UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Proceso de inclusión en $\mathbb{Z}$: dualidad, acoplamiento y propagación de equilibrio local.

Daniela Sabrina Cuesta

Directora: Inés Armendáriz

Marzo de 2015

Índice general

Capítulo 0

Introducción

El proceso de inclusión simétrico a tasa m en $\mathbb{Z}$ (SIP(m) en $\mathbb{Z}$ o simplemente, SIP(m)) es un sistema de partículas en el que cada una se mueve realizando un paseo aleatorio independendiente a tasa $\frac{m}{2}$ y, además de esto, cada una intenta atraer a las partículas que se encuentran en sitios vecinos a su propio sitio. Este modelo fue introducido por primera vez en [3] como el dual al Brownian Momentum Process, que es un modelo estocástico de conducción del calor.

En esta tesis lo que haremos será analizar en profundidad ciertos aspectos del SIP. Para eso utilizaremos varias de las ideas desarrolladas en [3, 13, 4, 6].

Una propiedad fundamental que demostraremos será la autodualidad, la cual nos permitirá analizar al SIP reduciéndonos al caso en que tengamos sólo finitas partículas. La aplicaremos, entre otras cosas, para definir adecuadamente al semigrupo del proceso (ya que en un principio, el SIP está definido vía su generador, pero como la cantidad de partículas puede ser infinita podría haber un problema con las tasas de salto de una configuración a otra). También nos servirá para probar un límite hidrodinámico en el SIP, en el sentido de que hay propagación de equilibrio local, y nos permitirá demostrar que el Boundary Driven SIP (que es un modelo que también consideraremos) verifica una propiedad de equilibrio local. Una herramienta que será clave para la demostración de los dos últimos hechos es un acoplamiento que haremos entre n partículas del SIP y n paseos aleatorios independientes.

Detallaremos a continuación cómo se encuentra estructurada la tesis:

En el capítulo 1 definiremos al generador, daremos dos interpretaciones del proceso, probaremos que tiene una medida reversible (y por lo tanto, invariante) y explicaremos la notación matricial clásica que se usa para describir a los generadores, ya que esta descripción matricial será indispensable para comprender lo que haremos en el siguiente capítulo.

En el capítulo 2 comenzaremos explicando las nociones básicas de dualidad y autodualidad y demostrando ciertas equivalencias. Luego explicaremos la técnica introducida en el paper [3] que permite no sólo probar autodualidad, sino también construirla: dado un proceso autodual, siguiendo un método sistemático, podremos encontrar funciones que sirven. Observaremos también que si el sistema posee una medida reversible, lograremos encontrar, bajo ciertas condiciones, una función de autodualidad cuya expresión sea un producto de funciones, donde la función i-ésima evaluada en las configuraciones η y ξ depende únicamente de la cantidad de partículas que hay en los sitios i-ésimos de ambas. Aplicaremos esta técnica para demostrar que el proceso de inclusión simétrico en el que las partículas se mueven únicamente sobre dos sitios es autodual, y luego veremos cómo generalizar la autodualidad al caso original, en el que se mueven en todo $\mathbb{Z}$.

En el capítulo 3 usaremos fuertemente la dualidad probada en el capítulo anterior ya que, como hemos dicho al comienzo, la misma nos permitirá encontrar al semigrupo correspondiente al generador del SIP y también nos servirá para definir una propiedad de equilibrio local. Específicamente, veremos que en la escala macroscópica hay propagación de equilibrio local y que la ecuación macroscópica asociada es la ecuación de difusión (la misma ecuación que satisface un movimiento Browniano). Para esto necesitaremos usar un resultado que se demuestra en el capítulo 5 empleando técnicas de acoplamiento.

En el capítulo 4 analizaremos al Boundary Driven SIP a tasa m, que es un proceso en el que sólo hay N sitios ($\{1, ..., N\}$) y en el que las partículas se mueven con una dinámica similar a la del SIP(m) en $\mathbb{Z}$ pero a diferencia de éste, no hay conservación de partículas. Esto se debe a que en los sitios 1 y N pueden aparecer o desaparecer partículas. Podemos pensar que hay dos "resevorios" asociados a los sitios 1 y N que pueden enviar o recibir partículas provenientes de su sitio asociado y la probabilidad con la que esto ocurre depende de cuatro constantes positivas α, β, γ y δ que aparecen en el generador.

Basándonos en la autodualidad que hemos probado para el SIP(m) en $\mathbb{Z}$ probaremos que este proceso también tiene un dual, que es un sistema bastante más simple de estudiar: en este proceso las partículas se mueven entre los sitios 0 y $N+1$, pero cuando llegan a las casillas de los extremos (es decir, 0 y $N+1$) no pueden salir, quedan atrapadas. Una consecuencia directa de esta dualidad es que para cada elección de constantes α, β, γ y δ el Boundary Driven SIP a tasa m tiene una única medida estacionaria (la cual resulta una probabilidad) y además esta medida puede ser caracterizada en función de las probabilidades de absorción del proceso dual. (Con probabilidades de absorción estamos haciendo referencia a la probabilidad de que una partícula sea absorbida en el 0 o en el $N+1$). También veremos que si esas constantes satisfacen una condición extra, la medida invariante en realidad es una medida producto y es reversible.

Finalizaremos este capítulo definiendo y probando una propiedad de equilibrio local, para lo cual necesitaremos adaptar el mismo resultado que usamos en el capítulo 3 y que demostraremos en el capítulo 5.

En el capítulo 5 describiremos un acoplamiento entre n partículas que se mueven con la dinámica del SIP(m) y n paseos aleatorios independientes y probaremos el teorema clave que aplicamos en los dos capítulos anteriores. Básicamente, el teorema dice que bajo ese acoplamiento, si para todo i entre 1 y n la i-ésima partícula del SIP comienza en el mismo lugar que la i-ésima partícula del paseo aleatorio entonces la diferencia entre las posiciones de las partículas i-ésimas a tiempo t es de orden $o(\sqrt{t})$, es decir, la diferencia entre las posiciones a tiempo t dividido $\sqrt{t}$ converge en probabilidad a 0.

Finalmente, incluiremos un apéndice en el cual detallaremos las demostraciones de algunos resultados conocidos que se han utilizado para demostrar el teorema del capítulo 5. Estos resultados están relacionados con la variación cuadrática de una martingala y con propiedades de los paseos aleatorios a tiempo continuo en $\mathbb{Z}$.

Capítulo 1

Proceso de Inclusión en $\mathbb{Z}$

1.1. Definición e Interpretación del Proceso

El proceso de inclusión simétrico a tasa m en $\mathbb{Z}$ con espacio de configuraciones Ω y generador $\mathcal{L}^{SIP(m)}$ es un sistema de partículas en el que los sitios están representados por $\mathbb{Z}$ y la cantidad de partículas en cada sitio puede variar entre cero y cualquier cualquier número natural. Esto implica que Ω es igual a $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$, con $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Al generador del SIP(m) se lo define en cada función local $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y en cada configuración $\eta \in \Omega$ de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{SIP(m)} f(\eta) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \{i-1, i+1\}} \eta_i (\frac{m}{2} + \eta_j)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)], \tag{1.1}$$

donde $\eta^{i,j} := \eta - \delta_i + \delta_j$ representa la configuración que se obtiene a partir de η luego de que una partícula que se encontraba en el sitio i se desplazara al sitio j y donde las funciones locales son las funciones que sólo dependen de finitas coordenadas, es decir: f es una función local de $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ si existe un subconjunto finito S contenido en $\mathbb{Z}$ tal que si $\eta, \eta' \in \Omega$ y $\eta(x) = \eta'(x)$ $\forall x \in S$ entonces, $f(\eta) = f(\eta')$. Observemos que si f es local e $i, j \in S^c$, $f(\eta^{i,j}) = f(\eta)$ ya que $\eta^{i,j}$ y η coinciden en todas las coordenadas pertenecientes a S. Por lo tanto, la serie que aparece en $\mathcal{L}^{SIP(m)} f(\eta)$ en realidad es una suma finita.

El proceso con generador (1.1) lo interpretamos como un proceso a tiempo continuo en el que hay dos dinámicas involucradas: Por un lado, cada partícula realiza de forma independiente un paseo aleatorio simple y simétrico a tasa $\frac{m}{2}$. Esto significa que cada una tiene un reloj que suena con distribución exponencial de parámetro m (que llamaremos "reloj del paseo aleatorio") y cada vez que suena, la partícula elige con igual probabilidad moverse un lugar hacia la derecha o un lugar hacia la izquierda. Por otro lado, cada vez que dos partículas se encuentran en casillas vecinas se activa un reloj asociado a esas dos partículas que suena a tasa 2 (es decir, con distribución exponencial de parámetro 2) y que llamaremos "reloj invitación". Cuando éste suena, se elige con igual probabilidad una de las dos partículas y la misma salta hacia el sitio de la otra.

Otra forma de entender la segunda dinámica es la siguiente: cada partícula tiene un reloj que suena a tasa 1 y que se encuentra en constante funcionamiento (no es como en el caso anterior, que se activaba a partir de un momento). Cuando suena el reloj de alguna partícula que se encuentra en el sitio x se elige con igual probabilidad el sitio de la derecha o el de la izquierda y luego, todos los relojes de las partículas que se encuentran en el sitio elegido empiezan a "competir". En el momento en que suena por primera vez alguno de esos relojes (que sonará con una tasa igual a la cantidad de partículas que hay en el sitio), la partícula que se corresponde con ese reloj salta hacia el sitio x.

Observación 1.1. *Es fundamental la propiedad de falta de memoria que poseen las variables aleatorias exponenciales para comprender por qué las dos descripciones anteriores hacen referencia al mismo proceso.*

Observación 1.2. *A partir de la segunda interpretación resulta intuitivo que bajo la dinámica del SIP(m) las partículas tienen una tendencia a atraer partículas hacia su propio sitio por lo cual, a lo largo del tiempo, tenderán a estar menos separadas que en un sistema de paseos aleatorios simples, simétricos e independientes a tasa $\frac{m}{2}$. Esta es la razón por la que decimos que la interacción entre las partículas del SIP es "atractiva", en contraposición a la interacción "repulsiva" que se presenta cuando consideramos el proceso de exclusión simple y simétrico (SEP), en donde las partículas tienden a estar más esparcidas que en el sistema de paseos aleatorios. Estas comparaciones intuitivas que hemos hecho entre el SIP, SEP y los paseos aleatorios se formaliza en el Teorema 2.3.1 de [5].*

1.2. Reversibilidad en el SIP(m)

Queremos encontrar una medida que sea reversible para el proceso SIP(m) ya que esta reversibilidad, además de implicar que el proceso tiene una medida estacionaria, nos servirá en el capítulo siguiente para poder construir una función de autodualidad.

Si fuese una medida producto con marginales $\nu : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ y $C(\eta, \eta')$ fuese la tasa de salto de la configuración η a η' en el proceso SIP(m), por la ecuación de balance detallado,

$$\nu(\eta)C(\eta, \eta^{i,j}) = \nu(\eta^{i,j})C(\eta^{i,j}, \eta) \ \ \forall (i,j) \in \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |i-j| = 1\}$$

y por lo tanto,

$$\nu(\eta_i)\nu(\eta_j)\eta_i(\frac{m}{2} + \eta_j) = \nu(\eta_i - 1)\nu(\eta_j + 1)(\eta_i - 1)(\frac{m}{2} + \eta_j + 1). \tag{1.2}$$

Reemplazando en (1.2) η_i y η_j por k y n respectivamente (con $k, n \in \mathbb{N}_0$) obtenemos

$$\nu(k)\nu(n)k(\frac{m}{2} + n) = \nu(k-1)\nu(n+1)(k-1)(\frac{m}{2} + n + 1).$$

Y dado que la distribución Gamma discreta con parámetros $\lambda \in (0,1)$ y $\frac{m}{2}$ que vale $\nu_\lambda(n) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+n)}{\Gamma(\frac{m}{2})n!}\lambda^n(1-\lambda)^{\frac{m}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ (y 0 en otro caso) satisface esta última igualdad, la medida producto $\nu_\lambda^{\otimes\mathbb{Z}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \nu_\lambda : \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} \to [0,1]$ cuyas marginales son ν_λ con $\lambda \in (0,1)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ resulta una medida reversible (y por lo tanto, invariante) para el SIP(m).

Observación 1.3. *Notemos que la medida ν_λ con $\lambda \in (0,1)$ no sólo es una medida, sino que también* *es una distribución pues:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+n)}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{m}{2}+n-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n e^{-x} x^{\frac{m}{2}-1} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} x^n \right) e^{-x} x^{\frac{m}{2}-1} dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \int_0^{+\infty} e^{-(1-\lambda)x} x^{\frac{m}{2}-1} dx$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \left[\int_0^{+\infty} e^{-[(1-\lambda)x]} [(1-\lambda)x]^{\frac{m}{2}-1} dx \right] (1-\lambda)^{1-\frac{m}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \left[\int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{m}{2}-1} dy \right] \frac{(1-\lambda)^{1-\frac{m}{2}}}{(1-\lambda)}$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{m}{2})} \Gamma(\frac{m}{2}) (1-\lambda)^{-\frac{m}{2}} = (1-\lambda)^{-\frac{m}{2}},$$

donde en el anteúltimo paso hemos reemplazado a $(1-\lambda)x$ por la variable y.

A partir de la reversibilidad que hemos probado y la observación que hemos hecho concluimos que si $\vec{\lambda} : \mathbb{Z} \to [0,1]$ es una función, entonces la medida producto $\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes \mathbb{Z}} := \bigotimes_{i \in \mathbb{Z}} \nu_{\vec{\lambda}(i)}$ con $\vec{\lambda}(i) \in (0,1)$ $\forall i \in \mathbb{Z}$ es una distribución y además, si la función $\vec{\lambda}$ es constante e igual a λ, la medida $\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes \mathbb{Z}}$ (que también la notamos $\nu_{\lambda}^{\otimes \mathbb{Z}}$) es una medida reversible e invariante.

1.3. Notación matricial del generador

Nuevamente, notamos $\mathcal{L}$ al generador de un proceso y Ω al conjunto de configuraciones posibles. Consideremos $f \in Dom(\mathcal{L})$, $\eta, \eta' \in \Omega$ y sea $C(\eta, \eta')$ la tasa de salto de η a η'. Entonces,

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{\eta \neq \eta'} C(\eta, \eta')[f(\eta') - f(\eta)],$$

y si definimos

$$L(\eta, \eta') = \begin{cases} C(\eta, \eta') & \text{si } \eta \neq \eta' \\ -\sum_{\eta'' \neq \eta} C(\eta, \eta'') & \text{si } \eta = \eta' \end{cases}$$

nos queda que

$$\mathcal{L}f(\eta) = \sum_{\eta' \in \Omega} L(\eta, \eta') f(\eta'). \tag{1.3}$$

Ahora, si pensamos a L como una matriz en $\mathbb{R}^{\Omega x \Omega}$ tal que en la columna η y en la fila η' vale $L(\eta, \eta')$ y pensamos a f como el vector columna que en la fila η' vale $f(\eta')$, el segundo miembro de la igualdad anterior lo podemos reemplazar por $(Lf)(\eta)$, donde $(Lf)(\eta)$ representa el lugar η del vector columna que se obtiene al multiplicar L y f. Por lo tanto, (1.3) lo podemos reescribir como

$$\mathcal{L}f(\eta) = (Lf)(\eta).$$

En nuestro caso, $\Omega = \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ y

$$\mathcal{L}^{SIP(m)} f(\eta) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{j \in \{-1,1\}} \eta_i (\frac{m}{2} + \eta_j)[f(\eta^{i,j}) - f(\eta)]$$
$$= \sum_{i \in \mathbb{Z}} \left[\eta_i (\frac{m}{2} + \eta_{i+1}) f(\eta^{i,i+1}) + \eta_{i+1} (\frac{m}{2} + \eta_i) f(\eta^{i+1,i}) - (2\eta_i \eta_{i+1} + \frac{m}{2}\eta_i + \frac{m}{2}\eta_{i+1}) f(\eta) \right],$$

por lo que

$$L(\eta,\eta') = \begin{cases} \eta_i(\frac{m}{2}+\eta_{i+1}) & \text{si } \eta' = \eta^{i,i+1} \text{ para algún } i \in \mathbb{Z} \\ \eta_{i+1}(\frac{m}{2}+\eta_i) & \text{si } \eta' = \eta^{i+1,i} \text{ para algún } i \in \mathbb{Z} \\ -\sum_{i\in\mathbb{Z}}(2\eta_i\eta_{i+1}+\frac{m}{2}\eta_i+\frac{m}{2}\eta_{i+1}) & \text{si } \eta' = \eta \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y L así definida coincide con

$$L(\eta,\eta') = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \eta_i(\frac{m}{2}+\eta_{i+1})\delta_{\eta^{i,i+1},\eta'} + \eta_{i+1}(\frac{m}{2}+\eta_i)\delta_{\eta^{i+1,i},\eta'} - (2\eta_i\eta_{i+1}+\frac{m}{2}\eta_i+\frac{m}{2}\eta_{i+1})\delta_{\eta,\eta'}. \quad (1.4)$$

Capítulo 2

Dualidad y Autodualidad

La dualidad es una herramienta muy útil en el estudio de sistemas de partículas que nos permite relacionar al proceso en el que estamos interesados con un nuevo proceso, llamado dual. Típicamente, la relación dada por la dualidad nos ayuda a deducir propiedades del proceso original estudiando al proceso dual, lo cual puede resultar muy útil cuando el nuevo proceso es más sencillo que el anterior o cuando el problema que queremos resolver del proceso original se vuelve más accesible al haber sido reformulado en términos del proceso dual.

Vamos a distinguir un caso especial de dualidad: la autodalidad, que es cuando las leyes que siguen los dos procesos son idénticos aunque los espacios de estados podrían ser distintos. Más precisamente, nos referiremos a autodualidad "en sentido estricto" cuando los espacios de estados son iguales y a autodualidad (a secas) cuando no necesariamente lo son. Nos podríamos preguntar cuál es la utilidad de la autodualidad si el generador de los procesos es el mismo. La respuesta radica en que, si bien la dinámica es la misma, el espacio de estados puede ser considerablemente más pequeño. Por ejemplo, en el caso en que el proceso original admita infinitas partículas y, por otra parte, el espacio de estados del dual esté dado por las configuraciones con sólo finitas partículas, usando la autodualidad podremos comprender el comportamiento del sistema original reduciéndonos al caso en que sólo haya finitas partículas, lo que realmente es una importante simplificación.

2.1. Definiciones y propiedades

Definición 2.1. ***(Dualidad)***: *Consideremos dos procesos de Markov a tiempo continuo:* $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ *con espacio de estados* Ω *y* $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ *con espacio de estados* $\widehat{\Omega}$. *Sea* D: $\Omega \times \widehat{\Omega} \to \mathbb{R}$ *una función medible. Decimos que* $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ *y* $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ *son duales respecto a* D *si*

$$\mathbb{E}_\eta[D(\eta_t,\xi)] = \mathbb{E}_\xi[D(\eta,\xi_t)]$$

para todo $t \geqslant 0$ *y para todo* $(\eta,\xi) \in \Omega \times \widehat{\Omega}$.

Definición 2.2. ***(Autodualidad (en sentido estricto))***: *Consideremos dos copias independientes del proceso de Markov a tiempo continuo* $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ *y* $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ *con espacio de estados* Ω. *Sea* $D : \Omega\times\Omega \to \mathbb{R}$ *una función medible. Decimos que el proceso es autodual con función de dualidad (o de autodualidad)* D *si*

$$\mathbb{E}_\eta[D(\eta_t,\xi)] = \mathbb{E}_\xi[D(\eta,\xi_t)]$$

para todo $t \geqslant 0$ *y para todo* $(\eta,\xi) \in \Omega \times \Omega$.

Notemos que si $(S_t)_{t\geqslant 0}$ y $(\widehat{S}_t)_{t\geqslant 0}$ son los semigrupos de los procesos $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ y $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ y $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ son los respectivos generadores, la dualidad respecto a D entre ambos procesos es equivalente a que $S_tD(\cdot,\xi)(\eta) = \widehat{S}_tD(\eta,\cdot)(\xi)$; y restando a ambos miembros $D(\eta,\xi)$, dividiendo por t y tomando límite cuando t tiende a cero, nos queda

$$\mathcal{L}D(\cdot,\xi)(\eta) = \widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi). \tag{2.1}$$

Y bajo ciertas condiciones, la recíproca también es cierta:

Proposición 2.1. *Sean $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ y $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ procesos de Markov a tiempo continuo con espacio de estados Ω y $\widehat{\Omega}$, semigrupos S_t y $\widehat{S}_t$ y generadores $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ respectivamente, y sea $D\colon \Omega\times\widehat{\Omega}\to\mathbb{R}$ una función medible. Si $D(\eta,\cdot)\in Dom(\widehat{\mathcal{L}})$ $\forall\eta\in\Omega$, $D(\cdot,\xi)\in Dom(\mathcal{L})$ $\forall\xi\in\widehat{\Omega}$, y además, $\mathcal{L}D(\cdot,\xi)(\eta) = \widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi)$ $\forall(\eta,\xi)\in\Omega\times\widehat{\Omega}$ entonces, $(\eta_t)_{t\geqslant 0}$ y $(\xi_t)_{t\geqslant 0}$ son procesos duales respecto a D.*

Demostración: Sea $u_1(t,\eta,\xi) := \mathbb{E}_\eta[D(\eta_t,\xi)] = S_tD(\cdot,\xi)(\eta)$ y sea $u_2(t,\eta,\xi) := \mathbb{E}_\xi[D(\eta,\xi_t)] = \widehat{S}_tD(\eta,\cdot)(\xi)$. ($S_t$ y $\mathcal{L}$ actúan sobre la primer coordenada y $\widehat{S}_t$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ actúan sobre la segunda).

Notemos que por el Teorema de Fubini, $\widehat{S}_lS_tD(\eta,\xi) = S_t\widehat{S}_lD(\eta,\xi)$ $\forall t\geqslant 0$, $\forall l\geqslant 0$ y $\forall(\eta,\xi)\in\Omega\times\widehat{\Omega}$. Restando $S_tD(\eta,\xi)$ a ambos miembros, dividiendo por l y tomando límite cuando l tiende a cero nos queda que $\widehat{\mathcal{L}}S_tD(\eta,\cdot)(\xi) = S_t\widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi)$ (que por hipótesis, coincide con $S_t\mathcal{L}D(\cdot,\xi)(\eta)$). Análogamente, considerando la igualdad $\widehat{S}_l\widehat{S}_tD(\eta,\xi) = \widehat{S}_t\widehat{S}_lD(\eta,\xi)$, restando $\widehat{S}_tD(\eta,\xi)$, dividiendo por l y tomando el mismo límite que antes obtenemos $\widehat{\mathcal{L}}\widehat{S}_tD(\eta,\cdot)(\xi) = \widehat{S}_t\widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi)$.

Por lo tanto,

$$\widehat{\mathcal{L}}u_1(t,\eta,\xi) = \widehat{\mathcal{L}}S_tD(\cdot,\xi)(\eta) = S_t\widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi) = S_t\mathcal{L}D(\cdot,\xi)(\eta) = \frac{d}{dt}u_1(t,\eta,\xi) \tag{2.2}$$

y

$$\widehat{\mathcal{L}}u_2(t,\eta,\xi) = \widehat{\mathcal{L}}\widehat{S}_tD(\eta,\cdot)(\xi) = \widehat{S}_t\widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi) = \frac{d}{dt}u_2(t,\eta,\xi), \tag{2.3}$$

donde en la última igualdad de cada renglón usamos la ecuación forward de Kolmogorov. Como además sabemos que $u_1(0,\eta,\xi) = D(\eta,\xi) = u_2(0,\eta,\xi)$, de (2.2) y (2.3) obtenemos que u_1 y u_2 son soluciones de la ecuación diferencial $\frac{d}{dt}X(t) = \widehat{\mathcal{L}}X(t)$ con condición inicial $X(0) = D(\eta,\xi)$, y por unicidad de solución (ver Teorema 1.3 de [1]) se deduce que $u_1(t,\eta,\xi) = u_2(t,\eta,\xi)$ $\forall t\geqslant 0$ y $\forall(\eta,\xi)\in\Omega\times\widehat{\Omega}$, lo que concluye la demostración. □

2.2. Técnica para encontrar funciones de autodualidad

Comencemos por observar que usando la notación descripta en la Sección 1.3, la ecuación (2.1) se puede escribir como

$$\sum_{\eta'\in\Omega} L(\eta,\eta')D(\eta',\xi) = \sum_{\xi'\in\widehat{\Omega}} \widehat{L}^T(\xi',\xi)D(\eta,\xi') \tag{2.4}$$

ya que, si llamamos f y g a las funciones $D(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ y $D(\eta,\cdot):\widehat{\Omega}\to\mathbb{R}$ respectivamente,

$$\mathcal{L}D(\cdot,\xi)(\eta)=\widehat{\mathcal{L}}D(\eta,\cdot)(\xi) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{L}f(\eta)=\widehat{\mathcal{L}}g(\xi) \;\Leftrightarrow\; \sum_{\eta'\in\Omega}L(\eta,\eta')f(\eta')=\sum_{\xi'\in\widehat{\Omega}}\widehat{L}(\xi,\xi')g(\xi')$$
$$\Leftrightarrow \sum_{\eta'\in\Omega}L(\eta,\eta')D(\eta',\xi)=\sum_{\xi'\in\widehat{\Omega}}\widehat{L}(\xi,\xi')D(\eta,\xi') \;\Leftrightarrow\; \sum_{\eta'\in\Omega}L(\eta,\eta')D(\eta',\xi)=\sum_{\xi'\in\widehat{\Omega}}\widehat{L}^T(\xi',\xi)D(\eta,\xi').$$

A partir de (2.4) podemos concluir que si estamos en las hipótesis de la Proposición 2.1, los procesos con generadores $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ son duales con respecto a la función D si y sólo si vale la siguiente igualdad matricial:

$$LD=D\widehat{L}^T, \tag{2.5}$$

donde L y $\widehat{L}$ son las matrices en $\mathbb{R}^{\Omega\times\Omega}$ y $\mathbb{R}^{\widehat{\Omega}\times\widehat{\Omega}}$ asociadas a los generadores $\mathcal{L}$ y $\widehat{\mathcal{L}}$ y D es la matriz en $\mathbb{R}^{\Omega\times\widehat{\Omega}}$ tal que en la intersección de la fila η y la columna ξ vale la función $D(\cdot,\xi)$ evaluada en η, o, lo que es lo mismo, vale $D(\eta,\cdot)$ evaluada en ξ.

Observemos también que si $\mathcal{L}=\widehat{\mathcal{L}}$, la ecuación (2.5) se reescribe como

$$LD=DL^T. \tag{2.6}$$

Ahora sí estamos en condiciones de enunciar y probar el teorema que nos permitirá demostrar autodualidad construyendo a la función. (Ver [3]).

