UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Desigualdades de Bell vía técnicas de espacios de operadores y productos tensoriales

Tesis de Licenciatura

Martín I. Mansilla

Director de tesis y consejero de estudios: Dr. Daniel E. Galicer

Buenos Aires, 2014

Desigualdades de Bell vía técnicas de espacios de operadores y productos tensoriales

Resumen

A principios del siglo veinte Einstein, Podolsky y Rosen esgrimen una profunda crítica a la mecánica cuántica debido a su comportamiento estadístico y, por lo tanto, su imposibilidad de describir la realidad de forma completa. Ya por la década del sesenta John Bell fue el primero en formalizar esta crítica dejando en claro que el conjunto de distribuciones de probabilidad clásicas y el proveniente de la cuántica debían ser diferentes. Surgían las desigualdades de Bell. En este trabajo estudiaremos estas desigualdades y sus violaciones máximas para ciertos estados vía técnicas de productos tensoriales de espacios de Banach y espacios de operadores. Veremos que cierta pregunta abierta del análisis funcional, recientemente contestada por la afirmativa, es equivalente a que los estados diagonales tengan sus violaciones a estas desigualdades acotadas. Además entenderemos que estudiar estas violaciones es equivalente a comparar la norma de una forma multilineal con su norma completamente acotada y, mediante técnicas probabilísticas, encontraremos violaciones no acotadas.

Palabras clave: Desigualdades de Bell, Espacios de Operadores, Productos Tensoriales de Espacios de Banach .

Introducción

A principios del siglo pasado quedaron sentadas las bases de la mecánica cuántica. Esta teoría vino a responder muchas preguntas y solucionar varios problemas que presentaba la física en ese momento aunque, siendo muy controversial, ganó en poco tiempo gran cantidad de críticos. Nadie podía decir que la mecánica cuántica no fuera pragmática pero, sus implicaciones filosóficas hacían ruido en buena parte comunidad científica de la época. En primer lugar la descripción de la realidad brindada por la mecánica cuántica es estadística, es decir, no da una forma determinística de predecir las magnitudes que estudia (por ejemplo posiciones o trayectorias). Por otro lado esta teoría da lugar a efectos no locales, lo que significa que, sin importar la distancia a la que estén dos sistemas físicos, existe la posibilidad de influencia entre ellos.

Uno de los mayores detractores de esta teoría fue Albert Einstein quién, esgrimiendo la frase *"Dios no juega a los dados"*, resumió su desacuerdo. Él pensaba que un comportamiento aleatorio no podía ser intrínseco de la naturaleza y sostuvo, hasta el día de su muerte, que debía existir otra teoría que describa la realidad sin recurrir al azar. Además el concepto de no localidad iba totalmente en contra de lo que él mismo sostenía en su teoría de la relatividad. En la relatividad ningún tipo de información puede viajar más rápido que la luz y, por lo tanto, debe existir una distancia a partir de la cual todo sistema físico pierda influencia sobre otro. El físico creía que debían existir variables ocultas que respetaran la localidad y a partir de las cuales pueda darse una descripción determinística de la naturaleza. Einstein buscaba una teoría física completa de la realidad, esto es, una teoría que describa todos los elementos que componen a esa realidad. Para él, el azar proveniente de la cuántica, era solo un error por parte de los físicos en la búsqueda de tal teoría.

Einstein, Podolsky y Rosen (EPR), en el año 1935, publicaron un artículo en el que expresaban su descontento con la situación de la mecánica cuántica en ese momento [5]. En este muestran que, si la mecánica cuántica fuese local, entonces debería ser incompleta (i.e., deberían existir elementos de la realidad no descritos por la teoría). Motivado por este artículo Schrödinger escribió otro cuyo título en alemán se traduce como “situación presente de la mecánica cuántica” [13], en el cual también expresaba su disconformidad. Allí se empleó por primera vez el término “verschränkter zustand” cuya traducción al español es estado entrelazado. Las críticas hechas tanto por EPR como por Schrödinger fueron desestimadas por gran parte de la comunidad científica, que las veía como provenientes de hombres mayores que no podían seguir las líneas de pensamiento de la época. En este sentido, el físico N. Bohr, dió una respuesta al artículo de EPR reivindicando el estado de la mecánica cuántica y en particular la interpretación de Copenhague. La respuesta sirvió para calmar las aguas por un tiempo y volver al negocio, aunque con cierta sensación de incomodidad latente. Bohr le decía a Einstein: *“...deje de decirle a Dios qué hacer con sus dados”*.

Aunque despreciadas por algunos (y finalmente erróneas en algún sentido), las observaciones hechas por EPR fueron de mucha lucidez, llevando al desarrollo de gran cantidad de física y a interesantes consecuencias en matemática. El problema desatado por EPR se retomó en la década del sesenta, cuando los físicos Bohm y Aharonov reformulan la paradoja EPR en términos de *qubits*, facilitando su descripción y haciendo posible transformarlo en experimentos realizables de laboratorio. En el año 1964 John Bell pudo describir este problema mediante supuestos sobre el mundo físico que naturalmente eran más fáciles de contrastar con la realidad.

