



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Juegos de Richman

Pablo Blanc

Director: Juan Pablo Pinasco

Marzo de 2014

Índice general

1. Introducción	1
2. Juegos de Richman	3
2.1. Introducción	3
2.2. La función de costo de Richman	4
2.3. Cálculo de la función de costo	6
3. Nuevos juegos de Richman	21
3.1. Introducción	21
3.2. El valor de ganar	22
3.3. Juego de Richman con dado	26
4. Tug-of-War	31
4.1. Introducción	31
4.2. Tug-of-war	35
4.2.1. Tug-of-war en espacios metricos	36
4.2.2. Tug-of-war con ruido	37
Bibliografía	43

Agradecimientos

Agradecimientos

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis estudiaremos juegos donde se subasta el “turno”, más precisamente el derecho a mover. A estos se sumarán de manera natural aquellos juegos donde el derecho a mover se determina aleatoriamente, por ejemplo, tirando una moneda. Este será el eje transversal al trabajo. En el camino veremos ideas relacionadas con juegos combinatorios y estocásticos, ecuaciones diferenciales, complejidad de algoritmos, entre otros temas.

En la primer parte estudiaremos juegos combinatorios donde se subasta el turno. Es decir, en lugar del esquema tradicional donde los jugadores se alternan para jugar, tendremos uno donde en cada ronda se llevará a cabo una subasta por el derecho a mover. Este tipo de juego fue propuesto por David Ross Richman y estudiado por primera vez por A. J. Lazarus, D. E. Loeb, J. G. Propp y D. H. Ullman en [LLPU96] y en conjunto con W. R. Stromquist en [LLPSU99] quienes los llamaron juegos de Richman en su honor. Estos juegos están fuertemente emparentados con la versión donde el turno se determina aleatoriamente. Vamos a ver que existe un valor crítico que determinará la suerte de los jugadores en la versión donde se subasta el turno, este valor también determinará la probabilidad de ganar en la versión de turno aleatorio.

En todo momento pensaremos el dinero como una unidad infinitamente divisible, un jugador podrá pagarle a otro digamos $\sqrt{2}$. La versión discreta, donde hay una unidad de dinero, fue estudiada en [DP10].

Otra particularidad del juego viene dada por su juego combinatorio subyacente, en el cual el conjunto de movidas es común para ambos jugadores. Algunas versiones partisanas, donde el conjunto de movidas puede ser distinto para cada jugador, fueron consideradas también, en particular, el Hex de turno aleatorio en [PSSW07], la versión con subastas en [PR08] y ajedrez con subasta en [Bea08a] y [Bea08b]. En estos, a diferencia del original, puede ocurrir que en una cierta posición uno desee que sea su adversario quien tenga que mover. Esto no ocurre en el Hex pero sí se puede dar en el ajedrez, por ejemplo en la posición de la Figura 1. Esto se soluciona dándole al ganador (de la subasta o el lanzamiento de moneda) el derecho a decidir quien mueve en lugar del

derecho a mover.

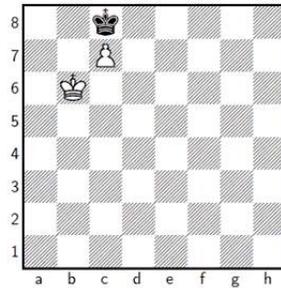


Figura 1.1: Zugzwang: si mueven las blancas, es tablas; si mueven las negras, pierden.

En el capítulo 2 nos centraremos en el trabajo de Lazarus *et al.*, repasaremos sus resultados principales, y daremos respuesta a dos preguntas dejadas abiertas por ellos. Una, en referencia a la diferencia mínima en el valor de la función de costo, donde mejoraremos la cota establecida. Para la otra, referida a la complejidad del algoritmo propuesto por ellos, probaremos que el algoritmo puede no correr en tiempo polinomial en ciertos casos. Esto se basará en exhibir un ejemplo de juego donde el jugador destinado a perder puede forzar un partido largo. Finalmente presentaremos una idea nueva para atacar el problema del cálculo de la función de costo, central en el estudio del juego.

En el capítulo 3 presentaremos dos versiones nuevas del juego de Richman. En estas surgirán nuevas ideas y además veremos como podemos aprovechar las ideas ya exploradas en el capítulo 2. Quedarán preguntas abiertas y sobre todo la posibilidad de explorar la versión continua de estos juegos en el sentido de lo que veremos en el capítulo 4.

El capítulo 4 *Tug-of-War* estará dedicado a este juego que surgió en el trabajo de Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield y D. Wilson [PSSW09]. No nos centraremos solamente en su trabajo sino en otros posteriores motivados por este. Repasaremos brevemente resultados sobre extensiones de Lipschitz y el Laplaciano- ∞ , conceptos que aparecen naturalmente en este contexto. Veremos como el planteo del juego permite obtener resultados en este sentido. Es interesante que estas ideas no solo nos proveen demostraciones de existencia y unicidad para soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales si no que pueden proveernos esquemas numéricos.

Capítulo 2

Juegos de Richman

2.1. Introducción

En este capítulo estudiaremos un juego introducido por David Ross Richman a mediados de los '80, estudiado por primera vez por A. J. Lazarus, D. E. Loeb, J. G. Propp y D. H. Ullman en [LLPU96] y en conjunto con W. R. Stromquist en [LLPSU99]. En este, dos jugadores se enfrentan en un juego combinatorio, pero el turno, en lugar de estar dado por un orden predeterminado, se subasta en cada ronda.

Cada uno de los dos jugadores, el Sr. Azul y la Sra. Roja, comienza con una cierta cantidad de dinero. Un grafo dirigido finito con una ficha en uno de sus nodos y dos vértices distinguidos, v_a y v_r , hace de tablero. El objetivo del jugador Azul es llevar la ficha al nodo v_a y el de la jugadora Roja es llevarla a v_r .

En cada ronda se subasta el derecho a mover. Podemos pensar que cada jugador anota en un papel la cifra que está dispuesto a pagar y ambos la revelan simultáneamente; el que ofertó más le paga esa suma al otro jugador (no puede ofertar más que lo que tiene) y puede mover la ficha a través de alguna arista a otro nodo. En caso de ofertar la misma suma el empate se resolverá lanzando una moneda. El juego termina cuando la ficha llega a alguno de los vértices distinguidos y diremos que es un empate si esto nunca ocurre. Al finalizar el juego el dinero pierde todo su valor.

En general vamos a pensar al juego como el grafo y a la ubicación de la ficha y los capitales de los jugadores como la posición. En este sentido nos interesa determinar en qué posiciones los jugadores tienen estrategia ganadora. Esto es, una estrategia para ofertar y mover la ficha que les asegure ganar (eventualmente, de ser posible, sin depender del azar en los lanzamientos de la moneda para los desempates). Veremos más adelante que existe un valor $R(v)$ para cada nodo v de modo que si la porción del capital total que tiene el jugador Azul es mayor a este valor, entonces puede asegurarse

ganar. Además, si tiene menos que esa cantidad de dinero, será la jugadora Roja quien podrá ganar.

Otro juego a tener presente es el llamado *spinner game*. Este se diferencia del anterior en que no se subasta el turno sino que en cada ronda se sorteá con una moneda balanceada el derecho a mover. Es interesante que asumiendo que ambos jugadores juegan de manera óptima, la probabilidad de ganar para Azul si está en un nodo v es $1 - R(v)$. Esto nos da otra interpretación del valor $R(v)$.

2.2. La función de costo de Richman

Consideremos $G = (V, A)$ un grafo dirigido con dos nodos distinguidos v_a y v_r (nos referiremos a estos como el vértice azul y rojo, y a los demás como negros). Asumiremos en todo momento que de cada nodo hay un camino a al menos uno de los nodos distinguidos y que cada nodo tiene finitos sucesores.

Para cada vértice $v \in V$ denotaremos con $S(v)$ al conjunto de sus sucesores, o sea $S(v) = \{w \in V : (v, w) \in A\}$. Dada $f : V \rightarrow [0, 1]$, definimos

$$f^+(v) = \max_{w \in S(v)} f(w), \quad f^-(v) = \min_{w \in S(v)} f(w)$$

A una función $R : V \rightarrow [0, 1]$ la llamaremos *función de costo de Richman* si $R(v_a) = 0$, $R(v_r) = 1$, y para los otros nodos $v \in V$ tenemos $R(v) = (R^+(v) + R^-(v))/2$.

Teorema 2.2.1 (Lazarus *et al.* [LLPU96]). *Todo grafo dirigido tiene una función de costo de Richman.*

La demostración de este teorema se basa en la definición de las funciones $r : V \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ y $R : V \times \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ dadas por:

$$\begin{aligned} r(v_a, t) &= 0 & R(v_a, t) &= 0 \\ r(v_r, t) &= 1 & R(v_r, t) &= 1 \end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{N}$ y

$$\begin{aligned} r(v, 0) &= 0 \\ R(v, 0) &= 1 \\ R(v, t) &= \frac{R^+(v, t-1) + R^-(v, t-1)}{2} \\ r(v, t) &= \frac{r^+(v, t-1) + r^-(v, t-1)}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

para todos los nodos negros v .

A partir de estas definiciones se puede ver que $R(v) := \lim_{t \rightarrow \infty} R(v, t)$ y $r(v) := \lim_{t \rightarrow \infty} r(v, t)$ son funciones de costo de Richman. El límite existe pues $R(v, t)$ y $r(v, t)$ son decreciente y creciente en t respectivamente. Luego el resultado se desprende de tomar límite en la ecuación 2.1. Además en el siguiente teorema veremos la interpretación de estos valores a nivel del juego.

Teorema 2.2.2 (Lazarus *et al.* [LLPU96]). *Supongamos que Azul y Roja juegan el juego de Richman en un grafo dirigido con la ficha comenzando en el nodo v , entonces*

1. *Si Azul tiene una parte del capital total que excede $R(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(v, t)$ tiene una estrategia ganadora. Más aún, puede asegurarse ganar en a lo sumo t rondas si su parte del capital excede $R(v, t)$.*
2. *Si Azul tiene una parte del capital total menor a $r(v) = \lim_{t \rightarrow \infty} r(v, t)$ entonces Roja tiene una estrategia ganadora. Más aún, puede asegurarse ganar en a lo sumo t rondas si la parte del capital de Azul es menor a $r(v, t)$.*

Es interesante que estas funciones no sólo nos dicen si tenemos o no estrategia ganadora sino que nos dicen como ganar. Si la ficha se encuentra en el nodo v y Azul tiene capital c (asumiremos el capital total normalizado a 1 ya que sólo importa que porción del capital tiene cada jugador) con el cual puede asegurarse ganar en t rondas, o sea

$$c > R(v, t) = \frac{R^+(v, t-1) + R^-(v, t-1)}{2}.$$

El jugador debe ofertar $R^+(v, t-1) - R(v, t) = R(v, t) - R^-(v, t-1)$, y ahora hay dos casos:

1. Si pierde la subasta, y por lo tanto recibe dinero, tendrá capital $c + R(v, t) - R^-(v, t-1)$. Roja moverá la ficha, digamos al nodo $w \in S(v)$. Entonces el capital de azul verificará $c + R(v, t) - R^-(v, t-1) > R^+(v, t-1) \geq R(w, t-1)$.
2. Si gana la subasta tendrá capital $c - R^+(v, t-1) + R(v, t) > R^-(v, t-1)$ con lo cual moviéndose al nodo donde se alcanza el mínimo $R^-(v, t-1)$, digamos w , podrá asegurarse tener capital $c - R^+(v, t-1) + R(v, t) > R(w, t-1)$.

Jugando así, podemos ver inductivamente que puede asegurarse llegar en t turnos a un cierto nodo w con capital c de modo que $c > R(w, 0)$. Como c es a lo sumo 1 y $R(w, 0)$ vale 0 o 1, deberá ser $R(w, 0) = 0$ y por lo tanto $w = v_a$. Es decir, Azul ganó.

Podemos hacer el mismo razonamiento para Roja con $r(v, t)$. Surge la pregunta de qué sucede con los valores entre $r(v)$ y $R(v)$, la respuesta es que no hay ninguno, la función de costo de Richman es única.

