UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Radio de Bohr, Series y Polinomios de Dirichlet

Eugenio Borghini

Director: Daniel E. Galicer

Julio de 2015

Créditos

El camino hasta aquí fue largo y sinuoso. Representa para mí una enorme alegría haberlo recorrido, y necesité la ayuda de un montón de gente para avanzar. No quiero olvidarme de nadie en esta lista.

Dany, gracias por dirigirme, por tu entusiasmo, tus ideas, tu disposición, tus correcciones, tus consejos, tu responsabilidad, tu confianza, tu calidez. Tu guía me permitió hacer este trabajo y conocerte. Sos un director excelente y una persona excepcional.

Quiero agradecer a Andreas Defant, por acercarme con total desinterés trabajos aun no publicados, que enriquecieron tanto la tesis como mi comprensión.

A Daniel y Román por haberme honrado aceptando ser jurados.

A mis padres por haberme criado, querido y mantenido durante tanto tiempo. A mi mamá por aquellas lejanas tardes en que se sentaba a hacer la tarea conmigo, por su dedicación y su entrega incondicional. A mi papá por alentarme a estudiar, por su sacrificio y su orgullo por cada pequeño logro. A mi hermana Costi por su cariño sin palabras y recordarme el verdadero valor de las cosas. A mi hermano Fabri por ser cómplice, compinche, confidente, compañero de juegos, aventuras y sufrimientos. Nadie puede quejarse demasiado de la vida si le regaló un Fabrizio de hermano.

A mi abuela Myriam, por tantos viernes compartidos. A mis tíos Simo y Sandro, cada uno genial a su modo. A mis primos Ceci, Fran, Augusto, Federico, Lorenzo y Esteban.

A los amigos que me quedaron del colegio: Cristian, Belu, Ale, Gonza, Diego, Pau. A pesar de no vernos tan seguido siempre estuvieron presentes. A Cristian por siempre ofrecer su casa, su colaboración y helado.

A mis profesores del secundario Gerardo, Anita y Graciela, que vieron en mí incluso más de lo que había. A Gerardo por ser mucho más que un profesor revolucionario.

A los que me acompañaron en el primer tramo de la carrera. En especial a Diego M., Daniel, Maxi, Ezequiel y Mati. Sus charlas, ideas, preguntas y respuestas me hicieron mejor persona y no tan mal matemático. A quienes conocí mejor durante la segunda mitad: Mati B., Diana, Pablo, Martín, Sofi, Santi V., Luli, Jaz, Nati y Aye. A Diana y Sofi por sus carpetas. A Pablo por las tardes de estudio (y las de no) y su perseverancia en contactarme.

A Vir, que me ayudó en los primeros años.

A mis compañeros de BBB: Mati B., Fabri, Fede, Xavier.

A Nico S., Pedro, Martín y Guillermo por contenerme durante dos semanas en Río. Por apoyar mi decisión. A Fede y Quimey, que me aceptaron y me brindaron su amistad en tiempos oscuros. A Coby por las conversaciones de café y sus puntos de vista siempre únicos.

A Yamila R. por haber sido nuestro ángel guardián.

A Nico por haber hinchado por mí.

A Xime, por hacerme feliz e inexplicablemente elegirme cada día. Por hacerme sentir especial y ayudarme a crecer. Aunque no llegaste a mi vida hace tanto, nada hubiera sido posible sin vos. Porque hacés todo más fácil.

Finalmente, un par de reflexiones sin destinatario específico. Doy gracias de haber siempre contado con techo, alimento, familia, cariño y oportunidades de desarrollo. Doy gracias al valor que aun conservan las instituciones públicas en este país. Particularmente estoy agradecido por haber podido formarme en la UBA, en el inolvidable pabellón I.

A todos ustedes y al ¿destino?, muchas gracias. Ojalá me sigan acompañando en esta nueva etapa.

Introducción

A principios del siglo XX, en el curso de su investigación sobre la función ζ de Riemann Harald Bohr dedicó grandes esfuerzos al estudio de las series de Dirichlet. Una serie de Dirichlet es simplemente una expresión de la forma

$$D(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^s},$$

donde el índice recorre los naturales, $a_n \in \mathbb{C}$ y $s = \sigma + it$ es una variable compleja. Las regiones de convergencia, convergencia absoluta y uniforme de estas series definen semiplanos de la forma $[\mathrm{Re} s > \sigma_0]$ en el plano complejo. Bohr estaba principalmente interesado en controlar la región de convergencia absoluta de cada serie. Para eso, buscó relacionar los distintos modos de convergencia y se concentró en particular en hallar el ancho de la banda más grande en que una serie de Dirichlet puede converger uniformemente pero no absolutamente. Esta pregunta es lo que se conoce como *problema de convergencia absoluta de Bohr*. Aunque el problema fue resuelto recién cerca de 20 años más tarde por Bohnenblust y Hille (quienes mostraron en [BH31] que el ancho máximo de dicha banda es $\frac{1}{2}$), Bohr hizo una serie de valiosos aportes en el área. Su principal contribución fue descubrir una conexión entre las series de Dirichlet y las series de potencias en infinitas variables. Dada una serie de Dirichlet $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, consideró para cada $n \in \mathbb{N}$ su descomposición en primos $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ (donde $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es la sucesión formada por los primos en orden creciente) y definió $z = (p_1^{-s}, \dots, p_r^{-s})$. Así,

$$D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n (p_1^{-s})^{\alpha_1} \dots (p_r^{-s})^{\alpha_r} = \sum a_n z_1^{\alpha_1} \dots z_r^{\alpha_r}.$$

Esta correspondencia, conocida como *transformada de Bohr* no es sólo formal: al restringir el dominio a un subconjunto adecuado de las series de Dirichlet y definir una norma natural en él, se convierte en una isometría. La transformada de Bohr permite traducir problemas sobre series de Dirichlet en términos de series de potencias y abordarlos con técnicas de análisis complejo. Este ciclo de ideas llevó a Bohr a preguntarse si era posible comparar el valor absoluto de una serie de potencias en una variable con la suma de los valores absolutos de sus coeficientes. Como respuesta, logró demostrar el siguiente:

Teorema 4.1.1. *(Bohr)* El radio $r = \frac{1}{3}$ es el valor óptimo para el cual se verifica la desigualdad:

$$\sum_{n\geq 0} |c_n| r^n \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left| \sum_{n\geq 0} c_n z^n \right|,$$

para toda función holomorfa $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ en el disco con $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$.

Este interesante resultado fue mayormente olvidado hasta los trabajos relativamente recientes de Dineen, Dixon, y Boas y Khavinson [DT89, Dix95, KB97]. En el último de ellos, los autores analizaron si se producía un fenómeno similar para series de potencias en varias variables. Las regiones de convergencia de estas series determinan conjuntos con ciertas propiedades llamados dominios de Reinhardt (ver 1.4.3 para una definición formal). Para cada uno de estos dominios R, introdujeron la noción de *radio de Bohr* $K(R)$ como el número más grande $r \geq 0$ tal que para toda función holomorfa $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ acotada en R se cumple:

$$\sup_{z \in rR} \sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq \sup_{z \in R} |f(z)|.$$

Con esta notación, el teorema original de Bohr se puede formular simplemente como $K(\mathbb{D}) = \frac{1}{3}$. Sorprendentemente, el valor exacto del radio de Bohr no es conocido para ningún otro dominio; sin embargo, los resultados centrales de [KB97, Boa00] contienen un éxito parcial en la estimación del radio de Bohr de las bolas unidad de los espacios ℓ_p^n complejos, $1 \leq p \leq \infty$.

Teorema. *(Boas-Khavinson)* Sea $n > 1$. El radio $K(B_{\ell_p^n})$ admite las siguientes cotas:

I) Si $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{e}} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq K(B_{\ell_p^n}) \leq 3 \left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

II) Si $2 \leq p \leq \infty$, entonces

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{n}} \leq K(B_{\ell_p^n}) \leq 2\sqrt{\frac{\log n}{n}}.$$

De este resultado se desprenden varios hechos interesantes. En primer lugar, muestra que el comportamiento asintótico del radio de Bohr es cualitativamente distinto para los casos $p < 2$ y $p \geq 2$. Además, implica que la sucesión de radios $(K(B_{\ell_p^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ decrece a 0 salvo para $p = 1$. La brecha entre las cotas inferiores y superiores dio origen a una serie de esfuerzos orientados a calcular el orden asintótico exacto del radio $K(B_{\ell_p^n})$ para $1 \leq p \leq \infty$. Para obtener las cotas superiores Boas generalizó de manera ingeniosa un teorema de Kahane-Salem-Zygmund sobre polinomios aleatorios trigonométricos, que asegura por medio de un argumento probabilístico la existencia de polinomios homogéneos con coeficientes de módulo 1 y norma supremo relativamente pequeña. Esta técnica (y algunos refinamientos de ella) es esencialmente la única disponible para alcanzar estimaciones por arriba del radio de Bohr.

La cota inferior es un mundo distinto. En el artículo [DGM03] los autores relacionaron el radio de Bohr con conceptos no elementales de la teoría local de espacios de Banach: la incondicionalidad en espacios de polinomios homogéneos vía la estimación de distancias de Banach-Manzur. Si bien estas técnicas no llevaron a cotas óptimas, esta visión inició el camino por el que se obtendría el crecimiento asintótico del radio de Bohr para las bolas $B_{\ell_p^n}$. El artículo [DFOC+11] produjo un quiebre en el abordaje del problema. Los autores involucraron nuevamente en el área la clásica desigualdad de Bohnenblust-Hille simétrica, que había sido utilizada para computar la banda de convergencia de Bohr. Esta desigualdad dice que la norma $\ell_{\frac{2m}{m+1}}$ de los coeficientes de un polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$ está acotada salvo una constante independiente de n por su norma supremo. Formalmente, dado $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $C_m > 0$ tal que para todo polinomio m-homogéneo $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ en $\mathbb{C}^n$,

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right|.$$

El gran avance de este trabajo consistió en demostrar la hipercontractividad de la desigualdad, es decir, la constante C_m puede ser en realidad tomada como C^m para cierto $C > 1$. A partir de este resultado, probaron que $K(B_{\ell_\infty^n})$ se comporta asintóticamente como $\sqrt{\frac{\log n}{n}}$. También les permitió revisar la solución del problema de Bohr dada en [BH31] y formular una versión más fuerte que la original sobre la que ahondaremos un poco más adelante. Debido al hecho de que el radio de Bohr $K(B_{\ell_\infty^n})$ acota inferiormente el radio $K(R)$ para cualquier otro dominio de Reinhardt R (ver 4.1.3), esto cubre todo el rango $p \geq 2$. La resolución del caso $p < 2$, si bien enmarcada en el mismo contexto teórico (el del estudio de la incondicionalidad en espacios de polinomios homogéneos), requirió una gama distinta de métodos. Un célebre teorema probado independientemente por Pisier [Pis86] y Schütt [Sch78] permite estudiar bases incondicionales en espacios de funciones multilineales en términos de otros invariantes: estructura de incondicionalidad local o propiedad de Gordon-Lewis (propios de la teoría local de espacios de Banach). Dichos resultados tienen su contrapartida en el contexto de espacios de polinomios cambiando el producto tensorial completo por el simétrico. ¿Cómo entra en juego el producto tensorial de espacios de Banach? Por medio de la identificación isométrica natural que existe entre productos tensoriales simétricos y polinomios homogéneos. Defant y Frerick en [DF11] establecieron una extensión del teorema de Pisier y Schütt al caso del producto tensorial simétrico con cotas relativamente ajustadas y desarrollaron una nueva estimación de la constante de Gordon-Lewis del producto tensorial simétrico. Como corolario, obtuvieron el orden de crecimiento exacto para el radio de Bohr de la bola unidad de los espacios ℓ_p^n :

Teorema 4.2.1. Existen constantes $C_1, C_2 \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p \leq \infty$ y $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$C_1 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1 - \frac{1}{\operatorname{mín}(p,2)}} \leq K(B_{\ell_p^n}) \leq C_2 \left(\frac{\log n}{n} \right)^{1 - \frac{1}{\operatorname{mín}(p,2)}}.$$

Aunque este resultado parece cerrar definitivamente el problema, es posible dar una vuelta de tuerca más. Basados en una ingeniosa mejora en el orden de crecimiento de la constante en la desigualdad de Bohnenblust-Hille, Bayart et al. mostraron en [BPSS14] que el radio de Bohr de $B_{\ell_\infty^n}$ se comporta *exactamente* como $\sqrt{\frac{\log n}{n}}$, es decir:

$$\lim_n \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\sqrt{\frac{\log n}{n}}} = 1.$$

La combinación de este último resultado con una revisión de la prueba de la cota superior en [Boa00] posibilita obtener la misma conclusión para espacios ℓ_p^n con $2 \leq p \leq \infty$:

$$\lim_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\sqrt{\frac{\log n}{n}}} = 1.$$

El rango $1 \leq p < 2$ es bastante más complicado y no está resuelto. El punto clave de la dificultad radica en que no existe un análogo de la desigualdad de Bohnenblust-Hille en este contexto. Los únicos progresos que conocemos están basados esencialmente en ajustar desigualdades y estimaciones propias de los lineamientos del argumento de Defant y Frerick.

Es notable el desarrollo y la conexión que el problema del radio de Bohr originó en áreas aparentemente apartadas como las series de Dirichlet y la teoría local de espacios de Banach. Los enormes avances realizados en el tema permitieron refinar y generalizar en varios sentidos la solución de Bohnenblust-Hille. Una muestra de esto es la utilización del clásico concepto de constante de Sidon como un análogo en cierto punto de la noción de incondicionalidad en el contexto de series de Dirichlet. Dado un natural $x \geq 2$, se define la constante de Sidon del conjunto $\Lambda(x) := \{\log n : n \in \mathbb{N},\ n \leq x\}$ como la mejor constante $C_x > 0$ tal que la acotación

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \leq C_x \sup_{[\mathrm{Re} s > 0]} \left| \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} \right|,$$

vale para todo polinomio de Dirichlet $\sum_{n \leq x} a_n n^{-s}$ (confrontar con la definición 1.3.1). Konyagin y Queffélec en [KQ01] y de la Bretéche en [dLB08] estudiaron el comportamiento de estas constantes. En el fundamental artículo [DFOC$^+$11] Defant et al. lograron calcular el valor asintóticamente correcto de C_x: existe una función $a : \mathbb{R} > 0 \to \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to \infty} a(x) = 0$ tal que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{C_x}{\sqrt{x} e^{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + a(x)\right)\sqrt{\log x \log \log x}}}. \tag{1}$$

Como corolario dieron la solución definitiva a un problema previamente atacado por Balasubramanian, Calado y Queffélec [BCQ06, Teorema 1.2].

Teorema. Sean $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet convergente en $[\mathrm{Re} s > 0]$ y $0 \leq c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ un real. Entonces,

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \frac{e^{c\sqrt{\log n \log \log n}}}{n^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

Además la constante $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es óptima.

Vale mencionar que, con las mismas hipótesis, el resultado original de Bohnenblust y Hille sobre la convergencia absoluta en series de Dirichlet sólo daba $\sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} < \infty$, para cualquier $\varepsilon > 0$.

El objetivo principal de este trabajo es desarrollar las técnicas y nociones necesarias para demostrar las cotas más precisas conocidas del radio de Bohr de las bolas $B_{\ell_p^n}$ y mostrar cómo éstas, combinadas con un poco de teoría analítica de números, llevan a nuevas conclusiones en el contexto del estudio de series de Dirichlet.

La tesis está organizada de la siguiente manera.

En el Capítulo 1 repasamos los conceptos necesarios para la comprensión del desarrollo. En concreto, damos definiciones y propiedades sobre formas multilineales y polinomios homogéneos en espacios de Banach, los rudimentos de la teoría métrica de productos tensoriales y productos tensoriales simétricos, hablamos sobre incondicionalidad e invariantes para estimarla provenientes de la teoría local de espacios de Banach y terminamos con estimaciones sobre los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de funciones holomorfas de varias variables complejas.

Los Capítulos 2 y 3, si bien en el marco de este trabajo fueron concebidos como accesorios para desarrollar las demostraciones del Capítulo 4, tienen un interés independiente. En el Capítulo 2 presentamos dos desigualdades omnipresentes en el desarrollo, las de Bohnenblust-Hille y Bayart, enfocados en conseguir sus versiones más fuertes (en términos del crecimiento de las constantes asociadas). En el Capítulo 3 exponemos desigualdades de tipo Kahane-Salem-Zygmund para espacios ℓ_p^n complejos. Constituye una pequeña muestra de la importancia y extensión del uso del método probabilístico en el análisis funcional.

En el Capítulo 4 probamos las estimaciones más ajustadas conocidas para los radios de Bohr $K(B_{\ell_p^n})$ de las bolas unidad de ℓ_n^p ($n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$), describiendo su comportamiento asintótico cuando es posible. La obtención del comportamiento exacto para el caso $2 \leq p < \infty$ es original (si bien simple y fuertemente basada en los trabajos [BPSS14, Boa00]). También incluimos una cota inferior original para el caso $1 < p \leq 2$ (ver 4.2.11 y el desarrollo previo), más precisa que las que habíamos encontrado en la literatura. Más tarde, Andreas Defant generosamente compartió con nosotros un trabajo hecho en colaboración con su alumno Sunke Schlüters y Frédéric Bayart con un resultado que implica una cota mejor (ver 4.2.15).

En el último capítulo presentamos desde un punto de vista moderno el camino recorrido por Bohr en su investigación sobre las series de Dirichlet. Es éste el contexto histórico en el que Bohr formuló su radio. Además, mostramos algunos refinamientos realizados sobre la solución del problema de convergencia absoluta gracias a las técnicas y herramientas desarrolladas para atacar el problema de estimar los -radios de Bohr generalizados. Por otra parte, indicamos las líneas que llevan a la demostración de (1) y estudiamos algunas generalizaciones en el contexto de polinomios de Dirichlet homogéneos y las conexiones existentes con el radio de Bohr.

El Apéndice A contiene algunos resultados básicos sobre el tamaño de ciertos conjuntos que aparecen naturalmente en la teoría analítica de números. Son utilizados en el desarrollo del Capítulo 5.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo de este capítulo es exponer las definiciones, notaciones y resultados necesarios para la comprensión del trabajo, incluyendo algunas pruebas. Los espacios de Banach considerados serán complejos. Escribiremos X' para referirnos al dual topológico de un espacio vectorial X. Dados $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ notaremos como es usual con ℓ_p^n al espacio de Banach $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_{\ell_p^n})$ donde

$$\|(z_1, \ldots, z_n)\|_{\ell_p^n} := \left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

para $z \in \mathbb{C}^n$, con la modificación obvia si $p = \infty$.

Para un espacio de Banach X escribiremos B_X a su bola unidad abierta, es decir,

$$B_X = \{x \in X : \|x\| < 1\}.$$

Si $x' \in X'$ y $x \in X$, notaremos la evaluación del funcional x' en x indistintamente como $x'(x)$ o $\langle x', x \rangle$.

1.1. Formas multilineales y polinomios homogéneos

La manipulación de formas multilineales y su relación con polinomios homogéneos será importante a lo largo de toda la exposición. En esta sección introduciremos la notación y los resultados necesarios. Comenzamos fijando una notación usual para ciertos conjuntos de índices.

Notación 1.1.1. Sean $n, m > 1 \in \mathbb{N}$. Escribimos:

$$\mathcal{M}(m, n) := \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) : i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}\},$$

$$\mathcal{J}(m, n) := \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{J}(m, n) : j_1 \leq \cdots \leq j_m\}$$

y por último

$$\Lambda(m, n) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = m\}.$$

Para $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathcal{M}(m, n)$ notamos $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$ siempre que exista una permutación σ de $\{1, \ldots, m\}$ tal que $i_{\sigma(k)} = j_k$, $\forall\ 1 \leq k \leq m$. Claramente esto define una relación de equivalencia en $\mathcal{M}(m, n)$, cuyas clases denotaremos por $[\mathbf{i}]$. Escribiremos $|[\mathbf{i}]|$ para referirnos al cardinal de cada clase $[\mathbf{i}]$.

Si bien evidente, las relaciones entre cada uno de estos conjuntos de índices será de gran utilidad en el desarrollo de varias demostraciones. En la siguiente observación hacemos una recopilación de ellas:

Observación 1.1.2. Para cada $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$ hay un único índice $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ con $[\mathbf{i}] = [\mathbf{j}]$. Por otro lado, hay una correspondencia biunívoca entre $\mathcal{J}(m,n)$ y $\Lambda(m,n)$ que a cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ le asigna el multiíndice $\alpha \in \Lambda(m,n)$ dado por $\alpha_r = |\{k \in \{1,\dots,m\} : j_k = r\}|$ y recíprocamente, a cada $\alpha \in \Lambda(m,n)$ le asocia el índice:

$$\mathbf{j} = (\overbrace{1,\dots,1}^{\alpha_1}, \overbrace{2,\dots,2}^{\alpha_2}, \dots) \in \mathcal{J}(m,n).$$

Más aún, si α y $\mathbf{j}$ se corresponden vía esta asignación, tenemos $|[\mathbf{j}]| = \frac{m!}{\alpha!}$.

Teniendo en cuenta esto, recordamos la definición de funciones y formas multilineales y damos la notación que utilizaremos para trabajar de aquí en más.

Notación 1.1.3. Sean $m \in \mathbb{N}$, y $X_1, \dots, X_m$, F espacios de Banach. Una aplicación

$$\phi : X_1 \times \cdots \times X_m \to F$$

es multilineal (o *m-lineal*) si es lineal en cada variable. Como es usual, al conjunto de funciones multilineales que son continuas respecto de las topologías dadas por las normas, lo notaremos $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;F)$ (o en el caso en que $F = \mathbb{C}$, simplemente $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m)$). Para ϕ multilineal, definimos:

$$\|\phi\| := \sup_{x_1 \in B_{X_1},\dots,x_m \in B_{X_m}} \|\phi(x_1,\dots,x_m)\|.$$

Así ϕ resulta continua si y sólo si $\|\phi\|$ es finita. Más aún, esto define una norma que hace de $\mathcal{L}(X_1,\dots,X_m;F)$ un espacio de Banach.

Nos interesará especialmente el caso en que $X_1 = \cdots = X_m = X$ y $F = \mathbb{C}$. Escribimos $\mathcal{L}(^mX)$ al conjunto de formas m-lineales continuas B. Si además X es de dimensión finita n, podemos escribir de forma concreta estas multilineales. Fijamos $(e_i)_{i=1}^n$ una base de X con base dual $(e_i')_{i=1}^n$. Para $x = (x_1,\dots,x_m) \in X^m$:

$$B(x_1,\dots,x_m) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} e_{i_1}'(x_1)\dots e_{i_m}'(x_m) = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} e_{\mathbf{i}}'(x),$$

donde los coeficientes vienen dados por $b_{\mathbf{i}} = B(e_{i_1},\dots,e_{i_m})$ y para cada $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$, notamos $e_{\mathbf{i}}'(x) := e_{i_1}'(x_1)\dots e_{i_m}'(x_m)$.

Estamos en condiciones de definir qué entendemos por un polinomio m-homogéneo en un espacio de Banach.

Definición 1.1.4. Sean X, F espacios de Banach. Decimos que una aplicación $P : X \to F$ es un polinomio m-homogéneo en X si existe $\phi : X^m \to F$ función m-lineal tal que:

$$P(x) = \phi(x,\dots,x),$$

para cada $x \in X$. Es decir, P es la restricción a la diagonal de la función m-lineal ϕ. El conjunto de polinomios en un espacio de Banach tiene asociada así naturalmente una norma vía:

$$\|P\| := \sup_{x \in B_X} \|P(x)\|.$$

Se verifica entonces que un polinomio es continuo si y sólo si tiene norma finita. Denotaremos con $\mathcal{P}(^mX; F)$ al espacio de polinomios m-homogéneos continuos en X que caen en F, que resulta además un espacio de Banach con la norma definida arriba. Para el caso de interés en que $F = \mathbb{C}$, notaremos $\mathcal{P}(^mX)$.

De la propia definición se desprende que un polinomio homogéneo sobre un espacio de Banach siempre tiene asociada una función multilineal ϕ, aunque no necesariamente de manera única. Sin embargo, la correspondencia es unívoca si exigimos una condición adicional sobre ϕ. Decimos que una función multilineal ϕ es *simétrica* si para cada permutación σ de $\{1, \ldots, m\}$ se verifica $\phi(x_1, \ldots, x_m) = \phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$. Notaremos con $\mathcal{L}_s(^mX; F)$ al subespacio de $\mathcal{L}(^mX; F)$ formado por las funciones m-lineales simétricas y continuas. El siguiente resultado garantiza la unicidad de la forma multilineal simétrica asociada a un polinomio homogéneo.

Lema 1.1.5. (Polarización) *Sean X, F espacios de Banach. Si $\phi : X^m \to F$ es una forma m-lineal simétrica en X, la restricción de ϕ a la diagonal $P(x) := \phi(x, \ldots, x)$ define un polinomio homogéneo. Recíprocamente, si $P : X \to F$ es un polinomio m-homogéneo en X existe una única función multilineal simétrica $\check{P}$ tal que $\check{P}(x, \ldots, x) = P(x)$, $\forall x \in X$. Más aún, la relación entre ellos está dada por la fórmula de polarización:*

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m 2^m} \sum_{\substack{\epsilon_i \in \{-1,1\} \\ 1 \le i \le m}} \epsilon_1 \ldots \epsilon_m P\left(\sum_{j=1}^m \epsilon_j x_j \right).$$

En adelante, a menos que sea explícitamente aclarado lo contrario, nos ocuparemos sólo de polinomios homogéneos que toman valores en el cuerpo $\mathbb{C}$. Como hicimos para formas multilineales, podemos también fijar una notación para manipular polinomios homogéneos.

Notación 1.1.6. Sean X un espacio de Banach de dimensión n y $P \in \mathcal{P}(^mX)$. Fijamos $(e_i)_{i=1}^n$ una base de X con base dual $(e'_i)_{i=1}^n$. Si $\check{P} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} e'_{\mathbf{i}}$ es la forma simétrica asociada de P, resulta para $x \in X$:

$$\begin{aligned} P(x) = \check{P}(x, \ldots, x) &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} e'_{i_1}(x) \ldots e'_{i_m}(x) \\ &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \sum_{\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]} b_{\mathbf{i}} e'_{i_1}(x) \ldots e'_{i_m}(x) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} e'_{\mathbf{j}}(x), \end{aligned}$$

donde $c_{\mathbf{j}} = |[\mathbf{j}]| b_{\mathbf{i}}$ para cualquier $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$ (recordemos que $\check{P}$ es simétrica y por lo tanto todos estos coeficientes tienen un valor común) y $e'_{\mathbf{j}}(x) := e'_{i_1}(x) \ldots e'_{i_m}(x)$. Debido a esto, usualmente escribiremos $P(x) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} e'_{\mathbf{j}}(x)$ para polinomios m-homogéneos. Para el caso de principal interés, en que $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, la expansión en la base canónica queda:

$$P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{j_1} \ldots z_{j_m} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}.$$

Agrupando las coordenadas en cada monomio $z_{\mathbf{j}}$ llegamos a la escritura familiar:

$$P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha,$$

donde $|\alpha| = m$ significa que la suma es sobre todos los índices $\alpha \in \Lambda(m,n)$ y el coeficiente c_α coincide con $c_{\mathbf{j}}$ siempre que $\mathbf{j}$ y α sean asociados.

En el desarrollo de las demostraciones, frecuentemente cambiaremos un polinomio homogéneo P por su forma multilineal asociada $\check{P}$ y necesitaremos relacionar sus normas. Es claro que:

$$\|P\| = \sup_{x\in B_X} |P(x)| \leq \sup_{x_1,\dots,x_m\in B_X} |\check{P}(x_1,\dots,x_m)| = \|\check{P}\|.$$

En el otro sentido, Harris [Har72] demostró la siguiente relación:

Teorema 1.1.7. *Sean X espacio de Banach de dimensión finita, $m \in \mathbb{N}$. Si $m_1,\dots,m_k \in \mathbb{N}$ verifican $m_1 + \cdots + m_k = m$, entonces:*

$$|\check{P}(\underbrace{x_1,\dots,x_1}_{m_1},\dots,\underbrace{x_k,\dots,x_k}_{m_k})| \leq \frac{m_1!\dots m_k!}{m_1^{m_1}\dots m_k^{m_k}}\frac{m^m}{m!}\|P\|.$$

Notemos que como caso particular de esta desigualdad, tenemos para cualquier $P \in \mathcal{P}(^mX)$:

$$\|P\| \leq \|\check{P}\| \leq \frac{m^m}{m!}\|P\|. \tag{1.1}$$

El lema de polarización 1.1.5 dice que la aplicación:

$$\begin{aligned} \check{}: \mathcal{P}(^mX) &\to \mathcal{L}_s(^mX) \\ P &\mapsto \check{P} \end{aligned}$$

es un isomorfismo lineal. De la cadena de desigualdades (1.1) deducimos que en realidad es un isomorfismo de espacios de Banach.

1.2. Productos tensoriales

La principal motivación para estudiar productos tensoriales consiste en que permiten dar formulaciones de problemas concernientes a aplicaciones multilineales y polinomios homogéneos en términos de funciones lineales definidas sobre otros espacios. Si bien esto resultará claro desde el punto de vista puramente algebraico, para obtener resultados significativos en el contexto de espacios de Banach, será necesario también presentar el material básico acerca de la teoría métrica de productos tensoriales. Como fuentes completas sobre el tema, referimos a [DF92], [Flo97].

Recordamos para empezar la definición algebraica del producto tensorial de espacios vectoriales. El producto tensorial de los espacios vectoriales $X_1,\dots,X_m$ ($m \in \mathbb{N}$) es un espacio vectorial T junto con una aplicación m-lineal $\psi : X_1 \times \cdots \times X_m \to T$ definido por la siguiente propiedad universal:

Dados un espacio vectorial F y una aplicación m-lineal $\phi : X_1 \times \cdots \times X_m \to F$, existe una única transformación lineal $A_\phi : T \to F$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_1 \times \cdots \times X_m \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & F \\ T \arrow[ur, "A_\phi"'] & \end{tikzcd}$$

El par (T, ψ) resulta único salvo isomorfismos, y por eso notaremos con $\otimes(X_1, \ldots, X_m)$ (o también $X_1 \otimes \cdots \otimes X_m$) al producto tensorial de los espacios $X_1, \ldots, X_m$. Si $X_1 = \cdots = X_m = X$, notaremos $\otimes^m X$ a $\otimes(X, \ldots, X)$, el producto tensorial de orden m de X. A la imagen por ψ de cada m-upla $(x_1, \ldots, x_m)$ con $x_i \in X_i$ la denotaremos con $\psi(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ y llamaremos *tensores elementales* a cada uno de estos puntos. El producto tensorial es generado por los tensores elementales, esto es, cualquier $z \in \otimes(X_1, \ldots, X_m)$ admite una escritura de la forma:

$$z = \sum_{j=1}^{r} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_m^j,$$

con $x_i^j \in X_i$, para cada $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq r$. Esta representación no es necesariamente única.

Como anticipamos, si los espacios con los que trabajamos son espacios de Banach, desearemos darle una norma al producto tensorial de manera que verifique ciertas propiedades "razonables".

Definición 1.2.1. Sean X e Y espacios de Banach. Decimos que una norma $\|\cdot\|_{X \otimes Y}$ en $X \otimes Y$ es *razonable* si cumple:

(I) $\|x \otimes y\|_{X \otimes Y} = \|x\|_X \|y\|_Y \ \forall\, x \in X,\ y \in Y$.

(II) $\|x' \otimes y'\|_{(X \otimes Y, \|\cdot\|_{X \otimes Y})} = \|x'\|_{X'} \|y'\|_{Y'} \ \forall\, x' \in X',\ y' \in Y'$.

A partir de esta definición surgen naturalmente dos normas extremales entre las razonables, la *norma proyectiva* (o *norma* π) y la *norma inyectiva* (o *norma* ε). Hacemos un breve repaso de sus definiciones y propiedades.

Dados $X_1, \ldots, X_m$ espacios de Banach se define la norma proyectiva en $\otimes(X_1, \ldots, X_m)$ para un tensor z como:

$$\pi(z) := \inf\{\sum_{j=1}^{r} \|x_1^j\| \ldots \|x_m^j\| : z = \sum_{j=1}^{r} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_m^j\}.$$

Notamos con $\otimes_\pi(X_1, \ldots, X_m)$ al producto tensorial dotado de esta norma. Podemos ahora dar forma precisa a la afirmación hecha al principio de la sección acerca de cómo la introducción del producto tensorial permite trasladar problemas dados en términos de formas multilineales al estudio de aplicaciones lineales. Una manera de interpretar la propiedad universal del producto tensorial es que la aplicación $\phi \leftrightarrow A_\phi$ es un isomorfismo entre las funciones multilineales de $X_1 \times \cdots \times X_m$ en F y las funciones lineales de $\otimes(X_1, \ldots, X_m)$ en F, para cualquier espacio vectorial F. En el caso en que todos los espacios involucrados sean de Banach, nos interesa saber si existe una relación análoga considerando únicamente el espacio de las funciones multilineales continuas $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m, F)$. La siguiente proposición garantiza que esto sucede si consideramos la completación $\tilde{\otimes}_\pi(X_1, \ldots, X_m)$ de $\otimes_\pi(X_1, \ldots, X_m)$.

Proposición 1.2.2. *La aplicación $\phi \leftrightarrow A_\phi$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; F)$ y $\mathcal{L}(\tilde{\otimes}_\pi(X_1, \ldots, X_m))$. Si $F = \mathbb{C}$, se tiene una identificación isométrica*

$$\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m) = (\tilde{\otimes}_\pi(X_1, \ldots, X_m))'$$

.

En el caso en que los espacios $X_1, \ldots, X_m$ sean de dimensión finita la completitud del producto tensorial con la norma proyectiva es automática (pues también resulta ser un espacio vectorial normado de dimensión finita) y entonces la identificación isométrica es simplemente $\mathcal{L}(X_1, \ldots, X_m; F) = \mathcal{L}(\otimes_\pi(X_1, \ldots, X_m); F)$.

La norma inyectiva se define para un tensor $z \in \otimes(X_1, \ldots, X_m)$ por:

$$\varepsilon(z) := \sup_{x_1' \in B_{X_1'}, \ldots, x_m' \in B_{X_m'}} \{ |\sum_{j=1}^{r} x_1'(x_1^j) \ldots x_m'(x_m^j)| : z = \sum_{j=1}^{r} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_m^j \}.$$

Visto desde otra perspectiva, la norma inyectiva está definida para que la aplicación

$$\bigotimes_{\varepsilon}(X_1, \ldots, X_m) \to \mathcal{L}(X_1', \ldots, X_m')$$
$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \mapsto \left[x_1' \otimes \cdots \otimes x_m' \mapsto \prod_{k=1}^{m} x_k'(x_k) \right]$$

resulte una inclusión isométrica.

Para espacios de Banach $X_1, \ldots, X_m$ de dimensión finita, las normas proyectiva e inyectiva cumplen la relación de dualidad:

$$\otimes_\varepsilon^m X' = (\otimes_\pi^m X)'.$$

En vista de la proposición 1.2.2, esto implica que hay una igualdad isométrica $\otimes_\varepsilon^m X' = \mathcal{L}(^m X)$.