Bell notó que bajo la hipótesis de un modelo de variables locales ocultas se llegaba a una restricción no trivial sobre la fuerza de las correlaciones para las variables aleatorias del modelo. Dichas restricciones se conocen como desigualdades de Bell. Éstas no se cumplen en general para las variables aleatorias definidas en el contexto de la mecánica cuántica, dando origen a violaciones. Esto último implica que el conjunto de las distribuciones cuánticas y el de las clásicas no son el mismo. Bell realizó la mayor contribución en dirección a la respuesta de la pregunta ¿puede la realidad describirse mediante un modelo de variables locales ocultas? Si la respuesta era afirmativa entonces las ideas de EPR serían ciertas y existiría la posibilidad de describir al mundo de forma completa. Por otro lado, de verificarse que las predicciones cuánticas describían bien la realidad, esto sería imposible y Einstein (aunque equivocado en su hipótesis) habría hecho otra gran contribución a la comprehensión del mundo.

La historia de la verificación experimental de las desigualdades de Bell es la historia de la construcción de sistemas entrelazados eficientes. El primero en tener una verificación confiable de la violación a estas desigualdades en un laboratorio fue Alain Aspect, con su experiencia de decaimientos atómicos en cascada. Esto confirmaba que no existe una descripción completa de la naturaleza y que Dios es amigo del azar.

Hoy en día las desigualdades de Bell son de suma importancia en el desarrolo moderno de la información cuántica y sus aplicaciones cubren una variedad de areas como: criptografía cuántica, detección de entrelazamiento cuántico, teoría de complejidad, estimación de dimensión de espacios de Hilbert, etc. Además, conocer las violaciones máximas a las desigualdades de Bell para cierto de estado cuántico, da una noción de cuánto se aleja la descripción cuántica de un sistema con este estado, de la clásica.

Desde el punto de vista teórico las desigualdades de Bell trajeron consigo muchas preguntas para responder desde el lado de la matemática: ¿Es posible tener violaciones no acotadas a estas desigualdades? ¿Cómo se comportan las violaciones máximas dependiendo de la cantidad de observadores? Estas preguntas tuvieron respuestas inesperadas en algunos casos y conexiones imprevistas con ciertas ramas de la matemática.

Por un lado, la teoría de espacios de operadores apareció como un ambiente muy natural de estudio de estas violaciones. Por otro, la violación de desigualdades de Bell para ciertos estados particulares aparece muy ligada a una pregunta que planteó el matemático griego Nicholas Varopuolos en la década del setenta: ¿Son las clases de Schatten Q-álgebras?

En el siguiente trabajo estudiaremos este tipo de aspectos de las desigualdades de Bell, mediante técnicas del análisis funcional provenientes de las teorías de espacios de operadores y productos tensoriales de espacios de Banach. Mostraremos cómo estas ramas de la matemática conforman el lenguaje apropiado para la resolución de problemas derivados de este campo de conocimiento. Además probaremos que un teoría de variables locales ocultas, no permite estas violaciones y estudiaremos las violaciones máximas en ciertos casos de interés.

La teoría de espacios de operadores es muy reciente. Fue desarrollada luego de la tesis de Ruan en 1988 por Effros y Ruan por un lado y, simultáneamente, por Blecher y Paulsen por otro. Puede ser descrita como una teoría no conmutativa de espacios de Banach. Un espacio de operadores es simplemente un espacio de Banach junto con una isometría lineal que lo hace un subespacio de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (operadores continuos en $\mathcal{H}$) para cierto espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Esto nos brinda una nueva categoría, en la cual los espacios Banach serán los objetos y las flechas serán los operadores completamente acotados (tomando el lugar de los operadores acotados para la categoría de espacios de Banach). Los espacios de operadores generalizan a las C^*-álgebras y puede verse fácilmente que cualquier espacio de Banach es también un espacio de operadores.

La primera utilización de productos tensoriales en el análisis funcional datan, aparentemente, de principio de la década del treinta con el trabajo Murray y von Neumann sobre espacios de Hilbert. El trabajo de Schatten a mediados de siglo sobre operadores de Hilbert-Schmidt y clases de traza puso en práctica nuevamente la utilización de técnicas tensoriales haciendo resurgir este tema a los ojos del mundo. Sin embargo fue Grothendieck quién dió el puntapié inicial al desarrollo de la teoría de normas sobre productos tensoriales de espacios de Banach, creando las bases de lo que luego se llamó teoría local y exhibiendo su conexión con la teoría de ideales de operadores. Así abrió el juego a una especialidad que ha sido muy fructífera en disciplinas como el análisis armónico y la geometría de espacios de Banach. Además de ser clave en el estudio de formas multilineales, donde la forma tensorial de pensar es indispensable.

En el primer capítulo daremos una introducción a la mecánica cuántica. Desarrollaremos un ejemplo que pone en jaque a la idea de describir a esta teoría desde el punto de vista clásico. Luego daremos una descripción de lo que es una teoría de variables ocultas y observaremos que asumiendo una teoría de este tipo se tiene la acotación a la esperanza de ciertas variables aleatorias. Veremos que, desde el punto de vista de la cuántica, ese mismo tipo de variables aleatorias no tienen su esperanza acotada de la misma forma en general, motivando así la definición de las desigualdades de Bell y sus violaciones máximas. Por último veremos que para el caso de dos observadores estas violaciones están siempre acotadas gracias a la desigualdad de Grothendieck.