Teorema 2.2.3 (Lazarus *et al.* [LLPU96]). *En un grafo dirigido finito hay una única función de costo de Richman.*

Vimos que se puede caracterizar completamente el destino de los jugadores calculando la función de costo de Richman. Vale agregar que en el caso de que el jugador Azul tenga un capital exactamente igual al valor de la función en el nodo donde está la ficha, su destino dependerá de como le vaya en los desempates. Deberá ofertar en cada ronda exactamente $\delta(v) := R^+(v) - R(v) = R(v) - R^-(v)$, entenderemos a este valor como el precio justo a pagar por un turno. De no hacerlo la jugadora Roja podría llevarlo a una posición donde pueda asegurarse ganar sin depender del azar. Roja lo logrará ofertando más que Azul pero menos que la cantidad justa si Azul oferta menos que $\delta(v)$ o recibiendo un pago superior al justo por ceder un turno. De esta manera se asegurará tener más que $1 - R(v)$ en el siguiente turno, ella tendrá suficiente capital para forzar su victoria.

Surge la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de ganar en este caso? Si asumimos que los jugadores ofertan de manera óptima, el turno se decidirá puramente en el resultado de la moneda. Este es el juego que llamamos antes *spinner game*. Lo cual nos da pie para recordar que en este caso la probabilidad de ganar para Azul es $1 - R(v)$. Para probar este hecho basta volver a la definición de $R(v, t)$ y $r(v, t)$ y realizar un análisis parecido al que hemos desarrollado pero interpretando el valor de $r(v, t)$ como la probabilidad de ganar en a lo sumo t rondas para Azul.

2.3. Cálculo de la función de costo

Para cada nodo negro v , denotaremos v^+ y v^- a sus sucesores para los cuales $R(v^+) = R^+(v)$ y $R(v^-) = R^-(v)$ (si hay varios a cualquiera de ellos). Así la función de costo es la solución al sistema lineal de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned} R(v_r) &= 1 \\ R(v_a) &= 0 \\ 2R(v) &= R(v^+) + R(v^-) \end{aligned} \tag{2.2}$$

que tiene $n+2 = |V|$ ecuaciones y $n+2$ incógnitas, además por el teorema 2.2.3 sabemos que tiene solución única.

Sin embargo el problema de calcular la función de costo no pasa por resolver estas ecuaciones, la dificultad es que a priori no conocemos v^+ y v^- . A pesar de esto podemos extraer de aquí un primer acercamiento a una solución para el problema. Si para cada nodo negro v tomamos una elección de v^+ y v^- entre sus sucesores, luego podemos resolver el sistema de ecuaciones resultantes (que siempre tiene solución única pues es el correspondiente al juego sobre el grafo donde esos son los únicos sucesores de v). Ya con los valores podemos chequear si la solución verifica las desigualdades: $R(v^+) \geq R(w)$ y $R(w) \geq R(v^-)$ para todos los $w \in S(v)$. Sabemos que hay una elección que nos dará la solución deseada, así iterando sobre todas las posibles podemos encontrar la función de costo. Esta idea nos provee un primer algoritmo para encontrar el valor de la función. Nos interesa explorar el problema en busca de una solución más eficiente.

Es interesante ver como en los casos en que el grafo es acíclico o no dirigido se puede calcular la función eficientemente. En el caso acíclico se puede proceder fijando el valor para v_a y v_r , y luego calculando iterativamente el valor para el nodo para el cual ya tenemos el valor para todos sus sucesores (siempre vamos a tener al menos uno por la hipótesis de que el grafo es acíclico). En el caso no dirigido hay un algoritmo dado por Lazarus *et al.* [LLPSU99] en el cual la función se va calculando iterativamente buscando el camino de mayor pendiente entre dos nodos donde la función ya fue calculada, y de esta manera se consigue el valor para nuevos nodos. Estos algoritmos corren en tiempo polinomial.

Nos interesa ver en detalle el algoritmo presentado por Lazarus *et al.* [LLPSU99] para el caso general.

Teorema 2.3.1 (Lazarus *et al.* [LLPSU99]). *El algoritmo del cuadro 2.1 calcula la función de costo de Richman de un grafo dirigido finito.*

Repasaremos la demostración del teorema incluyendo una pequeña modificación producto de una mejora en una cota. La idea es que $R(v, t)$ converge a $R(v)$ *rápido* y, además, dos valores distintos $R(v)$ y $R(w)$ no pueden estar *demasiado cerca*. Así para cierto valor de t podremos asegurar que el orden en los nodos dado por $R(v)$ coincide con el dado por $R(v, t)$, osea $v^+ = v_t^+$ y $v^- = v_t^-$.

La convergencia es rápida

Supongamos que Azul tiene suficiente dinero para asegurarse ganar el juego comenzando desde el nodo v . Definimos el *surplus* s de Azul como la diferencia entre su capital y $R(v)$. Y definimos $\delta(v) = R(v) - R^-(v)$. Azul puede asegurarse ganar jugando con la siguiente estrategia: hasta perder la subasta por primera vez, en el k -ésimo turno deberá ofertar

$$\delta(v) + \frac{s}{2^{n+1-k}}$$

1. Sea $t = 0$.
2. Fijar $R(v, 0) = 1$ para todo $v \neq v_a$ y $R(v_a, 0) = 0$.
3. Para todos los vértices negros v , sea v_t^+ (respectivamente, v_t^-) un sucesor w de v para el cual $R(w, t)$ es máximo (respectivamente, mínimo).
4. Resolver el sistema lineal resultante asumiendo $v^+ = v_t^+$ y $v^- = v_t^-$.
5. Si la solución es la deseada imprimirla y terminar. Si no, incrementar t .
6. Calcular $R(v, t)$ vía la recurrencia
$$R(v, t) = \frac{R^+(v, t-1) + R^-(v, t-1)}{2};$$
7. Volver al paso 3.

Cuadro 2.1: algoritmo para calcular la función de costo de Richman en un grafo dirigido finito

donde $n + 2 = |V|$. Si Roja le permite a Azul hacer n movimientos consecutivos, este ganará. Si Roja le gana la subasta en el turno i , el surplus de Azul se habrá incrementado por lo menos

$$\frac{s}{2^{n+1-i}} - \frac{s}{2^n} - \frac{s}{2^{n-1}} - \dots - \frac{s}{2^{n+2-i}} = \frac{s}{2^n}$$

en a lo sumo n movimientos.

Así Azul puede asegurarse ganar o multiplicar su surplus por $1 + \frac{s}{2^n}$ cada n rondas. Como s será a lo sumo 1, puede asegurarse ganar en $\lceil nh \rceil$ turnos si su surplus es mayor a $(1 + \frac{1}{2^n})^{-h}$. Esto, por lo visto antes, se traduce en la desigualdad:

$$0 \leq R(v, t) - R(v) \leq (1 + 2^{-n})^{-\lceil t/n \rceil},$$

que nos da una cota para la convergencia, como queríamos.

Las diferencias no son tan pequeñas

Queremos acotar por debajo la diferencia en el valor de la función de costo entre dos nodos con distinto valor.

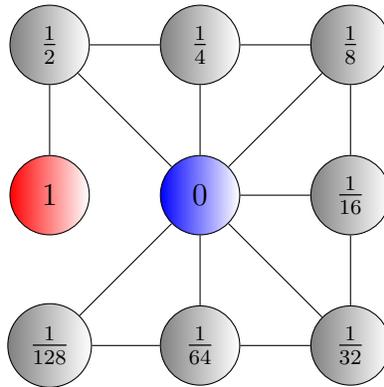


Figura 2.1: este ejemplo muestra que en un grafo con $n + 2$ nodos la diferencia en la función de costo en dos valores distintos puede ser 2^{-n}

En la figura 2.1 se ve un caso donde este valor es mínimo, o sea que dos valores distintos de la función de costo en un grafo con $n + 2$ nodos difieren en por lo menos 2^{-n} . Probemos esto mediante dos lemas.

Lema 2.3.2. Una matriz en $\mathbb{R}^{k \times k}$ con 1's en la diagonal, a lo sumo un -1 en cada fila y el resto 0's tiene determinante 0 o 1.

Demostración. Si la matriz tiene alguna columna sin ningún -1 , desarrollando el determinante por esta obtenemos que su determinante es igual al de la matriz que resulta de sacarle esa columna y fila correspondiente. Iterando el procedimiento podemos quedarnos con una matriz vacía en cuyo caso podemos afirmar que el determinante de la matriz original era 1 o terminamos con una matriz en la cual hay al menos un -1 en cada columna. Como esta a su vez tiene a lo sumo un -1 en cada fila y es cuadrada, resulta que debe tener exactamente un -1 en cada columna y cada fila. En este caso el determinante va a ser 0 pues reordenando las filas y columnas podemos escribir a la matriz como bloques en la diagonal de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para convencernos de esto por ejemplo podemos pensar en el grafo dado por $i \rightarrow j$ si la matriz tiene un -1 en el lugar ij . De cada nodo sale una arista y llega una por lo que es claro que podemos descomponer el grafo en ciclos disjuntos. Luego podemos considerar el ordenar los nodos primero por componentes conexas y luego por orden dentro del ciclo. Resulta claro que ordenando las filas y columnas según este orden obtendremos lo buscado. Los bloques tienen determinante nulo y por lo tanto la matriz tiene determinante nulo. □

Lema 2.3.3. *Una matriz en $\mathbb{R}^{k \times k}$ con 2's en la diagonal, a lo sumo dos -1 en cada fila y el resto 0's tiene determinante mayor o igual a 0 y menor o igual a 2^k .*

Demostración. El determinante de una matriz así, inductivamente, lo podemos escribir como la suma de los determinantes de 2^k matrices de la forma del lema anterior. En cada paso a una fila con un 2 en la diagonal y a lo sumo dos -1 la escribimos como la suma de dos filas con un 1 en la diagonal y eventualmente algún -1 . Luego el resultado es inmediato de que cada una de ellas tiene determinante 0 ó 1. □

Recordemos que los valores de la función de costo vienen dados por la solución del sistema 2.2 cuya matriz asociada es de la forma de las del último lema. Luego el resultado se desprende de forma inmediata de la regla de Cramer.

Ahora estamos en condiciones de ver que el algoritmo converge, más aún converge en a lo sumo

$$t = \lceil \frac{n^2}{\log_2(1 + 2^{-n})} + n \rceil$$

pasos, pues esto nos asegura

$$(1 + 2^{-n})^{-\lceil t/n \rceil} < 2^{-n}$$

y luego $R(v, t) \leq R(w, t)$ implica $R(v) \leq R(w)$. Para ver esto, supongamos que no. Tenemos

$$\begin{aligned} R(w) + 2^{-n} &\leq R(v) \\ R(w) + (1 + 2^{-n})^{-\lceil t/n \rceil} &< R(v) \\ (1 + 2^{-n})^{-\lceil t/n \rceil} &< R(v) - R(w) \\ &= (R(v) - R(v, t)) + (R(v, t) - R(w, t)) + (R(w, t) - R(w)) \\ &\leq 0 + 0 + (1 + 2^{-n})^{-\lceil t/n \rceil} \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Por lo que tendremos $v^+ = v_t^+$ y $v^- = v_t^-$. En esta instancia la solución al sistema de ecuaciones será la deseada.

Observación 1: La cota del Lema 2.3.3 mejora ligeramente la obtenida en [LLPSU99], donde prueban que el determinante está entre 0 y $6^{(k-2)/2}$, y se mejora también la cota para la convergencia del algoritmo. Es desafortunado que esta cota no es polinomial. De hecho veremos en lo que sigue que efectivamente el algoritmo puede converger lento.

La convergencia no es tan rápida

Sabemos que en un grafo con $n + 2$ nodos el algoritmo converge en a lo sumo $\lceil \frac{n^2}{\log_2(1+2^{-n})} + n \rceil$ pasos. Vamos a exhibir un ejemplo donde en un grafo con $3n + 2$ nodos la convergencia demora al menos $\lceil \frac{\log_2(2^{n-1}-1)}{\log_2(1+\frac{1}{2^n-1})} \rceil$ pasos y por lo tanto, en particular, no es polinomial.