1.2.1. Productos tensoriales simétricos

En su tesis doctoral de 1980, R.Ryan [Rya80] introdujo los productos tensoriales simétricos por primera vez para el estudio de polinomios en espacios de Banach. Imitamos aquí el camino recorrido al presentar los productos tensoriales completos y las identificaciones isométricas a las que dan lugar con el fin de obtener resultado análogos para el caso simétrico.

Así como el producto tensorial linealizaba funciones multilineales, el producto tensorial simétrico está definido para linealizar únicamente las funciones multilineales simétricas. Concretamente, dados $m \in \mathbb{N}$ y un espacio vectorial X, el producto tensorial simétrico es un espacio vectorial T_s junto con una aplicación $\psi_s : X^m \to T_s$ m-lineal que verifica la siguiente propiedad universal: Para cualquier espacio vectorial F y aplicación m-lineal simétrica $\varphi : X^m \to F$ existe una única función lineal $L_\varphi : T_s \to F$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X^m \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi_s"'] & F \\ T_s \arrow[ur, "L_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

El espacio T_s está bien definido salvo isomorfismos y lo notaremos por $\otimes^{m,s}X$. El producto tensorial simétrico resulta generado por los tensores de la forma $\otimes^m x := \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{m} \in \otimes^m X$.

En particular todo tensor $z \in \otimes^{m,s}X$ admite una representación de la forma:

$$z = \sum_{j=1}^{r} \otimes^m x_j,$$

(donde $x_j \in X$) que al igual que en el caso del producto tensorial completo, en general no resulta única. Otra realización útil del producto simétrico es obtenida a través del operador de simetrización $S_m : \otimes^m X \to \otimes^m X$. Este operador (que notaremos a veces simplemente S si se puede deducir m del contexto) está definido en los tensores elementales por:

$$S_m(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in \Pi_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)},$$

donde Π_m es el grupo de permutaciones del conjunto $\{1, \ldots, m\}$. El producto tensorial simétrico se puede ver simplemente como la imagen del operador S_m, que es de hecho un proyector.

Respecto a la teoría métrica de productos tensoriales simétricos, definiremos dos normas distinguidas análogas a las del caso completo (pues las restricciones de las normas al producto tensorial simétrico definidas anteriormente no resultan apropiadas, ver [Flo97, Secciones 2 y 3]).

La norma proyectiva simétrica de $z \in \otimes^{m,s}X$ se define como:

$$\pi_s(z) := \inf\{\sum_{j=1}^{r} \|x_j\|^m : z = \sum_{j=1}^{r} \otimes^m x_j\}.$$

Notamos con $\tilde{\otimes}^{m,s}_{\pi_s} X$ la completación de $\otimes^{m,s}_{\pi_s} X$. Dotado de esta norma, el producto simétrico verifica la siguiente propiedad fundamental.

Proposición 1.2.3. *Sean X, F espacios de Banach. La aplicación $\varphi \leftrightarrow L_\varphi$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{P}(^m X, F)$ y $\mathcal{L}(\tilde{\otimes}^{m,s}_{\pi_s} X, F)$. Si en particular $F = \mathbb{C}$, se tiene una identificación isométrica $P(^m X) = (\tilde{\otimes}^{m,s}_{\pi_s} X)'$.*

La norma inyectiva simétrica se define para un tensor $z \in \otimes^m X$ por:

$$\varepsilon_s(z) := \sup_{\varphi \in B_{X'}} \{|\sum_{j=1}^{r} \varphi(x^j)^m| : z = \sum_{j=1}^{r} \otimes^m x^j\}.$$

De manera análoga al caso del producto completo, se verifica la relación de dualidad $\otimes^{m,s}_{\varepsilon_s} X' = (\otimes^{m,s}_{\pi_s} X)'$ para X de dimensión finita. Esto nos permite deducir la importante identificación isométrica $\otimes^{m,s}_{\varepsilon_s} X' = \mathcal{P}(^m X)$ vía:

$$\otimes^m x' \mapsto x'(x)^m.$$

Por último enunciamos un lema que necesitaremos más adelante, que da una manera concreta de calcular bases para un producto tensorial simétrico de dimensión finita y su dual (tomado de [DDGM01, Lema 1]). Para elementos $x_1, \ldots, x_n$ de un espacio vectorial X y un multiíndice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m, n)$ notamos:

$$x_{\mathbf{i}} := x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_m} \in \otimes^m X.$$

Lema 1.2.4. *Sean $m \in \mathbb{N}$ y X un espacio vectorial de dimensión finita con base $(x_k)_{k=1}^n$. Si llamamos $(x_k')_{k=1}^n$ a su base dual, tenemos que $(S(x_{\mathbf{j}}))_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ es una base de $\otimes^{m,s}X$ y $\left(|[\mathbf{j}]|S(x_{\mathbf{j}}')\right)_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ es su base dual en $\otimes^{m,s}X'$. Además, se cumple:*

$$S(x_{\mathbf{i}}) = \frac{1}{|[\mathbf{i}]|}\sum_{\mathbf{j}\in[\mathbf{i}]} x_{\mathbf{j}},$$

para todo $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$.

1.3. Bases incondicionales en espacios de Banach

Recordemos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio de Banach X se dice una *base de Schauder* (o simplemente base) para X si todo $x \in X$ admite una única representación $x = \sum_{k\geq 1} a_k x_k$, con $a_k \in \mathbb{C}$. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se dice básica si es una base de Schauder del espacio $\overline{span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ahora estamos en condiciones de presentar una serie de definiciones para introducir la noción de incondicionalidad.

Definición 1.3.1. Sea X un espacio de Banach con base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se dice incondicional si para cualquier sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la serie $\sum_{n\geq 1} a_n x_n$ converge incondicionalmente, esto es, si la serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_{\sigma(n)}x_{\sigma(n)}$ es convergente para cualquier $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ biyectiva. Equivalentemente (ver [AK06, Proposición 3.1.3]), la base $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es incondicional si existe una constante $C \geq 1$ tal que para cada sucesión de escalares $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $\epsilon_n \in \mathbb{D}$ se cumple:

$$\left\|\sum_{n\geq 1} \epsilon_n a_n x_n\right\| \leq C \left\|\sum_{n\geq 1} a_n x_n\right\| \tag{1.2}$$

En ese caso diremos que la base es *C-incondicional.*

La constante óptima en (1.2) se denota $\chi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; X)$ y se llama la constante de incondicionalidad de la base. Esto motiva la siguiente:

Definición 1.3.2. Sea X un espacio de Banach. Se define la constante de incondicionalidad de X, $\chi(X)$ como:

$$\chi(X) := \text{ínf}\, \chi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}; X),$$

donde el ínfimo está tomado sobre todas las posibles bases $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X.

Como podemos apreciar de las definiciones, estimar la constante de incondicionalidad de una base es en general un problema difícil. Una aproximación posible es la siguiente caracterización tomada de [Sza81]:

Proposición 1.3.3. *Sea Y un espacio de Banach con base $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, se cumple:*

$$\chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y) = \text{ínf}\{c \ : \ \sum_{n\geq 1} |\langle y_n', y\rangle||\langle y', y_n\rangle| \leq c\|y\|\|y'\|, \ \forall y \in Y, y' \in Y'\}. \tag{1.3}$$

Demostración. Veremos que se satisfacen las dos desigualdades.

Pongamos $I := \text{ínf}\{c \ : \ \sum_{n\geq 1} |\langle y_n', y\rangle||\langle y', y_n\rangle| \leq c\|y\|\|y'\|, \ \forall y \in Y, y' \in Y'\}$. Sean $y, y' \in Y$. Si llamamos $\theta_n := \text{sign}(\langle y_n', y\rangle)$, $\epsilon_n := \text{sign}(\langle y', y_n\rangle)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir:

$$\sum_{n\geq 1} |\langle y_n', y\rangle||\langle y', y_n\rangle| = \sum_{n\geq 1} \theta_n \langle y_n', y\rangle \epsilon_n \langle y', y_n\rangle = \langle y', \sum_{n\geq 1} \theta_n \epsilon_n \langle y_n', y\rangle y_n\rangle.$$

Luego, como $|\theta_n \epsilon_n| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de la definición de constante de incondicionalidad para una base obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} |\langle y_n', y\rangle||\langle y', y_n\rangle| &\leq \|y'\| \left\| \sum_{n\geq 1} \theta_n \epsilon_n \langle y_n', y\rangle y_n \right\| \\ &\leq \chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y)\|y'\| \left\| \sum_{n\geq 1} \langle y_n', y\rangle y_n \right\| = \chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y)\|y'\|\|y\|.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y) \geq I$. Para ver la otra desigualdad, sea $c > 0$ que verifica la condición en (1.3) y tomemos sucesiones de complejos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $|\epsilon_n| = 1$. Debemos probar que:

$$\left\| \sum_{n\geq 1} \epsilon_n a_n y_n \right\| \leq c \left\| \sum_{n\geq 1} a_n y_n \right\|. \tag{1.4}$$

Si llamamos $y := \sum_{n\geq 1} a_n y_n$, evaluando en los funcionales de la base dual tenemos $\langle y_k', y\rangle = a_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Además, sabemos que si $z \in Y$, vale $\|z\| = \sup_{y'\in B_{Y'}} |\langle y', z\rangle|$. Entonces, para $y' \in B_{Y'}$ calculamos usando desigualdad triangular y la elección de c:

$$\begin{aligned}|\langle y', \sum_{n\geq 1} \epsilon_n a_n y_n\rangle| &= \left| \sum_{n\geq 1} \overline{\epsilon_n a_n} \langle y', y_n\rangle \right| \leq \sum_{n\geq 1} |\overline{\epsilon_n}||\overline{a_n}||\langle y', y_n\rangle| \\ &= \sum_{n\geq 1} |\langle y_n', y\rangle||\langle y', y_n\rangle| \leq c\|y'\|\|y\| \\ &\leq c\|y\| = c \left\| \sum_{n\geq 1} a_n y_n \right\|.\end{aligned}$$

De la arbitrariedad de $y' \in B_{Y'}$ deducimos que la condición en (1.4) se satisface. Por lo tanto, $\chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y) \leq I$ y la demostración queda completa. □

Más generalmente, es posible definir nociones relacionadas con la incondicionalidad que en algunos casos son más sencillas de estimar. La más general de ellas es la de estructura incondicional local o l.u.st. por sus iniciales en inglés.

Definición 1.3.4. Un espacio de Banach X tiene estructura incondicional local (l.u.st.) si existe una constante $\Lambda \geq 1$ tal que para todo subespacio Y de X de dimensión finita la inclusión

$i : Y \hookrightarrow X$ admite una descomposición de la forma:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "u"'] & & X \\ & F \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

donde F es un espacio de Banach de dimensión finita y los operadores $u : Y \to F$, $v : F \to X$ satisfacen:

$$\|u\|\|v\|\chi(F) \leq \Lambda.$$

A la menor constante Λ con esa propiedad se la denomina constante de incondicionalidad local de X y la notamos $\chi_u(X)$. Como consecuencia inmediata, si X admite una base incondicional entonces tiene l.u.st. y vale que $\chi_u(X) \leq \chi(X)$.

Remarcamos que esta definición no es la usual, en la que se consideran factorizaciones a través de espacios de Banach F con base incondicional. La equivalencia entre ambas definiciones es probada en [DJT95, Corolario 1.7.4]. Nos inclinamos por esta versión porque es más fácil de manipular y subraya la importancia *cuantitativa* de la factorización, ya que es claro que siempre se puede factorizar un operador con dominio de dimensión finita a través de un espacio de dimensión finita.

Observación 1.3.5. Si el espacio X en la definición es de dimensión finita, para calcular $\chi_u(X)$ alcanza con verificar la propiedad para las descomposiciones de $X \xrightarrow{id_X} X$.

Para nuestros fines, necesitaremos introducir una constante más proveniente de la teoría local de espacios de Banach.

Definición 1.3.6. Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. La constante de proyección relativa de un subespacio Y de X es:

$$\lambda(Y, X) = \text{ínf}\{\|P\| \mid P : X \to X \text{ es una proyección continua con } P(X) = Y\}.$$

A partir de eso, se define la constante de proyección de X como:

$$\lambda(X) = \sup\{\lambda(I(X), Z) \mid I : X \to Z \text{ es una inmersión isométrica en } Z\}.$$

Existe otra formulación más simple, que damos a continuación.

Teorema 1.3.7. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita. Entonces:*

$$\lambda(X) = \text{ínf}\{\|R\|\|S\| \mid R : X \to \ell_\infty^N,\ S : \ell_\infty^N \to X \text{ con } N \in \mathbb{N} \text{ y } SR = id_X\}.$$

1.4. Funciones holomorfas

El objetivo de esta sección será dar estimaciones generales que relacionen los coeficientes de una función holomorfa con su norma supremo. En vista de nuestras aplicaciones, trabajaremos con funciones cuyo dominio de definición sea la bola unidad de un espacio ℓ_p^n complejo, con $1 \leq p \leq \infty$.

El primer resultado en este sentido es el siguiente lema, debido a F.Wiener.

Lema 1.4.1. (Wiener) *Sea f una función holomorfa en el disco $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ con $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < 1$. Si escribimos su desarrollo $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$, entonces se verifica que $|c_n| \leq 1 - |c_0|^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $k \in \mathbb{N}$ y $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz k-ésima primitiva de la unidad. Consideramos la función g definida en $\mathbb{D}$ por $g(z) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{m=1}^{k} f(\omega^m z)$. Es claro que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |g(z)| < 1$, y haciendo el cálculo de las derivadas de g obtenemos:

$$g(z) = \sum_{n\geq 0} c_{nk} z^{nk}.$$

En virtud de este desarrollo, la afirmación del lema quedará probada si vemos que $|c_1| \leq 1 - |c_0|^2$. Para ello, definimos la función auxiliar $\varphi(z) := \frac{c_0 - f(z)}{1 - \overline{c_0} f(z)}$ para $z \in \mathbb{D}$. Como $\varphi(0) = 0$ y $\varphi'(0) = \frac{c_1}{1-|c_0|^2}$, por el lema de Schwarz tenemos $|c_1| \leq 1 - |c_0|^2$, como queríamos probar. □

A partir de este resultado para dimensión uno, obtenemos una estimación para cualquier dimensión.

Corolario 1.4.2. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y f una función holomorfa definida en $B_{\ell_p^n}$ ($1 \leq p \leq \infty$) tal que $\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |f(z)| < 1$. Sea $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ su desarrollo. Si para cada $m \in \mathbb{N}$ denotamos por P_m la parte m-homogénea de su desarrollo (es decir, $P_m := \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$), entonces vale:*

$$\sup_{z\in B_{\ell_p^n}} |P_m| \leq 1 - |c_0|^2,$$

donde c_0 es el coeficiente constante del desarrollo.

Demostración. Fijemos $z_0 \in B_{\ell_p^n}$. Consideramos la función auxiliar $g(\omega) := f(\omega z_0)$ para $\omega \in \mathbb{D}$. Es claro entonces que $\sup_{\omega\in\mathbb{D}} |g(\omega)| < 1$. Veamos qué nos dice el lema anterior aplicado a g. Necesitaremos calcular su desarrollo de Taylor. Por un lado, para f podemos escribir:

$$f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha = c_0 + \sum_{m\geq 1} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha,$$

y a partir de ese desarrollo, tenemos para g:

$$g(\omega) = f(\omega z_0) = c_0 + \sum_{m\geq 1} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z_0^\alpha \omega^{|\alpha|} = c_0 + \sum_{m\geq 1} \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z_0^\alpha \omega^m.$$

Si por otro lado desarrollamos $g(\omega) = \sum_{k\geq 0} a_k \omega^k$ y comparamos coeficientes, concluimos por unicidad:

$$a_0 = c_0,\ a_m = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z_0^\alpha \ (m \geq 1).$$

Ahora, debido al lema de Wiener para la función de una variable g, tenemos que

$$|a_m| = \left|\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z_0^\alpha\right| \leq 1 - |a_0|^2 = 1 - |c_0|^2, \text{ para } m \geq 1.$$

Como $z_0 \in B_{\ell_p^n}$ era arbitrario se sigue que

$$\sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right| \leq 1 - |c_0|^2,$$

la conclusión buscada. $\square$

Otra consecuencia útil del argumento de la prueba del lema de Wiener es que permite mejorar cotas uniformes sobre los coeficientes del desarrollo de funciones holomorfas. Para enunciar este resultado introducimos la definición de dominios de Reinhardt, que son las regiones naturales de convergencia de series de potencia en varias variables.

Definición 1.4.3. Un subconjunto abierto $R \subset \mathbb{C}^n$ es un *dominio de Reinhardt* si $(z_1, \dots, z_n) \in R$ implica que $(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in R$ para complejos ζ_j con $|\zeta_j| = 1$. Es un *dominio de Reinhardt completo* si siempre que $(z_1, \dots, z_n) \in R$, entonces $(\zeta_1 z_1, \dots, \zeta_n z_n) \in R$ para números complejos ζ_j con $|\zeta_j| \leq 1$.

Lema 1.4.4. *Sea $R \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de Reinhardt completo y denotamos con $\mathcal{F}(R) := \{f : R \to \mathbb{C} \mid f$ holomorfa con $\sup_{z \in R} |f(z)| < 1\}$. Si α es un multiíndice con $|\alpha| > 0$ y existe $C > 0$ tal que $|f^{(\alpha)}(0)| \leq C \; \forall f \in \mathcal{F}(R)$, entonces $|f^{(\alpha)}(0)| \leq (1 - |f(0)|^2)C$, para cualquier $f \in \mathcal{F}(R)$.*

La prueba de este resultado es muy similar a lo hecho en el caso unidimensional. Referimos a [Boa00] para una demostración completa. Para terminar, escribimos la acotación sobre los coeficientes que se obtiene aplicando la fórmula integral de Cauchy para polidiscos.

Lema 1.4.5. *Sea $f = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en $B_{\ell_p^n}$. Si $\sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |f(z)| < 1$, entonces para cada multiíndice α vale:*

$$|c_\alpha| \leq e^{\frac{m}{p}} \left(\frac{m!}{\alpha!} \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde $m = |\alpha|$.

Demostración. Sea $z = (r_1, \dots, r_n) \in B_{\ell_p^n}$ con $r_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$. Como f es holomorfa en $\mathbb{D}(0, z) := \{w \in \mathbb{C}^n : |w_j| \leq |r_j|, \forall\, 1 \leq j \leq n\}$, por la fórmula integral de Cauchy tenemos para cada multiíndice α:

$$c_\alpha = f^\alpha(0)\alpha! = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\partial \mathbb{D}(0,z)} \frac{f(\omega)}{\omega_1^{\alpha_1+1} \dots \omega_n^{\alpha_n+1}} d\omega_1 \dots d\omega_n. \tag{1.5}$$

Tomando módulo en (1.5) y recordando que $|f| < 1$ en $B_{\ell_p^n}$:

$$|c_\alpha| \leq \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\partial \mathbb{D}(0,z)} \frac{d\omega_1 \dots d\omega_n}{|r_1|^{\alpha_1+1} \dots |r_n|^{\alpha_n+1}} = \frac{|r_1| \dots |r_n|}{|r_1|^{\alpha_1+1} \dots |r_n|^{\alpha_n+1}} = \frac{1}{|z^\alpha|}.$$

Nos interesa entonces calcular el máximo valor posible de $|z^\alpha|$ para $z \in B_{\ell_p^n}$. Utilizando multiplicadores de Lagrange, vemos que

$$\sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |z^\alpha| = \left(\frac{\alpha^\alpha}{|\alpha|^{|\alpha|}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por lo tanto, concluimos que $|c_\alpha| \leq \left(\frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{p}}$. Por la fórmula de Stirling

$$\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n} \leq n! \leq en^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}, \tag{1.6}$$

si escribimos $|\alpha| = m$ tenemos la estimación $\left(\frac{m^m}{\alpha^\alpha}\right) \leq e^m \left(\frac{m!}{\alpha!}\right)$, lo cual prueba la cota deseada. $\square$

Capítulo 2

Desigualdades

En este capítulo nos proponemos establecer dos desigualdades fundamentales en varias áreas del análisis funcional y complejo que utilizaremos para obtener nuestros resultados: la desigualdad de Bayart y la desigualdad de Bohnenblust-Hille. Debido a que nuestro objetivo es establecer cotas ajustadas, nos interesará analizar la optimalidad de la constante alcanzada (en el caso de la desigualdad de Bayart) y rastrearemos siempre que sea posible el valor de las constantes relevantes que surjan en el desarrollo. Desarrollaremos en primer lugar la deducción de la desigualdad de Bayart, dado que es una herramienta importante en las demostraciones modernas de la desigualdad de Bohnenblust-Hille. Por esta misma razón, incluiremos una variante de la primera desigualdad que nos permitirá obtener en la última subsección del capítulo una versión alternativa de Bohnenblust-Hille para el caso polinomial.

2.1. La desigualdad de Bayart

La clásica desigualdad de Khintchine, que proviene de la teoría de probabilidades pero es de uso frecuente en análisis, permite comparar las distintas normas $L^p(\mathbb{T}^n)$ de ciertos procesos. Asegura que existen constantes A_p, B_p $(1 \leq p \leq \infty)$ tales que dados $n \in \mathbb{N}$ y complejos $a_1, \ldots, a_n$ se cumple:

$$\frac{1}{A_p}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{T}^n}\left|\sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } p \leq 2,$$

y

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_{\mathbb{T}^n}\left|\sum_{i=1}^n a_i z_i\right|^p dz\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ si } p \geq 2.$$

En el desarrollo de varios de los resultados de este trabajo precisaremos estimar la norma $L^p(\mathbb{T}^n)$ de polinomios homogéneos en términos de su norma $L^q(\mathbb{T}^n)$. La desigualdad de Bayart provee exactamente la herramienta para realizar eso y por esta razón es nombrada en la literatura como una versión polinomial de la desigualdad de Khintchine o de la desigualdad de tipo Khintchine-Kahane. Este resultado está basado fuertemente en un artículo de Weissler [Wei80] y nos ocupamos de su demostración en las primeras dos secciones de este capítulo. En la última parte presentamos otra desigualdad de tipo Khintchine-Kahane para polinomios homogéneos, que es útil en diferentes contextos.

2.1.1. Nociones previas y una desigualdad debida a Weissler

Para empezar, presentamos dos importantes familias de espacios normados de funciones holomorfas y algunos hechos básicos sobre ellas: los espacios de Hardy H^p y de Bergman A^p.

Dado $1 \leq p < \infty$, el espacio de Hardy H^p es el conjunto de funciones $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfas que verifican:

$$\sup_{r \in (0,1)} M_p(r, f) < \infty,$$

donde el supremo está tomado sobre las medias integrales $M_p(r, f) := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}$. Está dotado de una norma vía:

$$\|f\|_{H^p} := \lim_{r \to 1^-} M_p(r, f).$$

Notemos $dA(z) = rdrd\theta$ el diferencial de área de la medida de Lebesgue usual en $\mathbb{D}$. El espacio de Bergman A^p consiste del conjunto de funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ que cumplen:

$$\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) < \infty.$$

Este espacio admite una norma definida por:

$$\|f\|_{A^p} := \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dA(z) \right)^{\frac{1}{p}} = \left(2 \int_0^1 r M_p^p(r, f) dr \right)^{\frac{1}{p}},$$

donde la normalización está elegida para que la norma de la función constante uno tenga norma uno (notar que la igualdad de las dos expresiones integrales proviene de una aplicación directa del teorema de Fubini y cambio de variables). Varias propiedades importantes de estos espacios se deducen de que en el caso $p = 2$ conocemos fórmulas explícitas para las normas de una función f en términos de su desarrollo de Taylor $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$. Concretamente, tenemos:

$$\|f\|_{H^2}^2 = \sum_{n \geq 0} |a_n|^2 \ , \ \|f\|_{A^2}^2 = \sum_{n \geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1}. \tag{2.1}$$

Mostramos la derivación de la fórmula para el espacio A^2 (la otra es análoga).

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^2}^2 &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \int_0^{2\pi} r|f(re^{i\theta})|^2 d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{f(re^{i\theta})} d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r \int_0^{2\pi} \sum_{n\geq 0} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{k\geq 0} \overline{a_k} r^k e^{-ik\theta} d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 r \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_n \overline{a_k} r^{n+k} \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta\, dr \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^1 2\pi r \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n} dr \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{|a_n|^2}{n+1},
\end{aligned}$$

donde simplemente hemos utilizado la definición de la norma y la relación de ortogonalidad

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = \delta_{nk},$$

para $n, k \in \mathbb{N}$.

Otro hecho importante que utilizaremos es que los espacios de Hardy pueden ser vistos como ciertos subespacios de $L^p(\mathbb{T})$. Concretamente, si f es una función de H^p tenemos que los límites radiales $\tilde{f}(\theta) := \lim_{r\to 1^-} f(re^{i\theta})$ existen para casi todo $\theta \in [0, 2\pi)$ respecto de la medida de Lebesgue. Esto define una función $\tilde{f}$ que pertenece a $L^p(\mathbb{T})$ y cuya norma coincide con la norma H^p de la función original, es decir:

$$\|f\|_{H^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\tilde{f}(\theta)| d\theta\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.2}$$

Ahora sí, enunciamos la desigualdad principal de esta sección.

Teorema 2.1.1. (Desigualdad de Weissler) *Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa. Definimos $f_r(z) := f(rz)$ para $r \in (0, 1)$ fijo, $z \in \mathbb{D}$. Si $0 < p < q < \infty$, para cualquier $r^2 \leq \frac{p}{q}$ vale:*

$$\|f_r\|_{H^q} \leq \|f\|_{H^p}.$$

Además, $r^2 = \frac{p}{q}$ es el máximo valor que hace verdadera la desigualdad cualquiera sea f.

La demostración de este resultado es profunda y se basa en la hipercontractividad de la convolución con el núcleo de Poisson en espacios de Hardy (referimos a [Wei80]). Probaremos el caso particular en que $p = 1$ y $q = 2$, que es la versión más utilizada (y en verdad, ya había sido establecida por Bonami en [Bon70]). El argumento de esta prueba es de Michal Wojciechowski, comunicado aparentemente a Andreas Defant.

Demostración. (del caso particular $p = 1$ y $q = 2$). Veamos en primer lugar que para cualquier $g \in H^2$ vale:

$$\|g_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^4} \leq \|g\|_{H^2}. \tag{2.3}$$

En efecto, si escribimos el desarrollo de la función como $g = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\|g_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^4}^4 &= \|g^2_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^2}^2 \\
&= \left\| \left(\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\sqrt{2}^n} z^n \right)^2 \right\|_{H^2}^2 \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sqrt{2}^n} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right|^2,
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la relación (2.1) en el último paso. Ahora, como para $n \in \mathbb{N}$ y números reales $x_1, \ldots, x_n$ se verifica la desigualdad

$$(x_0 + x_1 + \cdots + x_n)^2 \leq (n+1)(x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2),$$

concluimos:

$$\begin{aligned}
\|g_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^4}^4 &\leq \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{\sqrt{2}^n} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \right)^2 = \|g\|_{H^2}^4,
\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación inicial.

Probamos ahora el enunciado original. Supongamos que $f \in H^1$. Debido a [Woj96, I.B.23], existen $g, h \in H^2$ de manera que

$$f = g \cdot h \text{ y } \|f\|_{H^1} = \|g\|_{H^2}^2 = \|h\|_{H^2}^2.$$

Luego, por la desigualdad entre la media aritmética y geométrica y la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned}
\|f_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^2}^2 &= \|g_{\sqrt{\frac{1}{2}}} h_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \|(g_{\sqrt{\frac{1}{2}}})^2 + (h_{\sqrt{\frac{1}{2}}})^2\|_{H^2}^2 \\
&\leq \frac{1}{4} \left(\|(g_{\sqrt{\frac{1}{2}}})^2\|_{H^2} + \|(h_{\sqrt{\frac{1}{2}}})^2\|_{H^2} \right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \left(\|(g_{\sqrt{\frac{1}{2}}})\|_{H^4}^2 + \|(h_{\sqrt{\frac{1}{2}}})\|_{H^4}^2 \right)^2
\end{aligned}$$

Finalmente, si aplicamos (2.3) y la elección de g y h obtenemos:

$$\|f_{\sqrt{\frac{1}{2}}}\|_{H^2}^2 \leq \frac{1}{4}\left(\|g\|_{H^2}^2 + \|h\|_{H^2}^2\right)^2 = \|f\|_{H^1}^2,$$

la conclusión buscada. □

2.1.2. La desigualdad general

En esta sección probaremos la desigualdad de Bayart basándonos esencialmente en la desigualdad establecida por Weissler, que puede ser pensada como el caso base (es decir, el caso en que las funciones dependen de una sola variable compleja) . Además, mostraremos que la constante en la desigualdad es óptima.

Para hacer el paso inductivo, necesitaremos la siguiente versión integral de la desigualdad de Minkowski :

Lema 2.1.2. *Sean (X, dx), (Y, dy) espacios de medida, $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ medible. Si $0 < \alpha \leq 1$, entonces:*

$$\int_Y \left(\int_X |f^\alpha(x,y)|\, dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} dy \leq \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|\, dy\right)^\alpha dx\right)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{2.4}$$

Seguiremos la demostración dada en [Bay02], aunque la enunciaremos sólo para polinomios homogéneos que es nuestro caso de interés.

Teorema 2.1.3. (Desigualdad de Bayart) *Sean $0 < p < q < \infty$, $m, n \in \mathbb{N}$ y $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ un polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$. Entonces,*

$$\|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq \sqrt{\frac{q}{p}}^m \|P\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}. \tag{2.5}$$

Demostración. Notamos dm a la medida normalizada de Lebesgue en $\mathbb{T}^n$. Como P es homogéneo, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{p}{q}}^{qm} \|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}^q &= \sqrt{\frac{p}{q}}^{qm} \int_{\mathbb{T}^n} \left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right|^q dm(z) \\ &= \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} \left|P\left(\sqrt{\frac{p}{q}} z_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} z_n\right)\right|^q dm(z_n)\, dm(z_1, \ldots, z_{n-1}).\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Weissler (2.1.1), para $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{T}$ fijos podemos afirmar:

$$\int_{\mathbb{T}} \left|P\left(\sqrt{\frac{p}{q}} w_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} w_{n-1}, \sqrt{\frac{p}{q}} z_n\right)\right|^q dm(z_n) \leq \left(\int_{\mathbb{T}} \left|P\left(\sqrt{\frac{p}{q}} w_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} w_{n-1}, z_n\right)\right|^p dm(z_n)\right)^{\frac{p}{q}}.$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned}\|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}^q &\leq \sqrt{\frac{q}{p}}^{qm} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{T}} \left|P\left(\sqrt{\frac{p}{q}} z_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} z_{n-1}, z_n\right)\right|^p dm(z_n)\right)^{\frac{q}{p}} dm(z_1, \ldots, z_{n-1}) \\ &= \sqrt{\frac{q}{p}}^{qm} \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{T}} \left|P(\sqrt{\frac{p}{q}} z_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} z_{n-1}, z_n)\right|^{q\alpha} dm(z_n)\right)^{\frac{1}{\alpha}} dm(z_1, \ldots, z_{n-1}),\end{aligned}$$

donde hicimos $\alpha = \frac{p}{q}$. Por la desigualdad integral de Minkowski (2.4),

$$\|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}^q \leq \sqrt{\frac{q}{p}}^{qm} \left(\int_{\mathbb{T}} \left(\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left| P\left(\sqrt{\frac{p}{q}} z_1, \ldots, \sqrt{\frac{p}{q}} z_{n-1}, z_n \right) \right|^q dm(z_1, \ldots, z_{n-1}) \right)^{\frac{p}{q}} dm(z_n) \right)^{\frac{q}{p}}.$$

Prosiguiendo de la misma manera con las variables $z_{n-1}, \ldots, z_1$, obtenemos que

$$\|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}^q \leq \sqrt{\frac{q}{p}}^{qm} \left(\int_{\mathbb{T}^n} |P(z)|\, dm(z) \right)^{\frac{q}{p}},$$

como queríamos ver. □

Como afirmamos más arriba, la constante obtenida en la desigualdad es la mejor posible. Concretamente, nos proponemos demostrar lo siguiente:

Teorema 2.1.4. *Sean $0 < p < q < \infty$. La constante $C = \sqrt{\frac{q}{p}}$ es la mejor constante posible $C = C(p,q)$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ y $P \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ se verifica:*

$$\|P\|_{L^q(\mathbb{T}^n)} \leq C^m \|P\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}.$$

Este resultado es consecuencia inmediata de un ejemplo construido por Kwapień, que puede ser encontrado en [DM14].

Lema 2.1.5. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Notamos con*

$$p_n(z) := \sum_{i=1}^n z_i$$

a la primera potencia simétrica de $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Definimos el polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$ $U_{m,n}$ por

$$U_{m,n}(z) := \left(p_n\left(\frac{z_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{z_n}{\sqrt{n}} \right) \right)^m.$$

Entonces, para cualquier $0 < p < \infty$ vale que:

$$\lim_{n\to\infty} \|U_{m,n}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)} = \Gamma\left(\frac{mp}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ el polinomio

$$Q_n(z) := p_n\left(\frac{z_1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{z_n}{\sqrt{n}} \right).$$

Podemos pensar a cada z_i como una variable aleatoria Steinhaus. Entonces, por el teorema central del límite la sucesión $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribución a una variable aleatoria gaussiana compleja canónica G. Además, dado $t > 0$ por las desigualdades de Khintchine: existe una constante $C_t > 0$ tal que:

$$\mathbb{E}|Q_n|^t = \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{i=1}^n \frac{z_i}{\sqrt{n}} \right|^t dz \leq \left(C_t \left(\sum_{i=1}^n \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^2 \right)^2 \right)^t = C_t^t,$$

es decir, la sucesión $(|Q_n|^t)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente integrable. Luego, por el teorema de convergencia de Vitali (ver por ejemplo [Rud87]) para todo $p>0$ vale:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|Q_n^m|^p = \mathbb{E}|G|^{mp} = \Gamma\left(\frac{mp}{2}+1\right).$$

Como $U_{m,n} = Q_n^m$, esto concluye la demostración. □

La sucesión de polinomios $U_{m,n}$ construida en el lema funciona como caso extremal y nos permite mostrar la optimalidad de la constante en (2.5).

