



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Una generalización al teorema de singularidad de Hawking

Ariel Matías Bortz

Director: Osvaldo Santillán

Junio 2015



---

## Agradecimientos

---

Si alguien me dijera que cumplió el objetivo de obtener su título de licenciado en matemática sin haber recibido la ayuda, directa o indirecta, de nadie, le diría que está mintiendo. Aún cuando sea mi nombre el que aparezca en la carátula, hay muchísima gente que de alguna forma u otra causó que llegara el momento de terminar este proceso. Probablemente me olvide de agradecer a gente que se lo merece, así que pido disculpas por anticipado.

En primer lugar quiero agradecer a la otra persona que figura en la carátula, Osvaldo Santillán. Su constante colaboración y ayuda para comprender los contenidos y las interpretaciones físicas de lo estudiado fueron determinantes para que efectivamente pueda entender de qué estábamos hablando y trabajar sobre ello. De todas formas, más allá de su dirección científica, lo que más agradezco es su calidad como persona, requisito indispensable y quizás el más importante que uno debe buscar en un director de tesis.

En segundo lugar, quisiera agradecer a la Universidad de Buenos Aires, a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y al Departamento de Matemática ya que son los responsables de que la calidad educativa recibida sea de primer nivel. Me parece que es importante no olvidar que estos 6 años de formación de excelencia los recibí de forma gratuita, aún cuando esta no es gratis. Por eso quisiera agradecer a la enorme cantidad de personas que aportan para que una pequeña cantidad de personas podamos estudiar lo que nos gusta. Además, dentro de lo que es el Departamento de Matemática, me gustaría agradecer a todos los docentes que me hayan ayudado a entender algo en estos 5 años, y en particular a aquellos que me han soportado numerosas veces mis consultas fuera de horario sobre algún problema o inquietud. Dentro de este subconjunto, quisiera destacar a Gabriel Larotonda y Mariano Suárez Álvarez que, de alguna forma u otra, me supieron responder dudas que ahora son parte de esta tesis. Ambos terminaron siendo los

jurados de la misma.

En tercer lugar, es importante notar que el entender algunas cosas más que lo que entendía hace 5 años es solamente una de las cosas que me llevo de mi paso por la facultad, ya que tuve la suerte de conocer un conjunto de personas fuera de serie que lograron que el tomarse el 160 para ir todos los días a la facultad no sea una tarea engorrosa, sino que se lo hiciera con gusto. No necesité esperar ni un minuto en la Facultad para poder empezar a entablar relación con estos seres de luz. Literalmente: a Pedro lo conocí en la fila para anotarme. En una de las primeras materias tuve la suerte de conocer a Pato, con el que luego conformamos el glorioso (pero sufrido) equipo de fútbol y gran grupo humano al que nos gusta llamar Las Cortaduras de BB King. Estos dos son a su vez parte de un conjunto de seres vivos más grande, un conglomerado de individuos cuyo destino era encontrarse, conformando una agrupación que es más que simplemente la suma de sus individuos, a la que denominaré LCG<sup>1</sup>. Mis días facultativos no hubiesen sido lo mismo sin ellos: Nacho, Santi, Mateo, Arribas, Lloverás, Fercho, Villalba, Freddy, Caro, Cecilia, Cambiasso, Mercuri, Martín, Liber y más. También me gustaría destacar a mis compañeros con los que me ha tocado compartir cursada o almuerzos como Nacho, Carlo, Santi, Chebi, Melanie, Bruno, Pancho, Jesi y la lista sigue, pero si la hago completa los agradecimientos terminarían siendo tan largos como la tesis.

En cuarto lugar me gustaría agradecer a mis amigos no facultativos, que acompañaron todo este tiempo. No puedo nombrar a todos, pero Ale, Dalila, Dami, David, Denise, Diego, Fede, Lau, Maga, Meli, Nahuel, Mica, Guido, Tojter y Bender son buenos representantes de este grupo. También quisiera mencionar a todos aquellos con los que he trabajado en este tiempo, que se bancaron varias veces que me vaya temprano o llegue tarde porque me tenía que ir a la facultad.

Para finalizar, quiero agradecer a mi familia por acompañarme permanentemente. A Napo y Sonny, que son lo más grande que hay. A Julia. A mis abuelos Gloria y Roberto y a mi hermana Gaby por su constante apoyo e interés en lo que estaba estudiando, y por su creencia ciega y absolutamente infundada de que yo debo ser el Gauss de la pampa húmeda, el Riemann sudamericano. Por último, quisiera dedicarle estas últimas líneas a los máximos responsables de que haya podido comenzar, continuar y terminar la carrera, quienes apoyaron todas mis decisiones y me aconsejaron cuando fue necesario. A mis papás, Claudia y Jaime, les voy a estar eternamente agradecido, y no hace falta aclarar que este logro es tan mío como de ustedes.

---

<sup>1</sup>La Cofradía Golpista.

---

## Introducción

---

En 1915 Einstein postuló lo que se conoce como la Teoría de Relatividad General. Para encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein surgieron varios modelos en los que, asumiendo ciertas simetrías, se podían encontrar soluciones precisas de posibles espaciotiempos. Karl Schwarzschild, Roy Kerr, Alexander Friedmann, Georges Lemaître, Howard P. Robertson, Arthur Geoffrey Walker y Abraham Has- kel Taub son algunos de los científicos que siguieron este camino. Sin embargo, aún al considerar diferentes simetrías, los espaciotiempos que se encontraban contenían *singularidades*, puntos en el espaciotiempo donde el mismo se comportaba patológicamente. Por lo tanto, surgió la pregunta si el concepto de singularidad era algo dependiente de las simetrías que se asumían, o era algo inherente al modelo de espaciotiempo que surge de la Relatividad General. En la década de los '60 y comienzos de los '70 Roger Penrose, Stephen Hawking y Robert Geroch utilizaron métodos topológicos y geométricos para demostrar que una solución genérica de las ecuaciones de Einstein que satisface ciertas condiciones físicas da lugar a estas singularidades.

El objetivo de esta tesis es probar y generalizar los teoremas de singularidad de Hawking. Estos teoremas suponen ciertas condiciones de energía que se satisfacen en muchos de los modelos clásicos, pero existen excepciones: en [6] se mencionan ejemplos de modelos donde falla la condición de energía fuerte y la débil. Otra de las limitaciones es que estas condiciones de energía son incompatibles con uno de los objetos de investigación más interesantes para los físicos y matemáticos: la teoría cuántica de campos. En estas se pueden construir estados donde el valor de expectación para la densidad de energía son localmente negativos, y en algunos casos la densidad de energía en cualquier punto ni siquiera está acotada por debajo. Por lo tanto, surge la necesidad de generalizar los teoremas de Hawking debilitando las hipótesis sobre las condiciones de energía.

Para lograr el objetivo separamos la tesis en 6 capítulos. Los primeros dos capítulos son introductorios a la geometría semi-Riemanniana (el primer capítulo) y más específicamente a la geometría Lorentziana (el segundo capítulo). El lector que tenga conocimientos previos básicos en geometría Riemanniana (o semi-Riemanniana) podría saltar el primer capítulo (quizás con la salvedad de la sección 'Operadores diferenciales', ya que no son temas estándar que se encuentren en todos los libros). Aún teniendo ciertos conocimientos en geometría Lorentziana, recomendamos no saltar el segundo capítulo ya que en este ya se desarrolla cierta intuición sobre las variedades de Lorentz que será muy útil en los capítulos siguientes. Matemáticamente, la detección de una singularidad se basa en probar que el espaciotiempo es geodésicamente incompleto, y por lo tanto estudiar cómo se diferencia la geometría Lorentziana de la Riemanniana es de suma importancia, porque en el caso Riemanniano tenemos el teorema de Hopf-Rinow que nos caracteriza las variedades geodésicamente completas, pero que no es cierto en el caso Lorentziano. Los teoremas de singularidad cuentan con un componente geométrico, un componente topológico y ciertas restricciones que surgen de observaciones físicas. En el capítulo 3 desarrollamos la componente geométrica: a través del cálculo de variaciones elaboramos los conceptos de campos de Jacobi, puntos conjugados y puntos focales. En el capítulo 4 desarrollamos la componente topológica. En esta definimos dos relaciones sobre nuestra variedad, y estas dos relaciones inducen la construcción de dos tipos de conjuntos, a los que denominamos  $I_p^\pm$  y  $J_p^\pm$ . Estudiamos qué propiedades topológicas tienen estos conjuntos con respecto a la topología de la variedad. Luego definimos algunas condiciones de causalidad, prestando especial atención en el concepto de hiperbolicidad global, que jugará un papel análogo al de la compacidad en Geometría Riemanniana. Siguiendo este camino, desarrollamos diversos criterios para decidir si una variedad es globalmente hiperbólica, introduciendo conceptos esenciales en el estudio avanzado de la Relatividad General, como lo son las hipersuperficies de Cauchy, los dominios de dependencia y los horizontes de Cauchy. En el capítulo 5 desarrollamos las condiciones físicas: mostramos cómo se relaciona la métrica con la presencia de materia vía las ecuaciones de Einstein, y definimos algunas condiciones de energía que inducen condiciones sobre el tensor de Einstein, y por lo tanto en el tensor de Ricci. En el sexto capítulo utilizamos todo lo previamente explicado y probamos dos teoremas de Hawking, que tienen la misma consecuencia pero con hipótesis distintas. Luego estudiamos algunas condiciones para la no existencia de una solución global a la ecuación de Riccati, que aplicamos para generalizar los teoremas de Hawking, ya que nos permite refinar las hipótesis de los teoremas.

Buscamos, dentro de lo posible, que la tesis sea autocontenida. Hay casos donde necesitamos utilizar resultados que excedían los contenidos de la tesis, y en esos casos citamos la fuente para que el lector interesado pueda profundizar sobre ellos.

<b>1. Variedades semi-Riemannianas</b>	<b>1</b>
1.1. Tensores	1
1.1.1. Propiedades básicas	2
1.1.2. Operaciones sobre tensores	3
1.2. Variedades semi-Riemannianas	5
1.3. Conexión de Levi Civita	6
1.4. Contracción métrica	8
1.5. Función exponencial	10
1.6. Curvatura	14
1.6.1. Curvatura seccional	15
1.6.2. Curvatura de Ricci y escalar	17
1.7. Operadores diferenciales	18
1.8. Subvariedades semi-Riemannianas	21
1.8.1. Conexión inducida y normal	22
1.8.2. Hipersuperficies	24
1.8.3. Mapas biparamétricos	25
<b>2. Geometría Lorentziana</b>	<b>26</b>
2.1. Entornos convexos	27
2.2. Carácter causal	29
2.3. Conos temporales	30
2.4. Orientación temporal	32
<b>3. Campos de Jacobi y cálculo de variaciones</b>	<b>34</b>
3.1. Campos de Jacobi	34

3.2.	Primera y segunda variación . . . . .	37
3.3.	La forma del índice . . . . .	40
3.4.	Puntos conjugados . . . . .	41
3.5.	Máximos y mínimos locales . . . . .	42
3.6.	Puntos focales . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Hiperbolicidad global y causalidad</b>	<b>45</b>
4.1.	Cronología y causalidad . . . . .	46
4.2.	(Cuasi) Límites en el espacio de caminos . . . . .	52
4.3.	Condiciones de causalidad . . . . .	54
4.3.1.	Separación temporal . . . . .	56
4.3.2.	Hiperbolicidad global . . . . .	60
4.4.	Condiciones para la hiperbolicidad global . . . . .	61
4.4.1.	Conjuntos acronales . . . . .	62
4.4.2.	Hipersuperficies de Cauchy . . . . .	63
4.4.3.	Dominios de dependencia . . . . .	64
4.4.4.	Hipersuperficies espaciales . . . . .	69
4.4.5.	Horizontes de Cauchy . . . . .	69
<b>5.</b>	<b>Relatividad General</b>	<b>73</b>
5.1.	Ecuación de Einstein . . . . .	73
5.1.1.	Heurística . . . . .	73
5.1.2.	Acción de Einstein Hilbert y gravedad $f(R)$ . . . . .	74
5.2.	Condiciones de energía . . . . .	75
<b>6.</b>	<b>Teoremas de singularidad</b>	<b>77</b>
6.1.	¿Qué es una singularidad? . . . . .	78
6.2.	Teoremas de singularidad de Hawking . . . . .	80
6.3.	Generalización de los teoremas de Hawking . . . . .	84
6.3.1.	La ecuación de Riccati . . . . .	85
6.3.2.	Refinando hipótesis . . . . .	89
6.4.	Un problema abierto . . . . .	90





### 1.1. Tensores

En el contexto de geometría diferencial, los tensores nos permiten generalizar elementos como funciones, campos vectoriales y 1-formas, y de esta forma poder trabajar con elementos más complicados definidos sobre la variedad sobre la que estamos trabajando. Nuestro mayor interés estará en estudiar y trabajar con tensores en  $\mathfrak{X}(M)$  sobre  $C^\infty(M)$  y en  $T_pM$  sobre  $\mathbb{R}$ .

**Definición 1.** Sean  $r \geq 0$  y  $s \geq 0$ ,  $R$  un anillo,  $V$  un  $R$ -módulo. A una función  $R$ -multilineal  $T : (V^*)^r \times V^s \rightarrow R$  se la llama tensor de tipo  $(r,s)$  sobre  $R$ . Al conjunto de tensores de tipo  $(r,s)$  sobre  $V$  se lo denota  $\mathfrak{T}_s^r(V)$ , y forma nuevamente un  $R$ -módulo con la suma y adición punto a punto.

**Observación 1.** Un tensor de tipo  $(0,0)$  es un simplemente un elemento del anillo  $R$ .

**Definición 2.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Un campo tensorial sobre  $M$  es un tensor sobre el  $C^\infty(M)$ -módulo  $\mathfrak{X}(M)$ .

Si  $A$  es un campo tensorial de tipo  $(r,s)$ , entonces toma  $r$  1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^r$  (a la  $i$ -ésima posición de estas  $r$  posiciones se la suele llamar la  $i$ -ésima posición contravariante) y  $s$  campos vectoriales  $X_1, \dots, X_s$  (a la  $j$ -ésima posición dentro de estas  $s$  posiciones de la suele llamar  $j$ -ésima posición covariante) y devuelve un elemento en  $C^\infty(M)$ . A los tensores de tipo  $(0,s)$  se los llama *covariantes*, y a los de tipo  $(r,0)$ , con  $r \geq 1$  se los llama *contravariantes*.

**Observación 2.** La suma de tensores solamente tiene sentido si ambos son del mismo tipo, sin embargo siempre podemos multiplicar 2 tensores, sin importar de qué tipo sean: si  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  y  $B \in \mathfrak{T}_{s'}^{r'}(M)$ , se define

$$A \otimes B : \mathfrak{X}^*(M)^{r+r'} \times \mathfrak{X}(M)^{s+s'} \longrightarrow C^\infty(M)$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} (A \otimes B)(\theta^1, \dots, \theta^{r+r'}, X_1, \dots, X_{s+s'}) \\ = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) B(\theta^{r+1}, \dots, \theta^{r+r'}, X_{s+1}, \dots, X_{s+s'}) \end{aligned} \quad (1.1)$$

A  $A \otimes B$  se lo llama *producto tensorial de A y B*. De la definición se deduce que el producto es asociativo,  $C^\infty(M)$ -bilineal, pero no necesariamente conmutativo.

**Observación 3.** Hay algunas identificaciones que resultan claras de la definición de campo tensorial:

1.  $\mathfrak{T}_1^0(M) \longleftrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$
2.  $\mathfrak{T}_0^1(M) \longleftrightarrow \mathfrak{X}(M)$
3.  $\{A : \mathfrak{X}(M)^s \longrightarrow \mathfrak{X}(M), A \text{ es } C^\infty(M) - \text{multilineal}\} \longleftrightarrow \bar{A} \in \mathfrak{T}_s^1(M)$   
mediante la identificación

$$\bar{A}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(A(X_1, \dots, X_s)), \forall \theta \in \mathfrak{X}^*(M), X_i \in \mathfrak{X}(M)$$

**Definición 3.** Sea  $M$  una variedad diferenciable,  $(U, \varphi)$  una carta,  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Las componentes de  $A$  relativas a la carta  $(U, \varphi)$  son las funciones

$$A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = A(d\varphi^{i_1}, \dots, d\varphi^{i_r}, \partial_{j_1}, \dots, \partial_{j_s})$$

Notar que esta definición coincide con el concepto de componentes en el caso de que  $A$  sea un campo vectorial o una 1-forma. Además, para un producto tensorial se cumple la siguiente propiedad:

$$(A \otimes B)_{j_1, \dots, j_{s+s'}}^{i_1, \dots, i_{r+r'}} = A_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} B_{j_{s+1}, \dots, j_{s+s'}}^{i_{r+1}, \dots, i_{r+r'}}$$

### 1.1.1. Propiedades básicas

Probaremos algunas propiedades básicas de los campos tensoriales sobre una variedad diferenciable, que nos darán una idea más completa de cómo se comportan estos elementos. Lo primero que probaremos será que los campos tensoriales son efectivamente *campos* tensoriales; o sea, que un  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  asigna a cada punto  $p \in M$  un tensor  $A_p$ , con  $A_p : (T_p M)^r \times (T_p M)^s \longrightarrow \mathbb{R}$ . La clave para lograr esto es ver que cuando evaluamos el campo tensorial  $A$  en las  $r$  1-formas y los  $s$  campos vectoriales, el valor de la función que obtenemos, evaluada en un punto  $p \in M$ , depende solamente de los valores de las 1-formas y de los campos *en ese punto*.

**Lema 1.** Sea  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Si alguna de las 1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^r$  o de los campos  $X_1, \dots, X_s$  da cero al evaluarlo en  $p \in M$ , entonces  $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$ .

*Demostración.* Sin perder generalidad, supongamos que  $X_s|_p = 0$ . Tomo una carta  $(U, \varphi)$  alrededor de  $p$ . En esta carta,  $X_s = \sum X^i \partial_i$ . Sea  $f$  una función chichón soportada en  $U$ , con  $f(p) = 1$ . Luego  $fX^i \in C^\infty(M)$  y  $f\partial_i \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces

$$\begin{aligned} f^2 A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f^2 X_s) \\ &= A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \sum f X^i f \partial_i) = \sum f X^i A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, f \partial_i). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Como  $X_s|_p = 0$ ,  $X^i(p) = 0$ . Evaluando la fórmula en  $p$ , recordando que  $f(p) = 1$ , obtenemos que  $A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p) = 0$ .  $\square$

**Proposición 1.** Sea  $p \in M$  y  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ . Sean  $\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r$  y  $\bar{X}^1, \dots, \bar{X}^s$  1-formas tal que  $\bar{\theta}^i|_p = \theta^i|_p$ ,  $1 \leq i \leq r$ , y sean  $X^1, \dots, X^s$  campos tales que  $\bar{X}^i|_p = X^i|_p$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Entonces

$$A(\bar{\theta}^1, \dots, \bar{\theta}^r, \bar{X}^1, \dots, \bar{X}^s)(p) = A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)(p)$$

*Demostración.* Lo veremos en el caso  $r=1, s=2$  (el caso general es análogo). Usando la identidad (que se extiende para el caso general)

$$A(\bar{\theta}, \bar{X}, \bar{Y}) - A(\theta, X, Y) = A(\bar{\theta} - \theta, \bar{X}, \bar{Y}) + A(\theta, \bar{X} - X, \bar{Y}) + A(\theta, X, \bar{Y} - Y)$$

Usando que  $\theta - \bar{\theta}$ ,  $X - \bar{X}$  y  $Y - \bar{Y}$  se anulan en  $p$  por hipótesis y el Lema 1, queda demostrado.  $\square$

La importancia de esta propiedad es que si llamamos  $TM_s^r = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M_s^r$ , con  $T_p M_s^r$  los tensores de tipo  $(r, s)$  sobre  $T_p M$ , entonces todo campo tensorial  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$  se puede pensar como una sección suave de  $M$  en  $TM_s^r$ . En particular, esta interpretación nos dice que la restricción de un campo tensorial a un abierto  $U$  es un campo tensorial bien definido en el abierto.

### 1.1.2. Operaciones sobre tensores

Existen algunas operaciones que se suelen utilizar al trabajar con tensores. Algunas de estas son la *contracción*, el *pull back*, las *derivaciones* y la *contracción métrica*.

La **contracción** es una operación  $C : \mathfrak{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathfrak{T}_{s-1}^{r-1}(M)$ , que en cierta forma describe un equivalente al concepto de *traza* en tensores. La definición general parte de un caso particular.

**Lema 2.** Existe una única función  $C : \mathfrak{T}_1^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$   $C^\infty(M)$ -lineal, a la que llamaremos *contracción (1,1)* tal que  $C(X \otimes \theta) = \theta(X)$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ .

*Demostración.* Sea  $(U, \varphi)$  una carta en  $M$ . Un campo tensorial  $A$  de tipo  $(1,1)$  se escribe localmente  $\sum A_j^i \partial_i \otimes d\varphi^j$ . Como necesitamos que  $C(\partial_i \otimes d\varphi^j) = d\varphi^j(\partial_i) = \delta_i^j$ , la única posible definición es  $C(A) = \sum A_j^i$ , que cumple con lo deseado en esta carta. Para ver que está bien definida globalmente hay que probar que no depende de la carta elegida:

$$\begin{aligned} \sum_m A_m^m &= \sum_m A(d\psi^m, \frac{\partial}{\partial \psi^m}) = \sum_m A(\sum_i \frac{\partial \psi^m}{\partial \varphi^i} d\varphi^i, \sum_j \frac{\partial \varphi^j}{\partial \psi^m} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}) \\ &= \sum_{m,i,j} \frac{\partial \psi^m}{\partial \varphi^i} \frac{\partial \varphi^j}{\partial \psi^m} A(d\varphi^i, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}) = \sum_{i,j} \delta_j^i A(d\varphi^i, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}) = \sum_i A(d\varphi^i, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

□

Ahora extenderemos el concepto de contracción a tensores de tipo  $(r,s)$ . Sea  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $1 \leq j \leq s$ . Fijo  $\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1}$ . La función

$$(\theta, X) \longrightarrow A(\theta^1, \dots, \theta, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X, \dots, X_{s-1})$$

(donde  $\theta$  y  $X$  ocupan la posición contravariante  $i$ -ésima y covariante  $j$ -ésima respectivamente), resulta ser un tensor de tipo  $(1,1)$ . Si aplico la contracción definida en el Lema 2, obtengo una función a valores reales que denotaremos  $(C_j^i A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s-1})$ .  $C_j^i A$  resulta ser un tensor de tipo  $(r-1, s-1)$ , al que se lo llama *contracción de  $A$  sobre  $i, j$* .

Sean  $M, N$  variedades diferenciables. El **pull back** es un método para formar un tensor sobre  $M$  a partir de un tensor covariante sobre  $N$  y un morfismo  $M \longrightarrow N$ .

**Definición 4.** Sea  $\phi : M \longrightarrow N$  una función suave. Si  $A \in \mathfrak{T}_s^0(N)$  ( $s \geq 1$ ), entonces se define el pull back de  $A$  por  $\phi$  como el tensor  $\phi^* A \in \mathfrak{T}_s^0(M)$ , que cumple que

$$(\phi^* A)(v_1, \dots, v_s) = A(d\phi v_1, \dots, d\phi v_s)$$

para todo  $v_i \in T_p M$ ,  $p \in M$ . Si  $f \in \mathfrak{T}_0^0(N)$ ,  $\phi^* f := f \circ \phi$

Dado una función suave  $\phi : M \longrightarrow N$ , esta induce una función  $\phi^* : \mathfrak{T}_s^0(N) \longrightarrow \mathfrak{T}_s^0(M)$   $\mathbb{R}$ -lineal que cumple con las siguientes dos propiedades:

1. Respeta el producto tensorial:  $\phi^*(A \otimes B) = \phi^* A \otimes \phi^* B$
2. Es funtorial: si  $\psi : N \longrightarrow P$  es suave, entonces  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ .

Ahora estudiaremos las definiciones básicas del cálculo tensorial; en particular, de las **derivaciones tensoriales**.

**Definición 5.** Una derivación tensorial  $\mathfrak{D}$  en una variedad diferenciable  $M$  es un conjunto de funciones  $\mathbb{R}$ -lineales  $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_s^r : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^r(M)$  ( $r \geq 0, s \geq 0$ ) que cumplen que

1.  $\mathfrak{D}(A \otimes B) = \mathfrak{D}A \otimes B + A \otimes \mathfrak{D}B$
2.  $\mathfrak{D}(CA) = C(\mathfrak{D}A)$  para toda contracción  $C$ .

Es claro que si  $f \in \mathfrak{T}_0^0(M)$ , una derivación es simplemente un campo vectorial. Las derivaciones tensoriales tienen dos propiedades importantes: son de carácter local, y satisfacen la llamada regla del producto. Más precisamente, cumplen con lo siguiente:

1. Si  $U \subseteq M$  es un abierto, entonces existe una única derivación tensorial  $\mathfrak{D}_U$  en  $U$  tal que  $\mathfrak{D}_U(A|_U) = (\mathfrak{D}A)|_U$
2. Si  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ , entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)) &= (\mathfrak{D}A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r A(\theta^1, \dots, \mathfrak{D}\theta^i, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad + \sum_{j=1}^s A(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, \mathfrak{D}X^j, \dots, X_s) \end{aligned} \tag{1.4}$$

**Observación 4.** De esta segunda propiedad y del hecho de que

$$(\mathfrak{D}\theta)(X) = \mathfrak{D}(\theta X) - \theta(\mathfrak{D}X)$$

obtenemos que si dos derivaciones  $\mathfrak{D}_1$  y  $\mathfrak{D}_2$  coinciden en  $C^\infty(M)$  y en  $\mathfrak{X}(M)$ , entonces son iguales.

## 1.2. Variedades semi-Riemannianas

El marco teórico sobre el cual se monta toda la teoría de la Relatividad General es el estudio de las variedades semi-Riemannianas, objetos que definiremos en esta sección y estudiaremos en profundidad en las siguientes.

**Definición 6.** Sea  $M$  una variedad. Un tensor métrico  $g$  sobre  $M$  es un campo tensorial de tipo  $(0,2)$  simétrico y no degenerado de índice constante. O sea,  $g \in \mathfrak{T}_2^0$  es una función suave que a cada  $p \in M$  le asigna un producto escalar  $g_p$  en  $T_pM$ , y el índice de  $g_p$  no varía con  $p$ .

Recordar que el índice de una forma bilineal simétrica  $b$  en un espacio vectorial  $V$  es  $\nu = \max\{r \in \mathbb{Z} : \exists W \subseteq V$  subespacio de  $\dim(W) = r$  tal que  $b|_W$  es definida negativa}

**Definición 7.** Al par  $(M, g)$ , siendo  $M$  una variedad diferenciable y  $g$  un tensor métrico sobre  $M$ , se lo llama variedad semi-Riemanniana.

Al índice  $\nu$  de  $g$  se lo llama el índice de  $M$ , y  $0 \leq \nu \leq \dim M$ . Si  $\nu = 0$ ,  $M$  es una variedad Riemanniana; si  $\nu \geq 1$  y  $\dim M \geq 2$ , a  $M$  se la llama una variedad de Lorentz. Serán de especial interés las variedades de Lorentz de índice 1.

**Notaciones 1.**  $\varepsilon_i = -1$  si  $1 \leq i \leq \nu$ , y  $\varepsilon_i = 1$  si  $\nu + 1 \leq i \leq n$ .

**Observación 5.** La noción de isomorfismo entre variedades semi-Riemannianas viene dado por las **isometrías**. Sean  $M, N$  dos variedades semi-Riemannianas con métricas  $g_M$  y  $g_N$  respectivamente. Una isometría  $\phi : M \rightarrow N$  es un difeomorfismo que preserva el tensor métrico:  $\phi^*(g_N) = g_M$ .

**Notaciones 2.** 1.  $\langle V, W \rangle := g(V, W)$  para  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , y  $\langle v, w \rangle := g_p(v, w)$  para  $v, w \in T_pM$

2.  $g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j)$  en una carta  $U$

3.  $(g_{ij}(p))^{-1} := (g^{ij}(p))$  (está bien definida porque  $g$  es no degenerada, luego  $g_p$  es inversible para  $p \in M$ ).

**Definición 8.** Al conjunto de vectores  $v \in T_pM$  se lo divide en tres grupos: si  $\langle v, v \rangle > 0$  o  $v = 0$ , entonces  $v$  es **espacial**. Si  $\langle v, v \rangle < 0$ , entonces es **temporal**. Si  $\langle v, v \rangle = 0$  y  $v \neq 0$ , entonces  $v$  es **nulo**. Si es temporal o nulo, se dice que el vector es **causal**. La categoría donde cae cada vector  $v$  define su **característica causal**.

**Definición 9.** Sea  $P \subseteq M$  una subvariedad de una variedad semi-Riemanniana, sea  $i : P \rightarrow M$  la inclusión. Si el pullback  $i^*g$  define un tensor métrico en  $P$ , entonces a  $P$  se la llama subvariedad semi-Riemanniana.

### 1.3. Conexión de Levi Civita

En esta sección veremos cómo se construye un elemento central en el estudio de la geometría Riemanniana y semi-Riemanniana: la conexión de Levi Civita.

Recordemos que el objetivo es que, dados  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ , se construya un campo vectorial  $\nabla_V W$  que tenga la propiedad que en cada  $p \in M$  represente el cambio de  $W$  en la dirección  $V_p$ .

**Definición 10.** Una conexión  $\nabla$  en una variedad diferenciable es una función  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  que cumple con tres propiedades:

1.  $\nabla_V W$  es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $V$ .
2.  $\nabla_V W$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $W$ .
3.  $\nabla_V(fW) = (Vf)W + f\nabla_V W$  para  $f \in C^\infty(M)$

Al campo  $\nabla_V W$  se lo llama la *derivada covariante de  $W$  con respecto a  $V$* . Ahora enunciaremos uno de los teoremas más importantes de la geometría semi-Riemanniana. La demostración del mismo se encuentra en cualquier libro de geometría Riemanniana.

**Teorema 1.** Dada  $M$  una semi-Riemanniana, existe una única conexión  $\nabla$ , a la que llamaremos **conexión de Levi Civita**, que cumple con las siguientes dos propiedades para todo  $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ :

1. No tiene torsión:  $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$
2.  $X\langle V, W \rangle = \langle \nabla_X V, W \rangle + \langle V, \nabla_X W \rangle$

Más aún, la conexión está caracterizada por la fórmula de Koszul:

$$2\langle \nabla_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle - \langle W, [X, V] \rangle - \langle X, [V, W] \rangle \quad (1.5)$$

**Definición 11.** Sea  $U \subseteq M$  una carta con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$  en una variedad semi-Riemanniana  $M$ . Los **símbolos de Christoffel** para esta carta son el conjunto de funciones  $\Gamma_{ij}^k$  a valores reales que satisfacen, para  $1 \leq i, j \leq n$

$$\nabla_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

De las propiedades de la conexión se deduce fácilmente que

1.  $\nabla_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum \Gamma_{ij}^k W^j \right\} \partial_k$
2.  $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}$  (para probarlo basta con colocar  $V = \partial_i$ ,  $W = \partial_j$  y  $X = \partial_m$  en la fórmula de Koszul).



Necesitamos extender el concepto de derivada covariante a tensores de cualquier tipo. Como ya tenemos definida la derivada covariante para *campos*, por la Observación 4 solamente necesitamos definirla sobre  $C^\infty M$ . En base a esto, tenemos las siguientes tres definiciones:

**Definición 12.** Sea  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Llamaremos **la derivada covariante de Levi Civita**  $\nabla_V$  a la única derivación tensorial que cumple que  $\nabla_V f = Vf$  para todo  $f \in C^\infty M$  y  $\nabla_V W$  es la derivada covariante de Levi Civita que ya conocemos para todo  $W \in \mathfrak{X}$ .

**Definición 13.** El **diferencial covariante** es una aplicación  $\nabla : \mathfrak{T}_s^r(M) \longrightarrow \mathfrak{T}_{s+1}^r(M)$  que cumple que, para cada  $A \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ,

$$(\nabla A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s, V) = (\nabla_V A)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s)$$

En el caso de que  $r=s=0$ ,  $\nabla f = df$ . El tensor  $\nabla A$  acumula toda la información de las derivadas covariantes de  $A$ . Cuando se trabaja localmente, las componentes del tensor  $\nabla A$  se denotan con un  $;$ :  $A_{j_1, \dots, j_s; k}^{i_1, \dots, i_r}$ .

**Definición 14.** Un campo tensorial  $A$  se dice que es **paralelo** si  $\nabla_V A$  para todo  $V \in \mathfrak{X}$ .

## 1.4. Contracción métrica

En toda variedad semi-Riemanniana, tenemos un isomorfismo entre los campos vectoriales y las 1-formas, como especifica la siguiente proposición, que lleva la idea del *lema de Riesz* al contexto de variedades semi-Riemanniana:

**Proposición 2.** Sea  $M$  una variedad semi-Riemanniana, y sea  $\psi : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^*(M)$  la aplicación  $V \longmapsto V^*$ , con  $V^*(X) = \langle V, X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces  $\psi$  es un isomorfismo  $C^\infty(M)$ -lineal.

*Demostración.*  $\psi$  es  $C^\infty(M)$ -lineal, y  $V^*$  es una 1-forma, porque es  $C^\infty(M)$ -lineal. Luego basta probar dos cosas:

$\psi$  es inyectiva: hay que ver que  $\langle V, X \rangle = \langle W, X \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $V = W$ . Esto es consecuencia directa del hecho de que el tensor métrico es no degenerado.

$\psi$  es sobreyectiva: sea  $\theta \in \mathfrak{X}^*(M)$ , busco un  $V \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $\theta(X) = \langle V, X \rangle$ . Basta verlo en coordenadas locales. Si  $\theta = \sum \theta^i dx^i$ , tomo  $V = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_j \partial_j$ . Luego, tenemos que

$$\langle V, \partial_k \rangle = \sum_{i,j} \theta_i g^{ij} g_{jk} = \sum_i \theta_i \delta_{ik} = \theta(\partial_k)$$

Luego, como es  $C^\infty(M)$ -lineal,  $\langle V, X \rangle = \theta(X)$  para todo  $X$  localmente y, como los campos se pegan bien, globalmente.  $\square$

De esta forma, tenemos el isomorfismo  $\mathfrak{T}_1^0 \simeq \mathfrak{T}_0^1$ . Queremos extender el isomorfismo a tensores de cualquier tipo.

**Definición 15.** *Fijamos  $1 \leq a \leq r$ ,  $1 \leq b \leq s$ . Si  $A \in \mathfrak{T}_s^r$ , definimos  $\downarrow_b^a A \in \mathfrak{T}_{s+1}^{r-1}(M)$  al tensor que evaluado en 1-formas y campos arbitrarios se comporta de la siguiente manera:*

$$\begin{aligned} (\downarrow_b^a A)(\theta^1, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{s+1}) \\ = A(\theta^1, \dots, \overset{\substack{a\text{-ésima} \\ \text{posición}}}{\downarrow} X_b^*, \dots, \theta^{r-1}, X_1, \dots, X_{b-1}, X_{b+1}, \dots, X_{s+1}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

$X_b^*$  es la 1-forma equivalente al campo  $X_b$  vía la aplicación  $\psi$ . A la operación  $\downarrow_b^a$  se la suele llamar **bajar un índice**.

$\downarrow_b^a$  es  $C^\infty(M)$ -lineal, y es un isomorfismo con inversa  $\uparrow_b^a$ , definida análogamente, que se suele llamar **subir un índice**.

