unicidad para $PW_{a\Omega}$ de densidad $D(\Lambda) = 1$. Veamos que $a\Lambda \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de unicidad para PW_Ω. Sea $f \in PW_\Omega$ tal que $f(a\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ queremos ver que $f = 0$. Tomamos $g(x) = f(ax)$, donde esta función ahora vive en $PW_{a\Omega}$ pues si $f = \widehat{F}$ con $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $F = 0$ *ctp* fuera de Ω, entonces tomando $G(x) = F(\frac{x}{a})$

$$g \in L^2(\mathbb{R}) \qquad g = \frac{1}{a}\,\widehat{G} \qquad G = 0 \text{ } ctp \text{ fuera de } a\Omega.$$

Como $g(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y Λ es conjunto de unicidad, $g = 0$. En consecuencia, $f = 0$ como queríamos ver. Por último, notemos que $D(a\Lambda) = \frac{1}{a}D(\Lambda) = |\Omega|$. □

Con este último corolario se concluye el objetivo del trabajo. Recodermos que por la observación 6.1.2 el conjunto $\Lambda \subset \mathbb{R}$ obtenido resulta ser el conjunto de frecuencias de un sistema de exponenciales completo en $L^2(\Omega)$ cuya densidad es $D(\Lambda) = |\Omega|$, que es lo que estabamos buscando.

Apéndice A

A.1 Teorema de Aproximación de Dirichlet

Teorema. *(Dirichlet) Para cada α real y $N \geq 1$ natural, existen enteros p, q con $1 \leq q \leq N$ tales que $|q\alpha - p| \leq \frac{1}{N}$.*

Demostración. Para cada m tal que $1 \leq m \leq N+1$, tomamos $n = \lfloor m\alpha \rfloor$ de manera tal que $m\alpha - n \in [0, 1)$ es el valor fraccional de $m\alpha$. Como hay $N+1$ posibles elecciones de m, hay $N+1$ números $m\alpha - n \in [0, 1)$. Si dividimos el intervalo en N subintervalos de longitud $\frac{1}{N}$, por el principio del palomar, algún subintervalo debe contener a $m\alpha - n$ y $m'\alpha - n'$ para algún $1 \leq m' < m \leq N+1$. Esto es,

$$\frac{1}{N} \geq |(m\alpha - n) - (m'\alpha - n')| = |(m - m')\alpha - (n - n')|.$$

con lo cual $1 \leq q = m - m' \leq N$ y $p = n - n'$ satisfacen el teorema. $\square$

Este teorema se puede generalizar de la siguiente manera a una versión simultanea.

Teorema. *(Dirichlet simultaneo) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_L$ números reales y $N \geq 1$ natural, entonces existen $p_1, \ldots, p_L$ y $q > 0$ enteros tales que*

$$|q\alpha_l - p_l| \leq \frac{1}{N}, \quad l = 1, \ldots, L,\ 0 < q \leq N^L. \tag{A.1}$$

Demostración. Consideremos en $\mathbb{R}^L$ los puntos

$$(v(m\alpha_1), \ldots, v(m\alpha_L)), \quad m = 0, 1, \ldots, N^L, \tag{A.2}$$

y el cubo unitario, es decir, el conjunto de puntos

$$\{(y_1, \ldots, y_L) \,:\, 0 \leq y_l < 1,\ l = 1, \ldots, L\}.$$

Si dividimos cada segmento $0 \leq y_l < 1$ de cada eje coordenado en N subintervalos de longitud $\frac{1}{N}$ podemos dividir el cubo unitario en N^L cubos que consisten en los puntos $(y_1, \ldots, y_k)$ que satisfacen las desigualdades:

$$\frac{k_1}{N} \leq y_1 < \frac{k_1+1}{N}, \ldots, \frac{k_L}{N} \leq y_L < \frac{k_L+1}{N}, \tag{A.3}$$

donde los k_i, $i = 1, \ldots, L$ son una m-tupla de enteros del $0, \ldots, N-1$.