En el capítulo segundo probaremos que, el hecho de que las violaciones a las desigualdades de Bell para estados diagonales estén acotadas, es equivalente a que S_∞ sea una Q-álgebra. Luego se dará una prueba de que efectivamente S_∞ lo es. Para esto usaremos una caracterización de Q-álgebra debida a Davie y una generalización de la desigualdad de Grothendieck hecha por Tonge. Probaremos estos teoremas al finalizar.

En el tercer capítulo nos abocaremos a dar una acotación de las violaciones a desigualdades de Bell, para estados GHZ. Para esto desarrollaremos un poco de la teoría de formas multilineales $(r;s)$-sumantes, de espacios $\mathcal{L}_p$ y λ-inyectivos y de productos tensoriales extensibles. Daremos una prueba de la existencia y unicidad de la medida de Haar muy particular utilizando un resultado de la teoría de grafos. También incluiremos una demostración de que S_p es una Q-álgebra siempre que $1 \leq p \leq 2$, de lo cual podemos deducir que esto vale para $1 \leq p \leq \infty$.

En el cuarto y último capítulo veremos la existencia estados cuyas violaciones a desigualdades de Bell son no acotadas. Con este objetivo veremos cómo los espacios de operadores brindan un contexto propicio para la búsqueda de estos estados y mediante técnicas aleatorias conseguiremos su existencia.

Índice general

Capítulo 1

Conceptos de Mecánica Cuántica

Las desigualdades de Bell son un conjunto de desigualdades que se dan en el contexto de la mecánica cuántica y con profundas consecuencias sobre la interpretación del mundo que nos rodea. En este capítulo daremos los primeros conceptos de la cuántica, teoría dentro de la cual paracen estas desigualdades. Analizaremos las motivaciones que están detrás de ellas, para lo cual definiremos brevemente que significa que un modelo sea de variables locales ocultas y que consecuencia tiene sobre el modelo. Definiremos que es una desigualdad de Bell y que es una violación máxima a una de estas desigualdades y estudiaremos como deben ser estas para el caso de dos observadores por medio de una herrmaienta del análisis funcional.

1.1. Postulados de la mecánica cuántica

Comencemos comentando los postulados de la mecánica cuántica, que son el punto de partida de cualquier desarrollo posterior que querramos hacer.

Postulado 1 (Espacio de estados)**.** *Asociado a cualquier sistema cuántico aislado existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ conocido como espacio de estados. El sistema será completamente descrito por un vector unitario en dicho espacio conocido como vector de estado (o estado cuántico), al que en general notaremos ψ.*

Este postulado da un contexto matemático en el cual desarrollar la teoría, no habla sobre cómo interactuar con el vector de estado ni de su evolución temporal, que como se verá a continuación, no será de cualquier manera. La mecánica cuántica sólo habla de la existencia de un espacio de estados, pero no especifica ninguna de sus características (además de la necesidad de ser un espacio de Hilbert), ellas dependerán de cada problema en particular. Por ejemplo, para el problema particular de la interacción de la luz con los átomos, los físicos han desarrollado teorías como la electrodinámica cuántica que modela esta interacción agregando hipótesis sobre la naturaleza por medio de ecuaciones diferenciales. Otro ejemplo es el *qubit*, el sistema cuántico más simple, que reviste gran importancia en la teoría de información cuántica. Se denomina *qubit* a cualquier sistema formado por un estado cuántico dentro de un espacio de dimensión 2. Siendo más concretos, dada una base ortonormal $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ de un Hilbert $\mathcal{H}$ un *qubit* es cualquier vector de la forma

$$\psi = a\varphi_1 + b\varphi_2 \qquad \textit{con } \ |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Por simplicidad supondremos que el espacio de estados será de dimensión finita (o sea $\mathcal{H} = l_2^n$ para cierto $n \in \mathbb{N}$), esto será suficiente para desarrollar toda la teoría de desigualdades de Bell y sus violaciones que expondremos en el trabajo; en particular alcanzará para ver que para más de dos observadores existen violaciones a las desigualdades de Bell tan grandes como uno quiera, lo cual es un hecho para nada trivial y ha sido una pregunta pendiente dentro de la mecánica cuántica durante muchos años (estos conceptos quedarán más claros al finalizar el capítulo).

Postulado 2 (Evolución)**.** *La evolución de un vector de estado ψ en sistema cuántico cerrado (es decir que no interactúa de ninguna forma con otro sistema) está dada por la ecuación de Schrödinger,*

$$i\hbar\frac{d\psi}{dt} = T\psi. \tag{1.1}$$

Aquí $\hbar$ es una constante física a determinar conocida como constante de Planck, a nuestros fines su valor no es relevante (podríamos considerarla igual a 1 siendo absorbido su valor real por el operador T); $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un operado Hermitiano conocido como el Hamiltoniano del sistema. Este operador depende del sistema a describir y contiene toda la información evolutiva. Al ser T Hermitiano, y el espacio de estados $\mathcal{H}$ de dimensión finita, tiene una descomposición espectral

$$T = \sum_n a_n \langle \cdot, \psi_n \rangle \psi_n.$$

Los estados ψ_n suelen llamarse autoestados de energía del sistema o estados estacionarios, así como el autovalor a_n comunmente se denomina la energía del autoestado ψ_n. Del mismo modo que el Postulado 1 no especifica las características del espacio de Hilbert que configura el espacio de estados, el Postulado 2 tampoco describe el operador Hermitiano T.