Un caso importante es cuando tenemos un tensor  $A \in \mathfrak{T}_s^1$  expresado como una función  $C^\infty(M)$ -lineal  $A : \mathfrak{X}(M)^s \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ . En este caso, el tensor  $\downarrow_1^1 A$  se comporta de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} (\downarrow_1^1 A)(V, X_1, \dots, X_s) &= A(V^*, X_1, \dots, X_s) \\ &= V^*(A(X_1, \dots, X_s)) = \langle V, A(X_1, \dots, X_s) \rangle \end{aligned} \quad (1.7)$$

El proceso de subir y bajar índices genera una relación de equivalencia entre los tensores sobre una variedad:

**Definición 16.** *Sean  $A, B$  tensores sobre una variedad semi-Riemanniana  $M$ . Se dice que  $A$  y  $B$  son **métricamente equivalentes** si puedo obtener  $B$  subiendo y bajando índices en  $A$ .*

*Dos tensores métricamente equivalentes contienen la misma información.*

Por ejemplo, en coordenadas locales,

$$R_{ijkl} = (\downarrow_1^1 R)(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = \langle \partial_i, R_{\partial_k \partial_l} \partial_j \rangle = \sum g_{im} R_{jkl}^m$$

**Definición 17.** *En una variedad semi-Riemanniana se define la **contracción métrica** como la operación  $C_{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_{s-2}^r(M)$ , con  $1 \leq a < b \leq s$  y  $r$  arbitrario que primero sube el índice contravariante y luego contrae el tensor de la forma que ya definimos.*

*En coordenadas locales, la contracción métrica toma la siguiente forma:*

$$(C_{ab} A)_{i_1, \dots, i_{s-2}}^{j_1, \dots, j_r} = \sum_{p, q} g^{pq} A_{i_1, \dots, p, \dots, q, \dots, i_{s-2}}^{j_1, \dots, j_r} \quad \text{con } p \text{ en la } a\text{-ésima posición y } q \text{ en la } b\text{-ésima posición.}$$

$C^{ab} : \mathfrak{T}_s^r(M) \rightarrow \mathfrak{T}_s^{r-2}(M)$  se define análogamente.

**Lema 3.** *El diferencial covariante  $\nabla$  y la derivada covariante  $\nabla_V$  conmutan con cambiar el tipo y la contracción.*

*Demostración.* Como la operación de subir un índice es la inversa de bajarlo, basta probarlo solamente para bajar índices. Es más, si permutamos operaciones vemos que basta probarlo para cambios del tipo  $\downarrow_1^a$ . Localmente se ve que  $\downarrow_1^a A = C_1^a(g \otimes A)$ .  $\nabla_V$  conmuta con la contracción porque es una derivación tensorial. Como el tensor métrico es paralelo, tenemos que

$$\nabla_V(\downarrow_1^a A) = \nabla_V(C_1^a(g \otimes A)) = C_1^a(g \otimes \nabla_V A) = \downarrow_1^a(\nabla_V A)$$

La cuenta para el diferencial covariante es similar. □

## 1.5. Función exponencial

Empezaremos definiendo lo que es el *transporte paralelo*, para luego estudiar el concepto de *geodésicas* en una variedad semi-Riemanniana. Comenzamos con una proposición clásica, cuya demostración se puede encontrar en cualquier libro de geometría Riemanniana, que trata sobre la existencia y unicidad de la *derivada covariante inducida*.

**Proposición 3.** *Sea  $\alpha : I \rightarrow M$  una curva suave en una variedad semi-Riemanniana  $M$ . Entonces existe una única función  $' : \mathfrak{X}(\alpha) \rightarrow \mathfrak{X}(\alpha)$  que cumple con las siguientes propiedades:*

1.  $(aZ_1 + bZ_2)' = aZ_1' + bZ_2'$ , con  $a, b \in \mathbb{R}$
2.  $(hZ)' = \frac{dh}{dt}Z + hZ'$ , con  $h \in C^\infty(M)$
3.  $(V_\alpha)'(t) = \nabla_{\alpha'(t)}(V)$ , con  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $t \in I$ .
4.  $\frac{d}{dt}\langle Z_1, Z_2 \rangle = \langle Z_1', Z_2 \rangle + \langle Z_1, Z_2' \rangle$

En coordenadas el campo  $Z'$  toma la siguiente forma:

$$Z' = \sum_k \left\{ \frac{dZ^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{d(x^i \circ \alpha)}{dt} Z^j \right\} \partial_k$$

Si  $Z' = 0$ , el campo se dice que es *paralelo*. Luego, por el teorema de existencia y unicidad de soluciones a sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, tenemos la siguiente propiedad:

**Proposición 4.** *Dada una curva  $\alpha : I \rightarrow M$ , un  $a \in I$  y un  $z \in T_{\alpha(a)}M$ , existe un único campo paralelo  $Z$  tal que  $Z(a) = z$ .*

En base a esto, se define el **transporte paralelo** a través de  $\alpha$  desde  $p = \alpha(a)$  hasta  $q = \alpha(b)$  a la aplicación  $P = P_a^b(\alpha) : T_pM \rightarrow T_qM$  que cumple que  $P_a^b(\alpha)(z) = Z(b)$ .

**Proposición 5.** *El transporte paralelo es una isometría lineal.*

*Demostración.* Sea  $c \in \mathbb{R}$  y sean  $v, w \in T_pM$ , que corresponden a campos paralelos  $V, W$  respectivamente. Como  $cV+W$  también es paralelo,  $P(cv+w) = (cV+W)(b) = cV(b)+W(b) = P(cv)+P(w)$ , luego  $P$  es lineal. Si  $P(v) = 0$ , por el teorema de existencia y unicidad,  $V \equiv 0$ , y luego  $v = V(a) = 0$ . Como los espacios tangentes tienen la misma dimensión y  $P$  es monomorfismo,  $P$  resulta ser un isomorfismo lineal. Finalmente, recordando que  $\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle$ , tenemos que  $\langle V, W \rangle$  es constante. Por lo tanto,  $\langle P(v), P(w) \rangle = \langle V(b), W(b) \rangle = \langle V(a), W(a) \rangle = \langle v, w \rangle$ , luego  $P$  es una isometría lineal.  $\square$

**Definición 18.** *Una **geodésica** en una variedad semi-Riemanniana es una curva  $\gamma$  cuyo campo asociado  $\gamma'$  es paralelo.*

**Proposición 6.** *Dado un  $v \in T_pM$ , existe una única geodésica  $\gamma_v \subseteq M$  tal que  $\gamma_v'(0) = v$  y su dominio de definición  $I_v$  es maximal.*

Una variedad semi-Riemanniana para la cual todas las geodésicas maximales están definidas en todo  $\mathbb{R}$  se llama *geodésicamente completa*. Por el teorema de Hopf-Rinow, esto es equivalente a ser *métricamente completa*.

Una curva en  $\alpha \in M$  se dice **espacial** si  $\alpha'(t)$  es espacial para todo  $t$ ; análogamente se define las curvas **temporales** y **nulas**. Una curva cualquiera puede no tener ninguna de estas *características causales*, sin embargo una geodésica siempre cae dentro de una de estas tres categorías, ya que  $\alpha'$  es paralelo, y el transporte paralelo es una isometría, luego preserva el carácter causal de los vectores.

En Relatividad General, hay un atlas que suele ser utilizado dado que tiene propiedades que simplifican las cuentas. Este atlas es el generado por las cartas con *coordenadas normales*. Para definir lo que son estas coordenadas, primero debemos definir lo que es la *función exponencial* en variedades semi-Riemannianas. Para ello, primero enunciaremos dos proposiciones:

**Proposición 7.** *Sea  $v \in TM$ . Entonces existe un entorno  $v \in \mathfrak{U} \subseteq TM$  y un intervalo  $0 \in I$  tal que  $(w, s) \mapsto \gamma_w(s)$  resulta una función bien definida y suave de  $\mathfrak{U} \times I \rightarrow M$ .*

**Proposición 8.** *Dado  $v \in TM$ , sea  $G \in \mathfrak{X}(TM)$  el campo vectorial que cumple que  $G_v$  es la derivada de la aplicación  $s \mapsto \gamma_v'(s)$ . Entonces la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  define una biyección entre las curvas integrales maximales de  $G$  y las geodésicas maximales de  $M$ .*

*Demostración.* Si  $\gamma$  es una geodésica en  $M$ , entonces  $\gamma'$  es una curva integral de  $G$ : para todo  $s$ , definimos  $\alpha(s) = \gamma'(s)$ . Para un  $t$  fijo arbitrario, sea  $w = \gamma'(t)$  y  $\beta(s) = \gamma_w(s)$ . Sabemos que  $\gamma(t+s) = \gamma_w(s)$ . Tomando velocidades en  $M$ , tenemos que  $\alpha(t+s) = \gamma'_w(s) = \beta(s)$ . Luego, tomando velocidades en  $TM$ , tenemos que  $\alpha'(t+s) = \beta'(s)$ . Evaluando en  $s = 0$ , tenemos que  $\alpha'(t) = \beta'(0) = G_w = G_{\alpha(t)}$ .

Si  $\alpha$  es una curva integral de  $G$ , entonces  $\pi \circ \alpha$  es una geodésica de  $M$ : si  $v = \alpha(0)$ , entonces por lo anterior la aplicación  $s \mapsto \gamma'_v(s)$  es una curva integral de  $G$ . Al igual que  $\alpha$  empieza en  $v$ , luego, por lo menos en un intervalo,  $\pi \circ \alpha = \pi \circ \gamma'_v = \gamma_v$ . Para un  $t$  arbitrario, sea  $\delta$  la curva integral de  $G$  que comienza en  $\alpha(t)$ . Luego  $\alpha(t+s) = \delta(s)$ , y por lo tanto  $\pi \circ \alpha(t+s) = \pi \circ \delta(s) = \gamma_{\alpha(t)}(s)$ . Para terminar, el hecho que  $\pi \circ \gamma' = \gamma$  y  $(\pi \circ \alpha') = \alpha$  implica que las aplicaciones  $\alpha \mapsto \pi \circ \alpha$  y  $\gamma \mapsto \gamma'$  son inversas, definiendo la biyección deseada.  $\square$

**Definición 19.** Sea  $p \in M$ , y sea  $\mathfrak{D}_p \subseteq T_pM$  el conjunto de vectores  $v$  tales que  $[0, 1] \subseteq I_v$  (el dominio de definición de  $\gamma_v$ ). El mapa exponencial de  $M$  en  $p$  es la función  $\exp_p : \mathfrak{D}_p \rightarrow M$  tal que  $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$  para todo  $v \in \mathfrak{D}_p$ .

Por Hopf-Rinow,  $M$  es completa si y sólo si  $\mathfrak{D}_p = T_pM$  para todo  $p \in M$  (ya que estamos trabajando en dimensión finita).

Si fijamos  $v \in T_pM$  y  $t \in \mathbb{R}$ , la geodésica  $s \mapsto \gamma_v(ts)$  tiene velocidad inicial  $tv$ . Entonces  $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$  (donde la igualdad tenga sentido), y por lo tanto  $\exp_p(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t)$ . Esto quiere decir que  $\exp_p$  manda rectas a través del origen en  $T_pM$  a geodésicas que pasan a través de  $p$  en  $M$ .

**Proposición 9.** Para todo punto  $p \in M$  existen entornos  $0 \in \overline{\mathfrak{U}} \subseteq T_pM$ ,  $p \in \mathfrak{U} \subseteq M$  tales que  $\exp_p : \overline{\mathfrak{U}} \rightarrow \mathfrak{U}$  es un difeomorfismo.

*Demostración.* Como  $\exp_p$  es diferenciable en  $T_pM$ , basta con probar que  $d\exp : T_0(T_pM) \rightarrow T_pM$  es un isomorfismo en  $p$ . Es claro que  $T_pM$  y  $T_0(T_pM)$  tienen la misma dimensión. Además,

$$\{t \mapsto tv \text{ en } T_pM\} \xrightarrow{\overline{\exp}} \{t \mapsto \exp(tv) = \gamma_v(t)\}$$

Luego  $d\exp(v) = v$ . Por el teorema de la función inversa se deduce la proposición.  $\square$

Si en la proposición anterior  $\overline{\mathfrak{U}}$  resulta ser *estrellado* alrededor del 0, entonces a  $\mathfrak{U}$  se lo llama **entorno normal de  $p$** .

**Proposición 10.** Si  $p \in \mathfrak{U} \subseteq M$  es un entorno normal de  $p$ , entonces para todo  $q \in \mathfrak{U}$  existe una única geodésica  $\sigma : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{U}$  que une a  $p$  con  $q$ . Más aún,  $\sigma'(0) = \exp_p^{-1}(q) \in \overline{\mathfrak{U}}$ .

*Demostración.* Por definición,  $\bar{\mathfrak{U}}$  es un entorno estrellado de 0 en  $T_p M$  tal que  $\exp_p|_{\bar{\mathfrak{U}}}$  es un difeomorfismo en  $\mathfrak{U}$ . Para  $q \in \mathfrak{U}$ , sea  $v = \exp_p^{-1}(q) \in \bar{\mathfrak{U}}$ . Como  $\bar{\mathfrak{U}}$  es estrellado,  $\{\rho(t) = tv, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \bar{\mathfrak{U}}$ . Luego,  $\{\sigma = \exp_p \circ \rho, 0 \leq t \leq 1\} \subseteq \mathfrak{U}$  y  $\sigma$  une a  $p$  con  $q$ . Además,  $\sigma'(0) = v$ .

Veamos la unicidad: supongamos que  $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{U}$  es una geodésica contenida en  $\mathfrak{U}$  que une  $p$  con  $q$ . Si  $w = \tau'(0)$ , entonces las geodésicas  $t \mapsto \exp_p(tw)$  y  $\tau$  tienen las mismas velocidades iniciales, luego son iguales.

El segmento radial  $t \mapsto tw, 0 \leq t \leq 1$  está contenido en  $\bar{\mathfrak{U}}$ , luego  $w \in \bar{\mathfrak{U}}$ . Pero  $\exp_p(w) = \rho(1) = p = \exp_p(v)$  y  $\exp_p$  es biyectiva en  $\bar{\mathfrak{U}}$ , luego  $v = w$ . Por la unicidad de las geodésicas,  $\rho = \sigma$ .  $\square$

Una **geodésica rota** es una curva diferenciable a trozos cuyos segmentos suaves son geodésicas. Esta definición nos lleva al siguiente lema:

**Lema 4.** *Una variedad semi-Riemanniana  $M$  es conexa si y sólo si, dados dos puntos, existe una geodésica rota que los une.*

*Demostración.* Fijo  $p \in M$ . Sea  $C \subseteq M$  el conjunto de puntos en  $M$  que pueden ser unidos con  $p$  por una geodésica rota. Para  $q \in M$ , sea  $\mathfrak{U}$  un entorno normal de  $q$ . Si  $q \in \mathfrak{U}$ , entonces  $\mathfrak{U} \in C$ . Si  $q \in M - C$ ,  $\mathfrak{U} \subseteq M - C$ . Luego,  $C$  es abierto y cerrado. Como  $M$  es conexo,  $M = C$ . La vuelta es obvia.  $\square$

**Definición 20.** *Sea  $p \in \mathfrak{U} \subseteq M$  un entorno normal de  $p$ , sean  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal de  $T_p M$ , con  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \varepsilon_j$ . Las **coordenadas normales**  $(x^1, \dots, x^n)$  determinadas por  $e_1, \dots, e_n$  son las que asignan a cada  $q \in \mathfrak{U}$  el vector relativo a la base  $e_1, \dots, e_n$ :*

$$\exp_p^{-1}(q) = \sum x^i(q) e_i$$

Luego, si  $f^1, \dots, f^n$  es la base dual de  $\{e_i\}$ , entonces  $x^i \circ \exp_p = f^i$  en  $\bar{\mathfrak{U}}$ .

**Proposición 11.** *Si  $x^1, \dots, x^n$  son coordenadas normales en  $p \in M$ , entonces para todo  $i, j, k$ , se cumple que  $g_{ij}(p) = \delta_{ij} \varepsilon_j$  y  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ .*

*Demostración.* Si  $v \in T_p M$ , lo escribimos como  $v = \sum a^i e_i$ . Como  $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$ ,  $x^i(\gamma_v(t)) = f^i(tv) = t f^i(v) = t a^i$ . Por lo tanto,  $v = \gamma_v'(0) = \sum a^i \partial_i|_p$ . En particular,  $e_j = \partial_j|_p$ , y luego se deduce la primera afirmación. Teniendo en cuenta lo que recién demostramos de  $x^i \circ \gamma_v$ , la ecuación diferencial de las geodésicas toma la forma  $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma_v(t)) a^i a^j = 0$  para todo  $k$ . En particular,  $\sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(0) a^i a^j = 0$  para todo  $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$ . Fijando  $k$ , esto significaría que cierta forma bilineal en  $\mathbb{R}$  es idénticamente cero. Por la fórmula de polarización de formas bilineales, obtenemos que  $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ .  $\square$

El hecho de que los símbolos de Christoffel se anulen cuando utilizamos coordenadas normales suele simplificar notablemente las cuentas.

## 1.6. Curvatura

**Definición 21.** Sea  $(M, \nabla)$  una variedad semi-Riemanniana dotada de una conexión de Levi Civita. A la función  $R : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  definida por  $R(X, Y)Z = R_{XY}Z = \nabla_{[X, Y]}Z - [\nabla_X, \nabla_Y]Z$  se lo llama **tensor de curvatura** o **tensor de Riemann**. Este resulta ser un tensor de tipo  $(1, 3)$ .

Si fijamos  $p \in M$ , dados  $x, y \in T_pM$ , tenemos el operador lineal  $R_{xy} : T_pM \rightarrow T_pM$  que manda  $z \mapsto R_{xy}(z)$ , al que se lo llama **operador de curvatura**. Una de las ventajas de este operador es que cuenta con varias simetrías útiles al hacer cuentas.

**Proposición 12.** Si  $x, y, z, v, w \in T_pM$ , entonces

1.  $R_{xy} = -R_{yx}$
2.  $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{xy}w, v \rangle$  (el operador de curvatura es antiadjunto)
3.  $R_{xy}z + R_{yz}x + R_{zx}y = 0$  (primera identidad de Bianchi)
4.  $\langle R_{xy}v, w \rangle = \langle R_{vw}x, y \rangle$

*Demostración.* Como  $\nabla_X$  y  $[\cdot, \cdot]$  son operaciones locales, basta ver estas propiedades en un entorno  $p \in \mathfrak{U}$ . Como las identidades son tensoriales, podemos extender los vectores  $x, y, z, v, w$  a campos  $X, Y, Z, V, W$ , eligiendo estos campos de tal forma que el corchete de ellos dos a dos sea siempre cero (basta extenderlos de tal forma que tengan componentes constantes para cierta base coordenada). Bajo esta elección, el tensor de curvatura se simplifica:  $R_{XY}Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z$ . De acá, (1) es claro.

(2) Por la fórmula de polarización, basta ver que  $\langle R_{xy}v, v \rangle = 0$ . Pero tenemos que, por la propiedad 2 del Teorema 1 y por la fórmula de Koszul,

$$\begin{aligned} \langle R_{XY}V, V \rangle &= \langle \nabla_Y \nabla_X V, V \rangle - \langle \nabla_X \nabla_Y V, V \rangle \\ &= Y \langle \nabla_X V, V \rangle - \langle \nabla_X V, \nabla_Y V \rangle - X \langle \nabla_Y V, V \rangle + \langle \nabla_Y V, \nabla_X V \rangle \\ &= \frac{1}{2} [Y, X] \langle V, V \rangle = 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

(3) Si  $F : \mathfrak{X}(M)^3 \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es simplemente  $\mathbb{R}$ -lineal, y sea  $\mathfrak{G}F(X, Y, Z)$  la suma sobre las permutaciones cíclicas de  $X, Y, Z$ :

$$\mathfrak{G}F(X, Y, Z) = F(X, Y, Z) + F(Y, Z, X) + F(Z, X, Y)$$

Luego, una permutación cíclica de  $X, Y, Z$  deja invariante a  $\mathfrak{G}F(X, Y, Z)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}R_{XY}Z &= \mathfrak{G}\nabla_Y \nabla_X Z - \mathfrak{G}\nabla_Y \nabla_X Z \\ &= \mathfrak{G}\nabla_X \nabla_Z Y - \mathfrak{G}\nabla_Y \nabla_X Z = \mathfrak{G}\nabla_X [Z, Y] = 0 \quad (1.9) \end{aligned}$$

(4) La idea de esta demostración es la siguiente: por (3),  $\langle \mathfrak{G}R_{YV}X, W \rangle = 0$ . Si sumamos sobre las 4 permutaciones cíclicas de  $Y, V, X, W$  y expandimos  $\mathfrak{G}R_{YV}$ , obtenemos 12 términos. Usando (1) y (2), 8 de estos términos se cancelan y obtenemos  $2(\langle R_{XY}V, W \rangle + \langle R_{WV}X, Y \rangle) = 0$ , y de acá obtenemos (4).  $\square$

Recordando que  $\nabla R \in \mathfrak{T}_4^1(M)$ , estas simetrías inducen una quinta simetría:

**Proposición 13** (Segunda identidad de Bianchi). *Si  $x, y, z \in T_pM$ , entonces  $(\nabla_z R)(x, y) + (\nabla_x R)(y, z) + (\nabla_y R)(z, x) = 0$ .*

*Demostración.* Extendemos  $(x, y, z) \mapsto (X, Y, Z)$  de tal forma que para un sistema de coordenadas *normal*, las extensiones tienen componentes constantes. Con esta elección se anulan los corchetes dos a dos, pero también se anulan los símbolos de Christoffel en  $p$ , de esta forma, de la fórmula en la Definición 1.3, las 9 derivadas covariantes que involucran a  $X, Y, Z$  dan 0. Por la regla del producto, tenemos que

$$\begin{aligned} & (\nabla_Z R)(X, Y)V \\ &= \nabla_Z(R(X, Y)V) - R(\nabla_Z X, Y)V - R(X, \nabla_Z Y)V - R(X, Y)(\nabla_Z V) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Como las derivadas covariantes se anulan en  $p$ , los dos términos del medio de la parte derecha de la igualdad se anulan. Luego, sacando a  $V$  de la ecuación, tenemos que

$$(\nabla_Z R)(X, Y) = [\nabla_Z, R(X, Y)] = [\nabla_Z, [\nabla_Y, \nabla_Z]] \text{ en } p$$

Luego, por la identidad de Jacobi para el corchete, sumando sobre las permutaciones cíclicas  $X, Y, Z$ , obtenemos que  $\mathfrak{G}(\nabla_Z R)(X, Y) = 0$  en  $p$ .  $\square$

**Lema 5.** *En una carta con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ ,  $R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum_i R_{jkl}^i \partial_i$ , con*

$$R_{jkl}^i = \frac{d}{dx^l} \Gamma_{kj}^i - \frac{d}{dx^k} \Gamma_{lj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{lj}^m$$

*Demostración.* Se deduce directamente de la definición del tensor  $R$ , del hecho que  $[\partial_i, \partial_j] = 0$  y de las propiedades de la derivada covariante.  $\square$

### 1.6.1. Curvatura seccional

En general, el tensor de curvatura es difícil de calcular. Es por eso que surge la necesidad de buscar otros elementos más sencillos que describan al tensor de curvatura completamente, y en base a ello se define la *curvatura seccional*.

A un subespacio de dimensión 2  $\Pi \in T_pM$  se lo llama *plano tangente*. Dados  $v, w$ , se define  $Q(v, w) = \langle v, v \rangle \langle w, w \rangle - \langle v, w \rangle^2$ . El plano  $\Pi$  se dice no degenerado si  $Q(v, w) \neq 0$  para alguna (toda) base  $v, w$  de  $\Pi$ .  $Q(v, w)$  es positivo si  $g|_{\Pi}$  es definida, y negativo si es indefinida.



**Lema 6.** Sea  $\Pi$  un plano tangente a  $M$  en  $p$  no degenerado. El número

$$K(v, w) = \frac{\langle R_{vw}v, w \rangle}{Q(v, w)}$$

no depende de la base  $v, w$  de  $\Pi$ , y se lo llama curvatura seccional  $K(\Pi)$  de  $\Pi$ .

*Demostración.* Dadas  $\{v, w\}$  y  $\{x, y\}$  dos bases de  $\Pi$ , tenemos que existe  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2\mathbb{R}$  tal que  $\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Luego

$$\langle R_{vw}v, w \rangle = (ad - bc)^2 \langle R_{xy}x, y \rangle$$

$$Q(v, w) = (ad - bc)^2 Q(x, y)$$

□

De esta forma,  $K$  es una función bien definida a valores reales en el conjunto de planos tangentes no degenerados a  $M$ .

Es claro que el tensor de curvatura define a  $K$ . La propiedad interesante es que  $K$  determina a  $R$ . El objetivo de esta subsección es probar tal propiedad.

**Lema 7.** Dados dos vectores  $v, w$  en un espacio dotado de un producto escalar, entonces existen vectores  $\bar{v}, \bar{w}$  arbitrariamente cercanos a  $v, w$  que generan un plano no degenerado.

*Demostración.* Asumimos que  $v, w$  son linealmente independientes, porque podemos aproximarlos por vectores linealmente independientes. El plano generado por  $v, w$  lo asumimos degenerado, luego el producto escalar es indefinido. Si  $v$  es nulo, tomamos  $x$  tal que  $\langle v, x \rangle \neq 0$ ; si  $v$  es no nulo, tomamos  $x$  de carácter causal opuesto. Luego  $Q(v, x) < 0$ .

Ahora queremos ver que dado  $\epsilon \neq 0$ ,  $v$  y  $w + \epsilon x$  generan un plano no degenerado. Si expandimos  $Q(v, w + \epsilon x)$ , obtenemos algo de la forma  $b\epsilon + \epsilon^2 Q(v, x)$ . Si  $b = 0$ , da distinto de 0 porque  $Q(v, x) < 0$ . Si  $b \neq 0$ , para  $\epsilon \ll 1$ ,  $\epsilon > \epsilon^2$ , y luego  $Q(v, w + \epsilon x) \neq 0$ . □

**Proposición 14.** Si  $K_p = 0$ , entonces  $R = 0$  en  $p$ . O sea, si  $K(\Pi) = 0$  para todo plano  $\Pi \subseteq T_p M$  no degenerado, entonces  $R_{xyz} = 0$  para todo  $x, y, z \in T_p M$ .

*Demostración.* (1) Primero veamos que  $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$  para todo  $v, w \in T_p M$ .

Si  $v, w$  generan un plano no degenerado, entonces  $\langle R_{vw}v, w \rangle = 0$ . Por el lema, cualquier par de vectores se puede aproximar por este tipo de vectores. Como  $\langle R_{xy}v, w \rangle$  es multilinear, es continua en  $T_p M^4$ , vale la afirmación.

(2) Ahora probemos que  $R_{vw}v = 0$  para todo  $v, w \in T_p M$ .

Para un  $x$  arbitrario, tenemos que

$$\langle R_{v, w+x}v, w + x \rangle = \langle R_{v, w}v, w \rangle + \langle R_{v, x}v, w \rangle + \langle R_{v, w}v, x \rangle + \langle R_{v, x}v, x \rangle$$

Por (1), tres miembros se anulan, y debido a la simetría del tensor de curvatura, tenemos que  $\langle R_{vw}v, x \rangle$  para todo  $x$ .

(3) Probemos que  $R_{vw}x = R_{wx}v$ , para todo  $v, w, x \in T_pM$ .

$R_{v+x,w}(v+x) = R_{vw}v + R_{xw}v + R_{vw}x + R_{xw}x$ . Por (2), 3 términos se anulan, y por la antisimetría en los subíndices obtenemos lo deseado.

Por (3),  $R_{vw}x$  es invariante ante permutaciones cíclicas de  $x, v, w$ . Por la primera identidad de Bianchi,  $R_{vw}x = 0$  para todo  $v, w, x$ , y luego  $R \equiv 0$ .  $\square$

Una variedad semi-Riemanniana cuyo tensor  $R$  es constantemente cero (o, por lo de recién, si  $K \equiv 0$ ) se dice que es *flat*. En la demostración de la Proposición 13 solamente utilizamos las simetrías del tensor  $R$ , no explícitamente *qué es*  $R$ . Por eso, si una función multilinear  $F : T_pM^4 \rightarrow \mathbb{R}$  tiene las mismas simetrías que la función  $(v, w, x, y) \mapsto \langle R_{vw}x, y \rangle$  expresadas en la Proposición 13, entonces también cumplirá con la propisición. Luego  $F(v, w, v, w) = 0$  para todo  $v, w$  generando un plano no degenerado en  $T_pM$  implica que  $F = 0$ . En base a esto, obtenemos el resultado que buscamos:

**Corolario 1.** *Sea  $F : T_pM^4 \rightarrow \mathbb{R}$  una función multilinear que tiene las mismas simetrías que  $(v, w, x, y) \mapsto \langle R_{vw}x, y \rangle$  y tal que*

$$K(v, w) = \frac{F(v, w, v, w)}{Q(v, w)}$$

para todo  $v, w$  que genera un plano no degenerado en  $T_pM$ . Entonces  $\langle R_{vw}x, y \rangle = F(v, w, x, y)$  para todo  $v, w, x, y \in T_pM$ .

*Demostración.* La función  $\Delta(v, w, x, y) = \langle R_{vw}x, y \rangle - F(v, w, x, y)$  tiene las mismas simetrías que la Proposición 12. Por hipótesis,  $\Delta(v, w, v, w) = 0$  si  $v, w$  generan un plano no degenerado. Luego,  $\Delta = 0$ .  $\square$

### 1.6.2. Curvatura de Ricci y escalar

Comenzamos esta subsección recordando que toda variedad semi-Riemanniana es *localmente paralelizable*; o sea, existen  $E_1, \dots, E_n$  campos vectoriales unitarios y ortogonales dos a dos definidos localmente. A este conjunto se lo suele llamar **marco ortonormal**. Una variedad es paralelizable si existe un marco ortonormal global.

**Definición 22.** *Se define al **tensor de Ricci** como  $Ric = C_3^1(R) \in \mathfrak{T}_2^0$ . Más aún, debido a las simetrías del tensor  $R$ , sus únicas contracciones no idénticamente cero son  $\pm Ric$ .*

*Otra forma de interpretar al tensor de Ricci es verlo como la traza de cierto operador:  $Ric(X, Y) = Tr(\{V \mapsto R_{XV}Y\})$ .*

*En coordenadas locales,  $R_{ij} = \sum R_{ijm}^m$ .*

**Lema 8.** *Ric es simétrico y, dado un marco ortonormal  $E_1, \dots, E_n$  con  $\varepsilon_m := \langle E_m, E_m \rangle$ , se escribe como  $Ric(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{XE_m} Y, E_m \rangle$ .*

*Demostración.* Notamos  $R(X, Y, E_m) = R_{YE_m} X$ . Luego

$$Ric(X, Y) = (C_3^1(R))(X, Y) = \sum_m \varepsilon_m \langle E_m, R(X, Y, E_m) \rangle = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{YE_m} X, E_m \rangle$$

Por simetría obtenemos la fórmula deseada y muestra que  $Ric$  es simétrico.  $\square$

Como el tensor de curvatura define al tensor de Ricci, y la curvatura seccional determina el tensor de curvatura, es importante estudiar de qué forma la curvatura seccional determina al tensor de Ricci.

Sea  $p \in M$ . Sea  $u \in T_p M$  un vector unitario, y sea  $e_1, \dots, e_n$  un marco ortonormal en  $T_p M$  tal que  $e_1 = u$ . Entonces

$$Ric(u, u) = \sum_m \varepsilon_m \langle R_{ue_m} u, e_m \rangle = \langle u, u \rangle \sum_m K(u, e_m)$$

Recordando que  $2Ric(u, v) = Ric(u + v, u + v) - Ric(u, u) - Ric(v, v)$ , obtenemos que el tensor de Ricci en cada punto se escribe en función de las curvas seccionales.

**Definición 23.** *La **curvatura escalar  $S$  de  $M$**  se define como la contracción  $C(Ric) \in C^\infty(M)$ .*

*Relativo a un marco ortonormal, el tensor cumple que  $S = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j)$ .*

*Localmente,  $S = \sum g^{ij} R_{ij} = \sum g^{ij} R_{ijk}^k$ .*

## 1.7. Operadores diferenciales

Hay 4 operadores diferenciales muy utilizados en cálculo en 3 dimensiones que se pueden generalizar a variedades semi-Riemannianas, y que terminan siendo útiles para la deducción original de las ecuaciones de Einstein, así como para la interpretación de ciertos modelos cosmológicos: *gradiente, divergencia, hessiano y laplaciano*.

**Definición 24.** *El gradiente  $grad : C^\infty(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  es la aplicación que a cada  $f \in C^\infty(M)$  le asigna el campo métricamente equivalente a  $df$ ; o sea, para todo campo  $X$ ,*

$$\langle grad(f), X \rangle = df(X) = Xf$$

Localmente,  $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ , luego  $grad(f) = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} \partial_j$ .

**Proposición 15.** *Si  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave con  $|grad(f)|$  constante, entonces las curvas integrales del campo  $grad(f)$  son geodésicas.*

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle &= X \langle \text{grad}(f), Y \rangle - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle \\ &= XY(f) - \nabla_X Y(f) = YX(f) - \nabla_Y X(f) \\ &= \langle \nabla_Y \text{grad}(f), X \rangle \quad (1.11)\end{aligned}$$

Ahora veremos que  $\text{grad}(f)$  es paralelo cuando es visto como campo sobre sus curvas integrales, lo que implicaría que estas curvas integrales son geodésicas. Sea  $X$  un campo.

$$\langle \nabla_{\text{grad}(f)} \text{grad}(f), X \rangle = \langle \nabla_X \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle = \frac{1}{2} X \langle \text{grad}(f), \text{grad}(f) \rangle = 0$$

porque  $|\text{grad}(f)|$  es constante.  $\square$

**Definición 25.** Dado un tensor  $A$ , al proceso de contraer la nueva posición covariante de  $\nabla A$  con una de las posiciones originales se lo suele llamar **divergencia de  $A$** , o  $\text{div}(A)$ .

Hay dos casos destacados donde la divergencia está unívocamente definida:

1. Si  $V \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\text{div}(V) = C(\nabla V) \in C^\infty(M)$ . En un marco ortonormal,  $\text{div}(V) = \sum \varepsilon_i \langle \nabla_{E_i} V, E_i \rangle$ , y, en coordenadas locales,

$$\text{div}(V) = \sum_i \left\{ \frac{\partial V^i}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k V^j \right\}$$

2. Si  $A \in \mathfrak{T}_2^0$ ,  $\text{div}(A) = C_{13}(\nabla A) = C_{23}(\nabla A) \in \mathfrak{X}^*(M)$ . En un marco ortonormal,  $\text{div}(A)(X) = \sum \varepsilon_i (\nabla_{E_i} A)(E_i, X)$ . En coordenadas locales,  $(\text{div}(A))_i = \sum_{r,s} g^{rs} A_{ri;s} = \sum_s A_{i;s}^s$ .

**Definición 26.** Dada  $f \in C^\infty(M)$ , se define el **Hessiano de  $f$**  como  $H^f = \nabla(\nabla(f))$ .

**Lema 9.**  $H^f$  es el tensor  $(0,2)$  simétrico que cumple que

$$H^f(X, Y) = XYf - (\nabla_X Y)f = \langle \nabla_X(\text{grad}(f)), Y \rangle$$

*Demostración.* Como  $\nabla f = df$ , tenemos que

$$H^f(X, Y) = \nabla(df)(X, Y) = \nabla_Y(df)(X) = Y(df(X)) - df(\nabla_Y X) = YXf - (\nabla_Y X)f$$

Como  $XY - YX = [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ , en la fórmula anterior podemos intercambiar  $X$  con  $Y$ , y de esta forma vemos que el tensor es simétrico. Por último,

$$\langle \nabla_X(\text{grad}(f)), Y \rangle = X \langle \text{grad}(f), Y \rangle - \langle \text{grad}(f), \nabla_X Y \rangle = H^f(X, Y)$$

$\square$

**Definición 27.** Dada  $f \in C^\infty(M)$ , se define el **Laplaciano de  $f$**  como  $\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) \in C^\infty(M)$ .