La idea del ejemplo está dada por la demostración de la cota superior, es decir intenta ser un ejemplo donde esto sea lo mejor que se pueda hacer. Esto es un grafo donde luego de varios pasos en los cuales se gana $\frac{s}{2^n}$ se vuelve a un nodo que está lejos del objetivo. A esto se suma la siguiente dificultad: cuando se está a un paso de perder (pero con suficiente capital para ganar) se puede multiplicar por dos el *surplus* en un paso. Si estamos en el nodo v a un paso de perder, esto es $v_r \in S(v)$, tendremos un vecino w de manera que $2R(v) = R(w) + 1$. Nuestro capital es $R(v) + s$, nuestro adversario tiene $1 - R(v) - s$, con lo que ofertando más que esto, pero no mucho más, podremos ganar el turno y quedarnos casi con $R(v) + s - (1 - R(v) - s)$. Esto es $2R(v) + 2s - 1 = R(w) + 2s$, con lo que moviéndonos a w lograremos lo deseado. Este hecho tan antiintuitivo se debe, en algún sentido, a que podemos aprovechar el poco capital del adversario (en relación

a $\delta(v)$). Lo mismo ocurre al estar a un paso de ganar, lo cual también motiva la elección del grafo.

Comenzaremos con un lema que utilizaremos más adelante.

Lema 2.3.4. *Dado $x \in [0, 1]$ y $k \in \mathbb{N}$ existe un grafo con $k + 2$ nodos tal que en uno de ellos la función de costo difiere de x en a lo sumo 2^{-k} . Más aún, podemos tomarlo de manera que el valor de la función de costo sea mayor o menor a x .*

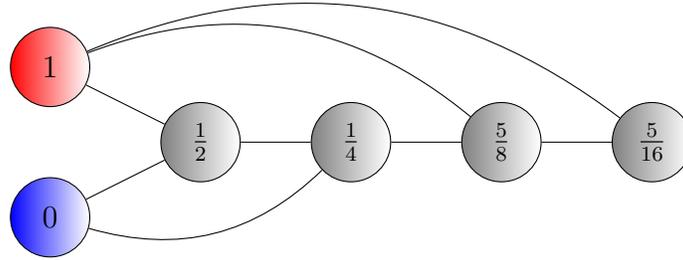


Figura 2.2: grafo con la propiedad deseada en lema 2.3.4 para $n = 4$ y $x = \frac{1}{3}$

Demostración. Procedemos por inducción. Para $k = 1$ tomamos un grafo con un solo nodo negro conectado al azul y al rojo, allí la función va a valer $\frac{1}{2}$, tomamos en este grafo el nodo que corresponda. Veamos que k implica $k+1$. Tomamos $x' = 2x$ si $x < 1/2$ o $x' = 2x - 1$ si no, resulta claro que en ambos casos $x' \in [0, 1]$. Entonces por hipótesis inductiva sabemos que tenemos un grafo con $k + 2$ nodos con un nodo con la propiedad deseada para x' . Luego tomamos un nodo extra, lo conectamos a este y a el azul si $x < 1/2$ o al rojo en caso contrario. Este último cumple lo buscado. \square

Ahora procederemos a construir un grafo donde uno puede asegurarse ganar, pero el adversario puede forzar un partido largo.

Lema 2.3.5. *Existe un grafo con $2k + 3$ nodos donde si el jugador Azul comienza con un surplus positivo $s < 2^{-k}$ demora al menos $t = \lceil \frac{\log_2(2^{k-1}-1)}{\log_2(1+\frac{1}{2^k-1})} \rceil$ turnos en forzar su victoria.*

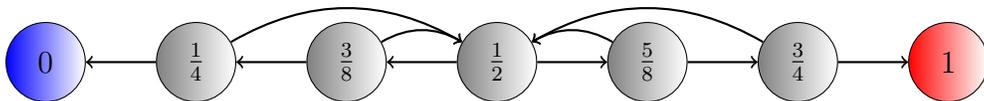


Figura 2.3: ejemplo del grafo descrito en el lema 2.3.5 para $k = 2$

Demostración. Consideremos el grafo dirigido con $2k + 3$ nodos: $v_a, v_r, v_{-k}, v_{-k+1}, \dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_{k-1}$ y v_k ; con aristas que conectan a cada uno de los nodos de v_0 a v_{k-1} con su siguiente, todos los de v_{-n+1} a v_0 con su anterior, a todos los negros con v_0 salvo si mismo, a v_k con v_a y el v_{-k} con v_r . Se puede ver que la función de costo vale 1 en v_r , 0 en v_a , $\frac{1}{2}$ en v_0 , $\frac{2^{k+1-t}-1}{2^{k+2-t}}$ en v_t para t de 1 a k y $\frac{2^{k+1+t}+1}{2^{k+2+t}}$ en v_t para t de -1 a $-k$.

Consideramos el juego comenzando en el nodo v_0 .

Para que el jugador Azul pueda ganar en jugadas corridas (o sea, sin que Roja pueda realizar ningún movimiento) debe tener al menos $1 - \frac{1}{2^{k+1}}$. De la cota para s resulta que

$$s + \frac{1}{2} < 2^{-k} + \frac{1}{2} < 1 - \frac{1}{2^{k+1}}$$

por lo que Azul inicialmente comienza con un capital menor al necesario para ganar en jugadas corridas. Procederemos ahora a describir una estrategia para Roja de manera que a Azul le lleve al menos $\lceil \frac{\log_2(2^{k-1}-1)}{\log_2(1+\frac{1}{2^{k-1}})} \rceil$ turnos ganar.

Si Roja gana el derecho a mover estando en v_0 , moverá la ficha a v_{-1} . Si gana el derecho a mover estando en v_k , $k > 0$, ella moverá la ficha al nodo v_0 . Si gana el derecho a mover estando en v_k , $k < 0$, ella moverá la ficha al nodo v_{k-1} , acercándose a v_r . Si fuese Azul quien tenga el derecho a mover en este caso, podrá hacer lo mismo o moverla a v_0 . Por lo que asumiendo que gana Azul, este moverá eventualmente la ficha a v_0 . Es así que podemos pensar el juego en etapas donde se comienza en el nodo v_0 y se mueve hasta volver a este, hasta que finalmente Azul cuente con suficiente capital para ganar en movimientos corridos.

Describamos la estrategia de Roja en una cierta etapa con los números no negativos $a_k, a_{k-1}, \dots, a_0, \dots, a_{-k}$ indicando cuanto ofertará en cada nodo. La jugadora Roja ganará esto cuando pierda la subasta y lo perderá cuando la gane. Entonces en una cierta etapa la ficha se moverá de v_0 a través de v_1, \dots, v_{t-1} hasta v_t y volviendo a v_0 , con $t > 0$, o de v_0 a través de v_{-1}, \dots, v_{t+1} hasta v_t y volviendo a v_0 , con $t < 0$. El primer caso se corresponderá a que Azul gane el derecho a mover t veces y luego sea Roja quien lo gane, en este caso Azul ganará $a_t - a_0 - \dots - a_{t-1}$. En el segundo caso será Roja o Azul quien gane el derecho a mover t veces y luego Azul volviendo la ficha a v_0 , en este caso Azul ganará a lo sumo $a_0 + \dots + a_{t+1} - a_t$. Recordando que el capital

de Azul es $s + \frac{1}{2}$, el de Roja será $\frac{1}{2} - s$, para poder realizar las ofertas deberemos tener

$$\begin{aligned}
a_0 + a_{-1} + \cdots + a_{-k} &\leq \frac{1}{2} - s \\
a_1 &\leq \frac{1}{2} - s + a_0 \\
a_2 &\leq \frac{1}{2} - s + a_0 + a_1 \\
&\vdots \\
a_k &\leq \frac{1}{2} - s + a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para asegurarnos que Azul no gane (con certeza) deberemos tener

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_k \geq \frac{1}{2} + s \tag{2.4}$$

De esta manera resulta que Azul puede asegurarse ganar a lo sumo

$$\begin{aligned}
m = \max &(a_1 - a_0, a_2 - a_0 - a_1, \dots, a_k - a_0 - \cdots - a_{k-1}, \\
&a_0 - a_{-1}, a_0 + a_{-1} - a_{-2}, \dots, a_0 + \cdots + a_{-k+1} - a_{-k})
\end{aligned}$$

este máximo claramente es mayor o igual que cualquier combinación convexa de estos números, con lo que

$$\begin{aligned}
m &\geq \frac{a_k - a_0 - \cdots - a_{k-1} + 2 \times (a_{k-1} - a_0 - \cdots - a_{k-2}) + \cdots + 2^{k-1} \times (a_1 - a_0)}{2^{k+1} - 2} \\
&+ \frac{a_0 + \cdots + a_{-k+1} - a_{-k} + 2 \times (a_0 + \cdots + a_{-k+2} - a_{-k+1}) + \cdots + 2^{k-1} \times (a_0 - a_{-1})}{2^{k+1} - 2} \\
&= \frac{a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 - (2^k - 1)a_0 - a_{-k} - a_{-k+1} + \cdots - a_{-1} + (2^k - 1)a_0}{2^{k+1} - 2} \\
&= \frac{a_k + a_{k-1} + \cdots + a_1 + a_0 - a_{-k} - a_{-k+1} + \cdots - a_{-1} - a_0}{2^{k+1} - 2} \\
&\geq \frac{\frac{1}{2} + s - (\frac{1}{2} - s)}{2^{k+1} - 2} = \frac{s}{2^k - 1}
\end{aligned}$$

Nos gustaría poder tomar los a_i de manera que valga la igualdad. Para esto necesitamos que

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + \cdots + a_k &= \frac{1}{2} + s \\
a_0 + a_{-1} + \cdots + a_{-k} &= \frac{1}{2} - s
\end{aligned} \tag{2.5}$$

y que todos los argumentos del máximo sean iguales (si no lo fueran, como la combinación convexa los involucra a todos el máximo sería mayor a esta combinación). A las ecuaciones 2.5 se suman

$$\begin{aligned}
 a_1 - a_0 &= a_2 - a_0 - a_1 \\
 a_2 - a_0 - a_1 &= a_3 - a_0 - a_1 - a_2 \\
 &\vdots \\
 a_{k-1} - a_0 - \cdots - a_{k-2} &= a_k - a_0 - \cdots - a_{k-1} \\
 a_0 - a_{-1} &= a_0 + a_{-1} - a_{-2} \\
 a_0 + a_{-1} - a_{-2} &= a_0 + a_{-1} + a_{-2} - a_{-3} \\
 &\vdots \\
 a_0 + \cdots + a_{-k+2} - a_{-k+1} &= a_0 + \cdots + a_{-k+1} - a_{-k} \\
 a_1 - a_0 &= a_0 - a_{-1}
 \end{aligned}$$

Tenemos $2k + 1$ ecuaciones e incógnitas. Podemos reescribir esto como:

$$\begin{aligned}
 2a_1 &= a_2 \\
 2a_2 &= a_3 \\
 &\vdots \\
 2a_{k-1} &= a_k \\
 a_{-2} &= 2a_{-1} \\
 a_{-3} &= 2a_{-2} \\
 &\vdots \\
 a_{-k} &= 2a_{-k+1} \\
 a_1 + a_{-1} &= 2a_0
 \end{aligned}$$

O sea,

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_{-1} &= 2a_0 \\
 a_t &= 2^{t-1}a_1 \text{ si } t > 0 \\
 a_t &= 2^{-t-1}a_{-1} \text{ si } t < 0
 \end{aligned}$$

Finalmente reemplazando en 2.5 y despejando, obtenemos

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2^{k+1}} \\
 a_t &= \frac{1}{2^{k+2-t}} + \frac{2^{t-1}s}{2^k - 1} \text{ si } t > 0 \\
 a_t &= \frac{1}{2^{k+2+t}} - \frac{2^{-t-1}s}{2^k - 1} \text{ si } t < 0
 \end{aligned}$$

Debemos verificar que estos a_i sean no negativos, satisfagan 2.3 y 2.4, para asegurarnos que Roja pueda ofertar estas cantidades y Azul no pueda ganar en esta etapa. Resulta inmediato que a_0 y a_t con $t > 0$ son no negativos. Para a_t con $t < 0$ queremos ver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{k+2+t}} - \frac{2^{-t-1}s}{2^k - 1} &\geq 0 \\ \frac{2^k - 1}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{k+1}} \geq s \end{aligned}$$

lo cual vale pues estamos asumiendo que Azul no tiene suficiente capital para ganar en jugadas corridas. En cuanto a 2.4 y la primer condición de 2.3 se verifican pues vale la igualdad. El resto de las condiciones son equivalentes a $m \leq \frac{1}{2} - s$ pues m es igual a todos los argumentos del máximo por como tomamos los a_i . Y $m = \frac{s}{2^{k-1}}$, o sea queremos $\frac{s}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2} - s$, lo cual se deduce nuevamente de que Azul no tiene suficiente capital para ganar en jugadas corridas.