Teorema 2.1. *Consideremos un proceso de Markov a tiempo continuo con espacio de estados Ω finito o numerable y sea L su generador descripto en forma matricial. Sea Q una matriz inversible tal que $L^TQ=QL$ y sea S una matriz que conmuta con L^T. Entonces, si la función $D:\Omega\times\Omega\to\mathbb{R}$ asociada a la matriz $D=Q^{-1}S$ verifica ser una función medible tal que $D(\eta,\cdot)$ y $D(\cdot,\xi)$ pertenecen al dominio de $\mathcal{L}$ para todo $t\geqslant 0$ y para todo $\eta\in\Omega$, D resulta una función de autodualidad (en sentido estricto).*

Demostración: Por (2.6), debemos ver que $LD=DL^T$, y esto es muy simple de chequear:

$$LD=LQ^{-1}S=Q^{-1}L^TS=Q^{-1}SL^T=DL^T. \qquad \square$$

Veamos ahora una observación que nos va a resultar de gran utilidad, ya que nos dice cómo encontrar una matriz Q en el caso en que el proceso tenga una medida reversible. Además, la matriz que se propone es una matriz diagonal.

Observación 2.1. *Sea L la matriz asociada al generador $\mathcal{L}$ de un sistema de partículas que posee una medida reversible μ y un espacio de estados Ω. Entonces, la matriz Q definida por*

$$Q(\eta,\eta'):=\mu(\eta)\delta_{\eta,\eta'} \quad \forall\eta,\eta'\in\Omega$$

verifica ser una matriz inversible tal que $L^TQ=QL$.

Demostración: Es claro que Q es inversible (ya que Q es una matriz diagonal con todos los elementos de la diagonal distintos a cero). Veamos entonces que cumple la otra condición:

$$(L^TQ)(\eta,\eta')=\sum_{\eta''\in\Omega}L^T(\eta,\eta'')Q(\eta'',\eta')=\sum_{\eta''\in\Omega}L^T(\eta,\eta'')\mu(\eta'')\delta_{\eta'',\eta'}=L^T(\eta,\eta')\mu(\eta')$$
$$=L(\eta',\eta)\mu(\eta')=L(\eta,\eta')\mu(\eta)=\sum_{\eta''\in\Omega}\mu(\eta)\delta_{\eta,\eta''}L(\eta'',\eta')=(QL)(\eta,\eta') \quad \forall\eta,\eta'\in\Omega,$$

donde la quinta igualdad vale por la reversibilidad de μ. $\square$

Nuestro objetivo es deducir y probar autodualidad en el SIP(m), cuyo generador vimos que se puede escribir como

$$\mathcal{L}^{SIP(m)} f(\eta) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Big[\eta_i(\frac{m}{2}+\eta_{i+1})f(\eta^{i,i+1}) + \eta_{i+1}(\frac{m}{2}+\eta_i)f(\eta^{i+1,i}) - (2\eta_i\eta_{i+1}+\frac{m}{2}\eta_i+\frac{m}{2}\eta_{i+1})f(\eta)\Big].$$

Notemos que este generador es una suma de operadores que trabajan exclusivamente sobre dos sitios de la configuración. (Esto también ocurre en otros sistemas, por ejemplo, en el paseo aleatorio simple o en el proceso de exclusión simple). Este hecho nos permitirá simplificar el problema de probar la autodualidad en el SIP(m) ya que bastará estudiar la autodualidad en el caso en que tengamos partículas solamente en dos sitios (que además de simplificarlo por pasar de tener infinitos sitios a tener sólo dos, también lo simplificará dado que en este último caso la autodualidad es estricta, por lo que podremos usar el Teorema 2.1).

2.3. Dos sitios

Consideremos el proceso SIP(m) con sólo dos sitios, que tiene como espacio de estados a $\Omega' = \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ y como generador a $\mathcal{L}^{SIP(m),2}$, el cual se lo define en cada función $f:\Omega'\times\Omega'\to\mathbb{R}$ y en cada configuración i,j de Ω' como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{SIP(m),2} f(i,j) :=& i(\frac{m}{2}+j)[f(i-1,j+1)-f(i,j)] + j(\frac{m}{2}+i)[f(i+1,j-1)-f(i,j)]\\ =& i(\frac{m}{2}+j)f(i-1,j+1) + j(\frac{m}{2}+i)f(i+1,j-1) - (2ij+\frac{m}{2}i+\frac{m}{2}j)f(i,j).\end{aligned} \tag{2.7}$$

La interpretación de este proceso es similar a la del SIP(m) en $\mathbb{Z}$: cada partícula realiza un paseo aleatorio a casillas vecinas a tasa $\frac{m}{2}$ para cada lado (como sólo hay dos sitios, cada casilla tiene un único vecino), y además, cada vez que dos partículas se encuentran en sitios vecinos (o, lo que es lo mismo, en sitios distintos), se les activa el "reloj invitación", el que suena a tasa 2.

Al igual que hicimos antes, identifiquemos al generador con una matriz L en $\mathbb{R}^{\Omega'\times\Omega'}$, y llamemos $L(ij,i'j')$ al valor de L en la fila i,j y columna i',j'. Observando (2.7) deducimos que

$$L(ij,i'j') = \begin{cases} i(\frac{m}{2}+j) & \text{si } i',j' = i-1,j+1\\ j(\frac{m}{2}+i) & \text{si } i',j' = i+1,j-1\\ -(2ij+\frac{m}{2}i+\frac{m}{2}j) & \text{si } i',j' = i,j\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

lo que se puede reescribir como

$$L(ij,i'j') = i(\frac{m}{2}+j)\delta_{i-1,i'}\delta_{j+1,j'} + j(\frac{m}{2}+i)\delta_{i+1,i'}\delta_{j-1,j'} - (2ij+\frac{m}{2}i+\frac{m}{2}j)\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}. \tag{2.8}$$

Para poder deducir y demostrar la autodualidad del proceso, según el Teorema 2.1, debemos encontrar una matriz S y una matriz Q tales que $SL^T = L^TS$ y $L^TQ = QL$, y por la Observación 2.1, si conocemos una medida reversible, ya tendremos un buen candidato para Q. Tratemos entonces de calcular esa posible matriz Q y luego tratemos de deducir alguna matriz S que nos sirva.

Necesitamos encontrar una medida reversible para el proceso con generador $\mathcal{L}^{SIP(m),2}$. Basándonos en la demostración de que la medida producto $\nu_\lambda^{\otimes\mathbb{Z}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \nu_\lambda : \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}} \to [0,1]$ con $\lambda \in (0,1)$ es una medida reversible para el proceso SIP(m) en $\mathbb{Z}$ (ver Sección 1.2), es fácil ver que la medida $\nu_\lambda^{(2)}$ definida en Ω' como

$$\nu_\lambda^{(2)}(i,j) := \nu_\lambda(i).\nu_\lambda(j) = (1-\lambda)^{\frac{m}{2}} \, \frac{\lambda^i}{i!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{\Gamma(\frac{m}{2})} \; (1-\lambda)^{\frac{m}{2}} \, \frac{\lambda^j}{j!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2})}$$

es una medida reversible para el SIP(m) con dos sitios. Por lo tanto, gracias a la Observación 2.1, obtenemos que la matriz $Q \in \mathbb{R}^{\Omega'\times\Omega'}$ que en la fila $i,j \in \Omega'$ y columna $i',j' \in \Omega'$ vale

$$Q(ij,i'j') := \nu_\lambda^{(2)}(i,j)\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} = (1-\lambda)^{\frac{m}{2}} \frac{\lambda^i}{i!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{\Gamma(\frac{m}{2})} \; (1-\lambda)^{\frac{m}{2}} \frac{\lambda^j}{j!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$$

verifica que $L^T Q = QL$. Como además $(1-\lambda)^m.\lambda^{i+j}$ es constante (ya que la cantidad de partículas se conserva), la matriz $\widehat{Q} \in \mathbb{R}^{\Omega'\times\Omega'}$ definida en la fila $i,j \in \Omega'$ y columna $i',j' \in \Omega'$ por

$$\widehat{Q}(ij,i'j') := \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{i!\Gamma(\frac{m}{2})} \; \delta_{i,i'} \; \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{j!\Gamma(\frac{m}{2})} \; \delta_{j,j'}$$

también verifica que $L^T\widehat{Q} = \widehat{Q}L$, y por simplicidad, elegiremos trabajar con $\widehat{Q}$ y no con Q.

Ahora que ya tenemos la matriz $\widehat{Q}$ busquemos una matriz S que conmute con L^T. Para eso, introduzcamos la siguiente notación:

Sean A y B dos matrices en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$. (A las filas y a las columnas de estas matrices las enumeramos desde el 0, es decir: 0, 1, 2, etc.). Definamos $A\otimes B$ como la matriz en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0^2\times\mathbb{N}_0^2}$ tal que en la fila i,j y la columna i',j' vale $A(i,i').B(j,j')$, donde $A(i,i')$ es el valor de la matriz A en la fila i y columna i' y $B(j,j')$ es el valor de la matriz B en la fila j y columna j'. Observemos que si e_i es el vector columna en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ que tiene un 1 en la fila i y en el resto un 0 (donde las filas también se enumeran a partir del 0), $A(i,i') = e_i^t A e_{i'}$ y $B(j,j') = e_j^t B e_{j'}$, por lo que $A\otimes B(ij,i'j') = (e_i^t A e_{i'}).(e_j^t B e_{j'})$.

Definamos ahora los siguientes tres operadores lineales que actúan en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ de la siguiente forma:

$$\begin{cases} K^+e_i := (i+\frac{m}{2})e_{i+1} \;\forall i\in\mathbb{N}_0 \\ K^-e_0 := 0 \;\text{ y }\; K^-e_i := ie_{i-1} \;\forall i\in\mathbb{N} \\ K^0e_i := (i+\frac{m}{4})e_i \;\forall i\in\mathbb{N}_0 \end{cases}$$

donde e_i, al igual que antes, es el vector columna que tiene todos ceros salvo un 1 en la fila i.

Veamos primero que K^+, K^- y K^0 satisfacen las mismas relaciones de conmutatividad que se satisfacen en el álgebra SU(1,1), que son:

$$\begin{cases} [\mathrm{K}^0,\mathrm{K}^+] = \mathrm{K}^+ \\ [\mathrm{K}^0,\mathrm{K}^-] = -\mathrm{K}^- \\ [\mathrm{K}^-,\mathrm{K}^+] = 2\mathrm{K}^0 \end{cases}$$

Comprobemos la primer igualdad, las otras se demuestran de forma análoga. Para esto, veamos que $[K^0, K^+]e_i = K^+e_i \ \forall i \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}[K^0, K^+]e_i &= K^0K^+e_i - K^+K^0e_i = K^0((i+\frac{m}{2})e_{i+1}) - K^+((i+\frac{m}{4})e_i))\\ &= (i+\frac{m}{2})K^0e_{i+1} - (i+\frac{m}{4})K^+e_i = (i+\frac{m}{2})(i+1+\frac{m}{4})e_{i+1} - (i+\frac{m}{4})(i+\frac{m}{2})e_{i+1}\\ &= (i+\frac{m}{2})e_{i+1} = K^+e_i.\end{aligned}$$

Por otro lado, definamos la matriz $G \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0^2\times\mathbb{N}_0^2}$ de la siguiente forma:

$$G := K^+ \otimes K^- + K^- \otimes K^+ - 2K^0 \otimes K^0 + \frac{m^2}{8} 1 \otimes 1,$$

donde 1 es la matriz identidad (1's en la diagonal y 0's en los otros lugares).

Afirmo que $G = L^T$. Para probarlo, debemos ver que $G(ij, i'j') = L^T(ij, i'j') \ \forall i, j, i', j' \in \mathbb{N}_0$. Por como definimos G, sabemos que si $i, j, i', j' \in \mathbb{N}_0$, $G(ij, i'j')$ es igual a

$$K^+(i,i')K^-(j,j') + K^-(i,i')K^+(j,j') - 2K^0(i,i')K^0(j,j') + \frac{m^2}{8}1(i,i')1(j,j').$$

Calculemos cada uno de esos términos por separado, y con el fin de no tener que analizar aparte el caso en que i sea igual a 0, definamos $0.e_{-1} := 0$.

- $K^+(i,i')K^-(j,j') = (e_i^tK^+e_{i'}).(e_j^tK^-e_{j'}) = (e_i^t(i'+\frac{m}{2})e_{i'+1}).(e_j^tj'e_{j'-1}) = (i'+\frac{m}{2})j'\delta_{i,i'+1}\delta_{j,j'-1}$
- $K^-(i,i')K^+(j,j') = (e_i^tK^-e_{i'}).(e_j^tK^+e_{j'}) = (e_i^ti'e_{i'-1}).(e_j^t(j'+\frac{m}{2})e_{j'+1}) = i'(j'+\frac{m}{2})\delta_{i,i'-1}\delta_{j,j'+1}$
- $-2K^0(i,i')K^0(j,j') = -2(e_i^tK^0e_{i'}).(e_j^tK^0e_{j'}) = -2(e_i^t(i'+\frac{m}{4})e_{i'}).(e_j^t(j'+\frac{m}{4})e_{j'})$
  $= -2(i'+\frac{m}{4})(j'+\frac{m}{4})\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$
- $\frac{m^2}{8}1(i,i')1(j,j') = \frac{m^2}{8}(e_i^t1e_{i'}).(e_j^t1e_{j'}) = \frac{m^2}{8}(e_i^te_{i'}).(e_j^te_{j'}) = \frac{m^2}{8}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}$

A partir de estas igualdades y usando (2.8) obtenemos que

$$\begin{aligned}G(ij,i'j') &= (i'+\frac{m}{2})j'\delta_{i,i'+1}\delta_{j,j'-1} + i'(j'+\frac{m}{2})\delta_{i,i'-1}\delta_{j,j'+1} - (2i'j' + \frac{m}{2}i' + \frac{m}{2}j')\delta_{i,i'}\delta_{j,j'}\\ &= L(i'j', ij) = L^T(ij, i'j'),\end{aligned}$$

como queríamos ver.

Queremos encontrar una matriz S en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ tal que S y L^T conmuten y por lo que acabamos de probar, es equivalente encontrar una matriz S en el mismo espacio tal que $SG = GS$. Para esto, como la matriz G está escrita en función de los operadores K^+, K^- y K^0, tendremos en cuenta las relaciones de conmutatividad que se satisfacen entre ellos, que son las mismas que las que se satisfacen en el álgebra SU(1,1), y por lo tanto, también consideraremos algunas propiedades que posee esta álgebra.

Como en el SU(1,1) hay tres operadores (comúnmente denotados por K_+, K_- y K_0) que verifican $[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm$ y $[K_-, K_+] = 2K_0$, y además, el "casimir" del SU(1,1) (que es un elemento "distinguido" que se encuentra en el centro del álgebra) es $\frac{1}{2}(K_+K_- + K_-K_+) - (K_0)^2$, se deduce que si K^+, K^- y K^0 son los operadores que habíamos definido, entonces el operador C$:= \frac{1}{2}(K^+K^- + K^-K^+) - (K^0)^2$ conmuta con $K^a \ \forall a \in \{+,-,0\}$ (es decir, $[C, K^+] = [C, K^-] = [C, K^0] = 0$).

Definamos el operador Δ de la siguiente forma: $\Delta(K^a) := K^a \otimes 1 + 1 \otimes K^a \ \forall a \in \{+,-,0\}$ y $\Delta(\sum_{a,b\in\{+,-,0\}} \alpha_{a,b}.\ K^a K^b) = \sum_{a,b\in\{+,-,0\}} \alpha_{a,b}.\ \Delta(K^a)\Delta(K^b))\ \forall a \in \{+,-,0\}$ y $\forall \alpha_{a,b} \in \mathbb{R}$.

Este operador es análogo al operador "co-producto" que se define en el SU(1,1), el cual, entre otras propiedades, preserva las relaciones de conmutatividad, por lo que, como C conmuta con $K^a\ \forall a \in \{+,-,0\}$, $\Delta(C)$ conmuta con $\Delta(K^a)\ \forall a \in \{+,-,0\}$.

Veamos ahora a qué es igual $\Delta(C)$:

$$\begin{aligned}
\Delta(C) &= \Delta\big[\frac{1}{2}(K^+K^- + K^-K^+) - (K^0)^2\big] \\
&= \frac{1}{2}\big[\Delta(K^+)\Delta(K^-) + \Delta(K^-)\Delta(K^+)\big] - (\Delta(K^0))^2 \\
&= \frac{1}{2}\big[(K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+)(K^-\otimes 1 + 1\otimes K^-) + (K^-\otimes 1 + 1\otimes K^-)(K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+)\big] \\
&\quad - (K^0\otimes 1 + 1\otimes K^0)^2 \\
&= \frac{1}{2}\big[K^+K^-\otimes 1 + K^+\otimes K^- + K^-\otimes K^+ + 1\otimes K^+K^- + K^-K^+\otimes 1 + K^-\otimes K^+ \\
&\quad + K^+\otimes K^- + 1\otimes K^-K^+\big] - \big[K^0K^0\otimes 1 + 2K^0\otimes K^0 + 1\otimes K^0K^0\big] \\
&= C\otimes 1 + 1\otimes C + K^+\otimes K^- + K^-\otimes K^+ - 2K^0\otimes K^0 = \big[C\otimes 1 + 1\otimes C - \frac{m^2}{8}1\otimes 1\big] + G \\
&= \big[\frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})\big]1\otimes 1 + G
\end{aligned}$$

donde en el anteúltimo paso usamos que $G = K^+\otimes K^- + K^-\otimes K^+ - 2K^0\otimes K^0 + \frac{m^2}{8}1\otimes 1$ y además, la última igualdad se debe a que

$$\begin{aligned}
&\big[C\otimes 1 + 1\otimes C - \frac{m^2}{8}1\otimes 1\big](ij,i'j') = (\frac{m}{4} - \frac{m^2}{16})\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} + (\frac{m}{4} - \frac{m^2}{16})\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} - \frac{m^2}{8}\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} \\
=&\big[2(\frac{m}{4} - \frac{m^2}{16}) - \frac{m^2}{8}\big]\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} = \frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})\delta_{i,i'}\delta_{j,j'} = \frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})1\otimes 1(ij,i'j') \ \ \forall i,j,i',j' \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\Delta(C) = \frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})1\otimes 1 + G$ y $\frac{m}{2}(1-\frac{m}{2})1\otimes 1$ conmuta con $\Delta(K^+)$, $\Delta(K^-)$ y $\Delta(K^0)$, para ver con qué elementos conmuta G busquemos los elementos con los que conmuta $\Delta(C)$. Y como C conmuta con $K^a\ \forall a \in \{+,-,0\}$ y Δ preserva las relaciones de conmutatividad, $\Delta(C)$ conmuta con $\Delta(K^a)\ \forall a \in \{+,-,0\}$. En particular, tomando $a = +$ obtenemos que G y $\Delta(K^+) = K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+$ conmutan.

Notemos que podíamos haber hecho cualquier otra elección, por ejemplo, $a = -$, $a = 0$ o incluso combinarlas ya que si G conmuta con $\Delta(K^+)$, $\Delta(K^-)$ y $\Delta(K^0)$, entonces conmuta con cualquier operador que se obtenga a partir de sumas, multiplicaciones por constantes y composiciones entre ellos. Y siguiendo los mismos pasos de la demostración que sirve para deducir y probar autodualidad aplicando el Teorema 2.1 para paseos aleatorios independientes y para el proceso de exclusión (ambos procesos simétricos y definidos en dos sitios) (Ver [3]), lo que se hace luego de haber visto que $K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+$ conmuta con G (aunque en realidad los operadores K^+, K^- y K^0 no se definen de la misma forma) es elegir como matriz S a $e^{K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+}$. Esta elección se debe a que en esos procesos uno ya conoce, a priori, una función de autodualidad para cada uno, y lo que se quiere hacer con este método es tratar de construirlas y no solamente verificar que sirven.

Definamos entonces $S := e^{K^+\otimes 1 + 1\otimes K^+}$ y veamos primero que S coincide $e^{K^+}\otimes e^{K^+}$:

$$
\begin{aligned}
e^{K^+\otimes 1+1\otimes K^+} &= e^{K^+\otimes 1}e^{1\otimes K^+} = \Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(K^+\otimes 1)^l\Big)\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}(1\otimes K^+)^t\Big)\\
&= \Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(K^+)^l\otimes 1\Big)\Big(\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}1\otimes (K^+)^t\Big) = \Big(\Big[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(K^+)^l\Big]\otimes 1\Big)\Big(1\otimes\Big[\sum_{t=0}^{\infty}\frac{1}{t!}(K^+)^t\Big]\Big)\\
&= (e^{K^+}\otimes 1)(1\otimes e^{K^+}) = e^{K^+}\otimes e^{K^+}
\end{aligned}
$$

Usando esta igualdad se deduce que si i, j e i', j' son configuraciones pertenecientes a Ω' (es decir, si $i, j, i', j' \in \mathbb{N}_0$),

$$
S(ij, i'j') = e^{K^+}(i,i').e^{K^+}(j,j') = (e_i^t e^{K^+} e_i').(e_j^t e^{K^+} e_j'),
$$

$$
\begin{aligned}
\text{con}\quad e_i^t e^{K^+} e_i' &= e_i^t\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(K^+)^l\Big)e_{i'} = e_i^t\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}(\frac{m}{2}+i')(\frac{m}{2}+1+i')...(\frac{m}{2}+l-1+i')\Big)e_{i'+l}\\
&= e_i^t\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}(\frac{m}{2}+i')(\frac{m}{2}+1+i')...(\frac{m}{2}+l-1+i')\Big)e_{i'+l}\\
&= e_i^t\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+l+i')}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\Big)e_{i'+l} = \Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+l+i')}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\Big)\delta_{i,i'+l}\\
&= \Big(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+l+i')}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\Big)\delta_{i-i',l}\ \delta_{l\geqslant 0} = \frac{1}{(i-i')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\delta_{i\geqslant i'}.
\end{aligned}
$$

Análogamente, $e_j^t e^{K^+} e_j' = \dfrac{1}{(j-j')!}\dfrac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j')}\delta_{j\geqslant j'}$. Por lo tanto,

$$
S(ij, i'j') = \frac{1}{(i-i')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\delta_{i\geqslant i'}\frac{1}{(j-j')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j')}\delta_{j\geqslant j'}.
$$

Como ya hemos encontrado una matriz $\widehat{Q}$ y una matriz S que cumplen que $L^T\widehat{Q} = \widehat{Q}L$ y $L^TS = SL^T$, por el Teorema 2.1, para encontrar una función de autodualidad debemos calcular la matriz $D' := \widehat{Q}^{-1}S$. Para esto, consideremos $i, j, i', j' \in \mathbb{N}_0$ y calculemos $D'(ij, i'j')$:

$$
\begin{aligned}
D'(ij,i'j') &= \big(\widehat{Q}^{-1}S\big)(ij,i'j') = \sum_{i'',j''\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\widehat{Q}^{-1}(ij,i''j'')S(i''j'',i'j')\\
&= \sum_{i'',j''\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}\Big(\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{i!\ \Gamma(\frac{m}{2})}\Big)^{-1}\delta_{i,i''}\ \Big(\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{j!\ \Gamma(\frac{m}{2})}\Big)^{-1}\delta_{j,j''}\ \frac{\delta_{i''\geqslant i'}}{(i''-i')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i'')}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\frac{\delta_{j''\geqslant j'}}{(j''-j')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j'')}{\Gamma(\frac{m}{2}+j')}\\
&= \frac{i!\ \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}\ \frac{j!\ \Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}\ \frac{\delta_{i\geqslant i'}}{(i-i')!}\ \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+i)}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\ \frac{\delta_{j\geqslant j'}}{(j-j')!}\ \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+j')}\\
&= \frac{i!}{(i-i')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+i')}\ \delta_{i\geqslant i'}\frac{j!}{(j-j')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+j')}\ \delta_{j\geqslant j'} = \prod_{l\in\{i,j\}}\frac{l!}{(l-l')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+l')}\ \delta_{l\geqslant l'}
\end{aligned}
$$

Concluimos entonces que la función $D' : \Omega'\times\Omega' \to \mathbb{R}$ asociada a la matriz $D' \in \mathbb{R}^{\Omega'\times\Omega'}$ definida por

$$
D'(ij,i'j') = \prod_{l\in\{i,j\}}\frac{l!}{(l-l')!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+l')}\ \delta_{l\geqslant l'}
$$

es una función de autodualidad para el SIP(m) con dos sitios, lo que es equivalente a que valga la siguiente igualdad:

$$\mathcal{L}^{SIP(m),2}D'(ij,\cdot)(i'j') = \mathcal{L}^{SIP(m),2}D'(\cdot,i'j')(ij) \;\; \forall i,j \text{ e } i',j' \in \Omega'. \tag{2.9}$$

2.4. Generalización de dos sitios a $\mathbb{Z}$

Veamos ahora cómo aplicar este hecho para deducir y demostrar autodualidad en el SIP(m) en $\mathbb{Z}$. Observemos primero que si para cada $k \in \mathbb{Z}$ y para cada η y ξ en $\Omega = {\mathbb{N}_0}^{\mathbb{Z}}$ definimos

$$D_k(\eta,\xi) := D'(\eta_k\eta_{k+1}, \xi_k\xi_{k+1}),$$

la autodualidad antes mencionada puede ser escrita como

$$\mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\eta,\cdot)(\xi) = \mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\cdot,\xi)(\eta) \;\; \forall\; \eta,\xi \in \Omega. \tag{2.10}$$

(Esta igualdad nos dice que si en el SIP(m) en $\mathbb{Z}$ únicamente miramos lo que ocurre entre los sitios k y k+1 y consideramos el proceso SIP(m) asociado a esos dos sitios, tenemos una relación de autodualidad).

Por otro lado, sabemos que el generador del SIP(m) en $\mathbb{Z}$ es

$$\mathcal{L}^{SIP(m)}f(\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\eta_k(\frac{m}{2}+\eta_{k+1})f(\eta^{k,k+1}) + \eta_{k+1}(\frac{m}{2}+\eta_k)f(\eta^{k+1,k}) - (2\eta_k\eta_{k+1} + \frac{m}{2}\eta_k + \frac{m}{2}\eta_{k+1})f(\eta)\Big],$$

con $f \in Dom(\mathcal{L})$ y $\eta \in \Omega$.

Basándonos en cómo es este generador y cómo son el generador y la función de autodualidad del $SIP(m)$ en dos sitios que acabamos de encontrar, definamos la función $D : \Omega \times \Omega_f \to \mathbb{R}$ (con $\Omega_f := \{\eta \in \Omega : \sum_{i\in\mathbb{Z}} \eta_i < \infty\}$) de la siguiente forma:

$$D(\eta,\xi) := \prod_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}\;\delta_{\eta_l\geqslant\xi_l}.$$

Observemos que D es una función bien definida ya que, como $\xi \in \Omega_f$, $\xi_l = 0$ para casi todo $l \in \mathbb{Z}$ y además, si $\xi_l = 0$, $\frac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)} = 1$. Por lo tanto, $D(\eta,\xi)$ resulta un producto con sólo finitos términos distintos de 1. Por la misma razón se deduce que D es una función local (sólo depende de los sitios en los que la configuración ξ tiene alguna partícula, que son finitos).