Como el diferencial covariante conmuta con cambiar el tipo de tensor, se deduce que

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}(f)) = C \nabla \text{grad}(f) = C \nabla(\uparrow_1^1 df) = C \uparrow_1^1 \nabla df = (C \uparrow_1^1) H^f = C_{12} H^f$$

Por lo tanto, el Laplaciano resulta ser la contracción de Hessiano.

En coordenadas locales,

$$\Delta f = \sum_{i,j} g^{ij} H_{ij} = \sum_{i,j} g^{ij} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right\}$$

Para terminar esta sección, demostraremos una propiedad que relaciona lo desarrollado en la sección de curvatura con lo hecho en esta sección sobre operadores diferenciales.

**Proposición 16.** Siendo  $S$  la curvatura escalar de  $M$ , entonces  $dS = 2\text{div}(\text{Ric})$ .

*Demostración.* Tomando coordenadas normales notamos

$$(\nabla_{\partial_r} R)_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = \sum R_{jkl;r}^i \partial_i$$

Por la segunda identidad de Bianchi, tenemos que

$$R_{jkl;r}^i + R_{jlr;k}^i + R_{jrk;l}^i = 0$$

Usando la simetría, intercambiamos  $r$  y  $k$  en el tercer término. Tomamos el caso  $i=r$  y contraemos en  $r$ :

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + \sum_r R_{jlr;k}^r - \sum_r R_{jkr;l}^r = 0$$

Como  $\sum_r R_{jlr;k}^r = \text{Ric}_{jl;k}$  y  $\sum_r R_{jkr;l}^r = \text{Ric}_{jk;l}$ , nos queda

$$\sum_r R_{jkl;r}^r + \text{Ric}_{jl;k} - \text{Ric}_{jk;l} = 0$$

Multiplicamos por  $g^{jk}$  y contraemos en  $j$  y  $k$ :

$$\sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r + \sum_{j,k} g^{jk} \text{Ric}_{jl;k} + S_{;l} = 0$$

Analicemos el segundo término. Recordando que el tensor métrico es simétrico, hacemos un cambio de tipo y obtenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} g^{jk} \text{Ric}_{jl;k} &= \sum_{j,k,m} g^{jk} g_{jm} \text{Ric}_{l;k}^m = \sum_{k,m} (\sum_j g^{kj} g_{jm}) \text{Ric}_{l;k}^m \\ &= \sum_{k,m} \delta_{km} \text{Ric}_{l;k}^m = \sum_m \text{Ric}_{l;m}^m \end{aligned} \quad (1.12)$$

Por la simetrías del tensor de curvatura, sabemos que  $R_{mjkl;r} = R_{jmlk;r}$ . Entonces, en el primer término tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{r,j,k} g^{jk} R_{jkl;r}^r &= \sum_{r,j,k,m} g^{jk} g^{rm} R_{mjkl;r} \\ &= \sum_{r,j,k,m} g^{rm} g^{jk} R_{jmlk;r} = \sum_{r,k,m} g^{rm} R_{mlk;r}^k \\ &= \sum_{r,m} g^{rm} Ric_{ml;r} = \sum_r Ric_{l;r}^r = \sum_m Ric_{l;m}^m \quad (1.13) \end{aligned}$$

Por lo tanto, juntando todo, tenemos que

$$2 \sum_m Ric_{l;m}^m = S_{,l}$$

Finalmente, esta es la expresión local de la igualdad

$$2div(Ric) = \nabla S = dS$$

□

## 1.8. Subvariedades semi-Riemannianas

El objetivo de esta sección será dar a conocer al lector la teoría de subvariedades de variedades semi-Riemannianas, sobre cómo la geometría del espacio ambiente se relaciona con la geometría de la subvariedad. Para eso, enunciaremos los teoremas y propiedades más importantes, y solamente haremos las demostraciones que creemos que estas agregan algo al lector. Para una lectura más completa, recomendamos [15], capítulo 4.

Como notación general, trabajaremos con subvariedades  $M \subseteq \overline{M}$ , y para distinguir entre objetos definidos en el espacio ambiente  $\overline{M}$  y la subvariedad  $M$  usaremos la raya superior. Por ejemplo, el tensor de curvatura en  $M$  lo notaremos  $R$ , mientras que el tensor de curvatura en  $\overline{M}$  lo notaremos  $\overline{R}$ . Para campos vectoriales sobre una curva, usaremos el punto para indicar que estamos en el espacio ambiente ( $\dot{Y}$ ) y el tilde ( $\tilde{Y}$ ) para indicar que estamos trabajando en la subvariedad.

Llamamos  $\tilde{\mathfrak{X}}(M) = \{X : M \rightarrow T\overline{M} / X_p \in T_p\overline{M}\}$ , que tiene estructura de  $C^\infty(M)$ -módulo. Para todo  $Y \in \tilde{\mathfrak{X}}(\overline{M})$ ,  $Y|_M \in \tilde{\mathfrak{X}}(M)$ . Si identificamos de la forma evidente los vectores con su imagen vía la inclusión, tenemos que  $\tilde{\mathfrak{X}}(M) \subseteq \tilde{\mathfrak{X}}(\overline{M})$  es un submódulo.

Como cada  $T_p M$  es un subespacio no degenerado de  $T_p \overline{M}$ , tenemos la descomposición

$$T_p \overline{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp$$

con  $T_p M^\perp$  no degenerado. Luego, para cada  $v \in T_p \bar{M}$  tenemos la descomposición  $v = \tan(v) + \text{nor}(v)$ , con

$$\tan : T_p \bar{M} \longrightarrow T_p M \quad \text{y} \quad \text{nor} : T_p \bar{M} \longrightarrow T_p M^\perp$$

las proyecciones ortogonales.

Si llamamos  $\mathfrak{X}(M)^\perp$  al submódulo de  $\bar{\mathfrak{X}}(M)$  cuyo vectores en cada punto pertenecen a  $T_p M^\perp$ , entonces aplicando  $\tan$  y  $\text{nor}$  en cada punto nos deja dos proyecciones ortogonales  $C^\infty(M)$ -lineales bien definidas (ya que los campos resultantes son suaves):

$$\tan : \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M) \quad \text{y} \quad \text{nor} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$$

En lo que sigue, usaremos las letras  $V, W$  para notar campos tangentes a  $M$ , y  $Z$  para campos normales.

### 1.8.1. Conexión inducida y normal

En  $\bar{M}$  ya hemos definido la conexión de Levi Civita. El propósito de esta sección es construir la *conexión inducida en  $M$*   $\bar{\nabla} : \bar{\mathfrak{X}}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \bar{\mathfrak{X}}(M)$ . Sean  $(V, X) \in \bar{\mathfrak{X}}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M)$ . Dado  $p \in M$ , tomamos  $(\bar{V}, \bar{X}) \in \bar{\mathfrak{X}}(\bar{M})^2$  extensiones locales en un entorno  $\mathfrak{U}$ . Definimos  $\bar{\nabla}_V X := (\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{X})|_{\mathfrak{U} \cap M}$ .

**Lema 10.**  $\bar{\nabla}_V X \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$  está bien definido.

*Demostración.* Basta ver que  $\bar{\nabla}_V X$  no depende de la elección de las extensiones  $\bar{V}, \bar{X}$ . En una carta  $\mathfrak{U}$ , escribimos  $\bar{X} = \sum f^i \partial_i$ . Luego  $\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{X} = \sum \bar{V}(f^i) \partial_i + \sum f^i \bar{\nabla}_{\bar{V}}(\partial_i)$ . Pero en  $q \in \mathfrak{U} \cap M$ ,  $(\bar{V} f^i)(q) = V_q(f^i) = V_q(f^i|_{\mathfrak{U} \cap M})$  y  $\bar{\nabla}_{\bar{V}}(\partial_i)|_q = \bar{\nabla}_V(\partial_i)|_q$ . Por lo tanto  $\bar{\nabla}_{\bar{V}} \bar{X}$  solamente depende de  $V$  y  $X$ .  $\square$

En el caso de la conexión inducida, mantendremos la notación  $\bar{\nabla}$ . La conexión inducida cumple con las 5 propiedades análogas listadas en la Definición 10 y el Teorema 1.

**Lema 11.** Sean  $V, W \in \bar{\mathfrak{X}}(M)$ , entonces  $\nabla_V W = \tan(\bar{\nabla}_V W)$ ,  $\nabla$  la conexión de Levi Civita en  $M$ .

**Definición 28.** Se define el *tensor de forma o segunda forma fundamental* a la función  $\Pi : \bar{\mathfrak{X}}(M) \times \bar{\mathfrak{X}}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  que cumple que  $\Pi(V, W) = \text{nor}(\bar{\nabla}_V W)$ .

El tensor de forma resulta ser  $C^\infty(M)$ -bilineal y simétrico. En base a estas últimos comentarios, obtenemos la siguiente descomposición:

$$\bar{\nabla}_V W = \nabla_V W + \Pi(V, W)$$

Esta descomposición nos lleva a lo que se suele llamar **la ecuación de Gauss**:

**Teorema 2.** Sean  $V, W, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces

$$\langle R_{VW}X, Y \rangle = \langle \overline{R}_{VW}X, Y \rangle + \langle \Pi(V, X), \Pi(W, Y) \rangle - \langle \Pi(V, Y), \Pi(W, X) \rangle$$

**Corolario 2.** Si  $v, w$  son base de un plano no degenerado tangente a  $M$ , entonces

$$K(v, w) = \overline{K}(v, w) + \frac{\langle \Pi(v, v), \Pi(w, w) \rangle - \langle \Pi(v, w), \Pi(v, w) \rangle}{Q(v, w)}$$

Analicemos brevemente estos mismos conceptos aplicados a campos sobre curvas.

**Proposición 17.** Sea  $Y$  un campo tangente a  $M$  sobre una curva  $\alpha \subseteq M$ . Entonces  $\dot{Y} = Y' + \Pi(\alpha', Y)$

**Corolario 3.**  $\ddot{\alpha} = \alpha'' + \Pi(\alpha', \alpha')$

**Corolario 4.** Una curva  $\alpha \subseteq M$  es geodésica de  $M$  si y sólo si su aceleración en  $\overline{M}$  ( $\ddot{\alpha}$ ) es normal a  $M$  en todo punto.

Estos últimos dos corolarios muestran el porqué del nombre *tensor de forma*: sean  $p \in M$ ,  $v \in T_pM$  y  $\gamma$  la geodésica en  $M$  con velocidad inicial  $v$ . En  $M$ ,  $\gamma$  es recta, luego su curvatura en  $\overline{M}$  es la forzada por la curvatura misma de  $M$  en  $\overline{M}$ . Por el corolario, sabemos que  $\ddot{\gamma}(0) = \Pi(v, v)$ . Luego, para todo  $V$ ,  $\Pi$  define la forma de  $M$  en  $\overline{M}$  en cada punto  $p \in M$ .

Por ahora estudiamos la geometría de  $M$  a través de los vectores tangentes a ella. Ahora presentamos un estudio análogo, que busca deducir propiedades de la geometría de  $M$  a través del estudio de los vectores normales a ella.

**Definición 29.** La **conexión normal de  $M \subseteq \overline{M}$**  es una función  $\nabla^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  tal que, para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$  y  $Z \in \mathfrak{X}(M)^\perp$ ,

$$\nabla_V^\perp Z = \text{nor}(\overline{\nabla}_V Z)$$

A  $\nabla_V^\perp Z$  se lo llama la *derivada normal covariante de  $Z$  con respecto a  $V$* , y mide cuánto varía la normal  $Z_p$  cuando  $p$  se mueve vía  $V$ .

La derivada normal covariante cumple con propiedades similares a la de las conexiones.

**Definición 30.** Sean  $V, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , y  $\Pi$  el tensor de forma en  $M \subseteq \overline{M}$ . Se define  $\nabla_V \Pi : \mathfrak{X}(M)^2 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)^\perp$  como la función  $C^\infty(M)$ -bilineal y simétrica que cumple que

$$\nabla_V \Pi(X, Y) = \nabla_V^\perp(\Pi(X, Y)) - \Pi(\nabla_V X, Y) - \Pi(X, \nabla_X Y)$$



Así como cuando trabajamos con la conexión inducida obtuvimos la ecuación de Gauss, que describe  $\tan(\overline{R}_{VW}X)$  en términos del tensor de forma, de trabajar con la conexión normal se obtiene la **ecuación de Codazzi**:

**Proposición 18.** *Si  $V, W, X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces*

$$\text{nor}(\overline{R}_{VW}X) = (\nabla_W \Pi)(V, X) - (\nabla_V \Pi)(W, X)$$

## 1.8.2. Hipersuperficies

Una **hipersuperficie semi-Riemanniana  $M$  de  $\overline{M}$**  es una subvariedad de codimensión 1.

**Lema 12.** *Sea  $z$  un vector normal a  $M$  tal que  $\langle z, z \rangle = 0$ . Entonces  $z = 0$ .*

*Demostración.* Como  $z$  es un vector normal a  $M$  con la propiedad  $\langle z, z \rangle = 0$ ,  $z$  es perpendicular a  $T_p M$ , y a sí mismo. Como  $\text{codim}(M) = 1$ , esto implica que es perpendicular a  $T_p \overline{M}$ . Por la no degeneración del tensor métrico, tenemos que  $z = 0$ .  $\square$

**Definición 31.** *El **signo**  $\epsilon$  de una hipersuperficie  $M$  de  $\overline{M}$  es*

$$\begin{aligned} &+1 \text{ si } \langle z, z \rangle > 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0 \\ &-1 \text{ si } \langle z, z \rangle < 0 \text{ para todo vector normal } z \neq 0 \end{aligned}$$

**Definición 32.** *Sea  $U$  un campo vectorial unitario y normal a una hipersuperficie  $M$ . Definimos el **operador de forma de  $M$  en  $\overline{M}$  derivado de  $U$**  al tensor de tipo  $(1,1)$   $S$  que cumple que, para todo  $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ ,*

$$\langle S(V), W \rangle = \langle \Pi(V, W), U \rangle$$

Localmente siempre existe un campo normal unitario, y por eso  $S$  está bien definido *salvo por el signo*, ya que si en lugar de tomar  $U$  tomo  $-U$ , el signo de  $S$  cambia.

**Proposición 19.** *Sea  $S$  el operador de forma derivado de  $U$ . Entonces  $S(V) = -\overline{\nabla}_V U$  y el operador inducido  $S: T_p M \rightarrow T_p M$  es autoadjunto.*

*Demostración.* Como  $\langle U, U \rangle$  es constante,  $\langle \overline{\nabla}_V U, U \rangle = 0$ . Luego  $\overline{\nabla}_V U$  es tangente a  $M$  para todo  $V \in \mathfrak{X}(M)$ . Pero si  $W \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\langle S(V), W \rangle = \langle \Pi(V, W), U \rangle = \langle \overline{\nabla}_V W, U \rangle = \langle -\overline{\nabla}_V U, W \rangle$$

La segunda igualdad es consecuencia de que  $U$  es normal, y la tercera igualdad consecuencia de que  $\langle U, W \rangle$  es constante. Entonces, como  $g$  es no degenerado,  $S(V) = -\overline{\nabla}_V U$ , y el hecho de que el operador inducido es autoadjunto se deduce directamente de la simetría de  $\Pi$ .  $\square$

**Corolario 5.** Sea  $v, w$  una base de un plano tangente a una hipersuperficie  $M$  no degenerado,  $y \in$  el signo de  $M$ . Entonces

$$K(v, w) = \bar{K}(v, w) + \epsilon \frac{\langle Sv, v \rangle \langle Sw, w \rangle - \langle Sv, w \rangle^2}{Q(v, w)}$$

### 1.8.3. Mapas biparamétricos

Para empezar, supongamos que  $M$  es una variedad diferenciable. Sea  $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$  un abierto. Un *mapa a dos parámetros* es una función suave  $h : \mathcal{D} \rightarrow M$ . De  $h$  se obtienen dos familias de curvas paramétricas:

1. Fijo  $v = v_0$  y tengo la curva  $u \mapsto h(u, v_0)$  con velocidad  $h_u = dh(\partial_u)$ .
2. Fijo  $u = u_0$  y tengo la curva  $v \mapsto h(u_0, v)$  con velocidad  $h_v = dx(\partial_v)$ .

$h_u, h_v$  son las velocidades parciales de  $h$ , y son campos vectoriales sobre  $h$ . Si  $h$  cae dentro de una carta con coordenadas  $x^1, \dots, x^n$ , sus *funciones coordenadas*  $h^i = x^i \circ h$  son funciones a valores reales sobre  $\mathcal{D}$ . Entonces

$$h_u = \sum \frac{\partial h^i}{\partial u} \partial_i, \quad h_v = \sum \frac{\partial h^i}{\partial v} \partial_i$$

Ahora supongamos que  $M$  tiene estructura de variedad semi-Riemanniana. Si  $Z$  es un campo vectorial sobre  $h$ , definimos  $Z_u$  y  $Z_v$  como las derivadas covariantes de  $Z$  sobre las curvas de parámetros  $u$  y  $v$ , respectivamente. Explícitamente,  $Z_u(u_0, v_0)$  es la derivada covariante en  $u_0$  del campo vectorial  $u \mapsto Z(u, v_0)$  sobre la curva  $u \mapsto h(u, v_0)$ .

En coordenadas, si  $Z^i = Z \circ x^i$ , tenemos que  $Z = \sum Z^i \partial_i$ . Luego,

$$Z_u = \sum_k \left( \frac{\partial Z^k}{\partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k Z^i \frac{\partial x^j}{\partial u} \right) \partial_k$$

**Proposición 20.** Si  $h$  es un mapa a dos parámetros en una variedad semi-Riemanniana  $M$ , entonces  $h_{uv} = h_{vu}$ .

*Demostración.* Siguiendo la fórmula en coordenadas,

$$h_{uv} = \sum_k \left( \frac{\partial^2 h^k}{\partial v \partial u} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial u} \frac{\partial x^j}{\partial v} \right) \partial_k$$

Como los  $\Gamma_{ij}^k$  son simétricos en  $i, j$ , la fórmula es simétrica en  $u, v$ . □

**Proposición 21.** Si  $Z$  es un campo vectorial en  $h$ , entonces

$$Z_{uv} - Z_{vu} = R(h_u, h_v)Z$$

*Demostración.* De la fórmula en coordenadas de  $Z_u$  se calcula  $Z_{uv} - Z_{vu}$  se obtienen los componentes del tensor de curvatura como en el Lema 5. □

## CAPÍTULO 2

---

### Geometría Lorentziana

---

Luego del estudio de variedades semi-Riemannianas realizado en el capítulo 1, en este capítulo nos dedicaremos a estudiar una clase particular de estas variedades: las variedades Lorentzianas de índice 1. Una métrica en una variedad Riemanniana le da a cada espacio tangente una estructura de espacio vectorial con producto interno, linealmente isométrico a  $\mathbb{R}^n$ , mientras que una métrica en una variedad de Lorentz dota a cada espacio tangente de una estructura que lo hace linealmente isométrico al espacio de Minkowski  $\mathbb{R}_1^n$  (recordemos que el espacio de Minkowski se suele definir como un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial junto con una forma bilineal no degenerada, simétrica con signatura  $(-, + \dots, +)$ ).

En este capítulo daremos los resultados básicos que se obtienen en estas geometrías, prestando especial énfasis en la construcción de una estructura causal en una variedad de Lorentz. Lo estudiado en este capítulo se retomará en el capítulo 4 para estudiar más profundamente ciertos aspectos topológicos y geométricos que surgen naturalmente en variedades de Lorentz, que son la base desde donde se construyen los teoremas de singularidad.

Antes de comenzar con el estudio local, enunciaremos el lema de Gauss, uno de los resultados más útiles a la hora de estudiar la geometría local de variedades semi-Riemannianas, ya que nos da cierta intuición de cómo se comporta la función exponencial en un entorno de un punto  $p \in M$ : logra describir a la función exponencial  $exp_p$  como una isometría parcial cuyas distorsiones se encuentran en direcciones ortogonales a las direcciones radiales en  $T_p M$ . Además, la longitud de los vectores radiales se preserva. La demostración del mismo se puede encontrar en [3].

**Lema 13** (Gauss). Sea  $p \in M$  y  $v \in T_p M$  tal que  $\exp_p v$  está definida. Sea  $w \in T_p M \simeq T_v(T_p M)$ . Entonces

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

## 2.1. Entornos convexos

Sea  $M$  una variedad semmi-Riemanniana, en principio completa. El conjunto de funciones exponenciales  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  induce una función exponencial global  $\exp : TM \rightarrow M$ . Si  $\pi : TM \rightarrow M$  es la proyección canónica, se define  $E : TM \rightarrow M \times M$  como  $E(v) = (\pi(v), \exp(v))$ . Si  $M$  no fuera completa, llamamos  $\mathcal{D} := \{v \in TM \text{ tal que } \gamma_v \text{ está definida por lo menos en el intervalo } [0, 1]\}$  al dominio máximo de definición de  $\exp$ , y resulta ser el dominio máximo de definición de  $E$ . Luego,  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$  es el dominio máximo de definición de  $\exp_p$ . Tanto  $\mathcal{D} \subseteq TM$  como  $\mathcal{D}_p \subseteq T_p M$  son abiertos, y  $\mathcal{D}_p$  resulta ser estrellado alrededor del 0.

**Definición 33.** Sea  $M$  una variedad semi-Riemanniana, y  $\mathcal{C} \subseteq M$  un abierto. A  $\mathcal{C}$  se lo llama **convexo** si es un entorno normal de cada uno de sus puntos.

**Lema 14.** Si  $\exp_p : \mathcal{D}_p \rightarrow M$  es no singular en  $x \in \mathcal{D}_p$ , entonces  $E : \mathcal{D} \rightarrow M \times M$  es no singular en  $x$ .

*Demostración.* Supongamos que  $dE(v) = 0$  para  $v \in T_x(TM)$ . Sea  $\pi : TM \rightarrow M$  la proyección canónica, y  $\pi_1 : M \times M \rightarrow M$  la proyección a la primera coordenada. Tenemos que  $\pi_1 \circ E = \pi$ , entonces  $d\pi(v) = d\pi_1(dE(v)) = 0$ . Luego  $v$  debe ser tangente a  $T_p M$ , con  $p = \pi(x)$ . Pero  $E|_{T_p M} \simeq \exp_p$  con la identificación dada por el difeomorfismo  $p \times M \simeq M$ . Por lo tanto,  $d\exp_p(v) = 0$ , que por hipótesis implica que  $v = 0$ , y  $E$  resulta ser no singular en  $x$ .  $\square$

**Observación 6.** Como  $d\exp_p$  es siempre no singular en  $0 \in T_p M \subseteq TM$ , entonces, por el teorema de la función inversa,  $E$  resulta ser un difeomorfismo entre algún entorno de  $0 \in TM$  y algún entorno de  $(p, p) \in M \times M$ .

**Proposición 22.** Todo punto  $p \in M$  tiene un entorno convexo.

*Demostración.* Sea  $(\mathcal{V}, \xi = (x^1, \dots, x^n))$  un entorno normal de  $p \in \mathcal{V}$ . Si  $N = \sum (x^i)^2$ , para alguna  $\delta > 0$  suficientemente chica,  $\mathcal{V}(\delta) = \{p \in \mathcal{V} : N(p) < \delta\}$  es un entorno de  $p$  difeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^n$ . Por la observación anterior, quizás achicando  $\delta$ , obtenemos que  $E$  es un difeomorfismo de un entorno  $\mathcal{W} \subseteq TM$  del  $0 \in T_p M$  con  $\mathcal{V}(\delta) \times \mathcal{V}(\delta)$ .

Sea  $B$  el (0,2)-tensor cuyas componentes son  $\delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k$ . Como las coordenadas son normales, en  $p$  los símbolos de Christoffel se anulan, y luego  $B$  es definida

positiva en  $p$ . Reduciendo  $\delta$  si fuera necesario,  $B$  es positivo en  $\mathcal{V}(\delta)$ . Afirmamos que  $\mathcal{U} = \mathcal{V}(\delta)$  es un entorno normal de cada punto  $q \in \mathcal{U}$ .

Sea  $\mathcal{W}_q = \mathcal{W} \cap T_q M$ . Por construcción,  $E|_{\mathcal{W}}$  es un difeomorfismo en  $q \times \mathcal{U}$ , luego  $exp_q|_{\mathcal{W}_q}$  es un difeomorfismo en  $\mathcal{U}$ .

Falta probar que  $\mathcal{W}_q$  es estrellado alrededor del 0. Si  $r \in \mathcal{U}$ ,  $r \neq q$ , defino  $v = E^{-1}(q, r) \in \mathcal{W}_q$  y  $\sigma = \gamma_v|_{[0,1]}$  es una geodésica que va desde  $q$  hasta  $r$ . Si  $\sigma$  se mantiene dentro de  $\mathcal{U}$  entonces la demostración de la Proposición 9 muestra que  $tv \in \mathcal{W}_q$  para  $t \in [0, 1]$ . Luego,  $\mathcal{W}_q$  sería estrellado.

Falta probar entonces que  $\sigma \subseteq \mathcal{U}$  Supongamos que no. Como  $N(q), N(r) < \delta$ , la función  $N \circ \sigma$  debe tener un máximo en un punto  $t_0 \in (0, 1)$ . Para no recargar la notación, notaremos  $x^i$  a  $x^i \circ \sigma$ , y calculamos

$$\frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2} = 2 \sum \left\{ \left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 + x^i \frac{d^2(x^i)}{dt^2} \right\}$$

Por la fórmula de las geodésicas en coordenadas locales, tenemos que

$$\sum_k x^k \frac{d^2(x^k)}{dt^2} = - \sum_{i,j,k} x^k \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

Además, escribimos

$$\left( \frac{dx^i}{dt} \right)^2 = \sum_j \delta_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

Entonces nos queda

$$\frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2} = 2 \sum_{i,j} \left\{ \delta_{ij} - \sum_k \Gamma_{ij}^k x^k \right\} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}$$

Recordando que  $\sigma' = \sum \frac{dx^i}{dt} \partial_i$ , nos queda que

$$\frac{d^2(N \circ \sigma)}{dt^2}(t_0) = 2B(\sigma'(t_0), \sigma'(t_0)) > 0$$

lo que contradice que  $t_0$  es un máximo.  $\square$

**Definición 34.** En una variedad de Lorentz, se suele usar la letra  $L$  para definir a la función que a cada curva le asigna su **longitud**. O sea, si  $\alpha$  es una curva, notamos  $|\dot{\alpha}| = |\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle|^{1/2}$  y  $L(\alpha) = \int_0^1 |\dot{\alpha}| dt$ . Si la curva es espacial nos queda la definición de longitud que se usa en geometría Riemanniana.

**Definición 35.** Si  $p, q$  son punto en un entorno convexo  $\mathcal{C}$  y  $\sigma_{pq}$  en  $\mathcal{C}$  es la geodésica que los une, se denomina **vector desplazamiento** a  $\sigma'_{pq}(0) \in T_p M$  y se lo nota  $\vec{p}\vec{q}$ .

**Observación 7.** 1. La aplicación  $\nabla : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow TM$  definida por  $\nabla(p, q) = \vec{p}\vec{q}$  es suave.

2. Por las propiedades de la exponencial,  $L(\sigma_{pq}) = |\vec{p}\vec{q}|$ .

## 2.2. Carácter causal

Comenzaremos estudiando los espacios tangentes a una variedad de Lorentz. Definimos un *espacio vectorial de Lorentz* como un espacio de producto escalar de índice 1 y dimensión mayor o igual a 2. Buscamos extender la noción de carácter causal definida en vectores (Definición 8) a subespacios vectoriales.

Sea  $W$  un subespacio de un espacio de Lorentz  $V$ , con  $g$  el producto escalar de  $V$ . Hay tres posibilidades mutuamente excluyentes:

1.  $g|_W$  es definida positiva, y esto le da a  $W$  la estructura de espacio con producto interno. A los  $W$  que cumplen con esto se los llama *espaciales*.
2.  $g|_W$  es no degenerada de índice 1. A estos  $W$  se los llama *temporales*.
3.  $g|_W$  es degenerada. A estos  $W$  se los llama *lumínicos o nulos*.

El grupo donde cae  $W$  determina su *carácter causal*, y es consistente con lo definido para vectores. Recordamos que al vector cero se lo considera espacial.

**Lema 15.** *Si  $z$  es temporal en un espacio vectorial de Lorentz  $V$ , entonces  $z^\perp$  es espacial y  $V = \langle z \rangle \oplus z^\perp$ . Más aún, un subespacio  $W$  es temporal si y sólo si  $W^\perp$  es espacial.*

Ahora veremos dos resultados que nos permiten identificar el carácter causal de un subespacio  $W$  en un espacio vectorial de Lorentz  $V$  de dimensión  $\geq 2$ .

**Lema 16.** *Son equivalentes:*

1.  $W$  es temporal.
2.  $W$  contiene dos vectores nulos linealmente independientes.
3.  $W$  contiene un vector temporal.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sea  $e_1, \dots, e_n$  una base ortonormal de  $W$  con  $e_1$  el vector temporal. Entonces  $e_1 \pm e_2$  son vectores nulos linealmente independientes.

(2)  $\Rightarrow$  (3): primero afirmamos que dos vectores nulos y ortogonales deben ser colineales. Supongamos que  $x, y$  son nulos, ortogonales y linealmente independientes. Entonces generan un subespacio  $L$  de dimensión 2, que, salvo el 0, consta totalmente de vectores nulos. Pero por el Lema 15,  $V$  contiene un subespacio espacial  $S$  de dimensión  $(n-1)$ . Por dimensión,  $L \cap S \neq 0$ , que es una contradicción. En base a este resultado, si  $u, v$  son nulos y linealmente independientes, entonces alguno de los vectores  $u \pm v$  es temporal.

(3)  $\Rightarrow$  (1): si  $z \in W$  es temporal,  $z^\perp$  es espacial, luego  $W^\perp \subseteq z^\perp$  es espacial. Como  $W = (W^\perp)^\perp$ ,  $W$  es temporal.  $\square$

**Lema 17.** *Son equivalentes:*

1.  $W$  es lumínico.
2.  $W$  contiene un vector nulo pero no un vector temporal.
3.  $W \cap \Lambda = L - 0$ , con  $\Lambda = \{v \in V : g(v, v) = 0\}$  el cono nulo de  $V$  y  $L$  un subespacio de dimensión 1.

*Demostración.* (1)  $\Rightarrow$  (2): como  $W$  es lumínico debe contener un vector nulo. Por el lema previo, no puede contener un vector temporal.

(2)  $\Rightarrow$  (3): como  $W$  contiene un vector nulo,  $W \cap \Lambda \neq \emptyset$ . Por el lema previo, si hubiera otro vector nulo linealmente independiente,  $W$  debería contener un vector temporal.

(3)  $\Rightarrow$  (1): por el lema previo,  $W$  no puede ser temporal, y claramente no puede ser espacial. Luego es lumínico.  $\square$

Si tenemos una subvariedad  $P$  en una variedad de Lorentz  $M$  tal que para todo  $p \in P$  el subespacio  $T_p P \subseteq T_p M$  tiene el mismo carácter causal, entonces se le atribuye ese carácter causal a  $P$  mismo.

## 2.3. Conos temporales

Sea  $\mathcal{T}$  el conjunto de vectores temporales de un espacio vectorial de Lorentz  $V$ . Para  $u \in \mathcal{T}$ , se define

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle < 0\}$$

al cono temporal de  $V$  que contiene a  $u$ . El cono opuesto es

$$C(-u) = \{v \in \mathcal{T} : \langle u, v \rangle > 0\}$$

Como  $u^\perp$  es espacial,  $\mathcal{T} = C(u) \cup C(-u)$ , y la unión es disjunta.

**Lema 18.** *Dos vectores  $v, w$  temporales en un espacio vectorial de Lorentz están en el mismo cono temporal si y sólo si  $\langle v, w \rangle < 0$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $v \in C(u)$ . Veamos que  $w \in C(u)$  si y sólo si  $\langle v, w \rangle < 0$ . Como  $C(u/|u|) = C(u)$ , suponemos que  $u$  es unitario.

Escribimos  $v = au + \vec{v}$ ,  $w = bu + \vec{w}$ , con  $\vec{v}, \vec{w} \in u^\perp$ . Como son vectores temporales, sabemos que  $|a| > |\vec{v}|$  y  $|b| > |\vec{w}|$ . Tenemos que  $\langle v, w \rangle = -ab + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ , y, por Cauchy-Schwartz en vectores espaciales,  $|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}| |\vec{w}| < |ab|$ . Como  $v \in C(u)$ ,  $a > 0$ . Luego  $sg(\langle v, w \rangle) = sg(-ab) = sg(b)$ , lo que termina la prueba.  $\square$

**Observación 8.** *Notar que este lema implica que*

$$u \in C(v) \Leftrightarrow v \in C(u) \Leftrightarrow C(u) = C(v)$$

. Además, los conos temporales son convexos: si  $v, w \in C(u)$  y  $(a, b) \neq (0, 0)$ ,  $av + bw \in C(u)$ .

La desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad triangular valen en espacios con producto interno. Sin embargo, hay propiedades análogas para vectores temporales.

**Proposición 23.**  *$v, w$  son vectores en un espacio vectorial de Lorentz. Entonces*

1.  $|\langle v, w \rangle| \geq |v||w|$  y la igualdad vale si y sólo si son colineales.
2. Si  $v, w$  están en el mismo cono temporal, entonces existe un único número  $\varphi \geq 0$ , llamado ángulo hiperbólico entre  $v$  y  $w$ , que cumple que

$$\langle v, w \rangle = -|v||w|\cosh(\varphi)$$

*Demostración.* Escribimos  $w = av + \vec{w}$  con  $\vec{w} \in v^\perp$ . Tenemos que

$$0 > \langle w, w \rangle = a^2\langle v, v \rangle + \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle$$

Luego, como  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle \geq 0$  y  $\langle v, v \rangle < 0$ ,

$$\langle v, w \rangle^2 = a^2\langle v, v \rangle^2 = (\langle w, w \rangle - \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle)\langle v, v \rangle \geq \langle w, w \rangle\langle v, v \rangle = |w|^2|v|^2$$

Es claro que la igualdad vale si y sólo si  $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 0$ , que es equivalente a que  $\vec{w} = 0$  (porque  $\vec{w}$  es espacial), o sea,  $w = av$ .