Este postulado describe la evolución temporal de un estado de forma continua, el siguiente corolario es una versión menos refinada de este postulado que describe la evolución de un estado entre dos instantes de tiempo dados a través de un operador que resulta unitario y depende sólo de T en dichos instantes de tiempo.

Corolario 1. *La evolución de un estado en sistema cuántico cerrado (es decir que no interactúa de ninguna forma con otro sistema) se describe mediante transformaciones unitarias del espacio; o sea que si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$ son los estados del sistema a tiempo t_1 y t_2 respectivamente, entonces existe un operador unitario $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que sólo depende de t_1 y t_2 tal que*

$$\psi_2 = U\psi_1.$$

Demostración. Sea $\psi(t) \in \mathcal{H} = l_2^n$ el estado dado por el Postulado 1 para el instante t, y T Hermitiano cumpliendo (1.1), que existe debido al Postulado 2. Al ser T Hermitiano existe una base ortonormal $(\psi_j)_{j=1}^n$ de $\mathcal{H}$ y un conjunto $(a_j)_{j=1}^n$ tales que

$$T = \sum_{j \in J} a_j \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j.$$

Por ser $(\psi_j)_{j=1}^n$ una base ortonormal, dado t $\psi(t) \in \mathcal{H}$ y $\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t)\psi_j$. Por la linealidad de la derivada y de T se sigue de (1.1) que

$$\sum_{j=1}^{n} i\hbar \frac{d\lambda_j(t)}{dt} \psi_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) T\psi_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(t) a_j \psi_j,$$

lo cual implica que, para cada $1 \leq j \leq n$

$$i\hbar \frac{d\lambda_j(t)}{dt} = \lambda_j a_j. \tag{1.2}$$

Es conocido que la solución a (1.2) es $\lambda_j(t) = \beta_j e^{\frac{a_j}{i\hbar}(t-t_0)}$ donde t_0 es cierto instante inicial y $\beta_j = \lambda_j(t_0)$ por lo que

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e^{\frac{a_j}{i\hbar}(t-t_0)} \psi_j = \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{a_j}{i\hbar}(t-t_0)} \beta_j \psi_j = e^{\frac{(t-t_0)}{i\hbar}T} \psi(t_0), \tag{1.3}$$

donde la exponencial de un operador diagonalizable $A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \cdot, v_i \rangle v_i$ se define así

$$e^A = \sum_{j=1}^{n} e_j^{\alpha} \langle \cdot, v_i \rangle v_i,$$

o análogamente

$$e^A = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!}.$$

Luego dados t_1, t_2 dos instantes, considerando a t_1 el instante inicial, debido a la ecuación (1.3) tenemos que

$$\psi(t_2) = e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} \psi(t_1).$$

Veamos que $e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} = U$ es un operador unitario, o sea que $UU^* = U^*U = Id$. Observemos que $U^* = e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T}$, ya que dados $x, y \in \mathcal{H}$ tales que $x = \sum_{j \in J} \alpha_j \psi_j, y = \sum_{j \in J} \beta_j \psi_j$

$$\begin{aligned}
\langle e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} x, y \rangle &= \langle \sum_{j \in J} e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} \alpha_j \psi_j, \sum_{j \in J} \beta_j \psi_j \rangle \\
&= \sum_{j \in J} e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} \alpha_j \overline{\beta_j} \\
&= \sum_{j \in J} \alpha_j \overline{e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} \beta_j} \\
&= \langle x, e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} y \rangle.
\end{aligned}$$

Luego, para cualquier $x \in \mathcal{H}$ como antes se sigue que

$$\begin{aligned}
UU^*x &= e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} \Big(\sum_{j \in J} \alpha_j \psi_j \Big) \\
&= e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}T} \Big(\sum_{j \in J} e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} \alpha_j \psi_j \Big) \\
&= \sum_{j \in J} e^{\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} e^{-\frac{(t_2-t_1)}{i\hbar}a_j} \alpha_j \psi_j \\
&= \sum_{j \in J} \alpha_j \psi_j = x,
\end{aligned}$$

por lo cual $UU^* = Id$. Se prueba análogamente que $U^*U = Id$. □

Toda teoría física debe considerar la posibilidad de medir propiedades de los sistemas que estudia. En general las teorías clásicas apelan al sentido común para la medición de propiedades como la longitud, temperatura o velocidad, y no es necesario ningún postulado que especifique las consecuencias o característica de estas mediciones. Este no es el caso de la mecánica cuántica, en la cual las mediciones tienen un rol fundamental y consecuencias no triviales sobre los sistemas que miden. El siguiente postulado detalla las consecuencias y características de las mediciones cuánticas.