Notemos también que si definimos

$$A_k(\eta,\xi) := \prod_{l\notin\{k,k+1\}} \frac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}\;\delta_{\eta_l\geqslant\xi_l}$$

resulta

$$\mathcal{L}^{SIP(m)}D(\eta,\cdot)(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\eta,\xi)\mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\eta,\cdot)(\xi) \tag{2.11}$$

ya que

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}^{SIP(m)}D(\eta,\cdot)(\xi) = \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big[\xi_k(\frac{m}{2}+\xi_{k+1})D(\eta,\xi^{k,k+1}) + \xi_{k+1}(\frac{m}{2}+\xi_k)D(\eta,\xi^{k+1,k}) - (2\xi_k\xi_{k+1}+\frac{m}{2}\xi_k+\frac{m}{2}\xi_{k+1})D(\eta,\xi)\Big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\eta,\xi)\Big[\xi_k(\frac{m}{2}+\xi_{k+1})\frac{D(\eta,\xi^{k,k+1})}{A_k(\eta,\xi)} + \xi_{k+1}(\frac{m}{2}+\xi_k)\frac{D(\eta,\xi^{k+1,k})}{A_k(\eta,\xi)} - (2\xi_k\xi_{k+1}+\frac{m}{2}\xi_k+\frac{m}{2}\xi_{k+1})\frac{D(\eta,\xi)}{A_k(\eta,\xi)}\Big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\eta,\xi)\Big[\xi_k(\frac{m}{2}+\xi_{k+1})D_k(\eta,\xi^{k,k+1}) + \xi_{k+1}(\frac{m}{2}+\xi_k)D_k(\eta,\xi^{k+1,k}) - (2\xi_k\xi_{k+1}+\frac{m}{2}\xi_k+\frac{m}{2}\xi_{k+1})D_k(\eta,\xi)\Big] \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\eta,\xi)\mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\eta,\cdot)(\xi).
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$\mathcal{L}^{SIP(m)}D(\cdot,\xi)(\eta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} A_k(\eta,\xi)\mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\cdot,\xi)(\eta). \tag{2.12}$$

Y como en (2.10) vimos que $\mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\eta,\cdot)(\xi) = \mathcal{L}^{SIP(m),2}D_k(\cdot,\xi)(\eta) \quad \forall\ \eta,\xi \in \Omega$ y $\forall k \in \mathbb{Z}$, aplicando esto a las igualdades (2.11) y (2.12) resulta:

$$\mathcal{L}^{SIP(m)}D(\eta,\cdot)(\xi) = \mathcal{L}^{SIP(m)}D(\cdot,\xi)(\eta) \quad \forall\eta\in\Omega \text{ y } \forall\xi\in\Omega_f,$$

de lo que se deduce que el proceso SIP(m) en $\mathbb{Z}$ es autodual con función de dualidad $D : \Omega\times\Omega_f \to \mathbb{R}$ definida por $D(\eta,\xi) := \prod_{l\in\mathbb{Z}} \frac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}\ \delta_{\eta_l\geqslant\xi_l}$.

Observación 2.2. *La función de dualidad D que obtuvimos es un producto de funciones indexado por $\mathbb{Z}$, en donde la función l-ésima evaluada en η y ξ depende únicamente de la cantidad de partículas en los sitios l-ésimos de ambas configuaraciones. (Precisamente, $D(\eta,\xi) = \prod_{l\in\mathbb{Z}} d_l(\eta_l,\xi_l)$, con $d_l(\eta_l,\xi_l) := \frac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}\ \delta_{\eta_l\geqslant\xi_l}$). Esto se debe a las siguentes dos razones: La primera es que cuando elegimos la matriz S y la matriz $\widehat{Q}$ para el caso de dos sitios, ambas matrices se podían escribir de la forma $A\otimes B$ con $A,B\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}$ y además, la matriz $\widehat{Q}$ era diagonal. La segunda razón es que el generador del SIP(m) en $\mathbb{Z}$ se pudo descomponer en una suma de operadores que trabajan exclusivamente sobre dos sitios de la configuración, y los sitios correspondientes a un operador son distintos a los sitios correspondientes a otro operador.*

Capítulo 3

Límite Hidrodinámico para el SIP

Una de las herramientas que utilizaremos a lo largo de todo este capítulo es la autodualidad demostrada en el capítulo anterior. En la primer sección la usaremos para definir al semigrupo del SIP, mientras que en la segunda sección nos servirá para deducir el comportamiento del sistema a nivel macroscópico estudiando la interacción entre las partículas a nivel microscópico. Precisamente, lo que haremos luego de un pequeño análisis (el cual involucra autodualidad) será dar una definición de equilibrio local para el SIP y una definición de propagación de equilibrio local, la que vincula a los equilibrios locales con la evolución del proceso a través del tiempo. También daremos dos definiciones más débiles que las anteriores y probaremos que bajo ciertas hipótesis hay propagación de equilibrio local. Profundizaremos algunas ideas desarrolladas en [13] y nos basaremos en [7] y [11].

En lo que sigue, notaremos $\sum\limits_{i=1}^{n} \delta_{x_i}$ a la configuración que tiene partículas ubicadas en los sitios $x_i \in \mathbb{Z} \ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$ y tales que la cantidad de partículas ubicadas en el sitio x es igual a la cantidad de veces que aparece δ_x en la sumatoria.

Recordemos que si $\vec{\lambda} : \mathbb{Z} \to [0,1]$ es la función constante igual a λ, la medida producto $\nu_\lambda^{\otimes\mathbb{Z}} := \bigotimes\limits_{i\in\mathbb{Z}} \nu_\lambda$ con $\nu_\lambda(n) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+n)}{\Gamma(\frac{m}{2})n!}\lambda^n(1-\lambda)^{\frac{m}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$ es una medida invariante, y que además, la función $D : \Omega \times \Omega_f \to \mathbb{R}$ con $D(\eta, \xi) := \prod\limits_{l\in\mathbb{Z}} d_l(\eta, \xi)$ y $d_l(\eta, \xi) := \dfrac{\eta_l!}{(\eta_l - \xi_l)!} \dfrac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2} + \xi_l)} \delta_{\eta_l \geqslant \xi_l}$ es una función de autodualidad para el SIP(m), lo que se traduce en:

$$\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)}[D(\eta(t), \xi)] = \mathbb{E}_\xi^{SIP(m)}[D(\eta, \xi(t))]. \tag{3.1}$$

3.1. Definición del semigrupo del SIP(m)

En el capítulo 1 hemos introducido al proceso SIP(m) mediante su generador pero no hemos probado la existencia del semigrupo. El problema está en que, como la cantidad de partículas en el SIP(m) puede ser infinita, las tasas de salto no necesariamente están acotadas y por lo tanto, esa esperanza podría no estar bien definida.

Para solucionar el problema lo que haremos será elegir una familia de funciones $\mathcal{A}$ que sea densa con la topología producto en $C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$ (funciones continuas con dominio $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ y codominio $\mathbb{R}$), definiremos $S_t f$ para toda $f \in \mathcal{A}$ y luego extenderemos la definición a toda $f \in C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$ usando la densidad de $\mathcal{A}$.

Comencemos por observar que a un polinomio P con variables $\eta_{i_1},...,\eta_{i_k}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $i_1,...,i_k \in \mathbb{Z}$ lo podemos escribir como combinación lineal de las funciónes $D(\eta,\xi)$, donde $\eta \in \Omega$ está fijo y $\xi \in \Omega_f$ es la variable. Esto se debe a lo siguiente: $D(\eta,\xi) = \prod_{l\in\mathbb{Z}} d_l(\eta_l,\xi_l)$, con $d_l(\eta_l,\xi_l) := \dfrac{\eta_l!}{(\eta_l-\xi_l)!}\dfrac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}\,\delta_{\eta_l\geqslant\xi_l}$; en particular, $d(n,0)=1\ \forall n\in\mathbb{N}_0$. Sabemos también que cada uno de los términos de P es de la forma $c.\eta_{i_1}^{t_{i_1}}...\eta_{i_k}^{t_{i_k}}$, con $c\in\mathbb{R}$ y $t_{i_j}\in\mathbb{N}_0\ \forall\ 1\le j\le k$. Por lo tanto, si elegimos ξ una configuración que tenga partículas únicamente en los sitios $i_1,...,i_k$, notando que $\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_l)}$ es una constante que depende de ξ, $D(\eta,\xi)$ resulta una suma de términos similares a los de P (sólo varían las constantes y los exponentes). Por lo tanto, jugando con las constantes y variando la cantidad de partículas en los sitios $i_1,...,i_k$ de ξ podemos escribir a P como queríamos.

Veamos un ejemplo:

Supongamos que $P=2\eta_1\eta_5^3+10\eta_{-8}^2-19$. Si reemplazamos a ξ por las configuraciones que tienen exactamente una partícula en el sitio 1 y tienen 0, 1, 2 ó 3 partículas en el sitio 5 obtenemos:

- $D(\eta,\delta_1)=d(\eta_1,1)=\frac{2}{m}\eta_1=c_1\eta_1$
- $D(\eta,\delta_1+\delta_5)=d(\eta_1,1).d(\eta_5,1)=\frac{2}{m}\eta_1\frac{2}{m}\eta_5=c_2\eta_1\eta_5$
- $D(\eta,\delta_1+2\delta_5)=d(\eta_1,1).d(\eta_5,2)=\frac{2}{m}\eta_1\frac{2}{m}\frac{2}{m+2}\eta_5(\eta_5-1)=c_3\eta_1\eta_5^2+c_4\eta_1\eta_5$
- $D(\eta,\delta_1+3\delta_5)=d(\eta_1,1).d(\eta_5,3)=\frac{2}{m}\eta_1\frac{2}{m}\frac{2}{m+2}\frac{2}{m+4}\eta_5(\eta_5-1)(\eta_5-2)=c_5\eta_1\eta_5^3+c_6\eta_1\eta_5^2+c_7\eta_1\eta_5$

donde c_i es una constante que depende de $m\ \forall\ 1\le i\le n$. Por lo tanto,

$$2\eta_1\eta_5^3=\frac{2}{c_5}D(\eta,\delta_1+3\delta_5)-\frac{2c_6}{c_5c_3}D(\eta,\delta_1+2\delta_5)-\frac{2}{c_5c_2}(c_7-\frac{c_6c_4}{c_3})D(\eta,\delta_1+\delta_5).$$

Si ahora consideramos $\xi=\delta_{-8}$ y $\xi=0$ (es decir, la configuración que no tiene partículas en ningún lugar) resulta

- $D(\eta,0)=1$
- $D(\eta,\delta_{-8})=d(\eta_{-8},1)=\frac{2}{m}\eta_{-8}=c_1\eta_{-8}$,

y por lo tanto,

$$10\eta_{-8}-19=\frac{10}{c_1}D(\eta,\delta_{-8})-19D(\eta,0).$$

Concluimos entonces que si $P=2\eta_1\eta_5^3+10\eta_{-8}^2-19$,

$$P=\frac{2}{c_5}D(\eta,\delta_1+3\delta_5)-\frac{2c_6}{c_5c_3}D(\eta,\delta_1+2\delta_5)-\frac{2}{c_5c_2}(c_7-\frac{c_6c_4}{c_3})D(\eta,\delta_1+\delta_5)+\frac{10}{c_1}D(\eta,\delta_{-8})-19D(\eta,0).$$

Acabamos de ver que todo polinomio multivariado puede escribirse como combinación lineal de elementos de la familia $\mathcal{A}:=\{D(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ tales que $\xi\in\Omega_f\}$, es decir, que la familia $\tilde{\mathcal{A}}:=\{$combinaciones lineales de $\{D(\cdot,\xi):\Omega\to\mathbb{R}$ tales que $\xi\in\Omega_f\}\}$ es densa en los polinomios multivariados. Como estos polinomios son densos en las funciones locales de $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ y éstas son densas en $C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$, $\tilde{\mathcal{A}}$ también resulta denso en $C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$.

Por otro lado, si elegimos $D(\cdot,\xi) \in \mathcal{A}$, usando la relación de autodualidad dada en (3.1) podemos definir

$$S_t D(\cdot,\xi) := \mathbb{E}_\xi^{SIP(m)} D(\eta,\xi(t)),$$

ya que $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} D(\eta(t),\xi) = \mathbb{E}_\xi^{SIP(m)} D(\eta,\xi(t))$ (por lo que $S_t D(\cdot,\xi)$ coincidirá con $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} D(\eta(t),\xi)$, como queríamos). Además, al haber sólo finitas partículas en ξ, las tasas de salto sí están acotadas y por lo tanto, $\mathbb{E}_\xi^{SIP(m)} D(\eta,\xi(t))$ está bien definida.

Como ya hemos definido $S_t f$ para toda $f \in \mathcal{A}$, extendiendo por linealidad podemos definir $S_t f$ para toda $f \in \tilde{\mathcal{A}}$. Y como también vimos que $\tilde{\mathcal{A}}$ es denso en $C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$, para generalizar la definición de $S_t f$ a toda $f \in C(\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}})$ elegimos una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n = f$ y definimos $S_t f := \lim\limits_{n\to+\infty} S_t(f_n)$.

En primer lugar, notemos que bajo esta definición, $S_t f$ coincide con $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} f(\eta(t))$. Esto se debe a que

$$S_t f = \lim_{n\to+\infty} S_t f_n = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} f_n(\eta(t)) = \mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} f(\eta(t)),$$

donde el último paso vale por convergencia mayorada.

Y en segundo lugar, observemos que si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$ es otra sucesión tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = f$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} S_t f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_t g_n$ pues: si $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n - f_n = 0$, nuevamente, por convergencia mayorada, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}_\eta^{SIP(m)}[f_n(\eta(t)) - g_n(\eta(t))] = 0$, y como $S_t f$ y $S_t g$ coinciden con $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} f(\eta(t))$ y $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)} g(\eta(t))$ respectivamente, resulta $\lim\limits_{n\to+\infty} S_t f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} S_t g_n$, como queríamos ver.

Con estas dos observaciones concluimos que la definición que hemos dado para $S_t f$ es una buena definición y se corresponde con el semigrupo asociado al proceso con generador $\mathcal{L}^{SIP(m)}$.

3.2. Límite Hidrodinámico

Comencemos por probar una igualdad que nos será de gran utilidad:

$$\int D\Big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \ = \ \prod_{i=1}^n \frac{\vec{\lambda}(x_i)}{1-\vec{\lambda}(x_i)}, \tag{3.2}$$

de la que se deduce que si la función $\vec{\lambda} : \mathbb{Z} \to [0,1]$ es la función contante igual a λ,

$$\int D\Big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \ = \ \Big(\frac{\lambda}{1-\lambda}\Big)^n. \tag{3.3}$$

Para demostrar (3.2), lo primero que haremos es analizar el caso en que tenemos una sola casilla ocupada con partículas. Llamaremos x a la casilla ocupada y k a la cantidad de partículas, con $x \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}_0$. Debemos ver que

$$\int D\Big(\eta, k.\delta_x\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \ = \ \Big(\frac{\vec{\lambda}(x)}{1-\vec{\lambda}(x)}\Big)^k,$$

y esto se sigue de las siguientes igualdades:

$$\int D\Big(\eta, k.\delta_x\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\ = \int d\big(\eta_x, k\big)\ \nu_{\vec{\lambda}(x)}(d\eta_x)\ = \int \frac{\eta_x!}{(\eta_x-k)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+k)}\ \delta_{\eta_x\geq k}\ \nu_{\vec{\lambda}(x)}(d\eta_x)$$
$$= \sum_{\eta_x=k}^{+\infty} \frac{\eta_x!}{(\eta_x-k)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2}+k)}[1-\vec{\lambda}(x)]^{\frac{m}{2}}\frac{\lambda(x)^{\eta_x}}{\eta_x!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\eta_x)}{\Gamma(\frac{m}{2})}\ =\ \sum_{\eta_x=k}^{+\infty}\frac{\vec{\lambda}(x)^{\eta_x}}{(\eta_x-k)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+\eta_x)}{\Gamma(\frac{m}{2}+k)}[1-\vec{\lambda}(x)]^{\frac{m}{2}}$$
$$= \vec{\lambda}(x)^k[1-\vec{\lambda}(x)]^{\frac{m}{2}}\sum_{\eta_x=k}^{+\infty}\frac{\vec{\lambda}(x)^{\eta_x-k}}{(\eta_x-k)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+k+\eta_x-k)}{\Gamma(\frac{m}{2}+k)}$$
$$= \vec{\lambda}(x)^k[1-\vec{\lambda}(x)]^{\frac{m}{2}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\vec{\lambda}(x)^{j}}{j!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+k+j)}{\Gamma(\frac{m}{2}+k)} \overset{(*)}{=} \vec{\lambda}(x)^k[1-\vec{\lambda}(x)]^{\frac{m}{2}}[1-\vec{\lambda}(x)]^{-(\frac{m}{2}+k)} = \Big(\frac{\vec{\lambda}(x)}{1-\vec{\lambda}(x)}\Big)^k,$$

donde $(*)$ vale ya que si en la medida $\nu_{\vec{\lambda}(x)}$ reemplazamos m por $m+2k$, $\nu_{\vec{\lambda}(x)}$ sigue siendo una medida de probabildad.

Aplicando el resultado anterior y notando que $\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}$ lo podemos reescribir como $\sum_{i=1}^{\tilde{n}} k_i\delta_{\tilde{x}_i}$ con $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_n$ todos distintos entre sí (precisamente, $\tilde{n} := \#\{x_1, ..., x_n\}$, $\tilde{x}_1 := x_1$, $\tilde{x}_{i+1} := x_{\text{ínf}\{j\geq i:\ x_j\notin\{\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_i\}\}}$ $\forall\ 1\leq i\leq \tilde{n}-1$ y $k_i := \#\{j\in\{1,...,n\} : \tilde{x}_i = x_j\}\ \forall\ 1\leq i\leq\tilde{n}$), nos queda que

$$\int D\Big(\eta, \sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\ =\ \int D\Big(\eta, \sum_{i=1}^{\tilde{n}}k_i\delta_{\tilde{x}_i}\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\ =\ \int\prod_{j\in\mathbb{Z}} d\Big(\eta_j, \big(\sum_{i=1}^{\tilde{n}}k_i\delta_{\tilde{x}_i}\big)_j\Big)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)$$
$$= \int\prod_{i=1}^{\tilde{n}} d(\eta_{\tilde{x}_i}, k_i)\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\ =\ \prod_{i=1}^{\tilde{n}}\Big[\int d(\eta_{\tilde{x}_i}, k_i)\ \nu_{\vec{\lambda}(\tilde{x}_i)}(d\eta_{\tilde{x}_i})\Big] = \prod_{i=1}^{\tilde{n}}\Big(\frac{\vec{\lambda}(\tilde{x}_i)}{1-\vec{\lambda}(\tilde{x}_i)}\Big)^{k_i}\ =\ \prod_{i=1}^{n}\frac{\vec{\lambda}(x_i)}{1-\vec{\lambda}(x_i)},$$

donde la tercer igualdad vale ya que $\big(\sum_{i=1}^{\tilde{n}}k_i\delta_{\tilde{x}_i}\big)_j = \begin{cases} k_i & \text{si } j=\tilde{x}_i \text{ para algún } 1\leq i\leq\tilde{n} \\ 0 & \text{caso contrario}\end{cases}$ y además, $d(n,0) = 1\ \forall\ n\in\mathbb{N}_0$. Por lo tanto, hemos probado (3.2).

3.2.1. Equilibrio local

En lo que sigue, consideraremos a $\mathbb{R}$ como la escala macroscópica y a $\mathbb{Z}$ como la escala microscópica $\forall N\in\mathbb{N}$, identificando al punto $u\in\mathbb{R}$ con $[uN]\in\mathbb{Z}$ y al punto $x\in\mathbb{Z}$ con $\frac{x}{N}\in\mathbb{R}\ \ \forall N\in\mathbb{N}$.

Dado un perfil de densidad macroscópica $\pi:\mathbb{R}\to[0,1]$ (función continua), queremos interpretarlo en términos macroscópicos asociándole una sucesión de medidas $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$. Si estas medidas fuesen invariantes, la densidad de partículas por sitio se mantendría constante a lo largo del tiempo, y por esta razón, diremos que el sistema se encuentra en equilibrio. Pero si las medidas no fuesen invariantes no ocurre lo mismo. Es por esto que desearíamos tener alguna otra noción de equilibrio, aunque sea local; nos gustaría que para valores de N suficientemente grandes las medidas μ_N se comporten en un entorno del sitio microscópico $[uN]$ como una medida invariante vinculada directamente con el valor $\pi(u)$.

Hemos visto que la medida producto cuyas marginales son Gammas discretas con parámetro constante entre 0 y 1 es una medida invariante. En particular, si $u\in\mathbb{R}$, la medida producto $\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}}\nu_{\pi(u)}$

con marginales constantes $\nu_{\pi(u)}$ resulta una medida invariante. Consideremos ahora la sucesión de medidas $\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}} := \bigotimes_{i\in\mathbb{Z}} \nu_{\vec{\lambda_N}(i)}$ con $\vec{\lambda_N} : \mathbb{Z} \to [0,1]$ y $\vec{\lambda_N}(x) := \pi(\frac{x}{N})$, y probemos que vale la siguiente igualdad:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]}\psi] = \mathbb{E}_{\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\psi], \tag{3.4}$$

donde $\tau_{[uN]}\psi(\eta) := \psi(\tau_{[uN]}(\eta))$ y $(\tau_{[uN]}(\eta))_x = \eta_{x+[uN]}$, $x \in \mathbb{Z}$, $u \in \mathbb{R}$. (A la medida $\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}$ que acabamos de definir se la llama "medida producto con parámetro de variación lenta asociada al perfil π").

Para demostrar (3.4), comencemos analizando el caso en que $\psi \in \mathcal{A}$, con $\mathcal{A} := \{D(\cdot, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}) : n \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{Z}\ \forall\ 1 \le i \le n\}$, y luego extendamos a toda función local usando que las combinaciones locales de funciones de la familia $\mathcal{A}$ son densas, lo que hemos probado en la primer sección de este capítulo.

Sea $\psi = D(\cdot, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i})$. Siguiendo la notación descripta en esa misma sección, Ψ se puede reescribir como $D(\cdot, \sum_{i=1}^{\tilde{n}} k_i.\delta_{\tilde{x}_i})$, con $\tilde{x}_1, ..., \tilde{x}_{\tilde{n}} \in \mathbb{Z}$ todos distintos entre sí y k_i igual a la cantidad de partículas en el sitio $\tilde{x}_i$ $\forall\ 1 \le i \le \tilde{n}$. Para esta función Ψ se tiene:

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]}\psi] = \\
&\quad = \lim_{N\to+\infty} \int D\big(\tau_{[uN]}\eta, \sum_{i=1}^{\tilde{n}} k_i.\delta_{\tilde{x}_i}\big)\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) = \lim_{N\to+\infty} \int \prod_{i=1}^{\tilde{n}} d\big((\tau_{[uN]}\eta)_{\tilde{x}_i}, k_i\big)\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \\
&\quad = \lim_{N\to+\infty} \int \prod_{i=1}^{\tilde{n}} d\big(\eta_{\tilde{x}_i+[uN]}, k_i\big)\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \quad = \lim_{N\to+\infty} \int D\big(\eta, \sum_{i=1}^{\tilde{n}} k_i.\delta_{\tilde{x}_i+[uN]}\big)\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \\
&\quad = \lim_{N\to+\infty} \int D\big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]}\big)\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \quad \overset{(3.2)}{=} \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda_N}(x_i+[uN])}{1-\vec{\lambda_N}(x_i+[uN])} \\
&\quad \overset{(*)}{=} \prod_{i=1}^{n} \frac{\pi(u)}{1-\pi(u)} \quad = \Big(\frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}\Big)^n \overset{(3.3)}{=} \int D\big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}\big) \nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \\
&\quad = \mathbb{E}_{\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}}[D(\cdot, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i})] \ = \ \mathbb{E}_{\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\psi]
\end{aligned}$$

donde $(*)$ vale ya que $\forall\ 1 \le i \le n$, $\vec{\lambda_N}(x_i+[uN]) = \pi(\frac{x_i+[uN]}{N})$; y por ser π una función continua, al tomar límite cuando $N \to +\infty$ obtenemos $\pi(u)$.

Veamos ahora que (3.4) vale para toda ψ función local: Sea $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ tal que $\psi_j \rightrightarrows \psi$ uniformemente. Aplicando convergencia mayorada y usando que la igualdad (3.4) vale para toda ψ_j con $j \in \mathbb{N}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]}\psi] &= \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]} \lim_{j\to+\infty} \psi_j] = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\lim_{j\to+\infty} \tau_{[uN]}\psi_j] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \lim_{j\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]}\psi_j] = \lim_{j\to+\infty} \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\tau_{[uN]}\psi_j] \\
&= \lim_{j\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\psi_j] = \mathbb{E}_{\nu_{\pi(u)}^{\otimes\mathbb{Z}}}[\psi],
\end{aligned}$$

donde el intercambio de límites en el anteúltimo paso se debe a que $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge a ψ uniformemente.

Notemos que la igualdad dada en (3.4) nos dice, justamente, que si N es suficientemente grande, la medida $\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}$ con $\vec{\lambda}_N(x) = \pi(\frac{x}{N})$ se comporta en torno al representante microscópico de u como la medida producto $\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\pi(u)}$, la cual vimos que era invariante. A partir de esto surge la siguiente definición:

Definición 3.1. *Sea $(\vec{\lambda}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio $\mathbb{Z}$ y codominio $(0,1)$ y sea $\pi : \mathbb{R} \to (0,1)$ una función continua (que llamaremos "perfil" o "perfil de densidad"). Decimos que la sucesión de medidas $\big(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ es un equilibrio local asociado a π si*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}}[\tau_{[uN]}\psi] = \mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\pi(u)}}[\psi] \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \forall \psi \text{ local.} \tag{3.5}$$

Observemos que por la densidad de $\tilde{\mathcal{A}}$ en las funciones locales y por la linealidad de la esperanza podemos reemplazar en (3.5) "$\forall\psi$ local" por "$\forall\ \psi \in \mathcal{A}$" (recordemos que $\tilde{\mathcal{A}}$ era el conjunto de combinaciones lineales de elementos de $\mathcal{A}$). Además, si $\psi = D(\cdot, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i})$, hemos visto que $\mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}}[\tau_{[uN]}\psi] = \int D(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]})\ \nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}(d\eta)$ y que $\mathbb{E}^{\otimes\mathbb{Z}}_{\nu_{\pi(u)}}[\psi] = \int D(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i})\ \nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\pi(u)}(d\eta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\pi(u)}{1-\pi(u)} = \big(\frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}\big)^n$. Por lo tanto, la definición anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 3.2. *Sea $(\vec{\lambda}_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones con dominio $\mathbb{Z}$ y codominio $(0,1)$ y sea $\pi : \mathbb{R} \to (0,1)$ una función continua (que llamaremos "perfil" o "perfil de densidad"). Decimos que la sucesión de medidas $\big(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ es un equilibrio local asociado a π si*

$$\lim_{N\to+\infty} \int D(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]})\ \nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}(d\eta) = \Big(\frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}\Big)^n \tag{3.6}$$

$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$.