La segunda proposición es clara si notamos que  $\langle v, w \rangle < 0$ , entonces  $\frac{-\langle v, w \rangle}{|v||w|} \geq 1$ .  $\square$

**Corolario 6.** *Si  $v, w$  son vectores temporales en un mismo cono temporal, entonces  $|v| + |w| \leq |v + w|$  y vale la igualdad si y sólo si son colineales.*

*Demostración.* Por Cauchy-Schwartz,  $|v||w| \leq -\langle v, w \rangle$ . Luego

$$(|v| + |w|)^2 = |v|^2 + 2|v||w| + |w|^2 \leq -(v + w, v + w) = |v + w|^2$$

y la igualdad se da si y sólo si  $|v||w| = -\langle v, w \rangle = |\langle v, w \rangle|$ , luego es equivalente a que sean colineales (por Cauchy-Schwartz).  $\square$

**Observación 9.** *Notar que esta proposición nos dice que en un espacio vectorial de Lorentz, el camino más corto entre dos puntos ya no es una recta, y que si uno los dos puntos con un camino que 'dobla', este camino resulta más corto que la recta.*



## 2.4. Orientación temporal

En la última sección de este capítulo estudiaremos ciertas propiedades de los espacios vectoriales de Lorentz, preparándonos para una pregunta sobre la geometría global de una variedad de Lorentz. En cada  $T_pM$  tenemos dos conos temporales, a quien llamaremos  $C_p^+$  y  $C_p^-$ , pero no tenemos, a priori, una forma intrínseca de distinguir uno del otro. Si pudiéramos hacerlo, se dice que elegimos una *orientación temporal* de  $T_pM$ . La pregunta que nos hacemos es: ¿podemos orientar temporalmente cada  $T_pM$  de forma continua en  $p$ ? O sea, ¿existe una forma continua de diferenciar las nociones de pasado y futuro globalmente?

Sea  $\tau$  una función que a cada  $p \in M$  le asigna un cono temporal en  $T_pM$ .  $\tau$  es suave en cada  $p$  si existe un campo vectorial  $X$  en un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$  tal que  $X_q \in \tau_q$  para cada  $q \in \mathcal{U}$ . A una función con estas propiedades se la llama *orientación temporal de  $M$* .

**Definición 36.** Una variedad de Lorentz  $M$  se dice **temporalmente orientable** si admite una orientación temporal. Al cono elegido se lo llama **futuro**, y al otro se lo llama **pasado**. Se dice que la asignación  $p \xrightarrow{\tau_p} C_p^+$  dota a la variedad  $M$  de una **estructura causal**.

**Teorema 3.** Una variedad de Lorentz  $M$  es temporalmente orientable si y sólo si existe  $X \in \mathfrak{X}(M)$  temporal.

*Demostración.* Si existe tal campo  $X$ , entonces la función que a cada  $p$  le asigna el cono temporal que contiene a  $X_p$  nos da una orientación temporal.

Sea  $\tau$  una orientación temporal de  $M$ . En cada  $p \in M$ , tenemos un entorno  $\mathcal{U}$  y un campo  $X^{\mathcal{U}}$  definido en él tal que  $X_q^{\mathcal{U}} \in \tau_q$ . Tomamos  $\{f_i : i \in I\}$  una partición de la unidad subordinada al cubrimiento de  $M$  por estos entornos. Luego, el soporte de cada  $f_i$  está contenido en  $\mathcal{U}_i$ . Como las  $f_i$  son no negativas y los conos temporales son convexos, el campo  $X = \sum_{i \in I} f_i X^{\mathcal{U}_i}$  es temporal.  $\square$

**Observación 10.** La orientación temporal no tiene relación con el concepto de orientación de una variedad diferenciable, en el sentido que ninguno de ambos conceptos implica el otro. Por ejemplo, si  $M$  es la cinta de Möbius, sabemos que no es orientable como variedad diferenciable. La métrica  $g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx$  le da estructura de variedad de Lorentz no temporalmente orientable, mientras que la métrica  $h = dt \otimes dt - dx \otimes dx$  la hace temporalmente orientable.

Para terminar este capítulo, enunciaremos un resultado que nos describe qué variedades diferenciables admiten una métrica de Lorentz. Comenzaremos probando el siguiente lema:

**Lema 19.** *Sea  $U$  un campo vectorial unitario en una variedad Riemanniana  $(M, g)$ . Entonces  $\bar{g} = g - 2U^* \otimes U^*$  es una métrica de Lorentz en  $M$ , y  $U$  resulta ser temporal, luego  $(M, \bar{g})$  es temporalmente orientable.*

*Demostración.* Por definición,  $U^*(X) = g(U, X)$  para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Localmente, existe campos  $E_2, \dots, E_n$  tal que  $U, E_2, \dots, E_n$  es un marco ortonormal con respecto a  $g$ . Luego  $\bar{g}(E_i, E_j) = g(E_i, E_j) = \delta_{ij}$ ,  $\bar{g}(U, E_i) = g(U, E_i) = 0$  y  $\bar{g}(U, U) = -1$ . Por lo tanto,  $\bar{g}$  es una métrica de Lorentz con  $U$  un campo temporal. Por el Teorema 3,  $M$  es temporalmente orientable.  $\square$

Ahora enunciamos dos teoremas. El primero fue probado por Milnor y el segundo fue probado por Hopf en el año 1925.

**Teorema 4.**

1. *Una variedad diferenciable  $M$  no compacta siempre admite un campo vectorial suave nunca nulo.*
2. *Si  $M$  es compacta y  $\mathcal{X}(M) = 0$ , entonces admite un campo vectorial suave nunca nulo.*

Si tenemos un campo vectorial nunca nulo, lo normalizamos y obtenemos un campo unitario en  $M$ . Sabemos que a cualquier variedad diferenciable le podemos dar una estructura de variedad Riemanniana. Usando el Lema 19 y el Teorema 4, obtenemos que si  $M$  es no compacta o es compacta y  $\mathcal{X}(M) = 0$ , entonces admite una métrica Lorentziana (más aún, admite una métrica Lorentziana que la hace temporalmente orientable).

Si este resultado no fuera suficiente, vale la vuelta. O sea, si  $M$  es una variedad diferenciable que admite una métrica de Lorentz, entonces es no compacta, o es compacta y  $\mathcal{X}(M) = 0$ .

---

## Campos de Jacobi y cálculo de variaciones

---

En este capítulo estudiaremos los campos de Jacobi e introduciremos los primeros conceptos relacionados al cálculo variacional, que nos serán de gran utilidad al estudiar cómo varían las longitudes de curvas (en particular, geodésicas) ante pequeños cambios. En este capítulo nos basamos en los capítulos 8 y 10 del libro [15].

### 3.1. Campos de Jacobi

Nuestro primero objetivo será definir un método para comparar curvas que se encuentran *cercanas*.

**Definición 37.** Una variación de un segmento de curva  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es un mapa biparamétrico  $x : [a, b] \times (-\delta, \delta) \rightarrow M$  tal que  $x(t, 0) = \alpha(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ .

Llamaremos *longitudinales* a las curvas de la forma  $x(t, \cdot)$  y *transversales* a las de la forma  $x(\cdot, s)$ . Además, llamaremos *campo variacional* a  $V(t) = x_s(t, 0)$ . Si todas las curvas longitudinales son geodésicas, a  $x$  se lo llama una *variación geodésica*.

**Definición 38.** Si  $\gamma$  es una geodésica, sea  $Y$  un campo sobre la misma. Diremos que  $Y$  es un campo de Jacobi si satisface la ecuación diferencial de Jacobi

$$Y'' = R_{Y, \gamma'}(\gamma')$$

**Lema 20.** *El campo variacional de una variación geodésica es un campo de Jacobi.*

*Demostración.* Como cada curva longitudinal es una geodésica, obtenemos que  $x_{tt} = 0$ . Por las Proposiciones 20 y 21,

$$x_{stt} = x_{tst} = x_{tts} + R_{x_s, x_t} x_t = R_{x_s, x_t} x_t$$

Por lo tanto  $x_s$  es un campo de Jacobi en todas las curvas longitudinales, y en particular  $Y(t) = x_s(t, 0)$  lo es.  $\square$

El concepto de campo de Jacobi tiene una interpretación física. Si consideramos una variación geodésica  $x$  como una familia a un parámetro de partículas en caída libre, entonces el campo  $V$  nos da la posición relativa a  $\gamma$  de las partículas cercanas,  $V'$  la velocidad y  $V''$  la aceleración. Si a cada partícula se le asigna masa unitaria, la ecuación de Jacobi

$$Y'' = R_{Y, \gamma'}(\gamma')$$

se puede interpretar como la segunda ley de Newton, con  $R_{Y, \gamma'}$  cumpliendo el rol de la fuerza.

**Lema 21.** *Sea  $\gamma$  una geodésica con  $\gamma(0) = p$  y  $v, w \in T_p M$ . Entonces existe un único campo de Jacobi  $Y$  en  $\gamma$  tal que  $Y(0) = v$  y  $Y'(0) = w$*

*Demostración.* Sea  $E_1, \dots, E_n$  un marco paralelo en  $\gamma$ , y llamamos  $Y = \sum y^i E_i$ . Si llamamos  $v^i$  y  $w^i$  a las coordenadas de  $v$  y  $w$  en ese marco (evaluado en 0), entonces

$$Y(0) = v \Leftrightarrow y^i(0) = v^i$$

$$Y'(0) = \frac{dy^i}{dr}(0) = w^i$$

Como  $\gamma'$  es paralelo,  $\gamma' = \sum a^i E_i$ , con coeficientes constantes. Por lo tanto, como queremos que  $Y$  sea un campo de Jacobi, la ecuación de Jacobi

$$Y'' = R_{Y, \gamma'}(\gamma')$$

toma la siguiente forma (coordenada a coordenada):

$$\frac{d^2 y^m}{dr^2} = \sum_{ijk} R_{ijk}^m a^i y^j a^k$$

Tomando como condiciones iniciales las que describimos anteriormente para  $Y(0)$  y  $Y'(0)$ , obtenemos un sistema de ecuaciones diferenciales que tienen solución única en  $\gamma$ .  $\square$

**Observación 11.** Como la ecuación de Jacobi es lineal el conjunto de campos de Jacobi es un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial. El lema muestra que la dimensión de este espacio es  $2n$ .

**Proposición 24.** Sea  $p \in M$  y  $x \in T_pM$ . Si  $v \in T_x(T_pM)$ , entonces

$$d_x \exp_p(v) = V(1)$$

con  $V$  el único campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma = \gamma_x(t) = \exp_p(tx)$  con condiciones iniciales  $V(0) = 0$ ,  $V'(0) = v$ .

*Demostración.* Llamamos  $f(t) = \exp_p(t(x + sv)) = \gamma_{x+sv}(t)$ , que es una variación geodésica de  $\gamma_x|_{[0,1]}$ . Consideramos el campo variacional  $V(t) = f_s(t, 0) = d_x \exp_p(tv)$ , que es un campo de Jacobi a lo largo de  $\gamma_x$ , y además  $V(1) = d_x \exp_p(v)$ . Veamos que este campo es efectivamente el que estamos buscando. Como la curva  $f(0, s) \equiv p$ ,  $V(0) = 0$  y  $V'(0) = f_{st}(0, 0) = f_{ts}(0, 0)$ . Como  $f_t(t, s) = d_{t(x+sv)} \exp_p(x + sv)$ ,  $f_t(0, s) = d_0 \exp_p(x + sv) = x + sv$  que implica que  $f_{ts}(0, s) = v$ . Tomando  $s = 0$ , tenemos que  $V'(0) = v$ .  $\square$

**Definición 39.** Un campo vectorial  $Y$  sobre una curva  $\alpha : I \rightarrow M$  se dice tangente si  $Y = f\alpha'$  en cada punto para cierta función  $f$  y se dice perpendicular si  $\langle Y, \alpha' \rangle = 0$ .

Esto nos da una descomposición única para cada campo  $Y$  sobre  $\alpha$  de la forma  $Y = Y^\perp + Y^\top$ , con el primer término representando la parte perpendicular y el segundo representando la parte tangente. Si  $\gamma$  es geodésica, también tenemos que  $Y \perp \gamma \Rightarrow Y' \perp \gamma$ , y análogamente para campos tangentes. Por lo tanto derivar conmuta tanto con la restricción al campo tangente como con la restricción al campo perpendicular.

**Proposición 25.** Sea  $Y$  un campo de Jacobi sobre una geodésica  $\gamma$ . Entonces tenemos las siguientes equivalencias:

1.  $Y \perp \gamma$
2. existen  $a \neq b$  tal que  $Y(a) \perp \gamma$ ,  $Y(b) \perp \gamma$
3. existe  $a$  tal que  $Y(a) \perp \gamma$ ,  $Y(a) \perp \gamma'$

*Demostración.* Sabemos que la derivada covariante de la geodésica  $\gamma$  se anula, por lo tanto  $\frac{d^2}{dt^2} \langle Y, \gamma' \rangle = \langle Y'', \gamma' \rangle$ . Como  $Y$  es de Jacobi,  $Y'' = R_{Y, \gamma'} \gamma'$ . Por las simetrías del tensor de curvatura, sabemos que  $R_{VV} = 0$ . Entonces  $\frac{d^2}{dt^2} \langle Y, \gamma' \rangle = \langle R_{Y \gamma'} \gamma', \gamma' \rangle = \langle R_{\gamma' \gamma'} Y, \gamma' \rangle = 0$ . Esto implica que  $\langle Y, \gamma' \rangle = As + B$ , y desde aquí se deduce la proposición.  $\square$

## 3.2. Primera y segunda variación

Supongamos que tenemos una variación  $x : [a, b] \times (-\lambda, \lambda) \rightarrow M$ , y para cada  $v \in (-\lambda, \lambda)$  llamamos  $L_x(s)$  a la longitud de la curva  $t \mapsto x(t, s)$ . La función  $L_x$  toma valores en  $\mathbb{R}$  y cumple que  $L_x(0)$  es la longitud de  $\alpha$ . Nuestro objetivo en esta sección será encontrar fórmulas para las llamadas *primera y segunda variación de la longitud de arco en  $x$* , que se definen, respectivamente, como

$$L'(0) = \left. \frac{dL}{ds} \right|_{s=0}$$

$$L''(0) = \left. \frac{d^2L}{ds^2} \right|_{s=0}$$

En esta sección nos interesarán las curvas  $\alpha$  que cumplen que  $|\alpha'| > 0$ . Notaremos  $\varepsilon = \text{sgn}\langle \alpha', \alpha' \rangle = \pm 1$ .

**Lema 22.** *Sea  $x$  una variación de  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  con  $|\alpha'| > 0$  y  $V$  el campo vectorial variacional. Entonces*

$$L'(0) = \varepsilon \int_a^b \left\langle \frac{\alpha'}{|\alpha'|}, V' \right\rangle dt$$

*Demostración.* Sabemos que  $L(s) = \int_a^b |x_t(t, s)| dt$ . Si tomamos  $(-\lambda, \lambda)$  es lo suficientemente chico, nos podemos asegurar de que  $|x_t|$  es positivo. Entonces

$$L'(0) = \int_a^b \frac{d}{ds} |x_t| dt$$

Como  $|x_t| = (\varepsilon \langle x_t, x_t \rangle)^{\frac{1}{2}}$  y  $x_{ts} = x_{st}$ , tenemos que

$$\frac{d}{ds} |x_t| = \frac{2\varepsilon \langle x_t, x_{ts} \rangle}{2(\varepsilon \langle x_t, x_t \rangle)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\varepsilon \langle x_t, x_{ts} \rangle}{|x_t|}$$

Si  $s = 0$ ,  $x_t(t, 0) = \alpha'(t)$  y  $x_s(t, 0) = V(t)$ . Luego  $x_{st}(t, 0) = V'(t)$ , lo que implica el resultado.  $\square$

Una variación  $x$  de una curva suave a trozos  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  es en si misma suave a trozos si  $x$  es continua y para cierta partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  la restricción de  $x$  a  $[t_i, t_{i+1}] \times (-\delta, \delta)$  es suave. Sin perder generalidad podemos asumir que la partición para  $\alpha$  y para  $x$  son la misma. El campo variacional de  $x$   $V$  es siempre suave a trozos, pero el campo  $\alpha'$  tendrá saltos en cada punto de la partición. En base a esta discontinuidad, se define

$$\Delta\alpha'(t_i) = \alpha'(t_i^+) - \alpha'(t_i^-) \in T_{\alpha(t_i)}M$$

**Proposición 26** (Fórmula de la primera variación). Sea  $\alpha : [a, b] \rightarrow M$  un segmento de curva suave a trozos con velocidad constante  $c > 0$  y signo  $\varepsilon$ . Si  $x$  es una variación de  $\alpha$ , entonces

$$L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle dt - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=0}^k \langle \Delta \alpha'(t_i), V(t_i) \rangle + \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha', V \rangle \Big|_a^b$$

*Demostración.* La prueba se basa en el lema anterior e integrar por partes.  $\square$

**Corolario 7.** Un segmento de curva suave a trozos  $\alpha$  con velocidad constante  $c$  es una geodésica si y solo si  $L'_x(0) = 0$  para toda variación  $x$  con extremos fijos de  $\alpha$ .

*Demostración.* Si  $\alpha$  es geodésica,  $\alpha'' = 0$  y  $\Delta \alpha'(t_i) = 0$  para todo  $i$ . Para variaciones con extremos fijos,  $V(a) = V(b) = 0$ . Luego  $L'(0) = 0$ .

Ahora supongamos que  $L'_x(0) = 0$  para toda variación con extremos fijos  $x$ . Veamos primero que cada segmento  $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$  es geodésica. Bastaría ver que  $\alpha''(u) = 0$  para todo  $u \in [t_i, t_{i+1}]$ . Sea  $y \in T_{\alpha(u)}M$  y sea  $f$  una función chichón en  $[a, b]$  con soporte contenido en  $[u - \delta, u + \delta] \subset [t_i, t_{i+1}]$ . Sea  $Y$  el campo sobre  $\alpha$  que se obtiene al transportar paralelamente a  $y$  y sea  $V = fY$ . Consideremos la variación  $x(t, s) = \exp_{\alpha(t)}(sV(t))$ . Como  $V(a) = V(b) = 0$ , es una variación con extremos fijos cuyo campo variacional es  $V$ . Como  $L'(0) = 0$ , al fórmula de la Proposición 26 nos dice que

$$0 = \int_a^b \langle \alpha'', V \rangle dt = \int_{u-\delta}^{u+\delta} \langle \alpha'', fY \rangle dt$$

Esto vale para todo  $\delta$ ,  $y$  y  $f$ . Por lo tanto  $\langle \alpha''(u), y \rangle = 0$  para toda  $y$ , lo que implica que  $\alpha''(u) = 0$ .

Falta ver que los cortes son triviales, por lo tanto  $\alpha$  es una geodésica (no una geodésica a trozos). Como antes, tomamos un  $y \in T_{\alpha(t_i)}M$ ,  $f$  una función chichón en  $t_i$  con soporte en  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ . Para una variación con extremos fijos con campo variacional  $fY$  la fórmula de la primera variación se reduce a

$$0 = L'(0) = -\frac{\varepsilon}{c} \langle \Delta \alpha'(t_i), y \rangle$$

para  $y$  arbitrario. Luego  $\Delta \alpha'(t_i) = 0$  para todo  $i$ .  $\square$

Las fórmulas de variación son interesantes porque proveen un método para comparar los valores de  $L(s)$  con  $L(0)$  cuando  $s$  es chico. Si  $L'(0)$  fuera distinto de cero, ya se tendría toda la información necesaria para poder realizar la comparación. Si  $L'(0) = 0$ , se requiere calcular  $L''(0)$ . Por el Corolario 7, basta con estudiar el caso en el que  $\alpha$  es una geodésica.

**Definición 40.** Si  $x$  es una variación de una curva  $\alpha$ , llamaremos **campo transversal de aceleración** a  $A = x_{ss}(t, 0)$

**Teorema 5** (Fórmula de Synge para la segunda variación). Sea  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  un segmento de geodésica con velocidad  $c$  y signo  $\varepsilon$ . Sea  $x$  es una variación de  $\sigma$ ,  $V$  su campo variacional y  $A$  su campo transversal de aceleración. Entonces

$$L''(0) = \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b (\langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle) dt + \frac{\varepsilon}{c} \langle \sigma', A \rangle \Big|_a^b$$

*Demostración.* Si llamamos  $h(t, s) = |x_t(t, s)|$  tenemos que  $L(s) = \int_a^b h dt$  y  $L''(s) = \int_a^b \frac{d^2 h}{ds^2} dt$ . En la demostración del Lema 22 ya hemos probado que  $\frac{dh}{ds} = \frac{\varepsilon}{h} \langle x_t, x_{ts} \rangle$ . Por lo tanto, derivando una vez más obtenemos que

$$\frac{d^2 h}{ds^2} = \frac{\varepsilon}{h^2} \left\{ h \frac{d}{ds} \langle x_t, x_{ts} \rangle - \langle x_t, x_{ts} \rangle \frac{dh}{ds} \right\} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle x_{ts}, x_{ts} \rangle + \langle x_t, x_{tss} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle x_t, x_{ts} \rangle^2 \right\}$$

Como  $x_{ts} = x_{st}$  y  $x_{tst} = x_{sts} = R_{x_t, x_s} x_s + x_{sst}$ , obtenemos que

$$\frac{d^2 h}{ds^2} = \frac{\varepsilon}{h} \left\{ \langle x_{st}, x_{st} \rangle + \langle x_t, R(x_t, x_s) x_s \rangle + \langle x_t, x_{sst} \rangle - \frac{\varepsilon}{h^2} \langle x_t, x_{st} \rangle^2 \right\}$$

Si evaluamos en  $s = 0$ , nos quedan las siguientes identificaciones:

$$h \mapsto c, \quad x_t \mapsto \sigma', \quad x_s \mapsto V, \quad x_{st} \mapsto V', \quad x_{ss} \mapsto A, \quad x_{sst} \mapsto A'$$

Por lo tanto,

$$\frac{d^2 h}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \langle V', V' \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle + \langle \sigma', A' \rangle - \left( \frac{\varepsilon}{c^2} \right) \langle \sigma', V' \rangle^2 \right\}$$

Para simplificar esta igualdad, notemos dos cosas:

1. Como  $\sigma$  es geodésica,  $\langle \sigma', A' \rangle = \frac{d}{dt} \langle \sigma', A \rangle$ .
  2. Como  $\frac{\sigma'}{c}$  es un campo unitario, la componente tangencial de  $V'$  es  $\varepsilon \frac{\sigma'}{c} \langle V', \frac{\sigma'}{c} \rangle$ .
- Por lo tanto

$$V' = \frac{\varepsilon}{c^2} \langle V', \sigma' \rangle \sigma' + V'^{\perp}$$

Tomando el producto de  $V'$  contra si mismo obtenemos

$$\langle V', V' \rangle = \frac{\varepsilon}{c^2} \langle V', \sigma' \rangle^2 + \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle$$

Sustituyendo,

$$\frac{d^2 h}{ds^2} \Big|_{s=0} = \frac{\varepsilon}{c} \left\{ \langle V'^{\perp}, V'^{\perp} \rangle - \langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle + \frac{d}{dt} \langle \sigma', A \rangle \right\}$$

Integramos entre  $a$  y  $b$  y obtenemos el resultado buscado.  $\square$

**Observación 12.** Si  $L'(0) = 0$  y  $L''(0) \neq 0$ , el signo de  $L''(0)$  nos dice si las curvas longitudinales cercanas son más largas o más cortas que la geodésica  $\sigma = x(\cdot, 0)$ .



### 3.3. La forma del índice

Antes de comenzar el desarrollo de la forma del índice, primero fijaremos algunas notaciones. Dados  $p, q \in M$ ,  $[0, b]$  un intervalo, notaremos

$$\Omega(p, q) = \{\alpha : [0, b] \longrightarrow M : \alpha(0) = p, \alpha(b) = q, \alpha \text{ es suave a trozos}\}$$

La idea es pensar a  $\Omega(p, q)$  como si fuera una variedad<sup>1</sup> en el siguiente sentido: si  $x$  es una variación con extremos fijos de  $\alpha \in \Omega(p, q)$ , cada curva longitudinal  $t \mapsto x(t, s)$  será un punto  $\alpha_s \in \Omega(p, q)$  y  $s \mapsto \alpha_s$  sería una curva en  $\Omega(p, q)$ . La *velocidad inicial* de  $x$  vendría dada por el campo variacional  $V$ . Como  $x$  tiene extremos fijos,  $V$  es cero en los extremos. Para completa, la analogía, recordando que  $T_p M$  se puede caracterizar como todas las velocidades iniciales de las curvas que comienzan en  $p \in M$ , tenemos la siguiente definición.

**Definición 41.** Si  $\alpha \in \Omega = \Omega(p, q)$ , el **espacio tangente a  $\Omega$  en  $\alpha$**  (notaremos  $T_\alpha \Omega$ ) es el conjunto de campos  $V$  sobre  $\alpha$  suaves a trozos tales que  $V(a) = V(b) = 0$

Cada  $V \in T_\alpha \Omega$  es el campo variacional de alguna variación  $x$  en  $\Omega$ . La función longitud  $L$  toma valores en  $\Omega$ . Manteniendo la analogía con la teoría de variedades diferenciales, buscamos darle sentido a  $V(L)$ , con  $V \in T_\alpha \Omega$ . Tomamos una variación  $x$  de  $\alpha$  y consideramos la curva  $s \mapsto \alpha_s$ . Aplicando  $L$  a esta variación obtenemos la función  $L_x$ . Por lo tanto, para mantener la analogía, definiremos  $V(L) = L'_x(0)$  (la primera variación). El Corolario 7 nos dice que las geodésicas no nulas son los puntos críticos de  $L$  en  $\Omega$ . En el caso de variedades, cuando tenemos un punto crítico, tratamos de estudiar las propiedades locales a través del Hessiano en ese punto. A continuación, definiremos la forma del índice, que juega el papel del Hessiano en este contexto.

**Definición 42.** La **forma del índice**  $I_\sigma$  de una geodésica no nula  $\sigma \in \Omega(p, q)$  es la única forma simétrica y bilinear

$$I_\sigma : T_\sigma \Omega \times T_\sigma \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que si  $V \in T_\sigma \Omega$ , entonces

$$I_\sigma(V, V) = L''_x(0),$$

donde  $x$  es cualquier variación de  $\sigma$  con extremos fijos cuyo campo variacional es  $V$ .

---

<sup>1</sup>En verdad, la mejor forma de caracterizarlo sería como una variedad de Frechet, pero no desarrollaremos la teoría de variedades de Frechet en esta tesis.

Para ver que está bien definida, hay que recordar que en una variación con extremos fijos,  $L'_x(0)$  depende solamente de  $V$ , no de  $x$ . La existencia de tal forma es consecuencia del siguiente lema.

**Lema 23.** *Si  $\sigma \in \Omega(p, q)$  es una geodésica con velocidad  $c$  y signo  $\varepsilon$ , entonces*

$$I_\sigma(V, W) = \frac{\varepsilon}{c} \int_0^b (\langle V^\perp, W^\perp \rangle - \langle R_{V\sigma'} W, \sigma' \rangle) dt$$

para toda  $V, W \in T_\sigma\Omega$ .

*Demostración.* La forma es claramente bilineal y simétrica. Por el Teorema 5, si tomamos  $V = W$  obtenemos la segunda variación.  $\square$

**Corolario 8.** *Sea  $\sigma \in \Omega(p, q)$  una geodésica a trozos no nula. Si  $\sigma$  y  $V \in T_\sigma\Omega$  tienen quiebres en  $t_1 < \dots < t_k$ , entonces*

$$I_\sigma(V, W) = -\frac{\varepsilon}{c} \int_0^b \langle V''^\perp - R_{V\sigma'} \sigma', W^\perp \rangle dt - \frac{\varepsilon}{c} \sum_{i=1}^k \langle \Delta V^\perp, W^\perp \rangle(t_i)$$

**Observación 13.** *Notar que si  $V$  es un campo de Jacobi que se anula en dos puntos,  $I_\sigma(V, V) = 0$ .*

### 3.4. Puntos conjugados

**Definición 43.** *Sea  $\sigma$  una geodésica. Los puntos  $\sigma(a), \sigma(b)$  son **conjugados** si existe un campo de Jacobi no trivial  $J$  sobre  $\sigma$  tal que  $J(a) = J(b) = 0$ . Notaremos  $\mathcal{J}_{ab}$  al conjunto de campos de Jacobi que se anulan en  $a$  y  $b$ .*

**Observación 14.** *La Proposición 25 implica que un campo de Jacobi que cumple con la definición previa deberá ser perpendicular a la geodésica.*

**Proposición 27.** *Sea  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  una geodésica que comienza en  $p$ . Son equivalentes:*

1.  $\sigma(b)$  es un punto conjugado de  $p$  sobre  $\sigma$ .
2. Existe una variación  $x$ , con campo variacional no idénticamente cero, de geodésicas comenzando en  $p$  tal que  $x_s(b, 0) = 0$ .
3. La función exponencial  $\exp : T_p M \rightarrow M$  es singular en  $b\sigma'(0)$ . Es decir, existe un vector no nulo  $v$  tangente a  $T_p M$  en  $b\sigma'(0)$  tal que  $d_{b\sigma'(0)} \exp_p(v) = 0$ .

*Demostración.* 2 implica 1: como cada curva longitudinal es una geodésica, el campo variacional  $V$  es un campo de Jacobi que cumple  $V(b) = 0$ .

1 implica 3: Sea  $J$  un campo de Jacobi en  $\sigma$  no trivial que se anula en 0 y en  $b$  (podemos suponer que  $b = 1$ ). Sea  $v$  el vector tangente a  $T_p M$  en  $\sigma'(0)$  que corresponde canónicamente con  $J'(0) \in T_p M$ . Por la Proposición 24,  $d_{\sigma'(0)} \exp_p(v) = J(1) = 0$ . Como  $J$  es no trivial y  $J(0) = 0$ ,  $J'(0) \neq 0$ , y por lo tanto  $v \neq 0$ .

3 implica 2: Sea  $v \in T_{b\sigma'(0)} T_p M \simeq T_p M$ . De la misma forma que en la demostración de la Proposición 24, basta tomar  $x(t, s) = \exp_p(t(\sigma'(0) + sv))$ .  $\square$

### 3.5. Máximos y mínimos locales

Consideramos momentáneamente una variedad Riemanniana. Supongamos que  $\sigma \in \Omega(p, q)$  es una geodésica no nula que es más corta que las geodésicas vecinas en  $\Omega(p, q)$ , o sea,  $L(\sigma) \leq L(\tau)$ . Si  $V \in T_\sigma \Omega$ , para cualquier variación  $x$  ligada a  $V$   $L_x$  debe alcanzar un mínimo local en 0, por lo tanto  $I_\sigma(V, V) = L_x''(0) \geq 0$ . Por lo tanto,  $I_\sigma$  es semidefinida positiva. En el caso Lorentziano nos interesan las geodésicas *temporales*, y por lo tanto buscamos que la forma del índice sea semidefinida negativa, para que esta nos permita encontrar máximos locales de la función longitud.

**Teorema 6.** *Sea  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  una geodésica (temporal si la variedad es de Lorentz),  $p = \sigma(0)$  y supongamos que existe un  $r \in (0, b)$  tal que  $\sigma(r)$  es un punto conjugado de  $p$ . Entonces  $\sigma$  no minimiza la longitud entre  $\sigma(0)$  y  $\sigma(b)$  en el caso Riemanniano ni la maximiza en el caso Lorentziano.*

*Demostración.* Lo que probaremos es que la forma del índice no es semidefinida: encontraremos una dirección donde es positiva y una dirección donde es negativa. Sea  $J$  un campo de Jacobi sobre  $\sigma|_{[0, r]}$  que se anula en 0 y en  $r$ , y lo extendemos por 0 en  $\sigma|_{[r, b]}$ . El campo resulta continuo, pero su derivada puede no serlo, y su único punto de quiebre sería  $r$ . Como  $Y'(r^+) = 0$  y  $Y'(r^-) = J'(r) \neq 0$  porque el campo no es nulo, tenemos que  $\Delta Y'(r) = J'(r) \neq 0$ .

Como  $J$  es perpendicular a  $\sigma$  en 0 y en  $r$ , la Proposición 25 nos dice que  $J \perp \sigma'(r)$ . Por lo tanto, como  $\sigma$  es geodésica, obtenemos que  $J'(r) \perp \sigma'(r)$ . Tomamos  $W$  un campo perpendicular a  $\sigma$  tal que  $W(r) = \Delta Y'(r) = J'(r)$ .

Sea  $\varepsilon$  el índice de la variedad. Para comenzar, buscaremos un  $\delta$  tal que

$$\varepsilon I_\sigma(Y + \delta W, Y + \delta W) < 0$$

. Tenemos que

$$\varepsilon I_\sigma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \varepsilon \{I_\sigma(Y, Y) + 2\delta I_\sigma(Y, W) + \delta^2 I_\sigma(W, W)\}$$

La Observación 13 implica que  $I_\sigma(Y, Y) = 0$  porque  $Y$  es un campo de Jacobi que se anula en dos puntos y vale cero en su único punto de quiebre. Por el Corolario 8 tenemos que

$$\varepsilon I_\sigma(Y, W) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', W \rangle(r) = -\frac{1}{c} \langle \Delta Y', \Delta Y' \rangle(r) < 0$$

La última desigualdad es claramente cierta en el caso Riemanniano, y también lo es en el caso Lorentziano, porque el  $\Delta Y'(r) \perp \sigma'$  y  $\sigma'$  es temporal, lo que implica que  $\Delta Y'(r)$  es espacial.

Luego, si tomamos un  $\delta$  suficientemente chico, obtenemos que

$$\varepsilon I_\sigma(Y + \delta W, Y + \delta W) = \varepsilon \{2\delta I_\sigma(Y, W) + \delta^2 I_\sigma(W, W)\} < 0$$

Ahora debemos encontrar un campo  $V$  tal que  $\varepsilon I_\sigma(V, V) > 0$ . Sea  $y$  un vector normal unitario y perpendicular a  $\sigma'(0)$ , y lo extendiendo mediante transporte paralelo a un campo  $Y$  sobre  $\sigma$ . Sea  $\delta > 0$  de la forma  $\delta = b/k\pi$ , de tal forma que  $\text{sen}(u/\delta)$  sea igual a cero en 0 y en  $b$ . Definimos el campo  $V = \delta \text{sen}(u/\delta) Y \in \Omega(p, q)$ . Como  $Y$  es perpendicular a  $\sigma$ ,  $V$  también lo es.

Para simplificar la notación, supongamos que  $|\sigma'| = c = 1$ . También usaremos que

$$\langle R_{V\sigma'} V, \sigma' \rangle = K(V, \sigma') \{ \langle V, V \rangle \langle \sigma', \sigma' \rangle - \langle V, \sigma' \rangle^2 \} = K(V, \sigma') \langle V, V \rangle \varepsilon$$

Entonces

$$\begin{aligned} \varepsilon I_\sigma(V, V) &= \int_0^b \langle V', V' \rangle - K(V, \sigma') \langle V, V \rangle \varepsilon \, du \\ &= \int_0^b \{ \cos^2(u/\delta) \langle y, y \rangle - K(V, \sigma') \delta^2 \text{sen}^2(u/\delta) \varepsilon \} du \\ &= \int_0^b \{ \cos^2(u/\delta) - K(V, \sigma') \delta^2 \text{sen}^2(u/\delta) \varepsilon \} du \quad (3.1) \end{aligned}$$

Como  $K$  está acotado en  $[0, b]$ , puedo hacer que  $\delta$  sea lo suficientemente chico para que  $\varepsilon I_\sigma(V, V) > 0$  □

### 3.6. Puntos focales

En esta sección generalizaremos lo desarrollado en las dos secciones previas.

**Definición 44.** Sea  $P \subset M$  una subvariedad semi-Riemanniana,  $q \in M$ . Denotamos  $\Omega(P, q)$  al conjunto de curvas suaves a trozos  $\alpha : [0, b] \rightarrow M$  que unen  $P$  con  $q$ . Una  $(P, q)$ -variación  $x$  de  $\alpha \in \Omega(P, q)$  es una variación suave a trozos tal que todas las curvas longitudinales están en  $\Omega(P, q)$ .