Postulado 3 (Medición)**.** *Las mediciones en la mecánica cuántica están dadas por una colección de operadores* $(M_j)_{j\in J} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *tal que*

$$\sum_{j\in J} M_j^* M_j = Id, \tag{1.4}$$

donde cada $j \in J$ *corresponde a un posible resultado del experimento que está siendo medido (un posible estado en el espacio de estados). Dado un estado* ψ*, la probabilidad de que ocurra el evento dado por* j *será*

$$p(j) = \langle \psi, M_j^* M_j \psi \rangle = \langle M_j\psi, M_j\psi \rangle = \|M_j\psi\|^2,$$

y el estado del sistema luego de la medición

$$\frac{M_j\psi}{\|M_j\psi\|}.$$

La ecuación (1.4) se denomina ecuación de completitud e implica

$$1 = \sum_{j\in J} p(j), \tag{1.5}$$

ya que dado cualquier estado cuántico ψ

$$\begin{aligned} 1 = \|\psi\|^2 = \langle \psi, Id\psi \rangle &= \langle \psi, \sum_{j\in J} M_j^* M_j \psi \rangle \\ &= \sum_{j\in J} \langle M_j\psi, M_j\psi \rangle \\ &= \sum_{j\in J} p(j). \end{aligned}$$

Luego se tiene la propiedad buena y esperable, la probabilidad total es 1.

En el contexto de la mecánica cuántica llamaremos observable a todo operador Hermitiano $M \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (con $\mathcal{H}$ el espacio de estados de un sistema). Siendo la dimensión de $\mathcal{H} = l_2^n$ finita, un operador Hermitiano será diagonalizable, por lo cual tendrá una descomposición espectral

$$M = \sum_{j=1}^{m} a_i P_i,$$

donde $a_1, \ldots, a_m$ son los autovalores de M y P_i es la proyección al autoespacio de autovalor a_i. Estos operadores dan lugar a un tipo de medición particular a la que llamaremos medición proyectiva. En las mediciones proyectivas las propiedades físicas a medir serán los autovalores del operador M y la probabilidad de medir a_i es

$$p(a_i) = \langle \psi, P_i \psi \rangle. \tag{1.6}$$

El estado del sistema inmediatamente después de la medición será

$$\frac{P_i \psi}{\sqrt{p(a_i)}}. \tag{1.7}$$

Las mediciones proyectivas pueden ser fácilmente encuadradas en el tipo de medición descrito por el Postulado 3. Si consideramos la colección de operadores $(P_j)_{j \in J}$, se tiene

$$P_j^* = P_j, \ \ P_j P_j = P_j, \ \ \sum_{j \in J} P_j = Id,$$

y sumado a las ecuaciones (1.6) y (1.7) es sencillo concluir que se cumplen las condiciones necesarias para la familia $(P_j)_{j \in J}$ dadas en el postulado de medición 3.

En el caso de mediciones proyectivas la esperanza (o valor medio) del operador M antes definido, en presencia de cierto estado ψ, está dada por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M)_\psi &= \sum_{j=1}^{m} a_i p(a_i) \\
&= \sum_{j=1}^{m} a_i \langle \psi, P_i \psi \rangle \\
&= \langle \psi, \Big(\sum_{j=1}^{m} a_i P_i \Big) \psi \rangle \\
&= \langle \psi, M \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Hasta aquí hemos descrito el medio ambiente en donde se desarrolla la mecánica cuántica, la forma en que un estado cuántico debe evolucionar temporalmente y las reglas que rodean a la mediciones en este contexto, todo ello para un sistema único. El siguiente y último postulado brinda el contexto para trabajar con sistemas compuestos, o sea, con dos o más sistemas físicos que interactúan.

Postulado 4 (Sistemas Compuestos). *Dados N sistemas cuánticos tales que, con espacios de estados $\mathcal{H}_j$ y estados $\psi_j \in \mathcal{H}_j$, el sistema compuesto tendrá a $\mathcal{H} = \otimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ como espacio de estado y $\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_N \in \mathcal{H}$ será el estado del sistema.*

Al ser la mecánica cuántica una teoría que se desarrolla en el contexto de espacios de Hilbert dotaremos al producto tensorial $\mathcal{H} = \otimes_{j=1}^{N}\mathcal{H}_j$ de estructura de espacio de Hilbert del siguiente modo, si $(\psi_i^j)_{i\in I_j}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_j$, entonces

$$(\psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_N}^N)_{(i_1,\cdots,i_N)\in I_1\times\cdots I_N},$$

será base ortonormal de $\mathcal{H}$; queda definido entonces el producto interno para

$$\begin{aligned} x &= \sum_{(i_1,\cdots,i_N)\in I_1\times\cdots I_N} \alpha_{i_1,\cdots,i_N}\psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}^n, \\ y &= \sum_{(i_1,\cdots,i_N)\in I_1\times\cdots I_N} \beta_{i_1,\cdots,i_N}\psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}^n, \end{aligned}$$

ambos en $\mathcal{H}$, usando la ortonormalidad de la base, así:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{(i_1,\cdots,i_N)\in I_1\times\cdots I_N} \alpha_{i_1,\cdots,i_N}\overline{\beta_{i_1,\cdots,i_N}}.$$

Al espacio $\mathcal{H}$ se lo suele llamar producto tensorial Hilbertiano de $(\mathcal{H}_j)_j$ y lo notaremos

$$\mathcal{H} = \otimes_{j=1,\alpha_2}^{N}\mathcal{H}_j,$$

donde α_2 hace referencia a esta manera de normarlo.