Entonces en cada etapa (que claramente consiste en más de un turno) Azul puede multiplicar su *surplus* por a lo sumo $1 + \frac{1}{2^{k-1}}$. Entonces para estar listo para ganar de corrido necesita al menos t etapas de manera que

$$s \times \left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)^t \geq 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)^t}{2^k} &> s \times \left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)^t \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2^k} \\ \left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)^t &> 2^{k-1} - 1 \\ t &> \frac{\log_2(2^{k-1} - 1)}{\log_2\left(1 + \frac{1}{2^k - 1}\right)} \end{aligned}$$

que era lo que queríamos probar. □

Finalmente combinando las dos construcciones anteriores obtendremos el resultado deseado.

Teorema 2.3.6. *Existe un grafo con $3n + 4$ nodos donde la convergencia demora al menos $\lceil \frac{\log_2(2^{n-1} - 1)}{\log_2(1 + \frac{1}{2^{n-1}})} \rceil$ pasos.*

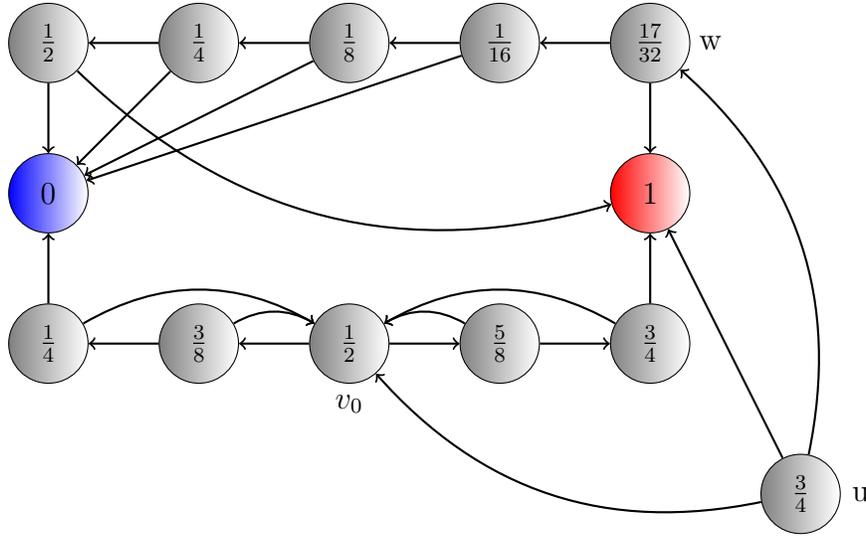


Figura 2.4: ejemplo del grafo de la proposición 2.3.6 para $n = 3$

Demostración. Tomamos el grafo del lema 2.3.5 con $2n + 3$ nodos. Luego agregamos n nodos para formar un grafo del tipo del lema 2.3.4 con $n + 2$ nodos (ya contamos con los nodos rojo y azul) y $x = \frac{1}{2}$. Así conseguimos un nodo, llamémoslo w , donde la función de costo vale más que en el nodo v_0 pero la diferencia es $\frac{1}{2^n}$. Finalmente agregamos un último nodo, llamémoslo u , que lo conectamos a v_r , w y a v_0 . Claramente el vecino de mayor valor para u va a ser v_r y el de menor v_0 . Ahora mirando en detalle el algoritmo y la construcción resulta que en los primeros pasos la convergencia (todos los nodos comienzan con valor 1 salvo el v_a), sobre la parte del grafo del lema 2.3.4 es muy rápida y el valor de w va a ser menor al de v_0 en los primeros n pasos cuando ya se estaciona, pero por el lema 2.3.5 para que el valor de v_0 quede por debajo del de w van a tener que pasar al menos $\lceil \frac{\log_2(2^{n-1}-1)}{\log_2(1+\frac{1}{2^{n-1}})} \rceil$ pasos, y esto es necesario para que el algoritmo converja. \square

Una nueva idea

Partiremos nuevamente de una idea que a priori nos proporcionará un algoritmo poco eficiente. Para poder decidir cuales son v^+ y v^- basta conocer el orden relativo entre los nodos, según la función de costo. Así, si iteramos sobre todos los ordenes posibles, para cada uno tomamos v^+ , v^- y con ellos resolvemos el sistema correspondiente, eventualmente cuando iteremos sobre el orden correcto obtendremos la respuesta correcta.

Esto nos aporta una nueva manera de pensar el problema y nos permite proponer un nuevo algoritmo descrito en la tabla 2.2.

1. Tomar un orden \prec al azar entre los nodos (v_a y v_r son el mayor y menor resp.).
2. Tomar v_{\prec}^+ y v_{\prec}^- según el orden \prec .
3. Resolver el sistema lineal resultante asumiendo $v^+ = v_{\prec}^+$ y $v^- = v_{\prec}^-$.
4. Si la solución es la deseada, imprimirla y terminar.
5. Calcular un nuevo \prec según los valores obtenidos al resolver el sistema (si dos nodos tienen el mismo valor respetamos el orden anterior).
6. Volver al paso 2.

Cuadro 2.2: nuevo algoritmo para calcular la función de costo de Richman.

Podemos pensar que para cada orden \prec tenemos un \prec' al que nos manda el algoritmo en el paso 5. Si fuesen iguales estaríamos ante el orden correcto, el algoritmo hubiese terminado en el paso 4. Entonces surge la pregunta: ¿este algoritmo converge o hay un orden inicial para el cual entramos en un ciclo? Esta pregunta queda abierta y será un disparador para seguir pensando el problema.

Aún si el algoritmo convergiese, queda la pregunta ¿cuán rápido es? Intuitivamente esperaríamos que fuese mas rápido que el algoritmo original, pues en el algoritmo original podría pasar varias iteraciones sin que se cambie el orden relativo entre los valores de los nodos. Por otro lado el algoritmo nuevo podría pasar por ordenes que el original nunca consideraría, caso en el cual podría incluso no converger.

Para comparar los algoritmos, los probamos sobre grafos al azar utilizando el modelo de Erdős-Rényi $G(n, p)$, el debido a Edgar Gilbert. Esto es un grafo con n nodos donde cada arista (dirigida) es tomada con probabilidad p . Para cada valor de p y n luego de generar el grafo verificamos la condición de que desde cada nodo se pueda llegar a alguno de los nodos distinguidos corriendo un *BFS* desde los nodos distinguidos sobre el grafo con las aristas invertidas. En el cuadro 2.3 vemos los resultados del experimento. Los promedios en todos los casos son sobre 1000 grafos al azar, utilizando los mismos grafos para ambos algoritmos.

Es claro a primera vista que el algoritmo nuevo corre mas rápido que el original. Sin embargo no se desprende inmediatamente de las pruebas realizadas que esto sea cierto para grafos más grandes o de otra naturaleza en general. Puede resultar antiintuitivo el

		Algoritmo original			Algoritmo nuevo		
p	n	50	75	100	50	75	100
	0,10		25,650	22,941	21,410	5,558	6,368
0,20		11,646	10,110	8,331	5,395	5,488	5,073
0,30		6,573	4,944	4,257	4,159	3,383	2,998

Cuadro 2.3: cantidad promedio de pasos que demoran los algoritmos en converger sobre grafos al azar $G(n, p)$

hecho de que un algoritmo pueda correr más rápido (en nuestro caso no estamos midiendo exactamente la complejidad sino solo la cantidad de pasos) en grafos más grande. Esto se debe a que fijado el valor de p al aumentar n puede disminuir la esperanza para la distancia de los vértices a los nodos distinguidos. En este sentido sería interesante estudiar la complejidad del algoritmo en función de, por ejemplo, la distancia máxima de un nodo negro a uno de los distinguidos.

Finalmente queda destacar la pregunta central que queda abierta en relación al problema. ¿Se puede calcular el valor de la función de costo en tiempo polinomial?

Capítulo 3

Nuevos juegos de Richman

3.1. Introducción

En este capítulo presentaremos dos nuevas versiones del juego de Richman. A pesar de ser distintas, entre sí y con respecto a la original, reaparecerán las ideas presentadas en el capítulo anterior, y veremos qué nos permitirán decir sobre estos juegos que en distintos sentidos generalizan al original.

En el primer juego la diferencia con el original radicará en que el dinero no perderá su valor al finalizar el juego, así surgirá la necesidad de una medida que nos permita comparar el valor del dinero y el de “ganar”. En el segundo la diferencia estará en el juego subyacente, que no será puramente combinatorio, sino estocástico.

Para el primer juego lograremos demostrar la existencia del valor, más aún lo calcularemos explícitamente. Para el segundo no llegaremos a esto pero si marcaremos un posible camino a seguir. Quedará abierta la posibilidad de explorar otras versiones de estos juegos.

En el primer caso se puede estudiar la posibilidad de considerar otras funciones de utilidad, acá será lineal en la cantidad de dinero que se tenga al final del partido pero el juego tiene sentido para otras funciones del capital final (parece prudente pedir que sea creciente). Incluso se podría considerar que la utilidad dependiera de otros factores como la cantidad de turnos transcurridos desde el comienzo del partido.

En ambos casos es natural considerar las “versiones continuas” (en el sentido del capítulo 4). Para el primero esto estará dado por una función borde que dependa del capital. Para el segundo, por ejemplo, se podría considerar un ϵ que varíe en cada turno o incluso la posibilidad de dominios al azar más complicados alrededor del punto.

3.2. El valor de ganar

Este juego se diferenciará del original en la función de utilidad para los jugadores. El dinero no perderá su valor al finalizar el partido, entonces el resultado final dependerá de si el jugador logró llevar la ficha a su nodo, o si por el contrario lo logró su adversario, y de la cantidad de dinero que tengan en ese momento. Considerando el dinero inicial normalizado a 1, para cada jugador “ganar” tendrá valor p , podemos pensar que recibe un premio en dinero de esa cantidad. Así, cuando el juego termine, el “ganador” (quien haya logrado llevar la ficha a su nodo) si tiene capital c en ese momento valorará el resultado como $c + p$, pensaremos que tiene esa cantidad de dinero. La utilidad para su adversario será $1 - c$. El juego es de suma constante, la suma de las utilidades al finalizar el partido está fija, es $p + 1$.

Supondremos sin pérdida de generalidad que $p > 0$ pues si $p = 0$ los jugadores no tendrán ninguna motivación para ofertar.

Analicemos un caso con $p > 1$. En este juego, lograr “ganar” siempre es mejor que “perder”; en el primer caso se obtiene un valor mayor a 1 y en el segundo uno menor. Si Azul tuviese un capital inicial mayor a $R(v)$, con v el nodo inicial, este podrá forzar su victoria. Surge la pregunta: ¿cuánto capital perderá en el proceso? Digamos que el jugador se reserva capital $c - c'$ y separa c' para lograr su victoria. Para poder asegurarse “ganar” con capital c' , esta suma deberá ser una porción mayor a $R(v)$ del capital total participante en el juego, o sea

$$\begin{aligned} c' &> R(v) \times (1 - c + c') \\ c'(1 - R(v)) &> R(v) \times (1 - c) \\ c' &> R(v)(1 - c)/(1 - R(v)) \end{aligned}$$

Entonces el jugador Azul puede asegurarse terminar el partido con cualquier suma de dinero menor a $c - \frac{R(v) \times (1 - c)}{1 - R(v)} + p$. Es interesante ver (no lo hemos demostrado aún) que no puede asegurarse ganar esa cantidad de dinero. Es decir que no tiene estrategia óptima, por el contrario solo tendrá estrategias casi-óptimas en este caso.