**Proposición 28.** Sea  $\alpha \in \Omega(P, q)$  geodésica con  $|\alpha'| > 0$ . Entonces  $L'_x(0) = 0$  para toda variación  $x$  si y solo si  $\alpha$  es una geodésica normal a  $P$  ( $\alpha'(0) \perp P$ )

*Demostración.* Por la fórmula de la primera variación (Proposición 26),  $L'_x(0) = 0$  para cualquier variación de una geodésica normal a  $P$ .

Sean  $y \in T_{\alpha(0)}P$ ,  $V \in T_{\alpha}\Omega$  con  $V(0) = y$ . Sea  $x$  una  $(P, q)$ -variación de  $\alpha$  con campo variacional  $V$ . Como  $\alpha$  es geodésica,  $V(b) = 0$  y por hipótesis  $L'_x(0) = 0$ , tenemos que

$$0 = L'_x(0) = \frac{\varepsilon}{c} \langle \alpha'(0), y \rangle$$

y por lo tanto  $\alpha'(0) \perp P$ . □

**Definición 45.** Sea  $V$  un campo de Jacobi a lo largo de una geodésica  $\sigma$  normal a  $P$ . Se dice que  $V$  es un campo  $P$ -Jacobi si cumple que  $V(0) \in T_{\sigma(0)}P$  y  $\tan V'(0) = \Pi(V(0), \sigma'(0))$

**Definición 46.** Sea  $\sigma$  una geodésica en  $M$  normal a  $P$ . Se dice que  $\sigma(r)$  con  $r \neq 0$  es un **punto focal de  $P$  sobre  $\sigma$**  si existe un campo  $P$ -Jacobi no trivial  $J$  tal que  $J(r) = 0$ .

Los puntos focales son la generalización de los puntos conjugados.

A continuación enunciaremos propiedades relacionadas a los campos  $P$ -Jacobi y los puntos focales. El lector notará que estos son muy similares a las propiedades ya probadas para los campo de Jacobi y los puntos conjugados. Las demostraciones se pueden encontrar en el capítulo 10 de [15].

**Proposición 29.** Sea  $\sigma : [0, b] \rightarrow M$  una geodésica normal a  $P$ . Son equivalentes:

1.  $\sigma(b)$  es un punto focal de  $P$  sobre  $\sigma$ .
2. Existe una variación no trivial  $x$  de  $\sigma$  sobre geodésicas  $P$ -normales tal que  $x_s(b, 0) = 0$ .
3. La función exponencial normal  $\exp^\perp : NP \rightarrow M$  es singular en  $b\sigma'(0)$ .

**Teorema 7.** Si hay un punto focal  $\sigma(r)$  de  $P$  sobre  $\sigma$  con  $0 < r < b$ , entonces  $\sigma$  no minimiza distancias en el caso Riemanniano ni las maximiza en el caso Lorentziano.

## CAPÍTULO 4

---

### Hiperbolicidad global y causalidad

---

En este capítulo presentaremos las propiedades relativas a la estructura causal de los **espaciotiempos**, que son variedad de Lorentz temporalmente orientables. A lo largo de este capítulo llamaremos con la letra  $M$  a un espaciotiempo conexo. La teoría desarrollada en este capítulo es obra de Roger Penrose y Stephen Hawking, cuyo objetivo principal era entender porqué los modelos relativistas más básicos contenían *singularidades*. En el capítulo 6 estudiaremos en profundidad esos teoremas y veremos cómo se relacionan con lo hecho en este capítulo.

Un **camino** en  $M$  es una función continua de un intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$  con o sin borde,  $C : I \rightarrow M$ , en  $M$ . Está orientada por la orientación que da  $\mathbb{R}$ . Un camino es diferenciable a derecha (izquierda) si las funciones que la representan en coordenadas en  $M$  son diferenciables a derecha (izquierda). Un camino es **diferenciable a trozos** si es diferenciable a izquierda y a derecha y tal que en todo compacto  $[a, b] \subseteq I$  los vectores tangentes a izquierda y derecha coinciden excepto en a lo sumo finitos puntos.

Una **curva** es la imagen de un camino en  $M$ . Está orientada por la parametrización y es invariante por reparametrizaciones que preservan orientación; es más, a cada curva se la puede considerar como la clase de equivalencia de caminos donde un camino  $C$  se identifica con  $D$  si y solo si hay una reparametrización que convierte a  $C$  en  $D$ . Si  $I = (a, \dots)$ , decimos que la curva tiene un **punto final a izquierda**  $C(a)$  si  $C(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow a} C(a)$  en la topología de  $M$ . Se define análogamente el punto final a derecha. Una curva con un punto final se dice que es **extendible**, ya que existe un embedding de la curva en una curva más grande.

## 4.1. Cronología y causalidad

**Definición 47.** Un *camino temporal dirigido al futuro* (respectivamente, nulo o causal)  $C : I \rightarrow M$  es un camino diferenciable a trozos tal que los vectores tangentes a derecha están, para cada  $\lambda \in I$ , en el cono temporal futuro (respectivamente, nulo o causal). Los *caminos temporales dirigidos al pasado* se definen de manera análoga cambiando derecha por izquierda. Las curvas temporales, nulas o causales son imágenes en  $M$  de caminos temporales, nulas o causales.

**Observación 15.** Como no consideramos al vector cero como nulo, una curva causal nunca se reduce a un punto.

**Definición 48.** Un punto  $y \in M$  se dice que está en el pasado (futuro) cronológico de un punto  $x \in M$  si existe una curva temporal dirigida al futuro (pasado) que une  $y$  con  $x$ . Esta relación la notaremos  $y < x$ .

El **pasado cronológico** de un punto  $x$  es el conjunto de los puntos  $y$  que están en el pasado cronológico de  $x$ . A este conjunto lo notaremos  $I^-(x) = \{y \in M : y < x\}$ .

El **futuro cronológico** de  $x$  se define como  $I^+(x) = \{y \in M : x < y\}$ .

Un punto  $y \in M$  se dice que está en el pasado (futuro) causal de un punto  $x \in M$  si existe una curva causal dirigida al futuro (pasado) que une  $y$  con  $x$ . Esta relación la notaremos  $y < x$ .

Notaremos  $x \leq y$  si  $x < y$  o  $x = y$ . Definimos el **futuro causal** de  $x$  como  $J^+(x) = \{y \in M : x \leq y\}$  y al **pasado causal** como  $J^-(x) = \{y \in M : y \leq x\}$ .

Para clarificar los conceptos, es importante comprender la interpretación física de estos conjuntos. Los puntos en un espaciotiempo se los considera como *eventos*, y los eventos dentro del futuro cronológico de un evento  $p$  representan los eventos que pueden ser alcanzados por una partícula material que comienza en  $p$ . Los eventos dentro del futuro causal representan los eventos que, en principio, pueden ser influenciados por una señal emitida desde  $p$ .

**Observación 16.**

1.  $x < y$  implica  $x < y$ .
2. La relación  $\leq$  no es necesariamente una relación de orden. Esto se discutirá más adelante con las condiciones de causalidad.
3. Si  $y < x$ ,  $I^-(y) \subseteq I^-(x)$  y si  $x < y$ , entonces  $J^+(y) \subseteq J^+(x)$ .
4. Las definiciones las realizamos para puntos, pero se generaliza para conjuntos: si  $A \subseteq M$ , se define  $I^+(A) = \cup_{x \in A} I^+(x)$  y análogamente para los conjuntos  $I^-(A)$ ,  $J^+(A)$  y  $J^-(A)$ .

5.  $A \cup I^+(A) \subseteq J^+(A)$ .

6. *Notar que hay una dualidad entre las nociones de futuro y pasado, tanto cronológico como causal. Por eso, muchas de las demostraciones para el pasado serán idénticas a las demostraciones para el futuro pero invirtiendo la orientación temporal.*

**Definición 49.** *Un subconjunto  $S \subseteq M$  se dice **acronal** (respectivamente, **acausal**) si, dados dos puntos  $p, q \in S$ , no existe una curva temporal (resp. causal) que los una.*

Veremos qué forma concreta tienen estos conjuntos en el ejemplo más simple de variedad de Lorentz: el espacio de Minkowski.

**Ejemplo 1.** *El espaciotiempo de Minkowski de dimensión  $n+1$  es la variedad de Lorentz orientada temporalmente  $M^{n+1} = (\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$ . Existen unas coordenadas llamadas inerciales donde la métrica toma la forma  $\eta = -dt \otimes dt + \sum_i^n dx^i \otimes dx^i$ . Esta métrica es invariante por traslaciones en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . En un punto  $p \in M^{n+1}$ , el cono causal futuro  $C_p^+ \subseteq T_p \mathbb{R}^{n+1}$  es el conjunto de vectores tales que*

$$X^0 \geq \left\{ \sum_i^n (X^i)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

*Este campos de conos le da a  $M^{n+1}$  una estructura causal.*

**Teorema 8.** *En un espacio de Minkowski  $M^{n+1}$ , vale que*

1.  $I_p^+$  es el conjunto de  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  tales que

$$(t - t_p)^2 - \sum_i^n (x^i - x_p^i)^2 > 0, \quad t > t_p$$

$I_p^+$  es abierto.

2.  $J_p^+$  es el conjunto de  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$  tales que

$$(t - t_p)^2 - \sum_i^n (x^i - x_p^i)^2 \geq 0, \quad t \geq t_p$$

Resulta que  $J_p^+ = \overline{I_p^+}$

3. El borde  $\partial J_p^+ = \partial I_p^+$  es el conjunto de geodésicas nulas que comienzan en  $p$ :

$$(t - t_p)^2 - \sum_i^n (x^i - x_p^i)^2 = 0, \quad t \geq t_p$$



*Demostración.* Veamos que si un punto cumple que  $(t-t_p)^2 - \sum_i^n (x^i - x_p^i)^2 > 0$ ,  $t > t_p$  o  $(t-t_p)^2 - \sum_i^n (x^i - x_p^i)^2 \geq 0$ ,  $t \geq t_p$ , entonces existe una curva temporal dirigida al futuro que une a  $p$  con ese punto. Esto es fácil, porque las líneas rectas, geodésicas del espacio de Minkowski, que empiezan en  $p$  son de la forma  $x - p = a\lambda$ , con  $a$  constante. Estas son temporales o causales dirigidas al futuro si

$$a^0 > \sum_i^n (a^i)^2 \quad \text{o} \quad a^0 \geq \sum_i^n (a^i)^2$$

Esto prueba que  $I_p^+$ , y respectivamente  $J_p^+$  contienen a los puntos que cumplen con la ecuación del teorema.

Ahora probaremos la recíproca. En un espaciotiempo de Minkowski un camino temporal dirigido al futuro se cumple que, en cada parte suave,

$$\frac{dt}{d\lambda} > \left\{ \sum_i^n \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Luego, en los puntos  $x(\lambda)$  de la curva,

$$t(\lambda_{p+1}) - t(\lambda_p) = \int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} \left\{ \sum_i^n \left( \frac{dx^i}{d\lambda} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

La parte de la derecha es la longitud euclídea de la curva en  $\mathbb{R}^n$  parametrizado por  $\lambda \mapsto x^i(\lambda)$ , luego esta es más grande que  $|x(\lambda_{p+1}) - x(\lambda_p)|$ . Esta desigualdad vale en cada parte suave de la curva, y esto prueba la vuelta.

Análogamente se prueba para  $J_p^+$ . La proposición 3 es consecuencia de 1 y 2.  $\square$

Sin embargo, en un espaciotiempo general, estas proposiciones no valen, salvo por la propiedad de que  $I_p^+$  es abierto, como probaremos en el próximo lema. Un abierto  $\mathcal{U} \subseteq M$  es una variedad de Lorentz orientada temporalmente en sí mismo, y las relaciones causales intrínsecas de  $\mathcal{U}$  determinan las relaciones causales correspondientes en  $M$ . Por ejemplo, si  $I^+(A, \mathcal{U})$  denota el futuro cronológico del conjunto  $A \subseteq \mathcal{U}$ , luego  $I^+(A, \mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U} \cap I^+(A)$ . De las propiedades de la función exponencial y de la estructura causal del espacio de Minkowski se deduce que si  $\mathcal{C}$  es un abierto convexo de  $M$ , entonces  $I^+(\{p\}, \mathcal{C})$  es abierto en  $\mathcal{C}$ .

**Lema 24.** *La relación  $<$  es abierta, o sea, si  $x < y$  en  $M$ , entonces existen entornos  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  de  $x, y$  respectivamente tales que  $x' < y'$  para toda  $x' \in \mathcal{U}$  y  $y' \in \mathcal{V}$ .*

*Demostración.* Sea  $\sigma$  una curva temporal desde  $x$  a  $y$ . Si  $\mathcal{C}$  es un entorno convexo de  $y$ , sea  $y^-$  un punto de  $\sigma$  en  $\mathcal{C}$  previo a  $y$ , y sea  $p^+$  un punto de  $\sigma$  entre  $p$  y  $q^-$  en un entorno convexo  $\mathcal{C}'$  de  $p$ . Como  $I^+(\{q^-\}, \mathcal{C})$ ,  $I^-(\{p^+\}, \mathcal{C}')$  son abiertos en  $M$ , los llamo  $\mathcal{V}, \mathcal{U}$  respectivamente, y cumple con lo requerido.  $\square$

**Observación 17.** *Esto prueba que  $I_p^+$  son abiertos. Luego, como los conjuntos de la forma  $I^+(A)$  son uniones de estos conjuntos, también son abiertos.*

*Sin embargo, en un espaciotiempo general los conjuntos  $J_p^+, J_p^-$  no necesariamente son cerrados. Por ejemplo, tomamos el espacio de Minkowski  $\mathbb{R}_1^2$  sin el punto  $(1, 1)$ . Sea  $p$  en el origen, y  $I_p^+$  es el cono usual. Las geodésicas causales que pasan por  $p$  y que se dirigen al punto extraído de la variedad no continúan más allá del punto en cuestión (de la misma forma que se comportan las geodésicas de  $\mathbb{R}^2$  cuando se le quita un punto). Luego  $J_p^+$  consta solamente de  $I_p^+$  junto con la geodésica causal que no pasa por el punto extraído, más el segmento de curva causal que va desde  $p$  al punto extraído, pero lo que está más allá del punto extraído en esa curva no pertenece a  $J_p^+$ . Por lo tanto,  $J_p^+ \subsetneq \overline{I_p^+}$*

En general, los pasados/futuros cronológicos/causales pueden ser conjuntos complicados si se los analiza globalmente. Sin embargo, localmente las propiedades causales son similares a las del espacio de Minkowski, como especifica el siguiente teorema:

**Teorema 9.** *Cada punto  $p_0 \in M$  tiene un entorno abierto  $\mathcal{V}$  tal que el espaciotiempo  $\mathcal{V}$  obtenido al restringir la métrica cumple que:*

1. *Si  $p, q \in \mathcal{V}$ , existe una única geodésica que une  $p$  con  $q$ .*
2.  *$q \in I_p^+$  si y solo si existe una geodésica temporal dirigida al futuro que une a  $p$  con  $q$ .*
3.  *$J_p^+ = \overline{I_p^+}$*
4.  *$q \in J_p^+$  si y solo si existe una geodésica causal dirigida al futuro que une a  $p$  con  $q$ .*
5. *Una curva causal contenida en un compacto  $K$  en  $\mathcal{V}$  es continuamente extensible.*

*Demostración.* El ítem 1 es consecuencia directa de la existencia de entornos convexos demostrado en el capítulo 2.

Para el ítem 2, primero hay que notar que si existe una geodésica temporal dirigida al futuro que une a  $p$  con  $q$ , entonces  $q \in I_p^+$ . Supongamos que  $q \in I_p^+$ . Entonces existe una curva temporal dirigida al futuro  $C : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$  tal que  $C(0) = p$ ,  $C(1) = q$ . Tomamos  $E_0, \dots, E_n$  una base ortonormal de  $T_p M$  con  $E_0$  temporal y apuntando al futuro. Tomamos  $(x^0, \dots, x^n)$  coordenadas inducidas por la parametrización

$$\psi(x^0, \dots, x^n) = \exp_p(x^0 E_0 + \dots + x^n E_n)$$

Como  $\mathcal{V}$  es convexo, estas son coordenadas globales. Si  $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , definimos la función

$$W_p(q) := \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(q) x^\nu(q)$$

Queremos ver que  $W_p(q) < 0$ , ya que de esta manera el Lema de Gauss implicaría que existe una geodésica temporal que une  $p$  con  $q$ .

Como  $x(p) = 0$ , tenemos que  $W_p(0) = 0$ . Tomando  $x(t) = x(c(t))$ , tenemos que

$$\dot{W}_p(t) = 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(t) \dot{x}^\nu(t)$$

$$\ddot{W}_p(t) = 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu\nu} x^\mu(t) \ddot{x}^\nu(t) + 2 \sum_{\mu, \nu=0}^n \eta_{\mu, \nu} \dot{x}^\mu(t) \dot{x}^\nu(t)$$

y luego

$$\dot{W}_p(0) = 0, \quad \ddot{W}_p(0) = 2\langle \dot{c}(0), \dot{c}(0) \rangle < 0$$

Luego, existe  $\epsilon > 0$  tal que  $W_p(t) < 0$  para  $t \in (0, \epsilon)$ . Defino

$$X := -\text{grad}(-W_p^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} \text{grad}(W_p)(-W_p)^{-\frac{1}{2}}$$

Por el Lema de Gauss,  $\langle X, X \rangle = -1$ . Por lo tanto, las curvas integrales de  $X$  son geodésicas temporales. Esto implica que el campo  $\text{grad}(W_p)$  apunta hacia el futuro, tangente a una geodésica temporal dirigida hacia el futuro en  $p$ . Supongamos que  $W_p(t) < 0$ . Entonces

$$\dot{W}_p(t) = \dot{c}(t)(W_p(t)) = \langle (\text{grad}(W_p)_{c(t)}, \dot{c}(t)) \rangle < 0$$

porque ambos vectores son temporales y apuntan al futuro. Como ya sabemos que  $W_p(t) < 0$  para  $t \in (0, \epsilon)$ , tenemos que  $W_p(t) < 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ , y en particular  $W_p(q) = W_p(1) < 0$ , lo que implica que existe una geodésica temporal orientada al futuro que une  $p$  con  $q$ .

El ítem 3 se prueba utilizando las mismas coordenadas globales y recordando que, por el Lema de Gauss, el difeomorfismo dado por la función exponencial mantiene el carácter causal de las curvas. De esta forma, a cada curva causal la aproximo por curvas temporales en el tangente. O sea, tomo una curva causal, la subo vía la exponencial, la aproximo arriba, y la vuelvo a bajar vía la exponencial.

El punto 4 es consecuencia de los dos puntos anteriores y del hecho que en  $\mathcal{V}$  la exponencial es un difeomorfismo.

Veamos el punto 5. Primero, una observación: como la función que manda dos puntos  $(p, q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$  a la geodésica que los une es continua, usando el ítem 4 tenemos la siguiente propiedad. Supongamos que  $p_n \rightarrow p$  y  $q_n \rightarrow q$ , con todos los puntos

en  $\mathcal{V}$ . Entonces, si  $q_n \in J_{p_n}^+$  para todo  $n$ ,  $q \in J_p^+$ . Volvamos al teorema. Supongamos que  $\alpha$  está definido en  $[0, B)$ . Como  $K$  es compacto, existe una sucesión  $s_i \rightarrow B$  tal que  $\alpha(s_i)$  converge a un punto  $p \in K$ . Debemos ver que toda sucesión converge al mismo punto. Supongamos  $t_i \rightarrow B$  pero  $\alpha(t_i) \rightarrow q \neq p$ . O sea,  $\alpha$  va y viene entre  $p$  y  $q$ . Por la observación,  $q \in J_p^+$  y  $p \in J_q^+$ . Por el ítem 4, la geodésica que une a  $p$  y  $q$  es dirigida tanto al futuro como al pasado, lo que es absurdo, y  $p = q$ .  $\square$

En base a lo definido, se obtiene el siguiente resultado:

**Teorema 10.** *Sea  $p \in M$ , con  $M$  una variedad de Lorentz orientada temporalmente. Entonces vale que:*

1. *Si  $q \in I_p^+$  y  $r \in I_q^+$ , entonces  $r \in I_p^+$ .*
2. *Si  $q \in J_p^+$  y  $r \in J_q^+$ , entonces  $r \in J_p^+$ .*

El siguiente teorema describe el borde de los conjuntos  $I^+$ .

**Teorema 11.** *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo de dimensión  $n+1$ , y sea  $S \subset M$ . Entonces, si  $\partial I^+(S) \neq \emptyset$ , entonces  $\partial I^+(S)$  es acronal, de dimensión  $n$ , y es un embedding como  $C^0$ -subvariedad de  $M$ .*

*Demostración.* Sea  $q \in \partial I^+(S)$ . Si  $p \in I_q^+$ , entonces  $q \in I_p^-$ , y como éste último es abierto, existe un entorno abierto  $O$  tal que  $q \in O \subseteq I_p^-$ . Como  $q \in \partial I^+(S)$ ,  $O \cap I^+(S) \neq \emptyset$  y por lo tanto  $p \in I^+(O \cap I^+(S)) \subset I^+(S)$ . Esto prueba que  $I_q^+ \subseteq I^+(S)$ . Similarmente obtenemos que  $I_q^- \subset M - I^+(S)$ . Si  $\partial I^+(S)$  no fuera acronal, podríamos encontrar  $q, r \in \partial I^+(S)$  tal que  $r \in I_q^+$ , y por lo tanto  $r \in I^+(S)$ . Pero esto es absurdo porque  $I^+(S)$  es abierto y por lo tanto  $\partial I^+(S) \cap I^+(S) = \emptyset$ . Esto concluye que  $I^+(S)$  es acronal. Veamos la estructura de subvariedad. Tomamos coordenadas normales  $x^0, \dots, x^n$  en  $q \in \partial I^+(S)$  y consideramos un entorno de  $q$  lo suficientemente chico como para que  $\frac{\partial}{\partial x^0}$  sea temporal y cada una de sus curvas integrales ingresa en  $I_q^+ \subset I^+(S)$  y en  $I_q^- \subset M - I^+(S)$ . Pero esto implica que cada curva integral interseca a  $\partial I^+(S)$ , y como  $I^+(S)$  es acronal, lo interseca una sola vez. Entonces, en cada entorno tenemos una biyección entre los puntos de  $\partial I^+(S)$  con las coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  que caracterizan a la curva integral de  $\frac{\partial}{\partial x^0}$ . Más aún, es un homeomorfismo entre un entorno de  $q \in \partial I^+(S)$  en  $\mathbb{R}^n$  (con la topología inducida en  $\partial I^+(S)$ ). Repitiendo esta construcción para cada  $q \in \partial I^+(S)$  obtenemos una familia de cartas continuas compatibles que cubren a  $I^+(S)$ , y por lo tanto este resulta ser una subvariedad embebida de dimensión  $n$ .  $\square$

En lo que queda en este capítulo, nuestro objetivo es poder estudiar las *condiciones de causalidad*, que serán de suma importancia en la construcción de los teoremas de singularidad del último capítulo. Sin embargo, para poder definir estos conceptos primero debemos detenernos momentáneamente a estudiar ciertas propiedades topológicas del espacio de caminos.

## 4.2. (Cuasi) Límites en el espacio de caminos

El estudio de la causalidad requiere que desarrollemos cierta teoría sobre límites de sucesiones de curvas causales suaves a trozos. El primer problema que se encuentra es que para cualquier definición razonable de límite, el espacio de curvas causales suaves a trozos no es cerrado, debido a que el límite puede no ser suave a trozos. Por eso trabajaremos con los *cuasilímites*, que definiremos en esta sección.

**Definición 50.** Sea  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de curvas causales dirigidas al futuro en  $M$ , y sea  $\mathfrak{R}$  un cubrimiento convexo de  $M$ . Una **sucesión límite para  $\{\alpha_n\}$  relativa a  $\mathfrak{R}$**  es una sucesión (finita o infinita) de puntos  $p = p_0 < p_1 < \dots$  en  $M$  tal que

1. Para cada  $p_i$  existe una subsucesión  $\{\alpha_{n_k}\}$  (que, para que la notación no sea tan pesada, llamaremos  $\{\alpha_k\}$ ), y para cada  $k$ , un conjunto de números  $s_{k,0} < s_{k,1} < \dots < s_{k,i}$  tales que
  - a)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k(s_{k,j}) = p_j$  para  $j \leq i$ .
  - b) Para cada  $j < i$ , los puntos  $p_j, p_{j+1}$  y el segmento  $\alpha_k|_{[s_{k,j}, s_{k,j+1}]}$  para todo  $k$  están contenidos en un único  $\mathcal{C}_j \in \mathfrak{R}$
2. Si el conjunto  $\{p_i\}$  es infinito, la sucesión  $\{p_i\}$  es no convergente. Si  $\{p_i\}$  es finito, tiene más de un punto y ninguna sucesión estrictamente más larga satisface 1.

**Proposición 30.** Sea  $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de curvas causales dirigidas al futuro en  $M$  tales que  $\alpha_n(0) \rightarrow p$ , y existe un entorno relativamente compacto de  $p$  que contiene a lo sumo finitas de las curvas  $\alpha_n$ . Entonces, para cualquier cubrimiento convexo  $\mathfrak{R}$ ,  $\{\alpha_n\}$  tiene una sucesión límite que comienza en  $p$  relativa a  $\mathfrak{R}$ .

*Demostración.* Como  $M$  es paracompacto, debe existir un subcubrimiento localmente finito  $\mathfrak{R}' = \{U_i\}_{i \in I}$  tal que cada  $\overline{U_i}$  es compacto y contenido en algún elemento de  $\mathfrak{R}$ . Por hipótesis, podemos corregir a  $\mathfrak{R}'$  de tal forma que contenga un  $U_0$  tal que infinitos  $\{\alpha_n\}$  comienzan en  $U_0$  y salen de  $\overline{U_0}$ . Llamaremos  $\{^1\alpha_n\}$  al conjunto de estas curvas, y llamemos  $^1\alpha_n(s_n)$  al primer punto de la curva que pertenece a  $\partial U_0$  (que existe porque la curva abandona  $U_0$ ). Pasando a una subsucesión si fuera necesario, podemos asumir que  $\{^1\alpha_n(s_n)\}$  converge a un punto  $p_1$  en  $\partial \overline{U_0}$ .

Ahora sea  $U_1 \in \mathfrak{R}'$  que contiene a  $p_1$ . Si hay infinitas  $^1\alpha_n$  que salen de  $U_1$ , obtenemos una subsucesión  $^2\alpha_n$  cuyos primeros puntos de salida de  $U_1$  convergen a un punto  $p_2$  en  $\partial U_1$ . Repetimos este proceso, con una observación: si hay más de un candidato para entorno en  $\mathfrak{R}'$  conteniendo a  $p_i$ , elegiremos el candidato que menos veces se haya elegido. Si  $\mathcal{C}_i$  es cualquier elemento de  $\mathfrak{R}$  que contenga a  $\overline{U_i}$ , entonces se satisface la condición 1. Como los  $\mathcal{C}_i$  son convexos, la relación  $\leq$  es cerrada en

cada uno de ellos, luego  $p_{i+1} \geq p_i$ . Por construcción,  $p_{i+1} \neq p_i$ , luego  $p_{i+1} > p_i$ . Veamos que se cumple la condición 2. Si  $\{p_i\}$  fuera infinito, supongamos que  $p_i \rightarrow q$ . Sea  $U \in \mathfrak{X}'$  que contenga a  $q$ , y por lo tanto  $p_i \in U$  salvo para finitos  $p_i$ . Como  $\bar{U}$  es compacto y  $\mathfrak{X}'$  es localmente finito, solo finitos elementos de  $\mathfrak{X}'$  intersecan  $U$ . Luego, alguno de ellos debe haber sido elegido como  $U_i$  para infinitos  $i$ , pero esto viola la condición de elegir al candidato que menos veces haya sido elegido, porque  $U$  fue candidato infinitas veces, pero fue elegido a lo sumo finitas veces, porque, como contiene a casi todos los  $p_i$ , solamente finitos de ellos pueden estar en  $\bar{U}$ . Si  $\{p_i\}$  fuera finito,  $p = p_0 < p_1 < \dots < p_r$ . Como la construcción no puede continuar, debe suceder que solamente un número finito de curvas  ${}^r\alpha_n$  abandonan  $U_r$ . Sean  $\{\alpha_k\}$  esas curvas atrapadas en  $U_r$ . Por el Teorema 9(5), estas son extensibles, y podemos asumir directamente que  $\alpha_k$  esta definida en  $[0, b_k]$ . Como  $\bar{U}_r$  es compacto, para alguna subsucesión los puntos finales  $\alpha_k(b_k)$  convergen a un punto  $q \in \bar{U}_r$ . Si  $q = p_r$ , entonces no se puede extender  $p_0 < \dots < p_r$  sin que deje de satisfacer la condición 1, y por lo tanto es una sucesión límite. Si  $q \neq p_r$ , entonces ambas condiciones valen para  $p_0 < \dots < p_r < p_{r+1} = q$ .  $\square$

**Definición 51.** Una curva dirigida al futuro  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  admite un **punto final futuro**  $p$  si para cada entorno abierto  $V$  de  $p$  existe un  $t_0$  tal que si  $t \geq t_0$  entonces  $\gamma(t) \in V$ . Si  $\gamma$  no tiene puntos finales futuros (o sea, si  $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t)$  no existe), es **futuro-inextensible**. Una curva dirigida al pasado  $\gamma : (a, b) \rightarrow M$  es **pasado-inextensible** si  $\lim_{t \rightarrow b} \gamma(t)$  no existe.

Si  $\{p_i\}$  es una sucesión límite para  $\{\alpha_n\}$ , sea  $\lambda_i$  la geodésica causal dirigida al futuro que une  $p_i$  con  $p_{i+1}$  en un convexo  $\mathcal{C}_i$  como en la condición 1. Pegando estos segmentos obtenemos una geodésica rota  $\lambda = \lambda_0 * \lambda_1 * \dots$  llamada el **cuasilímite de  $\{\alpha_n\}$  con vértices  $p_i$** . Claramente,  $\lambda$  comienza en  $p$ . Si  $\{p_i\}$  es infinita, la condición 2 implica que  $\lambda$  es futuro-inextensible. Además, el cuasilímite de un conjunto de curvas futuro-inextensibles es futuro inextensible, ya que toda sucesión límite será infinita.

El concepto de cuasilímite puede ser confuso, por lo tanto intentaremos hacerlo mínimamente más claro poniendo un ejemplo.

**Ejemplo 2.** Tomemos  $\mathbb{R}_1^2$  el plano de Minkowski, y sea  $\alpha_n$  el segmento geodésico temporal que une en punto  $(0, 0)$  con  $(n+1/n, n)$ . En toda sucesión límite de  $\{\alpha_n\}$  los vértices caen sobre la geodésica nula dada por los puntos  $(x, x), x \geq 0$ , y luego la curva  $\lambda(x) = (x, x), x \geq 0$  resulta ser el único cuasilímite.

Si en lugar de tomar  $\mathbb{R}_1^2$  tomamos  $M = \mathbb{R}_1^2 - (1, 1)$ ,  $\alpha_n$  tiene como único cuasilímite a  $\lambda|_{[0,1)}$ , que es futuro-inextensible e incompleta.

### 4.3. Condiciones de causalidad

Para que la teoría que venimos desarrollando sea aplicable a la física (que es la motivadora de la misma), debemos exigir que las variedades de Lorentz con las que trabajamos cumplan ciertas condiciones de causalidad, que están en sintonía con la percepción que tenemos del universo.

La más simple de estas condiciones es la que evita la posibilidad del viaje en el tiempo, o sea, de que un evento sea parte de su propio pasado cronológico.

**Definición 52.** Una variedad de Lorentz  $(M, g)$  cumple la **condición cronológica** si no existen curvas temporales cerradas. Si no existen curvas causales cerradas, se dice que satisface la **condición causal**. Se dice que la condición causal vale en un punto  $p$  si no hay curvas causales que pasen por  $p$ , y que vale en un conjunto  $A$  si vale para cada punto de  $A$ . La misma definición vale para curvas temporales.

En particular, la condición cronológica evita que consideremos posible un espaciotiempo compacto, como se deduce de la siguiente proposición:

**Proposición 31.** Toda variedad de Lorentz  $(M, g)$  compacta y orientada temporalmente contiene curvas temporales cerradas.

*Demostración.* Consideramos el cubrimiento por abiertos  $\{I_p^+\}_{p \in M}$ . Si  $M$  es compacta, tomamos un subcubrimiento finito  $\{I_{p_1}^+, \dots, I_{p_N}^+\}$ . Si  $p_1 \in I_{p_i}^+$  con  $i \neq 1$ , entonces  $I_{p_1}^+ \subseteq I_{p_i}^+$ , y luego lo podemos sacar del cubrimiento. De esta forma, sin perder generalidad, podemos suponer que  $p_1 \in I_{p_1}^+$ , y por lo tanto existe una curva temporal cerrada que comienza y termina en  $p_1$ .  $\square$

**Definición 53.** Se dice que vale la **condición causal fuerte** en un punto  $p \in M$  si dado un entorno  $\mathcal{U}$  de  $p$ , existe un entorno  $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$  de  $p$  tal que todo segmento de curva causal con extremos en  $\mathcal{V}$  está completamente contenido en  $\mathcal{U}$

La condición causal fuerte impone la condición extra de que no existan curvas causales casi cerradas; o sea, que las curvas causales que comienzan arbitrariamente cerca de  $p$  y van más allá de cierto entorno fijo no pueden volver a estar arbitrariamente cerca de  $p$ .

**Lema 25.** Supongamos que vale la condición causal fuerte en un compacto  $K \subset M$ . Si  $\alpha$  es una curva causal futuro-inextensible que comienza en  $K$ , entonces  $\alpha$  eventualmente abandona  $K$  y no vuelve a ingresar: existe un  $s > 0$  tal que si  $t \geq s$ ,  $\alpha(t) \notin K$ .