1.2. Operador de densidad

Lo anterior fue una formulación de los 4 postulados de la mecánica cuántica desde el punto de vista de los vectores de estado. Existe otra formulación equivalente de estos postulados que será de gran utilidad cuando se quiera atacar un problema en el que no se tenga información completa acerca del vector de estado de un sistema. A continuación daremos el enfoque de esta teoría a partir de lo que se denomina el operador de densidad. Supongamos que un sistema cuántico se encuentra en un estado posible dentro de una colección de estado $(\psi_j)_{j\in J}$ y que la probabilidad de que este estado sea ψ_j es p_j; llamaremos a $\{(p_j,\psi_j)\}_{j\in J}$ un conjunto de estados puros y al operador

$$\rho = \sum_{j\in J} p_j\langle\cdot,\psi_j\rangle\psi_j,$$

lo denominaremos operador de densidad asociado al sistema.

Consideremos un sistema cuya evolución del instante inicial t_1 a otro instante t_2 está dada por un operador unitario U. Si inicialmente se encuentra en el estado ψ_j con probabilidad p_j, transcurrida la evolución, el sistema tendrá probabilidad p_j de estar en el estado $U\psi_j$. Tenemos entonces que la evolución del operador de densidad está dada por

$$\rho = \sum_{j\in J} p_j\langle\cdot,\psi_j\rangle\psi_j \xrightarrow{U} \sum_{j\in J} p_j\langle\cdot,U\psi_j\rangle U\psi_j,$$

y observemos que dado $\psi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{j\in J} p_j\langle\cdot,U\psi_j\rangle U\psi_j\Big)\psi &= \sum_{j\in J} p_j\langle\psi,U\psi_j\rangle U\psi_j. \\
&= \sum_{j\in J} p_j\langle U^*\psi,\psi_j\rangle U\psi_j \\
&= U\Big(\sum_{j\in J} p_j\langle U^*\psi,\psi_j\rangle \psi_j\Big) \\
&= U\Big(\sum_{j\in J} p_j\langle\cdot,\psi_j\rangle \psi_j\Big)U^*\psi \\
&= U\rho U^*\psi,
\end{aligned}$$

por lo cual el operador de densidad en el instante t_2 será $U\rho U^*$. De esta forma el Postulado 2, en el enfoque del operador de densidad, implica que la evolución de un instante t_1 a otro t_2 esta dada por un operador unitario U tal que si ρ es el operador de densidad del sistema a tiempo t_1, $U\rho U^*$ será el operador de densidad a tiempo t_2.

En cuanto a la medición, supongamos que $(M_i)_{i\in I}$ es una colección de operadores de medida, si notamos $p(i|\psi_j)$ a la probabilidad condicional de que suceda el evento i dado que el estado del sistema es ψ_j, luego la probabilidad de obtener el resultados dado por $i \in I$ es

$$p(i|\psi_j) = \langle \psi_j, M_i^* M_i \psi_j \rangle = tr(M_i^* M_i \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j), \tag{1.8}$$

donde la última igualdad se debe a la invarianza de la traza por cambio de base y al hecho de que cualquier estado tiene norma 1 (por lo cual podemos extender el conjunto que contiene solo a ψ_j a una base ortonormal). Por la ley de probabilidad total, la probabilidad de obtener el resultado dado por $i \in I$ en general (sin considerar necesario que previamente el estado sea alguno en particular de entre la colección $(\psi_j)_{j \in J}$), será

$$\begin{aligned} p(i) &= \sum_{j \in J} p(i|\psi_j) p_j \\ &= \sum_{j \in J} p_j tr(M_i^* M_i \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j) \\ &= tr(M_i^* M_i \sum_{j \in J} p_j \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j) \\ &= tr(M_i^* M_i \rho). \end{aligned}$$

Observemos que si notamos $p(i, \psi_j)$ a la probabilidad de que suceda el evento i y que el estado sea ψ_j simultáneamente, y $p(\psi_j|i)$ a la probabilidad condicional de que el estado del sistema sea ψ_j dado que la medición obtenida fue i; por propiedades de las probabilidades condicionales vale que

$$p(\psi_j|i) = \frac{p(i, \psi_j)}{p(i)} = \frac{p(i|\psi_j) p_j}{p(i)}. \tag{1.9}$$

Por otro lado, si el estado inicial del sistema es ψ_j, luego de medir i el estado del sistema será

$$\psi_j^i = \frac{M_i \psi_j}{\|M_i \psi_j\|},$$

por lo cual el operador de densidad ρ después de obtener la medición de i resulta

$$\begin{aligned}
\rho_i &= \sum_{j\in J} p(\psi_j|i)\langle\cdot,\psi_j^i\rangle\psi_j^i \\
&= \sum_{j\in J} p(\psi_j|i)\frac{\langle\cdot,M_i\psi_j\rangle M_i\psi_j}{\|M_i\psi_j\|^2} \\
&= \sum_{j\in J} p(\psi_j|i)\frac{\langle\cdot,M_i\psi_j\rangle M_i\psi_j}{\langle\psi_j,M_i^*M_i\psi_j\rangle} \\
&= \sum_{j\in J} \frac{p(i|\psi_j)p_j}{p(i)}\frac{\langle\cdot,M_i\psi_j\rangle M_i\psi_j}{p(i|\psi_j)} \qquad \textit{gracias a (1.8) y a (1.9)} \\
&= \sum_{j\in J} \frac{p_j\langle\cdot,M_i\psi_j\rangle M_i\psi_j}{tr(M_i^*M_i\rho)} \\
&= \frac{M_i\rho M_i^*}{tr(M_i^*M_i\rho)}.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que el operador de densidad luego de medir i será