Todos los $N^L + 1$ puntos en (A.2) pertencen al cubo unitario, y cada uno de estos puntos cae en exactamente uno de los N^L cubos definidos en (A.3). Por el principio del palomar, alguno de los pequeños cubos debe contener al menos dos de estos puntos

$$(v(m\alpha_1), \ldots, v(m\alpha_L)), (v(m'\alpha_1), \ldots, v(m'\alpha_L)), \quad m' > m.$$

Como estos dos puntos pertenecen al mismo cubo, el valor absoluto de la diferencia entre dos coordenadas cualesquiera debe ser menor que $\frac{1}{N}$. Esto es,

$$|v(m'\alpha_l) - v(m\alpha_l)| < \frac{1}{N}, \quad l = 1, \ldots, L.$$

Recordemos que $v(m\alpha_l) = m\alpha_l - \lfloor m\alpha_l \rfloor$ y $v(m'\alpha_l) = m'\alpha_l - \lfloor m'\alpha_l \rfloor$, por lo que, tomando $q = m' - m$ y $p_l = \lfloor m'\alpha_l \rfloor - \lfloor m\alpha_l \rfloor$ para $l = 1, \ldots, L$, obtenemos que

$$|q\alpha_l - p_l| < \frac{1}{N}, \quad l = 1, \ldots, L, \; 0 \leq q \leq N^L$$

como queríamos ver. □

A.2 Teorema de Aproximación de Kronecker

Teorema. *(Kronecker) Para cada número irracional α, β real, $\epsilon > 0$ y M un número arbitrariamente grande, existen enteros p y n tales que $|n| \geq M$ y $|n\alpha - \beta - p| < \epsilon$.*

Si uno reduce módulo 1 la parte entera p desaparece de $n\alpha - \beta - p$, y se puede reformular el teorema de Aproximación de Kronecker de una manera más simple. Recodemos que el valor fraccional de un número real α es el representante de la clase de α sobre el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]$.

Teorema. *La sucesión de valores fraccionales de múltiplos enteros $\{v(n\alpha)\}_n$ donde α es un número real irracional, es densa en el intervalo $[0, 1]$.*

Demostración. La prueba del teorema de Kronecker comienza por el hecho de que existe un entero g y un natural q tales que

$$0 < |q\alpha - g| < \epsilon.$$

La desigualdad de la izquierda se debe a que α es irracional y la de la derecha es gracias al teorema de aproximación de Dirichlet tomando $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. Ahora, consideremos las ecuaciones $n = kq$ y $p = kg + c$, donde los enteros k y c serán determinados más adelante. Tenemos que

$$|n\alpha - \beta - p| = |k(q\alpha - g) - \beta - c| = |q\alpha - g| \cdot \left|k - \frac{\beta + c}{q\alpha - g}\right|.$$

Como queremos que sea menor que ϵ, tomemos $k = \left\lfloor \frac{\beta - c}{q\alpha - g} \right\rfloor + 1$ y c de manera tal que $|n| = |kq| \geq M$. Dado que $|n| = q|k|$, alcanza con tomar $|k| \geq M$, esto es si,

$$\left|\frac{\beta - c}{q\alpha - g}\right| \geq M + 1.$$

La desigualdad

$$\left|\frac{\beta - c}{q\alpha - g}\right| \geq \frac{|c|}{|q\alpha - g|} - \frac{|\beta|}{|q\alpha - g|},$$

nos dice que para que la condición de arriba se garantice, basta tomar $|c| \geq (M+1)|q\alpha - g| + |\beta|$. Luego, $|n\alpha - \beta - p| < \epsilon$ y $|n| \geq M$, como queríamos probar. $\square$

Utilizando argumentos similares uno puede generalizar el teorema de aproximación de Kronecker a una versión multi-dimensional.

Teorema. *(Kronecker multidimensional) Sean $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ números reales linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, $\beta_1, \dots, \beta_L$ números reales arbitrarios, ϵ y M dos números arbitrarios positivos, entonces se pueden encontrar enteros n y $p_1, \dots, p_L$ tales que*

$$|n\alpha_1 - \beta_1 - p_1| < \epsilon, \dots, |n\alpha_L - \beta_L - p_L| < \epsilon$$

donde $|n| \geq M$ y el signo de n puede ser elegido arbitrariamente.