Demostración. (del teorema 2.1.4) Del lema previo obtenemos fácilmente que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|U_{m,n}\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}}{\|U_{m,n}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}} = \frac{\Gamma\left(\frac{qm}{2}+1\right)^{\frac{1}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pm}{2}+1\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

La fórmula de Stirling para la función Γ dice que cualquiera sea $x>0$,

$$\sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x} < \Gamma(x+1) < \sqrt{2\pi}x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x+\frac{1}{12x}}.$$

Si aplicamos esta estimación, concluimos que existe una constante $\kappa>0$ independiente de m tal que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{qm}{2}+1\right)^{\frac{1}{q}}}{\Gamma\left(\frac{pm}{2}+1\right)^{\frac{1}{p}}} \geq \kappa \frac{(qm\pi)^{\frac{1}{2q}}}{(pm\pi)^{\frac{1}{2p}}} \sqrt{\frac{q}{p}}^m.$$

Como evidentemente para cada $m\in\mathbb{N}$ se verifica que

$$C(p,q)^m \geq \frac{\|U_{m,n}\|_{L^q(\mathbb{T}^n)}}{\|U_{m,n}\|_{L^p(\mathbb{T}^n)}},$$

de las estimaciones realizadas se desprende que $C(p,q) \geq \sqrt{\frac{q}{p}}$. La igualdad de ambas cantidades proviene por lo tanto de la desigualdad de Bayart (2.5). □

2.1.3. Una variante

Hemos establecido hasta aquí una desigualdad polinomial de tipo Khintchine que nos permite comparar las normas en $L^p(\mathbb{T}^n)$ y $L^q(\mathbb{T}^n)$ de un polinomio homogéneo. En esta subsección mostraremos una desigualdad alternativa para comparar las normas en $L^2(\mathbb{T}^n)$ y $L^1(\mathbb{T}^n)$ de polinomios homogéneos con el fin de establecer más adelante una forma distinta de la desigualdad de Bohnenblust-Hille (ver Sección 2.2.4). De manera análoga a lo anteriormente hecho, en primer lugar obtendremos una desigualdad para funciones de una sola variable compleja y luego derivaremos una relación para polinomios homogéneos. La desigualdad inicial se debe a Vukotić [Vuk03] y precisaremos mencionar algunos hechos sobre productos de Blaschke y su relación con espacios de Hardy antes de probarla.

Recordemos que una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{D}$ es el conjunto de ceros de alguna función en H^p (con $1\leq p<\infty$) si y sólo si satisface la *condición de Blaschke*: $\sum_{n\geq 1}(1-|z_n|)<\infty$. Así, los conjuntos de ceros de funciones coinciden en todos los espacios H^p. Una sucesión que cumple dicha condición tiene asociado el producto de Blaschke correspondiente dado por:

$$B(z) = \prod_{n\geq 1} \frac{|z_n|}{z_n} \frac{z_n - z}{1 - \overline{z_n}z},$$

que define una función holomorfa y acotada en $\mathbb{D}$ (cuando $z_n = 0$ se usa el término z en la fracción correspondiente). De este modo, cualquier función f en H^p admite una descomposición $f = B_f g$, donde B_f es el producto de Blaschke del conjunto de ceros de f y por lo tanto $g = \frac{f}{B_f}$ es un miembro de H^p sin ceros. Además, es fácil comprobar que cualquier producto de Blaschke B satisface $B(z) < 1$ para todo z en el interior de $\mathbb{D}$ y que $\tilde{B}(e^{i\theta}) = 1$ para casi todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Gracias a la identidad (2.2), vemos que $\|g\|_{H^p} = \|\frac{f}{B_f}\|_{H^p} = \|f\|_{H^p}$.

Estamos listos para mostrar la desigualdad de Vukotić.

Teorema 2.1.6. *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Entonces, toda función $f \in H^p$ pertenece a A^{2p} y satisface la desigualdad $\|f\|_{A^{2p}} \leq \|f\|_{H^p}$. Más aún, la igualdad se alcanza si y sólo si f es de la forma:*

$$f(z) = c\left(\frac{1}{1 - \lambda z}\right)^{\frac{2}{p}},$$

para ciertas constantes c, λ con $|\lambda| < 1$.

Observación 2.1.7. Un resultado de Hardy y Littlewood (ver [HL32, Teorema 31]) asegura que para $1 \leq p < \infty$ el operador $J_p : H^p \to A^{2p}$ dado por $J_p(f) = f$ está bien definido y es acotado. El teorema enunciado da una forma cuantitativa de este hecho, pues implica que $\|J_p\| = 1$. Además esta inclusión es *óptima*, en el sentido que $H^p \not\subset A^q$ si $q > 2p$. En efecto, un cálculo directo revela que la función parametrizada $f_\alpha(z) = (1-z)^{-\alpha}$ pertenece a H^p si y sólo si $\alpha p < 1$, mientras que está en A^q si sólo si $\alpha q < 2$. Así, para cualquier $\frac{2}{q} \leq \alpha < \frac{1}{p}$, la función f_α está en H^p pero no en A^q.

Demostración. (del Teorema 2.1.6) Empezaremos por demostrar la desigualdad en el caso $p = 2$. Utilizando las fórmulas (2.1) y la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{A^4}^4 = \|f^2\|_{A^2}^2 &= \left\| \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right) z^n \right\| \\
&= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} \right|^2 = \sum_{n\geq 0} \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{n+1}} \frac{a_{n-k}}{\sqrt{n+1}} \right|^2 \\
&\leq \sum_{n\geq 0} \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 |a_{n-k}|^2 \\
&= \left(\sum_{n\geq 0} |a_n|^2 \right)^2 = \|f\|_{H^2}^4,
\end{aligned}$$

lo que muestra $\|f\|_{A^4} \leq \|f\|_{H^2}$.

Como la única acotación realizada provino del empleo de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, vemos que las normas coinciden para f si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}_0$ y $k = 0, \ldots, n$ vale

$$a_k a_{n-k} = \frac{C_n}{\sqrt{n+1}},$$

para cierta constante C_n (que depende sólo de n). Si $a_0 = 0$, aplicando las igualdades de coeficientes deducidas tenemos en particular que $a_0 \cdot a_{2n} = a_n^2$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $f \equiv 0$. Podemos suponer entonces que $a_0 \neq 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, de la cadena de igualdades de arriba deducimos que $a_0 a_n = a_1 a_{n-1}$. Si llamamos $\lambda = \frac{a_1}{a_0}$ tenemos las relaciones

$$a_n = \lambda a_{n-1},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde $a_n = \lambda^n a_0$. Luego, f es extremal para este caso si y sólo si tiene la forma:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_0 \lambda^n z^n = \frac{a_0}{1 - \lambda z}.$$

Probamos ahora la afirmación para $1 \leq p < \infty$ arbitrario mediante un procedimiento estándar en espacios de Hardy. Supongamos que $f \in H^p$ es tal que no se anula en $\mathbb{D}$. Podemos entonces tomar una rama analítica de $f^{\frac{p}{2}}$ y aplicarle la desigualdad recién derivada (en el caso $p = 2$) para deducir:

$$\|f\|_{A^{2p}}^{\frac{p}{2}} = \|f^{\frac{p}{2}}\|_{A^4} \leq \|f^{\frac{p}{2}}\|_{H^2} = \|f\|_{H^p}^{\frac{p}{2}},$$

la desigualdad buscada. Del análisis previo se desprende que la igualdad es sólo posible para funciones de la forma

$$f(z) = \left(\frac{a_0}{1 - \lambda z}\right)^{\frac{p}{2}}.$$

Finalmente si f en H^p es una función arbitraria, admite una factorización $f = B_f g$, donde B es el producto de Blaschke con los mismos ceros que f y g tiene la misma norma H^p que f pero no se anula en $\mathbb{D}$. De esta manera, debido a los casos ya probados:

$$\frac{\|f\|_{A^{2p}}}{\|f\|_{H^p}} = \frac{\|B_f g\|_{A^{2p}}}{\|B_f g\|_{H^p}} = \frac{\|B_f g\|_{A^{2p}}}{\|g\|_{H^p}} < \frac{\|g\|_{A^{2p}}}{\|g\|_{H^p}} \leq 1,$$

donde la desigualdad (estricta) proviene del hecho que cualquier producto de Blaschke B cumple que $B(z) < 1$ si z está en el interior de $\mathbb{D}$. Esto completa la demostración. □

Siguiendo el argumento de Bayart, esta desigualdad fue generalizada por Helson en [Hel06]. Como antes, enunciamos el resultado para polinomios homogéneos.

Teorema 2.1.8. (Desigualdad de Helson) *Sean $m, n \in \mathbb{N}$, y $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ un polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$. Entonces,*

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{|c_\alpha|^2}{\alpha + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|P\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}, \tag{2.6}$$

donde $\alpha + 1 := (\alpha_1 + 1) \cdots (\alpha_n + 1)$.

Demostración. Definimos para cada $1 \leq i \leq n$ y polinomio m-homogéneo $\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ el operador T_i como:

$$T_i \left(\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right) := \sum_{|\alpha|=m} \frac{c_\alpha}{\sqrt{\alpha_i + 1}} z^\alpha.$$

Entonces, la desigualdad a probar se escribe como:

$$\|T_n \cdots T_1 P\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} \leq \|P\|_{L^1(\mathbb{T}^n)}.$$

Trabajamos con el miembro izquierdo. Si escribimos $T_{n-1} \cdots T_1 P(z) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha z^\alpha$, resulta que

$$T_n \left(T_{n-1} \cdots T_1 P\right)(z) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{b_\alpha}{\sqrt{\alpha_n + 1}} z^\alpha = \sum_{\alpha_n=0}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n+1}} \sum_{|\beta|=m-\alpha_n} b_{(\beta,\alpha_n)} z^\beta \right) z_n^{\alpha_n}$$

De esta manera, debido a la identidad (2.2) tenemos para $w_1, \ldots, w_{n-1} \in \mathbb{T}$ fijos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \left| \sum_{\alpha_n=0}^{m} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_n+1}} \sum_{|\beta|=m-\alpha_n} b_{(\beta,\alpha_n)} w^\beta \right) z_n^{\alpha_n} \right|^2 dm(z_n) &= \left\|T_n \left(T_{n-1} \cdots T_1 P\right)(w_1, \ldots, w_{n-1}, z_n)\right\|_{H^2}^2 \\
&= \sum_{\alpha_n=0}^{m} \frac{1}{\alpha_n+1} \left| \sum_{|\beta|=m-\alpha_n} b_{(\beta,\alpha_n)} w^\beta \right|^2 \\
&= \left\| \sum_{\alpha_n=0}^{m} \left(\sum_{|\beta|=m-\alpha_n} b_{(\beta,\alpha_n)} w^\beta \right) z_n^{\alpha_n} \right\|_{A^2}^2 .
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Vukotic (2.1.6),

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |T_n \left(T_{n-1} \cdots T_1 P\right)(w_1, \ldots, w_{n-1}, z_n)|^2 dm(z_n) &\leq \left\| \sum_{|\alpha|=m} b_{(\beta,\alpha_n)} w^\beta z_n^{\alpha_n} \right\|_{H^1}^2 \\
&= \|T_{n-1} \cdots T_1 P(w_1, \ldots, w_{n-1}, z_n)\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

Aplicamos esto en la desigualdad original para obtener:

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{T}^n} |T_n \cdots T_1 P|^2 dm(z_1, \ldots, z_n) \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_{\mathbb{T}} |T_n \left(T_{n-1} \cdots T_1 P\right)|^2 dm(z_n)\, dm(z_1, \ldots, z_{n-1}) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{T}^{n-1}} \left(\int_{\mathbb{T}} |T_{n-1} \cdots T_1 P| dm(z_n) \right)^2 dm(z_1, \ldots, z_{n-1}) \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}$$

Finalmente, repitiendo el argumento usado en la prueba de la desigualdad de Bayart (es decir, empleando la desigualdad de Minkowski continua e iterando) vemos que:

$$\left(\int_{\mathbb{T}^n} |T_n \cdots T_1 P|^2 dm(z_1, \ldots, z_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_{\mathbb{T}^n} |P| dm(z_1, \ldots, z_n),$$

lo que completa la demostración. $\square$

2.2. La desigualdad de Bohnenblust-Hille

En su artículo de 1930 [Lit30], Littlewood probó la célebre desigualdad hoy conocida como desigualdad $\frac{4}{3}$ de Littlewood: para cualquier forma bilineal $\phi : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, tenemos

$$\left(\sum_{i,j} |\phi(e_i, e_j)|^{\frac{4}{3}} \right)^{\frac{3}{4}} \leq \sqrt{2} \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}^n} |\phi(z_1, z_2)|,$$

donde $(e_i)_{i=1}^n$ es la base canónica de $\mathbb{C}^n$. Además el exponente $\frac{4}{3}$ es óptimo, en el sentido que no se puede reemplazar el factor $\sqrt{2}$ por una constante independiente de n para exponentes menores. Poco después, en el contexto del estudio de la convergencia absoluta de series de Dirichlet (y en particular, del problema de convergencia absoluta de H.Bohr) Bohnenblust y Hille establecieron en [BH31] una versión m-lineal de la desigualdad $\frac{4}{3}$ de Littlewood: dado $m \in \mathbb{N}$, existe una constante C_m tal que para toda función m-lineal $\phi : \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ vale

$$\left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |\phi(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq C_m \|\phi\|, \tag{2.7}$$

y nuevamente el exponente $\frac{2m}{m+1}$ es óptimo en el sentido antes indicado. Notamos por B_m^{mult} a la constante óptima en (2.7). La demostración original de la desigualdad revela que $\mathrm{B}_m^{mult} \leq m^{\frac{m+1}{2m}} (\sqrt{2})^{m-1}$. En el mismo trabajo, Bohnenblust y Hille inventaron la polarización y dedujeron una versión polinomial (o simétrica) de (2.7): dado $m \in \mathbb{N}$, existe una constante $D_m \geq 1$ tal que para cualquier polinomio m-homógeneo $\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ en $\mathbb{C}^n$,

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq D_m \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha \right|, \tag{2.8}$$

y el exponente $\frac{2m}{m+1}$ tampoco puede ser mejorado. Si notamos B_m^{pol} a la constante óptima en esta desigualdad, el uso directo de la polarización permite establecer que:

$$\mathrm{B}_m^{pol} \leq \mathrm{B}_m^{mul} \frac{m^{\frac{m}{2}} (m+1)^{\frac{m+1}{2}}}{2^m (m!)^{\frac{m+1}{2m}}}.$$

Desde la prueba original, fueron obtenidas varias mejoras en la estimación de las constantes para ambas desigualdades (ver [DFOC$^+$11, BPSS14] para un recorrido histórico sobre los progresos relevantes en el tema). Precisamente estos dos artículos produjeron los avances más notables. El resultado central de [DFOC$^+$11] asegura que la desigualdad de Bohnenblust-Hille para polinomios homogéneos es *hipercontractiva*, esto es, existe una constante $C > 1$ tal que:

$$\mathrm{B}_m^{pol} \leq C^m.$$

En [BPSS14] se va un paso más allá al obtener que el crecimiento de la constante B_m^{pol} es *subexponencial*: para todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $\kappa = \kappa(\varepsilon)$ tal que

$$\mathrm{B}_m^{pol} \leq \kappa(1+\varepsilon)^m.$$

Este último resultado será fundamental más adelante para caracterizar el radio de Bohr de la bola unidad $B_{\ell_p^n}$ en el rango $2 \leq p \leq \infty$ (Sección 4.2.1). Por este motivo, desarrollaremos a continuación las estimaciones obtenidas en [BPSS14], dividiendo la exposición en subsecciones para facilitar su comprensión.

2.2.1. Un enfoque interpolativo en la desigualdad de Blei

La mayoría de las demostraciones modernas de la desigualdad de Bohnenblust-Hille dependen en algún grado de una desigualdad debida a Blei [Ble79]: para cualquier colección $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ de complejos, se cumple:

$$\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \prod_{1\leq k\leq m} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-1,n)}^{n} |a_{(\mathbf{i},_k j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}, \tag{2.9}$$

(donde $(\mathbf{i},_k j)$ es el multiíndice $(i_1,\ldots,i_{k-1},j,i_k,\ldots,i_n)\in\mathcal{M}(m,n)$).

El primer paso consiste en obtener una generalización de esta desigualdad a través del uso de la interpolación. Necesitaremos introducir un poco de notación de índices para enunciarla. Para $m\in\mathbb{N}$ y cualquier $1\leq\ k\leq m$, notaremos con $\mathcal{P}_k(m)$ a la colección de subconjuntos de $\{1,\ldots,m\}$ con cardinal k. Fijado $n\in\mathbb{N}$, si $S=\{s_1,\ldots,s_k\}$ es un elemento de $\mathcal{P}_k(m)$, $\bar{S}$ será su complemento respecto de $\{1,\ldots,m\}$ y el índice $\mathbf{i}_S$ será una abreviación de $(i_{s_1},\ldots,i_{s_k})\in\mathcal{M}(k,n)$. También escribiremos $\sum_{\mathbf{i}_S}$ para referirnos a $\sum_{i_{s_1}}^n\cdots\sum_{i_{s_k}}^n$. Con esta notación, la desigualdad de Blei (2.9) se escribe como:

$$\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \prod_{S\in\mathcal{P}_1(m)} \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} |a_{\mathbf{i}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Nuestro objetivo es mostrar que vale una versión más general de esta desigualdad cambiando $\mathcal{P}_1(m)$ por cualquier $\mathcal{P}_k(m)$, $1\leq k\leq m$. Introducimos para eso los espacios con los que interpolaremos. Dados $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{q}=(q_1,\ldots,q_m)\in[1,+\infty)^m$ consideramos el espacio de Lorentz $\ell_{\mathbf{q}} := \ell_{q_1}(\ell_{q_2}(\ldots(\ell_{q_m}(\mathbb{N}))\ldots))$, es decir, el espacio de las sucesiones de complejos m-indexadas $(a_{\mathbf{i}})$ que verifican:

$$\left(\sum_{i_1\geq 1}\left(\sum_{i_2\geq 1}\left(\cdots\left(\sum_{i_{m-1}\geq 1}\left(\sum_{i_m\geq 1}|a_{\mathbf{i}}|^{q_m}\right)^{\frac{q_{m-1}}{q_m}}\right)^{\frac{q_{m-2}}{q_{m-1}}}\cdots\right)^{\frac{q_2}{q_3}}\right)^{\frac{q_1}{q_2}}\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq +\infty,$$

y esa cantidad se define como la norma de la sucesión en el espacio de Lorentz (que notamos $\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}}$). Observamos que en el caso que $\mathbf{q}=(\frac{2m}{m+1},\ldots,\frac{2m}{m+1})$, para una colección $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}$ tenemos:

$$\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^{\frac{2m}{m+1}}.$$

Con esto como motivación, utilizamos dos herramientas para estimar la norma $\ell_{\mathbf{q}}$ de una sucesión. La primera (y principal) es la interpolación entre espacios de Lorentz: dados $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in [1, +\infty)^m$ y $\theta \in (0,1)$, se verifica

$$[\ell_{\mathbf{p}}, \ell_{\mathbf{q}}]_\theta = \ell_{\mathbf{r}},$$

donde $\frac{1}{r_i} = \frac{\theta}{p_i} + \frac{1-\theta}{q_i}$, para $1 \leq i \leq m$ (para una prueba de esto ver, por ejemplo, [BL12]).

El segundo resultado que necesitaremos es una consecuencia de la desigualdad de Minkowski (ver [Gar07, Corolario 5.4.2]): para $0 < p \leq q < \infty$ y cualquier sucesión de complejos $(c_{i,j})$

$$\left(\sum_i \left(\sum_j |c_{i,j}|^p \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_j \left(\sum_i |c_{i,j}|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En concreto, nos interesa lo que nos permite obtener en esta situación particular: sean $S \in \mathcal{P}_k(m)$, $\lambda \in [1,2]$ y $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_m)$, con $q_i = \lambda$ si $i \in S$, $q_i = 2$ en otro caso. Una aplicación simple de inducción permite entonces mostrar que para cualquier colección de números complejos $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$ vale

$$\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}} \leq \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{\lambda}{2}} \right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{2.10}$$

Probamos ahora el resultado principal de esta parte.

Teorema 2.2.1. (Desigualdad de Blei generalizada) *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $1 \leq k \leq m$. Para cualquier colección $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$ de complejos, vale*

$$\left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \prod_{S \in \mathcal{P}_k(m)} \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}\frac{1}{\binom{m}{k}}}.$$

Demostración. Sea $\mathbf{q} = (\frac{2m}{m+1}, \ldots, \frac{2m}{m+1})$. El plan es usar interpolación para estimar $\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}}$, que coincide con el lado izquierdo de la desigualdad a probar. Con este fin definimos para cada $S \in \mathcal{P}_k(m)$ el exponente $\mathbf{q}^S$ como $q_i^S = \frac{2k}{k+1}$ para $i \in S$ y $q_i^S = 2$ en otro caso. Así, para $1 \leq i \leq m$ tenemos:

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_k(m)} \frac{1}{q_i^S} = \frac{k+1}{2k} \binom{m-1}{k-1} + \frac{1}{2} \binom{m-1}{k} = \frac{1}{2} \binom{m-1}{k} \left(\frac{k+1}{m-k} + 1 \right) = \frac{m+1}{2m} \binom{m}{k}.$$

Luego, si llamamos $\theta := \frac{1}{\binom{m}{k}}$ concluimos para cada $1 \leq i \leq m$:

$$\frac{1}{q_i} = \sum_{S \in \mathcal{P}_k(m)} \frac{\theta}{q_i^S},$$

y además $\sum_{S \in \mathcal{P}_k(m)} \theta = 1$. Por interpolación de $\ell_{\mathbf{q}}$ con los espacios $\ell_{\mathbf{q}^S}$ $(S \in \mathcal{P}_k(m))$ tenemos:

$$\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}} \leq \prod_{S \in \mathcal{P}_k(m)} \|a\|_{\ell_{\mathbf{q}^S}}^{\frac{1}{\binom{m}{k}}}.$$

Finalmente por la desigualdad (2.10) con $\lambda = \frac{2k}{k+1}$, para cualquier $S \in \mathcal{P}_k(m)$ vale que:

$$\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}^S}} \leq \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}}.$$

Como $\|a\|_{\ell_{\mathbf{q}}} = \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}}$, esto concluye la prueba. $\square$

2.2.2. La versión multilineal

El objetivo principal de esta parte es dar una estimación ajustada de la constante óptima en la desigualdad de Bohenblust-Hille multilineal. El paso clave consiste en establecer una relación inductiva para la sucesión $(\mathrm{B}_m^{mult})_{m \in \mathbb{N}}$. Antes de proceder, necesitamos dar algunos hechos sobre la desigualdad de Khintchine . Recordemos que para cada $p \in [1, 2]$, existe una constante A_p tal que cualquiera sean $n \in \mathbb{N}$ y complejos $a_1, \ldots, a_n$ se cumple:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{A}_p \left(\int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \right|^p dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Es importante remarcar que las mejores constantes son conocidas: se sabe que $\mathrm{A}_p = \Gamma\left(\frac{p+2}{p}\right)^{-\frac{1}{p}}$ para $p \in (1, 2]$ (ver [Haa81, KK01]) y $\mathrm{A}_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$ (ver [Saw85, Teorema A]).

Mediante el uso iterado del teorema de Fubini y la desigualdad de Minkowski continua, podemos obtener una versión multilineal de esta desigualdad: para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ y colección $(a_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)}$ de complejos,

$$\left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{A}_p^m \left(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}} z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_m}^{(m)} \right|^p dz^{(1)} \ldots dz^{(m)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Ahora sí, estamos en condiciones de dar la fórmula inductiva.

Proposición 2.2.2. *Sean $m \geq 2$ y $1 \leq k \leq m-1$. Entonces,*

$$B_m^{mult} \leq A_{\frac{2k}{k+1}}^{m-k} B_k^{mult}.$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y sea $\phi = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}} z_{i_1}^{(1)} \ldots z_{i_m}^{(m)}$ una forma m-lineal en $\mathbb{C}$. En vista del Teorema 2.2.1, para probar la relación alcanza con mostrar que para cualquier $S \in \mathcal{P}_k(m)$ se cumple

$$\left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}} \right)^{\frac{k+1}{2k}} \leq \mathrm{A}_{\frac{2k}{k+1}}^{m-k} \mathrm{B}_k^{mult} \|\phi\|.$$

Por simetría, basta con probar el caso $S = \{1, \dots, k\}$. Por la desigualdad multilineal de Khintchine con $p = \frac{2k}{k+1}$, tenemos:

$$\left(\sum_{\mathbf{i} \in \bar{S}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{A}_{\frac{2k}{k+1}}^{m-k} \left(\int_{\mathbb{T}^{nm}} \left| \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^{n} a_{\mathbf{i}} z_{i_{k+1}}^{(k+1)} \dots z_{i_m}^{(m)} \right|^{\frac{2k}{k+1}} dz^{(k+1)} \dots dz^{(m)} \right)^{\frac{k+1}{2k}}. \tag{2.11}$$

Por otro lado, si fijamos $w^{(k+1)}, \dots, w^{(m)} \in \mathbb{T}^n$ y aplicamos la desigualdad de Bohnenblust-Hille a la forma k-lineal dada por

$$(z^{(1)}, \dots, z^{(k)}) \mapsto L(z^{(1)}, \dots, z^{(k)}, w^{(k+1)}, \dots, w^{(m)}),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left| \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^{n} a_{\mathbf{i}} w_{i_{k+1}}^{(k+1)} \dots w_{i_m}^{(m)} \right|^{\frac{2k}{k+1}} &\leq \left(\mathrm{B}_k^{mult} \sup_{z^{(1)},\dots,z^{(k)} \in \mathbb{T}^n} \left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} a_{\mathbf{i}} z_{i_1}^{(1)} \dots z_{i_k}^{(k)} w_{i_{k+1}}^{(k+1)} \dots w_{i_m}^{(m)} \right| \right)^{\frac{2k}{k+1}} \\ &\leq \left(\mathrm{B}_k^{mult} \|\phi\| \right)^{\frac{2k}{k+1}}. \end{aligned}$$

Finalmente, sumando a ambos lados en (2.11)

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{i} \in S} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \bar{S}} |a_{\mathbf{i}}|^2 \right)^{\frac{1}{2} \frac{2k}{k+1}} &\leq \mathrm{A}_{\frac{2k}{k+1}}^{(m-k)\frac{2k}{k+1}} \int_{\mathbb{T}^{n(m-k)}} \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \left| \sum_{i_{k+1},\dots,i_m=1}^{n} a_{\mathbf{i}} z_{k+1}^{(k+1)} \dots z_{i_m}^{(m)} \right|^{\frac{2k}{k+1}} dz^{(k+1)} \dots dz^{(m)} \\ &\leq \mathrm{A}_{\frac{2k}{k+1}}^{(m-k)\frac{2k}{k+1}} \int_{\mathbb{T}^{n(m-k)}} \left(\mathrm{B}_k^{mult} \|\phi\| \right)^{\frac{2k}{k+1}} dz^{(k+1)} \dots dz^{(m)} \\ &\leq \left(\mathrm{A}_{\frac{2k}{k+1}}^{(m-k)} \mathrm{B}_k^{mult} \|\phi\| \right)^{\frac{2k}{k+1}}, \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Mediante el uso de esta relación inductiva obtendremos una mejora sorprendente en la estimación de B_m^{mult} respecto de la que surge de la prueba en [BH31]; en particular podremos establecer que el crecimiento de la sucesión $(\mathrm{B}_m^{mult})_{m \in \mathbb{N}}$ es sublineal.

Corolario 2.2.3. *Existe una constante $\kappa > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ se verifica:*

$$B_m^{mult} \leq \kappa m^{\frac{1-\gamma}{2}}, \tag{2.12}$$

donde $\gamma \approx 0{,}5772$ es la constante de Euler-Mascheroni.

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}$ aplicamos la Proposición 2.2.2 eligiendo $k = m - 1$ para obtener:

$$\mathrm{B}_m^{mult} \leq \Gamma \left(2 - \frac{1}{m} \right)^{-\frac{m}{2m-2}} \mathrm{B}_{m-1}^{mult}.$$

Como $\Gamma(2) = 1$ y $\Gamma'(2) = 1 - \gamma$, por Taylor existe una constante $c_m > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(2 - \frac{1}{m}\right)^{-\frac{m}{2m-2}} &= \exp\left\{\left(\frac{-m}{2m-2}\right)\log\left(1 - \frac{1-\gamma}{m} + \frac{c_m}{m^2}\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2m-2}\right)\log\left(1 - \frac{1-\gamma}{m} + \frac{c_m}{m^2}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Utilizando el polinomio de Taylor de orden 1 para la función $\log(1+x)$, concluimos que existe una constante $d_m > 0$ tal que:

$$\log\left(1 - \frac{1-\gamma}{m} + \frac{c_m}{m^2}\right) = -\frac{1-\gamma}{m} + \frac{c_m}{m^2} + \frac{d_m}{m^2}.$$

Podemos entonces elegir una constante absoluta $C > 0$ de manera tal que:

$$\Gamma\left(2 - \frac{1}{m}\right)^{-\frac{m}{2m-2}} \leq \exp\left(\frac{1-\gamma}{2m} + \frac{C}{m^2}\right).$$

Como $m \in \mathbb{N}$ era arbitrario, podemos iterar esta desigualdad para deducir que:

$$\mathrm{B}_m^{mult} \leq \exp\left(\left(\frac{1-\gamma}{2}\right)\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\exp\left(C\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m^2}\right).$$

De los conocidos hechos $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2} < +\infty$ y $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)\right) = \gamma$, se sigue que es posible encontrar $\kappa > 0$ de manera que

$$\mathrm{B}_m^{mult} \leq \kappa e^{\frac{1-\gamma}{2}\log(m)} = \kappa m^{\frac{1-\gamma}{2}}. \qquad \square$$

2.2.3. La versión polinomial

En esta última parte probaremos una estimación para B_m^{pol} que será fundamental para obtener cotas sobre el radio de Bohr y constituyó nuestro principal interés para estudiar la desigualdad de Bohnenblust-Hille.

De manera similar a lo que sucede en el caso multilineal, el paso clave para llegar a la estimación es establecer una desigualdad inductiva que relacione B_m^{pol} con B_m^{mult}.

Teorema 2.2.4. *Sean $m \geq 2 \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq m-1$. Entonces,*

$$B_m^{pol} \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{m-k}{2}} \frac{m^m}{(m-k)^{m-k}}\left(\frac{(m-k)!}{m!}\right)^{\frac{1}{2}} B_k^{mult}.$$

Demostración. Fijemos $n \in \mathbb{N}$. Sea $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha$ un polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$. Recordemos que P admite también una escritura

$$P = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} a_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}},$$

donde $a_{\mathbf{j}}$ coincide con a_α si α y $\mathbf{j}$ se corresponden. Una parte fundamental del argumento consistirá en aplicar la desigualdad de Bohnenblust-Hille multilineal a una forma obtenida a partir de la forma multilineal simétrica asociada $\check{P}$ del polinomio, que podemos escribir como:

$$\check{P} = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \frac{a_{[\mathbf{i}]}}{|[\mathbf{i}]|} z_{\mathbf{i}}.$$

Teniendo en cuenta esto, calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |a_{\mathbf{j}}|^{\frac{2m}{m+1}} \\
&= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \frac{1}{|[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{m+1}}} \left(\frac{|a_{[\mathbf{i}]}|}{|[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2m}{m+1}} \\
&\leq \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \left(\frac{|a_{[\mathbf{i}]}|}{|[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2m}{m+1}}.
\end{aligned}$$

Mediante la generalización de la desigualdad de Blei (Teorema 2.2.1), obtenemos:

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \leq \prod_{S\in\mathcal{P}_k(m)} \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} \frac{|a_{[\mathbf{i}]}|^2}{|[\mathbf{i}]|}\right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{2k}\frac{1}{\binom{m}{k}}}. \tag{2.13}$$

Nos proponemos controlar cada término de esa productoria. Para eso fijamos $S \in \mathcal{P}_k(m)$, que nuevamente supondremos coincide con $\{1,\ldots,m\}$, y definimos el polinomio k-homogéneo sobre $\mathbb{C}^n$ dado por:

$$P_{\mathbf{i}_S}(z) := \check{P}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k},z,\ldots,z).$$

Concretamente,

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{i}_S}(z) &= \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-k,n)} \frac{a_{[\mathbf{i}]}}{|[\mathbf{i}]|} z_{i_{k+1}}\ldots z_{i_m} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-k,n)} \frac{a_{[\mathbf{j}]}}{|[\mathbf{j}]|} |[\mathbf{i}_{\bar{S}}]| z_{j_{k+1}}\ldots z_{j_m},
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|P_{\mathbf{i}_S}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)} &= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-k,n)} \frac{|a_{[\mathbf{j}]}|^2}{|[\mathbf{j}]|^2} |[\mathbf{i}_{\bar{S}}]|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-k,n)} \frac{|a_{[\mathbf{i}]}|^2}{|[\mathbf{i}]|^2} |[\mathbf{i}_{\bar{S}}]|\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como para cada $S \in \mathcal{P}_k(m)$ y cada multiíndice $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$, $\frac{|[\mathbf{i}]|}{|[\mathbf{i}_S]|} \leq \frac{m!}{(m-k)!}$, vemos retomando la desigualdad (2.13):

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}} \leq \left(\frac{m!}{(m-k)!}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{S\in\mathcal{P}_k(m)} \left(\sum_{\mathbf{i}_S}\left(\sum_{\mathbf{i}_{\bar{S}}} \frac{|a_{[\mathbf{i}]}|^2}{|[\mathbf{i}]|^2}|[\mathbf{i}_{\bar{S}}]|\right)^{\frac{1}{2}\frac{2k}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{2k}\frac{1}{\binom{m}{k}}}$$

$$= \left(\frac{m!}{(m-k)!}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{S\in\mathcal{P}_k(m)} \left(\sum_{\mathbf{i}_S} \|P_{\mathbf{i}_S}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{\frac{k+1}{2k}\frac{1}{\binom{m}{k}}}.$$

Por lo tanto, estamos interesados en acotar $\|P_{\mathbf{i}_S}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}$. Hacemos esto usando la desigualdad de Bayart (2.5):

$$\|P_{\mathbf{i}_S}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^{\frac{2k}{k+1}} \leq \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{(m-k)k}{k+1}} \int_{\mathbb{T}^n} |\check{P}(e_{i_1},\dots,e_{i_k},z,\dots,z)|^{\frac{2k}{k+1}} dz.$$

Sumando a ambos lados, llegamos a

$$\sum_{\mathbf{i}_S} \|P_{\mathbf{i}_S}\|_{L^2(\mathbb{T}^n)}^{\frac{2k}{k+1}} \leq \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{(m-k)k}{k+1}} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\mathbf{i}_S} |\check{P}(e_{i_1},\dots,e_{i_k},z,\dots,z)|^{\frac{2k}{k+1}} dz.$$

Para estimar la integral, fijamos $w \in \mathbb{T}^n$ y aplicamos la desigualdad de Bohnenblust-Hille a la forma k-lineal dada por

$$(z^{(1)},\dots,z^{(k)}) \mapsto \check{P}(z^{(1)},\dots,z^{(k)},w,\dots,w),$$

obteniendo:

$$\sum_{\mathbf{i}_S} |\check{P}(e_{i_1},\dots,e_{i_k},w,\dots,w)|^{\frac{2k}{k+1}} \leq \left(\mathrm{B}_k^{mult} \sup_{z^{(1)},\dots,z^{(k)}\in\mathbb{T}^n} |\check{P}(z^{(1)},\dots,z^{(k)},w,\dots,w)|\right)^{\frac{2k}{k+1}}$$

$$\leq \left(\mathrm{B}_k^{mult}\frac{(m-k)!}{(m-k)^{(m-k)}}\frac{m^m}{m!}\right)^{\frac{2k}{k+1}} \|P\|_\infty,$$

donde hemos utilizado la desigualdad de Harris (1.1.7) en el último paso. Finalmente, siguiendo la cadena de igualdades tenemos:

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \left(\frac{m!}{(m-k)!}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{m-k}{2}} \frac{(m-k)!m^m}{(m-k)^{m-k}m!}\mathrm{B}_k^{mult}\|P\|_\infty,$$

de donde se deduce inmediatamente la desigualdad enunciada. □

Esta fórmula permite dar una estimación ajustada sobre B_m^{pol}.