Queremos calcular el valor del juego. En vista del caso particular analizado arriba es esperable que no siempre los jugadores tengan estrategias óptimas. Separaremos en casos, en cada uno calcularemos el valor del juego. Además en cada uno nos interesará ver si hay estrategias óptimas, cuáles maximizan su ganancia con seguridad o si hay alguna estrategia que maximice su esperanza aunque no le asegure un capital mínimo sin depende del azar. Es interesante ver en este análisis que la única referencia a la estructura del grafo está dada por el valor de $R(v)$.

Caso $p > 1$:

Si Azul tuviese capital $c > R(v)$, ya vimos que puede asegurarse ganar cualquier suma menor a $c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p$, y éste será el valor del juego. En este caso, Roja tiene capital $1 - c < 1 - R(v)$, donde podemos pensar a $1 - R(v)$ como la función de Richman desde su punto de vista. Ella jugando en cada turno $\frac{\delta(w)(1-c)}{1-R(v)}$, con w el nodo actual, se puede asegurar que si el juego termina ella tendrá al menos capital $\frac{1-c}{1-R(v)}$, entonces Azul no podrá asegurarse ganar más de $1 + p$ menos eso. Nos queda que Azul ganará a lo sumo $1 + p - \frac{1-c}{1-R(v)} = c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p$ que es lo que vimos que casi puede asegurarse. Nos queda la pregunta de si puede asegurarse esa cantidad. La respuesta es no. Supongamos que Roja juega con la estrategia descrita arriba. Si Azul ganará la subasta en algún turno ofertando más que Roja, ella podrá asegurarse terminar (si el juego termina) con más dinero del que le aseguraba su estrategia original jugando con la misma estrategia pero con el nuevo capital extra. Por lo tanto Azul no podrá conseguir $c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p$ en este caso. Si en todo momento oferta una cantidad menor o igual a la que oferte Roja, esto es equivalente (mas allá del intercambio de dinero) a un *spinner game* donde a veces se sortea el turno y a veces simplemente juega Roja, ella tendrá al menos probabilidad $R(v)$ de “ganar”, por lo que la esperanza para Azul será menor a un valor que puede asegurarse.

Ahora, qué pasa cuando Azul está en la situación simétrica, o sea $c < R(v)$. Ya vimos que puede asegurarse terminar (si el juego termina) con $\frac{c}{R(v)}$ y que no puede asegurarse ganar más que eso. Veamos que puede asegurarse ganar cualquier cantidad menor a esa, esto es, asegurarse que el partido termine y que tenga al menos esa cantidad de dinero en ese momento. Para asegurarse terminar con $\frac{c-\epsilon}{R(v)}$ deberá separar $c' = c - \epsilon$ capital con el que ofertará $\frac{\delta(v)c'}{R(v)}$ en cada turno más $\frac{\epsilon}{2^{n-j}}$ si hace j que no le ganan la subasta. Si durante n turnos no le ganan la subasta podrá ”ganar“ asegurándose más capital que el deseado. Si le ganan la subasta tendrá capital suficiente para cambiar ϵ por $\epsilon + \frac{\epsilon}{2^n}$. Entonces el partido termina con seguridad ya que el capital total está acotado.

Veamos que no puede asegurarse terminar con exactamente $\frac{c}{R(v)}$ pero si puede asegurarse que el partido termine con probabilidad 1 y que él tenga al menos esa cantidad de dinero. Si oferta una cantidad distinta de $\delta(v) \frac{c}{R(v)}$, Roja podrá asegurarse que el partido termine y que Azul tenga menos dinero que el deseado. Si oferta siempre esa cantidad, Roja podrá asegurarse terminar el partido dejando que Azul gane al menos un poco más que $\frac{c}{R(v)}$ o ofertará siempre la misma cantidad. Con esta estrategia no se asegura que el partido termine, el otro jugador podría igualarle la oferta en todos los turnos y podrían nunca llegar a uno de los terminales. Sin embargo si el otro jugador nunca le gana la subasta el partido termina con probabilidad 1 y la esperanza para el pago es $\frac{(1-R(v))p + R(v) \frac{c}{R(v)}}{2} > \frac{c}{R(v)}$. Si por el contrario la otra jugadora en algún momento oferta más que él, con el capital resultante podrá jugar la estrategia que le aseguraba ganar casi lo deseado pero ahora ganando por lo menos esa suma.

Finalmente nos queda el caso $c = R(v)$. En este se puede ver que puede asegurarse ganar casi 1. U ofertando $\delta(v)$ en cada turno pueden asegurarse que el partido termine con probabilidad 1 y la esperanza para su capital va a ser $R(v)1 + (1 - R(v))p$ (mas allá de las ofertas es un *sppiner game* donde si gana se lleva p y si pierde 1).

Caso $p \leq 1$:

En este caso el valor critico estará dado por $R(v)p$. Podemos pensar que esa es la suma de dinero que necesitamos para poder jugar cómodos el juego. Con esa suma de dinero podemos ofertar en cada ronda $\delta(v)p$, esta estrategia nos asegura que de terminar el partido tendremos capital al menos $c - R(v)p + p$. Pasaremos a dividir en casos según si cada jugador tiene dinero suficiente para llevar adelante esta estrategia o no.

En el caso $c \geq R(v)p$ y $1 - c \geq (1 - R(v))p$ ambos podrán jugar según la estrategia de arriba (la segunda condición es la equivalente a la anterior pero para Roja). Así Azul podrá asegurarse que el partido termine con probabilidad 1 y el tenga capital $c - R(v)p + p$. También se puede ver que puede asegurarse cualquier suma menor.

Cuando Roja no tenga suficiente dinero pero Azul si, osea $c \geq R(v)p$ y $1 - c < (1 - R(v))p$, estaremos en un caso similar a cuando $p > 1$ y $c > R(v)$. Esto se corresponde a que Azul debe jugar separando un pequeño capital (pequeño en relación a p) con el cual le alcanzará para “ganar”. En este caso el valor del juego será $c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p$. El caso simétrico también se corresponde al simétrico con $p > 1$. Nos queda el caso $c < R(v)p$ y $1 - c < (1 - R(v))p$, pero esto no puede ocurrir ya que $p \leq 1$.

Finalmente hemos analizado completamente los casos. En cada uno tendremos estrategias casi-óptimas u óptimas que hacen que el partido termine con probabilidad 1. Mas allá de esto, hemos calculado el valor del juego que estará dado por:

$$val(v, c) = \begin{cases} c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p & \text{si } p > 1 \text{ y } c > R(v) \\ \frac{c}{R(v)} & \text{si } p > 1 \text{ y } c < R(v) \\ R(v) + (1 - R(v))p & \text{si } p > 1 \text{ y } c = R(v) \\ c + (1 - R(v))p & \text{si } p \leq 1, c \geq R(v)p \text{ y } 1 - c \geq (1 - R(v))p \\ c - \frac{R(v) \times (1-c)}{1-R(v)} + p & \text{si } p \leq 1, c \geq R(v)p \text{ y } 1 - c < (1 - R(v))p \\ \frac{c}{R(v)} & \text{si } p \leq 1, c < R(v)p \text{ y } 1 - c \geq (1 - R(v))p \end{cases}$$

Ya hemos calculado el valor del juego y descrito estrategias para los jugadores en los distintos casos. Queremos ver qué podemos decir sobre el problema encarándolo de

manera análoga a lo hecho en el capítulo 2. En este sentido queremos repetir lo hecho para $R(v)$ con una función $f(v, c)$ que nos diga cuanto dinero podemos ganar en función de “la posición”, es decir, el nodo actual v y el capital c . Para esto primero definiremos $f_t(v, c)$ que nos dirá cuanto dinero podemos lograr partiendo de v con capital c en t turnos. Tendremos

$$f_0(v, c) = -\infty, 0 \leq c \leq 1$$

para $v \neq v_a$ y

$$\begin{aligned} f_0(v_a, c) &= c + p, 0 \leq c \leq 1 \\ f_0(v, c) &= +\infty, c > 1 \\ f_0(v, c) &= -\infty, c < 0 \end{aligned}$$

donde las últimas dos condiciones están dadas por las restricciones a ofertar más de lo que se tiene. Estas simplemente nos permiten escribir la ecuación que sigue de forma más sintética, sin la necesitada de separar en casos según el valor de a pero en todo momento pensaremos a las f_t definidas en el $[0, 1]$. Pensando en los 3 casos provenientes de si ofertan la misma cantidad, Roja oferta δ más que Azul o es Azul quien oferta más, para $t > 0$ tendremos

$$f_t(v, c) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\min \left\{ \frac{\min_{w \in S(v)} f_{t-1}(w, c + a), \max_{w \in S(v)} f_{t-1}(w, c - a)}{2}, \right. \right. \tag{3.1}$$

$$\left. \left. \inf_{\delta > 0} \min_{w \in S(v)} f_{t-1}(w, c + a + \delta), \max_{w \in S(v)} f_{t-1}(w, c - a) \right\} \right)$$

para los nodos negros, y

$$f_t(v, c) = f_0(v, c)$$

para $v = v_a, v_r$.

Podemos considerar el operador H que verifica, $f_t = H(f_{t-1})$. Es claro que es monótono creciente, o sea que si $f \geq g$ tendremos $H(f) \geq H(g)$. También es fácil ver que $f_1 \geq f_0$. Así inductivamente podemos ver que $f_t \geq f_{t-1}$. Esto coincide con la intuición de que si jugamos bien con más turnos podremos ganar al menos el mismo dinero. Esto nos permite definir

$$f(v, c) := \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(v, c)$$

Se puede ver que si el jugador Azul se encuentra en el nodo v y tiene capital c puede asegurarse terminar el partido con cualquier capital menor a $f(v, c)$. Quedará sin resolverse la pregunta natural de si $f(v, c) = \text{val}(v, c)$.

3.3. Juego de Richman con dado

La versión que presentaremos en esta sección está inspirada en una idea muy común en los juegos de mesa, cuando nos toca no tenemos un conjunto posibles de movidas, sino que tiramos un dado y el conjunto de movidas depende del resultado obtenido. Así podríamos jugar al juego de Richman pero al ganar el derecho a mover tiramos un dado que nos diga cuántos pasos podemos hacer. Comencemos con un ejemplo sencillo.

Imaginemos un juego donde se subasta el derecho a tirar un dado, si ganamos lo tiramos y tenemos probabilidad p de ganar, si no ganamos se continua jugando. Estaríamos en el caso de lo descrito antes pensando en un tablero con un nodo negro conectado al nodo rojo y azul, donde tiramos una moneda cargada que con probabilidad p nos deja hacer un paso y con probabilidad $1 - p$ nos deja hacer 0 pasos. ¿Cuánto vale tener probabilidad p de ganar? Fijemos $p > 1/2$, en este caso es fácil responder la pregunta, debo hacer todo lo posible por ganar la subasta. Si no la gano, sin importar cuanto dinero tenga o cuan bien juegue a lo sumo tendré una probabilidad total de ganar $1 - p$ que es menor a p , lo cual es lo mínimo que conseguiré si gano la subasta. Esto aplica para ambos jugadores y para los turnos subsiguientes al primero, entonces se puede ver que si tenemos capital

$$c = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{2^k}$$

tendremos

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k p (p - 1)^{k-1}$$

probabilidad de ganar.

En general lo que nos va interesar es maximizar nuestra probabilidad de ganar. Tomemos f , la función que nos da esta probabilidad en función de nuestro capital, deberá cumplir

$$f(c) = \sup_{a \in \mathbb{R}} \min \left\{ \frac{p + (1 - p)(f(c - a) + f(c + a))}{2}, p + (1 - p)f(c - a), \right. \\ \left. \inf_{\delta > 0} (1 - p)f(c + a + \delta) \right\}$$

Vemos un ejemplo de tal f para $p = 0,6$ en la figura 3.3.