$$\rho_i = \frac{M_i\rho M_i^*}{tr(M_i^*M_i\rho)}. \tag{1.10}$$

Veamos ahora cómo es la esperanza de un observable M para un sistema cuántico definido a través de un operador de densidad. Hasta aquí tenemos que si el sistema se encuentra en el estado ψ_j la esperanza de M será

$$\mathbb{E}(M)_{\psi_j} = \langle\psi_j, M\psi_j\rangle. \tag{1.11}$$

Recordemos que dadas dos variables aleatorias X, Y (con rangos R_X y R_Y respectivamente), se calcula la esperanza condicional de $(Y|X=x)$ para cierto $x \in R_X$ como

$$\mathbb{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in R_Y} yp(Y=y|X=x).$$

Claramente esto define una nueva variable aleatoria $\mathbb{E}(Y|X)$ y vale que

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)) = \sum_{x\in R_X} \mathbb{E}(Y|X=x)p(X=x). \tag{1.12}$$

Para más detalles sobre este tema ver [17].

Consideremos el caso en que las variables aleatorias son, M en lugar de la Y y X tal que $X = j$ si el estado del sistema es ψ_j. Gracias a la ecuación (1.11) vale que

$$\mathbb{E}(M|X = j) = \langle \psi_j, M\psi_j \rangle,$$

y por la ecuación (1.12), notando $\mathbb{E}(M)_\rho$ a la esperanza de M dado un sistema con operador de densidad ρ, se sigue

$$\mathbb{E}(M)_\rho = tr(M\rho) = tr(\rho M), \tag{1.13}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M)_\rho &= \sum_{j\in J} \langle \psi_j, M\psi_j \rangle p(X = j) \\
&= \sum_{j\in J} \langle M\psi_j, \psi_j \rangle p_j \;\; (M \;\; \textit{es autoadjunta}) \\
&= \sum_{j\in J} \langle M p_j \psi_j, \psi_j \rangle \\
&= \sum_{j\in J} tr(Mpj \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j) \\
&= tr\Big(\sum_{j\in J} Mpj \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j \Big) \\
&= tr\Big(M \sum_{j\in J} pj \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j \Big) = tr(M\rho).
\end{aligned}$$

El operador de densidad fue introducido como un operador asociado a una familia de estados cuánticos con cierta probabilidad de ocurrir, esta es la interpetación que debe hacerse desde el punto de vista de la física, pero a fines prácticos existe otra caracterización de estos operadores desde el punto de vista matemático que se detalla en el siguiente teorema.

Teorema 1. *Un operador ρ es el operador de densidad asociado a un conjunto de estados puros $(p_j, \psi_j)_j$ si y solo sí satisface las condiciones*

Condición de traza: $tr(\rho) = 1$.

Condición de positividad: *ρ es un operador positivo.*

Demostración. Si consideramos un operador de densidad $\rho = \sum_j p_j \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, al ser la traza lineal, podemos calcular la traza de ρ como

$$\begin{aligned} tr(\rho) &= \sum_j p_j tr(\langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j) \\ &= \sum_j p_j = 1, \end{aligned}$$

ya que $tr(\langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j) = \langle \langle \psi_j, \psi_j \rangle \psi_j, \psi_j \rangle = \langle \psi_j, \psi_j \rangle^2 = 1$.

Por otro lado, dado cualquier estado $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \langle \rho\varphi, \varphi \rangle &= \langle \Big(\sum_j p_j \langle \varphi, \psi_j \rangle \psi_j \Big), \varphi \rangle \\ &= \sum_j p_j \langle \varphi, \psi_j \rangle \langle \psi_j, \varphi \rangle \\ &= \sum_j p_j |\langle \varphi, \psi_j \rangle|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

por lo cual ρ es un operador positivo.

En el otro sentido, supongamos que ρ es un operador positivo y de traza 1. En primer lugar, debido a la condición de positividad ρ se diagonaliza (ya que el espacio $\mathcal{H} = l_2^n$ tiene dimensión finita), de forma tal que existen $(\lambda_j)_{j=1}^n$ autovalores reales no negativos (con posible repetición) y ψ_j el autovector asociado al autovalor λ_j con $(\psi_j)_{j=1}^n$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y

$$\rho = \sum_{j \in J} \lambda_j \langle \cdot, \psi_j \rangle \psi_j.$$

Ahora, a causa de la condición de traza, y por ser $(\psi_j)_{j=1}^n$ base ortonormal de $\mathcal{H}$, la traza de ρ será

$$1 = tr(\rho) = \sum_{j \in J} \lambda_j,$$

por lo que λ_j puede considerarse la probabilidad de que el estado sea ψ_j ya que la suma de todos ellos es 1, entonces $(\lambda_j, \psi_j)_{j \in N}$ es un conjunto de estado puros y por ende ρ un operador de densidad. □

El Teorema 1, aunque sencillo de probar, es de vital importancia ya que caracteriza a los operadores que describen a la mecánica cuántica de forma intrínseca y sin depender su descripción en alguna base. Además es el puntapié inicial para el resto de este trabajo, en donde los operadores de traza tendrán un rol fundamental. Aquí comienza el vínculo entre la mecánica cuántica y las clases de Schatten, muy importantes en el análisis funcional. Por último, este teorema es el que permite traducir el Postulado 4 al lenguaje del operador de densidad, como veremos a continuación.