Corolario 2.2.5. *Dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $\kappa > 0$ tal que para cualquier $m \in \mathbb{N}$,*

$$B_m^{pol} \leq \kappa(1+\varepsilon)^m.$$

Demostración. Resulta claro que alcanza con probar que existe una constante κ' que verifica la desigualdad enunciada para valores suficientemente grandes de m. Tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k} < \varepsilon$ y $m > k$. Por el Teorema 2.2.4 tenemos

$$\mathrm{B}_m^{pol} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{m-k}{2}} \frac{m^m}{(m-k)^{m-k}} \left(\frac{(m-k)!}{m!} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{B}_k^{mult}.$$

Como B_k^{mult} es una constante (pues k está fijo) y $(1+\varepsilon)^{\frac{m-k}{2}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{m}{2}}$ sólo nos resta analizar el otro factor. Por la aproximación de Stirling , existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \frac{m^m}{(m-k)^{m-k}} \left(\frac{(m-k)!}{m!} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C \frac{m^m}{(m-k)^{m-k}} e^{\frac{k}{2}} \frac{(m-k)^{\frac{m-k}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}} \\ &= C e^{\frac{k}{2}} \left(\frac{m}{m-k} \right)^{\frac{m-k}{2}} m^{\frac{k}{2}} \\ &= C e^{\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{k}{m-k} \right)^{\frac{m-k}{2}} m^{\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Del hecho que $\left(1 + \frac{k}{m-k}\right)^{\frac{m-k}{2}} \xrightarrow[m \to \infty]{} e^{\frac{k}{2}}$, vemos que existe una constante $C' > 0$ para la cual

$$\frac{m^m}{(m-k)^{m-k}} \left(\frac{(m-k)!}{m!} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C' m^{\frac{k}{2}},$$

si m es suficientemente grande. Finalmente, $\frac{m^{\frac{k}{2}}}{(1+\varepsilon)^{\frac{m}{2}}} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$ y por lo tanto podemos elegir un natural m_0 grande y una constante κ' que verifiquen:

$$\mathrm{B}_m^{pol} \leq \kappa'(1+\varepsilon)^m,$$

para cualquier $m \geq m_0$, lo que queríamos probar. $\square$

2.2.4. La desigualdad de Bohnenblust-Hille vía la desigualdad de Helson

El objetivo de esta parte mostrar una versión de la desigualdad de Bohnenblust-Hille sensible a la cantidad de monomios con coeficientes no nulos en un polinomio homogéneo, presentada en [CDSP14]. La demostración de este resultado sigue los lineamientos del argumento utilizado para probar la hipercontractividad de Bohnenblust-Hille polinomial en [DFOC$^+$11]; el paso clave consiste en reemplazar el uso de la desigualdad de Bayart (2.5) por la de Helson (2.6).

Teorema 2.2.6. *Sea $\Lambda \subset \{\alpha \in \mathbb{N}_0^n : |\alpha| = m\}$ un conjunto de índices. Entonces, para cualquier colección de complejos $(c_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ vale:*

$$\left(\sum_{\alpha \in \Lambda} \left(\frac{|c_\alpha|}{\sqrt{\alpha+1}} \right)^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq m^{\frac{m-1}{2m}} \left(1 - \frac{1}{m-1} \right)^{m-1} \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha z^\alpha \right|. \tag{2.14}$$

Damos algo de notación antes de la demostración del teorema. Al igual que en muchos otros argumentos de este trabajo, una parte importante del desarrollo consiste en manipular las sumas cambiando la indexación. En este caso, precisamos una forma cómoda de expresar los factores $\alpha+1$ para $\alpha \in \Lambda(m,n)$ en términos de los conjuntos de índices $\mathcal{J}(m,n)$ y $\mathcal{M}(m,n)$. Si $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión ordenada de todos los primos naturales, vemos que $\alpha+1 = (\alpha_1+1)\dots(\alpha_n+1)$ es simplemente la cantidad de divisores positivos de $p^\alpha = p_1^{\alpha_1}\dots p_n^{\alpha_n}$. Denotamos por $d(k)$ la cantidad de divisores positivos para un número natural k. De esta manera, resulta $\alpha+1 = d(p^\alpha)$. Por otro lado, para $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$ escribimos $p_{\mathbf{i}} := p_{i_1}\dots p_{i_m}$. Claramente, si los índices α e $\mathbf{i}$ están relacionados (es decir, si el índice $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ asociado a α es una permutación de $\mathbf{i}$), $p^\alpha = p_{\mathbf{i}}$.

Demostración. (del Teorema 2.2.6) Extendemos la definición de los coeficientes c_α al conjunto $\Lambda(m,n)$ por $c_\alpha = 0$ si $\alpha \notin \Lambda$. Recordemos de 1.1.5 que al polinomio m-homogéneo P corresponde una única forma m-lineal simétrica $\phi : (\mathbb{C}^n)^m \to \mathbb{C}$ tal que $P(z) = \phi(z,\dots,z)$ para todo $z \in \mathbb{C}^n$. Llamemos $a_{\mathbf{i}}$, $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)$, a los coeficientes de ϕ (es decir, $a_{\mathbf{i}} = a_{i_1,\dots,a_m} = \phi(e_{i_1},\dots,e_{i_m})$). Evidentemente, $c_\alpha = [|\mathbf{j}|]a_{\mathbf{j}}$ cuando α y $\mathbf{j}$ son asociados. Podemos reescribir entonces el lado izquierdo de la desigualdad como:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\left(\frac{|c_\alpha|}{\sqrt{\alpha+1}}\right)^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} &= \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\left|[|\mathbf{j}|]\frac{a_{\mathbf{j}}}{\sqrt{d(p_{\mathbf{j}})}}\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&= \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\frac{1}{|[\mathbf{i}]|}\left||[\mathbf{i}]|\frac{a_{\mathbf{i}}}{\sqrt{d(p_{\mathbf{i}})}}\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\
&= \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)}\left||[\mathbf{i}]|^{1-\frac{m+1}{2m}}\frac{a_{\mathbf{i}}}{\sqrt{d(p_{\mathbf{i}})}}\right|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}}.
\end{aligned}
$$

Si usamos la desigualdad de Blei (2.9) en la última expresión y el hecho que $|[(\mathbf{i},_k j)]| \leq m|[\mathbf{i}]|$, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\left(\frac{|c_\alpha|}{\sqrt{\alpha+1}}\right)^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq \prod_{k=1}^m\left(\sum_{l=1}^n\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-1,n)}\left||[(\mathbf{i},_k l)]|^{\frac{m-1}{2m}}\frac{a_{(\mathbf{i}_k,l)}}{\sqrt{d(p_{(\mathbf{i}_k,l)})}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq \prod_{k=1}^m\left(\sum_{l=1}^n\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-1,n)}\left||[\mathbf{i}]|^{\frac{m-1}{2m}}m^{\frac{m-1}{2m}}\frac{a_{(\mathbf{i}_k,l)}}{\sqrt{d(p_{(\mathbf{i}_k,l)})}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}} \\
&\leq m^{\frac{m-1}{2m}}\prod_{k=1}^m\left(\sum_{l=1}^n\left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m-1,n)}|[\mathbf{i}]|\left|\frac{a_{(\mathbf{i}_k,l)}}{\sqrt{d(p_{(\mathbf{i}_k,l)})}}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{m}}.
\end{aligned}
$$

Nos dedicamos a acotar cada factor del producto. El objetivo es manipular la expresión para llevarla a una en que podamos aplicar la desigualdad de Helson (2.6). Para lograrlo, usamos la simetría de los coeficientes (recordemos que provienen de un polinomio m-homogéneo) y la relación evidente $d(p_{\mathbf{i}}) \leq d(p_{(\mathbf{i},_k l)})$ cualquiera sean $\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)$, $1 \leq k \leq m$ y $1 \leq l \leq n$:

$$\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} |[\mathbf{i}]| \left| \frac{a_{(\mathbf{i},_k l)}}{\sqrt{d(p_{(\mathbf{i},_k l)})}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |[\mathbf{j}]|^2 \frac{|a_{(\mathbf{j},_k l)}|^2}{d(p_{(\mathbf{j},_k l)})} \right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \frac{||[\mathbf{j}]| a_{(\mathbf{j},_k l)}|^2}{d(p_{\mathbf{j}})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para cada $1 \leq l \leq n$ consideramos el polinomio $(m-1)$-homogéneo $\sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |[\mathbf{j}]| a_{(\mathbf{j},_k l)}$. Aplicando la desigualdad (2.6) a cada uno de ellos,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} |[\mathbf{i}]| \left| \frac{a_{(\mathbf{i},_k l)}}{\sqrt{d(p_{(\mathbf{i},_k l)})}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sum_{l=1}^{n} \int_{\mathbb{T}^n} \left| \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} |[\mathbf{j}]| a_{(\mathbf{j},_k l)} w_{\mathbf{j}} \right| dw \qquad (2.15) \\
&\leq \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{l=1}^{n} \left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} a_{(\mathbf{i},_k l)} w_{\mathbf{i}} \right| dw \\
&\leq \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sum_{l=1}^{n} \left| \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} a_{(\mathbf{i},_k l)} z_{\mathbf{i}} \right| \\
&= \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \sup_{y \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{l=1}^{n} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} a_{(\mathbf{i},_k l)} z_{\mathbf{i}} y_l \right| \\
&\leq \left(1 + \frac{1}{m-1} \right)^{m-1} \sup_{z \in \mathbb{D}^n} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha z^\alpha \right|,
\end{aligned}$$

donde en el último paso utilizamos la desigualdad de Harris (1.1.7). La afirmación queda demostrada. □

Para concluir, mencionamos algunas consecuencias interesantes de este resultado:

- Es inmediato que $\sqrt{\alpha+1} \leq \sqrt{2}^m$ y así recuperamos la hipercontractividad de la desigualdad de Bohnenblust-Hille polinomial, el principal avance del trabajo [DFOC⁺11].

- Si el número de variables en cada monomio z^α para $\alpha \in \Lambda$ está uniformemente acotado, podemos conseguir una versión con crecimiento polinomial en m de la constante en la desigualdad de Bohnenblust-Hille. Concretamente, dado $M \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto de índices
$$\Lambda_{n,M} := \{\alpha \in \Lambda(m,n) : |\{j : \alpha_j \neq 0\}| \leq M\}.$$
Mediante una aplicación directa de los multiplicadores de Lagrange deducimos que para todo $\alpha \in \Lambda_{n,M}$ se verifica:
$$\alpha + 1 = (\alpha_1+1)\ldots(\alpha_n+1) \leq \left(\frac{m}{M}+1\right)^M.$$

Ahora aplicamos la desigualdad (2.14) para llegar a:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{n,M}} |c_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} &\leq \left(\frac{m}{M}+1\right)^{\frac{M}{2}} \left(\sum_{\alpha\in\Lambda_{n,M}} \left(\frac{|c_\alpha|}{\sqrt{\alpha+1}}\right)^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \\ &\leq \left(\frac{m}{M}+1\right)^{\frac{M}{2}} m^{\frac{m-1}{2m}} \left(1-\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \sup_{z\in\mathbb{D}^n} \left|\sum_{\alpha\in\Lambda_{n,M}} c_\alpha z^\alpha\right|,\end{aligned}$$

de donde se deduce la afirmación sobre el crecimiento de la constante para este conjunto de índices observando que:

$$\left(\frac{m}{M}+1\right)^{\frac{M}{2}} m^{\frac{m-1}{2m}} \left(1-\frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \leq 2^{\frac{M}{2}} m^{\frac{M+1}{2}}.$$

Capítulo 3

Técnicas probabilísticas

En los últimos años ha crecido el interés por encontrar polinomios homogéneos con norma supremo pequeña en la bola unitaria de algún espacio de Banach con coeficientes que cumplan alguna restricción para el estudio de varios problemas en análisis funcional. El primer gran resultado en este sentido fue la desigualdad de Kahane-Salem-Zygmund. La forma integral de esta desigualdad (ver [QQ13, Teorema 5.3.4]) asegura que existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ y elección de complejos $(c_\alpha)_{|\alpha|=m}$ vale

$$\int \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |\epsilon_\alpha(\omega) c_\alpha z^\alpha| \, \mathbb{P}(\omega) \leq C \left(n \log m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.1}$$

donde $(\epsilon_\alpha)_{|\alpha|=m}$ es una colección de variables idénticamente distribuidas Rademacher (ver definición en la demostración del Teorema 3.1.2 más abajo). De aquí se deduce fácilmente la versión original ([Kah93, Teorema 4, Capítulo 6]): para cualquier $n, m \in \mathbb{N}$ y $\Lambda \subset \Lambda(m,n)$, existe una colección de signos $(\epsilon_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, $\epsilon_\alpha \in \{-1, 1\}$, tal que

$$\sup_{z \in B_{\ell_\infty^n}} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda} \epsilon_\alpha z^\alpha \right| \leq C(n|\Lambda|)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\log(m)}. \tag{3.2}$$

Para nuestro objetivo, necesitaremos versiones de la desigualdad de Kahane-Salem-Zygmund en espacios ℓ_p^n. Presentaremos un resultado de Boas [Boa00] basado en métodos de Mantero y Tonge [MT80] y después una generalización obtenida por Bayart [Bay12].

3.1. Primera estimación

En la demostración de ambos resultados necesitaremos un conocido lema de cubrimiento (ver [MS86]).

Lema 3.1.1. *Sean $\varepsilon > 0$ y X un espacio de Banach complejo de dimensión finita n. Entonces, la bola unidad B_X puede ser cubierta con una colección de a lo sumo $(1 + \frac{2}{\varepsilon})^{2n}$ bolas abiertas de radio ε con centro en $\overline{B_X}$.*

Demostración. Sea $(B_i)_{1\leq i\leq N}$ una colección maximal de bolas disjuntas de radio $\frac{\varepsilon}{2}$ que verifican:

$$\bigcup_{i=1}^{N} B_i \subset \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) B_X.$$

Comparando volúmenes obtenemos $N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n} \leq \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2n}$, de donde se deduce que

$$N \leq \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{2n}.$$

Como la colección es maximal, para todo $x \in B_X$ existe $1 \leq i \leq N$ con $d(x, B_i) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego, las bolas con mismo centro y radio ε verifican lo pedido. □

Ahora sí, enunciamos el resultado principal.

Teorema 3.1.2. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $n > 1, m > 1 \in \mathbb{N}$. Existe una elección de signos $(\epsilon_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ tal que:*

$$\sup_{Z\in(B_{\ell_p^n})^m} \left| \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}} \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} Z_{\mathbf{i}} \right| \leq \begin{cases} \sqrt{32m\log(6m)}\, n^{\frac{1}{2}} (m!)^{1-\frac{1}{p}} & si\ 1 \leq p \leq 2 \\ \sqrt{32m\log(6m)}\, n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)m} (m!)^{\frac{1}{2}} & si\ 2 \leq p \leq \infty \end{cases} \tag{3.3}$$

Demostración. Introducimos la noción de sistema de Rademacher para desarrollar el argumento. Dado $n \in \mathbb{N}$ y $\omega \in [0,1]$, definimos $r_n(\omega) := \operatorname{sign}\left(\sin 2^{n+1}\pi\omega\right)$. Estas funciones son estocásticamente independientes y verifican $P(r_n = 1) = P(r_n = -1) = \frac{1}{2}$. Elegimos una función de Rademacher $\epsilon_{\mathbf{j}}$ distinta para cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ y consideramos la forma multilineal simétrica aleatoria

$$F(\omega, Z) := \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}}(\omega) \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} Z_{\mathbf{i}},$$

con $\omega \in [0,1]$, $Z \in (B_{\ell_p^n})^m$. El primer paso es acotar la probabilidad de que la suma para un Z fijo tenga módulo grande. Para ese fin, tomamos $Z \in (B_{\ell_p^n})^m$, $\lambda, R > 0$ y estudiamos $\mathrm{Re}F(\omega, Z)$. Por la clásica desigualdad de Chebyshev , sabemos:

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{Re}F(\omega,Z) > R\}) \leq \mathbb{E}[e^{\lambda \mathrm{Re}F(\omega,Z)}]e^{-\lambda R}. \tag{3.4}$$

Nos interesa entonces estimar esa esperanza. Debido a la independencia de las variables Rademacher,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{\lambda \mathrm{Re}F(\omega,Z)}] &= \prod_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \frac{1}{2}\exp\left(\lambda \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} \mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right) + \frac{1}{2}\exp\left(-\lambda \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} \mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right) \\ &= \prod_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \cosh\left(\lambda \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} \mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right), \end{aligned}$$

donde $\cosh(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ es la función coseno hiperbólico. De la desigualdad $\cosh(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$ obtenemos:

$$\mathbb{E}[e^{\lambda \mathrm{Re}F(\omega,Z)}] \leq \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\left(\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}\mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right)^2\right).$$

Trabajemos con el miembro derecho para conseguir una cota que sea independiente de $Z \in (B_{\ell_p^n})^m$. En adelante, para analizar los casos $1 \leq p \leq 2$ y $2 \leq p \leq \infty$ simultáneamente escribiremos $m(p) := \text{mín}(p,2)$ y $M(p) := \text{máx}(p,2)$. Por Hölder,

$$\left(\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}\mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right)^2 \leq (m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)}\left(\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}|Z_{\mathbf{i}}|^{m(p)}\right)^{\frac{2}{m(p)}}.$$

Como $\frac{2}{m(p)} \geq 1$, $\forall\ 1 \leq p \leq \infty$, reemplazando ese exponente por 1 llegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda^2}{2}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\left(\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}\mathrm{Re}Z_{\mathbf{i}}\right)^2 &\leq \frac{\lambda^2}{2}(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)}\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}\sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]}|Z_{\mathbf{i}}|^{m(p)}\\ &= \frac{\lambda^2}{2}(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)}\left(\|Z_1\|_{\ell^n_{m(p)}}\dots\|Z_m\|_{\ell^n_{m(p)}}\right)^{m(p)}.\end{aligned}$$

Como $Z_k \in B_{\ell_p^n}$ $(1 \leq k \leq m)$, nuevamente por Hölder sabemos que $\|Z_k\|^{m(p)}_{\ell^n_{m(p)}} \leq n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)}$. Finalmente, esta cadena de acotaciones nos permite concluir a partir de (3.4):

$$\mathbb{P}(\{\mathrm{Re}F(\omega,Z) > R\}) \leq \exp\left(-\lambda R + \frac{\lambda^2}{2}(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)}n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m}\right). \tag{3.5}$$

Por simetría podemos alcanzar la misma estimación para $\mathbb{P}(\{\mathrm{Re}F(\omega,Z) < -R\})$, por lo que la probabilidad de que $|\mathrm{Re}F(\omega,Z)|$ sea mayor que R está controlada por el doble de la cota en (3.5). Como el mismo argumento aplica para $\mathrm{Im}F(\omega,Z)$ y $|F(\omega,Z)| = \sqrt{|\mathrm{Re}F(\omega,Z)|^2 + |\mathrm{Im}F(\omega,Z)|^2}$, es inmediato que:

$$\mathbb{P}(\{|F(\omega,Z)| > \sqrt{2}R\}) \leq 4\exp\left(-\lambda R + \frac{\lambda^2}{2}(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)}n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m}\right). \tag{3.6}$$

Ahora, para producir a partir de (3.6) una cota para que la probabilidad de que la norma supremo de $|F(\omega,\cdot)|$ sea grande, probaremos una estimación de tipo Lipschitz para $F(\omega,Z)$ y luego utilizaremos el lema de cubrimiento 3.1.1. Fijemos $\omega \in [0,1]$ y escribamos $F_\omega(Z) = F(\omega,Z)$. Sean $\varepsilon > 0$ y $Z, W \in (B_{\ell_p^n})^m$ que cumplen $\|Z_k - W_k\|_{\ell_p^n} \leq \varepsilon$ para todo k. Como F_t es multilineal se tiene

$$\begin{aligned}F_t(Z_1,\dots,Z_m) = F_t(Z_1 - W_1, W_2,\dots,Z_m) + F_t(Z_1, Z_2 - W_2, Z_3,\dots,Z_m) +\\ + \dots + F_t(Z_1,\dots,Z_{m-1},Z_m - W_m) + F_t(W_1,\dots,W_m).\end{aligned}$$

Luego, $|F(\omega,Z) - F(\omega,W)| \leq m\varepsilon \sup_{U\in(B_{\ell_p^n})^m}|F(\omega,U)| = m\varepsilon\|F_\omega\|$. Por el lema de cubrimiento, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2m}$, existe un conjunto $A \subset \overline{(B_{\ell_p^n})^m}$ de cardinal a lo sumo $(1+4m)^{2nm}$ que contiene algún punto a distancia menor a $\frac{1}{2m}$ de cualquier punto $Z \in (B_{\ell_p^n})^m$. Por lo tanto, dado $Z \in (B_{\ell_p^n})^m$, podemos encontrar $W \in A$ tal que:

$$|F(\omega, Z)| \leq |F(\omega, Z) - F(\omega, W)| + |F(\omega, W)| \leq \frac{1}{2}\|F_\omega\| + \sup_{U \in A} |F(\omega, U)|,$$

y tomando supremo concluimos:

$$\|F_\omega\| \leq 2 \sup_{U \in A} |F(\omega, U)|. \tag{3.7}$$

Aplicando la estimación (3.6) a cada elemento de A, en vista de (3.7) tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\{\|F_t\| > 2\sqrt{2}R\}\right) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{U \in A} \{|F(\omega, U)| > \sqrt{2}R\}\right) \\
&\leq \sum_{U \in A} \mathbb{P}\left(\{|F(\omega, U)| > \sqrt{2}R\}\right) \\
&\leq 4(1+4m)^{2nm} \exp\left(-\lambda R + \frac{\lambda^2}{2}(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)} n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m}\right).
\end{aligned}$$

Ahora resta elegir los parámetros λ y R de manera adecuada:

$$\begin{aligned}
R &:= \left(2(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)} n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m} \log(8(1+4m)^{2nm})\right)^{\frac{1}{2}}, \\
\lambda &:= \frac{R}{(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)} n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m}}.
\end{aligned}$$

Estas elecciones permiten asegurar que $\mathbb{P}(\{\|F_t\| > 2\sqrt{2}R\}) \leq \frac{1}{2}$, con lo cual existe $\omega_0 \in [0,1]$ para el que $\|F_{\omega_0}\| \leq \left(16(m!)^{2\left(1-\frac{1}{m(p)}\right)} n^{\left(1-\frac{2}{M(p)}\right)m} \log(8(1+4m)^{2nm})\right)^{\frac{1}{2}}$.
Como $8(1+4m)^{2nm} < (6m)^{2nm}$ si $n, m > 1$, vemos que los valores de las variables Rademacher en ω_0 producen la elección de signos buscada. $\square$

Tenemos la siguiente consecuencia inmediata evaluando en la diagonal de la forma multilineal obtenida.

Corolario 3.1.3. *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $n, m > 1 \in \mathbb{N}$. Existe un polinomio m-homogéneo definido en $\mathbb{C}^n$ $P = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ con $|c_\alpha| = \frac{m!}{\alpha!}$ para cada α tal que:*

$$\sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |P(z)| \leq \begin{cases} \sqrt{32m\log(6m)}\, n^{\frac{1}{2}} (m!)^{1-\frac{1}{p}} & si\ 1 \leq p \leq 2 \\ \sqrt{32m\log(6m)}\, n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)m} (m!)^{\frac{1}{2}} & si\ 2 \leq p \leq \infty \end{cases}$$

3.2. Segunda estimación

Si bien las estimaciones desarrolladas hasta aquí son de gran utilidad cuando $p \geq 2$, necesitaremos acotaciones más ajustadas para el rango complementario. Esto justifica el desarrollo más técnico de esta segunda parte. Para nuestros propósitos, introducimos los espacios de probabilidad de Orlicz.

Definición 3.2.1. Sea ψ una función de Young, es decir, $\psi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es convexa, no decreciente y verifica $\psi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = +\infty$. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad. El espacio de Orlicz asociado a ψ se define por:

$$L_\psi := \{Z : \Omega \to \mathbb{R} \text{ variable aleatoria } : \mathbb{E}\psi\left(\frac{|Z|}{c}\right) < \infty \text{ para algún } c > 0\},$$

junto con la norma

$$\|Z\|_\psi = \inf\{c > 0 : \mathbb{E}\psi\left(\frac{|Z|}{c}\right) \leq 1\}.$$

Observemos que si tomamos $\psi(x) = x^p$ a través de esta construcción recuperamos el familiar espacio L_p.

La estrategia será idéntica a la de la sección anterior, con la diferencia de que trabajaremos en un espacio de probabilidad de Orlicz con función $\psi_q(x) = e^{x^q} - 1$, para $1 \leq q < \infty$ y $\psi_\infty = e^{e^x} - 1$, para $q = \infty$. Para el primer paso, que consiste en estimar la esperanza de una suma aleatoria, nos será de utilidad el siguiente lema, deducido de [Bay12, Sección 2].

Lema 3.2.2. *Sean $2 < q < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Existe una constante $B_q > 0$ tal que para cualquier elección de signos $(\epsilon_i)_{i=1}^n$ y números complejos $(\alpha_i)_{i=1}^n$ se cumple:*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i \alpha_i\right\|_{\psi_q} \leq B_q \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

La estimación principal viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio de Banach de dimensión n, $m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq 2$. Entonces, para cualquier colección de complejos $(c_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ y de funcionales $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$, existe una elección de signos $(\epsilon_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ tal que:*

$$\sup_{z\in B_X} \left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z)\right| \leq C(\log(m))^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} \sup_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \left\{\frac{|c_{\mathbf{j}}|}{|[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}}}\right\} \sup_{z\in B_X} \left(\sum_{k=1}^n |x'_k(z)|^p\right)^{\frac{m}{p}}, \qquad (3.8)$$

con $C > 0$ constante independiente de n y de m.

Demostración. En el desarrollo de este argumento cambiaremos varias veces sumas indexadas en $\mathcal{J}(m,n)$ por sumas sobre el conjunto de índices $\mathcal{M}(m,n)$. Extendemos la definición de los coeficientes a $\mathcal{M}(m,n)$ haciendo $c_{\mathbf{i}} = c_{\mathbf{j}}$ si $\mathbf{i} \sim \mathbf{j}$. Hacemos el caso $p = 1$ aparte pues es un simple ejercicio de acotación:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}} c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z)\right| &\leq \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z)| = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \frac{|c_{\mathbf{i}}|}{|[\mathbf{i}]|} |x'_{\mathbf{i}}(z)| \\ &\leq \sup_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \left\{\frac{|c_{\mathbf{i}}|}{|[\mathbf{i}]|}\right\} \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |x'_{\mathbf{i}}(z)| = \sup_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \left\{\frac{|c_{\mathbf{j}}|}{|[\mathbf{j}]|}\right\} \sup_{z\in B_X} \left(\sum_{k=1}^{n} |x'_k(z)|\right)^m .\end{aligned}$$

Para el caso $1 < p \leq 2$ necesitaremos desarrollar un argumento similar al de la sección anterior. Sea $(\epsilon_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}$ una colección de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas Rademacher. Definimos el polinomio m-homogéneo aleatorio

$$P(\omega, z) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}}(\omega) c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z).$$

Como dijimos antes, el primer objetivo es acotar la probabilidad de que el valor absoluto de P sea grande para un $z \in B_X$ fijo. Para lograr eso, estimaremos la esperanza de $|P(\omega, z)|$, o equivalentemente (gracias a la definición de espacios de Orlicz) la norma $\|P(\omega, z)\|_{\psi_{p'}}$. Fijamos $z \in B_X$. Para $\omega \in \Omega$, usando el Lema 3.2.2 tenemos:

$$\begin{aligned}\|P(\omega, z)\|_{\psi_{p'}} &= \left\|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \epsilon_{\mathbf{j}}(\omega) c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z)\right\|_{\psi'_p} \leq B_{p'} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |c_{\mathbf{j}} x'_{\mathbf{j}}(z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= B_{p'} \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \frac{|c_{\mathbf{i}}|^p}{|[\mathbf{i}]|} |x'_{\mathbf{i}}(z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_{p'} \sup_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \left\{\frac{|c_{\mathbf{i}}|}{|[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{p}}}\right\} \left(\sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} |x'_{\mathbf{i}}(z)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= B_{p'} \sup_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \left\{\frac{|c_{\mathbf{i}}|}{|[\mathbf{i}]|^{\frac{1}{p}}}\right\} \left(\sum_{k=1}^{n} |x'_k|^p\right)^{\frac{m}{p}} := F(x').\end{aligned}$$

Si $R > 0$, como $\psi_{p'}$ es no decreciente:

$$\mathbb{P}(\{|P(\omega, Z)| > R\}) \leq \mathbb{P}(\{\psi_{p'}\left(\frac{|P(\omega, z)|}{F(x')}\right) > \psi_{p'}\left(\frac{R}{F(x')}\right)\})$$

Como vimos que $\|P(\omega, z)\|_{\psi_{p'}} \leq F(x')$, por la definición de la norma tenemos $\mathbb{E}\psi_{p'}\left(\frac{|P(\omega,z)|}{F(x')}\right) \leq 1$. Luego, la desigualdad de Chebyshev implica que:

$$\mathbb{P}(\{|P(\omega, Z)| > R\}) \leq \frac{\mathbb{E}\psi_{p'}\left(\frac{|P(\omega,z)|}{F(x')}\right)}{\psi_{p'}\left(\frac{R}{F(x')}\right)} \leq \frac{1}{\psi_{p'}\left(\frac{R}{F(x')}\right)}. \tag{3.9}$$

Como antes, para estimar la probabilidad de que la norma supremo de P sea grande, combinaremos lo obtenido en (3.9) con un argumento de cubrimiento y una cota de tipo Lipschitz. Fijemos

$\omega \in \Omega$ y escribamos $P_\omega(z) = P(\omega, z)$. Para $z, w \in B_X$, de manera similar a como procedimos anteriormente tenemos:

$$\begin{aligned} |P_\omega(z) - P_\omega(w)| = |\check{P}_\omega(z, \dots, z) - \check{P}_\omega(w, \dots, w)| &\leq m \sup_{u,v \in B_X} |\check{P}_\omega(u, v, \dots, v)| \|z - w\| \\ &\leq m \left(\frac{m}{m-1}\right)^{m-1} \|P_\omega\| \|z - w\| \leq em \sup_{u \in B_X} |P(\omega, u)| \|z - w\|, \end{aligned}$$

donde usamos la desigualdad de Harris 1.1.7 en la acotación que baja de renglón. Ahora, por el lema de cubrimiento hay un conjunto $A \subset \overline{B_X}$ de cardinal menor o igual a $(1 + 4em)^{2n}$ tal que para todo $z \in B_X$, existe $w \in A$ con $\|z - w\| \leq \frac{1}{2em}$. Esto implica:

$$|\mathbb{P}(\omega, z)| \leq |\mathbb{P}(\omega, z) - \mathbb{P}(\omega, w)| + |\mathbb{P}(\omega, w)| \leq \frac{1}{2} \sup_{u \in B_X} |P(\omega, u)| + \sup_{w \in A} |\mathbb{P}(\omega, w)|,$$

y en consecuencia, para cada ω

$$\sup_{u \in B_X} |P(\omega, u)| \leq 2 \sup_{w \in A} |P(\omega, w)|.$$

Usando esto y la estimación (3.9):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\{\|P_\omega\| > 2R\}\right) &= \mathbb{P}\left(\{\sup_{u \in B_X} |P(\omega, u)| > 2R\}\right) \\ &\leq \sum_{w \in A} \mathbb{P}\left(|P(\omega, w)| > R\right) \leq \frac{(1 + 4em)^{2n}}{\psi_{p'}\left(\frac{R}{F(x')}\right)}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Para finalizar, le damos a R un valor adecuado. Escribimos $R := \lambda (\log m)^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} F(x')$, con $\lambda > 0$ y calculamos:

$$\frac{(1 + 4em)^{2n}}{\psi_{p'}\left(\frac{R}{F(x')}\right)} = \frac{(1 + 4em)^{2n}}{e^{\lambda p' n \log m} - 1}.$$

Como $\lim_{\lambda \to \infty} \frac{(1+4em)^{2n}}{e^{\lambda p' n \log m} - 1} = 0$, podemos elegir λ de manera tal que $\frac{(1+4em)^{2n}}{e^{\lambda p' n \log m} - 1} < \frac{1}{2}$. Para esa elección, por (3.10) tenemos $\mathbb{P}(\{\|P_\omega\| \leq 2R\}) \geq \frac{1}{2}$ y en particular existe $\omega_0 \in \Omega$ para el cual:

$$\|P_{\omega_0}\| = \sup_{u \in B_X} |P(\omega_0, u)| \leq 2\lambda B_{p'} (\log(m))^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} \sup_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} \left\{ \frac{|c_{\mathbf{j}}|}{|[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}}} \right\} \sup_{z \in B_X} \left(\sum_{k=1}^{n} |x'_k(z)|^p \right)^{\frac{m}{p}},$$

la conclusión deseada. □

A partir de esto, podemos deducir fácilmente un resultado análogo para polinomios en $\mathbb{C}^n$.

Corolario 3.2.4. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p \leq 2$. Consideramos el espacio de Banach $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$. Entonces, para cualquier colección de complejos $(c_\alpha)_{|\alpha|=m}$ existe una elección de signos $(\epsilon_\alpha)_{|\alpha|=m}$ tal que:*

$$\sup_{z \in B_X} \left| \sum_{|\alpha|=m} \epsilon_\alpha c_\alpha z^\alpha \right| \leq C (\log m)^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} \sup_{|\alpha|=m} \left\{ |c_\alpha| \left(\frac{\alpha!}{m!} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \sup_{z \in B_X} \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^p \right)^{\frac{m}{p}},$$

donde $C > 0$ es independiente de n y m.

Comparemos este resultado con el Corolario 3.1.3 para $X = \ell_p^n$, $1 < p < 2$. Si consideramos sólo la parte que depende de la cantidad de variables n, observamos

$$n^{1-\frac{1}{p}} < n^{\frac{1}{2}}.$$

Respecto de la parte que depende del grado m, si hacemos en 3.2.4 la elección $|c_\alpha| = \frac{m!}{\alpha!}$ tenemos:

$$(\log m)^{1-\frac{1}{p}} \sup_{|\alpha|=m} \left\{ |c_\alpha| \frac{\alpha!}{m!}^{\frac{1}{p}} \right\} = (\log m)^{1-\frac{1}{p}} \sup_{|\alpha|=m} \left\{ \frac{m!}{\alpha!}^{1-\frac{1}{p}} \right\} < \sqrt{m \log m}(m!)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Por lo tanto, en este rango la estimación de 3.2.4 es estrictamente mejor que la dada en 3.1.3 en términos del crecimiento tanto en n como en m. Aprovecharemos este hecho en la Sección 4.2.2 para acotar por arriba el radio de Bohr de la bola $B_{\ell_p^n}$ para p entre 1 y 2.