En general pensaremos al juego de la siguiente manera. Para cada nodo tendremos P_v una distribución de probabilidades sobre $\mathcal{P}_{\neq \emptyset}(V)$. Entonces después de subastar el

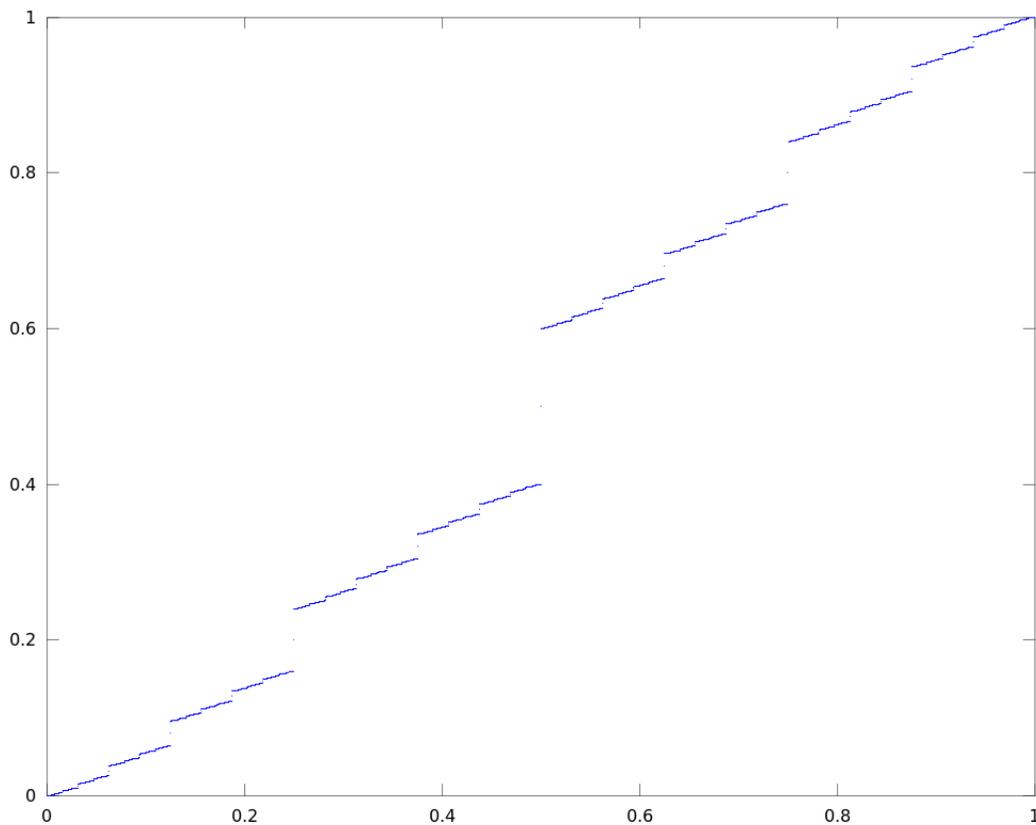


Figura 3.1: ejemplo de la f para $p = 0,6$.

turno se elegirá con dicha distribución un subconjunto no vacío de los V (que en este caso no serán vértices en un grafo si no puramente estados del juego). Luego el jugador podrá mover a cualquiera de estos. Entonces nos gustaría encontrar la f de la que

hablamos en el caso general. Para esto comencemos definiendo inductivamente $f_t(v, c)$:

$$\begin{aligned}
f_0(c, v) &= 0 \quad v \neq v_a, \quad 0 \leq c \leq 1 \\
f_0(c, v_a) &= 1 \quad 0 \leq c \leq 1 \\
f_0(c, v) &= +\infty \quad 1 < c, \quad v \in V \\
f_0(c, v) &= -\infty \quad c < 0, \quad v \in V \\
f_t(v, c) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a) + \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a)}{2}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a), \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a+\delta) \right\} \right)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Es facil ver que f_t es creciente en t y por lo tanto convergente

$$f(v, c) := \lim_{t \rightarrow \infty} f_t(v, c)$$

Proposición 3.3.1. *Comenzando en el nodo v con capital c , para todo $\delta > 0$ el jugador Azul tiene una estrategia que le asegura ganar al menos con probabilidad $f(v, c) - \delta$.*

Demostración. Tomemos t de manera que $f_t(v, c) > f(v, c) - \frac{\delta}{2}$ y veamos que Azul tiene una estrategia que le permite ganar en t turnos al menos con probabilidad $f_t(v, c) - \frac{\delta}{2}$. Es decir, veamos que para todo $t \in \mathbb{N}_0$ y $\epsilon > 0$ Azul tiene una estrategia que le permite ganar en t turnos con probabilidad $f_t(v, c) - \epsilon$. Procedamos por inducción.

Para $t = 0$ esto es claro, si se comienza en v_a se gana con probabilidad 1 y con probabilidad 0 en otro caso. Veamos que si esto vale para $t - 1$, vale para t . Si estamos en el nodo v con capital c , queremos ver que Azul tiene una estrategia que le permite asegurarse ganar con probabilidad $f_t(v, c) - \epsilon$. Tomemos a_0 de manera que:

$$\begin{aligned}
f_t(v, c) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} \left(\min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a) + \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a)}{2}, \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a), \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a+\delta) \right\} \right) \\
&\leq \min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a_0) + \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a_0)}{2}, \right. \\
&\quad \left. \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a_0), \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a_0+\delta) \right\} + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Veamos ahora que ofertando a_0 puede lograr lo buscado. Esencialmente debemos considerar 3 casos, que Roja oferte menos, más o la misma cantidad:

Si Roja oferta menos:

En este caso Azul pasará a tener capital $c - a_0$ y podrá decidir a donde se mueve la ficha. Si puede hacerlo a cualquier nodo del conjunto S por hipótesis inductiva podrá asegurarse ganar con probabilidad $\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c - a_0) - \frac{\epsilon}{2}$ moviéndose al w donde se alcance este máximo. Con esta estrategia Azul tiene una probabilidad de ganar igual a $\sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \left(\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c - a_0) - \frac{\epsilon}{2} \right) = \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c - a_0) - \frac{\epsilon}{2}$.

Si Roja oferta más:

Si Roja ofertó $a_0 + \delta$ para algún $\delta > 0$, en este caso Azul pasará a tener capital $c + a_0 + \delta$ y será Roja quien podrá decidir a donde se mueve la ficha. Si la mueve a w , por hipótesis inductiva, Azul podrá asegurarse ganar con probabilidad $f_{t-1}(w, c + a_0 + \delta) - \frac{\epsilon}{2}$. Si Roja puede mover la ficha a cualquier nodo del conjunto S , Azul podrá asegurarse ganar con probabilidad $\min_{w \in S} f_{t-1}(w, c + a_0 + \delta) - \frac{\epsilon}{2}$. Luego Azul tiene al menos probabilidad de ganar:

$$\begin{aligned} & \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \left(\min_{w \in S} f_{t-1}(w, c + a_0 + \delta) - \frac{\epsilon}{2} \right) \\ &= \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c + a_0 + \delta) - \frac{\epsilon}{2} \\ &\geq \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c + a_0 + \delta) - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Si Roja oferta a_0 :

El derecho a mover se determinará lanzando una moneda justa. Entonces hay dos posibilidades, con probabilidad $\frac{1}{2}$ Azul se queda con capital $c - a_0$ y el derecho a mover y, también con probabilidad $\frac{1}{2}$, Azul se queda con capital $c + a_0$ y es Roja quien tiene el derecho a mover. En el primer caso Azul podrá asegurarse ganar con probabilidad

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c - a_0) - \frac{\epsilon}{2},$$

y en el segundo con

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a) - \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego, puede asegurarse ganar con probabilidad

$$\sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a) + \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a)}{2} - \frac{\epsilon}{2}.$$

Por lo tanto, resulta que puede asegurarse ganar con probabilidad:

$$\begin{aligned} & \min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a) + \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a)}{2}, \right. \\ & \left. \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f_{t-1}(w, c-a), \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f_{t-1}(w, c+a+\delta) \right\} - \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, de la ecuación 3.3, se deduce que esto es mayor o igual a $f(c, t) - \epsilon$. O sea, puede asegurarse ganar en t turnos al menos con probabilidad $f(c, t) - \epsilon$ como queríamos. \square

Por otro lado, podemos hacer las mismas definiciones desde el punto de vista de Roja. Digamos que obtenemos la función $g(v, c)$. Entonces nos gustaría ver que $f(v, c) + g(v, 1-c) = 1$, con lo cual estaríamos probando que el juego tiene valor. Lamentablemente, esto quedará sin resolverse. Un posible plan sería ver que se puede tomar limite en la ecuación 3.2 para obtener

$$\begin{aligned} f(v, c) = \sup_{a \in \mathbb{R}} & \left(\min \left\{ \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \frac{\max_{w \in S} f(w, c-a) + \min_{w \in S} f(w, c+a)}{2}, \right. \right. \\ & \left. \left. \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \max_{w \in S} f(w, c-a), \inf_{\delta > 0} \sum_{S \in \mathcal{P}_{\geq 1}(V)} P_v(S) \min_{w \in S} f(w, c+a+\delta) \right\} \right), \end{aligned}$$

con lo cual la existencia del valor del juego se podría probar utilizando las técnicas que veremos al final del capítulo 4. Tal vez sea necesario (o útil) agregar la hipótesis de que el juego termina con probabilidad 1 sin importar las estrategias de los jugadores (por ejemplo pidiendo que $P_v(\{v_a, v_r\}) + P_v(v_a) + P_v(v_r) > 0$ para todo v).

Capítulo 4

Tug-of-War

4.1. Introducción

En este capítulo discutiremos problemas asociados al Laplaciano- ∞ , esto es el operador dado por:

$$\Delta_\infty u := Du \cdot D^2 u \cdot (Du)^t = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$$

Este aparece por primera vez en los trabajos de G. Aronsson [A67] y [A68], motivado por el estudio de problemas variacionales en L^∞ . En este contexto, él consideró extensiones de Lipschitz minimales. Una función $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ se dice una *extensión de Lipschitz minimal* (ELM) si

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|Dv\|_{L^\infty(\Omega)}$$

para toda v tal que $u - v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$. Si $f = u|_{\partial\Omega}$ esta bien definida, decimos que u es una ELM de f . El estudio de este problema lleva a la ecuación de Euler-Lagrange:

$$-\Delta_\infty u = 0 \tag{4.1}$$

Este problema y en general los problemas variacionales en L^∞ son importantes por aparecer frecuentemente en las aplicaciones. Por ejemplo, si estamos estudiando las cargas sobre una cierta pieza de una máquina, es preferible minimizar el punto de máxima tensión en lugar de algún tipo de promedio. En una pieza móvil, la máxima aceleración aplicada puede ser un factor crucial a considerar en el diseño. En un sistema de regulación de temperatura es más importante regular los puntos de mayor y menor temperatura que la temperatura promedio. También surgen este tipo de problemas en el procesamiento de imágenes y en problemas de transporte óptimo.

Es por esto que nos interesa estudiar este problema, la existencia de soluciones, unicidad y regularidad de las mismas. En general una f no va a tener una única extensión minimal (salvo el caso f constante). Aronsson introdujo la idea de una *extensión de Lipschitz absolutamente minimal* (ELAM), que podemos entender como una ELM canónica. Esto es una $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que:

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega')} \leq \|Dv\|_{L^\infty(\Omega')} \quad (4.2)$$

para todo $\Omega' \subset \Omega$ y v tal que $u - v \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$

Aronsson probó que la ecuación 4.1 es la ecuación de Euler-Lagrange asociada a las soluciones suaves de 4.2. Esto es, dada $u \in C^2(\Omega)$ y $x \in \Omega$, tenemos $\Delta_\infty u(x) = 0$.