Antes de pasar a la demostración, nuevamente consideremos los números $\alpha_1, \dots, \alpha_L$ módulo 1, es decir, que sólo nos interesan los valores fraccionales. En vez del espacio $\mathbb{R}^L$ podemos trabajar con el espacio $\mathbb{R}^L/\mathbb{Z}^L = [0,1]^L$ y obtenemos la siguiente reformulación del teorema.

Teorema. *Para L números reales tales que $\{1, \alpha_1, \dots, \alpha_L\}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ la sucesión de vectores $\{(v(N\alpha_1), \dots, v(N\alpha_L)) : N = 1, 2, \dots\}$ es densa en $[0,1]^L$.*

Demostración. Hagamos inducción en L. El caso $L = 1$ está probado en el teorema de Kronecker unidimensional. Supongamos que lo que asume el teorema vale para $L' = L - 1$.

Tomemos un $\delta > 0$ cuyo valor condicionaremos más adelante en la demostración. Uno puede encontrar enteros $g_1, \dots, g_L$ y un número natural q tales que

$$0 < |q\alpha_l - g_l| < \delta, \quad l = 1, \dots, L,$$

donde la desigualdad de la izquierda se debe a la irracionalidad de α_l y la de la derecha es el resultado de aplicar el teorema de aproximación de Dirichlet multidimensional, con $N \geq \frac{1}{\delta}$.

Como hicimos en el caso de dimensión uno, tomemos $n = kq$, $p_1 = kg_1 + c_1, \ldots, p_L = kg_L + c_L$, donde los valores de k y $c_1, \ldots, c_L$ los determinaremos después. Entonces tenemos

$$|n\alpha_l - \beta_l - p_l| = |k(q\alpha_l - g_l) - \beta_l - c_l| = |q\alpha_l - g_l| \cdot \left| k - \frac{\beta_l + c_l}{q\alpha_l - g_l} \right|.$$

Para la última componente $l = L$ tomamos de manera análoga al caso unidimensional, $k = \frac{\beta_L + c_L}{q\alpha_L - g_L} + v$, $|c_L| \geq M\,|q\alpha_L - g_L| + |\beta_L|$, donde $0 < v \leq 1$ incrementa la fracción al próximo entero mayor. De este modo obtenemos

$$|n\alpha_L - \beta_L - p_L| < \delta, \quad |n| \geq M,$$

además, el signo de n depende de si c_L tiene o no el mismo signo que $q\alpha_L - g_L$.

Para $l' = 1, \ldots, L - 1 = L'$ consideramos

$$\begin{aligned} n\alpha_{l'} - \beta_{l'} - p_{l'} &= kq\alpha_{l'} - \beta_{l'} - kg_{l'} - c_{l'} \\ &= q\alpha_{l'} \left(\frac{\beta_L + c_L}{q\alpha_L - g_L} + v \right) - \left(\frac{\beta_L + c_L}{q\alpha_L - g_L} + v \right) g_{l'} - \beta_{l'} - c_{l'} \\ &= c_L \left(\frac{q\alpha_{l'} - g_{l'}}{q\alpha_L - g_L} \right) - \left(\beta_{l'} - \frac{\beta_L(q\alpha_{l'} - g_{l'})}{q\alpha_L - g_L} \right) - c_{l'} + v(q\alpha_{l'} - g_{l'}). \end{aligned}$$

y definimos $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{L-1}$ y $\widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_{L-1}$ por

$$\widetilde{\alpha}_{l'} = \frac{q\alpha_{l'} - g_{l'}}{q\alpha_L - g_L}, \quad \widetilde{\beta}_{l'} = \beta_{l'} - \frac{\beta_L(q\alpha_{l'} - g_{l'})}{q\alpha_L - g_L}.$$

Los números $1, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{L-1}$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$ ya que dados los $x_1, \ldots, x_L$ racionales, la ecuación

$$\sum_{l'=1}^{L-1} x_{l'} \widetilde{\alpha}_{l'} + x_L = x_L + \left(\sum_{l'=1}^{L-1} x_{l'} q\alpha_{l'} - \sum_{l'=1}^{L-1} x_{l'} g_{l'} \right) \frac{1}{q\alpha_L - g_L} = 0,$$

lo que nos lleva a

$$\sum_{l=1}^{L} q x_l \alpha_l - \sum_{l=1}^{L} x_l g_l = 0,$$

que por la independencia lineal de $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_L$ sobre $\mathbb{Q}$, implica que $qx_1 = \cdots = qx_L = 0$ y por lo tanto $x_1 = \cdots = x_L = 0$.