*Demostración.* Procedemos por el absurdo: supongamos que  $\alpha$  se mantiene dentro de  $K$  o siempre vuelve a  $K$ . Si el dominio de  $\alpha$  es  $[0, B)$ , hay una sucesión  $\{s_i\} \subset$

$[0, B)$  tal que  $s_i \rightarrow B$  y  $\{\alpha(s_i)\} \subset K$ . Luego, para alguna subsucesión, tenemos que  $\alpha(s_i) \rightarrow p \in K$ . Como  $\alpha$  no tiene punto final futuro, debe existir otra sucesión  $t_j \rightarrow B$  tal que  $\{\alpha(t_i)\}$  no converge a  $p$ . Tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos tomar un entorno  $p \in \mathcal{U}$  que no contenga  $\alpha(t_i)$ . Como tanto  $\{s_i\}$  como  $\{t_i\}$  convergen a  $B$ , tienen subsucesiones que se alternan:  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots$ . Entonces las curvas  $\alpha|_{[s_k, s_{k+1}]}$  son *casi cerradas*, lo que contradice la condición causal fuerte de  $M$  en  $p$ .  $\square$

**Observación 18.** *En particular, si  $K \subset M$  es un compacto en un espaciotiempo que satisface la condición causal fuerte, toda curva causal contenida en  $K$  debe tener puntos finales pasados y futuros contenidos en  $K$ .*

**Lema 26.** *Supongamos que vale la condición causal fuerte en un compacto  $K$ . Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de segmentos de curvas causales dirigidas al futuro en  $K$  tales que  $\alpha_n(0) \rightarrow p$  y  $\alpha_n(1) \rightarrow q \neq p$ . Entonces existe una geodésica rota dirigida al futuro  $\lambda$  desde  $p$  a  $q$  y una subsucesión  $\{\alpha_{n_k}\}$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} L(\alpha_{n_k}) \leq L(\lambda)$ .*

*Demostración.* Por la Proposición 30 sabemos que  $\{\alpha_n\}$  tiene una sucesión límite  $\{p_i\}$  que comienza en  $p$ . Si  $\{p_i\}$  fuera infinita, el cuasilímite obtenido resulta ser una curva causal futuro-inextensible que comienza en  $p$ . Por el Lema 25, esta curva eventualmente abandona  $K$  y no regresa. En particular, alguno de sus vértices, llamémoslo  $p_k$ , está afuera de  $K$ , lo que implica que existen  $\alpha_n$  que no están contenidas en  $K$ , lo que es una contradicción. Por lo tanto, la sucesión límite es finita, comienza en  $p$  y finaliza en  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_{n_k}(1) = q$ . El cuasilímite correspondiente  $\lambda$  es una geodésica rota causal de  $p$  a  $q$ . Por la definición de sucesión límite, para estudiar longitudes lo tenemos que hacer en un conjunto convexo  $\mathcal{C}_i$  a la vez. Entonces, si  $p_{n_k, i} = \alpha_{n_k}(s_{n_k, i})$ , tenemos que

$$L(\alpha_{n_k}|_{[s_{n_k, i}, s_{n_k, i+1}]}) \leq |\overrightarrow{p_{n_k, i} p_{n_k, i+1}}|$$

Luego

$$L(\alpha_{n_k}) \leq L_{n_k} = \sum_{i=0}^r |\overrightarrow{p_{n_k, i} p_{n_k, i+1}}|$$

Como el vector  $\overrightarrow{pq}$  depende continuamente de  $p$  y de  $q$ , su norma también lo hace. Por lo tanto  $L_{n_k} \rightarrow \sum |\overrightarrow{p_i p_{i+1}}| = L(\lambda)$ . Si fuera necesario tomamos otra subsucesión y obtenemos el resultado del lema.  $\square$

A continuación definiremos una tercera condición de causalidad.

**Definición 54.** *Un espacio tiempo  $(M, g)$  es **establemente causal** si existe una función suave  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\text{grad}(f)$  es un campo vectorial en  $M$  temporal. A  $f$  se la llama **función global de tiempo**. A la preimagen de cada punto se la denota  $S_x = f^{-1}(x)$  y se la llama **porción de tiempo**.*



**Proposición 32.** *Una variedad de Lorentz establemente causal es temporalmente orientable y cumple la condición cronológica.*

*Demostración.* Consideramos el campo  $-grad(f)$ . Es un campo vectorial temporal que no se anula, luego la variedad es temporalmente orientable. Para ver que cumple la condición cronológica, primero debemos notar que, como estamos en una variedad de Lorentz, el campo  $grad(f)$  apunta hacia donde  $f$  decrece, luego  $-grad(f)$  apunta hacia donde crece. Intuitivamente, con  $-grad(f)$  queremos un campo que apunte hacia el futuro, que es donde la función global de tiempo crece. Ahora supongamos que tenemos una curva  $\alpha$  temporal y cerrada. Como es temporal,  $f \circ \alpha$  es creciente, cosa que es absurdo porque  $f \circ \alpha(0) = f \circ \alpha(1)$ .  $\square$

**Observación 19.** *Como  $f$  es constante en cada  $S_x$ , si  $v \in T_p S_x$ , tenemos que  $\langle grad(f), v \rangle = v(f) = 0$ . Como  $grad(f)$  es temporal, cada  $S_x$  será una hipersuperficie espacial.*

### 4.3.1. Separación temporal

Es sabido que, en geometría Riemanniana, las curvas que realizan el camino más corto entre un punto y otro son las geodésicas. Es más, en algunos contextos las geodésicas *se definen* de esa manera (ver [7]). En la geometría Lorentziana no existen curvas de *longitud mínima* ya que, dados dos puntos cualesquiera de la variedad, los puedo unir por curvas nulas a trozos. Sin embargo, manteniendo esa noción de dualidad con la geometría Riemanniana, en la geometría Lorentziana sí existen curvas de **longitud máxima**, y estas son las geodésicas temporales. El teorema que demostraremos a continuación formaliza este concepto localmente, y se lo suele llamar *la paradoja de los gemelos*, porque describe un hipotético escenario donde hay un par de gemelos, con uno que se queda en la Tierra y otro viaja a altas velocidades a través del espacio. Como el segundo no viajó a través de una geodésica temporal, su tiempo propio (ver capítulo 6 de [15]) es menor, por lo tanto al regresar a la Tierra termina siendo más joven que su hermano.

**Teorema 12** (La paradoja de los gemelos). *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo temporalmente orientado y  $p_0 \in M$ . Entonces existe un entorno  $\mathcal{V} \subseteq M$  de  $p_0$  convexo y abierto tal que el espaciotiempo  $(\mathcal{V}, g)$  (obtenido por restricción) satisface la siguiente propiedad: si  $q \in I_p^+$ ,  $\sigma$  es la geodésica temporal que conecta  $p$  con  $q$ ,  $\gamma$  es una curva temporal cualquiera que conecta  $p$  con  $q$  entonces  $L(\gamma) \leq L(\sigma)$ , y la igualdad vale si y solo si  $\gamma$  es una reparametrización de  $\sigma$ .*

*Demostración.* Tomamos el mismo  $\mathcal{V}$  que el del teorema 9. De la demostración del Lema de Gauss se deduce que cualquier curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}$  que satisface que  $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$  se puede escribir como

$$\gamma(t) = \exp_p(r(t)n(t))$$

con  $r(t) \geq 0$  y  $\langle n(t), n(t) \rangle = -1$ .

Definimos la función  $f(r, t) = \exp_p(rn(t))$ . Calculemos sus derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = (\exp_p)_*(n(t))$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (\exp_p)_*(r\dot{n}(t))$$

Como  $\langle n(t), n(t) \rangle = -1$ , entonces  $\langle \dot{n}(t), n(t) \rangle = 0$ . Usando el Lema de Gauss tenemos que

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \langle (\exp_p)_*(n(t)), (\exp_p)_*(r\dot{n}(t)) \rangle = r\langle n(t), \dot{n}(t) \rangle = 0$$

Utilizando la función  $f$ , tenemos que

$$\dot{\gamma}(t) = (f(r(t), t))' = \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t)r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle &= \\ &\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t)r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t)r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle = \\ &(r'(t))^2 \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle \quad (4.1) \end{aligned}$$

Como

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial r}(r(t), t) \right\rangle = \langle n(t), n(t) \rangle = -1$$

y recordando que  $\gamma$  es temporal, tenemos que

$$0 > \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle = -(r'(t))^2 + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle$$

Por lo tanto

$$L(\gamma) = \int_0^1 \left( (r'(t))^2 - \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}}$$

Por el Lema de Gauss sabemos que  $\frac{\partial f}{\partial r}$  es temporal. Como es perpendicular a  $\frac{\partial f}{\partial t}$ , implica que este último es espacial, y luego  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \right\rangle \geq 0$ . Entonces

$$L(\gamma) \leq \int_0^1 r'(t) dt = r(1)$$

Por lo tanto, si probamos que  $L(\sigma) = r(1)$ , terminaríamos la demostración. Teniendo en cuenta que  $\sigma$  es geodésica y que  $q = \sigma(1) = \gamma(1) = \exp_p(r(1)n(1))$ , entonces  $\sigma(t) = \exp_p(tr(1)n(1))$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = \langle r(1)n(1), r(1)n(1) \rangle = -(r(1))^2$$

Entonces

$$L(\sigma) = \int_0^1 (-\langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} = r(1)$$

Además, la igualdad se da si y solo si  $\langle \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t), \frac{\partial f}{\partial t}(r(t), t) \rangle = 0$  para todo  $t$  (recordar que es espacial). Luego  $n(t)$  sería constante y  $\gamma(t) = \exp_p(r(t)n)$ , que es una reparametrización de una geodésica.  $\square$

La proposición anterior es local. Ahora trataremos de dar una definición global apropiada para la separación temporal de puntos en una variedad de Lorentz orientada temporalmente.

**Definición 55.** Si  $p, q \in M$ , se define la **separación temporal**  $\tau(p, q)$  desde  $p$  a  $q$  como

$$\sup\{L(\alpha) : \alpha \text{ es un segmento de curva causal dirigida al futuro que une } p \text{ con } q\}$$

Por convención, diremos que  $\tau(p, q) = 0$  si  $q \notin J_p^+$  y  $\tau(p, q) = \infty$  si la longitud de las curvas no está acotada. Claramente, esta definición de separación temporal tiene sentido si vale la condición cronológica. También es importante observar que la separación temporal es, en algún sentido, dual a la distancia Riemanniana: mientras que la distancia Riemanniana busca minimizar valores,  $\tau$  busca maximizarlos.

**Lema 27.** 1.  $\tau(p, q) > 0$  si y sólo si  $p < q$

2. Si  $p \leq q \leq r$ , entonces  $\tau(p, q) + \tau(q, r) \leq \tau(p, r)$  (desigualdad triangular invertida)

*Demostración.* 1. La vuelta es obvia. Veamos la ida. Si  $\tau(p, q) > 0$ , entonces existe una curva causal dirigida al futuro  $\alpha$  desde  $p$  a  $q$  con  $L(\alpha) > 0$ . Esto implica que  $\alpha$  no es nula (o lumínica). Por lo tanto, puedo deformarla en una curva temporal sin modificar los extremos  $p$  y  $q$ .

2. Primero notemos que si no existieran curvas causales dirigidas al futuro entre  $p$  y  $q$ , tendríamos que  $\tau(p, q) = 0$ . Como  $p \leq q$ ,  $p = q$ , y el resultado sería trivial. Lo mismo tomando  $q$  y  $r$ . Ahora supongamos que existen curvas causales dirigidas al futuro  $\alpha$  y  $\beta$  que unen  $p$  con  $q$  y  $q$  con  $r$ , respectivamente. Dado

$\epsilon > 0$ , podemos elegir  $\alpha$  y  $\beta$  para que cumplen que  $\tau(p, q) - L(\alpha) < \epsilon/2$  y  $\tau(q, r) - L(\beta) < \epsilon/2$ . Luego

$$\tau(p, q) \geq L(\alpha * \beta) > \tau(p, q) + \tau(q, r) - \epsilon$$

Como  $\epsilon$  es arbitrario, obtenemos el resultado buscado.  $\square$

**Lema 28.** *La función separación temporal  $\tau : M \times M \rightarrow [0, \infty]$  es semicontinua inferiormente.*

*Demostración.* Para el caso  $\tau(p, q) = 0$  no hay nada que probar, por lo tanto supongamos  $q \in I_p^+$  y  $0 < \tau(p, q) < \infty$ . Dado  $\epsilon > 0$ , debemos encontrar entornos  $p \in \mathcal{U}$ ,  $q \in \mathcal{V}$  tal que  $\tau(p', q') > \tau(p, q) - \epsilon$  para todo  $p' \in \mathcal{U}$ ,  $q' \in \mathcal{V}$ . Sea  $\alpha$  una curva temporal dirigida al futuro que une  $p$  con  $q$  tal que  $L(\alpha) > \tau(p, q) - \epsilon/3$ . En lo siguiente, si  $r, r'$  son dos puntos en una geodésica, notaremos  $[r, r']$  al segmento geodésico entre ambos puntos. Sea  $\mathcal{C}$  un entorno convexo de  $q$ , y sea  $q_1 \in \mathcal{C}$  un punto en  $\alpha$  previo a  $q$ . Como la longitud de los segmentos geodésicos depende continuamente de los extremos, tomo un entorno  $q \in \mathcal{V}$  tal que si  $q' \in \mathcal{V}$ , entonces  $[q_1, q']$  es causal y  $L([q_1, q']) > L([q_1, q]) - \epsilon/3$ . Como  $[q_1, q]$  es geodésico,  $L([q_1, q]) \geq L(\alpha|_{[q_1, q]})$ , con  $\alpha|_{[q_1, q]}$  es el segmento de  $\alpha$  entre  $q_1$  y  $q$ . Análogamente se contruye un entorno  $p \in \mathcal{U}$  tal que si  $p' \in \mathcal{U}$ ,  $q' \in \mathcal{V}$ , estos pueden ser unidos por una curva causal de longitud  $L(\alpha) > L(\alpha) - 2\epsilon/3 > \tau(p, q) - \epsilon$ , lo que prueba el lema. Falta ver qué sucede si  $\tau(p, q) = \infty$ , pero una construcción análoga muestra que si  $A > 0$ , podemos encontrar entornos como los anteriores tales que  $\tau(p', q') > A$ .  $\square$

**Notaciones 3.** *Notaremos  $J(p, q) := J_p^+ \cap J_q^-$ . Este conjunto representa al conjunto más chico que contiene a todas las curvas causales dirigidas al futuro que unen  $p$  con  $q$ .*

**Ejemplo 3.** *La función  $\tau$  no es necesariamente continua. Si borramos un segmento espacial de  $\mathbb{R}_1^2$  y tomamos dos puntos  $p, q$  como en la figura,  $\tau$  no es continua en  $(p, q)$ . La región sombreada es  $J(p, q)$ , y si  $\epsilon$  es suficientemente chico, toda curva causal entre  $p$  y  $q$  se aproxima por curvas lumínicas, y por lo tanto resultan ser curvas cortas. Si tomamos  $q'$  cerca de  $q$ , aparecen nuevos caminos causales como  $\beta$  con  $L(\beta)$  grande, y por lo tanto  $\tau$  no resulta continua.*

**Definición 56.** *Si  $A, B$  son subconjuntos de  $M$ , se define  $\tau(A, B) = \sup\{\tau(a, b) : a \in A, b \in B\}$ . Con un razonamiento análogo al anterior, tenemos que las funciones  $x \mapsto \tau(x, B)$  y  $y \mapsto \tau(A, y)$  son semicontinuas inferiormente.*

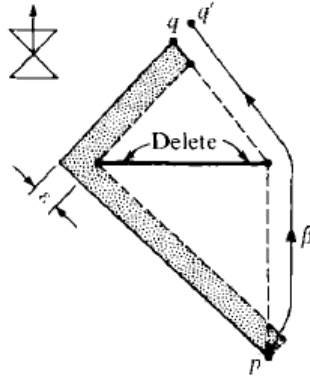


Imagen extraída de [15].

### 4.3.2. Hiperbolicidad global

En esta sección buscaremos condiciones que nos permitan asegurar la existencia de una geodésica causal de longitud máxima entre  $p$  y  $q$ .

**Teorema 13.** *Tomando  $p < q$  puntos en  $M$ , si  $J(p, q)$  es compacto y la condición fuerte causal vale sobre él, entonces existe una geodésica causal entre  $p$  y  $q$  de longitud  $\tau(p, q)$ .*

*Demostración.* Sea  $\{\alpha_n\}$  una sucesión de segmentos de curvas causales dirigidas al futuro tal que  $L(\alpha_n) \rightarrow \tau(p, q)$ . Por definición,  $\{\alpha_n\} \subset J(p, q)$ . Como  $J(p, q)$  es compacto, por Lema 26, existe una geodésica rota dirigida al futuro  $\lambda$  desde  $p$  a  $q$  tal que  $L(\lambda) = \tau(p, q)$ . Si  $\lambda$  efectivamente fuera rota, existiría una curva causal que une  $p$  con  $q$  más larga, por lo tanto  $\lambda$  debe ser una geodésica (no rota). Notar que, a priori,  $\tau(p, q)$  podría ser  $\infty$ , pero la misma prueba muestra que  $L(\lambda) = \tau(p, q)$ , por lo tanto  $\tau(p, q)$  debe ser finita.  $\square$

Este teorema da lugar a una de las nociones más importantes a la hora de estudiar espaciotiempos, que es la noción de *hiperbolicidad global*.

**Definición 57.** *Un espaciotiempo  $M$  se dice **globalmente hiperbólico** si vale la condición causal fuerte y para cada par  $p < q$ ,  $J(p, q)$  es compacto.*

**Observación 20.** *En un espaciotiempo globalmente hiperbólico, todo par de puntos que se pueden unir por una curva causal pueden ser unidos por una geodésica causal de longitud máxima. Claramente una variedad de Minkowski es globalmente hiperbólica, pero al extraerle un punto deja de serlo.*

**Definición 58.** *Un subconjunto  $\mathcal{N}$  de  $M$  es globalmente hiperbólico si cumple dos condiciones:*

1. Vale la condición causal fuerte en  $\mathcal{N}$ .
2. Si  $p < q$  con ambos en  $\mathcal{N}$ , entonces  $J(p, q) \subset \mathcal{N}$  y es compacto.

**Observación 21.** 1. La definición no es intrínseca de  $\mathcal{N}$ , porque relaciona a  $\mathcal{N}$  con la estructura causal de  $M$ .

2. En un conjunto globalmente hiperbólico  $\mathcal{N}$ , dados  $p < q$ , existe una geodésica causal **de  $M$**  que los une.

**Lema 29.** Si  $\mathcal{U} \subset M$  es un abierto globalmente hiperbólico,  $\bar{\tau} = \tau|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$  es continua.

*Demostración.* Ya sabemos que  $\bar{\tau}$  es finita y semicontinua inferiormente. Supongamos que no es semicontinua superiormente en  $(p, q) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ . Por lo tanto, existe  $\epsilon > 0$  y sucesiones  $\{p_n\} \rightarrow p$ ,  $\{q_n\} \rightarrow q$  tales que  $\bar{\tau}(p_n, q_n) \geq \bar{\tau}(p, q) + \epsilon$  para todo  $n$ . Como  $\bar{\tau}(p_n, q_n) > 0$ , existe una curva causal  $\alpha_n$  que va desde  $p_n$  a  $q_n$  tal que  $L(\alpha_n) > \bar{\tau}(p_n, q_n) - 1/n$ . Como  $\mathcal{U}$  es abierto, existen  $p^+, q^- \in \mathcal{U}$  tal que  $p^+ < p$ ,  $q < q^-$ . Podemos suponer que  $\{p_n\} \subset I_{p^+}^+$ ,  $\{q_n\} \subset I_{q^-}^-$ . Por lo tanto,  $\{\alpha_n\} \subset J(p^+, q^-)$ . Por el Lema 26, recordando que  $\mathcal{U}$  es globalmente hiperbólico, existe una curva causal  $\lambda$  que une  $p$  con  $q$  tal que  $L(\lambda) \geq \bar{\tau}(p, q) + \epsilon$ , que es absurdo porque  $\bar{\tau}$  es el supremo.  $\square$

**Lema 30.** Sea  $\mathcal{U}$  un abierto globalmente hiperbólico de  $M$ ,  $p_n \rightarrow p$  y  $q_n \rightarrow q$  con  $\{p_n\}, \{q_n\} \subset \mathcal{U}$ . Si  $p_n \leq q_n$ , entonces  $p \leq q$ .

*Demostración.* Si existen infinitos  $n$  tal que  $p_n = q_n$ , el resultado es claro. Supongamos que  $p_n < q_n$  para todo  $n$ . Imitando la demostración anterior, tomamos  $\alpha_n$  una curva causal entre  $p_n$  y  $q_n$ , todos los  $\alpha_n$  están contenidos en un  $J(p^-, q^+)$  y si  $p \neq q$ , existe una curva causal  $\lambda$  que implica que  $p < q$ .  $\square$

**Observación 22.** En particular, en un espaciotiempo  $M$  globalmente hiperbólico, todos los conjuntos  $J_p^+$ ,  $J_p^-$  y  $J(p, q)$  son cerrados.

## 4.4. Condiciones para la hiperbolicidad global

El objetivo de esta sección es introducir el concepto de **hipersuperficie de Cauchy** y usando esta herramientas dar condiciones que determinen que una variedad es globalmente hiperbólica. Para hacerlo primero tenemos que tratar brevemente un concepto que ya hemos definido, que es el concepto de **conjuntos acronales**.

### 4.4.1. Conjuntos acronales

Recordemos que un conjunto acronal  $A \subset M$  es un conjunto con la propiedad que toda curva temporal que lo interseca lo hace una sola vez. O sea, si  $p, q \in A$ , no puede suceder que  $p < q$ . Claramente, un subconjunto de un conjunto acronal es acronal y, por el Lema 24, la clausura de un conjunto acronal es acronal.

**Definición 59.** *El borde de un conjunto acronal  $A$  se define como los puntos  $p \in \overline{A}$  tal que todo entorno  $p \in \mathcal{U}$  contiene una curva temporal desde  $I^-(p, \mathcal{U})$  a  $I^+(p, \mathcal{U})$  que no interseca a  $A$ . Lo notaremos  $\text{borde}(A)$ .*

**Ejemplo 4.** *En  $\mathbb{R}_1^2$  (espacio de Minkowski de dimension 2), el segmento  $A = \{(t, x) : 0 \leq x \leq 1, t = 0\}$  es acronal con borde  $\{(0, 0), (0, 1)\}$ . Si consideramos al mismo conjunto  $A$  en  $\mathbb{R}_1^3$ , el borde de  $A$  es  $\overline{A}$ .*

Recordemos que una **hipersuperficie topológica**  $S \subset T$  es un conjunto tal que para todo  $p \in S$  existe un entorno  $p \in \mathcal{U} \subset T$  (al que, claramente, llamaremos *carta*) y un homeomorfismo  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$  tal que  $\phi(\mathcal{U} \cap S) = \phi(\mathcal{U}) \cap \Pi$ , con  $\Pi$  un hiperplano.

La demostración de la siguiente proposición se puede encontrar en la página 413 de [15].

**Proposición 33.** *Un conjunto acronal  $A$  es una hipersuperficie topológica si y sólo si  $A \cap \text{borde}(A) = \emptyset$ .*

**Corolario 9.** *Un conjunto acronal  $A$  es una hipersuperficie topológica cerrada si y solo si  $\text{borde}(A) = \emptyset$ .*

*Demostración.* La proposición anterior dice que  $A \cap \text{borde}(A) = \emptyset$ . Pero si  $A$  es cerrada,  $\text{borde}(A) \subset \overline{A} = A$ , luego  $\text{borde}(A) = \emptyset$ . Ahora supongamos que  $\text{borde}(A) = \emptyset$ . La proposición nos dice que  $A$  es una hipersuperficie topológica. Falta ver que es cerrada, y para eso probaremos la siguiente inclusión:  $\overline{A} - A \subset \text{borde}(A)$ . Sea  $q \in \overline{A} - A$ . Como  $\overline{A}$  es acronal, ninguna curva temporal que pase por  $q$  puede intersecar a  $A$ . Luego  $q \in \text{borde}(A)$ .  $\square$

**Definición 60.** *Un subconjunto  $F \subset M$  se llama un **conjunto futuro** si  $I^+(F) \subset F$ . Por ejemplo, si  $A$  es un conjunto cualquiera,  $J^+(A)$  es un conjunto futuro.*

**Lema 31.** *Si  $F$  es un conjunto futuro, entonces  $\partial F$  es una hipersuperficie topológica acronal y cerrada.*

*Demostración.* Sea  $p \in \partial F$ . Si  $q \in I^+(p)$ ,  $I^-(q)$  es un entorno de  $p$  y por lo tanto contiene un punto de  $F$ . Luego  $q \in I^+(F) \subset F$ , lo que nos dice que  $I^+(p) \subset F$ . Análogamente,  $I^-(p) \subset M - F$ . Esto tiene dos consecuencias. En primer lugar,  $I^-(\partial F) \cap I^+(\partial F) = \emptyset$ , por lo tanto  $\partial F$  es acronal. En segundo lugar, el conjunto cerrado  $\partial F$  tiene borde vacío porque, si  $p \in \partial F$ ,  $I^+(p) \subset F^\circ$  y  $I^-(p) \subset (M - F)^\circ$ . Entonces el resultado es consecuencia del corolario anterior.  $\square$

### 4.4.2. Hipersuperficies de Cauchy

La definición de una hipersuperficie de Cauchy fue introducida por Geroch en el año 1970. Este concepto nos da criterios sumamente útiles para determinar si un espaciotiempo es globalmente hiperbólico (es más, en muchos textos, estos criterios reemplazan a la definición que hemos dado).

**Definición 61.** Una *hipersuperficie de Cauchy en  $M$*  es un conjunto  $S$  que es intersecado una sola vez por toda curva temporal inextendible en  $M$ .

**Observación 23.** Si  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy, entonces  $M = I^-(S) \cup S \cup I^+(S)$ , y la unión es disjunta.

**Lema 32.** Sea  $\alpha$  una curva causal pasado-inextendible que comienza en  $p$  y no interseca a un cerrado  $C$ . Si  $p_0 \in I^+(p, M - C)$ , existe una curva temporal pasado-inextendible que comienza en  $p_0$  que no interseca a  $C$ .

*Demostración.* Como  $\alpha$  es pasado-inextendible, podemos asumir que tiene dominio  $[0, \infty)$  y que  $\{\alpha(n)\}$  no converge. Trabajaremos en la variedad  $M - C$ , y todos los puntos y relaciones de causalidad las consideraremos en ella.

Como  $p_0 > \alpha(0)$ ,  $p_0 > \alpha(1)$ , y tomamos un punto  $p_1$  tal que  $\alpha(1) < p_1 < p_0$ . Inductivamente, construimos una sucesión  $\{p_n\}$  tal que  $\alpha(n) < p_n < p_{n-1}$  para todo  $n \geq 1$ , y además hacemos que cada  $p_n$  esté lo suficientemente cerca de  $\alpha_n$  de tal forma que  $\{p_n\}$  no converja. Unimos a cada  $p_{n-1}$  con  $p_n$  por una curva temporal y obtenemos una curva temporal dirigida al pasado  $\beta \subset M - C$  con  $\beta(0) = p_0$  que resulta pasado-inextendible.  $\square$

**Lema 33.** Una hipersuperficie de Cauchy  $S$  es una hipersuperficie topológica acronal, cerrada y es intersecada por toda curva causal inextendible.

*Demostración.* Toda curva temporal que pasa por cualquier punto de  $S$  interseca tanto a  $I^-(S)$  como a  $I^+(S)$ , luego  $S = \partial I^-(S) = \partial I^+(S)$ . Por el Lema 31, resta ver que  $S$  es intersecado por toda curva causal inextendible  $\alpha$ . Supongamos que eso no sucede, y, sin perder generalidad, podemos asumir que  $\alpha(0) \in I^+(S)$ . Por el Lema 32, existe una curva temporal pasado-inextendible  $\beta$  que comienza en  $I^+(S)$  y no interseca a  $S$ . Cualquier curva temporal dirigida al futuro que comienza en  $\beta(0)$  debe mantenerse en  $I^+(S)$ , por lo tanto, si la concatenamos con  $\beta$ , obtenemos una curva temporal inextendible que no interseca a  $S$ , lo que es absurdo.  $\square$

**Proposición 34.** Sea  $S$  una hipersuperficie de Cauchy en  $M$ , y sea  $X$  un campo vectorial temporal en  $M$ . Si  $p \in M$ , una curva integral que pasa por  $p$  debe intersecar a  $S$  en un único punto, al que llamaremos  $\rho(p)$ . La función  $\rho : M \rightarrow S$  es continua, sobreyectiva y deja fijo a  $S$ .



*Demostración.* Sabemos que las curvas integrales de  $X$  son inextensibles. Sea  $\bar{\psi} : \mathcal{D} \rightarrow M$  el flujo de  $X$ . Como  $\mathcal{D} \subset M \times \mathbb{R}$  es abierto y  $S$  es una hipersuperficie topológica, el conjunto  $\mathcal{D}(S) = (S \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}$  es una hipersuperficie topológica en  $\mathcal{D}$ . La restricción  $\psi : \mathcal{D}(S) \rightarrow M$  es continua y, como  $S$  es de Cauchy, es una biyección.  $\mathcal{D}(S)$  y  $M$  son variedades topológicas de la misma dimensión. Por el teorema de la invariancia del dominio de Brouwer tenemos que  $\psi$  es un homeomorfismo. La proyección canónica  $\pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$  es abierta, continua y sobreyectiva. Como  $\rho \circ \psi(p, t) = \rho(\alpha_p(t)) = \alpha_p(0) = p$  (para  $p \in S$ ), tenemos que  $\rho = \pi \circ \psi^{-1}$ . Por lo tanto  $\rho$  es continua y sobreyectiva, y es claro que deja fijo a  $S$ .  $\square$

**Observación 24.** *La proposición anterior nos da una característica más de las hipersuperficies de Cauchy: si la variedad  $M$  es conexa, también lo será  $S$ .*

El siguiente corolario corresponde a Geroch, y es un resultado trascendental en el estudio de las hipersuperficies de Cauchy.

**Corolario 10.** *Todas las hipersuperficies de Cauchy en  $M$  son homeomorfas.*

*Demostración.* Sean  $S, T$  hipersuperficies de Cauchy de  $M$ . Fijando un campo vectorial temporal, consideramos  $\rho_S$  y  $\rho_T$  las correspondientes funciones definidas en la proposición anterior. A partir de la definición, es claro que  $\rho_T|_S \circ \rho_S|_T = id|_T$  y  $\rho_S|_T \circ \rho_T|_S = id|_S$   $\square$

Existe una equivalencia más de hiperbolicidad global, que enunciaremos sin demostración, y se puede encontrar en [17].

**Teorema 14.** *Una variedad es globalmente hiperbólica si y sólo si es establemente causal y  $D(S_x) = M$  para todo  $S_x = f^{-1}(x)$ , con  $f$  una función global de tiempo.*

En particular, esta equivalencia nos dice que todo espacio globalmente hiperbólico es difeomorfo a  $N \times \mathbb{R}$ , con cada  $N_t = N \times t$ ,  $t \in \mathbb{R}$  una hipersuperficie de Cauchy. La prueba de que esta hipersuperficie de Cauchy es suave se puede encontrar en [2].

### 4.4.3. Dominios de dependencia

A continuación definiremos el concepto de dominio de dependencia. Intuitivamente, el dominio de dependencia de un conjunto acronal  $S$  será el conjunto de eventos que reciben toda la información por parte de  $S$ .

**Definición 62.** *Si  $S$  es un conjunto acronal de  $M$ , el **dominio de dependencia futuro de  $S$** , notado  $D^+(S)$ , es el conjunto de todos los puntos  $p \in M$  tal que toda curva causal inextensible dirigida al pasado que pasa por  $p$  interseca a  $S$ . Intercambiando las palabras 'futuro' por 'pasado' y viceversa, obtenemos la definición de  $D^-(S)$ . El **dominio de dependencia de  $S$**  es  $D(S) = D^-(S) \cup D^+(S)$*

**Observación 25.**  $S \subset D^+(S) \subset J^+(S)$ , y  $D^+(S)$  es el conjunto de puntos de  $J^+(S)$  que pueden predecirse a partir de  $S$ : ninguna trayectoria pasado-inextensible de una partícula o rayo de luz puede alcanzar un evento  $q \in D^+(S)$  sin haber pasado previamente por  $S$ .

**Ejemplo 5.** En  $\mathbb{R}_1^n$ , si  $A$  es un hiperplano de la forma  $t = c$ , entonces  $D^+(A) = \{(t, x) : t \geq c\}$  y similarmente para  $D^-(A)$ . Por lo tanto,  $D(A) = \mathbb{R}_1^n$ . Un ejemplo menos trivial: si  $\overline{M} = \mathbb{R}_1^n \times S^1$ , consideramos  $M = \overline{M} - \{p\}$  y  $S$  un círculo espacial en  $M$ . Si consideramos  $\alpha$  y  $\beta$  las geodésicas nulas que comienzan en  $p$ , obtenemos que  $D^+(S)$  es la unión de  $S$  con la región abierta comprendida entre  $S$  y las dos geodésicas. Por otro lado,  $D^-(S) = J^-(S)$ .

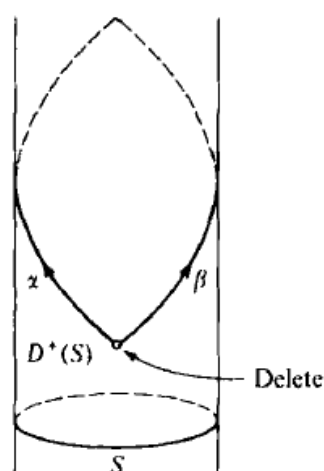


Imagen extraída de [15].

**Observación 26.** Siguiendo la línea del Lema 33, un conjunto acronal  $S \subset M$  es una hipersuperficie de Cauchy si y sólo si  $D(S) = M$ . Por lo tanto,  $D(S)$  resulta ser el subconjunto maximal para el cual  $S$  cumple el rol de una hipersuperficie de Cauchy.

La definición de  $D(A)$  tiene sentido para cualquier conjunto  $A$ , y

$$D^+(A) \subset A \cup I^+(A) \subset J^+(A)$$

Si asumimos que  $A$  es acronal,  $D^+(A) \cap I^-(A) = \emptyset$ , por lo tanto  $D^+(A) \cap D^-(A) = A$  y  $D^+(A) - A = D(A) \cap I^+(A)$ .

**Lema 34.** Una curva causal  $\alpha$  dirigida al pasado que comienza en  $D^+(A)$  no puede abandonar  $D^+(A)$  sin pasar por  $A$ .

*Demostración.* Si  $\alpha(s) \notin D^+(A)$  existe una curva causal pasado-inextensible  $\beta$  que comienza en  $\alpha(s)$  que no interseca a  $A$ , pero  $\alpha|_{[0,s]} * \beta$  debe intersecar a  $A$ , luego  $\alpha|_{[0,s)}$  interseca a  $A$ .  $\square$

En algunos textos se suelen referir al lema anterior como *regresión*.

**Lema 35.** *Si  $A$  es acronal y  $p \in D(A)^\circ$ , entonces toda curva causal inextensible que pasa por  $p$  interseca tanto a  $I^-(A)$  como a  $I^+(A)$ .*

*Demostración.* Podemos suponer, sin perder generalidad, que  $p \in A \cup I^+(A)$ . Sea  $\alpha$  una curva causal inextensible que comienza en  $p$ . Por la demostración del Lema 32, tomando  $C = \emptyset$ , tenemos una curva causal pasado-inextensible  $\beta$  que comienza en  $D(A) \cap I^+(A) \subset D^+(A)$  tal que cada  $\beta(s)$  tiene un punto de  $\alpha$  en  $I^-(\beta(s))$ . Como  $\beta$  interseca a  $A$ ,  $\alpha$  interseca a  $I^-(A)$ .

Ahora sea  $\gamma$  una curva causal futuro-inextensible que comienza en  $p$ . Si  $p \in A$ , un razonamiento dual al anterior nos dice que  $\gamma$  interseca a  $A$ . Si  $p \in I^+(A)$ , no hay nada que probar.  $\square$

Este lema nos da la posibilidad de probar el siguiente teorema, que también nos dará un criterio (que será el corolario posterior al teorema) para identificar si una variedad es globalmente hiperbólica o no.

**Teorema 15.** *Sea  $A$  un conjunto acronal. Si  $D(A)^\circ$  es no vacío, entonces  $D(A)^\circ$  es globalmente hiperbólico.*

*Demostración.* La demostración consta de 4 pasos.

**Paso 1:** *la condición causal vale en  $D(A)$ .* Supongamos que hay una curva causal cerrada  $\gamma$ , y sea  $p \in D(A)$  un punto de ella. Si llamamos  $\bar{\gamma} = \gamma * \gamma * \dots$ , tenemos que  $\bar{\gamma}$  es una curva causal inextensible que interseca infinitas veces a  $A$ , lo que contradice el hecho que  $A$  sea acronal.