Probemos esto, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x = 0$. Tomamos $\epsilon' > 0$ tal que $B_\epsilon(0) \subset \Omega$ para todo $\epsilon < \epsilon'$. Definimos $w \in C^2(B_\epsilon(0))$ como

$$w(x) = u(x) + \frac{\gamma}{2}\epsilon^2 - \frac{\gamma}{2}|x|^2$$

para $x \in B_\epsilon(0)$. Por Taylor tenemos

$$\begin{aligned} u(x) &= a + \sum_{i=0}^n p_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n \mu_{ij} x_i x_j + o(|x|^2) \\ w(x) &= a + \frac{\gamma}{2}\epsilon^2 + \sum_{i=0}^n p_i x_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=0}^n \mu'_{ij} x_i x_j + o(|x|^2) \end{aligned}$$

con $\mu'_{ij} = \mu_{ij} - \gamma\delta_{ij}$. En terminos de p_i y μ_{il} , queremos ver que

$$\sum_{i,j=0}^n p_i p_j \mu_{ij} = 0.$$

Si $\sum_{j=0}^n p_j \mu_{ij} = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ la igualdad anterior es inmediata, por lo que podemos asumir que

$$\sum_{i,j,k=0}^n \mu_{ik} p_k \mu_{ij} p_j = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n \mu_{ij} p_j \right)^2 > 0$$

Luego, si γ es suficientemente chico

$$\sum_{i,j,k=0}^n \mu'_{ik} p_k \mu'_{ij} p_j \geq C > 0$$

Además tenemos

$$|Du|^2(x) = \sum_{i=0}^n p_i p_i + 2 \sum_{i,j=0}^n \mu_{ij} p_i x_j + o(|x|)$$

$$|Dw|^2(x) = \sum_{i=0}^n p_i p_i + 2 \sum_{i,j=0}^n \mu'_{ij} p_i x_j + o(|x|)$$

Luego

$$\|Du\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))}^2 = \sum_{i=0}^n p_i p_i + 2\epsilon \sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu_{ik} p_k \mu_{ij} p_j} + o(\epsilon)$$

$$\|Dw\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))}^2 = \sum_{i=0}^n p_i p_i + 2\epsilon \sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu'_{ik} p_k \mu'_{ij} p_j} + o(\epsilon).$$

De la hipótesis de que u es ELAM y la estimación anterior,

$$0 \leq \|Dw\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))}^2 - \|Du\|_{L^\infty(B_\epsilon(0))}^2$$

$$= 2\epsilon \left(\sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu'_{ik} p_k \mu'_{ij} p_j} - \sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu_{ik} p_k \mu_{ij} p_j} \right) + o(\epsilon).$$

Dividiendo por 2ϵ y tomando límite $\epsilon \searrow 0$

$$0 \leq \sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu'_{ik} p_k \mu'_{ij} p_j} - \sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu_{ik} p_k \mu_{ij} p_j} = \mathcal{F}(\gamma).$$

Como $\mathcal{F}(0) = 0$, luego $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \gamma}(0) = 0$, esto es

$$-\frac{\sum_{i,j=0}^n p_i p_j \mu_{ij}}{\sqrt{\sum_{i,j,k=0}^n \mu_{ik} p_k \mu_{ij} p_j}} = 0$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Fue Jensen (a quien se debe la demostración precedente) en [J93] quien generalizó estos resultados quitando la hipótesis de suavidad. Demostró la existencia de ELAM para datos de borde en $W^{1,\infty}(\partial\Omega)$, que estas funciones son ∞ -armónicas en el sentido de soluciones viscosas y que son únicas.

Hay muchos trabajos realizados en estas líneas. En algunos se considera una definición sutilmente distinta para las ELM. Dada $F : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos con $L_{\partial\Omega}(F)$ a la menor constante de Lipschitz para F en $\partial\Omega$, o sea

$$L_{\partial\Omega}(F) := \sup_{x,y \in \partial\Omega} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|}$$

Si $L_{\partial\Omega}(F) < +\infty$, luego existe una ELM de F en Ω , o sea $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $h|_{\partial\Omega} = F$ y $L_{\partial\Omega}(F) = L_{\Omega}(h)$. En particular

$$\begin{aligned} \Psi(F)(x) &:= \inf_{y \in \partial\Omega} (F(y) + L_{\partial\Omega}(F)|x - y|) \\ \Lambda(F)(x) &:= \sup_{y \in \partial\Omega} (F(y) - L_{\partial\Omega}(F)|x - y|) \end{aligned}$$

son ELM de F en Ω debidas a McShane y Whitney. Más aún, son las extremas, si u es otra ELM de F en Ω , $\Lambda(F) \leq u \leq \Psi(F)$. De manera análoga a la definición anterior, se dice que $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ es una ELAM si $L_{\partial\Omega'}(F) = L_{\Omega'}(h)$ para todo $\Omega' \subset \Omega$. Estas definiciones tienen la ventaja de ser mas generales, por ejemplo tiene sentido en cualquier espacio normado y claramente pueden ser reinterpretadas en cualquier espacio métrico.

En [ACJ04] trabajando con las Ψ y Λ definidas arriba y el concepto de comparación con conos en reemplazo de la teoría de soluciones viscosas se prueba que la única ELAM de F es solución de

$$\begin{cases} -\Delta_{\infty} u(x) = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x) = F(x) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Este problema esta íntimamente relacionado con el p -laplaciano. Este es el operador

$$\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u),$$

y surge si consideramos el problema de encontrar $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \tag{4.3}$$

sea mínimo entre todas las funciones con el mismo dato de borde F . La ecuación de Euler-Lagrange para este problema es:

$$-\Delta_p u = 0$$

y diremos que dichas funciones son p -armónicas.

Es interesante que el hecho de que u minimice la ecuación 4.3 implica que

$$\int_{\Omega'} |\nabla u|^p dx$$

es mínimo para todo $\Omega' \subset \Omega$. Esto fue lo que motivo a Aronsson a la definición de las ELAM. Pues el razonó que las ELAM debían ser el límite de las p -armónicas y por lo tanto debían cumplir esta condición, que recordemos no se deduce de ser ELM:

Proposición 4.1.1. *Dado Ω un dominio acotado y $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función Lipschitz. Existe una sucesión u_{p_k} de funciones p_k -armónicas con $u_{p_k} \equiv g$ en $\partial\Omega$ y $p_k \rightarrow \infty$ tal que $u_{p_k} \rightarrow u_\infty$ uniformemente en Ω y $\nabla u_{p_k} \rightarrow \nabla u_\infty$ en cada $L^s(\Omega)$, donde u_∞ es la única ELAM tal que $u_\infty \equiv g$ en $\partial\Omega$.*

4.2. Tug-of-war

El juego *tug-of-war* fue introducido por Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield y D. Wilson en [PSSW09]. Este es un juego estocástico de suma cero para dos jugadores. El juego esta definido por:

- X el conjunto de estados del juego;
- dos grafos dirigidos E_I y E_{II} con vértices en X ;
- un conjunto de estados terminales $Y \subset X$;
- una función de pago final $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$;
- una función de pago durante el juego $f : X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$;
- y un estado inicial $x_0 \in X$.

El juego se desarrolla en sucesivas rondas. Una ficha comienza en x_0 , en la k -ésima ronda una moneda balanceada es lanzada y el ganador que gana obtiene el derecho a mover la ficha a un x_k tal que (x_{k-1}, x_k) sea una arista en su grafo. El juego termina si $x_k \in Y$. El pago para el jugador I será $F(x_k) + \sum_{i=0}^{k-1} f(x_i)$. Al ser el juego de suma cero, el jugador I tratará de maximizar esta cantidad y II de minimizarla. En particular llamamos *tug-of-war* a este juego en el caso $E = E_I = E_{II}$, es decir al juego donde el conjunto de movimientos es el mismo para ambos jugadores, y E es no dirigido.

En el capítulo 2, consideramos el *spinner game*, que podemos pensarlo como una versión de este juego. En éste, X es finito, $f \equiv 0$, $Y = \{v_a, v_r\}$, F está dada por $F(v_a) = 1$, $F(v_r) = 0$ y sí permitimos considerar E dirigido. Está la sutileza de que este no es de suma cero, pero sí de suma constante por lo que son equivalentes.

Dadas estrategias S_I y S_{II} para el jugador I y II respectivamente, podemos definir $F^-(S_I, S_{II})$ y $F^+(S_I, S_{II})$ como la esperanza para el pago final si el juego termina con probabilidad 1, o $F^-(S_I, S_{II}) = -\infty$ y $F^+(S_I, S_{II}) = +\infty$ si no. El valor del juego

para el jugador I comenzando en el estado x es $u_I(x) := \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} F^-(S_I, S_{II})$. Para el jugador II, $u_{II}(x) := \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} F^+(S_I, S_{II})$. El jugador I es penalizado en caso de que el juego no termine con probabilidad 1. En el caso que $u_I(x) = u_{II}(x)$ decimos que el juego tiene valor $u(x) := u_I(x) = u_{II}(x)$.

Teorema 4.2.1 (Peres *et al* [PSSW09]). *Un juego de tug-of-war con parámetros X, E, Y, F, f tiene valor cuando se satisface alguna de las siguientes:*

1. $f \equiv 0$ ó $\inf f > 0$.
2. $\inf F > -\infty$.
3. E es no dirigido.

4.2.1. Tug-of-war en espacios metricos

En el caso donde (X, d) es un espacio métrico, $Y \subset X$, $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ y $f : X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones Lipschitz, definimos E_ϵ el conjunto de aristas tal que $x \sim y$ si $d(x, y) < \epsilon$ y u_ϵ el valor del juego (de existir) con función de pago final F y de pago durante el juego $\epsilon^2 f$. Cuando $u := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon$ existe, decimos que u es el valor de (X, d, Y, F, f)

Teorema 4.2.2 (Peres *et al* [PSSW09]). *Sea X un espacio de longitud, $Y \subset X$ no vacío, $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ acotada inferiormente y que se extiende en X a una función uniformemente continua, y $f : X \setminus Y \rightarrow \mathbb{R}$ satisface $f \equiv 0$ o las tres siguiente valen: $\inf |f| > 0$, f es uniformemente continua, y el diámetro de X es finito. Luego, u está bien definida y es una extensión de F uniformemente continua. Mas aún, $\|u - u_\epsilon\|_\infty \rightarrow 0$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Si F es Lipschitz también lo es u . Y si F y f son Lipschitz $\|u - u_\epsilon\|_\infty = O(\epsilon)$.*

Recordemos que un espacio métrico es de longitud si para todo $x, y \in X$, la distancia $d(x, y)$ es el ínfimo de las longitudes de los caminos de x a y . La condición de que $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ se extienda a una función uniformemente continua en X es equivalente a que F sea uniformemente continua en Y y “Lipschitz en grandes escalas” (esto es $\sup_{y, y' \in Y} (F(y) - F(y')) / \max\{1, d(y, y')\} < \infty$, en particular nos alcanza con que sea Lipschitz).

Teorema 4.2.3 (Peres *et al* [PSSW09]). *Sea X un espacio de longitud, $Y \subset X$ no vacío y $F : Y \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz. Si $\inf F > -\infty$ y $f \equiv 0$, la u del teorema 4.2.2 es una ELAM. Si F es acotada, u es la única ELAM de F .*

Aquí con técnicas propias de teoría de juegos estocásticos se consigue el resultado de existencia y unicidad que nombramos en la sección anterior.

4.2.2. Tug-of-war con ruido

En esta subsección trataremos el juego *Tug-of-war con ruido*. Este trabajo fue desarrollado en [MPRa], [MPRb] y [MPRc], seguiremos las notas de J. Rossi [R]. El juego *Tug-of-war con ruido* es de suma cero para dos jugadores. Se desarrolla sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, una ficha comienza en $x_0 \in \Omega$. Fijamos $\epsilon > 0$. En la k -ésima ronda la ficha comienza en x_{k-1} . Con probabilidad α los jugadores juegan el *tug-of-war*, o sea, se lanza una moneda balanceada y el ganador mueve la ficha a un $x_k \in \bar{B}_\epsilon(x_{k-1})$. Con probabilidad $\beta := 1 - \alpha$ la ficha se mueve a un punto $x_k \in B_\epsilon(x_{k-1})$ elegido al azar con probabilidad uniforme. El juego continua así hasta que un punto en $\Gamma_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$ es alcanzado. La función de pago $F : \Gamma_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$ boreliana, determinará los pagos. Si el juego termina al cabo de r rondas, $x_r \in \Gamma_\epsilon$, el pago para el jugador I es $F(x_r)$ y $-F(x_r)$ para II.

Al igual que para el *tug-of-war*, dadas estrategias S_I y S_{II} para los jugadores, definimos $u_I^\epsilon(x_0) := \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I S_{II}}^{x_0}[F(x_r)]$, el valor para el jugador I y $u_{II}^\epsilon(x_0) := \inf_{S_{II}} \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I S_{II}}^{x_0}[F(x_r)]$, el valor para II.