Además, vale que

$$\begin{aligned} |n\alpha_{l'} - \beta_{l'} - p_{l'}| &\leq |c_L \widetilde{\alpha}_{l'} - \widetilde{\beta}_{l'} - c_{l'}| + |q\alpha_{l'} - g_{l'}| \\ &\leq |c_L \widetilde{\alpha}_{l'} - \widetilde{\beta}_{l'} - c_{l'}| + \delta. \end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva, existe un entero $\widetilde{n}$ con $|\widetilde{n}| \geq M\,|q\alpha_L - g_L| + |\beta_L|$ y enteros $\widetilde{p}_1, \ldots, \widetilde{p}_{L-1}$ para los cuales

$$|\widetilde{\alpha}_{l'}\widetilde{n} - \widetilde{\beta}_{l'} - \widetilde{p}_{l'}| < \delta.$$

El signo de $\widetilde{n}$ puede ser elegido libremente. Como c_L sólo tiene que satisfacer la condición $|c_L| \geq M|q\alpha_L - g_L| + |\beta_L|$ y uno puede suponer que el signo de n ya está dado, es posible elegir $c_L = \widetilde{n}$, y $c_{l'} = \widetilde{p}_{l'}$. De esta manera, se tiene que $|n| \geq M$,

$$|n\alpha_L - \beta_L - p_L| < \delta,$$

y también

$$|n\alpha_l - \beta_l - p_l| < 2\delta$$

para todo l. Si tomamos $\delta < \epsilon/2$, obtenemos el resultado que estabamos buscando. □

A.3 Demostración del Lema 5.3.2

Lema. *Sean $a_1, \ldots, a_L, b_1, \ldots, b_L \in \mathbb{R}$ todos distintos. Entonces existen infinitos $N \in \mathbb{N}$ tales que las sucesiones de valores fraccionales $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ no se entrelazan.*

El término entrelazar debe ser entendido cíclicamente. Es decir, que para algunas permutaciones σ y τ de $\{1, \ldots, L\}$ y para algún $x \in [0, 1]$,

$$v(Na_{\sigma(1)} + x) \leq v(Nb_{\tau(1)} + x) \leq v(Na_{\sigma(2)} + x) \leq \cdots \leq v(Nb_{\tau(L)} + x).$$

(x puede siempre ser elegido como $-Na_{\sigma(1)}$).

Demostración. Definamos

$$s_N = \left| \sum_{j=1}^{L} e(Na_j) - \sum_{j=1}^{L} e(Nb_j) \right|^2 \qquad S_K = \sum_{N=1}^{K} s_N.$$

La idea de esta prueba será ver que S_K es grande, mientras que cuando $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ se entrelazan, s_N es pequeño, lo cual nos dará una contradicción.

Veamos primero que S_K es grande. Para abrir el cuadrado de s_N denotaremos

$$\xi_j = \begin{cases} e(a_j) & j \in \{1, \ldots, L\} \\ e(b_{j-L}) & j \in \{L+1, \ldots, 2L\} \end{cases} \qquad \varepsilon_j = \begin{cases} 1 & j \in \{1, \ldots, L\} \\ -1 & j \in \{L+1, \ldots, 2L\} \end{cases}$$

y obtenemos

$$
\begin{aligned}
s_N &= \Big(\sum_{j=1}^{L} e(Na_j) - \sum_{j=1}^{L} e(Nb_j)\Big)\Big(\sum_{j=1}^{L}\overline{e(Na_j)} - \sum_{j=1}^{L}\overline{e(Nb_j)}\Big)\\
&= \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} e(Na_j)\overline{e(Na_k)} - \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} e(Na_j)\overline{e(Nb_k)} - \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} e(Nb_j)\overline{e(Na_k)} + \sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} e(Nb_j)\overline{e(Nb_k)}\\
&= \sum_{j=1}^{2L}\sum_{k=1}^{2L} \varepsilon_j\,\varepsilon_k\,\xi_j^N\,\overline{\xi_k}^N.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$S_K = \sum_{j=1}^{2L}\sum_{k=1}^{2L} \varepsilon_j \varepsilon_k \sum_{N=1}^{K} \xi_j^N \overline{\xi_k}^N.$$