Y a partir de esta definición, podemos generalizar la noción de equilibrio local asociado al perfil π a cualquier sucesión de medidas $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ como sigue:

Definición 3.3. *Sea $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas en $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$ y sea $\pi : \mathbb{R} \to (0,1)$ una función continua. Decimos que $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ es un equilibrio local asociado al perfil π si*

$$\lim_{N\to+\infty} \int D(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]})\ \mu_N(d\eta) = \Big(\frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}\Big)^n \tag{3.7}$$

$\forall u \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$.

Observación 3.1. *Dada una función continua $\pi : \mathbb{R} \to (0,1)$, la sucesión de medidas producto con parámetro de variación lenta asociada al perfil π (es decir, la sucesión $\big(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ con $\vec{\lambda}_N(x) := \pi(\frac{x}{N})$ $\forall x \in \mathbb{Z}$ y $\forall N \in \mathbb{N}$) es un equilibrio local para π.*

Como ya sabemos relacionar un perfil π con una sucesión de medidas $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ en la escala macroscópica, sería interesante analizar qué ocurre con respecto a la condición de equilibrio local en un sistema que fue evolucionado a lo largo del tiempo y en el que, a tiempo inicial, la sucesión $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ era un equilibrio local asociado al perfil π. (Es necesario notar que el tiempo quizás deba ser apropiadamente acelerado para poder notar cambios en el sistema). Es por esto que surge la siguiente definición:

Definición 3.4 (Propagación de equilibrio local)**.** *Decimos que un equilibrio local $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ asociado al perfil π se converva en el tiempo (o que hay propagación de equilibrio local) si existe una renormalización temporal θ_N y una función $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ tales que*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}_{S^N_{t\theta_N}\mu_N}[\tau_{[uN]}\psi] = \mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\tilde{\rho}(t,u)}}[\psi] \quad \forall u \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0},\ \forall\ \psi \text{ local,} \tag{3.8}$$

donde $\rho(t,u)$ es la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales con condición inicial $\pi(u)$ y $S^N_{t\theta_N}\mu_N$ es la distribución a tiempo $t\theta_N$ del proceso SIP(m) en $\mathbb{Z}$ que inicia con medida μ_N. A esa ecuación diferencial la llamamos "ecuación hidrodinámica".

Observación 3.2. *La condición* (3.8) *se puede reescribir así:*

$$\lim_{N\to+\infty} \int \mathbb{E}_\eta[\psi(\tau_{[uN]}\eta(t\theta_N))]\ \mu_N(d\eta) = \mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\tilde{\rho}(t,u)}}[\psi(\eta)]. \tag{3.9}$$

Además, por el mismo argumento de densidad que vimos antes, se puede reemplazar "$\forall\ \psi$ local" por "$\forall\ \psi \in \mathcal{A}$", con $\mathcal{A} := \{D(\cdot, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}) : n \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathbb{Z}\ \forall\ 1 \leq i \leq n\}$". Y dado que, por (3.3),

$$\mathbb{E}_{\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\tilde{\rho}(t,u)}}[D(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i})] = \Big(\frac{\tilde{\rho}(t,u)}{1-\tilde{\rho}(t,u)}\Big)^n,$$

la definición anterior es equivalente a la siguiente:

Definición 3.5. *Dado que un equilibrio local $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ asociado al perfil π, decimos que hay propagación de equilibrio local si existe una renormalización temporal θ_N y una función $\rho : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ tales que*

$$\lim_{N\to+\infty} \int \mathbb{E}_\eta\Big[D\big(\tau_{[uN]}\eta(t\theta_N), \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}\big)\Big]\ \mu_N(d\eta) = \Big(\frac{\tilde{\rho}(t,u)}{1-\tilde{\rho}(t,u)}\Big)^n\ \forall x_1,...,x_n \in \mathbb{Z},\ \forall u \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \tag{3.10}$$

donde $\tilde{\rho}(t,u)$ es función de la solución de una ecuación diferencial en derivadas parciales con condición inicial $\pi(u)$. A esta ecuación la llamamos "ecuación hidrodinámica".

A continuación, lo que haremos será demostrar el siguiente teorema sobre propagación de equilibrio local:

Teorema 3.1. *Sea $\pi : \mathbb{R} \to (0,1)$ una función Lipschitz tal que $\pi(x) < 1-\delta\ \forall\ x \in \mathbb{R}$, con $\delta > 0$, y consideremos la sucesión de medidas producto con parámetro de variación lenta asociada al perfil π (es decir, la sucesión $\big(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}\big)_{N\in\mathbb{N}}$ con $\vec{\lambda}_N(x) = \pi(\frac{x}{N})\ \forall x \in \mathbb{Z}$ y $\forall N \in \mathbb{N}$). Entonces, esta sucesión verifica la propiedad de propagación de equilibrio local asociada a la función $\tilde{\rho} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ y a la renormalización $\theta_N := N^2$, donde $\tilde{\rho}(t,u) := \frac{\rho(t,u)}{1+\rho(t,u)}$ y $\rho(t,u)$ es solución de la ecuación diferencial*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho(t,u)}{\partial t} = \dfrac{m}{2}\dfrac{\partial^2\rho(t,u)}{\partial u^2} \\ \rho(0,u) \ = \dfrac{\pi(u)}{1-\pi(u)} \end{cases} \tag{3.11}$$

$\forall t \geq 0$ y $\forall$ $u \in \mathbb{R}$.

Antes de dar la demostración, definamos primero una función, llamada "función de correlación", que nos será de gran utilidad:

$$\Psi(\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}, x_1, ..., x_n : t) := \int \mathbb{E}_{\eta}^{SIP(m)}\Big[D\Big(\eta(t), \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}\Big)\Big]\ \nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\ -\ \prod_{i=1}^{n} \int \mathbb{E}_{\eta}^{SIP(m)}\Big[D\Big(\eta(t), \delta_{x_i}\Big)\Big]\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)$$

con $x_1, ..., x_n \in \mathbb{Z}$ y $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Veamos que esta función coincide con

$$\mathbb{E}_{x_1,...,x_n}^{SIP(m)}\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda}(X_i(t))}{1-\vec{\lambda}(X_i(t))}\Big)\ -\ \mathbb{E}_{x_1,...,x_n}^{IRW(m)}\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda}(Y_i(t))}{1-\vec{\lambda}(Y_i(t))}\Big), \tag{3.12}$$

donde $X_1, ..., X_n$ son n partículas que se mueven con la dinámica del SIP(m) y $Y_1, ..., Y_n$ son n paseos aleatorios independiente a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado, cuyas posiciones a tiempo t están representadas por $X_i(t)$ e $Y_i(t)$, y además, $X_i(0) = Y_i(0) = x_i \ \ \forall\ 1 \leq i \leq n$.

Aplicando la relación dada por la dualidad, intercambiando las esperanzas con las integrales y usando (3.2) nos queda que

$$\begin{aligned}
&\Psi(\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}, x_1, ..., x_n : t) = \\
&\qquad = \mathbb{E}_{x_1,...,x_n}^{SIP(m)}\Big[\int D\Big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i(t)}\Big)\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\Big]\ -\ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{x_i}^{SIP(m)}\Big[\int D\Big(\eta, \delta_{X_i(t)}\Big)\nu_{\vec{\lambda}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta)\Big] \\
&\qquad = \mathbb{E}_{x_1,...,x_n}^{SIP(m)}\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda}(X_i(t))}{1-\vec{\lambda}(X_i(t))}\Big)\ -\ \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{x_i}^{SIP(m)}\Big(\frac{\vec{\lambda}(X_i(t))}{1-\vec{\lambda}(X_i(t))}\Big).
\end{aligned}$$

Y como vale que

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{x_i}^{SIP(m)}\Big(\frac{\vec{\lambda}(X_i(t))}{1-\vec{\lambda}(X_i(t))}\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{x_i}^{IRW(m)}\Big(\frac{\vec{\lambda}(Y_i(t))}{1-\vec{\lambda}(Y_i(t))}\Big) = \mathbb{E}_{x_i,...,x_n}^{IRW(m)}\Big(\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda}(Y_i(t))}{1-\vec{\lambda}(Y_i(t))}\Big),$$

(donde la primer igualdad se debe a que la dinámica de una partícula del SIP(m) que se encuentra sola en todo $\mathbb{Z}$ coincide con la dinámica de un paseo aleatorio a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado y la segunda se debe a que los n paseos aleatorios son independientes entre sí), obtenemos la igualdad deseada.

Ahora sí, demostremos el teorema:

Demostración: Debemos calcular

$$\lim_{N\to+\infty} \int \mathbb{E}_{\eta}\Big[D\Big(\tau_{[uN]}\eta(N^2 t), \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}\Big)\Big]\ \nu_{\vec{\lambda}_N}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta), \tag{3.13}$$

y por la cuenta que hemos hecho al demostrar (3.4), la igualdad anterior equivale a:

$$\lim_{N\to+\infty} \int \mathbb{E}_{\eta}\Big[D\Big(\eta(N^2 t), \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]}\Big)\Big]\ \nu_{\vec{\lambda}_N}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta). \tag{3.14}$$

Usando que el primer término de $\Psi(\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}, [u_1 N], ..., [u_n N] : N^2 t)$ coincide con el primer término de (3.12) pero reemplazando x_i por $[u_i N]$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$ y t por $N^2 t$, luego aplicando la definición de Ψ y por último considerando la independencia entre los paseos aleatorios, nos queda lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\int \mathbb{E}_\eta\Big[D\Big(\eta(N^2t), \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+[uN]}\Big)\Big]\ \nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}(d\eta) \ &= \ \mathbb{E}^{SIP(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big(\prod_{i=1}^n \frac{\vec{\lambda_N}(X_i(N^2t))}{1-\vec{\lambda_N}(X_i(N^2t))}\Big) \\
= \ \Psi(\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}, x_1+[uN], ..., x_n+[uN] : N^2t) \ &+ \ \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big(\prod_{i=1}^n \frac{\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))}{1-\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))}\Big) \\
= \ \Psi(\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}, x_1+[uN], ..., x_n+[uN] : N^2t) \ &+ \ \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big(\prod_{i=1}^n f(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t)))\Big) \\
= \ \Psi(\nu_{\vec{\lambda_N}}^{\otimes\mathbb{Z}}, x_1+[uN], ..., x_n+[uN] : N^2t) \ &+ \ \prod_{i=1}^n \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))\big)\Big],
\end{aligned}$$

con $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Veamos entonces a qué converge cada uno de esos términos. Comencemos por el segundo:

Por un lado, observemos que si elegimos $t = 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(0))\big)\Big] = \frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}$. Esto se debe a que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(0))\big)\Big] = \lim_{N\to+\infty} f\big(\vec{\lambda_N}(x_i+[uN])\big) = f\big(\pi(u)\big) = \frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}, \tag{3.15}$$

donde en la anteúltima igualdad usamos $\lim\limits_{N\to+\infty} \vec{\lambda_N}(x_i+[uN]) = \lim\limits_{N\to+\infty} \pi(\frac{(x_i+[uN])}{N}) = \pi(u)$.

Por otro lado, al ser $(Y_i(s))_{s\geq 0}$ un paseo aleatorio a tiempo continuo, del Teorema 1.4 de [2] se deduce que $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $\frac{Y_i(N^2t)}{N}$ converge en distribución a una variable aleatoria W_t con distribución normal $\mathcal{N}(0, mt)$, y por lo tanto,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))\big)\Big] = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\Big(\pi\Big(\frac{Y_i(N^2t)}{N}\Big)\Big)\Big] = \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\big[f\circ\pi(W_t)\big]. \tag{3.16}$$

Como la función de densidad de W_t la conocemos, es fácil chequear que $\mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\big[f\circ\pi(W_t)\big]$ satisface la ecuación del calor con constante $\frac{m}{2}$, es decir, $\rho(t,u) := \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\big[f\circ\pi(W_t)\big]$ verifica:

$$\frac{\partial\rho(t,u)}{\partial t} = \frac{m}{2}\frac{\partial^2\rho(t,u)}{\partial u^2}.$$

Además, por (3.15), $\rho(0,u) = \frac{\pi(u)}{1-\pi(u)}$. Por lo tanto,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i[uN]}\Big[f(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t)))\Big] = \rho(t,u)\ \forall t \geq 0 \text{ y } \forall\ 1 \leq i \leq n, \tag{3.17}$$

donde $\rho(t,u)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho(t,u)}{\partial t} = \dfrac{m}{2}\dfrac{\partial^2\rho(t,u)}{\partial u^2} \\ \rho(0,u) = \dfrac{\pi(u)}{1-\pi(u)}. \end{cases} \tag{3.18}$$

Definiendo $\tilde{\rho}(t,u) := \frac{\rho(t,u)}{1+\rho(t,u)}$ $\forall t \geq 0$ y $\forall u \in \mathbb{R}$, como $\frac{\tilde{\rho}(t,u)}{1-\tilde{\rho}(t,u)} = \rho(t,u)$ y $\tilde{\rho}(0,u) = \pi(u)$, al reemplazar en (3.17) obtenemos:

$$\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_i+[uN]}\Big[f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))\big)\Big] = \prod_{i=1}^{n} \frac{\tilde{\rho}(t,u)}{1-\tilde{\rho}(t,u)}. \tag{3.19}$$

Para finalizar la demostración del teorema sólo falta calcular a qué converge, cuando N tiende a $+\infty$, la función $\Psi(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda_N}}, x_1+[uN], ..., x_n+[uN] : N^2t)$. Para esto vamos a utilizar un resultado que probaremos en el capítulo 5, que básicamente dice que si consideramos sobre $\mathbb{Z}$ n partículas que se mueven con la dinámica del SIP(m) y n partículas que se mueven independientemente con la dinámica de paseos aleatorios simples y simétricos a tasa $\frac{m}{2}$ y las acoplamos apropiadamente, al tomar límite cuando t tiende a $+\infty$ resulta:

$$\frac{|X_i(t)-Y_i(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \ \forall\ 1 \leq i \leq n,$$

donde $X_i(t)$ e $Y_i(t)$ representan, respectivamente, las posiciones a tiempo t de la i-ésima partícula del SIP y de la i-ésima partícula del paseo aleatorio y además $X_i(0) = Y_i(0)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$. En particular, si reemplazamos t por N^2t y hacemos tender N a $+\infty$ nos queda:

$$\Big|\frac{X_i(N^2t)}{N} - \frac{Y_i(N^2t)}{N}\Big| \xrightarrow{P} 0 \ \ \forall\ 1 \leq i \leq n. \tag{3.20}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned}
&\Psi(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda_N}},[u_1N], ..., [u_nN] : N^2t) = \\
&\quad=\mathbb{E}^{SIP(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda_N}(X_i(N^2t))}{1-\vec{\lambda_N}(X_i(N^2t))}\Big] - \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} \frac{\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))}{1-\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))}\Big] \\
&\quad=\mathbb{E}^{SIP(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} f\big(\vec{\lambda_N}(X_i(N^2t))\big)\Big] - \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} f\big(\vec{\lambda_N}(Y_i(N^2t))\big)\Big] \\
&\quad=\mathbb{E}^{SIP(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{X_i(N^2t)}{N}\Big)\Big)\Big] - \mathbb{E}^{IRW(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{Y_i(N^2t)}{N}\Big)\Big)\Big] \\
&\quad=\mathbb{E}^{acop(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}\Big[\prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{X_i(N^2t)}{N}\Big)\Big) - \prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{Y_i(N^2t)}{N}\Big)\Big)\Big],
\end{aligned}$$

donde $\mathbb{E}^{acop(m)}_{x_1+[uN],...,x_n+[uN]}$ representa la esperanza en el acoplamiento que hemos descripto con posiciones iniciales $X_i(0) = Y_i(0) = x_i + [uN]$ $\quad\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Por otro lado, sabemos que la función $f \circ \pi$ está acotada superiormente y es Lipschitz pues:

- •) $\pi(x) < 1-\delta$, por lo que $f \circ \pi(x) = \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} < \frac{1-\delta}{\delta} =: c$ $\ \forall x \in \mathbb{R}$,
- •) $$\begin{aligned}|f\circ\pi(x) - f\circ\pi(x)| &= \Big|\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} - \frac{\pi(y)}{1-\pi(y)}\Big| = \Big|\frac{\pi(x)-\pi(y)}{(1-\pi(x))(1-\pi(y))}\Big| \leq \frac{1}{\delta^2}|\pi(x)-\pi(y)| \\ &\leq \frac{1}{\delta^2}c'|x-y| = c''|x-y| \ \ \forall x \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

con c' la constante de Lipschitz para π y $c'' := \frac{c'}{\delta^2}$.

Usando estas dos propiedades de la función $f \circ \pi$ junto con (3.20) demostremos por inducción en n que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}^{acop(m)}_{x_1+[uN],...,x-n+[uN]} \Big[\Big| \prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{X_i(N^2t)}{N}\Big)\Big) \; - \; \prod_{i=1}^{n} f\Big(\pi\Big(\frac{Y_i(N^2t)}{N}\Big)\Big)\Big| \Big] = 0, \tag{3.21}$$

de lo que se deduce que

$$\lim_{N\to+\infty} \Psi(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}, [u_1N], ..., [u_nN] : N^2t) = 0.$$

Para abreviar notación, definamos $A^i_N := \dfrac{X_i(N^2t)}{N}$, $B^i_N := \dfrac{Y_i(N^2t)}{N}$ y $g = f \circ \pi$, con lo cual, (3.20) equivale a que $|A^i_N - B^i_N| \xrightarrow{P} 0 \; \forall \; 1 \le i \le n$.

- Si $n = 1$: $\quad |g(A^1_N) - g(B^1_N)| \le c''|A^1_N - B^1_N| \xrightarrow{P} 0$, por lo tanto, $|g(A^1_N) - g(B^1_N)| \xrightarrow{P} 0$.

Y como la función g es acotada, la convergencia no sólo es en probabilidad, sino que también es en L^1.

- Paso inductivo: Supongamos que vale para $n-1$ y veamos que vale para n:

$$\begin{aligned}
\Big|\prod_{i=1}^{n} g(A^i_N) - \prod_{i=1}^{n} g(B^i_N)\Big| &\le \Big|\prod_{i=1}^{n-1} g(A^i_N) - \prod_{i=1}^{n-1} g(B^i_N)\Big| \; |g(A^n_N)| \; + \; |g(A^n_N) - g(B^n_N)| \; \Big|\prod_{i=1}^{n-1} g(B^i_N)\Big| \\
&\le \Big|\prod_{i=1}^{n-1} g(A^i_N) - \prod_{i=1}^{n-1} g(B^i_N)\Big| \quad c \quad + \quad |g(A^n_N) - g(B^n_N)| \quad c^{n-1}.
\end{aligned}$$

Como c y c^{n-1} son constantes y los otros dos términos convergen a 0 en L^1 resulta $\Big|\prod_{i=1}^{n} g(A^i_N) - \prod_{i=1}^{n} g(B^i_N)\Big| \xrightarrow{\mathrm{L}^1} 0$, y por esta razón, vale (3.21).

Concluimos entonces que $\lim_{N\to+\infty} \Psi(\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}, x_1 + [uN], ..., x_n + [uN] : N^2t)| = 0$. Y a partir de este resultado y de (3.19), tomando límite cuando $N \to +\infty$ en (3.13) nos queda que

$$\lim_{N\to+\infty} \int \mathbb{E}_\eta\Big[D\Big(\eta(N^2t), \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i+[uN]}\Big)\Big] \; \nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\vec{\lambda}_N}(d\eta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\tilde\rho(t,u)}{1-\tilde\rho(t,u)},$$

donde $\tilde\rho(t,u)$ está unívocamente caracterizada por la ecución del calor. Por lo tanto, queda demostrado el teorema. □

Capítulo 4

Boundary Driven SIP

Comencemos por definir al generador $\mathcal{L}^{SIP(m)-N}$ del proceso Boundary Driven SIP a tasa m con sitios $\{1, ..., N\}$ y espacio de configuraciones $\Omega_N = \mathbb{N}_0^N$, en el cual las partículas interactúan con una dinámica similar a la del SIP(m) en $\mathbb{Z}$ pero la principal diferencia es que no hay conservación de partículas. Una manera de interpretar la causa de este hecho es que el proceso cuenta con dos "reservorio de partículas" asociados a los sitios 1 y N, los cuales pueden enviar y recibir partícualas provenientes de su sitio asociado.

Para cada elección de constantes α, β, γ y δ con $\gamma > \alpha > 0$ y $\delta > \beta > 0$ y para cada función $f : \mathbb{N}_0^N \to \mathbb{R}$ y configuración $\eta \in \Omega_N$, definimos

$$\mathcal{L}^{SIP(m)-N} f(\eta) := \mathcal{L}_a^{SIP(m)-N} f(\eta) + \mathcal{L}_0^{SIP(m)-N} f(\eta) + \mathcal{L}_b^{SIP(m)-N} f(\eta),$$

con

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_a^{SIP(m)-N} f(\eta) &:= \alpha(\frac{m}{2} + \eta_1)[f(\eta^{0,1}) - f(\eta)] + \gamma\eta_1[f(\eta^{1,0}) - f(\eta)] \\
\mathcal{L}_0^{SIP(m)-N} f(\eta) &:= \sum_{i=1}^{N-1} \eta_i(\frac{m}{2} + \eta_{i+1})[f(\eta^{i,i+1}) - f(\eta)] + \eta_{i+1}(\frac{m}{2} + \eta_i)[f(\eta^{i+1,i}) - f(\eta)] \\
\text{y } \mathcal{L}_b^{SIP(m)-N} f(\eta) &:= \beta(\frac{m}{2} + \eta_N)[f(\eta^{N+1,N}) - f(\eta)] + \delta\eta_N[f(\eta^{N,N+1}) - f(\eta)],
\end{aligned}$$

donde $\eta^{i,i+1} := \eta - \delta_i + \delta_{i+1}\ \forall\ 1 \leq i \leq N-1$, $\eta^{0,1} := \eta + \delta_1$ y $\eta^{1,0} := \eta - \delta_1$ (es decir, $\eta^{i,i+1}$ es la configuración que se obtiene a partir de η luego de que una partícula saltó del sitio i al $i+1$ y tanto $\eta^{1,0}$ como $\eta^{0,1}$ representan a las configuraciones en las que la única modificación que hubo es que apareció o desapareció una partícula en el sitio 1). Análogamente, $\eta^{i+1,i} := \eta - \delta_{i+1} + \delta_i\ \forall\ 1 \leq i \leq N-1$, $\eta^{N,N+1} := \eta - \delta_N$ y $\eta^{N+1,N} := \eta + \delta_N$.

Notemos que la única diferencia que hay entre el generador $\mathcal{L}_0^{SIP(m)-N}$ y el generador del SIP(m) en $\mathbb{Z}$ es que en el primero, la sumatoria va desde $i = 1$ hasta $i = N - 1$ y en el segundo, i recorre todos los enteros. Esta similitud nos simplificará la demostración de que el Boundary Driven SIP (a tasa m y con N sitios) tiene un proceso dual y que bajo ciertas condciones para las constantes α, β, γ y δ, posee una medida producto reversible.

4.1. Reversibilidad

En esta sección probaremos que bajo ciertas condiciones sobre las constantes α, β, γ y δ, el proceso con generador $\mathcal{L}^{SIP(m)-N}$ es reversible con respecto a la medida producto $\nu^N_{\vec{\lambda}} := \bigotimes_{i=1}^{N} \nu_{\lambda(i)}$ con $\lambda(i) = \lambda \in (0,1)$ $\forall\ 1 \leq i \leq N$ y $\nu_\lambda : \mathbb{N}_0 \to [0,1]$ definida por $\nu_\lambda(n) = \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+n)}{\Gamma(\frac{m}{2})n!}\lambda^n(1-\lambda)^{\frac{m}{2}}$ si $n \in \mathbb{N}_0$ y 0 en otro caso.

Para probar la reversibilidad, alcanza con ver que

$$\nu^N_{\vec{\lambda}}(g\ \mathcal{L}_j^{SIP(m)-N} f) = \nu^N_{\vec{\lambda}}(f\ \mathcal{L}_j^{SIP(m)-N} g) \tag{4.1}$$

para todo $j \in \{a, 0, b\}$ y para todas las funciones $f, g : N_0^N \to \mathbb{R}$.

El caso $j = 0$ se deduce a partir de la demostración que hemos usado para probar la reversibilidad en el SIP(m) en $\mathbb{Z}$ (ya que, como recién hemos notado, lo único que cambia en el generador es el conjunto sobre el cual está indexada la sumatoria). Veamos entonces el caso $j = a$:

Por la ecuación de balance detallado,

$$\alpha.(\frac{m}{2} + k).\nu_\lambda(k) = \gamma.(k+1).\nu_\lambda(k+1)\ \forall k \in \mathbb{N}_0,$$

y reemplazando $\nu_\lambda(k)$ y $\nu_\lambda(k+1)$ por lo que valen se deduce que $\gamma = \dfrac{\alpha}{\lambda}$. (Notemos que bajo esta elección resulta $\gamma > \alpha > 0$, que es una condición que habíamos pedido al definir el generador).

Análogamente, la ecuación de balance detallado cuando $j = b$ es igual a la del caso anterior reemplazando α por β y γ por δ por lo que, en este caso, debemos elegir $\beta > 0$ y $\delta = \dfrac{\beta}{\lambda}$.

De este modo, hemos demostrado la siguiente proposición:

Proposición 4.1. *Si $\lambda \in (0,1)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma := \frac{\alpha}{\lambda}$ y $\delta := \frac{\beta}{\lambda}$, la medida $\nu^N_{\vec{\lambda}}$ con $\vec{\lambda}(i) = \lambda$ $\forall\ 1 \leq i \leq N$ es reversible (y por lo tanto invariante) para el Boundary Driven SIP a tasa m y con N sitios.*

Observación 4.1. *Podemos reescribir el resultado anterior del siguiente modo: Si α, β, γ y δ son constantes que verifican: $\gamma > \alpha > 0$, $\delta > \beta > 0$ y $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ entonces, $\nu^N_{\vec{\lambda}}$ con $\vec{\lambda}(i) = \lambda := \frac{\alpha}{\gamma}$ $\forall\ 1 \leq i \leq N$ resulta una medida reversible (y por lo tanto invariante) para dicho proceso.*

4.2. Dualidad

Veamos ahora que fijadas las constantes α, β, γ y δ con $\gamma > \alpha > 0$ y $\delta > \beta > 0$, el Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios tiene un dual, el cual resulta mucho más sencillo de estudiar. Esto se debe a que en el nuevo proceso (que tiene N+2 sitios: $\{0, 1, ..., N, N{+}1\}$) las partículas se mueven entre los sitios 1 y N igual que en el proceso anterior, pero la diferencia está en que los sitios 0 y N+1 únicamente reciben partículas provenientes de los sitios 1 y N respectivamente y no tienen permitido enviar partículas a ningún lugar. Por lo tanto, no sólo que la cantidad de partículas (que es finita) se mantendrá constante sino que también, en algún momento, todas habrán sido "absorbidas" por los sitios 0 y $N+1$.