Capítulo 4

Radio de Bohr

El resultado de H.Bohr sobre series de potencias en una variable fue olvidado por mucho tiempo. Los trabajos de Dineen y Timoney [DT89] y Dixon [Dix95] (donde resolvió negativamente una conjetura sobre álgebras de Banach que satisfacen la desigualdad de von Neumann no unitaria) dieron nuevo impulso al área. La generalización del concepto de radio de Bohr introducida por Boas y Khavinson en [KB97] y su éxito parcial en conseguir estimaciones suscitó un gran interés en conocer el comportamiento asintótico del radio de Bohr de las bolas unidad de los espacios ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$. Esta última será la motivación del presente capítulo (y una de las principales del trabajo), en el que presentaremos los mejores resultados obtenidos sobre el comportamiento asintótico del radio de Bohr para la bola unidad $B_{\ell_p^n}$ recurriendo a las técnicas expuestas. En primer lugar, daremos el resultado original de H.Bohr y probaremos algunas propiedades generales o estructurales del problema. En las secciones subsiguientes nos encargaremos de desarrollar las estimaciones más ajustadas conocidas para cada rango, incluyendo algunos resultados originales (en particular, la cota inferior para el caso $1 < p \leq 2$ obtenida por un enfoque abstracto).

4.1. Conceptos generales

Comenzamos enunciando y demostrando el histórico teorema de Bohr (ver [Boh14]).

Teorema 4.1.1. (Bohr) *El radio $r = \frac{1}{3}$ es el valor óptimo para el cual se verifica la desigualdad:*

$$\sum_{n\geq 0} |c_n| r^n \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left| \sum_{n\geq 0} c_n z^n \right|, \tag{4.1}$$

para toda función holomorfa $f(z) = \sum_{n\geq 0} c_n z^n$ en el disco con $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < \infty$.

Demostración. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorfa y acotada. Podemos suponer normalizando de ser necesario que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| < 1$. Para ver que $r = \frac{1}{3}$ cumple la propiedad del enunciado usaremos el lema de Wiener (1.4.1). Tomemos $|z| \leq \frac{1}{3}$ y calculemos:

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} |c_n z^n| &= |c_0| + \sum_{n\geq 1} |c_n z^n| \leq |c_0| + \left(1 - |c_0|^2\right) \sum_{n\geq 1} |z|^n \\ &\leq |c_0| + \left(1 - |c_0|^2\right) \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = |c_0| + \frac{1}{2}\left(1 - |c_0|^2\right).\end{aligned}$$

Como la función $t \mapsto t + \frac{1}{2}\left(1 - t^2\right)$ está acotada por 1 en el intervalo $[0,1]$, hemos probado que la desigualdad (4.1) se verifica para cualquier $|z| \leq \frac{1}{3}$. Para ver la optimalidad, consideramos la homografía definida por $f_a(z) := \frac{z-a}{1-az}$ donde $0 < a < 1$. Es fácil ver que si $f_a = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$, entonces $\sum_{n\geq 0} |b_n||z^n| = 2a + f_a(|z|)$ y que además $2a + f_a(|z|) > 1$ si $|z| > \frac{1}{1+2a}$. Haciendo tender $a \to 1$ por izquierda deducimos que el radio $\frac{1}{3}$ no se puede mejorar. $\square$

Este resultado motivó la siguiente definición, debida a Boas y Khavinson [KB97] que generaliza el problema.

Definición 4.1.2. Sea $R \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de Reinhardt. El radio de Bohr de R, que notamos $K(R)$, se define como el supremo sobre los $r \geq 0$ que verifican que para toda función holomorfa $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ acotada en R se cumple:

$$\sup_{z\in rR} \sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq \sup_{z\in R} |f(z)| = \sup_{z\in R} \left| \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \right|.$$

Con esta notación, el teorema de Bohr se lee $K(\mathbb{D}) = \frac{1}{3}$. Si bien más tarde restringiremos nuestra atención al estudio del radio de Bohr para las bolas unitarias de los espacios ℓ_p^n complejos ($1 \leq p \leq \infty$), es esclarecedor presentar dos resultados fundamentales sobre la estructura del problema de Bohr con esta generalidad. El primero de ellos versa sobre la extremalidad de $K(B_{\ell_\infty^n})$:

Teorema 4.1.3. *Sea $R \subset \mathbb{C}^n$ un dominio completo de Reinhardt. Entonces, $K(B_{\ell_\infty^n}) \leq K(R)$.*

Demostración. Sea $f = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en R. Fijemos $\omega \in R$. Por la definición de dominio completo de Reinhardt, para cualquier $w = (w_1, \ldots, w_n) \in B_{\ell_\infty^n}$ vale que el punto $(w_1\omega_1, \ldots, w_n\omega_n)$ pertenece a R y por lo tanto, podemos definir una función holomorfa en $B_{\ell_\infty^n}$ vía $g(w) := f(w_1\omega_1, \ldots, w_n\omega_n)$ cuyo desarrollo es $g(w) = \sum_\alpha c_\alpha \omega^\alpha w^\alpha$. Llamemos $\rho := K(B_{\ell_\infty^n})$ y $\nu := (1, \ldots, 1) \in B_{\ell_\infty^n}$. Por la definición de radio de Bohr para g, obtenemos evaluando en $w = \rho\nu$ que:

$$\sum_\alpha |c_\alpha(\rho\omega)^\alpha| = \sum_\alpha |c_\alpha \omega^\alpha||(\rho\nu)^\alpha| \leq \sup_{w\in B_{\ell_\infty^n}} \left| \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha w^\alpha \right| \leq \sup_{z\in R} \left| \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \right|.$$

Como $\omega \in R$ era arbitrario, concluimos que $\sup_{z\in\rho R} \sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq \sup_{z\in R} |f(z)|$ y por lo tanto $\rho = K(B_{\ell_\infty^n}) \leq K(R)$. $\square$

El segundo resultado da una conexión fundamental entre el problema de Bohr y el estudio de la constante de incondicionalidad de la base de monomios del espacio de polinomios homogéneos. Antes de proceder, entendamos qué significa este último concepto. Dado un espacio de Banach X de dimensión finita y $m \in \mathbb{N}$, el conjunto de monomios $(z_\alpha)_{|\alpha|=m}$ resulta una base de $\mathcal{P}(^m X)$. Por eso tiene sentido considerar la constante de incondicionalidad de esta base $\chi((z_\alpha)_{|\alpha|=m}; \mathcal{P}(^m X))$, a la que para abreviar notaremos en adelante $\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^m X))$. La conexión será implícitamente utilizada durante el resto del capítulo y es el disparador de los enfoques elegidos para estimar el radio de Bohr multidimensional.

Teorema 4.1.4. *Sea* $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach de dimensión finita tal que* $\chi((e_k)_{k=1}^n, X) = 1$*. Entonces*

$$\frac{1}{3}\frac{1}{(\sup_{m\in\mathbb{N}}\chi_{mon}(\mathcal{P}(^mX)))^{\frac{1}{m}}} \leq K(B_X) \leq \min\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{(\sup_{m\in\mathbb{N}}\chi_{mon}(\mathcal{P}(^mX)))^{\frac{1}{m}}}\right).$$

Demostración. Empezaremos con una observación simple pero que da la relación clave entre ambas magnitudes. Sean $m \in \mathbb{N}$ y $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{P}(^mX)$. Entonces, tenemos para cualquier $z \in B_X$:

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha z^\alpha| = \sup_{\epsilon_\alpha\in\mathbb{D}} \left|\sum_{|\alpha|=m} \epsilon_\alpha a_\alpha z^\alpha\right|. \tag{4.2}$$

Nos proponemos obtener una consecuencia de esta igualdad para polinomios homogéneos y luego pasar al caso general descomponiendo el desarrollo de una función holomorfa en sus partes homogéneas.

Llamemos $\rho := (\sup_{m\in\mathbb{N}}\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^mX)))^{\frac{1}{m}}$. Vemos por (4.2) y la definición de constante de incondicionalidad que para cualquier $\omega \in B_X$:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha \omega^\alpha| = \sup_{\epsilon_\alpha\in\mathbb{D}} \left|\sum_{|\alpha|=m} \epsilon_\alpha a_\alpha \omega^\alpha\right| &\leq \chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^mX)) \left\|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right\|_{\mathcal{P}(^mX)} \\ &= \chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^mX)) \sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right| \\ &\leq \rho^m \sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right|.\end{aligned}$$

En particular, deducimos para $\omega \in B_X$:

$$\sum_{|\alpha|=m} \left|a_\alpha \left(\frac{\omega}{\rho}\right)^\alpha\right| \leq \sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right|. \tag{4.3}$$

Para ver la primera desigualdad, tomemos $f = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en B_X con $\sup_{z\in B_X}|f(z)| \leq 1$ y fijemos $\omega \in B_X$. Combinando el lema de Wiener (1.4.2) con (4.3), para cada parte m-homogénea de f vale:

$$\sum_{|\alpha|=m} \left|c_\alpha \left(\frac{\omega}{3\rho}\right)^\alpha\right| \leq \frac{1}{3^m}\sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha\right| \leq \frac{1}{3^m}(1-|c_0|^2).$$

Esto nos permite calcular:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha}\left|c_\alpha\left(\frac{\omega}{3\rho}\right)^\alpha\right| &= |c_0| + \sum_{m\geq 1}\sum_{|\alpha|=m}\left|c_\alpha\left(\frac{\omega}{3\rho}\right)^\alpha\right| \\ &\leq |c_0| + (1-|c_0|^2)\sum_{m\geq 1}\frac{1}{3^m} \\ &= |c_0| + \frac{1}{2}(1-|c_0|^2) \leq 1.\end{aligned}$$

Como la cota vale para todo $\omega \in B_X$, concluimos que $\frac{1}{3\rho} \leq K(B_X)$.

Para ver la otra desigualdad, notemos que por la definición de radio de Bohr aplicada a P:

$$\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha (K(B_X)\omega)^\alpha| = K(B_X)^m \sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha \omega^\alpha| \leq \sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right|. \tag{4.4}$$

En vista de (4.2), a partir de (4.4) se deduce inmediatamente:

$$\sup_{\epsilon_\alpha \in \mathbb{D}}\left|\sum_{|\alpha|=m}\epsilon_\alpha a_\alpha \omega^\alpha\right| \leq \frac{1}{K(B_X)^m}\sup_{z\in B_X}\left|\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha\right|,$$

y de ahí se sigue que $\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^m X)) \leq \frac{1}{K(B_X)^m}$ por la definición de constante de incondicionalidad de una base. Como esto vale para todo $m \in \mathbb{N}$, tomando supremo llegamos a $K(B_X) \leq \frac{1}{\rho}$, como queríamos ver. Como la desigualdad $K(B_X) \leq \frac{1}{3}$ es consecuencia directa del teorema original de Bohr, hemos terminado la demostración. □

4.2. El radio de la bola unidad $B_{\ell_p^n}$

Como ya mencionamos, a partir del trabajo [KB97] se realizaron grandes esfuerzos por calcular el comportamiento asintótico del radio de Bohr de las bolas unidad de los espacios ℓ_p^n complejos, $1 \leq p \leq \infty$. La primera caracterización completa fue obtenida en [DFOC$^+$11], donde los autores mostraron como consecuencia de la hipercontractividad de la desigualdad de Bohnenblust-Hille polinomial que $K(B_{\ell_\infty^n})$ se comporta asintóticamente como $\sqrt{\frac{\log n}{n}}$ salvo constante. Tras una serie de mejoras obtenidas en diversos trabajos (referimos por ejemplo a [Aiz00, DF06, DT89, DFOC$^+$11]), finalmente Defant y Frerick calcularon en [DF11] el orden correcto del radio de Bohr para todos los espacios ℓ_p^n:

Teorema 4.2.1. *Existen constantes $C_1, C_2 \geq 1$ tal que para todo $1 \leq p \leq \infty$ y $n \in \mathbb{N}$ vale:*

$$C_1\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min(p,2)}} \leq K(B_{\ell_p^n}) \leq C_2\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min(p,2)}}. \tag{4.5}$$

El gran avance de este trabajo consistió en dar estimaciones ajustadas para la constante de Gordon-Lewis de productos tensoriales de ciertos espacios y luego utilizarlas para obtener la cota inferior vía la identificación isométrica $\bigotimes^{m,s} X' = \mathcal{P}(^m X)$, donde X es un espacio de Banach de dimensión finita. La cota superior era conocida; es consecuencia de las estimaciones probabilísticas desarrolladas en el Capítulo 3 como veremos más adelante.

Una de las principales motivaciones para la elaboración del presente trabajo fue intentar dar con las mejores constantes C_1, C_2 posibles en (4.5) o más precisamente, estimar el valor de

$$\limsup_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1-\frac{1}{\min(p,2)}}}.$$

En este sentido, fue demostrado bastante recientemente por Bayart et al. en [BPSS14] el siguiente:

Teorema 4.2.2. $\lim_n \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1.$

La diferencia en el orden de crecimiento para los casos $p > 2$ y $p \leq 2$ en (4.5) sugiere tratarlos por separado. Una inspección más fina del resultado revela que $K(B_{\ell_1^n})$ no tiende a cero cuando la dimensión $n \to \infty$, a diferencia de lo que sucede para $p > 1$. Por este motivo, ordenaremos en las subsecciones siguientes los resultados separando en estos tres casos, presentando en el desarrollo algunos obtenidos por nosotros. Para finalizar esta parte, demostramos una de las desigualdades en 4.2.2 (probaremos la otra mediante una estimación más general). El argumento de la prueba será utilizado para obtener conclusiones más adelante.

Demostración. (de la cota inferior en el Teorema 4.2.2) Sea $\varepsilon > 0$. Gracias al Corolario 2.2.5, existe $\kappa > 0$ tal que para cualquier $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha z^\alpha \in \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$ $(m, n \in \mathbb{N})$ se verifica:

$$\left(\sum_{|\alpha|=m} |a_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \leq \kappa(1+\varepsilon)^m \|P\|_\infty. \tag{4.6}$$

Escribamos $r := (1-2\varepsilon)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ y tomemos $f(z) = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en $\mathbb{D}^n$ con $\sup_{z\in\mathbb{D}^n} |f(z)| \leq 1$. Recurriendo la tradicional descomposición del desarrollo de f, tenemos para $z \in r\mathbb{D}^n$:

$$\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq |c_0| + \sum_{m\geq 1} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|.$$

Si aplicamos primero la desigualdad de Hölder, después (4.6) y finalmente el lema de Wiener (1.4.2):

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| &\leq \left(\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|^{\frac{2m}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{2m}} \binom{n+m-1}{m}^{\frac{m-1}{2m}} \\ &\leq \kappa(1+\varepsilon)^m \sup_{z\in\mathbb{D}^n}\left|\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha\right| \binom{n+m-1}{m}^{\frac{m-1}{2m}} \\ &\leq \kappa(1-|c_0|^2)(1+\varepsilon)^m \binom{n+m-1}{m}^{\frac{m-1}{2m}}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

en donde hemos utilizado el hecho que en dimensión n hay $\binom{n+m-1}{m}$ monomios distintos de grado m. Gracias a la aproximación de Stirling sabemos que $\binom{n+m-1}{m} \leq e^m \left(1+\frac{n}{m}\right)^m$. Uniendo la información, obtenemos:

$$\sum_{m\geq 1} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \leq \kappa(1-|c_0|^2) \sum_{m\geq 1} (r\sqrt{e}(1+\varepsilon))^m \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{4.8}$$

La idea será separar en tres partes la suma en (4.8) y acotar cada una. La cola de la suma resulta la más fácil para trabajar. Para $m > \sqrt{n}$, se tiene que $\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq (2\sqrt{n})^{\frac{m}{2}}$, con lo cual

$$\sum_{m>\sqrt{n}} (r\sqrt{e}(1+\varepsilon))^m \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq \sum_{m>\sqrt{n}} \left(\sqrt{\frac{\log n}{n}}\sqrt{2e}(1-2\varepsilon)(1+\varepsilon)n^{\frac{1}{4}}\right)^m.$$

Como $\frac{\sqrt{\log n}}{n^{\frac{1}{4}}} \to 0$ cuando $n\to\infty$, toda esta parte de la suma va a 0. Para el resto del rango, necesitamos una estimación distinta del factor $\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}}$. Consideremos (para $m \leq \sqrt{n}$) el siguiente cálculo:

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{m}} \frac{n^{\frac{1}{m}}m}{n} = \left(\frac{m+n}{n}\right)\left(\frac{mn}{m+n}\right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) m^{\frac{1}{m}}. \tag{4.9}$$

Por lo tanto, si n es grande, podemos encontrar $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{m}{2}} \frac{n^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{m}{2}}},$$

siempre que $m \geq m_0$. Así, si fijamos n suficientemente grande, tenemos:

$$\sum_{m_0\leq m\leq\sqrt{n}} (r\sqrt{e}(1+\varepsilon))^m \left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq \sum_{m_0\leq m\leq\sqrt{n}} \left((1-2\varepsilon)(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{\log n}{n}}\sqrt{e}\sqrt{n}\sqrt{\frac{1}{n^{\frac{1}{m}}m}}\right)^m.$$

Ahora bien, la función definida por $t \mapsto n^{\frac{1}{t}}m$ decrece hasta $t = \log n$ y crece a partir de ahí, alcanzando un mínimo con valor $e\log n$. Esto implica que:

$$\sum_{m_0\leq m\leq\sqrt{n}} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \leq \kappa(1-|c_0|^2) \sum_{m_0\leq m\leq\sqrt{n}} \left((1-2\varepsilon)(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}}\right)^m.$$

Como $(1-2\varepsilon)(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} < 1$ para $\varepsilon > 0$ (esto proviene de un simple análisis de la función $t \mapsto (1-2t)(1+t)^{\frac{3}{2}}$), si m_0 es suficientemente grande también esta parte tiende a 0 con n.

Finalmente, retomando (4.9) sabemos que para n grande vale:

$$\left(1+\frac{n}{m}\right)^{\frac{m-1}{2}} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{m}{2}} \frac{n^{\frac{m}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}m^{\frac{m}{2}}} m^{\frac{1}{2}},$$

si $m < m_0$. Si además pedimos $\log n \geq m_0$, la función $t \mapsto n^{\frac{1}{t}} m$ resulta decreciente para $1 \leq m < m_0$ y en consecuencia:

$$\sum_{1 \leq m < m_0} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \leq \kappa(1-|c_0|^2) \sum_{1 \leq m < m_0} \left(\frac{(1-2\varepsilon)(1+\varepsilon)^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2m}} \sqrt{e}\sqrt{\log n}}{m_0^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2m_0}}} \right)^m .$$

Nuevamente, esta cantidad tiende a 0 si $n \to \infty$.

Sumando estas tres desigualdades, concluimos que podemos hacer que $\sum_{m \geq 1} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha|$ sea arbitrariamente chico si tomamos n suficientemente grande. Así, podemos encontrar n para que valga:

$$\sum_\alpha |c_\alpha z^\alpha| \leq |c_0| + \sum_{m \geq 1} r^m \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \leq 1.$$

Luego, a partir de un momento $K(B_{\ell_\infty^n}) \geq (1-2\varepsilon)\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ y esto obviamente muestra

$$\liminf_n \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq 1. \qquad \square$$

Observación 4.2.3. El resultado principal de [DFOC+11] implica que para todo $\varepsilon > 0$ existe una constante $K = K(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\mathrm{B}_m^{\mathrm{pol}} \leq K(\sqrt{2}+\varepsilon)^m.$$

De haber empleado esta estimación en el paso (4.7) en lugar del Corolario 2.2.5, habríamos obtenido

$$\liminf_n \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

A pesar del enorme avance que significó la demostración de la hipercontractividad de la desigualdad polinomial de Bohnenblust-Hille, no alcanza para calcular el valor de ese límite. El resultado necesario para lograrlo era precisamente 2.2.5 y en esto radica la importancia del trabajo [BPSS14].

4.2.1. El caso $2 \leq p \leq \infty$

Este es el único caso que está completamente resuelto. Apoyándonos en los resultados anteriores y la demostración de [Boa00, Teorema 4], mostraremos:

Teorema 4.2.4. *Sea $2 \leq p \leq \infty$. Entonces* $\lim_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1.$

Demostración. Sea $2 \leq p \leq \infty$. Por los teoremas 4.1.3 y 4.2.2,

$$\liminf_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \geq \liminf_n \frac{K(B_{\ell_\infty^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Debemos mostrar la otra desigualdad. Como anticipamos, lograremos esto a través del uso de las estimaciones probabilísticas obtenidas en el capítulo 3. Por el corolario 3.1.3, dados $m, n > 1 \in \mathbb{N}$ existe un polinomio $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ con $|c_\alpha| = \frac{m!}{\alpha!}$ para todo α que verifica:

$$\sup_{z \in B(\ell_p^n)} \left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right| \leq \sqrt{32m\log(6m)} n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)m} (m!)^{\frac{1}{2}}.$$

La clave para obtener una cota superior a partir de esto es simplemente utilizar la definición de radio de Bohr. Para cualquier $\omega \in B_{\ell_p^n}$ vale:

$$\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha||K(B_{\ell_p^n})\omega|^\alpha = K(B_{\ell_p^n})^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|\omega|^\alpha \leq \sqrt{32m\log(6m)} n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)m} (m!)^{\frac{1}{2}}.$$

Si ahora consideramos el vector $\omega_0 = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}(1, \ldots, 1) \in B_{\ell_p^n}$ y evaluamos en lo anterior:

$$\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha| \left(\frac{K(B_{\ell_p^n})(1, \ldots, 1)}{n^{\frac{1}{p}}} \right)^\alpha = \left(\frac{K(B_{\ell_p^n})}{n^{\frac{1}{p}}} \right)^m \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \leq \sqrt{32m\log(6m)} n^{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)m} (m!)^{\frac{1}{2}}.$$

De la igualdad $\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} = n^m$ obtenemos:

$$K(B_{\ell_p^n}) \leq \left(\frac{m!^{\frac{1}{m}}}{n} \right)^{\frac{1}{2}} (32nm\log(6m))^{\frac{1}{2m}}.$$

A partir de ahora el resultado se sigue tras una serie de cuentas que, si bien son sencillas, haremos con cierto detalle. Trabajemos un poco la expresión de la derecha. En primer lugar, por Stirling, $m! \leq em^{m+\frac{1}{2}}e^{-m}$. Usando esta información, elegimos $m = \lfloor \log(n) \rfloor$ para obtener:

$$K(B_{\ell_p^n}) \leq \left(\frac{\log(n)}{n} \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} \lfloor \log(n) \rfloor^{\frac{1}{4\lfloor \log(n) \rfloor}} (32n\lfloor \log(n) \rfloor \log(6\lfloor \log(n) \rfloor))^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}}.$$

Por lo tanto, nos alcanza con estudiar la expresión:

$$e^{\frac{-1}{2}} e^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} \lfloor \log(n) \rfloor^{\frac{1}{4\lfloor \log(n) \rfloor}} (32n\lfloor \log(n) \rfloor \log(6\lfloor \log(n) \rfloor))^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}}.$$

Es fácil ver que

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} = \lim_{n\to\infty} \lfloor \log(n) \rfloor^{\frac{1}{4\lfloor \log(n) \rfloor}} = \lim_{n\to\infty} 32^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} = \lim_{n\to\infty} (\log(6\lfloor \log(n) \rfloor))^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} = 1.$$

Ahora, como $n^{\frac{1}{\lfloor \log(n) \rfloor}} \leq n^{\frac{1}{\log(n)-1}} = \left(n^{\frac{1}{\log(n)}} \right)^{\frac{\log(n)}{\log(n)-1}} = e^{\frac{\log(n)}{\log(n)-1}}$, resulta $\limsup_n e^{\frac{-1}{2}} n^{\frac{1}{2\lfloor \log(n) \rfloor}} \leq 1$ y en consecuencia, $\limsup_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{2}}} \leq 1$. □

4.2.2. El caso $1 < p \leq 2$

Como anticipamos, en este rango el problema no está cerrado. A continuación presentamos las cotas más precisas conocidas, incluyendo una estimación obtenida por nosotros.

Teorema 4.2.5. *Sea* $1 < p \leq 2$. *Entonces,* $\limsup_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}} \leq 1$.

Demostración. La prueba de esta desigualdad es similar a la hecha en el caso anterior. Como antes, partimos de la existencia de un polinomio homogéneo con norma supremo pequeña. Para $m, n \in \mathbb{N}$, del corolario 3.2.4 aplicado al espacio $X = \ell_p^n$ deducimos la existencia de un polinomio m-homogéneo $P(z) = \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha$ cuyos coeficientes cumplen $|c_\alpha| = \frac{m!}{\alpha!}$ para todo α y además:

$$\sup_{z \in B_{\ell_p^n}} \left| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right| \leq C(\log m)^{\frac{1}{p'}} n^{\frac{1}{p'}} \sup_{|\alpha|=m} \left\{ \frac{m!}{\alpha!} \left(\frac{\alpha!}{m!} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

Como antes, utilizando la definición del radio de Bohr y considerando el vector $z_0 = \frac{1}{n^{\frac{1}{p}}}(1, \ldots, 1) \in B_{\ell_p^n}$ obtenemos:

$$K(B_{\ell_p^n}) \leq C^{\frac{1}{m}} (\log m)^{\frac{1}{mp'}} n^{\frac{1}{mp'}} \sup_{|\alpha|=m} \left\{ \left(\frac{m!}{\alpha!} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\}^{\frac{1}{m}} n^{\frac{-1}{p'}}. \tag{4.10}$$

Ahora hacemos la tradicional elección $m = \lfloor \log(n) \rfloor$ y como $\lfloor \log(n) \rfloor < n$, el máximo coeficiente multinomial tiene valor $m! = \lfloor \log(n) \rfloor!$ (en efecto, podemos elegir cualquier mulitiíndice α que verifique $|\alpha| = \lfloor \log(n) \rfloor$ y $\alpha_i \leq 1$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$). Cálculos análogos a los ya realizados permiten concluir que $\limsup_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}} \leq 1$. $\square$

Para la cota inferior, presentaremos dos resultados. Si bien uno es más ajustado, es interesante mostrar los dos enfoques distintos con los que se obtuvieron, uno abstracto y otro elemental. Para el primero, atacaremos el problema en el espíritu del Teorema 4.1.4: dado un espacio de Banach complejo X de dimensión finita, nos interesará estimar $\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}(^m X))$, la constante de incondicionalidad de los monomios sobre los polinomios homogéneos en X . Lograremos esto a partir de la igualdad isométrica $\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X' = \mathcal{P}(^m X)$, que ya mencionamos como consecuencia de la Proposición 1.2.3. La prueba de la cota consta esencialmente de tres partes.

Hacemos un breve comentario antes de desarrollar la primera de ellas. Pisier [Pis86] y Schütt [Sch78] probaron independientemente un resultado fundamental, que asegura que para determinar si el producto tensorial de espacios de Banach con base incondicional tiene él mismo base incondicional basta con analizar los monomios (es decir, productos tensoriales de elementos de las respectivas bases). Concretamente, muestran que la constante de incondicionalidad asociada a la base monomial está mayorada por la constante de estructura de incondicionalidad local módulo un factor independiente de los espacios involucrados. En [DDGM01, Teorema 1], los autores mostraron un análogo de este teorema para productos tensoriales simétricos. Nuestro resultado, enunciado con la hipótesis adicional de que el espacio de Banach sea de dimensión finita por simplicidad, contiene una mejora substancial (en términos del grado de homogeneidad) del factor mencionado.

Proposición 4.2.6. *Sea $m \in \mathbb{N}$, X un espacio de Banach de dimensión finita n con base 1-incondicional $(e_k)_{k=1}^n$. Llamemos $Z := \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X$. Entonces $\chi((z_{\mathbf{j}} := S(e_{\mathbf{j}}))_{j\in\mathcal{J}(m,n)}; Z) \leq 2^m \chi_u(Z)$.*

Necesitaremos utilizar el siguiente lema auxiliar para desarrollar la prueba, basada en una idea de Szarek [Sza81]:

Lema 4.2.7. *Sea $m \in \mathbb{N}$, X un espacio de Banach de dimensión n con base 1-incondicional $(e_k)_{k=1}^n$. Para $\omega \in \mathbb{T}^n$, definimos el operador $T : \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X \to \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X$ como:*

$$T_\omega z = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} \langle |\mathbf{j}| S(e'_{\mathbf{j}}), z\rangle S(e_{\mathbf{j}}).$$

Entonces $\|T_\omega\| \leq 1$.

Demostración. La prueba consiste en calcular ordenadamente el operador T en un elemento arbitrario recordando el Lema 1.2.4 y luego utilizar la definición de la norma inyectiva simétrica. Empezamos tomando un elemento genérico $z = \sum_{l=1}^t \otimes^m x_k \in Z$ y evaluando:

$$\begin{aligned}
T_\omega z &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} \langle \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} e'_{\mathbf{i}}, \sum_{l=1}^t \otimes^m x_l\rangle \frac{1}{|[\mathbf{j}]|} \sum_{\mathbf{k}\in[\mathbf{j}]} e_{\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} \left(\sum_{l=1}^t \sum_{\mathbf{i}\in[\mathbf{j}]} e'_{i_1}(x_l)\dots e'_{i_m}(x_l) \right) \frac{1}{|[\mathbf{j}]|} \sum_{\mathbf{k}\in[\mathbf{j}]} e_{\mathbf{k}} \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} \left(\sum_{l=1}^t e'_{j_1}(x_l)\dots e'_{j_m}(x_l) \right) \sum_{\mathbf{k}\in[\mathbf{j}]} e_{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

Con esta escritura en mente, fijamos $x' \in B_{X'}$ para calcular la norma de T. Tenemos:

$$\begin{aligned}
\langle (x')^m, T_\omega z\rangle &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} \left(\sum_{l=1}^t e'_{j_1}(x_l)\dots e'_{j_m}(x_l) \right) \sum_{\mathbf{k}\in[\mathbf{j}]} x'(e_{k_1})\dots x'(e_{k_m}) \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_n} |[\mathbf{j}]| \left(\sum_{l=1}^t e'_{j_1}(x_l)\dots e'_{j_m}(x_l) \right) x'(e_{j_1})\dots x'(e_{j_m}) \\
&= \sum_{l=1}^t \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{M}(m,n)} \omega_{i_1}\dots\omega_{i_m} x'(e_{i_1})\dots x'(e_{i_m}) e'_{i_1}(x_l)\dots e'_{i_m}(x_l).
\end{aligned}$$

Afirmamos que esta última expresión coincide con $\langle (\sum_{k=1}^n \omega_k x'(e_k)e'_k)^m, \sum_{l=1}^t \otimes^m x_l\rangle$. En efecto,

$$\langle \left(\sum_{k=1}^{n} \omega_k x'(e_k) e'_k\right)^m, \sum_{l=1}^{t} \otimes^m x_l \rangle = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{k_1=1}^{n} \omega_{k_1} x'(e_{k_1}) e'_{k_1}(x_l)\right) \ldots \left(\sum_{k_m=1}^{n} \omega_{k_m} x'(e_{k_m}) e'_{k_m}(x_l)\right)$$
$$= \sum_{l=1}^{t} \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} \omega_{i_1} \ldots \omega_{i_m} x'(e_{i_1}) \ldots x'(e_{i_m}) e'_{i_1}(x_l) \ldots e'_{i_m}(x_l).$$

Como $(e'_k)_{k=1}^n$ es 1-incondicional y $x' = \sum_{j=1}^n x'(e_j)e'_j$, tenemos que $\| \sum_{j=1}^n \omega_j x'(e_j) e'_j \| \leq 1$ y en consecuencia $|\langle (x')^m, T_\omega z\rangle| \leq \|z\|$. Como $x' \in B_{X'}$ era arbitrario, esto implica $\|T_\omega\| \leq 1$. □

El segundo ingrediente para proceder con la prueba de la proposición es la caracterización de la constante incondicional de una base desarrollada en 1.3.3, que recordamos aquí: si Y es un espacio de Banach con base $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, se cumple

$$\chi((y_n)_{n\in\mathbb{N}}; Y) = \text{ínf}\{c \mid \sum_{i\in\mathcal{I}} |\langle y'_i, y\rangle||\langle y', y_i\rangle| \leq c\|y\|\|y'\| \ \forall y \in Y,\, y' \in Y'\}. \tag{4.11}$$

Por lo tanto, el argumento consistirá en estimar la cantidad $\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle|$ para $z \in Z$, $z' \in Z'$ en términos de $\chi_u(Z)$.

Demostración. (de la Proposición 4.2.6) Sea $\varepsilon > 0$. Como $Z = \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X$ tiene l.u.st. (es un espacio de dimensión finita), existe un espacio de Banach F de dimensión finita con base $(f_i)_{i=1}^r$ de manera que existe una factorización de la forma:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "Id"] \arrow[dr, "u"'] & & Z \\ & F \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

y se cumple $\|u\|\|v\|\chi((f_i)) \leq \chi_u(Z)(1+\varepsilon)$.

Por otro lado, observemos que a partir de esta factorización para cada $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ podemos escribir:

$$z_{\mathbf{j}} = \langle v, u z_{\mathbf{j}}\rangle = \langle v, \sum_{l=1}^{r} \langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle f_l\rangle = \sum_{l=1}^{r} \langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle v f_l.$$

Tal como anticipamos, fijamos $z \in Z$, $z' \in Z'$ y calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle| &= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle||\langle z'_{\mathbf{j}}, z_{\mathbf{j}}\rangle| \\
&= \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle| \left|\sum_{l=1}^{r} \langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z'_{\mathbf{j}}, v f_l\rangle\right| \\
&\leq \sum_{l=1}^{r} \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle||\langle z'_{\mathbf{j}}, v f_l\rangle||\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle| \\
&\leq \sum_{l=1}^{r} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z'_{\mathbf{j}}, v f_l\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle\langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2^m \sum_{l=1}^{r} \int_{\mathbb{T}^n} \left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle\langle z'_{\mathbf{j}}, v f_l\rangle \omega_{j_1}\dots\omega_{j_m}\right| dm(\omega) \\
&\quad \int_{\mathbb{T}^n} \left|\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle\langle f'_l, u z_{\mathbf{j}}\rangle \tilde{\omega}_{j_1}\dots\tilde{\omega}_{j_m}\right| dm(\tilde{\omega}),
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado las desigualdades de Cauchy-Schwarz y de Bayart (2.5) respectivamente, en los últimos dos pasos.

En vista del lema 4.2.7, para $\omega \in \mathbb{T}^n$ definimos el operador $T_\omega : Z \to Z$ como:

$$T_\omega z = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} \omega_{j_1}\dots\omega_{j_m}\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle z_{\mathbf{j}},$$

que verifica $\|T_\omega\| \leq 1$. Gracias a esto, podemos expresar el último término de la desigualdad de arriba como:

$$2^m \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \sum_{l=1}^{r} |\langle v' T'_\omega z', f_l\rangle||\langle f'_l, u T_{\tilde{\omega}} z\rangle| dm(\omega) dm(\tilde{\omega}).$$

Finalmente, esto da:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} |\langle z'_{\mathbf{j}}, z\rangle||\langle z', z_{\mathbf{j}}\rangle| &\leq 2^m \int_{\mathbb{T}^n}\int_{\mathbb{T}^n} \chi((f_i))\|v' T'_\omega z'\|\|u T_{\tilde{\omega}} z\| dm(\omega) dm(\tilde{\omega}) \\
&\leq 2^m \chi((f_i))\|v\|\|u\|\|z'\|\|z\| \\
&\leq 2^m \chi_u(Z)(1+\varepsilon)\|z'\|\|z\|.
\end{aligned}$$

Debido a la igualdad (4.11), deducimos que $\chi((z_{\mathbf{j}})_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)}; Z) \leq 2^m \chi_u(Z)(1+\varepsilon)$ y de ahí se sigue la conclusión deseada. □

Gracias a este resultado, para alcanzar una cota de la constante de incondicionalidad de los monomios nos bastará con estimar la constante de incondicionalidad local de un espacio de Banach. Lograremos esto obteniendo una relación entre esta constante y la constante de proyección de un espacio (1.3.6). El argumento está basado en la demostración de [DF11, Proposición 4.2].