Cuando $j = k$, $\xi_j \overline{\xi_k} = 1$

$$= 2LK + \sum_{j\neq k} \varepsilon_j \varepsilon_k \frac{\xi_j \overline{\xi_k} - (\xi_j \overline{\xi_k})^{K+1}}{1-\xi_j\overline{\xi_k}} = 2LK + O(1) \tag{A.4}$$

donde la constante implícita en $O(1)$ puede depender de L y de ξ_j pero no depende de K.

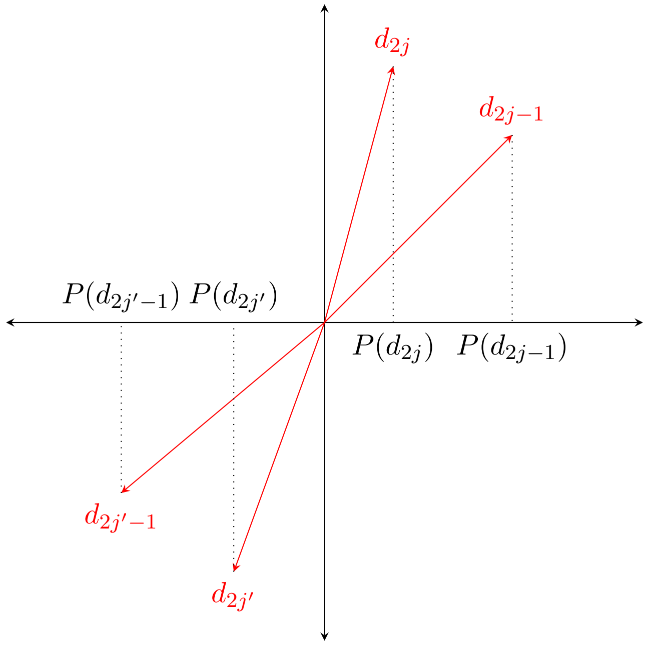
Por otro lado, veamos que s_N es pequeño cuando $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ se entrelazan. Definamos $\alpha = \sum_{j=1}^{L} e(Na_j) - \sum_{j=1}^{L} e(Nb_j)$, entonces $s_N = |\alpha|^2$. Asumamos que $\alpha \neq 0$ ya que, si no, $s_N = 0$ y no hay nada que probar. Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definido por $Px = \langle x, \alpha/|\alpha|\rangle_{\mathbb{R}^2}$ (donde a x y a α los pensamos como puntos en $\mathbb{R}^2$). P es proyectar sobre la recta $\alpha\mathbb{R}$ y después rotar a $\mathbb{R}$. Obtenemos

$$s_N = |P(\alpha)|^2 = \Big|\sum_{j=1}^{L} P(e(Na_j)) - \sum_{j=1}^{L} P(e(Nb_j))\Big|^2.$$

Sea ahora $\{d_j\}_{j=1}^{2L}$ la colección de puntos $\{e(Na_j)\} \cup \{e(Nb_j)\}$ ordenada en el sentido antihorario empezando desde $\alpha/|\alpha|$. Es decir que $\arg\alpha \leq \arg d_1 \leq \arg d_2 \leq \dots$. Como estamos asumiendo que $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ se entrelazan, vale que $d_{2j} \in \{e(Na_k)\}$ y $d_{2j+1} \in \{e(Nb_k)\}$ o viceversa. Para ambos casos se tiene que

$$s_N = \Big|\sum_{j=1}^{L} P(d_{2j-1}) - P(d_{2j})\Big|^2.$$

Es importante observar que $P(d_{2j-1}) - P(d_{2j})$ son positivos hasta un cierto j_0 y negativos desde ese punto en adelante. Por ejemplo, si $\alpha \in \mathbb{R}^+$ este hecho se visualiza fácilmente en el siguiente gráfico. En los primeros dos cuadrantes la diferencia es positiva y a partir del tercer cuadrante la diferencia se hace negativa.