**Paso 2:** *la condición causal fuerte vale en  $p \in D(A)^\circ$ .* Supongamos que esto no sucede, y en ese caso podríamos encontrar una sucesión  $\{\alpha_n\}$  de segmentos de curva causales dirigidos al futuro definidos en  $[0, 1]$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n(1) = p$ , pero ninguna  $\alpha_n$  está contenida en cierto entorno (fijo) de  $p$ . Luego  $\{\alpha_n\}$  tiene una sucesión límite dirigida al futuro  $\{p_i\}$ , con  $p_0 = p$ . Si  $\{p_i\}$  fuera finita, terminaría en  $\lim \alpha_n(1) = p$ , pero esto implicaría que  $p < p$ , lo que contradice lo demostrado en el paso 1. Por lo tanto  $\{p_i\}$  es infinita, lo que nos dice que el cuasilímite  $\lambda$  es futuro-inextensible. Por el Lema 35,  $\lambda$  debe ingresar en  $I^+(A)$ , y por lo tanto quedarse allí. Esto nos dice que alguno de los vértices  $p_i$  está en  $I^+(A)$ . Por lo tanto hay una subsucesión  $\{\alpha_{n_k}\}$  y (quizás bajo reparametrización) un número  $s \in [0, 1]$  tal que  $\lim \alpha_{n_k}(s) = p_i$ . Podemos asumir que todos los  $\alpha_{n_k}(s) \in I^+(A)$ . Como  $p_i \neq p$ , aplicando el dual de la Proposición 30 a  $\{\alpha_{n_k}|_{[s,1]}\}$  obtenemos una sucesión límite dirigida al pasado  $\{\bar{p}_i\}$  con  $\bar{p}_0 = p$ . Si  $\{\bar{p}_i\}$  fuera

finita, debería terminar en  $\lim \alpha_{n_k}(s) = p_i$ , lo que nos diría que  $p_i < p$ . Como ya sabemos que  $p < p_i$ , obtenemos nuevamente la contradicción  $p < p$ . Por lo tanto  $\{\bar{p}_i\}$  es infinita. El cuasilímite obtenido  $\bar{\lambda}$  es una curva causal pasado-inextensible que comienza en  $p$ . Por el Lema 35 debe intersectar a  $I^-(A)$ . Entonces algunos  $\alpha_{n_k}|_{[s,1]}$  deben intersectar a  $I^-(A)$ . El hecho que  $\alpha_{n_k}$  estén dirigidas al futuro y que  $\alpha_{n_k}(s) \in I^+(A)$  contradicen la acronalidad de  $A$ .

**Paso 3:** Si  $p \leq q$  en  $A^\circ$ , entonces  $J(p, q)$  es compacto. Si  $p = q$ , el paso 1 nos dice que  $J(p, q) = \{p\}$ , por lo tanto podemos suponer que  $p < q$ . Tomemos una sucesión  $\{x_n\} \subset J(p, q)$  y veamos que tiene una subsucesión convergente en  $J(p, q)$ . Sea  $\alpha_n$  un segmento de curva causal dirigida al futuro que comienza en  $p$ , pasa por  $x_n$  y finaliza en  $q$ . Sea  $\mathfrak{R}$  un cubrimiento de  $M$  por abiertos convexos tal que si  $\mathcal{C} \in \mathfrak{R}$ ,  $\bar{\mathcal{C}}$  es compacto y está contenido en un abierto convexo. Todas las sucesiones límites que consideraremos serán relativas a este cubrimiento  $\mathfrak{R}$ . Tomamos una de ellas, que comience en  $p$ . Supongamos primero que es finita, o sea que  $p_k = q$ . Siguiendo la parte 1 de la Definición 50, tomamos una subsucesión  $\{\alpha_m\}$ . Debe existir un  $i < k$  tal que, para infinitos  $m$ , el punto  $x_m$  cae en el  $i$ -ésimo segmento  $\alpha|_{[s_m, i, s_m, i+1]}$ . Nos quedamos entonces solamente en la subsucesión  $x_{m_r}$  de  $x_m$  que cumple con esta propiedad, y para no sobrecargar la notación la notaremos  $x_r$ . Por la parte 1 de la definición, los segmentos (y por lo tanto los puntos  $x_r$ ) están todos contenidos en un solo abierto convexo  $\mathcal{C} \in \mathfrak{R}$ . Por las propiedades de  $\mathcal{C}$ , sabemos que (quizás apelando nuevamente a una subsucesión)  $x_r$  converge a un punto  $x$ . Por la observación hecha en la demostración del punto 5 en el Teorema 9, tenemos que  $p_i \leq x \leq p_{i+1}$ . Por lo tanto,  $p \leq x \leq q$ , lo que significa que  $x \in J(p, q)$ .

Hasta acá hemos probado la proposición asumiendo que  $\{p_i\}$  es finita. Para terminar el paso 3, la estrategia es suponer que toda sucesión límite de  $\{\alpha_n\}$ , relativa a  $\mathcal{R}$  y que comienza en  $p$  es infinita, y llegar a una contradicción. Sea  $\lambda$  un cuasilímite, que es una curva causal, futuro-inextensible que comienza en  $p$ . De la misma forma que antes, obtenemos una subsucesión  $\alpha_m$  y (reparametrizando) un  $s$  tal que  $\{\alpha_m(s)\}$  converge a un vértice  $p_i \in I^+(A)$ . Como  $p_i \neq q$ , aplicando el dual de la Proposición 30 a  $\{\alpha_m|_{[s,1]}\}$  obtenemos una sucesión límite dirigida al pasado  $\{q_i\}$  que comienza en  $q$ . Si esta sucesión límite fuera finita, debe terminar en  $\lim \alpha_m(s) = p_i$ . Por lo tanto, tenemos que  $p < p_1 < \dots < p_i < \dots < q_1 < q$  es una sucesión límite finita para  $\{\alpha_n\}$  que comienza en  $p$ , lo que resulta ser una contradicción. Por lo tanto,  $\{q_i\}$  es infinita. El cuasilímite obtenido  $\mu$  es una curva causal pasado-inextensible que comienza en  $q$ . De la misma forma que antes,  $\mu$  interseca a  $I^-(A)$ , por lo tanto algunos  $\alpha_m|_{[s,1]}$  también. Como  $\alpha_m(s) \in I^+(S)$ , obtenemos una contradicción con la acronalidad de  $A$ .

**Paso 4:** si  $p \leq q$  en  $D(A)^\circ$ , entonces  $J(p, q) \subset D(A)^\circ$ . Como antes, podemos asumir que  $p < q$ . Por argumentos de dualidad, solamente tenemos que considerar dos casos:

1. Caso 1:  $p, q \in I^+(A)$ . Tomamos  $q^+ \in I^+(q) \cap D(A) \subset D^+(A)$ . Como el conjunto  $\mathcal{N} = I^+(A) \cap I^-(q^+)$  es un abierto tal que  $J(p, q) \subset \mathcal{N}$ , con probar que  $\mathcal{N} \subset D^+(A)$  alcanzaría. Sea  $y \in \mathcal{N}$  y  $\sigma$  una curva temporal dirigida al pasado desde  $q^+$  hasta  $y$ . Como  $A$  es acronal e  $y \in I^+(A)$ ,  $\sigma$  no puede intersectar a  $A$ . Por regresión (Lema 34),  $y \in D^+(A)$ .
2. Caso 2:  $p \in J^-(A)$ ,  $q \in J^+(A)$ . Como  $p, q \in D(A)^\circ$ , existen puntos  $p^- \in D^-(A) \cap I^-(p)$  y  $q^+ \in I^+(q) \cap D^+(A)$ . Necesitamos probar que  $\mathcal{N} = I^+(p^-) \cap I^-(q^+)$  está contenido en  $D(A)$ . Sea  $x \in \mathcal{N}$ , y sean  $\sigma$  y  $\gamma$  segmentos de curvas temporales dirigidas al pasado desde  $q^+$  a  $x$  y desde  $x$  a  $p^-$ , respectivamente. Como ya sabemos que  $A \subset D(A)$ , directamente podemos suponer que  $x \notin A$ . Como  $\sigma * \gamma$  une  $q^+$  con  $p^-$ , por la acronalidad de  $A$ , alguna de ambas curvas no interseca a  $A$ . Si es  $\sigma$  la que no interseca, por regresión sabemos que  $x \in D^+(A)$ . Si fuera  $\gamma$  la que no interseca, entonces  $x \in D^-(A)$ .

□

Más adelante daremos resultados que nos garantizarán que  $D(A)$  sea abierto, y por lo tanto globalmente hiperbólico. Sin embargo, en este momento tenemos un corolario inmediato (y no por ello menos importante), que también es uno de los enunciados del ya mencionado Teorema de Geroch.

**Corolario 11.** *Si  $M$  admite una hipersuperficie de Cauchy  $S$ , entonces es globalmente hiperbólico.*

*Demostración.*  $D(S) = M \implies D(S)^\circ = M$ .

□

**Lema 36.** *Sea  $A$  es acronal. Si  $p \in D(A)^\circ - I^-(A)$ , entonces  $J^-(p) \cap D^+(A)$  es compacto.*

*Demostración.* Si  $p \in A$ ,  $J^-(p) \cap D^+(A) = \{p\}$ , por lo tanto suponemos que  $p \in D(A)^\circ \cap I^+(A)$ . Sea  $\{x_n\} \subset J^-(p) \cap D^+(A)$  una sucesión y  $\{\alpha_n\}$  segmentos de curvas causales dirigidas al pasado desde  $p$  a  $x_n$ . Si existiera alguna subsucesión de  $x_n$  que converge a  $p$ , ya tendríamos probado el lema. Si esto no sucediera, existiría una sucesión límite dirigida al pasado  $\{p_i\}$  de  $\{\alpha_n\}$  que comienza en  $p$ . Si  $\{p_i\}$  fuera infinita, por un razonamiento que ya hemos repetido varias veces, tendríamos que existen algunos  $x_n$  en  $I^-(A)$ , cosa que es un absurdo. Si  $\{p_i\}$  fuera finita, alguna subsucesión  $x_{n_k}$  convergería a un  $x \in J^-(p)$ . Sea  $\sigma$  una curva temporal desde  $p^+ \in D^+(A) \cap I^+(p)$  a  $x$ . Si  $\sigma$  interseca a  $A$ ,  $x \in D^+(A)$  o  $x \in I^-(A)$ , pero esta segunda opción no puede suceder porque implicaría que existen  $x_n \in I^-(A)$ . Si  $\sigma$  no interseca a  $A$ , por regresión tenemos que  $x \in D^+(A)$ .

□

#### 4.4.4. Hipersuperficies espaciales

Al buscar ejemplos de conjuntos acronales, los primeros que surgen suelen ser hipersuperficies *espaciales* y suaves. Este tipo de conjuntos acronales tienen algunas propiedades extra que pueden ser sumamente útiles. En particular, se pueden utilizar elementos de la *teoría de transversalidad (o intersección)* que nos permitirán inducir la acronalidad de las hipersuperficies espaciales cerradas de  $M$  a partir de la trivialidad del grupo fundamental de  $M$ . Las demostraciones de esta sección se pueden encontrar en las páginas 425 a 427 de [15].

**Lema 37.** *Una hipersuperficie espacial acronal es acausal.*

**Lema 38.** *Si  $S \subset M$  es una hipersuperficie topológica acausal, entonces  $D(S)$  es abierto.*

**Observación 27.** *Es importante notar que el último lema implica que si  $S \subset M$  es una hipersuperficie topológica acausal, entonces  $D(S)$  es globalmente hiperbólica.*

**Teorema 16.** *Sea  $S$  una hipersuperficie espacial acronal cerrada de  $M$ . Si  $q \in D^+(S)$ , existe una geodésica  $\gamma$  desde  $S$  a  $q$  de longitud  $\tau(S, q)$ . Además,  $\gamma$  es normal a  $S$  y es temporal (salvo el caso trivial en el que  $q \in S$ ).*

*Demostración.* El Lema 38 implica que  $D(S)$  es un conjunto abierto globalmente hiperbólico. Por el Lema 36  $J^-(q) \cap D^+(S)$  es compacta, y por lo tanto  $J^-(q) \cap D^+(S) \cap S = J^-(q) \cap S$  es compacta. El Lema 29 implica que la función  $x \mapsto \tau(x, q)$  es continua en  $J^-(q) \cap S$ , y por lo tanto existe un  $p$  que realiza el máximo. Claramente,  $\tau(p, q) = \tau(S, q)$ . Por el Teorema 13, existe una geodésica  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  de longitud  $\tau(S, q)$ . Si  $q \notin S$ ,  $p < q$  y  $\tau(p, q) > 0$ , por lo tanto  $\gamma$  es temporal. Por la Proposición 28,  $\gamma$  es normal a  $S$ .  $\square$

**Lema 39.** *Sea  $S$  una hipersuperficie espacial conexa y cerrada de  $M$ .*

1. *Si el morfismo  $j_* : \pi_1(S) \rightarrow \pi_1(M)$ , inducido por la inclusión  $S \subset M$ , es sobreyectivo, entonces  $S$  separa a  $M$  ( $M - S$  no es conexo).*
2. *Si  $S$  separa a  $M$ , entonces  $S$  es acronal.*

**Corolario 12.** *Si  $M$  es simplemente conexa, toda hipersuperficie espacial cerrada en  $M$  es acronal.*

#### 4.4.5. Horizontes de Cauchy

Para finalizar con esta sección definiremos otro concepto que nos resulta importante.

**Definición 63.** Si  $A$  es un conjunto acronal, el **horizonte futuro de Cauchy** es  $H^+(A) = \overline{D^+(A)} - I^-(D^+(A)) = \{p \in \overline{D^+(A)} : I^+(p) \cap D^+(A) = \emptyset\}$ .

El **horizonte pasado de Cauchy** se define dualmente y se nota  $H^-(A)$ .

El **horizonte de Cauchy** es  $H(A) = H^-(A) \cup H^+(A)$ .

En  $H^+(A)$  se busca describir al límite de la región del espaciotiempo controlada por  $A$ . Si  $H^+(A) \neq \emptyset$ , tendríamos que todo el futuro de  $A$  no puede predecirse a partir de  $A$ . La siguiente imagen ilustra un ejemplo de horizonte futuro de Cauchy en  $R_1^2$  al sacarle una semirecta espacial.

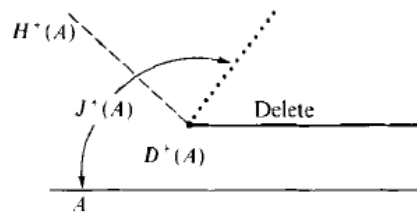


Imagen extraída de [15].

**Observación 28.** Claramente,  $H^+(A)$  es cerrado. También es acronal, porque  $I^+(H^+(A)) \cap D^+(A) = \emptyset$  y luego, como  $I^+(H^+(A))$  es abierto,  $I^+(H^+(A)) \cap \overline{D^+(A)} = \emptyset$ , por lo tanto  $I^+(H^+(A)) \cap H^+(A) = \emptyset$ .

**Lema 40.** Sea  $A$  es un conjunto cerrado y acronal, y sea  $T$  el conjunto de puntos tal que toda curva temporal inextensible que pasa por  $p$  interseca a  $A$ . Entonces  $\overline{D^+(A)} = T$ .

*Demostración.* Veamos que  $\overline{D^+(A)} \subseteq T$ . Supongamos que tenemos un  $p \in \overline{D^+(A)} - T$ . Entonces tenemos una curva temporal inextensible  $\alpha$  que comienza en  $p$  y no interseca a  $A$ . En particular  $p \notin A$ , entonces podemos tomar un entorno convexo  $p \in \mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{C} \cap A = \emptyset$ . Nos movemos desde  $p$  hacia el pasado sobre  $\alpha$  hasta un punto  $r \in \mathcal{C}$ . Por lo tanto  $p \in I^+(r, \mathcal{C})$ , lo que implica que debe contener también un punto  $q \in D(A)$ . Si concatenamos el segmento geodésico contenido en  $\mathcal{C}$  que une  $q$  con  $r$  con la parte de  $\alpha$  a partir de  $r$  obtenemos una curva temporal pasado-inextensible que no interseca a  $A$ , lo que contradice el hecho que  $q \in D^+(A)$ .

Ahora veamos que  $T \subseteq \overline{D^+(A)}$ . Si  $q \notin \overline{D^+(A)}$ , tomamos  $r \in I^-(q, M - \overline{D^+(A)})$ . Existe una curva causal pasado-inextensible  $\alpha$  que comienza en  $r$  que no interseca a  $A$ . Por el Lema 32, existe una curva temporal pasado-inextensible que comienza en  $q$  que no interseca a  $A$ . Por lo tanto  $q \notin T$ .  $\square$

**Lema 41.** Si  $A$  es un conjunto cerrado y acronal, entonces  $\partial D^+(A) = A \cup H^+(A)$ .



*Demostración.*  $A \cup H^+(A) \subset \partial D^+(A)$  es claro por la definición de  $H^+(A)$  y el hecho de que  $A$  sea acronal.

Supongamos que  $p \in \partial D^+(A) - A - H^+(A)$ . En particular tenemos que  $p \in \partial D^+(A) - A$ , y el Lema 40 nos dice que  $p \in I^+(A)$ . Por otro lado,  $p \in \partial D^+(A) - H^+(A)$ , entonces hay un punto  $q \in I^+(p) \cap D^+(A)$ . Por lo tanto,  $I^+(A) \cap I^-(q)$  es un entorno de  $p$  que debe estar contenido en  $D^+(A)$  (por regresión), lo que contradice que  $p \in \partial D^+(A)$   $\square$

La demostración del siguiente lema se puede encontrar en [15], página 416.

**Lema 42.** *Sea  $\alpha$  una curva causal pasado inextensible que comienza en  $p$  que no interseca a un cerrado  $C$ . Si  $\alpha$  es una geodésica nula sin puntos conjugados, entonces existe una curva temporal pasado inextensible que comienza en  $\alpha(0)$  que no interseca a  $C$ .*

**Proposición 35.** *Sea  $S$  una hipersuperficie topológica cerrada y acausal. Entonces tenemos las siguientes propiedades:*

1.  $H^+(S) = I^+(S) \cap \partial(D^+(S)) = \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ .
2.  $H^+(S) \cap S = \emptyset$ .
3. Si no es vacía,  $H^+(S)$  es una hipersuperficie topológica acronal y cerrada.
4. Comenzando en cada punto de  $H^+(S)$  existe una geodésica lumínica pasado-inextensible sin puntos conjugados que está contenida en  $H^+(S)$ .

*Demostración.* Empecemos por el punto 1. Para demostrarlo, probaremos pequeñas propiedades que nos llevarán al resultado deseado.

1. El Lema 40 nos dice que  $H^+(S) \subset \overline{D^+(S)} \subset S \cup I^+(S)$ .
2. Veamos que  $D^+(S) \cap H^+(S) = \emptyset$ . Por el Lema 38,  $D(S)$  es abierto, lo que nos dice que si  $p \in D^+(S) \subset D(S)$  entonces  $I^+(p) \cap D(S) \neq \emptyset$ , pero  $I^+(p) \cap D^-(S) = \emptyset$ . Luego,  $I^+(p) \cap D^+(S) \neq \emptyset$  que implica  $p \notin H^+(S)$ .
3. Como  $S \subset D(S)$ , el punto 1 y 2 nos dice que  $H^+(S) \subset I^+(S)$ .
4. Por Lema 41,  $I^+(S) \cap \partial(D^+(S)) = H^+(S)$ .
5. Por 2,  $H^+(S) \subset \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ . Veamos la otra inclusión. Sea  $p \in \overline{D^+(S)} - D^+(S)$ . Si  $q \in I^+(p)$ , existe una curva temporal dirigida al pasado desde  $q$  a  $p$  que no interseca a  $S$  (porque  $p \notin S \cup I^-(S)$ ). También existe una curva temporal pasado-inextensible que comienza en  $p$  que no interseca a  $S$ . Esto nos dice que  $q \notin D^+(S)$ , que implica que  $p \in H^+(S)$ .



La propiedad 2 se deduce directamente de la 1.

Continuamos con la propiedad 3. Llamo  $P = D^+(S) \cup I^-(S)$ , que, por regresión, es un conjunto pasado (definido análogamente a la definición en página 62). Por el Lema 31 sabemos que  $\partial P$  es una hipersuperficie topológica. Como  $I^+(S) \cap I^-(S) = \emptyset$  y ambos son abiertos, y por 1 sabemos que  $H^+(S) = I^+(S) \cap \partial(D^+(S))$ , nos queda que  $H^+(S) = I^+(S) \cap \partial P$ . Esto nos dice que  $H^+(S)$  es una hipersuperficie topológica, y ya sabíamos que era cerrada y acronal.

Nos faltaría ver el propiedad 4. Sea  $p \in H^+(S)$ . Por 1, debe existir una curva causal  $\gamma$  pasado-inextensible que comienza en  $p$  que no interseca a  $S$ . Por el Lema 40,  $\gamma$  no puede ser temporal. El Lema 42 nos dice que  $\gamma$  es una geodésica nula libre de conjugados. Nos faltaría ver que está contenida en  $H^+(S)$ . Si  $\gamma$  intersecara a  $\overline{D^+(S)}$  también intersecaría a  $S$ , cosa que no sucede. Si existiera  $s > 0$  tal que  $\gamma(s) \notin \overline{D^+(S)}$ , existiría una curva temporal  $\beta$  dirigida al pasado pasado-inextensible que comienza en  $\gamma(s)$  que no interseca a  $S$ . Pero si aplicamos el Lema 42 a la curva  $\gamma|_{[0,s]} * \beta$  obtendríamos una contradicción al hecho que  $\gamma(0) = p \in \overline{D^+(S)}$ .  $\square$

En la propiedad 4, si se extiende estas geodésicas lo máximo posible en  $H^+(S)$ , a estas se las llama *generadoras de  $H^+(S)$* .

**Proposición 36.** *Sea  $S$  una hipersuperficie topológica cerrada y acausal. Entonces  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy si y sólo si  $H(S) = \emptyset$ .*

*Demostración.* Como la frontera de una unión está contenida dentro de la unión de las fronteras, el Lema 41 nos dice que  $\partial D(S) \subset S \cup H(S)$ . Como  $D(S)$  es abierto y  $S \subset D(S)$ , tenemos que  $\partial D(S) \subset H(S)$ . Como  $H(S) \subset \partial D(S)$  vale siempre, probamos la igualdad  $H(S) = \partial D(S)$ . Como  $M$  es conexa, que  $H(S) = \emptyset$  es equivalente a que  $D(S) = M$ , que es equivalente a que  $S$  sea una hipersuperficie de Cauchy.  $\square$

**Corolario 13.** *Sea  $S$  una hipersuperficie topológica cerrada y acausal. Si toda geodésica nula inextensible interseca a  $S$ , entonces  $S$  es una hipersuperficie de Cauchy.*

*Demostración.* Por la propiedad 36 basta ver que  $H(S) = \emptyset$ . Sin perder generalidad, asumamos que existe un  $p \in H^+(S)$ . Por la Proposición 35, el generador  $\gamma$  (geodésica nula pasado-inextensible) de  $H^+(S)$  que pasa por  $p$  no interseca a  $S$ . Si extendemos  $\gamma$  a una curva inextensible, este no puede intersecar a  $S$  en el futuro porque  $S$  es acronal y  $p \in I^+(S)$ , lo que es una contradicción.  $\square$

# CAPÍTULO 5

---

## Relatividad General

---

En el presente capítulo introduciremos las ecuaciones de Einstein, que relacionan la presencia de materia (codificada en el tensor energía-impulso) con la curvatura del espaciotiempo. Mostraremos dos métodos distintos para encontrar estas ecuaciones, siendo la segunda el estudio de la acción de Einstein-Hilbert. Usando un razonamiento análogo, podremos encontrar las ecuaciones que se desprenden de una teoría más general de gravedad llamada *gravedad  $f(R)$* . Finalmente, terminaremos el capítulo definiendo ciertas condiciones de energía que luego utilizaremos en el capítulo 6 como hipótesis en los teoremas de singularidad de Hawking.

### 5.1. Ecuación de Einstein

Las ecuación de Einstein es una ecuación tensorial, donde se relaciona la curvatura del espaciotiempo con la presencia de materia en el mismo. La presencia de materia se codifica a través de un tensor simétrico  $T$  de tipo  $(0, 2)$  llamado *tensor de energía-impulso*. Este tensor describe la densidad y el flujo de energía y momento en el espaciotiempo.

#### 5.1.1. Heurística

Originalmente, Einstein propuso que la ecuación que relacionara la curvatura del espaciotiempo con el tensor energía-impulso fuera de la forma

$$G = kT$$

para cierto tensor  $G$  que debe ser alguna variante del tensor de Ricci. Por comodidad, la constante  $k$  la tomaremos como unitaria (aunque no lo sea). Por cuestiones físicas, el tensor  $T$  tiene divergencia cero, por lo tanto  $G$  también debería tener divergencia cero. La Proposición 16 nos dice que  $\text{div}(\text{Ric}) = \frac{1}{2}dS$ , con  $S = C(\text{Ric})$ . De este hecho surge el candidato:

**Definición 64.** Sea  $M$  un espaciotiempo con tensor energía-impulso  $T$ , definimos al tensor de Einstein como  $G = \text{Ric} - \frac{1}{2}Sg$  y obtenemos la ecuación de Einstein

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}Sg = T$$

$G$  es un tensor simétrico de tipo  $(0, 2)$  con divergencia cero. Además

$$C(G) = C(\text{Ric}) - \frac{1}{2}SC(g) = S - \frac{n+1}{2}S = \frac{1-n}{2}S$$

Por lo tanto,

$$\text{Ric} = G + \frac{1}{2}Sg = G - \frac{1}{n-1}C(G)g$$

lo que implica que el tensor de Einstein contiene la misma información que el tensor de Ricci. Si contraemos la ecuación de Einstein, obtenemos que

$$S = \frac{-2}{n-1}C(T)$$

Reemplazando en la misma ecuación de Einstein nos queda

$$\text{Ric} = T - \frac{C(T)}{n-1}g$$

### 5.1.2. Acción de Einstein Hilbert y gravedad f(R)

En esta sección mostraremos que las ecuaciones de Einstein se puede obtener también como las ecuaciones de Euler-Lagrange de cierta acción.

**Definición 65.** Se define la **acción de Einstein-Hilbert**  $\bar{S}$  a

$$\bar{S}[g] = \frac{1}{2k} \int S(-g)^{\frac{1}{2}} d^{n+1}x$$

con  $S$  el escalar de Ricci,  $g = \det(g_{ij})$  y  $k$  una constante. La integral se toma sobre todo el espaciotiempo si converge. Si no converge, se la toma sobre dominio relativamente compactos arbitrariamente grandes.

En [10], capítulo 11 sección 95 se demuestra que, vía el principio de acción mínima, al variar la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange, que son exactamente las ecuaciones de Einstein.

Muchos físicos se dedicaron a estudiar una familia de teorías que generalizan de Relatividad General de Einstein. El físico Hans Adolph Buchdahl fue el primero en estudiarlas en el año 1970. Estas teorías se obtienen de forma análoga a lo visto con la acción de Einstein-Hilbert, pero consideran una función del escalar de Ricci en lugar del escalar de Ricci mismo. O sea, la acción que se considera es

$$\bar{S}_f[g] = \frac{1}{2k} \int f(S)(-g)^{\frac{1}{2}} d^{n+1}x$$

El interés de estas teorías radica en que, al considerar una función arbitraria, se agrega libertad para poder crear modelos que incluyan ciertas consecuencias cosmológicas que son observadas, o que sean compatibles con otras teorías físicas.

En [5] se prueba que al aplicar el principio de mínima acción en  $\bar{S}_f$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$f'(S)Ric - \frac{1}{2}f(S)g - [\nabla\nabla - g\Box]f'(R) = kT$$

con  $\Box$  el operador de D'Alembert ( $\Box = \sum_{i,j} g^{ij} \nabla_i \nabla_j$ ).

## 5.2. Condiciones de energía

La ecuación de Einstein relaciona la curvatura del espaciotiempo con el tensor energía-impulso. Las condiciones para que el tensor energía-impulso sea físicamente razonable se llaman **condiciones de energía**, y son un tema de debate hasta la actualidad. Existen numerosas condiciones diferentes, a saber:

- **Condición de energía nula:**  $T(X, X) \geq 0$  para todo campo vectorial lumínico dirigido al futuro  $X$ .
- **Condición de energía nula promediada:**  $\int_C T(X, X) \geq 0$  para toda curva integral  $C$  de un campo lumínico dirigido al futuro  $X$ .
- **Condición de energía débil:**  $T(X, X) \geq 0$  para todo campo temporal.
- **Condición de energía dominante:** se cumple condición de energía débil y para todo campo causal dirigido al futuro se cumple que  $(-\uparrow_1^1 T)(Y)$  es un campo causal dirigido al futuro.
- **Condición de energía fuerte:**  $(T - \frac{1}{n-1}C(T)g)(X, X) \geq 0$  para todo campo  $X$  temporal dirigido al futuro.

**Observación 29.** *Es importante notar que si se asume la condición de energía fuerte, la ecuación de Einstein implica que  $\text{Ric}(X, X) \geq 0$  para todo campo  $X$  temporal dirigido al futuro.*

## CAPÍTULO 6

---

### Teoremas de singularidad

---

En este capítulo buscaremos dar al lector la intuición de lo que es una singularidad en el contexto de Relatividad General, y utilizaremos toda la teoría desarrollada en los primeros cinco capítulos de la presente tesis para demostrar y generalizar los teoremas de singularidad de Hawking, que predicen la existencia de singularidades bajo ciertas hipótesis basadas en las condiciones de energía.

Al estudiar soluciones concretas de las ecuaciones de Einstein, en algunos casos se pueden encontrar sectores del espacio *patológicos*, como por ejemplo lugares donde la curvatura es infinita. Sin embargo, este concepto de singularidad puede ser confuso: podrían ser consecuencia de las simetrías que uno supone en el espaciotiempo. Por ejemplo, en el contexto Newtoniano, si se considera un polvo esférico en reposo, eventualmente toda la materia colapsaría simultáneamente en el origen. Sin embargo, si se perturba la esfericidad o se supone que existe cierta rotación, entonces tal singularidad no ocurriría. Por lo tanto, es interesante saber si las predicciones de singularidades son consecuencia de las simetrías del espacio de las soluciones exactas conocidas, o si son una característica intrínseca de las soluciones de las ecuaciones de Einstein. En este capítulo probaremos que, efectivamente, sucede lo segundo.

La idea detrás de los teoremas de singularidades es utilizar todos los resultados topológicos demostrados en el capítulo 4, relacionarlos con las propiedades geométricas probadas en el capítulo 3 y utilizar las condiciones geométricas dadas por la ecuación de Einstein y las condiciones de energía definidas en el capítulo 5 para mostrar que la variedad que define al espaciotiempo no puede ser geodésicamente completa. Sabemos que las geodésicas son curvas de longitud extremal. Obtendremos condiciones que impliquen que una geodésica temporal no puede rea-

lizar la longitud máxima. Usando una desigualdad del tensor de Ricci (dada por las condiciones de energía en el tensor energía-momento) mostraremos que geodésicas temporales *suficientemente largas* no pueden ser curvas de longitud maximal. Sin embargo, ya sabemos que en espaciotiempos globalmente hiperbólicos tales geodésicas deben existir. Esta contradicción implica que, bajo ciertas condiciones, geodésicas temporales "suficientemente largas" no pueden existir, y por lo tanto el espaciotiempo debe ser geodésicamente temporal incompleto.

Notar que en el caso Riemanniano, el teorema de Hopf Rinow nos da condiciones suficientes y necesarias para que una variedad sea completa. Los teoremas de singularidad surgen en variedades de Lorentz, en donde el teorema de Hopf Rinow no vale. Hopf Rinow vale en el contexto de variedades de Finsler en donde se tiene una función  $N : TM \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  dada por  $N(p, v) = \|v\|_p$ , siendo  $\|\cdot\|_p$  una norma en cada  $T_pM$ . Usando esta norma, se define el concepto de distancia dada por  $d(x, y) = \inf\{L(\alpha)\}$ , con  $L(\alpha) = \int_0^1 \|\dot{\alpha}\|_\alpha$ . El problema que se tiene al trabajar en variedades de Lorentz es que, a diferencia del caso Riemanniano, la métrica no induce un concepto de norma en cada  $T_pM$ , y por lo tanto los teoremas que aplican para variedades de Finsler no necesariamente aplican para variedades de Lorentz.

## 6.1. ¿Qué es una singularidad?

El primer problema que surgieron al estudiar las singularidades de un espaciotiempo es que no había una definición formal del concepto de singularidad, sino que consideraba que eran *lugares* donde la curvatura se vuelve infinita o en el que la métrica tiene comportamientos *patológicos*. Esta intuición falla por varias razones, pero quizás la más determinante es la de considerar a la singularidad como un *lugar*. En otras teorías físicas, uno trabaja con una métrica y una variedad previamente impuestas, en donde se conoce el lugar y el momento donde suceden los eventos, y el trabajo del físico es poder determinar los valores de ciertas propiedades físicas que suceden en estos eventos. Si alguna propiedad toma un valor infinito o no está definida en algún punto, simplemente se dice que hay una singularidad en ese punto. Sin embargo, en Relatividad General la situación es distinta ya que el enfoque es distinto, porque lo que se busca justamente es poder determinar la variedad y la métrica del espaciotiempo. Como la noción de un *evento* tiene sentido solamente si la variedad y la métrica están definidos alrededor de este, lo correcto es pensar a la variedad y a la métrica definida *en toda la variedad*.

A priori, uno estaría interesado en definir una noción de borde singular de un espaciotiempo, al agregar puntos que representen a las singularidades y definir en este conjunto una estructura de espacio topológico o, en el mejor de los casos, de una variedad diferenciable con borde. Este espacio extendido le daría a la sin-

gularidad una noción de lugar aún cuando la métrica no esté definida allí. Aún cuando esto se puede lograr en algunos ejemplos concretos de espaciotiempos, no se logró encontrar un método general para lograrlo. Hubieron varias propuestas para definir el borde singular de un espaciotiempo, como el *g-boundary* de Geroch (1968) o el *b-boundary* de Schmidt (1971), sin embargo ambas presentaban, aún en casos sencillos, patologías topológicas. Para profundizar en estos temas se puede consultar el segundo capítulo de [4]. Geroch, Kronheimer y Penrose (1972) definieron la noción de borde causal de un espaciotiempo utilizando clases de equivalencia de curvas temporales inextensibles dirigidas al futuro y al pasado para construir los puntos del borde. En este caso también surgieron problemas topológicos no deseados. Es interesante destacar que en el caso de una variedad Riemanniana, uno puede darle estructura de espacio métrico definiendo a la distancia entre dos puntos como el ínfimo de las longitudes de las curvas que los conectan. Si se toma la completación de Cauchy de tal espacio métrico, se obtiene una noción satisfactoria de borde singular. Como una estructura de Lorentz no induce una estructura natural de espacio métrico, este procedimiento no se puede aplicar.

Aunque no se podía encontrar una definición satisfactoria de singularidad, en las soluciones particulares que se encontraban de las ecuaciones de Einstein (por ejemplo, la solución de Schwarzschild o Robertson-Walker) se encontraba que efectivamente estas singularidades debían existir, ya que había límites donde la curvatura *explotaba*. Esto causó que se busque definir a una singularidad como una noción de patología en la curvatura, en donde esta tendía a infinito. Pero este método también presenta dificultades, ya que la curvatura está definida por el tensor  $R \in \mathfrak{T}_3^1$ , y para efectuar cálculos uno toma coordenadas, por lo tanto es difícil decidir si el hecho de que tienda a infinito es un problema intrínseco de la variedad y la métrica, o es un problema de la elección particular de coordenadas. Por lo tanto, esta definición también resultó insatisfactoria. Como la enumeración de los posibles *comportamientos patológicos* de una variedad y su métrica es un objetivo largo y difícil (aún asumiendo que es posible), este fue descartado.