Denotemos $\widehat{\mathcal{L}}^{SIP(m)-N}$ a su generador y $\widehat{\Omega}_N := \mathbb{N}_0^{N+2}$ a su espacio de configuraciones. Para cada $f : \widehat{\Omega}_N \to \mathbb{R}$ y $\xi \in \widehat{\Omega}_N$, definimos

$$\widehat{\mathcal{L}}^{SIP(m)-N} f(\xi) := \widehat{\mathcal{L}}_a^{SIP(m)-N} f(\xi) + \widehat{\mathcal{L}}_0^{SIP(m)-N} f(\xi) + \widehat{\mathcal{L}}_b^{SIP(m)-N} f(\xi)$$

con

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathcal{L}}_a^{SIP(m)-N} f(\xi) &:= (\gamma - \alpha)\xi_1 [f(\xi^{1,0}) - f(\xi)] \\
\widehat{\mathcal{L}}_0^{SIP(m)-N} f(\xi) &:= \mathcal{L}_0^{SIP(m)-N} f(\xi) \\
\widehat{\mathcal{L}}_b^{SIP(m)-N} f(\xi) &:= (\delta - \beta)\xi_N [f(\xi^{N,N+1}) - f(\xi)],
\end{aligned}$$

donde $\xi^{1,0} := \xi - \delta_1 + \delta_0$ y $\xi^{N,N+1} := \xi - \delta_N + \delta_{N+1}$ representan, respectivamente, a las configuraciones en las que se desplazó una partícula del sitio 1 al 0 ó del sitio N al $N+1$.

Notemos que la condición $\gamma > \alpha$ y $\delta > \beta$ nos asegura que las tasas de transición de una configuración a otra no son negativas, lo que hace que el proceso sea un proceso de Markov.

Enunciemos ahora un teorema sobre dualidad entre estos procesos y demostrémoslo:

Teorema 4.1. *Los procesos con generadores $\mathcal{L}^{SIP(m)-N}$ y $\widehat{\mathcal{L}}^{SIP(m)-N}$ son duales vía la función $H_N : \Omega_N \times \widehat{\Omega}_N \to \mathbb{R}$, con $H_N(\eta, \xi) := \left(\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^{\xi_0} \left(\frac{\beta}{\delta-\beta}\right)^{\xi_{N+1}} \prod_{i=1}^{N} \frac{\eta_i!}{(\eta_i - \xi_i)!} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2} + \xi_i)} \delta_{\eta_i \geqslant \xi_i}$.*

Demostración: Debemos probar que

$$\mathcal{L}^{SIP(m)-N} H_N(\cdot, \xi)(\eta) = \widehat{\mathcal{L}}^{SIP(m)-N} H_N(\eta, \cdot)(\xi) \quad \forall\ (\eta, \xi) \in \Omega_N \times \widehat{\Omega}_N.$$

En el capítulo 2 hemos demostrado la autodualidad para el SIP(m) con dos sitios y luego lo generalizamos al caso de tener infinitos sitios, con lo cual probamos que el SIP(m) en $\mathbb{Z}$ es autodual. De la misma forma podemos generalizar el caso de dos sitios al caso de N sitios, y obtener que el proceso con generador $\mathcal{L}_0^{SIP(m)-N}$ es autodual con función de dualidad $D_N : \Omega_N \times \widehat{\Omega}_N \to \mathbb{R}$ definida por $D_N(\eta, \xi) := \prod_{i=1}^{N} \frac{\eta_i!}{(\eta_i - \xi_i)!} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2} + \xi_i)} \delta_{\eta_i \geqslant \xi_i}$.Y como este operador no actúa sobre los sitios 0 y $N+1$, $\left(\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\right)^{\xi_0}$ y $\left(\frac{\beta}{\delta-\beta}\right)^{\xi_{N+1}}$ representan constantes, por lo que podemos reemplazar la función D_N por la función H_N y obtener que

$$\mathcal{L}_0^{SIP(m)-N} H_N(\cdot, \xi)(\eta) = \widehat{\mathcal{L}}_0^{SIP(m)-N} H_N(\eta, \cdot)(\xi). \tag{4.2}$$

Luego, para demostrar el teorema basta probar que vale la misma igualdad que en (4.2) pero reemplazando al 0 por a y por b. Veamos sólo que

$$\mathcal{L}_a^{SIP(m)-N} H_N(\cdot, \xi)(\eta) = \widehat{\mathcal{L}}_a^{SIP(m)-N} H(\eta, \cdot)(\xi)$$

ya que el otro caso es totalmente análogo.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_a^{SIP(m)-N} H_N(\cdot,\xi)(\eta) = \alpha(\frac{m}{2}+\eta_1)\big[H_N(\eta^{0,1},\xi) - H_N(\eta,\xi)\big] + \gamma\eta_1\big[H_N(\eta^{1,0},\xi) - H_N(\eta,\xi)\big] \\
&= H_N(\eta,\xi)\big\{\alpha(\frac{m}{2}+\eta_1)\big[(\frac{\eta_1+1}{\eta_1-\xi_1+1}) - 1\big] + \gamma\eta_1\big[(\frac{\eta_1-\xi_1}{\eta_1}) - 1\big]\big\} \\
&= H_N(\eta,\xi)\big[\alpha(\frac{m}{2}+\eta_1)(\frac{\xi_1}{\eta_1-\xi_1+1}) - \gamma\xi_1\big] \\
&= H_N(\eta,\xi)(\frac{\xi_1}{\eta_1-\xi_1+1})\big[\alpha(\frac{m}{2}+\eta_1) - \gamma(\eta_1-\xi_1+1)\big] \\
&= H_N(\eta,\xi)(\frac{\xi_1}{\eta_1-\xi_1+1})\big[\alpha(\frac{m}{2}+\xi_1-1) - (\gamma-\alpha)(\eta_1-\xi_1+1)\big] \\
&= H_N(\eta,\xi)\ \xi_1\ \alpha\ (\frac{\frac{m}{2}+\xi_1-1}{\eta_1-\xi_1+1})\ -\ H_N(\eta,\xi)\ \xi_1\ (\gamma-\alpha) \\
&\overset{(*)}{=} H_N(\eta,\xi^{1,0})\ \xi_1\ (\gamma-\alpha)\ -\ H_N(\eta,\xi)\ \xi_1\ (\gamma-\alpha) \\
&= \xi_1\ (\gamma-\alpha)\big[H_N(\eta,\xi^{1,0}) - H_N(\eta,\xi)\big] = \widehat{\mathcal{L}}_a^{SIP(m)-N} H(\eta,\cdot)(\xi),
\end{aligned}
$$

donde $(*)$ vale ya que:

$$
\begin{aligned}
&H_N(\eta,\xi)\ \xi_1\ \alpha\ (\frac{\frac{m}{2}+\xi_1-1}{\eta_1-\xi_1+1}) = (\frac{\alpha}{\gamma-\alpha})^{\xi_0}(\frac{\delta}{\beta-\delta})^{\xi_{N+1}}\xi_1\ \alpha\ (\frac{\frac{m}{2}+\xi_1-1}{\eta_1-\xi_1+1})\prod_{i=1}^{N-1}\Big[\frac{\eta_i!}{(\eta_i-\xi_i)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\ \delta_{\eta_i\geqslant\xi_i}}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_i)}\Big] \\
&= (\frac{\alpha}{\gamma-\alpha})^{\xi_0+1}(\frac{\delta}{\beta-\delta})^{\xi_{N+1}}\xi_1\ (\gamma-\alpha)\prod_{i=2}^{N-1}\Big[\frac{\eta_i!}{(\eta_i-\xi_i)!}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\ \delta_{\eta_i\geqslant\xi_i}}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_i)}\Big]\ \frac{\eta_1!}{(\eta_1-\xi_1)!+1}\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\ \delta_{\eta_i\geqslant\xi_i}}{\Gamma(\frac{m}{2}+\xi_1-1)} \\
&= H_N(\eta,\xi^{1,0})\ \xi_1\ (\gamma-\alpha). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Una consecuencia directa de este resultado que probaremos a continuación es que si fijamos las constantes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ y δ con $\gamma>\alpha>0$ y $\delta>\beta>0$, el Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios tiene una <u>única medida invariante</u> y además, esta medida puede ser caracterizada en función de las probabilidades de absorción del proceso dual con generador $\widehat{\mathcal{L}}^{SIP(m)-N}$. (Al decir probabilidad de absorción estamos haciendo referencia a la probabilidad de que una partícula sea absorbida por el sitio 0 o por el sitio $N+1$). Todo esto se debe a los siguientes dos hechos:

1) Si denotamos $\mathbb{E}_\eta^{SIP(m)-N}$, $\widehat{\mathbb{E}}_\xi^{SIP(m)-N}$ y $\widehat{\mathbb{P}}_\xi^{SIP(m)-N}$ a la esperanza del Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios comenzado en η y a la esperanza y a la probabilidad del proceso dual comenzado en ξ y llamamos ν a una posible medida invariante y $(S_t)_{t\geq 0}$ al semigrupo del Boundary Driven SIP, se tiene:

$$
\begin{aligned}
\int H_N(\eta,\xi)\ \nu(d\eta) &= \int H_N(\cdot,\xi)(\eta)\ \nu(d\eta) = \int S_t H_N(\cdot,\xi)(\eta)\ \nu(d\eta) \\
&= \int \mathbb{E}_\eta^{SIP(m)-N}[H_N(\eta_t,\xi)]\ \nu(d\eta) = \int \widehat{\mathbb{E}}_\xi^{SIP(m)-N}[H_N(\eta,\xi_t)]\ \nu(d\eta),
\end{aligned}
$$

donde la segunda y la última igualdad se deben, respectivamente, a la invariancia de ν y a la dualidad probada.

Por lo tanto,

$$
\int H_N(\eta,\xi)\ \nu(d\eta) = \int \widehat{\mathbb{E}}_\xi^{SIP(m)-N}[H_N(\eta,\xi_t)]\ \nu(d\eta).
$$

Tomando límite cuando t tiende a $+\infty$ y aplicando convergencia mayorada nos queda

$$\begin{aligned}\int H_N(\eta,\xi)\ \nu(d\eta) &= \int \widehat{\mathbb{E}}_{\xi}^{SIP(m)-N}[\lim_{t\to+\infty} H_N(\eta,\xi_t)\ ]\ \nu(d\eta)\\ &= \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0:k+l=|\xi|} \rho_L^k\rho_R^l\ \widehat{\mathbb{P}}_{\xi}^{SIP(m)-N}(\xi(\infty)=k\delta_0+l\delta_{N+1}),\end{aligned}$$

donde $\rho_L := \left(\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\right)$, $\rho_R := \left(\frac{\beta}{\delta-\beta}\right)$ y $\xi(\infty)$ denota a la configuración que se obtiene luego de que todas las partículas de la configuración ξ fueron absorbidas por los sitios 0 ó $N+1$. (Observar que esa sumatoria ya no depende de ν).

2) Al igual que hemos demostrado que las combinaciones lineales de las funciones $D(\cdot,\xi)$ con $\xi\in\Omega_f$ son densas en el conjunto de funciones locales con dominio $\mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}}$, se prueba que las combinaciones lineales de $H(\cdot,\xi)$ con $\xi\in\mathbb{N}_0^{N+2}$ son densas en el conjunto de las funciones locales con dominio $\mathbb{N}_0^{N+2}$, lo que implica que $\{H(\cdot,\xi):\xi\in\mathbb{N}_0^N\}$ es una familia que caracteriza medida.

A partir de 1 y 2 concluimos que para cada elección de constantes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ y δ con $\gamma>\alpha>0$ y $\delta>\beta>0$, el Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios tiene una única medida invariante (que notarems $\mu^N_{\rho_L,\rho_R}$) y además, esta medida verifica:

$$\int H_N(\eta,\xi)\ \mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0:k+l=|\xi|} \rho_L^k\ \rho_R^l\ \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}(\xi(\infty)=k\delta_0+l\delta_{N+1}). \tag{4.3}$$

Observación 4.2. *Si α,β,γ y δ son constantes que verifican: $\gamma>\alpha>0,\ \delta>\beta>0$ y $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ entonces, $\mu^N_{\rho_L,\rho_R}$ es igual a la medida producto $\nu^N_{\vec{\lambda}}$ con $\vec{\lambda}(i)=\lambda:=\frac{\alpha}{\gamma}\ \forall\ 1\le i\le N$, que vimos que era una medida reversible .*

Observación 4.3. *Notemos también que si elegimos como ξ a la configuración que no tiene partículas, $H_N(\eta,\xi)=1$ y además, si $k+l=0$, $\widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}(\xi(\infty)=k\delta_0+l\delta_{N+1})=1$. Reemplazando en la igualdad anterior obtenemos $\int\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta)=1$, de lo cual se deduce que la medida $\mu^N_{\rho_L,\rho_R}$ en realidad, es una medida de probabilidad.*

Volviendo a la igualdad (4.3), si consideramos la configuración que sólo tiene una partícula en el sitio i (con i entre 1 y N), nos queda

$$\begin{aligned}\int H_N(\eta,\delta_i)\ \mu^N_{\vec{\lambda}}(d\eta) =&\rho_L\ \widehat{\mathbb{P}}_{\delta_i}^{SIP(m)-N}(\{\text{la partícula fue absorbida por el sitio 0}\})\\ &+\rho_R\ \widehat{\mathbb{P}}_{\delta_i}^{SIP(m)-N}(\{\text{la partícula fue absorbida por el sitio N+1}\}),\end{aligned}$$

y como esta partícula en realidad se mueve con la dinámica del paseo aleatorio (ya que al ser la única nunca puede sonar el reloj "invitación"), la partícula es absorbida por el sitio 0 con probabilidad $p=1-\frac{i}{N+1}$ y por el sitio $N+1$ con probabilidad $1-p=\frac{i}{N+1}$. Esto se debe a que la primer probabilidad coincide con la probabilidad de que la partícula llegue al sitio 0 antes de que llegue al sitio $N+1$, y si llamamos T al instante en que la partícula llegó por primera vez a cualquiera de esos dos sitios (es decir, $T:=inf\{t>0:\delta_i(t)\in\{0,N+1\}\}$) resulta: $\widehat{\mathbb{E}}_{\delta_i}^{SIP(m)-N}[\delta_i(T)]=0.p+(N+1)(1-p)$, y como $\widehat{\mathbb{E}}_{\delta_i}^{SIP(m)-N}[\delta_i(T)]=\widehat{\mathbb{E}}_{\delta_i}^{SIP(m)-N}[\delta_i(0)]=i$ (por el teorema de tiempos de parada para martingalas), se tiene que $i=(N+1)(1-p)$, de donde $p=1-\frac{i}{N+1}$.

Deducimos entonces que

$$\int H_N(\eta,\delta_i)\ \mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \rho_L\ (1-\frac{i}{N+1}) + \rho_R\ (\frac{i}{N+1}).$$

Y si consideramos la escala macroscópica y reemplazamos i por $[uN]$ con $u \in [0,1]$ y suponemos que las constantes $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ y δ son las mismas para cualquier valor de $N \in \mathbb{N}$ (o por lo menos, que $\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}$ y $\frac{\beta}{\delta-\beta}$ son constantes para todo $N \in \mathbb{N}$), al tomar límite cuando N tiende a $+\infty$ obtenemos:

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N(\eta,\delta_{[uN]})\ \mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \rho_L\ (1-u) + \rho_R\ u =: \rho^{L,R}(u). \tag{4.4}$$

4.3. Propiedad de Equilibrio Local

Basándonos en la definición 3.2 de propiedad de equilibrio local que hemos dado en el capítulo 3, usando la función de dualidad y considerando como escala macroscópica a $[0,1]$ en vez de $\mathbb{R}$, podeamos dar la siguiente definición:

Definición 4.1. *Sea $\rho : [0,1] \to (0,1)$ una función continua y sea $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $N_0^{\{1,...,N\}}$. Decimos que la sucesión $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ satisface la propiedad de equilibrio local con perfil ρ si*

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N\Big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{x_i+[uN]}\Big)\ \mu_N(d\eta) = \Big(\frac{\rho(u)}{1-\rho(u)}\Big)^n \tag{4.5}$$

$\forall u \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x_1,...,x_n \in \mathbb{Z}$.

El problema está en que los sitios del espacio dual son $\{0,1,...,N,N+1\}$, y por lo tanto, necesitaríamos que $x_i + [uN] \in \{0,1,...,N,N+1\}\quad \forall N \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R},\ \forall\ 1 \le i \le n$, lo que no es cierto. Por esta razón trabajaremos con la siguiente definición de equilibrio local, que es la que se presenta en [13]:

Definición 4.2. *Sea $\rho : [0,1] \to [0,+\infty)$ una función continua y sea $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de probabilidad en $N_0^{\{1,...,N\}}$. Decimos que la sucesión $(\mu_N)_{N\in\mathbb{N}}$ satisface la propiedad de equilibrio local con perfil ρ (y lo notaremos $\mu_N \approx LEP(\rho)$) si para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todos $u_1,...,u_n \in [0,1]$,*

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N\Big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{[u_iN]}\Big)\mu_N(d\eta) = \prod_{i=1}^n \rho(u_i).$$

Enunciemos ahora el teorema que demostraremos en lo que queda de esta sección:

Teorema 4.2. *Sean α,β,γ y δ constantes tales que $\gamma > \alpha > 0$ y $\delta > \beta > 0$, y sean $\rho_L := \big(\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\big)$ y $\rho_R := \big(\frac{\beta}{\delta-\beta}\big)$. Consideremos $(\mu^N_{\rho_L,\rho_R})_{N\in\mathbb{N}}$ la sucesión de medidas invariantes del Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios y $\rho^{L,R} : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función definida por $\rho^{L,R}(u) := \rho_L\ (1-u) + \rho_R\ u$. Entonces, la sucesión $(\mu^N_{\rho_L,\rho_R})_{N\in\mathbb{N}}$ satisface la propiedad de equilibrio local con perfil $\rho^{L,R}$.*

Observación 4.4. *Intuitivamente, la idea de este teorema es que para cada punto macroscópico $x \in [0,1]$ y para valores de N suficientemente grandes, las medidas $\mu^N_{\rho_L,\rho_R}$ se comportan alrededor del punto microsópico $[xN]$ similar a la medida producto y medida reversible $\nu^{\otimes\mathbb{Z}}_{\rho^{L,R}(x)}$.*

Observación 4.5. *Si $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ y además, hay a lo sumo una partícula en cada uno de los sitios $\{1, ..., N\}$, la demostración del teorema es directa pues:*

Debemos probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todos $u_1, ..., u_n \in [0, 1]$,

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N\Big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{[u_i N]}\Big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \prod_{i=1}^{n} \rho^{L,R}(u_i). \tag{4.6}$$

Por (4.4) sabemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $u \in [0, 1]$,

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N(\eta, \delta_{[uN]})\ \mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \rho^{L,R}(u). \tag{4.7}$$

Y como bajo esta elección de constantes $\mu^N_{\rho_L,\rho_R}$ es igual a la medida producto $\nu^N_{\vec{\lambda}} := \bigotimes_{i=1}^{N} \nu_{\lambda(i)}$ con $\vec{\lambda}(i) = \lambda := \frac{\alpha}{\gamma}\ \forall\ 1 \le i \le N$ (ver Observación 4.2), la función $H_N\Big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{[u_i N]}\Big)$ se factoriza; y usando este hecho junto con (4.7) y llamando ξ a $\sum_{i=1}^{n} \delta_{[u_i N]}$ nos queda que

$$\int H_N\Big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{[u_i N]}\Big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = (\frac{\alpha}{\gamma-\alpha})^{\xi_0}\ (\frac{\beta}{\delta-\beta})^{\xi_{N+1}} \prod_{1\le u_i\le N} \int H_N(\eta, \delta_{[u_i N]})\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta)$$

$$= (\rho^{L,R}(0))^{\xi_0}\ (\rho^{L,R}(N+1))^{\xi_{N+1}} \prod_{1\le u_i\le N} \int H_N(\eta, \delta_{[u_i N]})\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \prod_{i=1}^{n} \rho^{L,R}(u_i),$$

como queríamos ver. □

Para la demostración general del teorema, comenzaremos haciendo una observación y probando una proposición que nos serán muy útiles.

Observación 4.6. *Si $\rho(0) := \rho_L$, $\rho(N+1) := \rho_R$ y $X_i(\infty) \in \{0, N+1\}$ es el sitio en el que fue absorbida la partícula que comenzó en el sitio u_i entonces,*

$$\int H_N(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{u_i})\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \widehat{\mathbb{E}}^{SIP(m)-N}_{u_1,\dots,u_n}\ [\prod_{i=1}^{n} \rho\big(X_i(\infty)\big)]. \tag{4.8}$$

(Notemos que podemos reemplazar a ρ por $\rho^{L,R}$ ya que $\rho^{L,R}(0) = \rho_L$ y $\rho_{L,R}(N+1) = \rho_R$).

Demostración: Sea $\xi := \sum_{i=1}^{n} \delta_{u_i}$.

$$\int H_N(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{u_i})\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) \overset{(4.3)}{=} \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0:k+l=|\xi|} \rho_L^k\ \rho_R^l\ \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{\xi}(\xi(\infty) = k\delta_0 + l\delta_{N+1})$$

$$= \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0:k+l=|\xi|} \rho(0)^k\ \rho(N+1)^l\ \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{u_1,\dots,u_n}(\xi(\infty) = k\delta_0 + l\delta_{N+1})$$

$$= \sum_{k,l\in\mathbb{N}_0:k+l=|\xi|} \rho(0)^k\ \rho(N+1)^l\ \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{u_1,\dots,u_n}(|i : X_i(\infty) = 0| = k, |i : X_i(\infty) = N+1| = l)$$

$$= \widehat{\mathbb{E}}^{SIP-N}_{u_1,\dots,u_n}[\prod_{i=1}^{n} \rho\big(X_i(\infty)\big)].$$ □

Esta igualdad nos va a servir para demostrar la siguiente proposición:

Proposición 4.2. *Sean* $\widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}$ *y* $\widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}$ *las medidas de probabilidad de los procesos en los que n partículas que se encuentran inicialmente en los sitios* $[u_iN]$ *con* $u_i \in [0,1]$ $\forall i \in \{1,...,N\}$ *se mueven sobre los sitios* $\{0,1,...,N,N+1\}$ *bajo las siguientes dinámicas: la primera es la del proceso dual al Boundary Driven SIP a tasa m con N sitios. La segunda es la del proceso en el que las partículas se mueven independientemente hacia sus casillas vecinas con tasa* $\frac{m}{2}$ *salvo cuando están en los sitios* 0 *ó* $N+1$*, de donde no pueden salir (por esta razón decimos, al igual que en el proceso anterior, que 0 y* $N+1$ *son sitios absorbentes). Llamemos* $X_i(\infty)$ *e* $Y_i(\infty)$ *a los sitios en los que fueron absorbidos las partículas i-ésimas del primer proceso y del segundo respectivamente. Entonces, vale lo siguiente:*

Si $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall\ u_1,u_2,...,u_n \in [0,1]$ *y* $\forall\ a_1,a_2,...,a_n \in \{0,N+1\}$

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}\big(X_1(\infty)=a_1,...,X_n(\infty)=a_n\big) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}\big(Y_1(\infty)=a_1,...,Y_n(\infty)=a_n\big), \end{aligned} \tag{4.9}$$

resulta

$$\mu^N_{\rho_L,\rho_R} \approx LEP(\rho^{L,R}).$$

Demostración: Por definición de LEP, debemos probar que

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N\big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{[u_iN]}\big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \prod_{i=1}^n \rho^{L,R}(u_i).$$

Usando la igualdad obtenida en (4.8) y usando la hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \int H_N\big(\eta, \sum_{i=1}^n \delta_{[u_iN]}\big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{E}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}\big[\prod_{i=1}^n \rho\big(X_i(\infty)\big)\big] \\ &= \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{E}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}\big[\prod_{i=1}^n \rho\big(Y_i(\infty)\big)\big]. \end{aligned}$$

Como además las partículas en el $IRW(m)$ son independientes y si hubiese una sola partícula la dinámica sería la misma que la del SIP(m) (ambas dinámicas consideradas sobre los $N+2$ sitios en los que tanto el 0 como el $N+1$ son absorbentes), vale que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{E}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}\big[\prod_{i=1}^n \rho\big(Y_i(\infty)\big)\big] = \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^n \widehat{\mathbb{E}}^{IRW(m)-N}_{[u_iN]}\big[\rho\big(Y_i(\infty)\big)\big] \\ &= \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^n \widehat{\mathbb{E}}^{SIP(m)-N}_{[u_iN]}\big[\rho\big(X_i(\infty)\big)\big]. \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente (4.8) en este último término, intercambiando el límite con la productoria y considerando la igualdad que obtuvimos en (4.4) nos queda que

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^n \widehat{\mathbb{E}}^{SIP(m)-N}_{[u_iN]}\big[\rho\big(X_i(\infty)\big)\big] = \lim_{N\to+\infty} \prod_{i=1}^n \int H_N\big(\eta, \delta_{[u_iN]}\big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) \\ &= \prod_{i=1}^n \lim_{N\to+\infty} \int H_N\big(\eta, \delta_{[u_iN]}\big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \prod_{i=1}^n \rho^{L,R}(u_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{N\to+\infty} \int H_N\big(\eta, \sum_{i=1}^{n} \delta_{[u_iN]}\big)\mu^N_{\rho_L,\rho_R}(d\eta) = \prod_{i=1}^{n} \rho^{L,R}(u_i),$$

como queríamos probar. □

Para finalizar la demostración del Teorema 4.2, probemos que vale la hipótesis que asumimos para la reciente proposición, es decir, probemos que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall u_1, u_2, ..., u_n \in [0,1]$ y $\forall a_1, a_2, ..., a_n \in \{0, N+1\}$,

$$\begin{aligned} &\lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}\big(X_1(\infty) = a_1, ..., X_n(\infty) = a_n\big) \\ &= \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}\big(Y_1(\infty) = a_1, ..., Y_n(\infty) = a_n\big). \end{aligned} \tag{4.10}$$

En el siguiente capítulo se demostrará que si consideramos sobre $\mathbb{Z}$ n partículas que se mueven con la dinámica del SIP(m) y n partículas que se mueven con la dinámica de paseos aleatorios a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado y las acoplamos de una determinada manera entonces,

$$\frac{|X_i(t) - Y_i(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \ \ \forall\ 1 \leq i \leq n,$$

donde $X_i(t)$ y $Y_i(t)$ representan, respectivamente, las posiciones a tiempo t de la i-ésima partícula del SIP y de la i-ésima partícula del paseo aleatorio y $X_i(0) = Y_i(0)$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$.

Adaptando este acoplamiento al caso en que tenemos $N+2$ sitios y los sitios 0 y $N+1$ son absorbentes, reemplazando al tiempo "t" por "N^2s" con s fijo y ubicando inicialmente a las partículas i-ésimas en los sitios $[u_iN]$ (con $u_i \in [0,1]$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$) nos queda que

$$\frac{|X_i(N^2s) - Y_i(N^2s)|}{N} \xrightarrow{P} 0 \ \ \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

En particular, si definimos $T^i_N := \inf\{l > 0 : X_i(l) \in \{0, N+1\}\}$, $\tau^i_N := \frac{T^i_N}{N^2}$ y elegimos $s = \tau^i_N$ resulta

$$\frac{|X_i(T^i_N) - Y_i(T^i_N)|}{N} \xrightarrow{P} 0\ \forall\ 1 \leq i \leq n.$$

(Precisamente, la adaptación que se hace en el acoplamiento es la siguiente: si ninguna de las dos partículas i-ésimas fueron absorbidas, ambas se mueven como en el acoplamiento anterior, pero si alguna de las dos fue absorbida, la otra continúa siguiendo su propia dinámica).