Proposición 4.2.8. *Sea X un espacio de Banach de dimensión finita con base 1-incondicional $(e_k)_{k=1}^n$. Entonces, para cada $m \geq 1$, tenemos:*

$$\chi_u\left(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X\right) \leq e\lambda\left(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X\right).$$

Demostración. Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X \xrightarrow{R} \ell_\infty^N \xrightarrow{S} \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X$ una descomposición de $Id_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X}$. Necesitamos producir a partir de ella una factorización de $Id_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X}$. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\bigotimes\limits_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X \arrow[rr, "Id_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X}"] \arrow[d, "I_{m+1}"'] & & \bigotimes\limits_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X \\
X \bigotimes\limits_{\varepsilon}\left(\bigotimes\limits_{\varepsilon_s}^{m,s} X\right) \arrow[r, "Id_X \bigotimes R"] & X \bigotimes\limits_{\varepsilon_s} l_\infty^N \arrow[r, "Id_X \bigotimes S"] & X \bigotimes\limits_{\varepsilon_s}^{m,s} X, \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

donde I_{m+1}, ϕ están definidas para los tensores elementales por:

$$I_{m+1}(\otimes^{m+1}x) = x \otimes \otimes^m x \ , \ \phi(x \otimes \otimes^m y) = \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} y \otimes \cdots \otimes y \otimes \underbrace{x}_{\text{lugar } j} \otimes y \otimes \cdots \otimes y.$$

Es claro con estas definiciones que el diagrama conmuta (basta con chequearlo en los tensores elementales). Resta ver que ϕ está bien definido. Sea $S_{m+1} : \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1} X \to \bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1} X$ el operador de simetrización (ver Sección 1.2.1 del Capítulo 1). Para ver la buena definición de ϕ, mostramos que S_{m+1} fija $\phi(x \otimes \otimes^m y)$ para cada $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}
S_{m+1}(\phi(x \otimes \otimes^m y)) &= S_{m+1}\left(\frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} y \otimes \cdots \otimes y \otimes x \otimes y \otimes \cdots \otimes y\right) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m+1} S_{m+1}(y \otimes \cdots \otimes y \otimes x \otimes y \otimes \cdots \otimes y) \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m+1!}\sum_{l=1}^{m+1} m! y \otimes \cdots \otimes y \otimes x \otimes y \otimes \cdots \otimes y \\
&= \frac{1}{m+1}\sum_{l=1}^{m+1} y \otimes \cdots \otimes y \otimes x \otimes y \otimes \cdots \otimes y = \phi(x \otimes \otimes^m y).
\end{aligned}$$

Ahora debemos calcular la norma de los operadores involucrados en el diagrama. Por la desigualdad de Harris (1.1.7) sabemos que:

$$\|I_{m+1}\| \leq \frac{1!}{1}\frac{m!}{m}\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq e.$$

Para estimar la norma de ϕ, tomamos $z = \sum_{l=1}^{r} \sum_{k=1}^{s_l} x_l \otimes \otimes^m y_k^l \in X \bigotimes_{\varepsilon} \left(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X \right)$ y calculamos:

$$\phi(z) = \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} y_k^l \otimes \cdots \otimes y_k^l \otimes x_l \otimes y_k^l \otimes \cdots \otimes y_k^l.$$

Elegimos $x' \in B'_X$ y evaluamos la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
|\langle x'^{m+1}, \phi(z)\rangle| &= \left| \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} x'(y_k^l)^m x'(x_l) \right| \\
&= \left| \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} x'(y_k^l)^m x'(x_l) \right| \\
&\leq \sup_{\psi \in B_{X'}, P \in B(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X')} \left| \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} P(y_k^l) \psi(x_l) \right| \\
&= \sup_{\psi \in B_{X'}, P \in B(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X')} |\langle \psi \otimes P, \sum_{l=1}^{t} \sum_{k=1}^{s_l} x_l \otimes \otimes^m y_k^l \rangle| \\
&= \sup_{\psi \in B_{X'}, P \in B(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X')} |\langle \psi \otimes P, z\rangle| = \|z\|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\|\phi\| \leq 1$. Finalmente, utilizando el hecho que la constante de incondicionalidad de $X \bigotimes_{\varepsilon} \ell_\infty^N$ es 1 (ver [Que95, Lema 5]) obtenemos:

$$\| \left(Id_X \otimes R\right) I_{m+1} \| \|\phi \left(Id_X \otimes S\right) \| \chi \left(X \bigotimes_{\varepsilon} l_\infty^N \right) \leq \|R\| \|I_{m+1}\| \|\phi\| \|S\| \leq e \|R\| \|S\|.$$

Como la factorización $SR = Id_{\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X}$ era arbitraria, concluimos debido al Teorema 1.3.7:

$$\chi_u \left(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m+1,s} X \right) \leq e \lambda \left(\bigotimes_{\varepsilon_s}^{m,s} X \right),$$

la afirmación a probar. □

Si combinamos los resultados de las dos proposiciones, podemos establecer la desigualdad:

$$\chi_{\text{mon}} \left(\mathcal{P}(^m X)\right) \leq 2^m e \lambda \left(\mathcal{P}(^{m-1} X)\right), \tag{4.12}$$

que vale para cualquier espacio de Banach X de dimensión finita con base 1-incondicional.

El último paso consiste en estimar la constante de proyección para los espacios de Banach de interés. En el contenido de las siguientes dos proposiciones presentamos una cota de esta constante obtenida por Defant y Frerick en [DF11].

Proposición 4.2.9. *Sean $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $m \in \mathbb{N}$. Definimos para cada multiíndice $|\alpha| = m$:*

$$d_\alpha := \sup \left\{ |a_\alpha| : \sup_{z \in B_X} \left| \sum_{|\beta|=m} a_\beta z^\beta \right| \leq 1 \right\}.$$

Entonces tenemos:

$$\lambda(\mathcal{P}(^m X)) \leq \sup_{\|z\| \leq 1} \sum_{|\alpha|=m} d_\alpha |z^\alpha| =: \mathbf{p}(X).$$

Demostración. Podemos pensar $\mathcal{P}(^m X)$ como un subespacio de $\ell_\infty(B_X)$. Así, el problema se reduce a construir un proyector $P : \ell_\infty(B_X) \to \mathcal{P}(^m X)$ con $\|P\| \leq p(X)$. Consideramos los funcionales $k_\alpha : \mathcal{P}(^m X) \to \mathbb{C}$ dados por $\sum_{|\beta|=m} a_\beta z^\beta \mapsto a_\alpha$ donde $|\alpha| = m$ es un multiíndice. Por la definición de los números d_α, es inmediato que $\|k_\alpha\| = d_\alpha$, $\forall\ |\alpha| = m$. Usando el teorema de Hahn-Banach, los extendemos a funcionales $K_\alpha : \ell_\infty(B_X) \to \mathbb{C}$ con la misma norma. Estamos en condiciones de definir el proyector:

$$P : \ell_\infty(B_X) \to \mathcal{P}(^m X),\ f \mapsto \sum_{|\alpha|=m} K_\alpha(f) z^\alpha.$$

Resta acotar su norma:

$$\begin{aligned} \|P(f)\| = \sup_{\|z\| \leq 1} \left| \sum_{|\alpha|=m} K_\alpha(f) z^\alpha \right| &\leq \sup_{\|z\| \leq 1} \sum_{|\alpha|=m} |K_\alpha(f)||z^\alpha| \\ &\leq \sup_{\|z\| \leq 1} \sum_{|\alpha|=m} d_\alpha \|f\|_\infty |z^\alpha| = \mathbf{p}(X) \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Luego, $\|P\| \leq \mathbf{p}(X)$ y la conclusión se deduce de la definición de constante de proyección (ver 1.3.6). □

Proposición 4.2.10. *Sean $1 < p \leq 2$, $m, n \in \mathbb{N}$. Entonces,*

$$\lambda(\mathcal{P}(^m \ell_p^n)) \leq e^m \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{m\left(1 - \frac{1}{p}\right)}.$$

Demostración. Necesitamos acotar $\mathbf{p}(\ell_p^n) = \sup_{\|z\| \leq 1} \sum_{|\alpha|=m} d_\alpha |z^\alpha|$. De la demostración de 1.4.5, obtenemos que $d_\alpha \leq e^{\frac{m}{p}} \left(\frac{m!}{\alpha!}\right)^{\frac{1}{p}}$. Sea $\|z\| \leq 1$; por la desigualdad de Hölder y la fórmula multinomial de Newton:

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=m} d_\alpha |z^\alpha| &\leq e^{\frac{m}{p}} \sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{m!}{\alpha!}\right)^{\frac{1}{p}} |z^\alpha| \\ &\leq e^{\frac{m}{p}} \left(\sum_{|\alpha|=m} 1 \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} (|z_1|^p, \ldots, |z_n|^p)^\alpha \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= e^{\frac{m}{p}} \binom{n+m-1}{m}^{\frac{1}{p'}} (|z_1|^p + \cdots + |z_n|^p)^m \\ &= e^{\frac{m}{p}} \binom{n+m-1}{m}^{\frac{1}{p'}} \|z\|_{\ell_p^n}^m. \end{aligned}$$

Usando la aproximación de Stirling para el coeficiente binomial, tenemos que

$$\mathbf{p}(\ell_p^n) \leq e^{\frac{m}{p}} e^{\frac{m}{p'}} \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{p'}} = e^m \left(1 + \frac{n}{m}\right)^{\frac{m}{p'}},$$

de donde se sigue inmediatamente la afirmación del enunciado. □

Ahora estamos en condiciones de mostrar la primera cota inferior para el radio de Bohr de $B_{\ell_p^n}$, $1 < p \leq 2$:

Teorema 4.2.11. *Sea* $1 < p \leq 2$. *Entonces,* $\liminf_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}} \geq \frac{1}{2e^{\frac{1}{p}}}$.

Demostración. Combinamos la desigualdad (4.12) con el resultado de 4.2.10 para obtener:

$$\chi_{\mathrm{mon}}\left(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)\right) \leq 2^m e^m \left(1 + \frac{n}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{p'}}.$$

Usaremos esta estimación para probar lo enunciado. Sean $f = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en $B_{\ell_p^n}$ con $\|f\| \leq 1$, $\varepsilon > 0$ y definamos $r := (1-\varepsilon)\frac{1}{2e^{\frac{1}{p}}}\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}$. Como es usual, en primer lugar obtendremos cotas para cada parte m-homogénea ($m \in \mathbb{N}$) del desarrollo de f:

$$\begin{aligned}\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha \omega^\alpha| = \sup_{\epsilon_\alpha \in \mathbb{D}} \left| \sum_{|\alpha|=m} \epsilon_\alpha c_\alpha \omega^\alpha \right| &\leq \chi_{\mathrm{mon}}\left(\mathcal{P}(^m\ell_p^n)\right) \left\| \sum_{|\alpha|=m} c_\alpha z^\alpha \right\| \\ &\leq (1-|c_0|^2) 2^m e^m \left(1 + \frac{n}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{p'}},\end{aligned}$$

donde $\omega \in B_{\ell_p^n}$ es arbitrario y hemos utilizado el lema de Wiener (1.4.2) en el último paso. Entonces, tenemos para el desarrollo original:

$$\sum_\alpha |c_\alpha (r\omega)^\alpha| = |c_0| + \sum_{m\geq 1} \sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha (r\omega)^\alpha| \leq |c_0| + (1-|c_0|^2) \sum_{m\geq 1} r^m 2^m e^m \left(1 + \frac{n}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{p'}}.$$

Empleando a partir de acá la técnica de la demostración de 4.2.2 (es decir, separar la suma en tres términos y acotar cada uno utilizando una estimación apropiada del término $\left(1 + \frac{n}{m-1}\right)$), vemos que si n es suficientemente grande,

$$\sum_\alpha |c_\alpha (r\omega)^\alpha| \leq |c_0| + (1-|c_0|^2) \sum_{m\geq 1} r^m 2^m e^m \left(1 + \frac{n}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{p'}} \leq 1.$$

Por lo tanto, deducimos $\liminf_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log(n)}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}} \geq (1-\varepsilon)\frac{1}{2e^{\frac{1}{p}}}$ y la conclusión se desprende de la arbitrariedad de $\varepsilon > 0$. □

Ahora pasamos al enfoque elemental para obtener una cota inferior, tomado del trabajo [BDS14]. Para ello, necesitaremos introducir un poco más de notación sobre multiíndices. Recordemos de la Sección 1.1 que dados $n, m \in \mathbb{N}$, habíamos llamado:

$$\mathcal{M}(m,n) := \{\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_m) : i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}\},$$

$$\mathcal{J}(m,n) := \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{J}(m,n) : j_1 \leq \ldots j_n\}.$$

Notación 4.2.12. Sea $n, m \in \mathbb{N}$. Escribimos:

$$\mathcal{J}(m) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}(m,n), \ \mathcal{J} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{J}(m).$$

Dado $X = (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, denotaremos por $H^\infty(B_X)$ al espacio de Hardy de funciones holomorfas acotadas en B_X, es decir:

$$H^\infty(B_X) = \{f : B_X \to \mathbb{C} \mid f \text{ holomorfa con } \sup_{z \in B_X} |f(z)| < \infty\}.$$

De esta manera, a cada $f \in H^\infty(B_X)$ la podemos expresar:

$$f = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}} c_{\mathbf{j}}(f) z_{\mathbf{j}}.$$

Para un subconjunto de índices $J \subset \mathcal{J}$, notamos con $\mathcal{P}({}^J X) \subset H^\infty(B_X)$ al subespacio cerrado de funciones f para las cuales $c_{\mathbf{j}}(f) = 0$ si $\mathbf{j} \in \mathcal{J} \setminus J$. Es claro que con esta notación el espacio de polinomios m-homogéneos $\mathcal{P}({}^m X)$ es simplemente $\mathcal{P}({}^{\mathcal{J}(m,n)} X)$.

Finalmente, si $J \subset \mathcal{J}(m)$ llamaremos *conjunto reducido* de J y denotaremos con J^* al conjunto de índices:

$$J^* = \{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1) : \exists\, k \geq 1 \text{ con } (\mathbf{j}, k) \in J\}.$$

Al analizar el proceso seguido para obtener la primera cota inferior, observamos que la relación fundamental está dada por la ecuación (4.12), que conecta la constante de incondicionalidad de la base monomial de los polinomios m-homogéneos de un espacio con la constante de proyección del espacio de polinomios $(m-1)$-homogéneos. Esto nos da en cierto sentido una relación inductiva en las cantidades que deseamos estudiar. El primer paso para obtener la segunda estimación consiste en establecer un análogo de esta relación. Hacemos esto en los siguientes dos lemas.

Lema 4.2.13. *Sean $n, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ y $1 < p \leq 2$. Definimos el operador $Q \in \mathcal{L}\left(\ell_p^n \times \ell_p^n, \mathcal{P}({}^{m-1}\ell_p^n)\right)$ por:*

$$Q(z,w) := \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \left(\sum_{k=1}^n b_{(\mathbf{j},k)} z_{\mathbf{j}} \right) w_k,$$

donde $b_{(\mathbf{j},k)} \in \mathbb{C}$ para $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$, $1 \leq k \leq n$. Entonces

$$\left(\sum_{k=1}^n |b_{(\mathbf{j},k)}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq e^{\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \|Q\|_\infty,$$

siempre que $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$.

Demostración. Sea $w \in B_{\ell_p^n}$. El operador $Q(\cdot, w)$ resulta un polinomio $(m-1)$-homogéneo:

$$Q(z,w) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{(\mathbf{j},k)} w_k \right) z_{\mathbf{j}}.$$

Por la fórmula integral de Cauchy, de acuerdo al Lema 1.4.5 tenemos para sus coeficientes:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} b_{(\mathbf{j},k)} w_k \right| \leq e^{\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \sup_{z \in B_{\ell_p^n}} |Q(z,w)| \leq e^{\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \|Q\|_\infty.$$

La demostración se concluye observando que:

$$\sup_{w \in B_{\ell_p^n}} \left| \sum_{k=1}^{n} b_{(\mathbf{j},k)} w_k \right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{(\mathbf{j},k)}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}. \qquad \square$$

Lema 4.2.14. *Sea* $P = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} a_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} \in \mathcal{P}(^m \ell_p^n)$. *Entonces, para cada* $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)$ *vale:*

$$\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |a_{(\mathbf{j},k)}|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \leq m e^{1+\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \|P\|_\infty.$$

Demostración. Sea $\check{P} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} z_{\mathbf{i}}$ la forma multilineal simétrica asociada a P. Recordemos que la relación entre los coeficientes viene dada por $b_{\mathbf{i}} = \frac{a_{\mathbf{j}}}{|[\mathbf{j}]|}$, donde $\mathbf{i} \sim \mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$. Definimos el operador $Q : \ell_p^n \times \ell_p^n \to \mathcal{P}(^{m-1}\ell_p^n)$ como:

$$Q(z,w) = \check{P}(z, \dots, z, w).$$

Calculamos una expresión para Q:

$$\begin{aligned}
Q(z,w) &= \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m,n)} b_{\mathbf{i}} z_{i_1} \dots z_{i_{m-1}} w_{i_m} \\
&= \sum_{\mathbf{i} \in \mathcal{M}(m-1,n)} \sum_{k=1}^{n} b_{\mathbf{i}} z_{i_1} \dots z_{i_{m-1}} w_k \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \sum_{\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]} \sum_{k=1}^{n} b_{\mathbf{i}} z_{i_1} \dots z_{i_{m-1}} w_k \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\mathbf{i} \in [\mathbf{j}]} b_{\mathbf{i}} z_{i_1} \dots z_{i_{m-1}} \right) w_k \\
&= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n)} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{(\mathbf{j},k)} |[\mathbf{j}]| z_{j_1} \dots z_{j_{m-1}} \right) w_k.
\end{aligned}$$

Ahora, como $|[\mathbf{j},k)]| \leq m|[\mathbf{j}]|$ para $\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)$ tenemos usando el lema anterior:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |a_{(\mathbf{j},k)}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} &= \left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |b_{(\mathbf{j},k)}|[(\mathbf{j},k)]||^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq m \left(\sum_{k=1}^{n} |b_{(\mathbf{j},k)}|[\mathbf{j}]||^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq m e^{\frac{m-1}{p}} |[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} \|Q\|_\infty.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Harris (1.1.7), $\|Q\|_\infty \leq e\|P\|_\infty$ y la conclusión del enunciado se sigue inmediatamente. $\square$

Estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal.

Teorema 4.2.15. *Sean $1 < p \leq 2$, $m,n \in \mathbb{N}$. Si $P = \sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m,n)} a_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}} \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n)$ y $J \subset \mathcal{J}(m,n)$ entonces:*

$$\sum_{\mathbf{j}\in J} |a_{\mathbf{j}}||\omega_{\mathbf{j}}| \leq m e^{1+\frac{m-1}{p}} |J^*|^{1-\frac{1}{p}} \|\omega\|_{\ell_p^n}^m \|P\|_\infty, \tag{4.13}$$

para cualquier $\omega \in \ell_p^n$. En particular para cualquier subconjunto finito $J \subset \mathcal{J}(m)$, vale:

$$\chi_{mon}(\mathcal{P}(^J\ell_p)) \leq m e^{1+\frac{m-1}{p}} |J^*|^{1-\frac{1}{p}}. \tag{4.14}$$

Demostración. Sean $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p^n), J \subset \mathcal{J}(m,n)$ y $\omega \in \ell_p^n$. La prueba consistirá en acomodar los términos de la suma en (4.13) para acotar utilizando la desigualdad de Hölder y después aprovechar el lema anterior. Calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in J} |a_{\mathbf{j}}||\omega_{\mathbf{j}}| &= \sum_{\mathbf{j}\in J^*} \sum_{k:(\mathbf{j},k)\in J} |a_{(\mathbf{j},k)}||\omega_{\mathbf{j}}||\omega_k| \\
&\leq \sum_{\mathbf{j}\in J^*} |\omega_{\mathbf{j}}| \left(\sum_{k=j_{m-1}}^{n} |a_{(\mathbf{j},k)}|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{n} |\omega_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq m e^{1+\frac{m-1}{p}} \|\omega\|_{\ell_p^n} \|P\|_\infty \sum_{\mathbf{j}\in J^*} |\omega_{\mathbf{j}}||[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nos resta trabajar con el término $\sum_{\mathbf{j}\in J^*} |\omega_{\mathbf{j}}||[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}}$. Nuevamente por Hölder:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{j}\in J^*} |\omega_{\mathbf{j}}||[\mathbf{j}]|^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\sum_{\mathbf{j}\in J^*} |[\mathbf{j}]||\omega_{\mathbf{j}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{\mathbf{j}\in J^*} 1\right)^{\frac{1}{p'}} \\
&\leq \left(\sum_{\mathbf{j}\in\mathcal{J}(m-1,n)} |[\mathbf{j}]||\omega_{\mathbf{j}}|^p\right)^{\frac{1}{p}} |J^*|^{\frac{1}{p'}} \\
&= \|\omega\|_{\ell_p^n}^{m-1} |J^*|^{\frac{1}{p'}},
\end{aligned}$$

en donde para el último paso hemos utilizado la fórmula multinomial. Combinando las dos estimaciones, obtenemos:

$$\sum_{\mathbf{j}\in J} |a_{\mathbf{j}}||\omega_{\mathbf{j}}| \leq m e^{1+\frac{m-1}{p}} |J^*|^{1-\frac{1}{p}} \|\omega_{\mathbf{j}}\|_{\ell_p^n}^m \|P\|_\infty.$$

Para concluir a partir de esto la relación (4.14), notemos que cualquier subconjunto finito $J \subset \mathcal{J}(m)$ está contenido en $\mathcal{J}(m,n)$ para algún n apropiado. Luego, todo polinomio $P \in \mathcal{P}({}^J\ell_p^n)$ puede ser visto como un elemento en $\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)$ con la misma norma de donde se deduce inmediatamente la conclusión deseada. □

En vista de nuestros objetivos, desglosaremos un caso particular de (4.14). Tomamos $J = \mathcal{J}(m,n)$ y notamos que $\mathcal{J}(m,n)^* = \mathcal{J}(m-1,n)$. De la estimación de Stirling

$$|\mathcal{J}(m-1,n)| = \binom{n+m-2}{m-1} \leq e^{m-1}\left(1+\frac{n}{m-1}\right)^{m-1},$$

obtenemos:

$$\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)) \leq m e^m \left(1+\frac{n}{m-1}\right)^{\frac{m-1}{p'}}. \tag{4.15}$$

Sabemos por [DDGM01, Teorema 3] que $\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}({}^m\ell_p^n)) \asymp \left(n^{1-\frac{1}{p}}\right)^{m-1}$ con constantes que dependen sólo de m. Es decir, la ecuación (4.15) es óptima respecto del crecimiento en n; su importancia radica en que mejora el crecimiento de las constantes dependientes de m respecto de las estimaciones anteriores.

Imitando la técnica empleada en la demostración de 4.2.11, de la desigualdad (4.15) obtenemos como corolario la siguiente estimación del radio de Bohr, más ajustada que la anterior.

Corolario 4.2.16. *Sea* $1 < p \leq 2$. *Entonces* $\liminf_n \frac{K(B_{\ell_p^n})}{\left(\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{1}{p'}}} \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{p}}}$.

4.2.3. El caso $p = 1$

Tal como mencionamos más arriba, la diferencia fundamental de este caso con los anteriores es que la sucesión $(K(B_{\ell_1^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a 0 porque está acotada entre dos constantes positivas. Presentamos los mejores valores conocidos para estas constantes, siguiendo a [Boa00].

Teorema 4.2.17. *Para* $n \in \mathbb{N}$ *el radio de Bohr* $K(B_{\ell_1^n})$ *admite las siguientes cotas:*

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{e}} \leq K(B_{\ell_1^n}) \leq \frac{1}{3}.$$

Demostración. La cota superior es una consecuencia inmediata de la igualdad $K(B_{\ell_1^1}) = \frac{1}{3}$ (esto es el teorema de Bohr 4.1.1) y del hecho que la sucesión $(K(B_{\ell_1^n}))_{n\in\mathbb{N}}$ es obviamente decreciente. Veamos la otra desigualdad. Tomamos $n \in \mathbb{N}$ y $f = \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha$ holomorfa en $B_{\ell_1^n}$ con $\sup_{z\in B_{\ell_1^n}} |f(z)| < 1$. Por la estimación de Cauchy (Lema 1.4.5), tenemos para los coeficientes de f:

$$|c_\alpha| \leq \frac{|\alpha|^{|\alpha|}}{\alpha^\alpha}.$$

Como esta desigualdad vale para los coeficientes de cualquier función holomorfa con módulo acotado por 1 en $B_{\ell_1^n}$ podemos utilizar el Lema 1.4.4 para mejorar esta estimación por un factor de $(1-|c_0|^2)$. Así, para cada parte m-homogénea del desarrollo de f se cumple:

$$\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha \omega^\alpha| \leq (1-|c_0|^2) \sum_{|\alpha|=m} \frac{m^m}{\alpha^\alpha} |\omega^\alpha|,$$

donde $\omega \in B(\ell_1^n)$. Multiplicando y dividiendo por el coeficiente multinomial $\frac{m!}{\alpha!}$ y observando que $\alpha^\alpha \geq \alpha!$, llegamos a:

$$\sum_{|\alpha|=m} |c_\alpha \omega^\alpha| \leq (1-|c_0|^2)\frac{m^m}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!\alpha!}{\alpha^\alpha \alpha!}|\omega^\alpha| \leq (1-|c_0|^2)\frac{m^m}{m!} \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|\omega^\alpha|.$$

Ahora, como $\sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!}|\omega^\alpha| = \|\omega\|_{\ell_1^n}^m$ tenemos:

$$\sum_{\alpha} |c_\alpha \omega^\alpha| \leq |c_0| + (1-|c_0|^2) \sum_{m\geq 1} \frac{m^m}{m!} \|\omega\|_{\ell_1^n}^m.$$

Para deducir una estimación para el radio de Bohr a partir de esto, recordemos que la función $t \mapsto t + \frac{(1-t^2)}{2}$ está acotada por 1 para $t \in [0,1]$. De esta manera, tenemos que si r es el único real positivo que verifica:

$$\sum_{m\geq 1} \frac{m^m}{m!} r^m = \frac{1}{2}, \tag{4.16}$$

entonces $K(B_{\ell_1^n}) \geq r$. Esta ecuación se puede resolver exactamente recurriendo a la función árbol T proveniente de la combinatoria (ver por ejemplo [Knu97, p.395]) que satisface la ecuación funcional $T(x)e^{-T(x)} = x$ y admite desarrollo en serie de Taylor $T(x) = \sum_{m\geq 1} \frac{m^{m-1}}{m!} x^m$. Gracias a este desarrollo, podemos escribir la igualdad (4.16) en términos de T como $rT'(r) = \frac{1}{2}$. Derivando a ambos lados en la ecuación funcional, obtenemos:

$$xT'(x) = \frac{T(x)}{(1-T(x))}.$$

Se sigue que $T(r) = \frac{1}{3}$ y entonces la ecuación funcional implica $r = \frac{1}{3\sqrt[3]{e}}$, lo que concluye la demostración. $\square$

Capítulo 5

Series y polinomios de Dirichlet

El hilo conductor de la primera sección será el problema de convergencia absoluta de H.Bohr y la resolución dada por F.Bohnenblust y E.Hille. Mostraremos algunos de los importantes resultados sobre la teoría de series y polinomios de Dirichlet obtenidos por Bohr en su investigación, teniendo como principal objetivo indicar el marco en el que surgió la idea del radio de Bohr. A continuación, con la intención de exponer un notable refinamiento de la solución original del problema introduciremos un concepto profundo proveniente del análisis armónico (el de conjuntos y constantes de Sidon) y mostraremos su relación con la incondicionalidad de espacios de polinomios en un caso particular. Para finalizar, desarrollamos una generalización del problema del radio de Bohr en el contexto de las series de Dirichlet expuesta en el artículo [CDG$^+$14]. Destacamos que las series de Dirichlet constituyen uno de los principales objetos de estudio de la teoría analítica de números y que si bien aquí no adoptaremos en general ese punto de vista, precisaremos emplear algunos resultados básicos de esta área para manipularlas. Recopilamos estos resultados en el Apéndice A.

5.1. El punto de vista de Bohr

Una serie de Dirichlet es una serie de la forma:

$$D(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s},$$

donde $a_n \in \mathbb{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s = \sigma + it$ es la variable (compleja) de la serie de Dirichlet. Por analogía con las series de potencias, un polinomio de Dirichlet es simplemente una serie de Dirichlet truncada:

$$Q(s) = \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s}.$$

El conjunto de series de Dirichlet, que denotamos $\mathfrak{D}$, tiene una estructura $\mathbb{C}$-lineal obvia y la llamada *multiplicación de Dirichlet*:

$$\left(\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}\right) \left(\sum_{n \geq 1} b_n n^{-s}\right) = \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{km=n} a_k b_m\right) n^{-s},$$

hace de $\mathfrak{D}$ un álgebra conmutativa unitaria con unidad $\sum_{n\geq 1} \delta_{n1} n^{-s}$.

El ejemplo más famoso de serie de Dirichlet es la función ζ de Riemann:

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}.$$

Es precisamente en el contexto del estudio de esta función (y posiblemente, de la hipotésis de Riemann) que H.Bohr hizo varios aportes al estudio de la convergencia absoluta de series de Dirichlet. Hacemos una breve disgresión para motivar sus primeras definiciones y resultados en este sentido. Las series de Dirichlet pueden verse como un caso particular de las series de Dirichlet generales, que tienen la forma:

$$\sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n s},$$

donde las frecuencias $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forman una sucesión de reales creciente y no acotada. Eligiendo $\lambda_n = \log n$, recuperamos las series de Dirichlet ordinarias. Si tomamos $\lambda_n = n$ y hacemos el cambio de variable $z = e^{-s}$, obtenemos las familiares series de potencias $\sum_{n\geq 1} a_n z^n$. Es bien sabido que estas series convergen en discos y que los radios que definen los discos maximales de convergencia, convergencia absoluta y convergencia uniforme coinciden. En términos de las series de Dirichlet originales, debido a que el cambio $z = e^{-s}$ transforma discos en semiplanos y radios de discos en rectas verticales definidas por una abscisa, tenemos que las series con $\lambda_n = n$ convergen en semiplanos y las abscisas maximales de convergencia, convergencia absoluta y uniforme son iguales. Con esto en mente, definiremos estas tres abscisas de convergencia para series de Dirichlet en $\mathfrak{D}$ (y veremos que la situación es más compleja que lo que sucede en el caso de series de potencias).

Definición 5.1.1. Para una serie de Dirichlet $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$, se definen las siguientes abscisas:

$$\begin{aligned}
\sigma_c(D) &= \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge en } [\text{Re}s > \sigma]\} \\
\sigma_u(D) &= \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge uniformemente en } [\text{Re}s > \sigma]\} \\
\sigma_a(D) &= \text{ínf}\{\sigma \in \mathbb{R} : D \text{ converge absolutamente en } [\text{Re}s > \sigma]\},
\end{aligned}$$

las abscisas de *convergencia, convergencia uniforme* y *convergencia absoluta* de D respectivamente.

Es claro que $-\infty \leq \sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a \leq \infty$. Sin embargo, a diferencia de lo que sucedía para las frecuencias $\lambda_n = n$, estos tres números no necesariamente coinciden.

Ejemplo 5.1.2. Consideremos la serie de Dirichlet $D(s) \sum_{n\geq 1} (-1)^n n^{-s}$. Esta serie converge para cualquier s con $\text{Re}s > 0$, pero converge absolutamente sólo en el semiplano $[\text{Re}s > 1]$. Luego, en este caso $\sigma_c(D) \neq \sigma_a(D)$.

El ejemplo muestra que $\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_c(D) : D \text{ serie de Dirichlet}\} \geq 1$ (y no es difícil ver que en realidad vale la igualdad). El problema de convergencia absoluta de Bohr consiste en calcular:

$$T := \sup\{\sigma_u(D) - \sigma_a(D) : D \text{ serie de Dirichlet}\}.$$

Bohr probó que $T \leq \frac{1}{2}$ en 1913, y no fue sino hasta 1931 que Bohnenblust y Hille [BH31] resolvieron el problema mostrando que $T = \frac{1}{2}$ (recomendamos la iluminadora exposición [DSP14] sobre la resolución de este problema desde un punto de vista moderno). El enfoque adoptado por Bohr fue el de relacionar las abscisas con la función holomorfa que define la serie de Dirichlet en su región de convergencia. Más concretamente, probó el siguiente teorema.

Teorema 5.1.3. *Sea $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet no siempre divergente. Sea $f : [Res > \sigma_c(D)] \to \mathbb{C}$ dada por $f(s) = \sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{n^s}$ su función holomorfa asociada. Supongamos que f se extiende a una función holomorfa y acotada en $[Res > 0]$. Entonces, $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ converge uniformemente en $[Res > \varepsilon]$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Se deduce como corolario la siguiente relación fundamental entre la abscisa de convergencia absoluta de una serie de Dirichlet y la región de acotación de su función asociada.

Corolario 5.1.4. *Sean $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$ una serie de Dirichlet y $f : [Res > \sigma_c(D)] \to \mathbb{C}$ su función holomorfa asociada. Entonces,*

$$\sigma_u(D) = \text{ínf}\{r : f(s) \textit{ es holomorfa y acotada en } [Res > r]\}.$$

En definitiva, el curso de la investigación lo llevó a buscar vínculos entre la convergencia absoluta de una serie de Dirichlet y las regiones donde la función holomorfa asociada es acotada. En este sentido, probó en [Boh13] que para cualquier serie de Dirichlet de la forma $\sum_{p \text{ primo}} a_p p^{-s}$, se verifica la desigualdad:

$$\sum_{p \text{ primo}} |a_p| \leq \sup_{[\text{Re}s>0]} \left| \sum_{p \text{ primo}} a_p p^{-s} \right|. \tag{5.1}$$

Fue exactamente este tipo de consideraciones lo que inspiró a Bohr para formular su pregunta sobre series de potencias de una variable.