Esto implica que

$$\left|\sum_{j=1}^{L} P(d_{2j-1}) - P(d_{2j})\right| \leq \max\left\{\sum_{j=1}^{j_0} P(d_{2j-1}) - P(d_{2j}), \sum_{j=j_0+1}^{L} P(d_{2j}) - P(d_{2j-1})\right\}.$$

Además, dado que los intervalos $[P(d_{2j-1}), P(2j)]$ son disjuntos en cada una de las dos secciones (es decir, hasta j_0 y desde j_0+1 en adelante), cada una de las sumas en la parte derecha de la desigualdad están acotadas por 2. De esta manera, sabemos que

$$s_N \leq 4 \text{ siempre que } v(Na_i) \text{ y } v(Nb_i) \text{ se entrelazan.} \tag{A.5}$$

Con esto podemos demostrar el caso $L \geq 3$. En efecto, si para todos los N salvo finitos $v(Na_i)$ y $v(Nb_i)$ se entrelazan entonces

$$2LK + O(1) \overset{(A.4)}{=} S_K = \sum_{N=1}^{K} s_N \overset{(A.5)}{\leq} 4K + O(1)$$

(donde el $O(1)$ de la derecha se debe al conjunto finito de N's donde no se entrelazan) como $K \to +\infty$, con K lo suficientemente grande se alcanza una contradicción.

Para hacer el caso $L = 2$ de una manera parecida, debemos mejorar la cota de (A.5). Fijemos un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño. Por el teorema de aproximación de Dirichlet simultaneo, dado un número entero N existe un entero n tal que $N \leq n \leq N + \lceil \varepsilon^{-4} \rceil$ y na_1, na_2, nb_1, nb_2 están a distancia menor o igual que ε de los enteros (aquí estamos usando Dirichlet corrido, es decir, en vez de encontrar un n entre 1 y $\lceil \varepsilon^{-4} \rceil$, lo encontramos entre N y $N + \lceil \varepsilon^{-4} \rceil$, que se consigue usando la misma demostación). Dado esto, aproximamos a s_n por su definición y usando el teorema del valor medio

$$\begin{aligned}
s_n^{\frac{1}{2}} &= |e(na_1) + e(na_2) - e(nb_1) - e(nb_2)| \\
&\leq |e(na_1) - 1| + |e(na_2) - 1| + |1 - e(nb_1)| + |1 - e(nb_2)| \\
&\leq |na_1 - 1| + |na_2 - 1| + |1 - nb_1| + |1 - nb_2| \leq 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon < \frac{1}{4}$ conseguimos $s_n^{\frac{1}{2}} \leq 1$ y concluimos que, si para todo $N \leq K$ hay entrelazamiento entonces existe una porción cK ($c \leq 1$) donde $s_N \leq 1$ y en la porción restante $(1-c)K$ sigue valiendo que $s_N \leq 4$ por (A.5). Entonces tenemos,

$$S_K = \sum_{N=1}^{K} s_N \leq (1-c)K \cdot 4 + cK \cdot 1 + O(1) \leq (4 - 3_1)K + O(1)$$

que nos conduce a una contradicción igual que antes. $\square$

Bibliografía

[AAC15] E. Agora, J. Antezana, and C. Cabrelli, *Multi-tiling sets, Riesz bases, and sampling near the critical density in LCA groups*, Advances in Mathematics **285** (2015), 454–477.

[Chr13] O. Christensen, *An Introduction to Frames and Riesz Bases*, Springer Science & Business Media, 2013.

[FMM06] B. Farkas, M. Matolcsi, and P. Móra, *On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra*, The Journal of Fourier Analysis and Applications **12** (2006), no. 5, 483–494, DOI 10.1007/s00041-005-5069-7.