Teorema 4.2.4 (Manfredi *et al.* [MPRa]). *El valor para el jugador I satisface*

$$\begin{aligned} u_I^\epsilon(x) &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u_I^\epsilon + \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u_I^\epsilon \right\} + \beta \int_{\bar{B}_\epsilon(x)} u_I^\epsilon & \text{si} & \quad x \in \Omega \\ u_I^\epsilon(x) &= F(x) & \text{si} & \quad x \in \Gamma_\epsilon \end{aligned}$$

El valor para el jugador II, u_{II}^ϵ , también satisface la ecuación.

Este resultado es intuitivo, si bien su demostración es delicada. Consideremos las distintas posibilidades en una ronda. Con probabilidad α se jugará un *tug-of-war*. O sea que con probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ el jugador I decidirá a dónde se mueve la ficha, intentará maximizar su esperanza. Con probabilidad $\frac{\alpha}{2}$ será II quien mueva la ficha, intentará minimizar la esperanza. Por otro lado con probabilidad β el movimiento será al azar, la esperanza estará dada por la media dentro de la bola.

A las funciones que satisfacen la ecuación

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &= \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u^\epsilon + \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u^\epsilon \right\} + \beta \int_{\bar{B}_\epsilon(x)} u^\epsilon & \text{si} & \quad x \in \Omega \\ u^\epsilon(x) &= F(x) & \text{si} & \quad x \in \Gamma_\epsilon \end{aligned}$$

las llamamos p -armoniosas (para ciertos valores de α y β).

Este nombre se debe al teorema:

Teorema 4.2.5 (Manfredi *et al.* [MPRb]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado que satisface la condición del cono exterior y F una función continua. Consideremos la única solución viscosa u de:*

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = 0 & \text{en } \Omega \\ u(x) = F(x) & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

y sea u_ϵ la única función p -armoniosa con dato de borde F . Luego

$$u_\epsilon \rightarrow u \text{ uniformemente en } \Omega \text{ cuando } \epsilon \rightarrow 0$$

Veamos, sin demostrar esto rigurosamente, una idea. Recordemos que

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |u|^{p-2} \{(p-2)\Delta_\infty u + \Delta u\}.$$

Luego $\Delta_p u = 0$ si y solo si

$$(p-2)\Delta_\infty u + \Delta u = 0 \tag{4.4}$$

Por Taylor, si la función es suficientemente regular, tenemos

$$u(y) = u(x) + \nabla u(x) \cdot (y-x) + \langle D^2 u(x)(y-x), (y-x) \rangle + O(|y-x|^3)$$

sobre $B_\epsilon(x)$, entonces

$$u(x) - \int_{B_\epsilon(x)} u dy = -\frac{\epsilon^2}{2(n+2)} \Delta u(x) + O(\epsilon^3) \tag{4.5}$$

cuando u es suave. Como la dirección del gradiente aproxima la dirección donde se maximiza u y las expresiones de Taylor anteriores

$$\begin{aligned} & u(x) - \frac{1}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u, \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u \right\} \\ & \approx u(x) - \frac{1}{2} \left\{ u\left(x + \epsilon \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right), u\left(x - \epsilon \frac{\nabla u(x)}{|\nabla u(x)|}\right) \right\} \\ & = -\frac{\epsilon^2}{2} \Delta_\infty u(x) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Luego sumando 4.5 y 4.6 multiplicadas por α y β

$$u(x) - \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u, \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u \right\} - \beta \int_{B_\epsilon(x)} u dy = -\alpha \frac{\epsilon^2}{2} \Delta_\infty u(x) - \beta \frac{\epsilon^2}{2(n+2)} \Delta u(x) + O(\epsilon^3)$$

Si tomamos α y β de manera que a la derecha aparezca el operador de 4.2.2, esto es

$$\alpha = \frac{p-2}{p+n} \text{ y } \beta = \frac{2+n}{p+n}$$

y obtenemos

$$u(x) = \frac{\alpha}{2} \left\{ \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u, \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u \right\} + \beta \int_{B_\epsilon(x)} u dy + O(\epsilon^3)$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

Observemos que $\beta > 0$ pues $p < \infty$, por lo que el partido termina con probabilidad 1 independientemente de las estrategias de los jugadores. Esta hipótesis es la que nos permite utilizar el teorema de muestreo opcional de Doob en lo que sigue.

Finalmente probemos la unicidad de la que se habla en el teorema 4.2.5. Para esto primero establezcamos un principio de comparación.

Teorema 4.2.6 (Manfredi *et al.* [MPRb]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Si v_ϵ es una función p -armoniosa con dato de borde F_v en Γ_ϵ tal que $F_v \geq F_{u_\epsilon}$, luego $v \geq u_\epsilon$.*

Demostración. El jugador I sigue cualquier estrategia y el jugador II sigue la estrategia S_{II}^0 de manera que en $x_{k-1} \in \Omega$ elige moverse a un punto que casi minimice v , esto es a $x_k \in \bar{B}_\epsilon(x_{k-1})$ tal que

$$v(x_k) \leq \inf_{\bar{B}_\epsilon(x_{k-1})} v + \eta 2^{-k}$$

para algun $\eta > 0$ fijo. El juego comienza en x_0 . Se sigue que

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0} [v(x_k) + \eta 2^{-k} | x_0, \dots, x_{k-1}] \\ & \leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} v + \eta 2^{-k} + \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} v \right\} + \beta \int_{B_\epsilon(x)} v dy + \eta 2^{-k} \\ & \leq v(x_{k-1}) + \eta 2^{-(k-1)} \end{aligned}$$

acotando la estrategia para el jugador I por el supremo y usando que v es p -armoniosa. Luego

$$M_k := v(x_k) + \eta 2^{-k}$$

es una supermartingala. Como $F_v \geq F_{u_I^\epsilon}$ en Γ_ϵ , tenemos

$$\begin{aligned}
u_I^\epsilon(x_0) &= \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F_{u_I^\epsilon}(x_r)] \\
&\leq \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0} [F_v(x_r) + \eta 2^{-r}] \\
&\leq \sup_{S_I} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0} [v(x_{r \wedge k}) + \eta 2^{-(r \wedge k)}] \\
&\leq \sup_{S_I} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0} [M_0] \\
&= v(x_0) + \eta
\end{aligned}$$

donde $r \wedge k = \min(r, k)$, en la primer desigualdad estamos acotando por una de las estrategias sobre las que estamos tomando inf, la segunda se debe al lema de Fatou y la tercera al teorema de muestreo opcional de Doob sobre M_k . Dado que $\eta < 0$ es cualquiera, hemos obtenido lo deseado. \square

De manera análoga se puede ver que u_{II}^ϵ es la mas grande de las p -armoniosas. Veamos ahora que el juego tiene un valor, de lo que se desprenderá la unicidad.

Teorema 4.2.7 (Manfredi *et al.* [MPRb]). *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio y F un dato de borde sobre Γ_ϵ . Luego $u_I^\epsilon = u_{II}^\epsilon$, o sea, el juego tiene valor.*

Demostración. Es claro que $u_I^\epsilon \leq u_{II}^\epsilon$, con lo que bastara ver que $u_I^\epsilon \geq u_{II}^\epsilon$. Seguiremos la misma idea que en el teorema anterior, el jugador II seguirá la estrategia S_{II} de manera que en $x_{k-1} \in \Omega$ moverá a un lugar que casi minimice u_I^ϵ . Esto es a $x_k \in \bar{B}_\epsilon(x_{k-1})$ tal que

$$u_I^\epsilon(x_k) \leq \inf_{\bar{B}_\epsilon(x_{k-1})} u_I^\epsilon + \eta 2^{-k}$$

para algun $\eta > 0$ fijo. El juego comienza en x_0 . Se sigue que

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{S_I, S_{II}^0}^{x_0} [u_I^\epsilon(x_k) + \eta 2^{-k} | x_0, \dots, x_{k-1}] \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \left\{ \inf_{\bar{B}_\epsilon(x)} u_I^\epsilon + \eta 2^{-k} + \sup_{\bar{B}_\epsilon(x)} u_I^\epsilon \right\} + \beta \int_{B_\epsilon(x)} u_I^\epsilon dy + \eta 2^{-k} \\
&\leq u_I^\epsilon(x_{k-1}) + \eta 2^{-(k-1)}
\end{aligned}$$

acotando la estrategia para el jugador I por el supremo y usando que u_I^ϵ es p -armoniosa. Luego

$$M_k := u_I^\epsilon(x_k) + \eta 2^{-k}$$

es una supermartingala. Al igual que antes usando el lema de Fatou y teorema de muestreo opcional de Doob obtenemos

$$\begin{aligned}
u_{II}^\epsilon(x_0) &= \sup_{S_I} \inf_{S_{II}} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_r)] \leq \sup_{S_I} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [F(x_r) + \eta 2^{-r}] \\
&\leq \sup_{S_I} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [u_I^\epsilon(x_{r \wedge k}) + \eta 2^{-(r \wedge k)}] \\
&\leq \sup_{S_I} \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{S_I, S_{II}}^{x_0} [M_0] = v(x_0) + \eta
\end{aligned}$$

Dado que $\eta < 0$ es cualquiera, hemos obtenido lo deseado. \square

Finalmente este resultado nos permite establecer la unicidad para las funciones p -armoniosas fijado el dato de borde. Además, esta función coincide con el valor del juego.

Bibliografía

- [A67] G. Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Arkiv für Mate. 6 (1967), 551-561.
- [A68] G. Aronsson, *On the partial differential equation $u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy} = 0$* , Arkiv für Mate. 7 (1968), 395-425
- [ACJ04] G. Aronsson, M.G. Crandall and P. Juutinen, *A tour of the theory of absolutely minimizing functions*. Bull. Amer. Math. Soc., 41 (2004), 439-505.
- [Bea08a] J. Beasley, *Bidding Chess*, Variant Chess 7 (2008), no. 57, 42-44.
- [Bea08b] J. Beasley, *Isolated pawns*, Variant Chess 7 (2008), no. 58, 71.
- [DP10] M. Develin and S. Payne, *Discrete bidding games*, the Electronic Journal of Combinatorics, 17(1), R85 (2010).
- [J93] R. Jensen, *Uniqueness of Lipschitz extensions: minimizing the sup norm of the gradient*. Arch. Rational Mech. Anal. 123 (1993), 51-74.
- [LLPSU99] A. Lazarus, D. Loeb, J. Propp, W. Stromquist, and D. Ullman, *Combinatorial games under auction play*, Games Econom. Behav. 27 (1999), no. 2, 229-264.
- [LLPU96] A. Lazarus, D. Loeb, J. Propp, and D. Ullman, *Richman games*, Games of no chance (Berkeley, CA, 1994), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 29, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 439-449.
- [MPRa] J. J. Manfredi, M. Parviainen and J. D. Rossi, *Dynamic programming principle for tug-of-war games with noise*. ESAIM. Control, Optimisation and Calculus of Variations, COCV. Vol. 18(1), (2012) 81-90.
- [MPRb] J. J. Manfredi, M. Parviainen and J. D. Rossi, *On the definition and properties of p -harmonious functions*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze. Vol. XI(2), (2012) 215-241.

- [MPRc] J. J. Manfredi, M. Parviainen and J. D. Rossi, *An asymptotic mean value characterization for p -harmonic functions*. Proc. of the Amer. Math. Soc. Vol. 138 (2010), 881-889.
- [PR08] S. Payne and E. Robeva, *Artificial intelligence for Bidding Hex*, To appear in Games of no chance. arXiv:0812.3677v1, 2008.
- [PSSW07] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield, and D. Wilson, *Random-turn hex and other selection games*, Amer. Math. Monthly 114 (2007), no. 5, 373-387.
- [PSSW09] Y. Peres, O. Schramm, S. Sheffield and D. Wilson, *Tug-of-war and the infinity Laplacian*, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), 167-210.
- [R] J. D. Rossi, *Tug-of-war games. Games that PDE people like to play*. Proc. R. Soc. Edin. A. Vol. 141A (2011), 319-369.