El segundo gran aporte fue una manera ingeniosa de relacionar series de Dirichlet con series de potencias en infinitas variables. Si $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ denota como es usual la sucesión de primos en orden y $n \in \mathbb{N}$ se factoriza como $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} = p^\alpha$ cada natural n tiene asignado de manera unívoca un multiíndice α (y viceversa). Esto permite definir una aplicación biyectiva entre el espacio de series formales $\mathfrak{P}$ y las series de Dirichlet $\mathfrak{D}$:

$$\mathfrak{B} : \mathfrak{P} \to \mathfrak{D}$$
$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}} c_\alpha z^\alpha \mapsto \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}$$
$$c_\alpha = a_{p^\alpha}.$$

La aplicación $\mathfrak{B}$ se conoce como *transformada de Bohr* y es claramente un morfismo de álgebras. Bohr caracterizó con precisión la relación entre la abscisa de convergencia uniforme de una serie de Dirichlet y la región donde la serie de potencias asociada es acotada:

Teorema 5.1.5. *Sea D una serie de Dirichlet. Entonces para cada $\delta > 0$, su serie de potencias asociada es acotada en todos los dominios de la forma $|z_n| \leq p_n^{-(\sigma_u(D)+\delta)}$, es decir:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sup_{z\in B_{\ell_\infty^n}} \left| \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^n} c_\alpha \left(p^{(\sigma_u(D)+\delta)} z\right)^\alpha \right| < \infty.$$

Y recíprocamente,

Teorema 5.1.6. *Si la serie de potencias es acotada en la región* $|z_n| \leq p_n^{-\sigma_0}$*, entonces* $\sigma_u(D) \leq \sigma_0$.

Un análisis cuidadoso de las demostraciones de Bohr de estos teoremas permite obtener un isomorfismo isométrico a partir de la transformada de Bohr restringiendo el dominio y el codominio. Para eso, introducimos el álgebra:

$$\mathcal{H}_\infty = \{D \text{ serie de Dirichlet} : \text{la función asociada } f \text{ está definida y es acotada en } [\mathrm{Re}s > 0]\},$$

dotada de la norma supremo

$$\|D\|_\infty = \sup_{[\mathrm{Re}s>0]} |f(s)| = \sup_{[\mathrm{Re}s>0]} \left| \sum_{n\geq 1} a_n \frac{1}{n^s} \right|.$$

Destacamos que el par $(\mathcal{H}_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ constituye un álgebra de Banach. Por otro lado, el espacio de Hardy $H^\infty(B_{c_0})$ de funciones holomorfas y acotadas en B_{c_0} (donde por holomorfa entendemos $\mathbb{C}$-diferenciable Fréchet([CC71]) puede ser identificado con un subespacio de $\mathfrak{P}$ por medio de la asignación $f \mapsto (c_\alpha(f))_{\alpha\in\mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}}$ para cada $f \in H^\infty(B_{c_0})$. Recordemos que en $H^\infty(B_{c_0})$ la norma de una función g viene dada por $\|g\|_\infty = \sup_{z\in B_{c_0}} |f(z)|$.

Un resultado probado en [HLS97] asegura que la transformada $\mathfrak{B}$ se restringe bien a estas álgebras:

Teorema 5.1.7. *La aplicación* $\mathfrak{B} : H^\infty(B_{c_0}) \to \mathcal{H}_\infty$ *está bien definida y es un isomorfismo isométrico.*

Damos un bosquejo de la demostración.

Demostración. Alcanza con probar que para cualquier $N \in \mathbb{N}$ y complejos $a_1, \ldots, a_N$ se tiene:

$$\sup_{[\mathrm{Re}s>0]} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \right| = \sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha\in\Lambda_N} a_{p^\alpha} z^\alpha \right|,$$

donde $\Lambda_N := \{\alpha : 1 \leq p^\alpha \leq N\}$. El primer paso consiste en reemplazar los conjuntos sobre los que se toma supremo en ambos términos por sus bordes usando análogos del principio de módulo máximo. Por un lado, para polinomios de Dirichlet vale:

$$\sup_{[\mathrm{Re}s>0]} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-s} \right| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \right|.$$

Aplicando el principio del módulo máximo e inducción no es difícil ver que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}^N} \left| \sum_{\alpha\in\Lambda_N} a_{p^\alpha} z^\alpha \right| = \sup_{w\in\mathbb{T}^N} \left| \sum_{\alpha\in\Lambda_N} a_{p^\alpha} w^\alpha \right|.$$

Ahora, el resultado se sigue de una consecuencia del clásico teorema de aproximaciones diofánticas de Kronecker: el conjunto $\{(p_1^{-it}, \dots, p_N^{-it}) : t \in \mathbb{R}\}$ es denso en $\mathbb{T}^N$. En efecto, si para cada $1 \leq n \leq N$ escribimos $n = p_1^{\alpha_1(n)} \dots p_k^{\alpha_k(n)}$ entonces:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} = \sum_{n=1}^{N} a_n p_1^{-\alpha_1(n)it} \dots p_k^{-\alpha_k(n)it} = \sum_{\alpha \in \Lambda_N} a_{p^\alpha} (p_1^{-it})^{\alpha_1} \dots (p_k^{-it})^{\alpha_k}.$$

Por densidad,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-it} \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda_N} a_{p^\alpha} (p_1^{-it})^{\alpha_1} \dots (p_k^{-it})^{\alpha_k} \right| = \sup_{w \in \mathbb{T}^N} \left| \sum_{\alpha \in \Lambda_N} a_{p^\alpha} w^\alpha \right|,$$

lo cual concluye la demostración. $\square$

Como consecuencia de este resultado, muchas de las técnicas e ideas empleadas para trabajar con series de potencias y polinomios admiten traducciones inmediatas en términos de series y polinomios de Dirichlet. No sólo utilizaremos resultados concretos (como las estimaciones de Cauchy para los coeficientes, la desigualdad de Bohnenblust-Hille, etc.) sino que adoptaremos una idea que resulta particularmente fructífera y es natural en series de potencias: la de descomposición en suma de polinomios m-homogéneos. Para lograr eso, si n es un número natural con factorización en primos $n = p^\alpha$, definimos $\Omega(n) := |\alpha|$. Es decir, $\Omega(n)$ es la cantidad de primos que aparecen en la factorización de n contados con multiplicidad (por ejemplo, $\Omega(n) = 1$ si y sólo si es primo y $\Omega(4) = 2$). Entonces, una serie de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}$ puede descomponerse como:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\Omega(n)=1} \frac{a_n}{n^s} + \sum_{\Omega(n)=2} \frac{a_n}{n^s} + \dots = \sum_{m \geq 1} \sum_{\Omega(n)=m} \frac{a_n}{n^s}.$$

Llamamos serie de Dirichlet m-homogénea a cada uno de los términos $\sum_{\Omega(n)=m} \frac{a_n}{n^s}$ y notamos con $\mathfrak{D}_m$ al conjunto de todas estas series (observemos que, como era de esperar, se corresponden con los polinomios m-homogéneos en c_0 vía la transformada de Bohr). Precisamente una de las ideas claves de Bohnenblust y Hille para resolver el problema de convergencia absoluta de Bohr fue graduar el número T sobre las series m-homogéneas, es decir, considerar:

$$T_m := \sup\{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : D \in \mathfrak{D}_m\}.$$

Finalmente, probaron que $T_m = \frac{m-1}{2m}$ cerrando el problema dado que $\sup_{m \in \mathbb{N}} T_m \leq T \leq \frac{1}{2}$.

5.2. Constantes de Sidon

La solución del problema de convergencia absoluta de Bohr nos dice:

$$\sup\{\sigma_a(D) - \sigma_u(D) : D \in \mathfrak{D}\} = \sup\{\sigma_a(D) : D \in \mathcal{H}_\infty\} = \frac{1}{2}.$$

Esto implica que para cualquier serie de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ y cada $\varepsilon > 0$ tenemos:

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \frac{1}{n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} < \infty.$$

Una inquietud que surge naturalmente es intentar averiguar el comportamiento de las series a medida que nos acercamos a la recta $\mathrm{Re}s = \frac{1}{2}$, y en particular, si vale la acotación de arriba cuando $\varepsilon = 0$. Mostraremos un resultado muy preciso sobre este comportamiento que nos permitirá, entre otras cosas, responder afirmativamente la última cuestión. Iniciamos su preparación introduciendo un concepto clásico: el de constante de Sidon de un conjunto. Resultará clara la estrecha relación del estudio de estas constantes en algunos casos particulares con varios de los conceptos y técnicas desarrolladas en este trabajo.

Definición 5.2.1. Dado un grupo compacto G, se define la constante de Sidon de un conjunto finito $\mathcal{C}$ de caracteres γ (es decir, $\gamma : G \to \mathbb{T}$ morfismo de grupos continuo) como la constante óptima $C \geq 0$ tal que para cualquier familia de escalares $(c_\gamma)_{\gamma\in\mathcal{C}}$ se satisface:

$$\sum_{\gamma\in\mathcal{C}} |c_\gamma| \leq C \left\| \sum_{\gamma\in\mathcal{C}} c_\gamma \gamma \right\|_\infty .$$

A dicha constante la notamos $\mathcal{S}(\mathcal{C}; G)$.

Una aplicación directa de la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que:

$$1 \leq \mathcal{S}(\mathcal{C}; G) \leq |\mathcal{C}|^{\frac{1}{2}}.$$

Nuestro caso de particular interés son los grupos circulares $\mathbb{T}^n, \mathbb{T}^\infty$. Recordemos que para $x \in \mathbb{N}$ habíamos definido en la demostración de 5.1.7 el conjunto de índices $\Lambda_x = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})} : 1 \leq p^\alpha \leq x\}$. Podemos interpretar el conjunto de monomios $(z^\alpha)_{\alpha\in\Lambda_x}$ como caracteres en $\mathbb{T}^\infty$. Gracias a esto, la constante de Sidon de este conjunto tiene una expresión en términos de polinomios de Dirichlet. Dado un polinomio de Dirichlet

$$Q(s) = \sum_{n\leq x} a_n n^{-s},$$

definimos $\|Q\|_\infty := \sup_{[\mathrm{Re}s>0]} |Q(s)|$ (esto es, su norma como serie de Dirichlet) y $\|Q\|_1 := \sum_{n\leq x} |a_n|$. Entonces, por definición $\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_x}; \mathbb{T}^\infty)$ es la menor constante positiva C tal que la desigualdad

$$\|Q\|_1 \leq C\|Q\|_\infty \tag{5.2}$$

vale para todo polinomio Q.

Debido a un sorprendente resultado de S.Konyagin y H.Queffeléc [KQ01] y posteriores refinamientos obtenidos en [dLB08, DFOC$^+$11] es conocido el comportamiento asintótico exacto de esta constante, que será fundamental para resolver la pregunta que abrió la sección.

Introducimos la función π *contador de primos* antes de enunciarlo. Dado un real x definimos $\pi(x)$ como la cantidad de números primos menores o iguales que x. El famoso teorema de los números primos, conjeturado por Gauss en su adolescencia y probado independientemente por de la Vallée-Poussin y Hadamard en 1896 [VP96, Had96] da el orden asintótico de esta función:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1. \tag{5.3}$$

Teorema 5.2.2. *Se verifica que*

$$\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_x};\mathbb{T}^\infty) = \sqrt{x}\exp\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\right)\sqrt{\log x\log\log x}\right\}$$

cuando $N\to\infty$. *Esto es, existe una función* $a:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}$ *con* $\lim_{x\to\infty} a(x)=0$ *tal que:*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_x};\mathbb{T}^\infty)}{\sqrt{x}\exp\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+a(x)\right)\sqrt{\log x\log\log x}\right\}} = 1.$$

Demostración. **Cota superior.** La idea básica consiste en reacomodar de forma ingeniosa los términos de la suma de valores absolutos de los coeficientes de un polinomio de Dirichlet para luego poder utilizar algunos resultados de teoría analítica de números sobre el tamaño de ciertos conjuntos. Esta técnica es llamada a veces método de Konyagin-Queffeléc. Fijemos un natural $x\geq 2$ y tomemos un real $0<y\leq x$, que será un parámetro sobre el que más tarde optimizaremos. Dado $n\in\mathbb{N}$, notamos $P^+(n)$, $P^-(n)$ al máximo y mínimo primo en la factorización de n respectivamente. Consideremos los conjuntos:

$$S(x,y)=\{n\leq x : P^+(n)\leq y\},$$
$$T(x,y)=\{n\leq x : P^-(n)> y\}.$$

También necesitaremos graduar el conjunto $T(x,y)$. Es decir, para $m\in\mathbb{N}$, definimos

$$T_m(x,y)=\{n\in T(x,y):\Omega(n)=m\}.$$

Es fácil ver que cualquier natural $2\leq n\leq x$ admite una factorización única de la forma $n=k\ell$ con $k\in S(x,y)$, $\ell\in T(x,y)$. En efecto, si la factorización en primos de n es $n=p^\alpha=p_1^{\alpha_1}\dots p_N^{\alpha_N}$ tenemos:

$$k=p_1^{\alpha_1}\dots p_{\pi(y)}^{\alpha_{\pi(y)}}\ ,\ \ell=p_{\pi(y)+1}^{\alpha_{\pi(y)+1}}\dots p_N^{\alpha_N}.$$

Obviamente $\ell=\frac{n}{k}\leq\frac{x}{k}$, es decir, $\ell\in T\left(\frac{x}{k},y\right)$. Teniendo en cuenta esto, dado un polinomio de Dirichlet $\sum_{n\leq x}a_n n^{-s}$ podemos escribir:

$$\sum_{n\leq x}|a_n| = \sum_{k\in S(x,y)}\ \sum_{\ell\in T\left(\frac{x}{k},y\right)}|a_{k\ell}| = \sum_{k\in S(x,y)}\sum_{m}\ \sum_{\ell\in T_m\left(\frac{x}{k},y\right)}|a_{k\ell}|.$$

Pero ciertamente el conjunto $T_m\left(\frac{x}{k},y\right)$ es vacío para $m>\frac{\log x}{\log 2}$ y en consecuencia

$$\sum_{n\leq x}|a_n|\leq |S(x,y)|\sup_{k\in S(x,y)}\left(\sum_{m\leq\frac{\log x}{\log 2}}\ \sum_{\ell\in T_m\left(\frac{x}{k},y\right)}|a_{k\ell}|\right).$$

Nos concentramos por un momento en el lado derecho de la desigualdad. Aplicando Hölder y luego la desigualdad polinomial de Bohnenblust-Hille (2.2.5), vemos que existe una constante

$C \geq 1$ tal que para cada m,

$$\sum_{\ell \in T_m\left(\frac{x}{k}, y\right)} |a_{k\ell}| \leq \left(\sum_{\ell \in T_m\left(\frac{x}{k}, y\right)} 1 \right)^{\frac{m-1}{2m}} \left(\sum_{\ell \in T_m\left(\frac{x}{k}, y\right)} |a_{k\ell}|^{\frac{2m}{m+1}} \right)^{\frac{m+1}{2m}} \tag{5.4}$$

$$\leq C^m \left| T_m \left(\frac{x}{k}, y \right) \right|^{\frac{m-1}{2m}} \left\| \sum_{\ell \in T_m\left(\frac{x}{k}, y\right)} a_{k\ell} \ell^{-s} \right\|_\infty .$$

Por la fórmula integral de Cauchy vía la transformada de Bohr,

$$\left\| \sum_{\ell \in T_m\left(\frac{x}{k}, y\right)} a_{k\ell} \ell^{-s} \right\|_\infty \leq \left\| \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} \right\|_\infty .$$

Finalmente, reemplazando obtenemos:

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \leq |S(x,y)| \sup_{k \in S(x,y)} \left(\sum_{m \leq \frac{\log x}{\log 2}} C^m \left| T_m \left(\frac{x}{k}, y \right) \right|^{\frac{m-1}{2m}} \right) \left\| \sum_{x \leq n} a_n n^{-s} \right\|_\infty .$$

Ahora, empleando los resultados A.0.5 y A.0.8 del apéndice A tenemos que:

$$|S(x,y)| \leq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^{\pi(y)} \text{ y } \left| T_m \left(\frac{x}{k}, y \right) \right| \leq 2^m \frac{x}{k} y^{-m} \exp\left(y (\log \log \frac{x}{k} + c) \right) \left\| \sum_{x \leq n} a_n n^{-s} \right\|_\infty ,$$

con $c > 0$ constante independiente de x y m. Por lo tanto, resulta (cambiando el valor de la constante C)

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \leq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^{\pi(y)+1} \sup_{m \leq \frac{\log x}{\log 2}} C^m \left(x y^{-m} \exp\left(y \left(\log \log x + c \right) \right) \right)^{\frac{m-1}{2m}} . \tag{5.5}$$

Controlamos cada factor antes de darle un valor al parámetro libre y:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^{\pi(y)+1} &\leq \exp\left((\pi(y)+1) \log \left(\frac{2}{\log 2} \log x \right) \right) \\ C^m \left(x y^{-m} \exp\left(y (\log \log x + c) \right) \right)^{\frac{m-1}{2m}} &= \sqrt{x} \sqrt{y} \exp\left(\frac{m-1}{2m} y (\log \log x + c) \right) \left(C^m x^{\frac{-1}{m}} y^{-m} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{x} \sqrt{y} \exp\left(\frac{1}{2} y (\log \log x + c) \right) \left(C^m x^{\frac{-1}{m}} y^{-m} \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donde nuevamente hemos cambiado el valor de la constante C. Tomamos $y = \frac{\sqrt{\log x}}{\log \log x}$. Como $\pi(y) \sim \frac{y}{\log y}$ por el teorema de los números primos (5.3), con esta elección resulta $\pi(y) = o(1) \frac{\sqrt{\log x}}{\log \log x}$ y luego

$$\exp\left((\pi(y)+1) \log \left(\frac{2}{\log 2} \log x \right) \right) = \exp\left(o(1) \sqrt{\log x \log \log x} \right).$$

Operando, vemos que también resulta $\sqrt{y}\exp\left(\frac{1}{2}y(\log\log x + c)\right) = \exp\left(o(1)\sqrt{\log x \log\log x}\right)$ y por lo tanto el lado derecho de (5.5) está acotado por

$$\exp\left(o(1)\sqrt{\log x \log\log x}\right)\sup_{m\in\mathbb{N}}(C^m x^{\frac{-1}{m}} y^{-m})^{\frac{1}{2}}.$$

Nos resta estimar la expresión dentro del supremo. Con tal fin escribimos

$$C^m x^{\frac{-1}{m}} y^{-m} = \exp\left(h_{x,y}(m)\right)$$

(es decir, $h_{x,y}(m) = m\log C - \frac{1}{m}\log x - m\log y$) y optimizamos sobre m. Derivando la función $h_{x,y}$ respecto de m, es fácil ver que alcanza su máximo en

$$M = \sqrt{\frac{\log x}{\log y - \log C}} \geq \sqrt{\frac{\log x}{\log y}}.$$

En consecuencia, para cada m se tiene

$$h_{x,y}(m) \leq h_{x,y}(M) \leq \log C\sqrt{\frac{\log x}{\log y - \log C}} - \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\log C}{\log y}}\right)\sqrt{\log x \log y}.$$

Del hecho que $\log C\sqrt{\frac{\log x}{\log y - \log C}} = o(1)\sqrt{\log x \log\log x}$ se sigue que

$$\sup_m C^m x^{\frac{-1}{m}} y^{-m} \leq \exp\left(-2\sqrt{\frac{1}{2}} + o(1)\sqrt{\log x \log\log x}\right),$$

lo que concluye esta parte.

Cota inferior. La estrategia para mostrar la cota inferior será estimar una cantidad relacionada con la constante de Sidon $\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\lambda_x};\mathbb{T}^\infty)$, que se obtiene de cambiar la norma supremo por un promedio en la definición (5.2). Formalmente, dado $x \in \mathbb{N}$ definimos $\mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}}$ como la constante óptima C tal que para cualquier polinomio de Dirichlet $\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}$ se tiene

$$\sum_{n\leq x}|a_n| \leq C\int_0^1 \left\|\sum_{n\leq x} r_n(t) a_n n^{-s}\right\|_\infty dt,$$

donde $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es el sistema de Rademacher de funciones en $[0,1]$.

Para cada $t \in [0,1]$ fijo y polinomio de Dirichlet $\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}$, por (5.2) vale

$$\sum_{n\leq x}|a_n| \leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\lambda_x};\mathbb{T}^\infty)\left\|\sum_{n\leq x} r_n(t) a_n n^{-s}\right\|_\infty.$$

Integrando esta desigualdad concluimos

$$\mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} \leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\lambda_x};\mathbb{T}^\infty).$$

Controlamos ahora $\mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}}$. Fijemos un natural $x > 2$ y un real $2 < y \leq x$. De igual manera que en la cota superior, más adelante optimizaremos sobre el parámetro y usando teoría analítica de números. Definimos el polinomio de Dirichet

$$Q_{x,y} = \sum_{\mathbf{j} \in J^-(x;y)} \frac{1}{p_{\mathbf{j}}^s}.$$

Por la definición del conjunto $J^-(x;y)$, este polinomio tiene coeficientes no nulos sólo en el rango $n \leq x$. Aplicando la transformada de Bohr, debido a 5.1.7 tenemos

$$\int_0^1 \left\| \sum_{\mathbf{j} \in J^-(x;y)} r_{p_{\mathbf{j}}}(t) \frac{1}{p_{\mathbf{j}}^s} \right\|_\infty dt \leq \int_0^1 \sup_{z \in \mathbb{T}^{\pi(y)}} \left| \sum_{\mathbf{j} \in J^-(x;y)} r_{p_{\mathbf{j}}}(t) z_{\mathbf{j}} \right| dt.$$

La forma integral de la desigualdad de Kahane-Salem-Zygmund (3.1) aplicada al lado derecho implica

$$\int_0^1 \left\| \sum_{\mathbf{j} \in J^-(x;y)} r_{p_{\mathbf{j}}}(t) \frac{1}{p_{\mathbf{j}}^s} \right\|_\infty dt \leq K \sqrt{\pi(y) |J^-(x;y)| \log\log x},$$

para cierta constante $K > 0$ independiente de x y de y. Por la definición de $\mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}}$,

$$\sum_{\mathbf{j} \in J^-(x;y)} 1 = |J^-(x;y)| \leq \mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} K \sqrt{\pi(y) |J^-(x;y)| \log\log x} \leq \mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} K \sqrt{y |J^-(x;y)| \log\log x}.$$

A partir de ahora sólo resta elegir el valor de y y estimar $|J^-(x;y)|$ usando la Proposición A.0.11. Tomamos $y = e^{\alpha\sqrt{\log x \log\log x}}$ con $\alpha > 0$ a determinar. Definimos:

$$u := \frac{\log x}{\log y} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\log x}{\log\log x}}.$$

Una verificación simple muestra que

$$u \log u = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\log x \log\log x}(1 + o(1)). \tag{5.6}$$

Como el valor de y elegido satisface la hipótesis en A.0.11 (tomar por ejemplo $\varepsilon = 1$), deducimos:

$$\mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} \geq K_1 \sqrt{\frac{x}{\log\log x}} \sqrt{\frac{\varrho(u)}{y}} = K_1 \sqrt{\frac{x}{\log\log x}} \exp\left(\frac{1}{2} \log \varrho(u)\right) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \sqrt{\log x \log\log x}\right).$$

Aplicando la segunda afirmación de A.0.11 para estimar el término $\log \varrho(u)$ y la ecuación (5.6), deducimos que existe otra constante positiva K_2 para la cual

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} &\geq K_2 \sqrt{\frac{x}{\log\log x}} \exp\left(-\left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2} + o(1)\right) \sqrt{\log x \log\log x}\right) \\ &= K_2 \sqrt{x} \exp\left(-\left(\frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2} + o(1)\right) \sqrt{\log x \log\log x}\right). \end{aligned}$$

Finalmente, si minimizamos $\frac{1}{4\alpha} + \frac{\alpha}{2}$ sobre α descubrimos que el parámetro óptimo es $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y así:

$$\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\lambda_x}; \mathbb{T}^\infty) \geq \mathcal{S}_x^{\mathrm{rad}} \geq K_2\sqrt{x}\exp\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1)\right)\sqrt{\log x \log\log x}\right).$$

La estimación inferior queda probada. $\square$

De este resultado se desprende un interesante refinamiento de la solución del problema de convergencia absoluta de Bohr:

Corolario 5.2.3. *Sean* $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$ *una serie de Dirichlet y* $0 \leq c < \frac{1}{\sqrt{2}}$ *un real. Entonces,*

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \frac{e^{c\sqrt{\log n \log\log n}}}{n^{\frac{1}{2}}} < \infty.$$

Además, la constante $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *es óptima.*

Necesitamos un lema auxiliar antes de proceder con la demostración del corolario. Para una prueba del lema, referimos a [BCQ06]:

Lema 5.2.4. *Sea* $D(s) = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty$*. Entonces, existe una constante* $C > 0$ *tal que para todo entero* $x \geq 2$ *vale*

$$\left\|\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}\right\|_\infty \leq C\log x \left\|\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s}\right\|_\infty.$$

Demostración. (del Corolario 5.2.3) Sea $\varepsilon > 0$. Dado que la sucesión $\left(e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon\right)\sqrt{\log n \log\log n}} n^{\frac{-1}{2}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente a partir de un cierto n_0, alcanza con mostrar:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon\right)\sqrt{\log 2^k \log\log 2^k}}}{2^{\frac{k}{2}}} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}} |a_n| < \infty.$$

Aplicando el Teorema 5.2.2 y después el lema auxiliar,

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon\right)\sqrt{\log 2^k \log\log 2^k}}}{2^{\frac{k}{2}}} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}} |a_n| &\leq \sum_{k\geq 0} \frac{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\varepsilon\right)\sqrt{\log 2^k \log\log 2^k}}}{e^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+o(1)\right)\sqrt{\log 2^{k+1}\log\log 2^{k+1}}}} \left\|\sum_{n\leq 2^{k+1}} \frac{a_n}{n^s}\right\|_\infty \\ &\leq C\left\|\sum_{n\geq 1}\frac{a_n}{n^s}\right\|_\infty \sum_{k\geq 0} \frac{k+1}{e^{\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{k\log k}}} < \infty.\end{aligned}$$

No probaremos aquí la optimalidad de la constante $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Referimos a [DFOC+11, Sección 5], donde la conclusión es obtenida a partir del Teorema 5.2.2 y una construcción de [dLB08]. $\square$

5.2.1. El caso homogéneo

Como mencionamos más arriba, Bohnenblust y Hille resolvieron el problema del cálculo de T al demostrar que para cada $m \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{D \in \mathfrak{D}_m} \sigma_a(D) - \sigma_u(D) = \frac{m-1}{2m}. \tag{5.7}$$

Si denotamos con $\mathcal{H}_\infty^m \subset \mathcal{H}_\infty$ al subespacio de $\mathcal{H}_\infty$ formado por las series de Dirichlet m-homogéneas, la igualdad (5.7) implica que para cada serie de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^m$ y $\varepsilon > 0$ se cumple

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \frac{1}{n^{\frac{m-1}{2m}+\varepsilon}} < \infty.$$

Con la misma motivación que antes, repetimos el camino recorrido en la sección anterior.

Dados naturales m, x definimos el conjunto de índices

$$\Lambda_m(x) = \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}} : |\alpha| = m, 1 \leq p^\alpha \leq x\}.$$

Como antes, el conjunto de monomios $(z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_m(x)}$ puede ser considerado como un conjunto de caracteres en $\mathbb{T}^\infty$. De esta manera, la constante de Sidon de este conjunto, $\mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty)$ coincide con la menor constante C tal que se verifica

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=m}} |a_n| \leq C \left\| \sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=m}} a_n n^{-s} \right\|_\infty,$$

para cualquier polinomio de Dirichlet m-homogéneo $\displaystyle\sum_{\substack{n \leq x \\ \Omega(n)=m}} a_n n^{-s}$.

Un resultado esencialmente contenido en [BCQ06] determina el orden asintótico exacto de la constante de Sidon de estos conjuntos.

Teorema 5.2.5. *Sean $m, x \geq 2 \in \mathbb{N}$. Existen constantes $c_m, C_m > 0$ que sólo dependen de m tales que:*

$$c_m \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}} \leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty) \leq C_m \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}}.$$

Para dar la demostración precisaremos un lema previo que se deduce mediante el procedimiento utilizando en (2.15) reemplazando la aplicación de la desigualdad de Helson (2.6) por la de Bayart (2.5) y por lo tanto omitiremos su prueba.

Lema 5.2.6. *Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y $P = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m,n)} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}}$ un polinomio m-homogéneo en $\mathbb{C}^n$. Entonces,*

$$\sum_{j_m=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1,n) \\ j_{m-1} \leq j_m}} |c_{(\mathbf{j}, j_m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq em\sqrt{2}^{m-1} \sup_{z \in \mathbb{D}^n} |P(z)|.$$

Demostración. (del Teorema 5.2.5)

Cota superior. Vamos a mostrar que existe una constante universal K_m tal que dado cualquier $Q = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s}$ polinomio de Dirichlet m-homogéneo, tenemos

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} \leq K_m \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n \leq x} a_n n^{it} \right| \tag{5.8}$$

Consideramos el polinomio $P \in \mathcal{P}({}^m \ell_\infty^{\pi(x)})$ que se corresponde con Q a través de la transformada de Bohr, es decir, $\mathfrak{B}(P) = Q$. Lo llamaremos *el levantado de Bohr de* Q. Escribimos

$$P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m, \pi(x))} c_{\mathbf{j}} z_{\mathbf{j}},$$

donde los coeficientes cumplen $c_{\mathbf{j}} = a_n$ siempre que $1 \leq n = p_{j_1} \dots p_{j_m} \leq x$ y son nulos en otro caso. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} &= \sum_{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m, \pi(x))} |c_{\mathbf{j}}| \frac{(\log (p_{j_1} \dots p_{j_m})^{\frac{m-1}{2}}}{(p_{j_1} \dots p_{j_m})^{\frac{m-1}{2m}}} \\
&\leq \sum_{j_m=1}^{\pi(x)} \frac{(m \log p_{j_m})^{\frac{m-1}{2}}}{p_{j_m}^{\frac{m-1}{2m}}} \sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, \pi(x)) \\ j_{m-1} \leq j_m}} \frac{|c_{(\mathbf{j}, j_m)}|}{(p_{j_1} \dots p_{j_m})^{\frac{m-1}{2m}}} \\
&\leq \sum_{j_m=1}^{\pi(x)} \frac{(m \log p_{j_m})^{\frac{m-1}{2}}}{p_{j_m}^{\frac{m-1}{2m}}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, \pi(x)) \\ j_{m-1} \leq j_m}} |c_{(\mathbf{j}, j_m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, \pi(x)) \\ j_{m-1} \leq j_m}} \frac{1}{(p_{\mathbf{j}})^{\frac{m-1}{m}}} \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

donde aplicamos Cauchy-Schwarz en el último paso. Ahora haremos uso una vez más de una herramienta proveniente de la teoría analítica de números (ver [Pra57], p.22): para cada $0 < \lambda < 1$, existe una constante C tal que

$$\sum_{p \leq x,\ p \text{ primo}} p^{-\lambda} \leq C \frac{1}{1-\lambda} \frac{x^{1-\lambda}}{\log x}.$$

Tomando $\lambda = \frac{m-1}{m}$, podemos acotar el último factor:

$$\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, \pi(x)) \\ j_{m-1} \leq j_m}} \frac{1}{(p_{j_1} \dots p_{j_{m-1}})^{\frac{m-1}{m}}} \leq \left(\sum_{j \leq j_m} \left(\frac{1}{p_j} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right)^{\frac{m-1}{2}} \leq C^{\frac{m-1}{2}} \left(m \frac{p_{j_m}^{\frac{1}{m}}}{\log p_{j_m}} \right)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Usando esto y el Lema 5.2.6, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} &\leq C^{\frac{m-1}{2}} m^{m-1} \sum_{j_m=1}^{\pi(x)} \frac{(\log p_{j_m})^{\frac{m-1}{2}}}{p_{j_m}^{\frac{m-1}{2m}}} \left(\frac{p_{j_m}^{\frac{1}{m}}}{\log p_{j_m}} \right)^{\frac{m-1}{2}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m-1, \pi(x)) \\ j_{m-1} \leq j_m}} |c_{(\mathbf{j}, j_m)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C^{\frac{m-1}{2}} m^m e \sqrt{2}^{m-1} \|P\|_\infty.
\end{aligned}$$

Como la transformada de Bohr $\mathfrak{B}$ es una isometría, esto prueba (5.8). A partir de aquí se deduce fácilmente la cota superior pues la sucesión $\left(\frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ decrece con n.

Cota inferior. Para ver la otra desigualdad, utilizaremos un argumento probabilístico. La idea es deducir la existencia de un polinomio de Dirichlet apropiado mediante el teorema de Kahane-Salem-Zygmund (3.2) y la transformada de Bohr. Para eso, tenemos que elegir de manera adecuada la cantidad de variables y un conjunto de índices. Fijamos en natural x. Usaremos $N := \pi(x^{\frac{1}{m}})$ variables y el conjunto de índices:

$$I = \{n = p_{i_1} \dots p_{i_m} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq N\}.$$

De esta forma, para $n \in I$ tenemos $n \leq p_{i_m}^m \leq x$. Definimos un polinomio de Dirichlet m-homogéneo aleatorio de la siguiente manera. Tomamos variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas Rademacher ϵ_n para cada $1 \leq n \leq x$ y elegimos $a_n = 1$ para $n \in I$ y 0 en otro caso. Entonces, para cada $\omega \in [0,1]$ tenemos el polinomio de Dirichlet:

$$Q_\omega = \sum_{n\leq x} \epsilon_n(\omega) a_n n^{-s}.$$

Por definición de la constante de Sidon, sabemos $|I| = \sum_{n\leq x} |a_n| \leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty)\|Q_\omega\|_\infty$ para cada ω. Si P_ω es el levantado de Bohr de Q_ω, por Kahane-Salem-Zygmund, existe ω_0 tal que:

$$\begin{aligned} |I| &\leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty)\|Q_{\omega_0}\|_\infty = \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty)\|P_{\omega_0}\|_\infty \\ &\leq \mathcal{S}((z_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_m(x)}, \mathbb{T}^\infty) C\sqrt{|I| N \log m}. \end{aligned}$$

Por el teorema de los números primos (5.3), $N \sim \frac{x^{\frac{1}{m}}}{\log x}$. Por otro lado, $|I| = \binom{N}{m} \sim \frac{N^m}{m!} \sim \frac{x}{(\log x)^m}$. ☐

Podemos ahora describir el comportamiento de las series de Dirichlet m-homogéneas cuando nos acercamos a la recta $\mathrm{Re}s = \frac{m-1}{2m}$.

Corolario 5.2.7. *Sea $m \in \mathbb{N}$. Para cada serie de Dirichlet m-homogénea $\sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^m$, vale*

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} < \infty.$$

Además, el exponente en el término logarítmico es óptimo.

Demostración. Sea $D = \sum_{n\geq 1} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^m$ una serie de Dirichet m-homogénea. La estrategia para probar la primera afirmación será dar una cota uniforme para todas las sumas $\sum_{n\leq x} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}}$ aplicando el resultado anterior. Para lograr esto, en primer lugar precisamos aproximar la serie por un polinomio de Dirichlet m-homogéneo. La herramienta que nos permite lograrlo es el Teorema 5.1.3. En efecto, como por 5.1.3 la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s}$ converge uniformemente en $[\mathrm{Re}s > \varepsilon]$ para cada $\varepsilon > 0$, entonces existe un natural $N_\varepsilon > 1$ tal que:

$$\left\| \sum_{n>N_\varepsilon} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \right\|_\infty < \varepsilon.$$

En consecuencia,

$$\left\| \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{a_n}{n^\varepsilon} n^{-s} \right\|_\infty < \|D\|_\infty + \varepsilon.$$

Ahora, fijemos x y $\varepsilon > 0$ tal que $N_\varepsilon > x$. Por la desigualdad (5.8) probada en la demostración de 5.2.5, tenemos:

$$\sum_{n \leq x} \frac{|a_n|}{n^\varepsilon} \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} \leq \sum_{n=1}^{N_\varepsilon} \frac{|a_n|}{n^\varepsilon} \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} \leq K_m(\|D\|_\infty + \varepsilon).$$

Haciendo tender ε a 0, obtenemos

$$\sum_{n \leq x} |a_n| \frac{(\log n)^{\frac{m-1}{2}}}{n^{\frac{m-1}{2m}}} \leq K_m \|D\|_\infty.$$

Como x era arbitrario, la conclusión se sigue.