Veamos primero cómo aplicar este resultado para demostrar que si $\mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}$, $X_i(\infty)$ y $Y_i(\infty)$ denotan a la medida de probabilidad en dicho acoplamiento y a los sitios en los que fueron absorbidas las i-ésimas partículas del SIP y del paseo aleatorio respectivamente y además, $X_i(0) = Y_i(0) = [u_iN]$ $\forall\ 1 \leq i \leq n$ entonces,

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}^{acop-N}_{[u_1N],...,[u_nN]}\big(X_i(\infty) \neq Y_i(\infty) \text{ para algún } i \in \{1, ..., n\}\big) = 0. \tag{4.11}$$

Demostración: Sea $\delta > 0$ y sea $i \in \{1, ..., N\}$. Como $\dfrac{|X_i(T^i_N) - Y_i(T^i_N)|}{N} \xrightarrow{P} 0$ es claro que

$$\mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],...[u_nN]}\ \big(|X_i(T^i_N) - Y_i(T^i_N)| < \delta N\big) \longrightarrow 1.$$

Supongamos que $X_i(\infty) = 0$. Por las definiciones que hemos hecho, $X_i(T_N^i) = X_i(\infty)$ y por lo tanto,

$$\mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]} \left(|Y_i(T_N^i)| < \delta N\right) \longrightarrow 1,$$

lo que significa que en el momento en que la i-ésima partícula del SIP fue absorbida en el 0, la probabilidad de que la i-ésima partícula del paseo aleatorio se encuentre a distancia menor que δN del 0 converge a 1.

Como a partir del instante T_N^i la partícula i-ésima del paseo aleatorio se mueve siguiendo su propia dinámica (ya que la otra fue absorbida), la probabilidad de que $Y_i(\infty)$ sea igual a 0 coincide con la probabilidad de que una partícula que empezó en el sitio $Y_i(T_N^i)$ y que se dezplaza con la dinámica del paseo aleatorio simple y simétrico a tasa $\frac{m}{2}$ llegue por primera vez al sitio 0 antes de llegar al sitio $N{+}1$; y esta probabilidad ya la hemos calculado, es igual a $1 - \frac{Y_i(T_N^i)}{N+1}$. Por lo tanto, si consideramos una configuración en la que $X_i(\infty) = 0$ y $|Y_i(T_N^i)| < \delta N$, resulta:

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]} \left(Y_i(\infty) = 0\right) = \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{Y_i(T_N^i)}{N+1} > \lim_{N\to+\infty} 1 - \frac{\delta N}{N+1} = 1 - \delta.$$

Teniendo en cuenta que lo hecho vale para todo $\delta > 0$ (y para todo $i \in \{1, ..., N\}$), haciendo tender δ a 0 nos queda que si $X_i(\infty) = 0$ entonces

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]} \left(Y_i(\infty) = 0\right) = 1.$$

Y como el caso en que $X_i(\infty) = N + 1$ es análogo, también vale que si $X_i(\infty) = N + 1$ entonces

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]} \left(Y_i(\infty) = N + 1\right) = 1.$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbb{P}^{acop-N}_{[u_1N],\ldots,[u_nN]}\left(X_i(\infty) = Y_i(\infty)\ \forall i \in \{1, ..., n\}\right) = 1,$$

que es equivalente a lo que queríamos demostrar. $\square$

Y ahora que ya hemos probado (4.11) es fácil ver que vale (4.10). En efecto,

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(X_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right) \ = \ \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(X_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right)\\
= \ &\mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(X_i(\infty) = a_i, Y_i(\infty) = X_i(\infty)\ \forall\ 1 \le i \le n\right)\\
&+ \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(X_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n, Y_j(\infty) \ne X_j(\infty) \text{ para algún } 1 \le j \le n\right)\\
\le\ &\mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(Y_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right) \ + \ \mathbb{P}^{acop(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(Y_j(\infty) \ne X_j(\infty) \text{ para algún } 1 \le j \le n\right).
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando N tiende a $+\infty$, como en el último renglón el término de la derecha converge a 0 y el término de la izquierda coincide con lo que antes habíamos notado $\widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(Y_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right)$, nos queda que

$$\lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(X_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right) \ \le \ \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],\ldots[u_nN]}\left(Y_i(\infty) = a_i\ \forall\ 1 \le i \le n\right).$$

Realizando la misma cuenta pero intercambiando los roles de X_i y de Y_i obtenemos la desigualdad inversa, es decir:

$$\lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{SIP(m)-N}_{[u_1N],\dots[_nN]}\big(X_i(\infty)=a_i\ \forall\ 1\le i\le n\big)\ \geq\ \lim_{N\to+\infty} \widehat{\mathbb{P}}^{IRW(m)-N}_{[u_1N],\dots[u_nN]}\big(Y_i(\infty)=a_i\ \forall\ 1\le i\le n\big),$$

con lo cual concluimos que vale la igualdad, que es exactamente lo que queríamos demostrar.

Capítulo 5

Acoplamiento

Consideremos el acoplamiento en $\mathbb{Z}$ entre n partículas (numeradas de 1 a n) que se mueven con la dinámica del SIP(m) y n paseos aleatorios independientes, simples y simétricos a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado (también numerados de 1 a n) tales que para cada i entre 1 y n, las i-ésimas partículas comienzan en el mismo sitio, y los relojes que gobiernan la dinámica de este acoplamiento son los siguientes:

- Los que antes habíamos llamado "relojes invitación", que se activan cuando dos partículas del SIP se encuentran en sitios vecinos, suenan con distribución exponencial de parámetro 2 y una vez que alguno suena, con igual probabilidad una de las dos partículas salta hacia el sitio de la otra.

- Otro tipo de relojes, numerados de 1 a n, que suenan a tasa m y cuando el i-ésimo suena, las partículas i-ésimas se mueven ambas un lugar a la derecha o ambas un lugar a la izquierda (también con probabilidad $\frac{1}{2}$ a cada lado).

Definamos el generador de este acoplamiento, el cual actúa sobre las funciones $f : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}$. Estudiemos primero el caso en que n sea igual a 2 (ya que en este caso, el generador tiene una descripción más simple) y luego generalicémoslo.

Utilizaremos la siguiente notación:

Para el caso en que haya solamente dos partículas de cada tipo, llamaremos $e_{1,3}$ al vector (1,0,1,0) y $e_{2,4}$ al vector (0,1,0,1), y denotaremos $\vec{\mathbf{x}} := (x, \tilde{x}, y, \tilde{y})$ a las posiciones de las dos partículas del SIP(m) y de las dos partículas del paseo aleatorio a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado (en ese orden).

En el caso general, denotaremos $\vec{\mathbf{X}} := (x_1, x_2, ..., x_n)$ a las posiciones de las n partículas del SIP(m) y además, para cada i entre 1 y n y cada ϵ igual a 1 o a -1, definiremos el vector $\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon}$ en $\mathbb{Z}^n$ dado por:

$$\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon}_j := \begin{cases} x_j & \text{si } i \neq j \\ x_j + \epsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

$\forall j \in \{1, 2, ...n\}$.

Análogamente, denotaremos $\vec{\mathbf{Y}} := (y_1, y_2, ..., y_n)$ a las posiciones de las n partículas del paseo aleatorio y definiremos $\vec{\mathbf{Y}}^{i,i+\epsilon}$ como

$$\vec{\mathbf{Y}}^{i,i+\epsilon}_j := \begin{cases} y_j & \text{si } i \neq j \\ y_j + \epsilon & \text{si } i = j \end{cases}$$

$\forall j \in \{1, 2, ...n\}$.

Ahora sí estamos en condiciones de definir el generador:

Caso n=2:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{acop(m)} f(x, \tilde{x}, y, \tilde{y}) =& \frac{m}{2} \sum_{\epsilon=\pm 1} [f(x+\epsilon, \tilde{x}, y+\epsilon, \tilde{y}) + f(x, \tilde{x}+\epsilon, y, \tilde{y}+\epsilon) - 2f(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})] \\ &+ \mathbb{I}_{\{|x-\tilde{x}|=1\}} [f(x, x, y, \tilde{y}) + f(\tilde{x}, \tilde{x}, y, \tilde{y}) - 2f(x, \tilde{x}, y, \tilde{y})]\end{aligned} \tag{5.1}$$

Caso general:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{acop(m)} f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{Y}}) =& \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{2} [f(\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon}, \vec{\mathbf{Y}}^{i,i+\epsilon}) - f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{Y}})] \\ &+ \sum_{\epsilon=\pm 1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x_k - x_i = \epsilon\}} [f(\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon}, \vec{\mathbf{Y}}) - f(\vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{Y}})]\end{aligned} \tag{5.2}$$

Nuestro objetivo es probar que en el acoplamiento antes descripto, si $x_i(t)$ e $y_i(t)$ son, respectivamente, las posiciones a tiempo t de la i-ésima partícula del SIP y del i-ésimo paseo aleatorio y además, $x_i(0) = y_i(0)$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ entonces

$$\frac{|x_i(t) - y_i(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \quad \forall i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{5.3}$$

Observemos que si n es igual a 1 este límite es trivial ya que, al haber una única partícula moviéndose con la dinámica del SIP(m), el "reloj invitación" nunca suena, con lo cual $x_1(t) = \tilde{x}_1(t)$ $\forall t \geq 0$. Por lo tanto, concentrémosnos en demostrar el límite anterior cuando n es igual a 2 y luego adaptemos la demostración para probar el caso general. Esta distinción entre n=2 y n >2 la haremos ya que uno de los procesos que definiremos a continuación para demostrar (5.3) resulta un proceso de Markov únicamente para n=2 y por lo tanto, ciertos resultados que obtendremos sólo serán válidos en ese caso.

5.1. Caso $n = 2$

Teorema 5.1. *Sea $\vec{\mathbf{x}}(t) := (x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t))$ el acoplamiento antes descripto entre dos partículas del SIP(m) y dos paseos aleatorios independientes, simples y simétricos a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado, con $x(0) = y(0)$ y $\tilde{x}(0) = \tilde{y}(0)$. Entonces valen los siguientes límites:*

$$\frac{|x(t) - y(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \quad y \quad \frac{|\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0.$$

Demostración: Veamos cómo demostrar el primer límite, el segundo es totalmente análogo.

Es conocido que si $(w(t))_{t \geq 0}$ es un proceso de Markov a tiempo continuo con generador $\mathcal{L}$ y f es una función perteneciente al dominio de $\mathcal{L}$ que cumple ciertas hipótesis entonces, el proceso $(M(t))_{t \geq 0}$ definido por

$$M(t) := f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t \mathcal{L}(f)(w(u))du \qquad \forall t \geq 0 \tag{5.4}$$

es una martingala con respecto a la sigma álgebra natural $\mathcal{F}_t = \sigma\{w(u) : u \leqslant t\}$ y tiene variación cuadrática $< M, M >$ dada por

$$< M, M > (t) := \int_0^t \mathcal{L}(f^2)(w(u)) - 2f(w(u))\mathcal{L}(f)(w(u))du \qquad \forall t \geq 0 \tag{5.5}$$

(para la demostración de estos hechos ver Apéndice A).

Consideremos ahora el acoplamiento $(\vec{\mathbf{x}}(t))_{t\geq 0}$ y definamos $\phi(\vec{\mathbf{x}}(t)) := x(t)-y(t)$ y $z(t) := \tilde{x}(t)-x(t)$. Observemos que, mientras $z(t)$ mide la distancia entre las dos partículas del SIP a tiempo t, la función $\phi(\vec{\mathbf{x}}(t))$ mide la distancia a tiempo t entre la primer partícula del SIP y el primer paseo aleatorio.

Usando (5.1) se obtiene que

$$\mathcal{L}^{acop(m)}(\phi)(\vec{\mathbf{x}}(t)) = \mathbb{I}_{\{\tilde{x}(t)=x(t)+1\}} - \mathbb{I}_{\{\tilde{x}(t)=x(t)-1\}} = \mathbb{I}_{\{|z(t)|=1\}}z(t)$$

y que

$$\mathcal{L}^{acop(m)}(\phi^2)(\vec{\mathbf{x}}(t)) - 2\phi\mathcal{L}^{acop(m)}(\phi)(\vec{\mathbf{x}}(t)) = \mathbb{I}_{\{\tilde{x}(t)=x(t)+1\}} + \mathbb{I}_{\{\tilde{x}(t)=x(t)-1\}} = \mathbb{I}_{\{|z(t)|=1\}}.$$

Por lo tanto, $(M(t))_{t\geq 0}$ definida por

$$M(t) := \phi(\vec{\mathbf{x}}(t)) - \phi(\vec{\mathbf{x}}(0)) - \int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}z(u)\ du \qquad \forall t \geq 0 \tag{5.6}$$

resulta una martingala con variación cuadrática

$$< M, M > (t) := \int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}du \qquad \forall t \geq 0. \tag{5.7}$$

Observemos también que, por cómo definimos ϕ, el límite que queremos probar es equivalente a que $\dfrac{|\phi(\vec{\mathbf{x}}(t))|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0$, y por (5.6) bastaría con demostrar

$$\frac{M(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}z(u)\ du \xrightarrow{P} 0. \tag{5.8}$$

Veamos primero que $\dfrac{M(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0$:

Al ser $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ la variación cuadrática de $(M(t))_{t\geqslant 0}$, $\big(M^2(t) - < M, M > (t)\big)_{t\geqslant 0}$ resulta una martingala que evaluada en t=0 vale 0, por lo que

$$\mathbb{E}\Big[\frac{M^2(t)}{t}\Big] = \mathbb{E}\Big[\frac{< M, M > (t)}{t}\Big].$$

A partir de esta igualdad podemos deducir que si $\dfrac{< M, M > (t)}{t} \to 0$ $c.t.p$ entonces $\dfrac{M(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0$ pues

$$\frac{< M, M > (t)}{t} \to 0\ c.t.p \ \Rightarrow\ \frac{< M, M > (t)}{t} \xrightarrow{L^1} 0 \ \Leftrightarrow\ \mathbb{E}\Big[\frac{< M, M > (t)}{t}\Big] \to 0 \ \Leftrightarrow$$
$$\mathbb{E}\Big[\frac{M^2(t)}{t}\Big] \to 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{M^2(t)}{t} \xrightarrow{L^1} 0 \ \Rightarrow\ \frac{M^2(t)}{t} \xrightarrow{P} 0 \ \Rightarrow\ \frac{M(t)}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0,$$

donde la primer implicación vale por convergencia mayorada (ya que

$$\left|\frac{< M,M > (t)}{t}\right| = \frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}du \leq 1 \quad \forall t \leq 0)$$

y las últimas dos implicaciones valen por la desigualdad de Markov y por la continuidad de la función $x \to \sqrt{x}$ respectivamente. Por lo tanto, probemos que $\dfrac{< M,M > (t)}{t} \to 0$ $c.t.p.$

Dado que $< M,M > (t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}du$, analicemos primero quién es el generador del proceso $(z(t))_{t\geq 0}$:

Como $z(t) = \tilde{x}(t) - x(t)$ con $x(t)$ y $\tilde{x}(t)$ las posiciones a tiempo t de las partículas que se mueven con la dinámica del SIP(m) en el acoplamiento $\vec{\mathbf{x}}(t) := (x(t), \tilde{x}(t), y(t), \tilde{y}(t))$, $(z(t))_{t\geq 0}$ resulta un paseo aleatorio a casillas vecinas con tasas m+2 cuando se mueve del 1 al 0 ó del -1 al 0 y a tasa m en los otros casos, por lo que el generador de $(z(t))_{t\geq 0}$ evaluado en una función $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ es igual a

$$\mathcal{L}(f(z)) = 2\ \mathbb{I}_{\{|z|=1\}}[f(0) - f(z)] + m[f(z+1) + f(z-1) - 2f(z)]. \tag{5.9}$$

Las tasas m y m+2 se deben a lo siguiente: si las dos partículas del SIP no se encuentran en casillas vecinas, su distancia aumentará o disminuirá en 1 con igual probabilidad cuando haya sonado alguno de los únicos dos relojes numerados (los que suenan a tasa m). Pero si las partículas del SIP se encuentran en casillas vecinas, la tasa con la cual su distancia aumenta en 1 es la misma que la anterior, mientras que la tasa con la que disminuye en 1 es m+2 ya que, además de tener en cuenta esos relojes, hay que considerar el "reloj invitación", que suena a tasa 2.

Observemos que $(z(t))_{t\geq 0}$ es un proceso similar al paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$ a tiempo continuo, ya que sólo se diferencian en las tasas de salto del 1 y del -1. Y como sabemos que este último proceso es recurrente nulo se puede probar que $(z(t))_{t\geq 0}$ también lo es. (Ver la demostración en el Apéndice B).

Por otro lado, por el teorema ergódico para cadenas de Markov a tiempo continuo (Ver Teorema 1.10.2 en [12]), sabemos que

$$\int_0^t \mathbb{I}_{\{z(u)=i\}}du \ \to \ \frac{1}{m_i q_i} \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \tag{5.10}$$

donde $m_i = \mathbb{E}_i[T_i]$ es la esperanza del tiempo que se tarda en regresar al estado i habiendo empezado en i, y q_i es igual a m si $i \notin \{-1, 1\}$ y a m+2 si $i \in \{-1, 1\}$. Como además vimos que $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo se tiene que $m_i = +\infty$ $\forall i \in \mathbb{Z}$, y reemplazando m_i y q_i en (5.10) con i=-1 e i=1 concluimos que

$$< M,M > (t) = \int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}du \to 0 \quad c.t.p,$$

como queríamos ver.

Acabamos de demostrar el primer límite de (5.8). Veamos entonces cómo demostrar el segundo límite, es decir, cómo demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du \xrightarrow{P} 0. \tag{5.11}$$

Para abreviar notación, definamos $A(t) := \int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du$ y observemos que (5.11) es equivalente a probar que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\big] = 0$. Usando que $(\mathbb{E}\big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\big])^2 \leq \mathbb{E}\big[\frac{A(t)^2}{t}\big]$ (lo que vale por la desigualdad de Jensen aplicada a la función convexa $x \to x^2$), para demostrar (5.11) alcanzaría con ver que $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\left[\frac{A(t)^2}{t}\right] = 0$.

Para probar este último límite primero supondremos que las dos partículas del SIP comenzaron en el mismo sitio, es decir, supondremos que $z(t) = 0$. Luego lo generalizaremos al caso en que $z(0) \in \mathbb{Z}$. Notaremos $\mathbb{E}_z$ a la esperanza en el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ en el cual $z(0) = z$, con $z \in \mathbb{Z}$.

Reescribamos de otra forma a $\mathbb{E}_0\left[A(t)^2\right]$:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{4}\mathbb{E}_0\left[A(t)^2\right] &= \frac{1}{4}\mathbb{E}_0\Big[\Big(\int_0^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=-1\}} ds\Big)\Big(\int_0^t \mathbb{I}_{\{z(u)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(u)=-1\}} du\Big)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_0^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=-1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=1\}} + \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} duds\Big] \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=-1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=1\}} + \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} duds \\
&\qquad + \int_0^t\int_u^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=-1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=1\}} + \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} dsdu\Big] \qquad (5.12) \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=-1\}} - \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=1\}} + \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} duds\Big] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} duds\Big] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} duds\Big] \\
&\qquad - \mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{z(s)=1,z(u)=-1} duds\Big],
\end{aligned}
$$

donde las últimas dos igualdades se obtienen luego de haber intercambiado las variables s y u en la segunda integral doble y en el tercer término de la integral doble respectivamente.

Usando convergencia mayorada, propiedades de la esperanza condicional y que $(z(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov nos queda que

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}} duds\Big] &= \int_0^t\int_s^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=1\}}\right] duds \\
= \int_0^t\int_s^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{z(s)=1\}}\mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{z(u)=1}|\mathcal{F}_s\right]\right] duds &= \int_0^t\int_s^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{z(s)=1\}} p_{u-s}(z(s),1)\right] duds \\
= \int_0^t\int_s^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{z(s)=1\}} p_{u-s}(1,1)\right] duds &= \int_0^t\int_s^t p_{u-s}(1,1)\mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{z(s)=1\}}\right] duds \\
= \int_0^t\int_s^t p_{u-s}(1,1)p_s(0,1) duds&,
\end{aligned}
$$

donde $p_s(x,y) := \mathbb{P}(z(s) = y \mid z(0) = x)$ y al igual que antes, $\mathcal{F}_s$ es la σ-álgebra generada por el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ hasta tiempo s.

De forma análoga se prueba que

$$
\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=-1,z(u)=-1\}} duds\Big] = \int_0^t\int_s^t p_{u-s}(-1,-1)p_s(0,-1) duds
$$

y que

$$\mathbb{E}_0\Big[\int_0^t\int_s^t \mathbb{I}_{\{z(s)=1,z(u)=-1\}}duds\Big] = \int_0^t\int_s^t p_{u-s}(1,-1)p_s(0,1)duds.$$

Reemplazando las últimas tres igualdades en (5.12) y usando que $p_s(0,-1)=p_s(0,1)$, $p_{u-s}(1,1)=p_{u-s}(-1,-1)$ y $p_{u-s}(1,-1)=p_{u-s}(-1,1)\ \ \forall s\geq 0$ y $\forall u\geq s$ (por la simetría del proceso), nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\mathbb{E}_0\big[A(t)^2\big] &= \int_0^t\int_s^t p_s(0,1)p_{u-s}(1,1)duds - \int_0^t\int_s^t p_s(0,1)p_{u-s}(-1,1)duds\\ &= \int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)drds - \int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(-1,1)drds.\end{aligned}\tag{5.13}$$

Veamos ahora cómo podemos reescribir la última integral doble que aparece en (5.13). Para esto, consideremos $f_u(-1,1)$ la función de densidad de la probabilidad de llegar por primera vez a 1 habiendo empezado en -1. Notemos que $p_r(-1,1)=\int_0^r f_l(-1,1)p_{r-l}(1,1)dl$ (ya que la probabilidad de que una partícula llegue del -1 al 1 en tiempo r es igual a la probabilidad de que llegue del -1 al 1 por primera vez en tiempo l y luego regrese al 1 en tiempo $r-l$ para cualquier l entre 0 y r). A partir de esta igualdad deducimos que

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(-1,1)drds = \int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^r p_s(0,1)f_l(-1,1)p_{r-l}(1,1)dldrds\\ &= \int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^{t-s-u} p_s(0,1)f_l(-1,1)p_u(1,1)dlduds\\ &= \int_0^t\int_0^{t-s}\int_0^{t-s-r} p_s(0,1)f_l(-1,1)p_r(1,1)dldrds,\end{aligned}\tag{5.14}$$

donde la segunda y la tercer igualdad se obtienen luego de haber hecho los cambios de variables $r-l$ por u y u por r respectivamente.

Reemplazando (5.14) en (5.13) y sacando factor común nos queda

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}_0[A(t)^2] = \int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\Big(1-\int_0^{t-r-s} f_l(-1,1)dl\Big)drds\tag{5.15}$$

y para abreviar notación, definiendo $\Psi(t,s,r):=1-\int_0^{t-r-s} f_l(-1,1)dl$ resulta

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}_0[A(t)^2] = \int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\Psi(t,r,s)drds.\tag{5.16}$$

Tengamos presente que nuestro objetivo era probar que $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbb{E}_0\big[\frac{A(t)^2}{t}\big]=0$ y por (5.16), basta ver que para algún δ apropiado valen los siguientes dos límites:

$$(1)\quad \lim_{t\to\infty}\int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\ \mathbb{I}_{\{t-s-r>\delta t\}}\ \Psi(t,s,r)drds = 0$$

$$(2)\quad \lim_{t\to\infty}\int_0^t\int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\ \mathbb{I}_{\{t-s-r\leq\delta t\}}\ \Psi(t,s,r)drds = 0.$$

Recordemos que el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ es similar a un paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$ a tiempo continuo. Esto hace que el proceso sea recurrente (como ya hemos dicho) y que además, valgan las siguientes cotas: $\int_0^t p_s(0,1) < C\sqrt{t}$ y $\int_0^t p_r(1,1) < C\sqrt{t}$ (Ver Apéndice B para la demostración).

Veamos primero si existen condiciones sobre δ para que el primer límite sea igual a 0:

Definamos $K(\delta,t) := 1 - \int_0^{\delta t} f_l(-1,1)dl$. Por un lado, como $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente, la probabilidad de que una partícula que arrancó en el -1 llegue al 1 por primera vez antes de tiempo $\widehat{t}$ converge a 1 cuando $\widehat{t}$ tiende a más infinito, de lo cual se deduce que si $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta t = +\infty$ entonces, $\lim\limits_{t\to\infty} K(\delta,t) = 0$.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
(1):\quad & \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\ \mathbb{I}_{\{t-s-r>\delta t\}}\ \Psi(t,s,r)\ drds \\
& \leq\ \frac{1}{t}K(\delta,t)\int_0^t \int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\ drds \\
& \leq \frac{1}{t}K(\delta,t)\Big(\int_0^t p_s(0,1)\ ds\Big)\Big(\int_0^t p_r(1,1)\ dr\Big) \leq 4C^2K(\delta,t),
\end{aligned}$$

donde en la primer desigualdad acotamos $\mathbb{I}_{\{t-s-r>\delta t\}}.\Psi(t,s,r)$ por $K(\delta,t)$ y en la tercera usamos las cotas antes mencionadas.

De ambos hechos concluimos que si $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta t = +\infty$, el límite (1) vale cero.

Veamos ahora si existen condiciones sobre δ bajo las cuales el segundo límite da 0:

Acotando tanto a $\Psi(t,s,r)$ como a $p_r(1,1)$ por 1, aplicando el cambio de variables $u := s+r$ y suponiendo que δ es menor o igual a 1 nos queda que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^{t-s} p_s(0,1)p_r(1,1)\ \mathbb{I}_{\{t-s-r\leq\delta t\}}\ \Psi(t,s,r)\ drds \\
& \leq \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^{t-s} p_s(0,1)\ \mathbb{I}_{\{t(1-\delta)\leq s+r\}}\ drds = \frac{1}{t}\int_0^t \int_0^t p_s(0,1)\ \mathbb{I}_{\{t(1-\delta)\leq u\}}\ duds \\
& = \frac{1}{t}\int_0^t \int_{t(1-\delta)}^t p_s(0,1)\ duds = \frac{1}{t}[t - t(1-\delta)]\ \Big(\int_0^t p_s(0,1)ds\Big) = \delta\int_0^t p_s(0,1)ds \\
& \leq \delta\ C\sqrt{t},
\end{aligned} \tag{5.17}$$

de lo que se deduce que si $\delta \leq 1$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta\sqrt{t} = 0$, el límite (2) es igual a 0.