En base a lo mencionado, es necesario obtener una definición de singularidad que no caiga en los problemas con las que se encontraron las otras posibles definiciones. En este contexto surge el concepto de representar a las singularidades como *agujeros* del espaciotiempo. ¿Cómo se detecta un agujero? Basta con encontrar geodésicas con parámetro finito, o sea, geodésicas incompletas. De esta manera, se define que **un espaciotiempo es singular si posee al menos una geodésica incompleta**. Notar que, en el caso Riemanniano, ser geodésicamente completo es equivalente a ser completo como espacio métrico (Hopf Rinow), pero este razonamiento tampoco es válido en variedades de Lorentz.

Bajo esta definición de singularidad, un espaciotiempo que es temporalmente o nulamente geodésicamente incompleto presenta ciertas patologías que van en



contra de la intuición. En tales espaciotiempos, es posible para una partícula en caída libre (su trayectoria está representada por una geodésica) o un fotón terminar su existencia en finito tiempo (o sea, alrededor de la singularidad los conos se inclinan con el futuro hacia la singularidad), o haber comenzado su existencia un tiempo finito hacia el pasado (los conos se inclinan con el pasado hacia la singularidad). Los teoremas de singularidad, que demostraremos a continuación, prueban la existencia de tales singularidades para un amplio espectro de espaciotiempos posibles.

Si uno le quita un punto a un espaciotiempo, el espaciotiempo obtenido se consideraría singular. Para evitar este tipo de ejemplos, nos restringiremos solamente a **espaciotiempos inextensibles**, o sea, espaciotiempos que no son isométricos a subconjuntos propios de otros espaciotiempos. Una singularidad que puede evitarse al considerar un espaciotiempo mayor se la llama **singularidad desnuda**. Un espacio que tiene la propiedad que  $J(p, q)$  es compacto para todo  $p, q \in M$  no posee singularidades desnudas. El Lema 36 implica que en un espaciotiempo globalmente hiperbólico no pueden haber singularidades desnudas.

## 6.2. Teoremas de singularidad de Hawking

Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico y sea  $S$  una hipersuperficie de Cauchy espacial (podemos pensarla como una porción de tiempo -Definición 54-) con un campo vectorial normal  $N$  que apunta al futuro. Sea  $c_p$  la geodésica temporal con condición inicial  $N_p$  para cada  $p \in S$ . Si la geodésica  $c_p$  no tiene puntos conjugados entre  $c_p(0) = p$  y  $c_p(t_0)$ , entonces existe un entorno abierto  $V$  de  $c_p([0, t_0])$  que puede ser foliado por imágenes de geodésicas ortogonales a  $S$ . Los vectores tangentes a estas geodésicas generan un campo vectorial temporal unitario  $X \in \mathfrak{X}(V)$ . Si  $t: V \rightarrow \mathbb{R}$  es la función que a cada punto de  $V$  le asigna la distancia de ese punto a través de la geodésica hasta el punto donde comienza la geodésica, el Lema de Gauss implica que  $X = -grad(t)$ .

Recordemos que el Hessiano de la función  $t$  es un tensor de tipo (0,2) simétrico que cumple que

$$H(t)(Y, Z) = \langle \nabla_Y(grad(t)), Z \rangle$$

Definimos el tensor de tipo (0,2) simétrico  $K := -H(t)$ . De esta forma tenemos que

$$K(Y, Z) = -\langle \nabla_Y(grad(t)), Z \rangle = \langle \nabla_Y X, Z \rangle$$

Sea  $T$  el operador que asigna  $Y \mapsto \nabla_Y X$ . Como  $\langle T(Y), Z \rangle = K(Y, Z) = K(Z, Y) = \langle Y, T(Z) \rangle$ ,  $T$  es autoadjunto. Por lo tanto

$$\langle T^2(Y), Z \rangle = \langle T(Y), T(Z) \rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Z X \rangle$$

Definimos entonces el tensor  $K^2$  de tipo (0,2) como

$$K^2(Y, Z) = \langle \nabla_{\nabla_Y X} X, Z \rangle = \langle \nabla_Y X, \nabla_Z X \rangle$$

**Definición 66.** La divergencia del campo  $X$  la notaremos  $\theta = \text{div}(X) = C(K)$  y se la denomina la **expansión** de la familia de geodésicas temporales en  $V$ .

**Notaciones 4.** Notaremos  $R(W, X, Y, Z) = \langle R_{WX} Y, Z \rangle \quad \forall W, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ .

**Lema 43.** Sean  $K$  y  $X$  el tensor y el campo definidos previamente. Entonces

$$(\nabla_X K)(Y, Z) + K^2(Y, Z) + R(X, Y, X, Z) = 0 \quad \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$$

*Demostración.* Por la regla del producto, tenemos que

$$\begin{aligned} (\nabla_X K)(Y, Z) &= \nabla_X(K(Y, Z)) - K(\nabla_X Y, Z) - K(Y, \nabla_X Z) \\ &= X(\langle \nabla_Y X, Z \rangle) - \langle \nabla_{\nabla_X Y} X, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Y X, \nabla_X Z \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X Y} X, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X Y} X, Z \rangle \quad (6.1) \end{aligned}$$

Considerando que  $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$  y que  $\nabla_X X = 0$  (porque  $X$  es un campo asociado a geodésicas) tenemos que

$$R_{YX} X = \nabla_{\nabla_Y X} X - \nabla_{\nabla_X Y} X - \nabla_Y \nabla_X X + \nabla_X \nabla_Y X = \nabla_{\nabla_Y X} X - \nabla_{\nabla_X Y} X + \nabla_X \nabla_Y X \quad (6.2)$$

Volviendo a la cuenta anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} (\nabla_X K)(Y, Z) &= \langle \nabla_X \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_{\nabla_X Y} X, Z \rangle \\ &= R(Y, X, X, Z) - \langle \nabla_{\nabla_Y X} X, Z \rangle \\ &= -R(X, Y, X, Z) - K^2(Y, Z) \quad (6.3) \end{aligned}$$

□

**Lema 44.**  $X(\theta) + C(K^2) + \text{Ric}(X, X) = 0$

*Demostración.* Por el lema previo sabemos que

$$(\nabla_X K)(E_i, E_i) + K^2(E_i, E_i) + R(X, E_i, X, E_i) = 0 \quad \forall i$$

Contrayendo obtenemos

$$C(\nabla_X K) + C(K^2) + \text{Ric}(X, X) = 0$$

Como las derivaciones tensoriales y la contracción conmutan, tenemos que

$$X(C(K)) + C(K^2) + \text{Ric}(X, X) = 0$$

Como  $C(K) = \theta$ , obtenemos el resultado deseado

□

**Observación 30.** A la igualdad  $X(\theta) + C(K^2) + Ric(X, X) = 0$  se la conoce como la **ecuación de Raychaudhuri**, y es el pilar fundamental sobre el cual se basan los teoremas de singularidad.

**Proposición 37.** Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico que satisface las ecuaciones de Einstein y la condición fuerte de energía,  $S$  una hipersuperficie espacial acronal cerrada y  $p \in S$  un punto donde  $\theta_0 = \theta < 0$ . Si la geodésica  $c_p$  puede extenderse a una distancia  $t_0 = -\frac{n}{\theta}$  al futuro de  $S$ , entonces contiene al menos un punto focal con respecto a  $S$ .

*Demostración.* Supongamos que no hay puntos focales a  $S$  en  $c_p([0, t_0])$ . Tomamos  $V, X, K, \theta$  como hemos definido previamente. Por hipótesis se cumple la condición fuerte de energía, lo que implica que  $Ric(X, X) \geq 0$ . Usando la ecuación de Raychaudhuri, esto implica que

$$X(\theta) + C(K^2) \leq 0$$

Si  $A$  fuera una matriz de  $n \times n$ , la desigualdad de Cauchy-Schwartz aplicada al producto interno de  $A$  con la identidad implicaría que  $tr(A)^2 \leq ntr(A^t A)$ . Por lo tanto

$$C(K^2) = tr(T^2) \geq \frac{1}{n}tr(T^2) = \frac{1}{n}C(K)^2 = \frac{1}{n}\theta^2$$

Tomando  $\theta(t) := \theta(c_p(t))$ , y notando que  $X(\theta) = \frac{d\theta}{dt}$ , obtenemos

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{n}\theta^2 \leq 0$$

que implica que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\theta} \right) \geq \frac{1}{n}$$

Integrando esta desigualdad obtenemos que

$$\frac{1}{\theta} \geq \frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{n}t$$

Como  $\theta_0 < 0$ ,  $\frac{1}{\theta_0} < 0$ . Esta última desigualdad nos indica que, en  $t = -\frac{n}{\theta_0}$ ,  $\frac{1}{\theta} \geq 0$ . Por lo tanto, en algún tiempo entre 0 y  $-\frac{n}{\theta_0}$ ,  $\theta$  debe ser infinito. Esto es absurdo, ya que  $\theta$  es una función suave en  $V$ . La contradicción surge de suponer que no hay puntos focales a  $S$  en  $c_p([0, t_0])$ .  $\square$

**Observación 31.** Si en la proposición anterior tuviéramos como hipótesis que  $\theta_0 > 0$  en lugar de que  $\theta_0 < 0$ , una demostración casi idéntica implicaría que si la geodésica  $c_p$  puede ser extendida hacia el pasado hasta  $t_0 = -\frac{n}{\theta_0} < 0$ , entonces debe contener al menos un punto focal con respecto a  $S$ .

**Teorema 17** (Teorema de singularidad 1). *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico que satisface las ecuaciones de Einstein y la condición fuerte de energía y que la expansión satisface que  $\theta \leq \theta_0 < 0$  en una hipersuperficie espacial acronal cerrada  $S$ . Entonces  $(M, g)$  es singular.*

*Demostración.* Probaremos que ninguna geodésica temporal dirigida al futuro ortogonal a  $S$  puede extenderse más allá de  $\tau_0 = -\frac{n}{\theta_0}$  en el futuro de  $S$ . Supongamos que esto no sucede, y sea  $c$  una geodésica temporal dirigida al futuro ortogonal a  $S$  definida en  $[0, \tau_0 + \epsilon]$ , para algún  $\epsilon > 0$ . Llamamos  $p = c(\tau_0 + \epsilon)$ . Por el teorema 16 debe existir una geodésica temporal  $\gamma$  normal a  $S$  de longitud  $\tau(S, p)$ . Como  $\tau(c) = \tau_0 + \epsilon$ ,  $\tau(\gamma) \geq \tau_0 + \epsilon$ . La Proposición 37 nos garantiza que  $\gamma$  debe tener un punto conjugado a una distancia de a lo sumo  $\tau_0$  de  $S$ . Por el Teorema 6,  $\gamma$  no maximiza distancias a partir de este punto, lo que resulta ser una contradicción.  $\square$

**Observación 32.** *Si en lugar de pedir que  $\theta \leq \theta_0 < 0$  pedimos que  $\theta \geq \theta_0 > 0$ , ninguna geodésica temporal dirigida al pasado ortogonal a  $S$  puede ser extendida al pasado de  $S$  más allá de  $\tau_0 = \frac{n}{\theta_0}$ .*

Ahora probaremos el segundo teorema de singularidad, que fue probado originalmente por Hawking en el 1967. En este se debilita la hipótesis de que el espaciotiempo sea globalmente hiperbólico, pero se paga el precio de tener que suponer que la hipersuperficie de Cauchy es compacta.

**Teorema 18** (Teorema de singularidad 2). *Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo que satisface la condición causal fuerte y la condición fuerte de energía. Supongamos que existe una hipersuperficie compacta, sin borde, suave, acronal y espacial  $S$  tal que  $\theta < 0$  en  $S$ . Sea  $\theta_0$  su valor máximo, o sea  $\theta \leq \theta_0 < 0$  en  $S$ . Entonces existe una geodésica temporal inextensible dirigida al pasado desde  $S$   $\gamma$  con  $L(\gamma) \leq -\frac{n}{\theta_0}$*

*Demostración.* Supongamos que todas las geodésicas temporales inextensibles dirigidas al pasado desde  $S$  satisfacen que  $L(\gamma) > -\frac{n}{\theta_0}$ . Como el espaciotiempo  $(D(S)^\circ, g)$  satisface las condiciones del Teorema 17, todas las geodésicas temporales inextensibles dirigidas al pasado desde  $S$  deben intersecar al complemento de  $D(S)^\circ$ . Como  $H(S)$  es el borde de  $D(S)$ , entonces todas estas geodésicas deben intersecar a  $H^-(S)$  antes de que su longitud sea mayor a  $-\frac{n}{\theta_0}$ . En particular,  $H^-(S) \neq \emptyset$ . Probaremos que  $H^-(S)$  es compacto y esto nos llevará a una contradicción.

Comenzaremos probando que para todo  $p \in H^-(S)$  existe una geodésica ortogonal a  $S$  de longitud máxima desde  $S$  a  $p$ . La longitud de cualquier curva causal desde  $S$  a  $p \in H^-(S)$  está acotada superiormente por  $-\frac{n}{\theta_0}$ . Llamaremos

$$\tau_0 = \sup\{L(\alpha) : \alpha \text{ es una curva causal desde } S \text{ a } p\}$$

Buscamos una geodésica ortogonal a  $S$  desde  $S$  hasta  $p$  con longitud  $\tau_0$ . Sea  $\{\lambda_n\}$  una sucesión de curvas temporales desde  $S$  a  $p$  tal que  $L(\lambda_n) \rightarrow \tau_0$ . Sea  $q_n \in \lambda_n$  con  $q_n \neq p$  tal que  $q_n \rightarrow p$ . Como  $q_n \in I^+(p)$ ,  $q_n \in D^-(S)^\circ$ . Por el Teorema 16 existe una geodesica temporal normal  $\gamma_n$  desde  $S$  en  $q_n$  que maximiza la longitud para todas las curvas causales desde  $S$  a  $q_n$ . Tenemos entonces que  $L(\gamma_n) \rightarrow \tau_0$ . Sea  $r_n$  el punto de intersección entre  $\gamma_n$  y  $S$ . Como  $S$  es compacto, hay un punto de acumulación  $r$  del conjunto  $\{r_n\}$ . Sea  $\gamma$  la geodésica normal a  $S$  que comienza en  $r$ . Debido a la continua dependencia de las geodésicas con respecto a sus condiciones iniciales,  $\gamma$  debe intersectar a  $H^-(S)$  en  $p$  y  $L(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n) = \tau_0$ . De esta forma encontramos la geodesica temporal ortogonal a  $S$  que maximiza la longitud entre  $S$  y  $p$ .

Para probar la compacidad de  $H^-(S)$  tomaremos una sucesión  $\{p_n\} \subset H^-(S)$  y veremos que tiene un punto de acumulación  $p \in H^-(S)$ . Sea  $\{\beta_n\}$  una sucesión de geodésicas temporales normales a  $S$  de longitud máxima desde  $S$  hasta  $p_n$ . Repetimos un argumento similar al anterior: sea  $\bar{r}_n$  el punto de intersección entre  $\beta_n$  y  $S$ , y sea  $\bar{r}$  un punto de acumulación de  $\{\bar{r}_n\}$ . Sea  $\beta$  una geodésica ortogonal a  $S$  que comienza en  $r$ , y sea  $p$  la intersección de  $\beta$  con  $H^-(S)$ . Entonces  $p$  es un punto de acumulación de  $\{p_n\}$ , y por lo tanto  $H^-(S)$  es compacto.

Por la proposición 35 (ítem 4)  $H^-(S)$  contiene una geodésica nula futuro inextensible. Como  $(M, g)$  satisface la condición causal fuerte, el Lema 18 nos da la contradicción.  $\square$

### 6.3. Generalización de los teoremas de Hawking

En esta sección reproduciremos y explicaremos los razonamientos hechos en [6] para generalizar el teorema de Hawking. Esta generalización busca debilitar la hipótesis de la condición fuerte de energía. Numerosos autores buscaron posibles formas de debilitar la condición fuerte de energía utilizando condiciones *promediadas* de energía, en particular la *condición de energía nula promediada* (ANEC, por sus siglas en inglés), dada por

$$\int_{\gamma} T(\gamma', \gamma') dt$$

con  $\gamma$  una geodésica nula completa (o pasado/futuro completa). La integral se interpreta como el límite inferior de las integrales sobre regiones finitas. Por otro lado, otra posible hipótesis sería suponer que existe una cota inferior para  $Ric(X, X)$  para todo campo vectorial unitario y temporal  $X$  y la existencia de una contracción inicial para que efectivamente existan los puntos focales detallados por el teorema. La generalización que se busca se basa en una combinación de estas dos ideas: reemplazaremos la hipótesis de la condición fuerte de energía por el requerimiento de

que, para cierta geodésica temporal unitaria y futura completa  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  normal a una hipersuperficie de Cauchy espacial y compacta  $S$ , exista  $c \geq 0$  tal que

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{\frac{-2ct}{n-1}} r(t) dt > \theta(\gamma(0)) + \frac{c}{2}$$

con  $r(t) = Ric(\gamma'(t), \gamma'(t))$ .

### 6.3.1. La ecuación de Riccati

Comenzaremos buscando criterios para la inexistencia de soluciones globales a la ecuación de Riccati.

**Lema 45.** *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\dot{z} = \frac{z^2}{q} + p, \quad z(0) = z_0 \quad (6.4)$$

con  $q(t)$  y  $p(t)$  funciones continuas en  $[0, \infty)$  y  $q(t) > 0$  en  $[0, \infty)$ . Si

$$\int_0^\infty \frac{dt}{q(t)} = +\infty \quad \text{y} \quad \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T p(t) dt > -z_0$$

entonces la ecuación 6.4 no tiene solución en  $[0, \infty)$ .

*Demostración.* Supongamos que tenemos una solución  $z(t)$  definida en  $[0, \infty)$ . Por hipótesis, debe existir  $t_1 \geq 0$  tal que

$$\int_0^t p(s) ds > -z_0$$

para todo  $t \in [t_1, \infty)$ . Integrando la ecuación diferencial obtenemos

$$z(t) = \int_0^t \frac{z(s)^2}{q(s)} ds + \int_0^t p(s) ds + z_0 > \int_0^t \frac{z(s)^2}{q(s)} ds \quad (6.5)$$

para  $t \geq t_1$ . Definiendo  $R(t) = \int_0^t \frac{z(s)^2}{q(s)} ds$ , tenemos que  $R$  es no negativa y satisface la siguiente inecuación diferencial:

$$\dot{R} = \frac{z^2}{q} > \frac{R^2}{q}$$

para  $t \geq t_1$ . Como  $R(t) > 0$  para todo  $t > t_1$ , fijando un  $t_2 > t_1$  tenemos que, para todo  $t \geq t_2$ ,

$$\frac{1}{R(t_2)} \geq \frac{1}{R(t_2)} - \frac{1}{R(t)} = \int_{t_2}^t \frac{\dot{R}}{R^2} ds > \int_{t_2}^t \frac{ds}{q} \quad (6.6)$$

Como el lado derecho tiende a infinito, obtenemos una contradicción.  $\square$

El hecho de no tener solución significa que  $z(t) \rightarrow \infty$  cuando  $t \rightarrow b < \infty$ . Si notamos que

$$z(t) \geq z_0 + \int_0^t p(s)ds$$

para todo  $t$  para la cual existe solución, entonces no puede suceder que  $z(t) \rightarrow -\infty$  en finito tiempo.

**Corolario 14.** Si en el Lema 45 reemplazamos la condición integral sobre  $p$  por

$$z_0 + \inf_{T \geq 0} \int_0^T p(t)dt = \alpha > 0$$

entonces la ecuación 6.4 no tiene solución en  $[0, \tau]$ , siendo  $\tau$  la única solución de

$$\int_0^\tau \frac{ds}{q(s)} = \frac{2}{\alpha}$$

*Demostración.* Siguiendo la demostración del lema, podemos tomar  $t_1 = 0$  y deducimos de la hipótesis y de la ecuación 6.5 que  $z(t) \geq \alpha$  para todo  $t \in [0, \infty)$ . Esto implica que

$$R(t_2) \geq \alpha^2 \int_0^{t_2} \frac{ds}{q(s)}$$

para todo  $t_2 > 0$ . Por la inecuación 6.6 deducimos que

$$\frac{1}{\alpha^2} > \left( \int_0^{t_2} \frac{ds}{q(s)} \right) \left( \int_{t_2}^t \frac{ds}{q(s)} \right)$$

para todo  $0 < t_2 \leq t$ . Por el Teorema del Valor Intermedio, podemos encontrar  $t_2$  tal que

$$\left( \int_0^{t_2} \frac{ds}{q(s)} \right) = \left( \int_{t_2}^t \frac{ds}{q(s)} \right) = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{q(s)}$$

que es el resultado que buscamos. □

**Observación 33.** En particular, el corolario aplica si la parte negativa  $p_-(t) = \min\{0, p(t)\}$  es integrable y  $z_0 + \int_0^\infty p_-(s)ds = \alpha > 0$ , ya que  $\int_0^T p(t)dt \geq \int_0^\infty p_-(t)dt$  para toda  $T$ .

**Observación 34.** En el teorema de singularidad, tomamos  $q(t) = n - 1$ , y de esta forma  $\tau = \frac{2(n-1)}{\alpha}$ .

Ahora debilitaremos las hipótesis sobre  $p$ , y fijaremos a  $q$  como constante.

**Lema 46.** Consideremos el problema

$$\dot{z} = \frac{z^2}{s} + r, \quad z(0) = z_0 \quad (6.7)$$

con  $r(t)$  continua en  $[0, \infty)$ ,  $s > 0$  constante. Si existe  $c \geq 0$  tal que

$$z_0 - \frac{c}{2} + \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-\frac{2ct}{s}} r(t) dt > 0$$

entonces la ecuación 6.7 no tiene solución en  $[0, \infty)$ .

*Demostración.* Supongamos que existe tal solución. Definimos

$$y(t) = (z(t) - c)e^{-2ct/s}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{z}e^{-2ct/s} - \frac{2c(z-c)}{s}e^{-2ct/s} = \left(\frac{z^2}{s} + r\right)e^{-2ct/s} - \frac{2c(z-c)}{s}e^{-2ct/s} \\ &= e^{-2ct/s} \left(r + \frac{c^2}{s}\right) + \left(\frac{z^2}{s} - \frac{2cz}{s} + \frac{c^2}{s}\right)e^{-2ct/s} \\ &= e^{-2ct/s} \left(r + \frac{c^2}{s}\right) + \frac{y^2}{se^{-2ct/s}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Por lo tanto, tenemos que  $y$  cumple con la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{y} = e^{-2ct/s} \left(r(t) + \frac{c^2}{s}\right) + \frac{y^2}{se^{-2ct/s}}, \quad y(0) = z(0) - c \quad (6.9)$$

en  $[0, \infty)$ . Esta ecuación es de la forma 6.4, con

$$q(t) = se^{-2ct/s}$$

$$p(t) = e^{-2ct/s} \left(r(t) + \frac{c^2}{s}\right)$$

Es claro que

$$\int_0^\infty \frac{dt}{q(t)} = \int_0^\infty \frac{e^{2ct/s}}{s} dt = \infty$$

Además tenemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T p(t) dt &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} \left(r(t) + \frac{c^2}{s}\right) dt \\ &\geq \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} r(t) dt + \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} \frac{c^2}{s} dt \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} r(t) dt + \frac{c}{2} \\ &= \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} r(t) dt - \frac{c}{2} + z_0 + c - z_0 \\ &> c - z_0 = -y(0) \end{aligned} \quad (6.10)$$



donde en el último paso utilizamos la hipótesis. Por lo tanto, del Lema 45 se deduce que 6.9 no tiene solución en  $[0, \infty)$ , lo que resulta en una contradicción.  $\square$

**Ejemplo 6.** Supongamos que  $r(t) \geq -Ae^{Bt}$ , con  $A, B > 0$ . Si  $c > \frac{Bs}{2}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} r(t) dt &\geq \lim_{T \rightarrow \infty} -A \int_0^T e^{-2ct/s} e^{Bt} dt \\ &= -A \int_0^\infty e^{t(-2(c/s)+B)} dt = \frac{-A}{2(c/s) - B} = -\frac{As}{2c - Bs} \end{aligned} \quad (6.11)$$

Por lo tanto

$$-\frac{c}{s} + \liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/s} r(t) dt \geq -\frac{c}{s} - \frac{As}{2c - Bs}$$

Si definimos  $f(c) = -\frac{c}{s} - \frac{As}{2c - Bs}$ , tenemos que  $f'(c) = -\frac{1}{2} + \frac{2As}{(2c - Bs)^2}$ . Igualando a cero y despejando obtenemos que en  $c = (As)^{\frac{1}{2}} + \frac{Bs}{2}$  la función  $f$  alcanza su máximo, siendo este  $-((As)^{\frac{1}{2}} + \frac{Bs}{4})$ . Entonces, si  $z_0 > (As)^{\frac{1}{2}} + \frac{Bs}{4}$ , la ecuación 6.7 no tiene solución en  $[0, \infty)$ . Más concretamente, consideremos el caso  $A = 1, B = 2, s = 1$ , con  $r(t) = -e^{2t}$ . Lo anterior nos indica que no existen soluciones globales para  $z_0 > \frac{3}{2}$ . Más aún, en [6] utilizan las funciones de Bessel modificadas para mostrar que  $z(t)$  tiene una singularidad en tiempo finito si y solo si  $z_0 > 1,429\dots$ , que es consistente con la cota dada por el lema.

**Corolario 15.** Si en el Lema 46 reemplazamos la condición integral sobre  $r$  por

$$z_0 - c + \inf_{T \geq 0} \int_0^T e^{-2ct/s} \left( r(t) + \frac{c^2}{s} \right) dt = \alpha > 0$$

entonces la ecuación 6.7 no tiene solución en  $[0, \tau]$ , con

$$\tau = \frac{s}{2c} \log \left( 1 + \frac{4c}{\alpha} \right)$$

*Demostración.* Siguiendo la demostración del Lema 46, la hipótesis implica que

$$y(0) + \inf_{T \geq 0} \int_0^T p(t) dt = \alpha > 0$$

Aplicamos el Corolario 14 y obtenemos que no existe solución a la ecuación 6.7 en  $[0, \tau]$ , siendo  $\tau$  la única solución de

$$\frac{2}{\alpha} = \int_0^\tau \frac{ds}{q(s)} = \frac{e^{2c\tau/s} - 1}{2c}$$

de donde se deduce que

$$\tau = \frac{s}{2c} \log \left( 1 + \frac{4c}{\alpha} \right)$$

$\square$

**Observación 35.** En particular, el corolario aplica si  $r_-(t) = \min\{0, r(t)\}$  es tal que  $r_-(t)e^{-2ct/s}$  es integrable y  $z_0 - c + \int_0^\infty r_-(t)e^{-2ct/s} dt = \alpha > 0$ , ya que

$$\int_0^T e^{-2ct/s}(r(t) + c^2/s) dt \geq \int_0^\infty r_-(t)e^{-2ct/s} dt$$

para toda  $T \in [0, \infty)$ .

**Observación 36.** Si  $\alpha \gg c$ , como  $\log(1+x) \simeq x$  cerca del cero, tenemos que  $\tau \simeq \frac{2s}{\alpha}$ , que es consistente con la Observación 34.

### 6.3.2. Refinando hipótesis

En esta sección mostraremos cómo aplicar lo estudiado sobre la ecuación de Riccati para refinar las hipótesis relacionadas a las condiciones de energía en los teoremas de singularidad de Hawking, y de esta manera dar condiciones suficientes para la existencia de tales singularidades aún en casos donde se violan las condiciones de energía clásicas.

En este caso, por simplicidad pediremos hiperbolicidad global y compacidad de la hipersuperficie de Cauchy. Sin embargo, usando razonamientos análogos a los del segundo teorema de singularidad, en lugar de hiperbolicidad global podemos pedir que el espaciotiempo admita una hipersuperficie espacial acronal, espacial, suave y compacta y trabajar sobre  $D(S)$ , que es globalmente hiperbólico.

**Teorema 19.** Sea  $(M, g)$  un espaciotiempo globalmente hiperbólico de dimensión mayor a 2, y sea  $S$  una hipersuperficie de Cauchy suave, espacial y compacta. Supongamos que para toda geodésica temporal unitaria futuro-inextensible desde  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$  ortogonal a  $S$  existe  $c \geq 0$  tal que

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-2ct/(n-1)} r(t) dt > \theta(p) + \frac{c}{2} \quad (6.12)$$

con  $r(t) = \text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t))$ ,  $p = \gamma(0)$ . Entonces  $M$  es geodésicamente temporal incompleto a futuro.

*Demostración.* La demostración es similar a otras demostraciones ya realizadas. Elegimos una sucesión de puntos  $\{q_n\}$  que se extiende arbitrariamente en el futuro de  $S$ . Tomamos un segmento geodésico temporal entre  $p_n \in S$  hasta  $q_n$  que realiza la longitud ( $\tau$ ) entre  $S$  y  $q_n$ , y lo llamamos  $\gamma_n$ . Como  $S$  es compacto, sea  $p \in S$  un punto de acumulación de  $\{p_n\}$ . Sea  $\gamma : [0, a) \rightarrow M$  ( $a \in (0, \infty]$ ) la geodésica temporal futuro-inextensible ortogonal a  $S$  desde  $p \in S$ , y tiene la propiedad que realiza la distancia desde  $S$  de cada uno de sus puntos. Sea  $t : J^+(S) \rightarrow \mathbb{R}$  la función distancia Lorentziana desde  $S$ :  $t(x) = \tau(S, \{x\})$ . Por hiperbolicidad global,

$t$  es continua en  $J^+(S)$  y será suave hasta un posible punto focal de  $S$ . Sobre  $\gamma$  no pueden haber puntos focales a  $S$ , y entonces existe un entorno  $U$  de  $\gamma$  donde  $t$  es suave. En este entorno, definimos  $u := -grad(t)$ , que resulta ser un campo suave, geodésico, dirigido al futuro, temporal y ortogonal a la hipersuperficie tal que  $\gamma' = u$  en  $\gamma$ . Como antes, consideramos la expansión  $\theta = div(u)$ . Sobre  $\gamma$ ,  $\theta = \theta(t)$  satisface la ecuación de Raychaudhuri. En [8] página 84, Hawking escribe la ecuación Raycahudhuri reemplazando  $C(K^2)$  por su descomposición  $2\sigma^2 + \frac{1}{n}\theta^2$ , con  $\sigma$  el *shear*. Por lo tanto, tenemos que

$$\frac{d\theta}{dt} = -Ric(\gamma', \gamma') - 2\sigma^2 - \frac{1}{n}\theta^2$$

Veamos que  $\gamma$  debe ser futuro-incompleta. Supongamos que es futuro-completa, o sea,  $a = \infty$ . Fijamos  $z = -\theta$ ,  $r(t) = Ric(\gamma', \gamma') + 2\sigma^2$ ,  $s = n$  y  $z(0) = -\theta(p)$  en la ecuación 6.7, usando la condición de energía de la hipótesis tenemos que esta ecuación no tiene solución en  $[0, \infty)$ , lo que resulta ser una contradicción.  $\square$

**Observación 37.** *Vía las ecuaciones de Einstein, la hipótesis sobre el tensor de Ricci da condiciones sobre el tensor energía-impulso, y por lo tanto tiene sentido interpretar a esta hipótesis como una condición de energía.*

**Observación 38.** *Una condición suficiente para que se satisfaga la condición de energía del teorema es que sobre cada geodésica temporal  $\gamma$  valga que*

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \int_0^T r(t) dt > \theta(p)$$

(o sea, el caso  $c = 0$ ). Esto ilustra que si  $\theta < 0$  sobre  $S$ , el teorema puede valer aún cuando  $r(t)$  es negativo.

**Observación 39.** *Si  $Ric(X, X) \geq 0$  para todo campo temporal  $X$  y  $\theta < 0$  sobre  $S$ , entonces recuperamos el teorema de singularidad de Hawking.*

## 6.4. Un problema abierto

Con el último teorema de la sección anterior, damos por terminada la presentación de los resultados que buscamos describir en la presente tesis. Sin embargo, dedicaremos unas líneas a comentar una posible pregunta que surge en base a lo realizado.

Nos resulta interesante preguntarnos si esta generalización a los teoremas de singularidad de Hawking, que se aplican en el contexto de la Relatividad General, pueden ser útiles para encontrar un análogo a estos teoremas en el contexto

de gravedad  $f(R)$ . Como se describe en [5], toda teoría de gravedad  $f(R)$  puede describirse como una teoría definida por ecuaciones de segundo orden sobre cierta función que toma valores escalares. Vía una transformación y un aplicación conforme, se deduce que la teoría es equivalente a una dada por el siguiente Lagrangiano:

$$S'[g, \phi] = - \int (-g)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{S}{2k} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{ij} \nabla_{x_i} \phi \nabla_{x_j} \phi + U(\phi) \right]$$

con el potencial  $U(\phi)$  dado por  $U(\phi) = \frac{f(S) - Sf'(S)}{2kf'(S)^2}$ . Esta acción, al ser minimizada, induce las siguientes ecuaciones:

$$Ric - \frac{1}{2}Sg = T$$

con T un tensor que depende de las derivadas segundas de  $\phi$ , de  $g$  y de  $U(\phi)$ . La pregunta que queda abierta es: ¿qué hipótesis hay que suponer sobre  $f$ , o sobre  $\phi$  y  $U(\phi)$ , para que podamos enunciar y probar un teorema similar a 19?

---

## Bibliografía

---

- [1] Beem John K., Ehrlich Paul, Easley Kevin *Global Lorentzian Geometry*  
CRC Press; 2 edition, 1996
- [2] Bernal Antonio N., Sánchez Miguel, *On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem*  
arXiv:gr-qc/0306108, 2008
- [3] Do Carmo Manfredo *Riemannian Geometry*  
Birkhäuser; 1st ed., 1992.
- [4] Duggal Krishan (editor), Sharma Ramesh (editor), *Recent Advances in Riemannian and Lorentzian Geometries*  
American Mathematical Society 2004
- [5] Ferraro Rafael, *f(R) and f(T) theories of modified gravity*  
arXiv:1204.6273v2 [gr-qc], 2012
- [6] Fewster Christopher J., Galloway Gregory J., *Singularity theorems for weakened energy conditions*  
Classical and Quantum Gravity, v. 28, n. 12, <http://stacks.iop.org/0264-9381/28/i=12/a=125009>, 2011
- [7] Gromov Mikhail *Metric Structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*  
Birkhäuser; 1st ed., 1999
- [8] Hawking Stephen W., Ellis G. F. R., Landshoff P. V., Nelson D. R., Sciama D. W., Weinberg S., *The Large Scale Structure of Space-Time*  
Cambridge University Press, 1975

- [9] Hicks Noel J. *Notes on Differential Geometry*  
Van Nostrand mathematical studies 3, 1971
- [10] Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields, Fourth Edition*  
Course of Theoretical Physics Series (Book 2), 1980
- [11] Lang Serge *Differential and Riemannian Manifolds*  
Graduate Texts in Mathematics, 1996
- [12] Mezzera Cecile *Geometría Lorentziana y singularidades*  
2014
- [13] Milnor John Willard *Topology from the Differentiable Viewpoint*  
The University Press of Virginia, 1st edition, 1965
- [14] Natario José *Relativity and Singularities - A Short Introduction for Mathematicians*  
arXiv:math/0603190, 2011
- [15] O'Neill Barrett *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*  
Academic Press, Pure and Applied Mathematics (Book 103) series, 1983.
- [16] O'Neill Barrett *The Geometry of Kerr Black Holes*  
Dover Publications; Reprint edition, 2014
- [17] Wald Robert M. *General Relativity*  
University of Chicago Press, 1984.