Nos resta mostrar la optimalidad del exponente. Supongamos que el enunciado se satisface para cierto exponente $\lambda > 0$. Notemos que la función $(\log x)^\lambda x^{-\frac{m-1}{2m}}$ es decreciente a partir de algún x_0 y por lo tanto existe una constante κ tal que para $x \geq x_0$ y cualquier polinomio de Dirichlet m-homogéneo $Q = \sum_{n \leq x} b_n n^{-s}$:

$$\sum_{n \leq x} |b_n| \leq \kappa \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^\lambda} \sum_{n \leq x} |b_n| \frac{(\log n)^\lambda}{n^{\frac{m-1}{2m}}} \leq \kappa C_m \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^\lambda} \|Q\|_\infty.$$

De la cota inferior en 5.2.5 se deduce que $\lambda \leq \frac{m-1}{2m}$, como queríamos mostrar. □

5.2.2. Incondicionalidad

Interpretamos de una manera distinta la constante de Sidon para el conjunto de monomios $(z^\alpha)_{\alpha \in \Lambda_x}$ respecto del grupo $\mathbb{T}^\infty$. Para cada $x \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto de índices $J(x) := \{\mathbf{j} \in \mathcal{J} : p_{\mathbf{j}} \leq x\}$. Entonces, la transformada de Bohr $\mathfrak{B}$ asocia a cada polinomio de Dirichlet

$$D(s) = \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} = \sum_{\mathbf{j} \in J(x)} \frac{a_{p_{\mathbf{j}}}}{p_{\mathbf{j}}^s}$$

el polinomio

$$P(z) = \sum_{\mathbf{j} \in J(x)} a_{p_{\mathbf{j}}} z_{\mathbf{j}} \in \mathcal{P}({}^{J(x)}\ell_\infty),$$

con $\|P\|_\infty = \|D\|_\infty = \sup_{[\mathrm{Re}\, s > 0]} |D(s)|$. De esta manera vemos que podemos escribir la conclusión del Teorema 5.2.2 como

$$\chi_{\mathrm{mon}}(\mathcal{P}({}^{J(x)}\ell_\infty)) = \sqrt{x} \exp\left\{ \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + o(1) \right) \sqrt{\log x \log\log x} \right\}. \tag{5.9}$$

Análogamente, si definimos el conjunto de índices $J(x,m) = \{\mathbf{j} \in \mathcal{J}(m) : p_{\mathbf{j}} \leq x\}$ para cada par de naturales x, m, el contenido del Teorema 5.2.5 se lee

$$\chi_{\text{mon}}\left(\mathcal{P}({}^{J(x,m)}\ell_\infty)\right) \asymp \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}}, \tag{5.10}$$

donde las constantes sólo dependen de m.

Esta interpretación de constantes de Sidon como constantes de incondicionalidad de espacios de polinomios definidos en el espacio de sucesiones ℓ_∞ nos lleva naturalmente a preguntarnos si es posible extender estos resultados a la escala de espacios ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Para lograr esto, precisaremos un lema previo que asegura que la constante de incondicionalidad para polinomios definidos en ℓ_∞ es extremal, análogo a 4.1.3. Lograremos esto a través de un argumento análogo al de la prueba de 4.1.3.

Lema 5.2.8. *Sean X un espacio de sucesiones de Banach (es decir, X es un subespacio de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) y $J \subset \mathcal{J}$ finito. Entonces*

$$\chi_{mon}(\mathcal{P}({}^{J}X)) \leq \chi_{mon}(\mathcal{P}({}^{J}\ell_\infty)).$$

Demostración. Sean $P \in \mathcal{P}({}^{J}X)$ y $u \in B_X$. Como la bola unidad B_X es un dominio de Reinhardt, podemos definir el polinomio $Q(w) := P(wu) \in \mathcal{P}\left({}^{J}\ell_\infty\right)$ que además cumple $\|Q\|_\infty \leq \|P\|_\infty$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{\mathbf{j}\in J} |c_{\mathbf{j}}(P)| &= \sup_{w\in B_{\ell_\infty}} \sum_{\mathbf{j}\in J} |c_{\mathbf{j}}(P)u_{\mathbf{j}}||w_{\mathbf{j}}| = \sup_{w\in B_{\ell_\infty}} \sum_{\mathbf{j}\in J} |c_{\mathbf{j}}(Q)||w_{\mathbf{j}}| \\ &\leq \chi_{\text{mon}}\left(\mathcal{P}\left({}^{J}\ell_\infty\right)\right)\|Q\|_\infty \leq \chi_{\text{mon}}\left(\mathcal{P}\left({}^{J}\ell_\infty\right)\right)\|P\|_\infty,\end{aligned}$$

lo que muestra $\chi_{\text{mon}}\left(\mathcal{P}\left({}^{J}X\right)\right) \leq \chi_{\text{mon}}\left(\mathcal{P}\left({}^{J}\ell_\infty\right)\right)$. $\square$

Damos ahora las extensiones a espacios ℓ_p de (5.9) y (5.10).

Teorema 5.2.9. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $x \geq 3 \in \mathbb{N}$. Si $\sigma := 1 - \frac{1}{\text{mín}(2,p)}$, entonces*

$$\chi_{mon}\left(\mathcal{P}({}^{J(x)}\ell_p)\right) \leq x^\sigma \exp\left((-\sqrt{2}\sigma + o(1))\sqrt{\log x \log\log x}\right).$$

Además, el exponente en x es óptimo.

La demostración de este resultado sigue esencialmente los lineamientos de la prueba de 5.2.2, reemplazando el uso de la desigualdad de Bohnenblust-Hille en el paso (5.4) por el Teorema 4.2.15 para el caso $1 \leq p < 2$ y por el Lema 5.2.6 más 5.2.8 en el caso $2 \leq p \leq \infty$. La optimalidad del exponente en x se obtiene mediante un argumento probabilístico similar al de la demostración de 5.2.5, reemplazando el uso de la desigualdad de Kahane-Salem-Zygmund (3.2) por el Corolario 3.2.4 en el rango $1 \leq p \leq 2$ y 3.1.3 cuando $2 \leq p \leq \infty$.

Teorema 5.2.10. *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $m \geq 1$. Entonces, existen constantes $C = C(m,p)$ tales que para todo polinomio $P \in \mathcal{P}({}^{m}\ell_p)$, entero $x \geq 3$ y $u \in \ell_p$:*

I) *Si* $1 \leq p \leq 2$,

$$\sum_{\mathbf{j}:p_{\mathbf{j}} \leq x} |c_{\mathbf{j}}(P)u_{\mathbf{j}}| \leq C(m,p) \frac{x^{\frac{m-1}{m}\left(1-\frac{1}{p}\right)} (\log\log x)^{(m-2)\left(1-\frac{1}{p}\right)}}{(\log x)^{1-\frac{1}{p}}} \|u\|_{\ell_p}^m \|P\|_\infty.$$

II) *Si* $2 \leq p \leq \infty$ *y además* P *es el levantado de Bohr de algún polinomio de Dirichlet,*

$$\sum_{\mathbf{j}:p_{\mathbf{j}} \leq x} |c_{\mathbf{j}}(P)u_{\mathbf{j}}| \leq C(m,p) \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}} \|u\|_{\ell_p}^m \|P\|_\infty.$$

Demostración. La mayor parte del trabajo para esta demostración ya fue realizada. Para ver I), supongamos $1 \leq p \leq 2$ y sea $P \in \mathcal{P}(^m\ell_p)$ un polinomio. Si aplicamos el Teorema 4.2.15 con el conjunto de índices $J = J(x,m)$ obtenemos

$$\sum_{\mathbf{j} \in J(x,m)} |c_{\mathbf{j}}(P)||u_{\mathbf{j}}| \leq eme^{\frac{m-1}{p}} |J(x,m)^*|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{\ell_p}^m \|P\|_\infty,$$

para cualquier $u \in \ell_p$. Ahora, la afirmación se desprende de los resultados A.0.5 y A.0.9.

Mostramos ahora la afirmación II). Por el Lema 5.2.8, alcanza con probar que vale para el caso ℓ_∞. Supongamos que $P \in \mathcal{P}(^m\ell_\infty)$ es el levantado de Bohr de cierto polinomio m-homogéneo de Dirichlet Q. Si $u \in \ell_\infty$, por 5.2.5:

$$\sum_{\mathbf{j}:p_{\mathbf{j}} \leq x} |c_{\mathbf{j}}(P)||u_{\mathbf{j}}| \leq \sum_{\mathbf{j}:p_{\mathbf{j}} \leq x} |c_{\mathbf{j}}(P)| \|u\|_{\ell_\infty}^m \leq C_m \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}} \|u\|_{\ell_\infty}^m \|P\|_\infty,$$

lo que concluye la prueba. □

5.3. El radio de Dirichlet-Bohr

Analicemos la definición clásica de radio de Bohr bajo la luz de la relación entre series de potencias y series de Dirichlet dada por la isometría $\mathfrak{B}$. En primer lugar, partimos de funciones que dependen de n variables (o definidas en un espacio de dimensión n). El análogo natural del lado de las series de Dirichlet es considerar sólo aquellas que son sumas finitas sobre los primeros x términos para cierto $x \in \mathbb{N}$. El segundo aspecto importante a considerar es el grado del monomio que acompaña a cada coeficiente en una serie de potencias. La aplicación $\mathfrak{B}$ transforma cada término $\frac{a_n}{n^s}$ en el monomio $a_{p^\alpha} z^\alpha$, que tiene grado $\Omega(n)$. Así, la noción de grado se corresponde exactamente con $\Omega(n)$. Con estas ideas como motivación, introducimos la definición de radio de Dirichlet-Bohr.

Definición 5.3.1. Sea $x \in \mathbb{N}$. El radio de Dirichlet-Bohr de x, que notamos $L(x)$, es la mejor constante $r \geq 0$ tal que para cualquier polinomio de Dirichlet $Q = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s}$ se tiene

$$\sum_{n \geq x} |a_n| r^{\Omega(n)} \leq |Q\|_\infty = \sup_{[\mathrm{Re} s > 0]} \left| \sum_{n \leq x} \frac{a_n}{n^s} \right|.$$

El objetivo de esta sección es determinar el orden asintótico exacto del radio $L(x)$. Nuevamente recurrimos a la idea de graduar el radio de Dirichlet-Bohr sobre los polinomios de Dirichlet m-homogéneos. Formalmente, lo conseguimos mediante las siguientes definiciones.

Definición 5.3.2. Dado $x \geq 2$, definimos el subespacio del álgebra $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{H}_\infty^{(x)} := \{Q = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} : a_n \neq 0 \text{ sólo si } n \leq x\},$$

con la norma heredada

$$\|Q\|_\infty = \sup_{[\mathrm{Re} s > 0]} \left| \sum_{n \geq x} \frac{a_n}{n^s} \right|.$$

Para $m \in \mathbb{N}$, definimos el subespacio cerrado de los polinomios m-homogéneos de $\mathcal{H}_\infty^{(x)}$ por

$$\mathcal{H}_\infty^{(x,m)} := \{D = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} : a_n \neq 0 \text{ sólo si } n \leq x \text{ y } \Omega(n) = m\}.$$

Con esta terminología, evidentemente resulta

$$L(x) = \sup\{0 \leq r \leq 1 : \forall\, Q = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^{(x)}, \sum_{n \leq x} |a_n| r^{\Omega(n)} \leq \|Q\|_\infty\}.$$

Por lo tanto, dado $m \in \mathbb{N}$ consideramos el radio de Dirichlet-Bohr m-homogéneo de x definido así:

$$L_m(x) = \sup\{0 \leq r \leq 1 : \forall\, Q = \sum_{n \leq x} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^{(x,m)}, \sum_{n \leq x} |a_n| r^m \leq \|Q\|_\infty\}.$$

Existe una relación muy similar a la dada en 4.1.4 entre los radios m-homogéneos $L_m(x)$ y $L(x)$.

Proposición 5.3.3. *Para todo $x \geq 2$,*

$$\frac{1}{3} \inf_{m \in \mathbb{N}} L_m(x) \leq L(x) \leq \inf_{m \in \mathbb{N}} L_m(x).$$

La cota superior se desprende directamente de la definición y la cota inferior se alcanza mediante un argumento análogo al desarrollado en la demostración de 4.1.4. Usando esta herramienta, mostraremos que el radio de Dirichlet-Bohr $L(x)$ se comporta esencialmente como el radio homogéneo $L_2(x)$.

Teorema 5.3.4. *Existen constantes universales $c, C > 0$ tales que*

$$c \frac{(\log x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{8}}} \leq L_2(x) \leq C \frac{(\log x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{8}}}.$$

Demostración. Fijemos $x \geq 2 \in \mathbb{N}$. Probemos primero la cota superior. Debido a la Proposición 5.3.3, alcanza con mostrar que existe una constante $C > 0$ tal que para todo x

$$L_2(x) \leq C \frac{(\log x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{8}}}.$$

De la demostración del Teorema 5.2.5, sabemos que existe un polinomio de Dirichlet 2-homogéneo $Q = \sum_{n\leq x} a_n n^{-s} \in \mathcal{H}_\infty^{(x,2)}$ y una constante universal κ que verifican:

$$\frac{\|Q\|_\infty}{\sum_{n\leq x}|a_n|} \leq \kappa \frac{(\log x)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{4}}}.$$

Si tomamos $r \leq L_2(x)$, la definición de radio de Dirichlet-Bohr homogéneo para este polinomio implica que:

$$r^2 \leq \frac{\|Q\|_\infty}{\sum_{n\leq x}|a_n|},$$

de donde se sigue

$$L_2(x) \leq \kappa^{\frac{1}{2}} \frac{(\log x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{8}}}.$$

Pasamos a la cota inferior. Usaremos nuevamente la Proposición 5.3.3, que para este caso nos dice que es suficiente estimar inferiormente $\inf_{m\in\mathbb{N}} L_m(x)$. Notemos en primer lugar que si $n \in \mathbb{N}$ verifica $1 \leq n \leq x$ y $\Omega(n) = m$ debe ser $2^m \leq n$ y por lo tanto $m \leq \frac{\log x}{\log 2}$. Luego $\mathcal{H}_\infty^{(m,x)} = \{0\}$ si $m > \frac{\log x}{\log 2}$ de donde resulta $L_m(x) = 1$ en este rango. Por otro lado, la relación (5.1) junto con la aplicación de la transformada de Bohr implican que $L_1(x) = 1$. Nos resta ver qué sucede para $2 \leq m \leq \frac{\log x}{\log 2}$. Si usamos la cota superior del Teorema 5.2.5 vemos que para cualquier polinomio de Dirichlet m-homogéneo $\sum_{n\leq x} a_n n^{-s}$ se cumple

$$\sum_{n\leq x} |a_n| \leq C_m \frac{x^{\frac{m-1}{2m}}}{(\log x)^{\frac{m-1}{2}}} \leq \left\| \sum_{n\leq x} \frac{a_n}{n^s} \right\|_\infty,$$

para cierta constante $C_m > 0$. Escribiendo $r_m(x) := \frac{1}{C_m^{\frac{1}{m}}} \frac{(\log x)^{\frac{m-1}{2m}}}{x^{\frac{m-1}{2m^2}}}$, la expresión de arriba se traduce en

$$\sum_{n\leq x} |a_n| r_m(x)^m \leq \left\| \sum_{n\leq x} \frac{a_n}{n^s} \right\|_\infty,$$

lo que muestra que $L_m(x) \geq r_m(x)$. Un análisis de la demostración de 5.2.5 revela que podemos elegir la constante C_m de manera que cumpla $C_m^{\frac{1}{m}} \leq Dm$ para cierta constante $D > 0$. Así,

$$r_m(x) \geq \frac{1}{Dm} \frac{(\log x)^{\frac{m-1}{2m}}}{x^{\frac{m-1}{2m^2}}} \geq \frac{\log 2}{D \log x} \frac{(\log x)^{\frac{m-1}{2m}}}{x^{\frac{m-1}{2m^2}}}. \tag{5.11}$$

Como $x \geq 2$, tenemos

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{\log x} \frac{(\log x)^{\frac{m-1}{2m}}}{x^{\frac{m-1}{2m^2}}} \frac{x^{\frac{1}{8}}}{(\log x)^{\frac{1}{4}}} = \frac{x^{\frac{1}{8}}}{(\log x)^{\frac{3}{2}}}.$$

Haciendo un análisis de la función $x \mapsto \frac{x^{\frac{1}{8}}}{(\log x)^{\frac{3}{2}}}$, vemos que el límite planteado es mayor o igual a 0,1. Si combinamos esto con (5.11), deducimos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$L_m(x) \geq r_m(x) \geq c \frac{(\log x)^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{8}}},$$

para cualquier $2 \leq m \leq \frac{\log x}{\log 2}$, lo que concluye la demostración. $\square$

Apéndice A

Teoría analítica de números

En este apéndice haremos una recopilación de los resultados necesarios para la última sección acerca del tamaño de ciertos conjuntos relevantes en la teoría analítica de números. Omitiremos algunas de las demostraciones pues escapan a los objetivos de este trabajo.

Recordemos que dado un número real x, la función $\pi(x)$ cuenta la cantidad de primos menores o iguales a x. Introducimos ciertos conjuntos de índices relacionados a los conjuntos cuyo tamaño precisamos controlar. Sean $2 < y \leq x$ reales. Definimos

$$\begin{aligned} J(x) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}(k) : k \in \mathbb{N}, p_{\mathbf{j}} \leq x\} \\ J^-(x; y) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}(k) : k \in \mathbb{N}, j_k \leq \pi(y), p_{\mathbf{j}} \leq x\} \\ J^+(x; y) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}(k) : k \in \mathbb{N}, j_1 > \pi(y), p_{\mathbf{j}} \leq x\} \end{aligned}$$

y para $m \in \mathbb{N}$, sus correspondientes graduaciones

$$\begin{aligned} J(x, m) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in \mathcal{J}(m) : p_{\mathbf{j}} \leq x\} \\ J^-(x, m; y) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{J}(m) : j_m \leq \pi(y), p_{\mathbf{j}} \leq x\} \\ J^+(x, m; y) &= \{\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_m) \in \mathcal{J}(m) : j_1 > \pi(y), p_{\mathbf{j}} \leq x\}. \end{aligned}$$

Notemos que con la notación de la demostración del Teorema 5.2.2, resulta

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \{p_{\mathbf{j}} \in \mathbb{N} : \mathbf{j} \in J^-(x; y)\} \\ T(x, y) &= \{p_{\mathbf{j}} \in \mathbb{N} : \mathbf{j} \in J^+(x; y)\} \\ T_m(x, y) &= \{p_{\mathbf{j}} \in \mathbb{N} : \mathbf{j} \in J^+(x, m; y)\}. \end{aligned}$$

En el siguiente lema damos propiedades elementales de estos conjuntos.

Lema A.0.5. *Sean $2 < y \leq x$ y $m \in \mathbb{N}$.*

I) $k \leq \frac{\log x}{\log 2}$ *para* $\mathbf{j} = (j_1, \ldots, j_k) \in J(x)$.

II) $J^+(x, m; y) = \emptyset$ *para* $m > \frac{\log x}{\log 2}$.

III) $|J^-(x; y)| \leq \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^{\pi(y)}$.

IV) $J(x,m)^* \subset J(x^{\frac{m-1}{m}}, m-1)$ y $J^+(x,m;y)^* \subset J^+(x^{\frac{m-1}{m}}, m-1;y)$.

Demostración. Las primeras dos afirmaciones son consecuencia directa de que $2^k \leq p_{\mathbf{j}} \leq x$. Para ver III), consideramos el conjunto $\Lambda^-(x;y) := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^{\pi(y)} : p_1^{\alpha_1} \dots p_{\pi(y)}^{\alpha_{\pi(y)}} \leq x\}$ que obviamente tiene el mismo cardinal que $J^-(x;y)$. Por I), si $\alpha \in \Lambda^-(x;y)$ se cumple $\alpha_i \leq \frac{\log x}{\log 2}$ para cada $1 \leq i \leq \pi(y)$ y la conclusión se sigue. Finalmente, probamos la última afirmación. Sea $\mathbf{j}^* \in J(x,m)^*$, de manera que existe $k \geq j_{m-1}$ tal que $(\mathbf{j}^*, k) \in J(x,m)$. Por lo tanto, tenemos $p_{\mathbf{j}^*} p_k = p_{(\mathbf{j}^*,k)} \leq x$. Si $p_k > x^{\frac{1}{m}}$, como $p_k \geq p_{j_{m-}}$ resulta $p_{\mathbf{j}^*} \leq x^{\frac{m-1}{m}}$. En caso contrario, $p_{j_1} \leq \dots \leq p_{j_{m-1}} \leq p_k \leq x^{\frac{1}{m}}$ y por lo tanto también se verifica que $p_{j_1} \dots p_{j_{m-1}} \leq x^{\frac{m-1}{m}}$. El mismo argumento muestra que $J^+(x,m;y)^* \subset J^+(x^{\frac{m-1}{m}}, m-1;y)$. □

Nos disponemos ahora a controlar el comportamiento asintótico de los tamaños $|J^+(x,m;y)|$. Para eso, damos unos lemas previos.

Lema A.0.6. (Truco de Rankin) *Sea $I \subset \mathbb{N}$ un conjunto y denotemos por $P(I)$ al conjunto de todos los divisores primos de elementos de I. Sea $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ una función completamente multiplicativa (es decir, $b(u \cdot v) = b(u)b(v)$ para todo $u, v \in I$) y supongamos que existe $0 < \delta < 1$ tal que $b(p) < \delta$ siempre que $p \in P(I)$. Entonces,*

$$\sum_{n \in I} b(n) \leq \prod_{p \in P(I)} \frac{1}{1 - b(p)}.$$

Lema A.0.7. (Fórmula de Mertens) *Sea $x \geq 2$ un natural. Existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\sum_{p \leq x,\ p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \log\log x + M + O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

Empleando estos dos lemas, demostraremos lo siguiente.

Proposición A.0.8. *Existe una constante $c > 0$ tal que cualquiera sean $2 < y \leq x$ y $m \in \mathbb{N}$,*

$$|J^+(x,m;y)| \leq 2^m \frac{x}{y^m} \exp\left(y \cdot (\log\log x + c)\right).$$

Demostración. Sea $I = T_m(x,y)$. Para $c := \frac{y}{2} \geq 1$, se cumple

$$|J^+(x,m;y)| = \sum_{\mathbf{j} \in J^+(x,m;y)} 1 \leq \frac{x}{c^m} \sum_{n \in I} \frac{c^m}{n}.$$

Definimos la función $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ por $b(n) = b(p^\alpha) = \frac{c^{|\alpha|}}{n}$, donde $n = p^\alpha$ es la factorización en primos del natural n. Es claro que b es una función completamente multiplicativa. Si $n \in I$, tenemos $b(n) = \frac{c^m}{n}$ y para cada $p \in P(I) = \{q \text{ primo} : y < q \leq x\}$ vale $b(p) = \frac{y}{2p} \leq \frac{1}{2}$. Así, por el truco de Rankin (A.0.6) vemos que

$$|J^+(x,m;y)| \leq 2^m \frac{x}{y^m} \prod_{p \in P(I)} \frac{1}{1 - \frac{y}{2p}}.$$

De la desigualdad $e^{-t} \leq 1 - \frac{t}{2}$ para $0 \leq t \leq 1$, deducimos la estimación

$$|J^+(x,m;y)| \leq 2^m \frac{x}{y^m} \exp\left(y \sum_{p \in P(I)} \frac{1}{p} \right).$$

Finalmente, por la fórmula de Mertens (A.0.7) sabemos

$$\sum_{p \in P(I)} \frac{1}{p} \leq \sum_{p \leq x,\ p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \log\log x + O(1),$$

lo que concluye la demostración. □

También nos será de utilidad controlar el tamaño de los conjuntos $J(x,m)$ (o dicho en palabras, estimar la cantidad de naturales menores o iguales que x cuya factorización tiene exactamente m primos contados con multiplicidad). El siguiente es un conocido resultado de Landau. Referimos a [HW38] para una demostración.

Proposición A.0.9. *Sea $m \geq 1$. Existe una constante $C_m > 0$ tal que para todo natural $x \geq 3$,*

$$|J(x,m)| \leq C_m \frac{x}{\log x} (\log\log x)^{m-1}.$$

Finalizamos el apéndice con la descripción del comportamiento asintótico de $|J^-(x;y)|$.

Proposición A.0.10. *Existe una única función $\varrho : [0,\infty) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:*

- *ϱ es diferenciable en $(0,\infty)$, donde satisface la ecuación diferencial*

$$u\varrho'(u) + \varrho(u-1) = 0.$$

- *$\varrho(u) = 1$ para $0 \leq u \leq 1$ y ϱ es continua en 1.*

A la función ϱ se la conoce como función de Dickmann.

La función ϱ describe el comportamiento de $|J^-(x;y)|$, como muestra la siguiente proposición.

Proposición A.0.11. *Sea $\varepsilon > 0$. Existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier $2 < x$ que verifica $e^{\log\log x^{\frac{5}{3}+\varepsilon}} \leq y \leq x$*

$$\frac{1}{C} x\varrho(u) \leq |J^-(x;y)| \leq Cx\varrho(u),$$

donde $u = \frac{\log x}{\log y}$. Además, a medida que $u = \frac{\log x}{\log y} \to \infty$, tenemos

$$\log \varrho(u) = -u \log u\,(1 + o(1)).$$

Referimos a [Ten95] y [HT93] para la demostración de estas últimas proposiciones.

Bibliografía

[Aiz00] Lev Aizenberg. Multidimensional analogues of Bohr's theorem on power series. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 128(4):1147–1155, 2000.

[AK06] Fernando Albiac and Nigel J Kalton. *Topics in Banach space theory*, volume 233. Springer Science & Business Media, 2006.

[Bay02] Frédéric Bayart. Hardy spaces of Dirichlet series and their composition operators. *Monatshefte für Mathematik*, 136(3):203–236, 2002.

[Bay12] Frédéric Bayart. Maximum modulus of random polynomials. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 63(1):21–39, 2012.

[BCQ06] R Balasubramanian, B Calado, and H Queffélec. The Bohr inequality for ordinary Dirichlet series. *Studia Math*, 175(3):285–304, 2006.

[BDS14] Frédéric Bayart, Andreas Defant, and Schlütters Sunke. Monomial convergence for holomorphic functions on ℓ_r. Preprint, 2014.

[BH31] Henri Frédéric Bohnenblust and Einar Hille. On the absolute convergence of Dirichlet series. *Annals of Mathematics*, pages 600–622, 1931.

[BL12] J Bergh and Jorgen Löfström. *Interpolation Spaces: An Introduction*, volume 223. Springer Science & Business Media, 2012.

[Ble79] Ron C Blei. Fractional cartesian products of sets. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 29(2):79–105, 1979.

[Boa00] Harold P Boas. Majorant series. *J. Korean Math. Soc*, 37(2):321–337, 2000.

[Boh13] Harald Bohr. Über die Bedeutung der Potenzreihen unendlich vieler Variablen in der Theorie der Dirichletschen Reihen $\sum \frac{a_n}{n^s}$. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1913:441–488, 1913.

[Boh14] Harald Bohr. A theorem concerning power series. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 2(1):1–5, 1914.

[Bon70] Aline Bonami. Étude des coefficients de Fourier des fonctions de $L^p(G)$. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 20, pages 335–402. Institut Fourier, 1970.

[BPSS14] Frédéric Bayart, Daniel Pellegrino, and Juan B Seoane-Sepúlveda. The Bohr radius of the n-dimensional polydisk is equivalent to $\sqrt{\frac{(\log n)}{n}}$. *Advances in Mathematics*, 264:726–746, 2014.

[CC71] Henri Cartan and Henri Paul Cartan. *Differential calculus*, volume 1. Hermann, 1971.

[CDG+14] Daniel Carando, Andreas Defant, Domingo García, Manuel Maestre, and Pablo Sevilla-Peris. The dirichlet-bohr radius. *arXiv preprint arXiv:1412.5947*, 2014.

[CDSP14] Daniel Carando, Andreas Defant, and Pablo Sevilla-Peris. A note on a Bohnenblust-Hille-Helson type inequality. *arXiv preprint arXiv:1403.7033*, 2014.

[DDGM01] Andreas Defant, Juan Carlos Dıaz, Domingo Garcıa, and Manuel Maestre. Unconditional basis and Gordon-Lewis constants for spaces of polynomials. *Journal of Functional Analysis*, 181(1):119–145, 2001.

[DF92] Andreas Defant and Klaus Floret. *Tensor norms and operator ideals*, volume 176. Elsevier, 1992.

[DF06] Andreas Defant and Leonhard Frerick. A logarithmic lower bound for multi-dimensional Bohr radii. *Israel Journal of Mathematics*, 152(1):17–28, 2006.

[DF11] Andreas Defant and Leonhard Frerick. The Bohr radius of the unit ball of ℓ_p^n. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2011(660):131–147, 2011.

[DFOC+11] Andreas Defant, Leonhard Frerick, Joaquim Ortega-Cerda, Myriam Ounaïes, and Kristian Seip. The Bohnenblust-Hille inequality for homogeneous polynomials is hypercontractive. *Annals of mathematics*, 174(1):485–497, 2011.

[DGM03] Andreas Defant, Domingo García, and Manuel Maestre. Bohr's power series theorem and local banach space theory-to the memory of our friend klaus floret. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, 557:173–197, 2003.

[Dix95] PG Dixon. Banach algebras satisfying the non-unital von Neumann inequality. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 27(4):359–362, 1995.

[DJT95] Joe Diestel, Hans Jarchow, and Andrew Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43. Cambridge University Press, 1995.

[dLB08] Regis de La Breteche. Sur l'ordre de grandeur des polynômes de Dirichlet. *Acta Arithmetica*, 134:141–148, 2008.

[DM14] Andreas Defant and Mieczyslaw Mastylo. L^p-norms and Mahler's measure of polynomials on the n-dimensional torus. Preprint, 2014.

[DSP14] Andreas Defant and Pablo Sevilla-Peris. The Bohnenblust-Hille cycle of ideas from a modern point of view. *Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici*, 50(1):55–127, 2014.

[DT89] Seán Dineen and Richard Timoney. Absolute bases, tensor products and a theorem of Bohr. *Studia Mathematica*, 94(3):227–234, 1989.

[Flo97] Klaus Floret. Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces. *Note di Matematica*, 17:153–188, 1997.

[Gar07] David JH Garling. *Inequalities: a journey into linear analysis*. Cambridge University Press, 2007.

[Haa81] Uffe Haagerup. The best constants in the Khintchine inequality. *Studia Mathematica*, 70(3):231–283, 1981.

[Had96] Jacques Hadamard. Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bulletin de la Societé mathematique de France*, 24:199–220, 1896.

[Har72] Lawrence A Harris. Bounds on the derivatives of holomorphic functions of vectors. In *Proc. Colloq. Analysis, Rio de Janeiro*, volume 145, page 163, 1972.

[Hel06] Henry Helson. Hankel forms and sums of random variables. *Studia Math*, 176(1):85–92, 2006.

[HL32] GH Hardy and JE Littlewood. Some properties of fractional integrals. II. *Mathematische Zeitschrift*, 34(1):403–439, 1932.

[HLS97] Hakan Hedenmalm, Peter Lindqvist, and Kristian Seip. A Hilbert space of Dirichlet series and systems of dilated functions in $L^2(0,1)$. *Duke Mathematical Journal*, 86(1):1–37, 1997.

[HT93] Adolf Hildebrand and Gérald Tenenbaum. Integers without large prime factors. *Journal de théorie des nombres de Bordeaux*, 5(2):411–484, 1993.

[HW38] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford, Clarendon Press, 1938.

[Kah93] Jean-Pierre Kahane. *Some random series of functions*, volume 5. Cambridge University Press, 1993.

[KB97] Dmitry Khavinson and Harold P Boas. Bohr's power series theorem in several variables. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 125(10):2975–2979, 1997.

[KK01] H König and S Kwapień. Best Khintchine type inequalities for sums of independent, rotationally invariant random vectors. *Positivity*, 5(2):115–152, 2001.

[Knu97] Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1 (3rd Ed.): Fundamental Algorithms*. Addison Wesley Longman Publishing Co., Inc., Redwood City, CA, USA, 1997.

[KQ01] Sergei V Konyagin and Hervé Queffélec. The translation 1/2 in the theory of Dirichlet series. *Real Analysis Exchange*, 27(1):155–176, 2001.

[Lit30] John E Littlewood. On bounded bilinear forms in an infinite number of variables. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1:164–174, 1930.

[MS86] Vitali D Milman and Gideon Schechtman. *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces*. Springer, 1986.

[MT80] Anna Mantero and Andrew Tonge. The Schur multiplication in tensor algebras. *Studia Mathematica*, 68(1):1–24, 1980.

[Pis86] Gilles Pisier. *Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces*. Number 60. American Mathematical Soc., 1986.

[Pra57] Karl Prachar. *Primzahlverteilung*. Springer-Verlag, 1957.

[QQ13] Hervé Queffélec and Martine Queffélec. *Diophantine approximation and Dirichlet series*. Hindustan Book Agency, 2013.

[Que95] Hervé Queffélec. H. Bohr's vision of ordinary Dirichlet series; old and new results. *J. Anal*, 3:43–60, 1995.

[Rud87] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.

[Rya80] Raymond A Ryan. *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*. PhD thesis, Trinity College Dublin., 1980.

[Saw85] Jerzy Sawa. The best constant in the Khintchine inequality for complex Steinhaus variables, the case $p = 1$. *Studia Mathematica*, 1(81):107–126, 1985.

[Sch78] Carsten Schütt. Unconditionality in tensor products. *Israel Journal of Mathematics*, 31(3):209–216, 1978.

[Sza81] Stanislaw Jerzy Szarek. A note on the paper of Schütt "Unconditionality in tensor products". In *Colloquium Mathematicae*, volume 45, pages 273–276. Institute of Mathematics Polish Academy of Sciences, 1981.

[Ten95] Gérald Tenenbaum. *Introduction to analytic and probabilistic number theory*, volume 46. Cambridge university press, 1995.

[VP96] CJ de la Vallée-Poussin. Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, i–iii. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, 20:183–256, 1896.

[Vuk03] Dragan Vukotić. The isoperimetric inequality and a theorem of Hardy and Littlewood. *American Mathematical Monthly*, pages 532–536, 2003.

[Wei80] Fred B Weissler. Logarithmic Sobolev inequalities and hypercontractive estimates on the circle. *Journal of Functional Analysis*, 37(2):218–234, 1980.

[Woj96] Przemyslaw Wojtaszczyk. *Banach spaces for analysts*, volume 25. Cambridge University Press, 1996.

Índice alfabético