Notemos que existen valores de δ que satisfacen todas las restricciones que surgieron: $0 < \delta \leq 1$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta t = +\infty$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} \delta\sqrt{t} = 0$, por ejemplo, $\delta = t^{-\frac{3}{4}}$. Por lo tanto, si elegimos $\delta = t^{-\frac{3}{4}}$, como los límites (1) y (2) valen cero y además, por (5.16), $\frac{1}{4}\mathbb{E}_0[\frac{A(t)^2}{t}]$ es la suma de esos dos límites, podemos concluir que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}_0\big[\frac{A(t)^2}{t}\big] = 0$, como queríamos demostrar.

Ahora que ya sabemos que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}_0\big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\big] = 0$, veamos cómo generalizar al caso en que $z(0) \in \mathbb{Z}$ y no necesariamente $z(0)$ sea igual a 0.

Sin pérdida de generalidad, supongamos que $z(0) = z$ es positivo (que no haya pérdida del generalidad se debe a que el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ es simétrico con respecto al 0). Debemos probar que

$\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}_z\big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\big] = 0$ y para esto utilizaremos la propiedad fuerte de Markov para limitarnos al caso anterior.

Sea $\tau_0 := \text{ínf}\,\{t > 0 : z(t) = 0\}$. Como

$$\mathbb{E}_z\Big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\Big] = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\int_0^{\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\Big] + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\int_{\tau_0\wedge t}^{t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\Big], \tag{5.18}$$

para probar que $\mathbb{E}_z\big[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}\big]$ converge a 0 cuando t tiende a $+\infty$ basta ver que cada uno de los términos de (5.18) convergen a 0.

Comencemos por el primero, para lo cual necesitaremos algunas definiciones previas:

Sea $T_1 := \text{ínf}\,\{t \geq 0 : z(t) = 1\}$, y para cada $i \in \mathbb{N}$, definamos $T_{i+1} := \text{ínf}\,\{t > T_i : z(t) = 1\}$, $\zeta_i := \text{ínf}\,\{t \geq T_i : z(t) \neq 1\} - T_i$ y B_i al evento {"en el instante $t = (T_i + \zeta_i)^+,\ z(t) = 2$"}. Notemos que ζ_i mide el tiempo que la partícula tardó en irse del 1 luego de haber llegado a ese sitio por i-ésima vez y que además, $\forall j \in \mathbb{Z}$, el evento B_j es independiente de la sucesión $(\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ (ya que, una vez que sonó el reloj que indica que hay que salir del sitio 1, la partícula elige con una cierta probabilidad ir a cada uno de los otros sitios, independientemente del instante en que el reloj sonó).

Como también sabemos que $(\zeta_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas donde cada una tiene distribución exponencial de parámetro $2m+2$ y además, la probabilidad de que ocurra el evento B_i es igual a $\frac{m}{2m+2}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ (ya que la tasa de salto desde el sitio 1 al sitio 2 es m y del sitio 1 al 0 es $m+2$), se tiene:

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\int_0^{\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\Big]\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\int_0^{\tau_0} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}\ du\Big] = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\zeta_1 + \sum_{i=2}^{+\infty} \zeta_i\ .\ \mathbb{I}_{\{\bigcap_{k=1}^{i-1} B_k\}}\Big]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z[\zeta_1] + \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{E}_z[\zeta_1]\ \mathbb{E}_z[\mathbb{I}_{\{\bigcap_{k=1}^{i-1} B_k\}}] = \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2m+2} + \frac{1}{\sqrt{t}}\sum_{i=2}^{+\infty}\frac{1}{2m+2}\ .\ \prod_{k=1}^{i-1}\mathbb{P}(B_k)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2m+2}\sum_{i=1}^{+\infty}\ .\Big(\frac{m}{2m+2}\Big)^{i-1} = \frac{C'}{\sqrt{t}} < \infty \quad \text{(con } C' \text{una constante finita)},$$

de lo cual se deduce que $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\big[\int_0^{\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\big] = 0$, como queríamos ver.

Analicemos ahora al segundo término de (5.18):

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\int_{\tau_0\wedge t}^{t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\Big] = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\Big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\ |\mathcal{F}_{\tau_0}\Big]\Big]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{\tau_0\leq t-\sqrt[4]{t}\}}\ \mathbb{E}_0\Big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\ |\mathcal{F}_{\tau_0}\Big]\Big]$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{t-\sqrt[4]{t}<\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\Big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\ |\mathcal{F}_{\tau_0}\Big]\Big]$$
$$= \mathbb{E}_0\Big[\frac{\sqrt{t-\tau_0\wedge t}}{\sqrt{t}}\ \mathbb{I}_{\{\tau_0\leq t-\sqrt[4]{t}\}}\ A(t-\tau_0\wedge t)\ \big|\mathcal{F}_{\tau_0}\Big] + \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{t-\sqrt[4]{t}<\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\Big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t} \mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}} z(u)\ du\Big]\Big]$$

donde en la primer igualdad aplicamos la propiedad fuerte de Markov.

Por un lado, observemos que $\frac{\sqrt{t-\tau_0 \wedge t}}{\sqrt{t}}$ está acotado $\forall t \geq 0$ y que además, si $\tau_0 \leq t - \sqrt[4]{t}$ entonces $\lim\limits_{t\to+\infty} t - \tau_0 \wedge t = +\infty$. A partir de estas observaciones y del hecho que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathbb{E}_0[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}] = 0$ (lo cual ya hemos demostrado) podemos concluir:

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}_0\Big[\frac{\sqrt{t-\tau_0\wedge t}}{\sqrt{t}}\ \mathbb{I}_{\{\tau_0\leq t-\sqrt[4]{t}\}}\ A(t-\tau_0\wedge t)\ \big|\mathcal{F}_{\tau_0}\Big] = 0. \tag{5.19}$$

Por otro lado, tenemos:

$$\Big|\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{t-\sqrt[4]{t}\leq\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t}\mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}z(u)\ du\big]\Big]\Big| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{t-\sqrt[4]{t}\leq\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t} 1\ du\big]\Big]$$
$$\leq \frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{E}_0\big[\int_0^{\sqrt[4]{t}} 1\ du\big]\Big] = \frac{1}{\sqrt[4]{t}},$$

lo que implica que

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbb{E}_z\Big[\mathbb{I}_{\{t-\sqrt[4]{t}\leq\tau_0\leq t\}}\ \mathbb{E}_0\big[\int_0^{t-\tau_0\wedge t}\mathbb{I}_{\{|z(u)|=1\}}z(u)\ du\big]\Big] = 0. \tag{5.20}$$

A partir de los límites obtenidos en (5.19) y (5.20) se deduce que el segundo término de (5.18) también converge a cero, y por lo tanto, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathbb{E}_z[\frac{A(t)}{\sqrt{t}}] = 0\ \forall z \in \mathbb{Z}$, lo que concluye la demostración del Teorema 5.1.

5.2. Caso general

Enunciémos ahora la versión general del Teorema 5.1 y veamos cómo adaptar la demostración. Recordemos que el generador del acoplamiento que hemos definido al comienzo de este capítulo era

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{acop(m)}f(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}}) &= \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{i=1}^{n} m[f(\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon},\vec{\mathbf{Y}}^{i,i+\epsilon}) - f(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{X}})] \\ &+ \sum_{\epsilon=\pm1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{I}_{\{x_k-x_i=\epsilon\}}[f(\vec{\mathbf{X}}^{i,i+\epsilon},\vec{\mathbf{Y}}) - f(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}})],\end{aligned} \tag{5.21}$$

donde $\vec{\mathbf{X}} = (x_1,...,x_n)$ y $\vec{\mathbf{Y}} = (y_1,...,y_n)$ denotan las posiciones de las n partículas del SIP y de los n paseos aleatorios respectivamente.

Teorema 5.2. *Sea $(\vec{\mathbf{X}}(t),\vec{\mathbf{Y}}(t))$ el acoplamiento antes descripto entre n partículas del SIP(m) y n paseos aleatorios a tasa $\frac{m}{2}$ a cada lado y supongamos que $X_i(0) = Y_i(0)\ \forall\ 1\leq i\leq n$. Entonces,*

$$\frac{|X_i(t)-Y_i(t)|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \quad \forall\ 1\leq i\leq n.$$

Demostración:

Siguiendo la misma demostración que en el caso n=2, definamos $\Delta_n := \mathbb{Z}^n$ el espacio de las posiciones posibles de n partículas, y para cada par i,k con $1\leq i,k\leq n$ consideremos las funciones $\phi_i : \Delta_n\times\Delta_n \to \mathbb{Z}$ y $Z_{i,k} : \Delta_n \to \mathbb{Z}$ dadas por $\phi_i(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}}) := X_i - Y_i$ y $Z_{i,k}(\vec{\mathbf{X}}) := X_k - X_i$, es decir, que ϕ_i representa la distancia entre las partículas i-ésimas del SIP y del paseo aleatorio y $Z_{i,k}$ representa la diferencia entre las partículas k-ésima e i-ésima del SIP.

Usando el generador (5.21) se deduce que $\forall\ 1 \leq i, k \leq n$,

$$\mathcal{L}^{acop(m)}\phi_i(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_k=Y_i+1\}} - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_k=Y_i-1\}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}|=1\}}.Z_{i,k}$$

y

$$\mathcal{L}^{acop(m)}(\phi_i^2)(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}}) - 2(\phi_i\mathcal{L}^{acop(m)}\phi_i)(\vec{\mathbf{X}},\vec{\mathbf{Y}}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_k=Y_i+1\}} - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{Y_k=Y_i-1\}} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}|=1\}}.$$

Y por el mismo argumento que hemos usado en el caso n=2 nos queda que $\forall\ 1 \leq i \leq n$, $(M_i(t))_{t\geq 0}$ definida por

$$M_i(t) := \phi_i(\vec{\mathbf{X}}(t),\vec{\mathbf{Y}}(t)) - \phi_i(\vec{\mathbf{X}}(0),\vec{\mathbf{Y}}(0)) - \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}(s)|=1\}}.Z_{i,k}(s)\ ds$$

es una martingala con variación cuadrática

$$\begin{aligned} < M_i, M_i > (t) :&= \int_0^t \big[\mathcal{L}^{acop(m)}(\phi_i^2)(\vec{\mathbf{X}}(t),\vec{\mathbf{Y}}(t)) - 2(\phi_i\mathcal{L}^{acop(m)}\phi_i)(\vec{\mathbf{X}}(t),\vec{\mathbf{Y}}(t))\big]ds \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^t \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}(s)|=1\}}\ ds, \end{aligned}$$

y que

$$\frac{< M_i, M_i > (t)}{t} \to 0\ c.t.p.$$

Por lo tanto, para demostrar el teorema (que equivale a probar que $\frac{\left|\phi_i(\vec{\mathbf{X}}(t),\vec{\mathbf{Y}}(t))\right|}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0\ \forall\ 1 \leq i \leq n$), basta ver que $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[\frac{A_{i,k}(t)}{\sqrt{t}}\big] = 0\ \forall\ 1 \leq i, k \leq n,\ i \neq k$, donde $A_{i,k}(t) := \int_0^t \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}(s)|=1\}}.Z_{i,k}(s)\ ds$.

Notemos que no podemos realizar la misma demostración que hemos hecho en el caso $n = 2$ ya que si $n > 2$, $(Z_{i,k}(s))_{s\leq 0}$ no es Markov. En efecto, para cada par i, k con $1 \leq i, k \leq n$ e $i \neq k$, las partículas del SIP diferentes a la i-ésima y a la k-ésima pueden afectar el valor de $Z_{i,k}(s)$. Y dado que esto ocurre sólo en el caso de que alguna de todas esas partículas se encuentre en un sitio vecino a la partícula i-ésima o a la k-ésima del SIP, lo que haremos a continuación será "dividir el tiempo" en los momentos en los que eso ocurre y en los que no.

Para cada par i, k con $i \neq k$ y $1 \leq i, k \leq n$, sea

$$\mathcal{B}_{i,k} := \{s \geq 0 : |Z_{i,k}(s)| = 1 \text{ y } \min\{|Z_{i,l}(s)|, |Z_{l,k}(s)|\} \geq 2\ \forall l \in \{1, ...n\} \setminus \{i, j\}\}$$

y sea

$$\mathcal{D}_{i,k} := \{s \geq 0 : |Z_{i,k}(s)| = 1 \text{ y } \min\{|Z_{i,l}(s)|, |Z_{l,k}(s)|\} \leq 1 \text{ para algún } l \in \{1, ...n\} \setminus \{i, j\}\}.$$

A partir de estas definiciones resulta:

$$A_{i,k}(t) := \int_0^t \mathbb{I}_{\{|Z_{i,k}(s)|=1\}}.Z_{i,k}(s)\ ds = \int_0^t \mathbb{I}_{\{s\in\mathcal{B}_{i,k}\}}.Z_{i,k}(s)\ ds + \int_0^t \mathbb{I}_{\{s\in\mathcal{D}_{i,k}\}}.Z_{i,k}(s)\ ds.$$

Observemos que $\mathcal{B}_{i,k}$ es el conjunto de los instantes de tiempo en los que puede ocurrir una modificación en el valor de $Z_{i,k}$ exclusivamente a causa de un salto producido por el “reloj invitación” asociado a las partículas i-ésima del SIP y k-ésima del SIP o un salto producido por el “reloj del paseo aleatorio” de cualquiera de esas dos partículas. O sea que en los tiempos pertenecientes a $\mathcal{B}_{i,k}$ no hay ninguna partícula distinta a la i-ésima y a la k-ésima del SIP que puede modificar a $Z_{i,k}$. Por esta razón, podemos pensar que durante $\mathcal{B}_{i,k}$, las partículas i-ésima y k-ésima del SIP son las únicas partículas del SIP, y por el caso $n = 2$ que ya hemos demostrado nos queda que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\Big[\frac{\int_0^t \mathbb{I}_{\{s\in\mathcal{B}_{i,k}\}}.Z_{i,k}(s)\ ds}{\sqrt{t}}\Big] = 0.$$

Por otro lado, se puede probar que si reemplazamos a $\mathcal{B}_{i,k}$ por $\mathcal{D}_{i,k}$ este último límite sigue valiendo cero. (Ver [13] para la demostración). Por lo tanto, deducimos que

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}\big[\frac{A_{i,k}}{\sqrt{t}}\big] = 0 \ \ \forall\ 1 \leq i,k \leq n,\ i \neq k,$$

y con esto concluimos la demostración.

Apéndice A

Martingalas y Variación Cuadrática

En este apéndice, lo que haremos será demostrar que si $(w(t))_{t\geq 0}$ es un proceso a tiempo continuo con generador $\mathcal{L}$ y semigrupo $(S_t)_{t\geq 0}$ y f es una función en L^1 perteneciente al dominio de $\mathcal{L}$ tal que $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(f^2)$ están acotados entonces, el proceso $(M(t))_{t\geq 0}$ con

$$M(t) := f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t \mathcal{L}(f)(w(u))\, du \tag{A.1}$$

es una martingala con variación cuadrática

$$< M, M > (t) := \int_0^t \mathcal{L}(f^2)(w(u)) - 2f(w(u))\mathcal{L}(f)(w(u))\, du. \tag{A.2}$$

Comencemos por recordar la definición de variación cuadrática y por enunciar un lema (cuya demostración no daremos, y que se puede encontrar en el Teorema 7.27 de [8]) que sirve para calcularla en el caso en el que el proceso original sea una martingala:

Definición A.1. *Sea $(X(t))_{t\geq 0}$ un proceso a tiempo continuo y sea $\pi_n = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t\}$ una partición del intervalo $[0, t]$. Definimos la variación cuadrática de $(X(t))_{t\geq 0}$ como el proceso $(< X, X > (t))_{t\geq 0}$ con*

$$< X, X > (t) := \lim_{\|\pi_n\|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} |X(t_{i+1}) - X(t_i)|^2,$$

donde el límite es en probabilidad.

Lema A.1. *Si $(M(t))_{t\geq 0}$ es una martingala con segundo momento finito, la variación cuadrática $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ de $(M(t))_{t\geq 0}$ existe y es el único proceso que verifica ser continuo por derecha, creciente, que evaluado en t=0 vale 0 y que además, $\big(M^2(t) - < M, M > (t)\big)_{t\geq 0}$ es una martingala.*

Una forma de demostrar que el proceso definido en (A.1) es una martingala es la siguiente:

•) $M(t) \in \mathrm{L}^1$ $\forall t \geq 0$ ya que $f \in \mathrm{L}^1$ y $\mathcal{L}(f)$ es acotado.

•) $\mathbb{E}\big[M(t) - M(s)|\mathcal{F}(s)\big] = 0$ $\forall$ $t \geq s \geq 0$ pues, si notamos $\mathbb{E}_x$ a la esperanza del proceso $(w(t))_{t\geq 0}$

que en $t = 0$ es igual a x se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[M(t) - M(s)|\mathcal{F}(s)\big] &= \mathbb{E}\big[f(w(t)) - f(w(s)) - \int_s^t \mathcal{L}f(w(u))\, du\ |\mathcal{F}(s)\big] \\
&= \mathbb{E}\big[f(w(t))\ |\mathcal{F}(s)\big] \ - \ \mathbb{E}\big[f(w(s))\ |\mathcal{F}(s)\big] \ - \ \mathbb{E}\big[\int_s^t \mathcal{L}f(w(u))\, du\ |\mathcal{F}(s)\big] \\
&= \mathbb{E}_{w(s)}\big[f(w(t-s))\big] \ - \ \mathbb{E}[f(w(s))] \ - \ \mathbb{E}_{w(s)}\big[\int_0^{t-s} \mathcal{L}f(w(u))\, du\big] \\
&= \quad S_{t-s}f(w(s)) \quad - \ S_0 f(w(s)) \ - \int_0^{t-s} \mathbb{E}_{w(s)}\big[\mathcal{L}f(w(u))\big]\, du \\
&= \quad S_{t-s}f(w(s)) \quad - \ S_0 f(w(s)) \ - \int_0^{t-s} S_u\mathcal{L}f(w(s))\, du \\
&= \quad S_{t-s}f(w(s)) \quad - \ S_0 f(w(s)) \ - \int_0^{t-s} \frac{d}{du} S_u f(w(s))\, du \quad = \quad 0,
\end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad de Markov, convergencia mayorada, la definición de semigrupo y la relación que hay entre la derivada de éste y el generador.

Pero lo que haremos a continuación es dar una proposición que no sólo servirá para demostrar de forma alternativa que $(M(t))_{t\geq 0}$ es una martingala sino que también servirá para demostrar que el proceso $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ definido en (A.2) es la variación cuadrática de $(M(t))_{t\geq 0}$. Básicamente, la proposición nos dice cuál es el término que le debemos restar a $g(w(t))$ (con $(w(t))_{t\geq 0}$ un proceso de Markov y g una función continua y acotada) para obtener una nueva martingala.

Proposición A.1. *Sea $(w(t))_{t\geq 0}$ un proceso de Markov a tiempo continuo y sea g una función continua y acotada. Consideremos el proceso $(N_t)_{t\geq 0}$ definido por*

$$N(t) := g(w(t)) - \int_0^t \Big(\frac{d}{dl}\ \mathbb{E}_{w(u)}[g(\tilde{w}(l))]\Big)\Big|_{l=0} du \quad \forall t \geq 0, \tag{A.3}$$

donde $(\tilde{w}(t))_{t\geq 0}$ es otra versión (independiente) del proceso $(w(t))_{t\geq 0}$. Entonces, $\forall\ t \geq s \geq 0$ vale la siguiente igualdad:

$$\mathbb{E}[N(t)|\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}[N(s)], \tag{A.4}$$

con $\mathcal{F}(t) := \sigma\{w(u) : u \leqslant t\}$.

Observación A.1. *Dado que $\sigma\{w(u) : u \leq t\} = \sigma\{N(u) : u \leq t\}$, se deduce que si $N(t) \in L^1$ $\forall t \geq 0$, $(N(t))_{t\geq 0}$ resulta una martingala con respecto a su filtración natural.*

Demostración de la Proposición: Notemos que (A.4) vale si y sólo si

$$\mathbb{E}[g(w(t)) - g(w(s))\ |\mathcal{F}(s)] = \mathbb{E}\Big[\int_s^t \Big(\frac{d}{dl}\ \mathbb{E}_{w(u)}[g(\tilde{w}(l))]\Big)\Big|_{l=0} du\ |\mathcal{F}(s)\Big] \quad \forall\ t \geq s \geq 0.$$

Sean s y t tales que $t > s \geq 0$ y sea $\Delta_n := \frac{t-s}{n}$. (Si $t = s$ la igualdad anterior vale trivialmente).

Usando la propiedad de esperanza en torres y usando el desarrollo de Taylor se obtiene:

$$\mathbb{E}\big[g(w(t)) - g(w(s))\ |\mathcal{F}(s)\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{k=1}^{n} g(w(s+k\Delta_n)) - g(w(s+(k-1)\Delta_n))\ |\mathcal{F}(s)\big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[\ g(w(s+k\Delta_n)) - g(w(s+(k-1)\Delta_n))\ |\mathcal{F}(s)\big]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big\{\ \mathbb{E}\big[g(w(s+k\Delta_n)) - g(w(s+(k-1)\Delta_n))\ |\mathcal{F}(s+(k-1)\Delta_n)\big]\ |\mathcal{F}(s)\big\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big\{\ \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[g(w(\Delta_n)) - g(0)\big]\ \big|\mathcal{F}(s)\big\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big\{\ \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[\Big(\frac{d}{dl} g(\tilde{w}(l))\Big)\Big|_{l=0}\ \Delta_n +\ o(\Delta_n^2)\big]\ |\mathcal{F}(s)\big\}$$

$$= \mathbb{E}\big\{\ \sum_{k=1}^{n} \Delta_n\ \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[\Big(\frac{d}{dl} g(\tilde{w}(l))\Big)\Big|_{l=0}\big]\ +\ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[o(\Delta_n^2)\big]\ |\mathcal{F}(s)\big\}$$

$$= \mathbb{E}\big\{\ \sum_{k=1}^{n} \Delta_n\ \Psi(s+(k-1)\Delta_n) +\ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[o(\Delta_n^2)\big]\ |\mathcal{F}(s)\big\}$$

donde $\frac{o(\Delta_n^2)}{\Delta_n^2} \to 0$ cuando $\Delta_n \to 0$ (y por lo tanto, $\frac{o(\Delta_n^2)}{\Delta_n^2}$ está acotado por una constante C) y $\Psi(s+(k-1)\Delta_n) := \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\big[\Big(\frac{d}{dl} g(\tilde{w}(l))\Big)\Big|_{l=0}\big] = \Big(\frac{d}{dl}\mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}[g(\tilde{w}(l))]\Big)\Big|_{l=0}$.

Tomando límite cuando n tiende a $+\infty$ nos queda

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[g(w(t)) - g(w(s))\ |\mathcal{F}(s)] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big\{\ \sum_{k=1}^{n} \Delta_n\ \Psi(s+(k-1)\Delta_n) +\ \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[o(\Delta_n^2)\big]\ |\mathcal{F}(s)\big\}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Notemos que $\sum_{k=1}^{n} \Delta_n\ \Psi(s+(k-1)\Delta_n)$ es una suma de Riemann para la función Ψ en el intervalo $[s,t]$ y la partición regular $\{s, s+\Delta_n, s+2\Delta_n, ..., s+n\Delta_n = t\}$, por lo tanto,

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sum_{k=1}^{n} \Delta_n\ \Psi(s+(k-1)\Delta_n) = \int_s^t \Psi(u)du.$$

Por otro lado,

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[o(\Delta_n^2)\big] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[\frac{o(\Delta_n^2)}{\Delta_n^2}\Delta_n^2\big]$$

$$\le \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_{w(s+(k-1)\Delta_n)}\ \big[C\ \frac{(t-s)^2}{n^2}\big] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} C\ \frac{(t-s)^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} C\ \frac{(t-s)^2}{n} = 0.$$

Reemplazando estos límites en (A.5), concluimos que

$$\mathbb{E}\left[g(w(t)) - g(w(s)) \;|\mathcal{F}(s)\right] = \mathbb{E}\Big\{ \int_s^t \Psi(u)du \;\Big|\mathcal{F}(s)\Big\} = \mathbb{E}\Big[\int_s^t \Big(\frac{d}{dl}\; \mathbb{E}_{w(u)}[g(\tilde{w}(l))]\Big)\Big|_{l=0} du \;|\mathcal{F}(s)\Big],$$

como queríamos ver. □

Ahora que hemos demostrado la proposición, comencemos por calcular $\Big(\frac{d}{dl}\; \mathbb{E}_{w(u)}[g(\tilde{w}(l))]\Big)\Big|_{l=0}$ con $g(x) := f(x) - f(\tilde{w}(0))$, es decir, con $g(\tilde{w}(l)) := f(\tilde{w}(l)) - f(\tilde{w}(0))$:

$$\begin{aligned}\Big(\frac{d}{dl}\mathbb{E}_{w(u)}[f(\tilde{w}(l)) - f(\tilde{w}(0))]\Big)\Big|_{l=0} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}[f(\tilde{w}(h)) - f(\tilde{w}(0))] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[S_h f(w(u)) - S_0 f(w(u))] = \mathcal{L}(f)(w(u)).\end{aligned}$$

Como además sabemos que

$$M(t) := f(w(t)) - f(w(0)) - \int_0^t \mathcal{L}(f)(w(u))du$$

está en L^1 $\forall t \geq 0$ (ya que $f \in L^1$ y $\mathcal{L}(f)$ es acotado), aplicando la proposición anterior concluimos que el proceso $(M(t))_{t\geq 0}$ es una martingala.

Probemos ahora que el proceso $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ definido en (A.2) es la variación cuadrática de $(M(t))_{t\geq 0}$. De acuerdo al Lema A.1 debemos probar que $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ en $t = 0$ vale 0, que es un proceso continuo por derecha, creciente y que además verifica que $(M(t)^2 - < M, M > (t))_{t\geq 0}$ es una martingala.