[FR06] B. Farkas and S. Gy. Révész, *Tiles with no spectra in dimension 4*, Mathematica Scandinavica **98** (2006), no. 1, 44–52.

[Fug74] B. Fuglede, *Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem*, J. Functional Analysis **16** (1974), 101–121.

[Fug01] B. Fuglede, *Orthogonal exponentials on the ball*, Expositiones Mathematicae **19** (2001), no. 3, 267–272, DOI 10.1016/S0723-0869(01)80005-0.

[GL14] S. Grepstad and N. Lev, *Multi-tiling and Riesz bases*, Advances in Mathematics **252** (2014), 1–6, DOI 10.1016/j.aim.2013.10.019.

[Hei10] C. Heil, *A Basis Theory Primer*, Springer Science & Business Media, 2010.

[Ios] A. Iosevich, *Fuglede Conjecture for Lattices*, http://www.math.rochester.edu/people/faculty/iosevich/expository/FugledeLattice.pdf.

[IKT03] A. Iosevich, N. Katz, and T. Tao, *The Fuglede spectral conjecture holds for convex planar domains*, Mathematical Research Letters **10** (2003), no. 5-6, 559–569, DOI 10.4310/MRL.2003.v10.n5.a1.

[Kad64] M. Ĭ. Kadec, *The exact value of the Paley-Wiener constant*, Doklady Akademii Nauk SSSR **155** (1964), 1253–1254.

[KM06a] M. N. Kolountzakis and M. Matolcsi, *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*, Universitat de Barcelona. Collectanea Mathematica **Vol. Extra** (2006), 281–291.

[KM06b] M. N. Kolountzakis and M. Matolcsi, *Tiles with no spectra*, Forum Mathematicum **18** (2006), no. 3, 519–528, DOI 10.1515/FORUM.2006.026.

[Kol15] M. N. Kolountzakis, *Multiple lattice tiles and Riesz bases of exponentials*, Proceedings of the American Mathematical Society **143** (2015), no. 2, 741–747, DOI 10.1090/S0002-9939-2014-12310-0.

[KN15a] G. Kozma and S. Nitzan, *Combining Riesz bases*, Inventiones Mathematicae **199** (2015), no. 1, 267–285, DOI 10.1007/s00222-014-0522-3.

[KN15b] G. Kozma and S. Nitzan, *Combining Riesz bases in* $\mathbb{R}^d$, arXiv preprint arXiv:1501.05257 (2015).

[Lab01] I. Laba, *Fuglede's conjecture for a union of two intervals*, Proceedings of the American Mathematical Society **129** (2001), no. 10, 2965–2972 (electronic), DOI 10.1090/S0002-9939-01-06035-X.

[Lan67] H. J. Landau, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions*, Acta Mathematica **117** (1967), 37–52.

[LR00] Y. Lyubarskii and A. Rashkovskii, *Complete interpolation sequences for Fourier transforms suported by convex symmetric polygons*, Ark. Mat. **38** (2000), no. 1, 139–170.

[MSS15] A Marcus, D. A. Spielman, and N. Srivastava, *Interlacing families II: Mixed characteristic polynomials and the Kadison-Singer problem*, Annals of Mathematics **182** (2015), 327–350.

[Mat05] M. Matolcsi, *Fuglede's conjecture fails in dimension 4*, Proceedings of the American Mathematical Society **133** (2005), no. 10, 3021–3026 (electronic), DOI 10.1090/S0002-9939-05-07874-3.

[NOU14] S. Nitzan, A. Olevskii, and A. Ulanovskii, *Exponential frames on unbounded sets*, arXiv preprint arXiv:1410.5693 (2014).

[OU11] A. Olevskii and A. Ulanovskii, *Uniqueness sets for unbounded spectra*, Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris **349** (2011), no. 11-12, 679–681, DOI 10.1016/j.crma.2011.05.010.

[Tao04] T. Tao, *Fuglede's conjecture is false in 5 and higher dimensions*, Mathematical Research Letters **11** (2004), no. 2-3, 251–258, DOI 10.4310/MRL.2004.v11.n2.a8.

[You01] R. M. Young, *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series, Revised Edition, 93*, Academic Press, 2001.