Es claro que $(< M, M > (t))_{t\geq 0}$ cumple las primeras dos condiciones. También es fácil chequear que es creciente:

$$\begin{aligned}< M, M > (t) - < M, M > (s) &= \int_s^t \frac{d}{dt}\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(t))|_{t=0}\; du \;= \int_s^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(h))\big]\; du \\ &\geq \int_s^t \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\big[\mathbb{E}_{w(u)}(M(h))\big]^2\; du \;\geq 0 \quad \forall\; 0 \leq s \leq t.\end{aligned}$$

Demostremos entonces que $(M(t)^2 - < M, M > (t))_{t\geq 0}$ es una martingala, y para eso, calculemos $\frac{d}{dt}\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(t))|_{t=0}$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(t))|_{t=0} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(h)) - \mathbb{E}_{w(u)}(M^2(0))] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(h))] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{[f(\tilde{w}(h)) - f(\tilde{w}(0)) - \int_0^h \mathcal{L}f(\tilde{w}(u))du\;]^2\} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{[f(\tilde{w}(h)) - f(\tilde{w}(0))^2\} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{\big[\int_0^h \mathcal{L}f(\tilde{w}(u))du\big]^2\} \\ &\quad - 2\;\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[[f(\tilde{w}(h)) - f(\tilde{w}(0))]\int_0^h \mathcal{L}f(\tilde{w}(u))du\big] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{[f(\tilde{w}(h)) - f(\tilde{w}(0)]^2\},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que, como $(\tilde{w}(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Feller y f es una función continua tal que $\mathcal{L}(f)$ está acotado por una constante C' resulta

$$\bullet) \ \Big|\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[[f(w(h))-f(w(0))]\int_0^h \mathcal{L}f(w(u))du\ \big]\Big|$$
$$\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[|f(w(h))-f(w(0))|\int_0^h |\mathcal{L}f(w(u))|du\big]$$
$$\leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[|f(w(h))-f(w(0))|\ h\ C'\big]=C'\lim_{h\to 0}\mathbb{E}_{w(u)}\big[|f(w(h))-f(w(0))|\big]=0$$

y

$$\bullet) \ \Big|\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[\int_0^h \mathcal{L}f(w(u))du\big]^2\Big| \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\big[\int_0^h |\mathcal{L}f(w(u))|du\big]^2 \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}C'^2h^2$$
$$= \lim_{h\to 0} C'^2 h = 0.$$

Por otro lado, si en $\lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{[f(\tilde{w}(h))-f(v(0)]^2\}$ desarrollamos el cuadrado y luego restamos y sumamos $2f^2(w(0))$ obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}\{[f(\tilde{w}(h))-f(\tilde{w}(0))]^2\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}[f^2(\tilde{w}(h))-f^2(\tilde{w}(0))]-2f(\tilde{w}(0))\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_{w(u)}[f(\tilde{w}(h))-f(\tilde{w}(0))]$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[S_hf^2(w(u))-S_0f^2(w(u))]-2f(w(u))\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[S_hf(\tilde{w}(u))-S_0f(\tilde{w}(u))]$$
$$=\mathcal{L}(f^2)(w(u))-2f(w(u))\mathcal{L}(f)(w(u)).$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}_{w(u)}(M^2(t))|_{t=0}=\mathcal{L}(f^2)(w(u))-f(w(u))\mathcal{L}(f)(w(u)).$$

Como además sabemos que

$$< M, M > (t) := \int_0^t \mathcal{L}(f^2)(w(u))-2f(w(u))\mathcal{L}(f)(w(u))du$$

está en L^1 $\forall t\geq 0$ (ya que $f\in L^1$ y $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(f^2)$ están acotadas), aplicando la Proposición A.1 y la Observación A.1 nos queda que $\big(M(t)^2 - < M, M > (t)\big)_{t\geq 0}$ es una martigala, como queríamos demostrar.

Apéndice B

Paseo Aleatorio en $\mathbb{Z}$

Sea $(z(t))_{t\geq 0}$ un paseo aleatorio a tiempo continuo en $\mathbb{Z}$ en el que la partícula salta del sitio x al sitio y con las siguientes tasas:

$$\begin{cases} m & \text{si } |y-x| = 1, x \notin \{-1,1\} \\ m & \text{si } x = 1, y = 2 \text{ ó } x = -1, y = -2 \\ m+2 & \text{si } x = 1, y = 0 \text{ ó } x = -1, y = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Queremos probar que este proceso es recurrente nulo (es decir, que la probabilidad de que una partícula regrese en tiempo finito al sitio desde el que comenzó es 1 pero que la esperanza del tiempo que tarda en regresar es $+\infty$) y que además, para t suficientemente grande, valen las siguientes cotas:

$$\int_0^t p_s(0,1)\ ds < C\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \int_0^t p_s(1,1)\ ds < C\sqrt{t},$$

donde $p_s(a,b) = \mathbb{P}(z(s) = b | z(0) = a)$ con $s \geq 0$ y $a, b \in \mathbb{Z}$.

Comenzaremos dando una demostración de que $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo que emplea a los números de Catalán. Luego, probaremos nuevamente esta propiedad mediante un acoplamiento que haremos entre $(z(t))_{t\geq 0}$ y un paseo aleatorio simple y simétrico a tasa m´a cada lado, el cual también nos servirá para deducir las cotas anteriores.

Para la primer demostración necesitaremos la siguiente proposición (Ver Proposición 1.2.1 de [9]), que nos permitirá estudiar al paseo aleatorio a tiempo discreto en vez de estudiar al paseo a tiempo continuo.

Proposición B.1. *Supongamos que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ a tiempo discreto y sea $(N(t))_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson independiente con parámetro λ. Entonces, el proceso $(\tilde{S}(t))_{t\geq 0}$ definido por $\tilde{S}(t) := S_{N(t)}$ resulta un paseo aleatorio a tiempo continuo en $\mathbb{Z}$ con la misma distribución de los incrementos que el paseo $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.*

Consideremos entonces un paseo aleatorio $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ en $\mathbb{Z}$ en el que la partícula salta del -1 al -2 ó del 1 al 2 con probabilidad $\frac{m}{2m+2}$, del -1 al 0 ó del 1 al 0 con probabilidad $\frac{m+2}{2m+2}$ y del sitio x (con x distinto de 1 y -1) a los sitios $x+1$ y $x-1$ con probabilidad $\frac{1}{2}$. Demostremos primero que este proceso es recurrente nulo y luego, usando la proposición, concluyamos que $(z(t))_{t\geq 0}$ también lo es.

Para esto, necesitamos algunas definiciones previas:

Para cada $n \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ definimos:

- $T_a := inf\{k \in \mathbb{N} : w_k = a\}$,
- $p_{ab} := \mathbb{P}(w_1 = b | w_0 = a)$,
- $\widehat{p}^n_{ab} := \mathbb{P}(T_b = n, w_k \geq a \ \forall\ k \in \{0, 1, ..., n\}\ | w_0 = a)$
  (es decir, $\widehat{p}^n_{ab}$ es la probabilidad de que una partícula que empezó en el sitio a llegue por primera vez al sitio b luego de n pasos habiéndose movido durante ese tiempo solamente por el sitio a y los que se encuentran a su derecha).

Introduzcamos también a los “números de Catalán” y veamos cómo podemos aplicarlos a los paseos aleatorios discretos:

Los números de Catalán son una sucesión de números naturales $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que aparece en muchos problemas de combinatoria. El n-ésimo número C_n se define como $\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$, y una de sus aplicaciones clásicas es calcular la cantidad de palabras de Dyck. Una palabra de Dyck de longitud $2n$ es una tira de caracteres X's e Y's en la que hay n caracteres de cada tipo y además, para cualquier k entre 1 y $2n$, entre los primeros k caracteres la cantidad de Y's que hay no puede superar a la cantidad de X's que hay. (Por ejemplo, las palabras de Dyck de longitud 6 son: XXXYYY, XXYXYY, XXYYXY, XYXXYY y XYXYXY).

Observemos que las palabras de Dyck de longitud $2n$ están en biyección con los caminos en $\mathbb{Z}$ de $2n$ pasos que realiza una partícula que comienza y termina en el mismo sitio y que sólo pudo desplazarse por el sitio inicial y por los que se encuentran a su derecha: la biyección viene dada por asociar a la letra X un salto hacia la casilla vecina derecha y a la letra Y un salto hacia la casilla vecina izquierda.

Demostremos, ahora sí, que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es recurrente nulo; y como la cadena es irreducible, basta ver que $\mathbb{P}(T_0 < \infty | w_0 = 0) = 1$ y que $\mathbb{E}[T_2 | w_0 = 2] = +\infty$.

Usaremos el siguiente lema:

Lema B.1. *Supongamos que $(\tilde{w}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ es un paseo aleatorio en $\mathbb{Z}$ tal que para algún $a \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{P}(\tilde{w}_1 = a+1 | \tilde{w}_0 = a) = \alpha \in (0,1)$, $\mathbb{P}(\tilde{w}_1 = a-1 | \tilde{w}_0 = a) = 1 - \alpha$ y además $\mathbb{P}(\tilde{T}_a < \infty | \tilde{w}_0 = a+1) = 1$ (donde $\tilde{T}_a := \inf\{k \in \mathbb{N} : \tilde{w}_k = a\}$ y $\tilde{T}_{a-1}$ se define de forma análoga). Entonces $\mathbb{P}(\tilde{T}_{a-1} < \infty | \tilde{w}_0 = a)$ también es igual a 1.*

Demostración: Usando la propiedad fuerte de Markov tenemos que:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\tilde{T}_{a-1} < \infty\ | \tilde{w}_0 = a) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1-\alpha) \big[\mathbb{P}(\tilde{w}_1 = a+1 | \tilde{w}_0 = a)\ \mathbb{P}(\tilde{T}_a < \infty, | \tilde{w}_0 = a+1)\big]^n \\ &= (1-\alpha) \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha.1)^n = (1-\alpha)\ \frac{1}{(1-\alpha)} = 1,\end{aligned}$$

donde el n-ésimo término de la sumatoria es la probabilidad de que la partícula realice exactamente n vueltas al sitio a sin haber visitado $a-1$ y que luego de eso salte por primera vez a $a-1$. $\square$

Veamos que en el paseo aleatorio $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ se cumple que $\mathbb{P}(T_1<\infty|w_0=2)=1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1<\infty|w_0=2)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T_1=n|w_0=2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(T_1=2n+1|w_0=2)=\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{p}_{22}^{2n}p_{21}\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\widehat{p}_{22}^{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}C_n\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}C_n\frac{1}{4^n}.\end{aligned}\tag{B.1}$$

Notemos que

$$\binom{2n+2}{n+1}=\binom{2n}{n}\frac{2n+1}{n+1}\frac{2n+2}{n+1}=2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n},$$

de donde se sigue:

$$2\binom{2n}{n}-\frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}=\frac{2n+2}{n+1}\binom{2n}{n}-\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=C_n.$$

Luego,

$$\frac{1}{2}C_n\frac{1}{4^n}=\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}},$$

y reemplazando esta igualdad en (B.1) y usando que $\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^n}\leq\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (lo que se demuestra fácilmente con inducción) resulta:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_1<\infty|w_0=2)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2}C_n\frac{1}{4^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big[\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}-\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{4^{n+1}}\Big]=1-\lim_{n\to+\infty}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}\\&\geq 1-\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\mathbb{P}(T_1<\infty|w_0=2)=1$.

A partir de esta igualdad, aplicando el lema anterior con $a=1$ obtenemos que $\mathbb{P}(T_0<\infty|w_0=1)=1$. Y por la simetría del proceso, $\mathbb{P}(T_0<\infty|w_0=-1)$ también vale 1, con lo cual

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_0<\infty|w_0=0)&=p_{0,1}\mathbb{P}(T_0<\infty|w_0=1)+p_{0,-1}\mathbb{P}(T_0<\infty|w_0=-1)\\&=p_{0,1}+p_{0,-1}=1.\end{aligned}$$

Por otro lado, $\mathbb{E}[T_2|w_0=2]=\infty$ ya que:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[T_2|w_0=2]&=\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ \mathbb{P}(T_2=2n|T_0=2)\geq\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ \widehat{p}_{22}^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ C_n\ \big(\frac{1}{2}\big)^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}\big(\frac{1}{2}\big)^{2n}\overset{(Stirling)}{\approx}\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\frac{1}{n+1}\big(\frac{1}{2}\big)^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}2n\ \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n+1}\geq\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=+\infty.\end{aligned}$$

Concluimos entonces que el proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es recurrente nulo.

Observación B.1. *Es conocido que el paseo aleatorio simétrico en $\mathbb{Z}$ a tiempo discreto es recurrente nulo, y como la única diferencia entre este proceso y el proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es que en este último hay una tendencia a que la partícula pase más tiempo en el 0, es razonable pensar que el proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también va a ser recurrente nulo. Pero en realidad, la demostración que hemos hecho es más general, ya que se puede aplicar a todos los paseos aleatorios a casillas vecinas en $\mathbb{Z}$ en los que existen dos sitios, llamémoslos a y b, con $a<b$, tales que la probabilidad de ir del sitio x al sitio y es igual a :*

$$\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } |y-x|=1,\ x<a-1 \text{ ó } x>b+1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x=a, y=a-1 \text{ ó } x=b, y=b+1 \end{cases}$$

y en el resto de los casos es estrictamente positiva.

Ahora que ya hemos probado que el proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ es recurrente nulo, veamos cómo podemos aplicarlo (junto con la Proposición B.1) para demostrar que el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ también lo es:

Llamemos $(\tilde{z}(t))_{t\geq 0}$ al paseo aleatorio que se obtiene de la proposición a partir de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y de un proceso de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$ independiente de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y de parámetro $2m+2$. Por cómo lo definimos, $(\tilde{z}(t))_{t\geq 0}$ se caracteriza por tener la misma distribución de probabilidades que el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$; la diferencia está en que en el primero las partículas saltan más rápido que en el segundo. Es por esto que si $(\tilde{z}(t))_{t\geq 0}$ fuese recurrente nulo, $(z(t))_{t\geq 0}$ también lo sería. Demostremos entonces que $(\tilde{z}(t))_{t\geq 0}$ lo es.

Si definimos $\tau_0 := \text{ínf}\{t>0 : \tilde{z}(t)=0\}$, alcanza con ver que

$$\mathbb{P}(\tau_0<+\infty|\tilde{z}(0)=0)=1 \text{ y } \mathbb{E}[\tau_0|\tilde{z}(0)=0]=+\infty.$$

Notemos que $\tau_0 := \text{ínf}\{t>0 : \tilde{z}(t)=0\} = \text{ínf}\{t>0 : w_{N(t)}=0\} = \text{ínf}\{t>0 : N(t)=T_0\}$ (recordemos que T_0 era $\text{ínf}\{n\in\mathbb{N} : w_n=0\}$ y $(N(t))_{t\geq 0}$ era un proceso de Poisson que lo elegimos con parámetro $m+2$). Luego, llamando $\mathbb{P}_0$ y $\mathbb{E}_0$ a la probabilidad y a la esperanza del proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ con $w(0)=0$ se tienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\tau_0<+\infty|\tilde{z}(0)=0) = \mathbb{P}(\tau_0<+\infty|w_{N(0)}=0) \overset{N(0)=0}{=} \mathbb{P}_0(\tau_0<+\infty) = \lim_{s\to+\infty}\mathbb{P}_0(\tau_0<s) \\ &= \lim_{s\to+\infty}\mathbb{P}_0(\text{ínf}\{t>0 : N(t)=T_0\}<s) = \lim_{s\to+\infty}\mathbb{P}_0(N(s)>T_0) \\ &= \lim_{s\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}_0(N(s)>T_0|T_0=n)\mathbb{P}(T_0=n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{s\to+\infty}\big[1-\sum_{j=0}^{n-1}e^{-(m+2)s}\frac{((m+2)s)^j}{j!}\big]\ \mathbb{P}(T_0=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(T_0=n) \ = \ \mathbb{P}(T_0<+\infty) \overset{(*_1)}{=} 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[\tau_0|\tilde{z}(0)=0] = \mathbb{E}[\text{ínf}\{t>0 : N(t)=T_0\}|w_0=0] = \mathbb{E}_0[\text{ínf}\{t>0 : N(t)=T_0\}] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}_0[\text{ínf}\{t>0 : N(t)=T_0\}]|T_0] = \mathbb{E}\big[\frac{T_0}{m+2}\big] = \frac{1}{m+2}\mathbb{E}[T_0] \overset{(*_2)}{=} +\infty, \end{aligned}$$

donde en $(*_1)$ y $(*_2)$ hemos usado que el proceso $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es recurrente nulo. Concluimos entonces que el proceso $(\tilde{z}(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo y por lo tanto, $(z(t))_{t\geq 0}$ también lo es.

Veamos ahora cómo demostrar que para valores de $t\geq 0$ suficientemente grandes,

$$\int_0^t p_s(0,1)\ ds < C\sqrt{t} \quad \text{y} \quad \int_0^t p_s(1,1)\ ds < C\sqrt{t}, \tag{B.2}$$

donde $p_s(0,1) = \mathbb{P}(z(s) = 1|z(0) = 0)$ y $p_s(1,1) = \mathbb{P}(z(s) = 1|z(0) = 1)$ $\forall s \geq 0$.

Lo que haremos primero será demostrar que estas cotas valen si reemplazamos a $(z(t))_{t\geq 0}$ por un paseo aleatorio a tiempo continuo en $\mathbb{Z}$ simple y simétrico a tasa m a cada lado (en este proceso, llamaremos $q_s(0,1)$ y $q_s(1,1)$ a lo que habíamos llamado $p_s(0,1)$ y $p_s(1,1)$). Luego, realizando un acoplamiento entre los dos procesos, deduciremos (B.2).

Al igual que hicimos antes, para demostrar una propiedad de un paseo aleatorio a tiempo continuo recurriremos a la Proposición B.1 y trabajaremos con un paseo aleatorio discreto y con un proceso de Poisson.

Consideremos $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el paseo aleatorio discreto en $\mathbb{Z}$ simple y simétrico, y $(N(t))_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson independiente de parámtreo $2m$.

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 1|S_0 = 0) = \binom{2n+1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \frac{2n+1}{2n+2} \leq \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde en la última igualdad usamos la misma cota para $\binom{2n}{n}(\frac{1}{4})^n$ que ya habíamos usado en este apéndice al probar recurrencia, y que se demuestra por inducción.

Análogamente,

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 1|S_0 = 1) = \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2n}} \; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dado que $q_s(a,b) = \mathbb{E}^{PP}[\mathbb{P}(S_{N(s)} = b|S_{N(0)} = a)]$ $\forall s \geq 0$ y $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$, resulta:

$$\begin{aligned} q_s(0,1) &= \mathbb{E}^{PP}[\mathbb{P}(S_{N(s)} = 1|S_{N(0)} = 0)] \overset{N(0)=0}{=} \mathbb{E}^{PP}[\mathbb{P}(S_{N(s)} = 1|S_0 = 0)] \leq \mathbb{E}^{PP}\left[\frac{1}{\sqrt{N(s)}}\right] \\ &= \mathbb{E}^{PP}\left[\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{N(s)}}\frac{1}{\sqrt{s}}\right] \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{s}} \quad \forall s \geqslant s_0, \end{aligned}$$

donde en el último paso usamos que $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{N(s)}{s} = 2m$ y por lo tanto, $\dfrac{\sqrt{s}}{\sqrt{N(s)}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{m}}$ $\forall s \geqslant s_0$.
A partir de esta desigualdad obtenemos que si $t \geq \text{máx}\{s_0, (s_0)^2\}$,

$$\int_0^t q_s(0,1)ds = \int_0^{s_0} q_s(0,1)\ ds + \int_{s_0}^t q_s(0,1)\ ds \leq s_0 + \int_{s_0}^t \frac{1}{\sqrt{m}}\frac{1}{\sqrt{s}}\ ds \leq s_0 + \frac{2}{\sqrt{m}}\sqrt{t} \leq (1 + \frac{2}{\sqrt{m}})\sqrt{t},$$

de lo cual deducimos que si $c := 1 + \frac{2}{\sqrt{m}}$ y $t \geq \text{máx}\{s_0, (s_0)^2\}$,

$$\int_0^t q_s(0,1)\ ds \leq c\sqrt{t}.$$

Y lo mismo vale si reemplazamos el 0 por un 1. Por lo tanto, hemos demostrado que en el caso del paseo aleatorio simple y simétrico a tasa m, valen las cotas que queríamos. Veamos ahora cómo deducir a partir de estas desigualdades y mediante un acoplamiento que vale (B.2).

Llamemos S a la partícula que se mueve con la dinámica del paseo aleatorio que acabamos de describir y Z a la partícula que se mueve con la dinámica del proceso $(z(t))_{t\geq 0}$. Acoplemos los procesos de la siguiente forma:

En todos los sitios distintos al -1 y al 1 hay dos relojes, uno asociado a “izquierda” y el otro a “derecha”, que suenan a tasa m cada uno y cuando alguno de los dos suena, Z se mueve un lugar en la dirección asociada al reloj. Y en cada uno de los sitios -1 y 1 hay tres relojes: dos a tasa m que indican lo mismo que los anteriores y otro a tasa 2 que indica que Z debe saltar al 0.

Ambas partículas comienzan en el 0. La partícula Z realiza su recorrido bajo los relojes descriptos, por lo que efectivamete Z se mueve con la dinámica del proceso $(z(t))_{t\geq 0}$. Llamaremos τ_i al instante de tiempo en el que Z saltó por i-ésima vez a causa del reloj a tasa 2, y A_i a la duración de la visita de Z al 0 que comenzó en $t = \tau_i$.

S realiza su camino de la siguiente forma: Desde $t = 0$ hasta $t = \tau_1^-$ (es decir, hasta el instante previo a τ_1), S copia el recorrido que hizo Z. Luego, S, que en ese momento se encuentra en el sitio -1 ó 1, espera a que suene alguno de los relojes con tasa m del sitio. Cuando suena, S salta al sitio correspondiente (que puede ser el 2, el -2 ó el 0) y luego de estar un tiempo igual a A_1 salta al sitio 1 ó -1 y copia el recorrido o el recorrido simétrico con respecto al 0 que hizo Z desde $t = \tau_1 + A_1$ hasta $t = \tau_2^-$. (Si S estaba en el 2 salta al 1, si estaba en el -2 salta al -1 y si estaba en el 0 salta al mismo lugar al que saltó Z en $t = \tau_1 + A_1$).

Luego, se repite el proceso: S (que se encuentra en el -1 ó en el 1) espera a que suene alguno de los dos relojes con tasa m del sitio en el que está. Cuando suena, salta al sitio correspondiente y sin importar cual sea éste, permanece un tiempo igual a A_2. Transcurrido ese tiempo, salta al 1 ó al -1 (como hemos indicado antes) y copia el recorrido o el recorrido simétrico con respecto al 0 que hizo Z desde $t = \tau_2 + A_2$ hasta $t = \tau_3^-$, y así sigue.

Observemos que en este acoplamiento, S únicamente salta de un sitio a alguno de sus vecinos luego de que haya sonado el reloj correspondiente a tasa m, por lo que S realiza un paseo aleatorio simple y simétrico a tasa m, como queríamos. Además, por cómo hemos descripto el acoplamiento, para cualquier instante de tiempo t vale que hasta ese instante, el tiempo que permaneció Z en el 1 más el tiempo que permaneció en el -1 es menor o igual al que permaneció S en esos dos sitios, por lo cual, si llamamos $(x(t))_{t\geq 0}$ al paseo simple y simétrico a tasa m resulta:

$$\int_0^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{|z(s)|=1\}}\right]\, ds \leq \int_0^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{|x(s)|=1\}}\right]\, ds \quad \forall t \geq 0.$$

A partir de esta desigualdad obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^t p_s(0,1)\, ds &= \int_0^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{|z(s)|=1\}}\right]\, ds = \mathbb{E}_0\Big[\int_0^t \mathbb{I}_{\{|z(s)|=1\}}\, ds\Big] \leq \mathbb{E}_0\Big[\int_0^t \mathbb{I}_{\{|x(s)|=1\}}\, ds\Big] \\ &= \int_0^t \mathbb{E}_0\left[\mathbb{I}_{\{|z(s)|=1\}}\right]\, ds = \int_0^t q_s(0,1)\, ds \leq c\sqrt{t},\end{aligned}$$

donde la última igualdad vale si $t \geq \text{máx}\{s_0, (s_0)^2\}$. Por lo tanto, si t es “suficientemente grande”, $\int_0^t p_s(0,1)\, ds \leq c\sqrt{t}$. Y de forma análoga se demuestra que $\int_0^t p_s(1,1)\, ds \leq c\sqrt{t}$ (se hace el mismo acoplamiento pero con las partículas comenzando en el 1), que eran las dos cotas que aparecen en (B.2).

Finalizaremos este apéndice dando una segunda demostración de que $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo. En este caso, usaremos el acoplamiento anterior y el hecho de que el paseo $(x(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo (lo cual se deduce directamente de la Proposición B.1 y de que el paseo aleatorio simple y simétrico en $\mathbb{Z}$ a tiempo discreto lo es).

Es fácil ver que $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente. En efecto, como ambas partículas comienzan en el 0 y la primera vez que $(z(t))_{t\geq 0}$ salta al sitio 0 ocurrió antes o en el mismo momento en que $(x(t))_{t\geq 0}$ lo hizo, si $T_a^z := \text{ínf}\{t > 0 : z(t) = a\}$ y $T_a^x := \text{ínf}\{t > 0 : x(t) = a\}$ $\forall a \in \mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}_0(T_0^x < \infty) \ \leq \ \mathbb{P}_0(T_0^z < \infty).$$

Y como el término de la izquierda es igual a 1 (por ser $(x(t))_{t\geq 0}$ recurrente), el de la derecha también es 1 y por lo tanto, $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente.

Para ver que es recurrente nulo, como $(z(t))_{t\geq 0}$ es irreducible, basta ver que $\mathbb{E}_1(T_1^z) = +\infty$ o que $\mathbb{E}_{-1}(T_{-1}^z) = +\infty$; y como $(z(t))_{t\geq 0}$ es un proceso de Markov, es equivalente a probar que la esperanza de la duración de una excursión al sitio 1 ó al sitio -1 es $+\infty$. Sabemos que cada vez que la partícula Z realiza una excursión al 1 ó al -1 que no involucra al sitio 0 (evento que ocurre con probabilidad igual a 1), S copia la misma excursión o la excursión simétrica con respecto al 0 (es decir, si calculamos el módulo de los sitios visitados, S realiza la misma excursión que Z). Además, al ser $(x(t))_{t\geq 0}$ recurrente nulo, la esperanza de la duración de esa excursión de S es $+\infty$. Concluimos entonces que el proceso $(z(t))_{t\geq 0}$ es recurrente nulo, como queríamos ver.

Bibliografía

[1] E. B. Dynkin. *Markov processes. Vols. I, II.*

[2] S. N. Ethier and T. G. Kurtz. *Markov processes.* Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics.

[3] C. Giardinà, F. Kurchan, J. Redig, and K. Vafayi. Duality and hidden symmetries in interacting particle systems. *J. Stat. Phys.*, 135(1):25–55, 2009.

[4] C. Giardinà, J. Kurchan, and F. Redig. Duality and exact correlations for a model of heat conduction. *J. Math. Phys.*, 48(3):033301, 15, 2007.

[5] C. Giardinà, F. Redig, and K. Vafayi. Correlation inequalities for interacting particle systems with duality. *J. Stat. Phys.*, 141(2):242–263, 2010.

[6] S. Grosskinsky, F. Redig, and K. Vafayi. Condensation in the inclusion process and related models. *J. Stat. Phys.*, 142(5):952–974, 2011.

[7] C. Kipnis and C. Landim. *Scaling limits of interacting particle systems*, volume 320 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences].* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[8] F. C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications.* Imperial College Press, London, second edition, 2005.

[9] Gregory F. Lawler and Vlada Limic. *Random walk: a modern introduction*, volume 123 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[10] Thomas M. Liggett. *Interacting particle systems.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Reimpresión del original de 1985.

[11] J. F. Martinez. Comportamiento hidrodinámico para el proceso de exclusión simple simétrico. Tesis de Licenciatura, Universidad de Buenos Aires, 2008.

[12] J. R. Norris. *Markov chains*, volume 2 of *Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reimpresión del original de 1997.

[13] A. Opoku and F. Redig. Coupling and hydrodynamic limit for the inclusion process. *Preprint*, 141(2):242–263, 2014.