En el siguiente lema consideraremos a los espacios de Hilbert de dimensión no necesariamente finita, solo por que la dificultad en su demostración no cambia culpa de eso.

Lema 1. *Dados $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ dos espacios de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $B \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ operadores positivos con traza finita, vale la siguiente igualdad para la traza de $A \otimes B \in \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{\alpha_2} \mathcal{K})$:*

$$tr_{\mathcal{H}\otimes_{\alpha_2}\mathcal{K}}(A \otimes B) = tr_{\mathcal{H}}(A)tr_{\mathcal{K}}(B)$$

Demostración. Sean $(x_i)_{i\in I}, (y_j)_{j\in J}$ bases ortonormales de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente, luego el conjunto $(x_i \otimes y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ es base ortonormal de $\mathcal{H} \otimes_{\alpha_2} \mathcal{K}$, y luego

$$\begin{aligned}
tr_{\mathcal{H}\otimes_2\mathcal{K}}(A \otimes B) &= \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle A \otimes B(x_i \otimes y_j), (x_i \otimes y_j)\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle A(x_i) \otimes B(y_j), (x_i \otimes y_j)\rangle \\
&= \sum_{(i,j)\in I\times J} \langle A(x_i), x_i\rangle\langle B(y_j), y_j\rangle \\
&= \sum_{i\in I}\langle A(x_i), x_i\rangle \sum_{j\in J}\langle B(y_j), y_j\rangle = tr_{\mathcal{H}}(A)tr_{\mathcal{K}}(B).
\end{aligned}$$

Observemos que en la penúltima igualdad usamos el hecho de que

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \langle A(x_i), x_i\rangle\langle B(y_j), y_j\rangle$$

suma incondicionalmente. Esto se desprende de la positividad de los operadores A y B y la finitud de sus trazas. □

El siguiente corolario es una generalización y es sencillo concluir lo que sostiene a partir del Lema 1.

Corolario 2. *Si $A_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_i)$ son operadores positivos y de traza finita, donde $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_n$ son espacios de Hilbert, entonces*

$$tr_{\mathcal{H}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{H}_n}(A_1 \otimes \cdots \otimes A_n) = tr_{\mathcal{H}_1}(A_1)\cdots tr_{\mathcal{H}_n}(A_n),$$

considerando al producto tensorial con la norma Hilbertiana.

Dado un sistema cuántico compuesto por n sistemas simples, cada uno con operador de densidad $\rho_j \in (B)\mathcal{H}_j$, consideremos el operador

$$\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n.$$

Veamos que efectivamente el operador así definido es un operador de densidad en $\mathcal{H} = \otimes_{j=1,\alpha_2}^n \mathcal{H}_j$. Debido al Teorema 1 bastará ver que se cumplen la condición de positividad y la condición de traza para ρ. Por el Corolario 2, sumado a que ρ_j cumple la condición de traza para todo $1 \leq j \leq n$, se tiene que

$$tr_{\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_n}(\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n) = tr_{\mathcal{H}_1}(\rho_1) \cdots tr_{\mathcal{H}_n}(\rho_n) = 1.$$

Además, por ser ρ_j un operador positivo, existe $(\psi_i^j)_{i=1}^{D_j}$ base ortonormal de $\mathcal{H}_j = l_2^{Dj}$ y $(p_i^j, \psi_i^j)_{i=1}^{D_j}$ un conjunto de estados puros de forma que $\rho_j = \sum_{i=1}^{D_j} p_i^j \langle \cdot, \psi_i^j \rangle \psi_i^j$. Observemos ρ_j podría haber tenido otra descripción en una base de estados puros no ortonormal, solo que nosotros usaremos su diagonalización, que es una escritura de ρ_j en otra base de estados puros. Dado

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}^n,$$

tendremos que

$$\begin{aligned}
&\langle \rho\varphi, \varphi \rangle = \\
&= \langle (\rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n) \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}^n, \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \psi_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes \psi_{i_n}^n \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i'_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \overline{\lambda_{i'_1,\ldots,i'_n}} \langle \rho_1 \psi_{i_1}^1, \psi_{i'_1}^1 \rangle \cdots \langle \rho_n \psi_{i_n}^n, \psi_{i'_n}^n \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i'_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \overline{\lambda_{i'_1,\ldots,i'_n}} \langle p_{i_1}^1 \psi_{i_1}^1, \psi_{i'_1}^1 \rangle \cdots \langle p_{i_n}^n \psi_{i_n}^n, \psi_{i'_n}^n \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} \lambda_{i_1,\ldots,i_n} \overline{\lambda_{i_1,\ldots,i_n}} p_{i_1}^1 \cdots p_{i_n}^n \quad \textit{(por a la ortonormalidad de los estados } \psi_{i_j}^j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} |\lambda_{i_1,\ldots,i_n}|^2 p_{i_1}^1 \cdots p_{i_n}^n \geq 0,
\end{aligned}$$

obteniendo así la condición de positividad para ρ, por lo que es en definitiva un operador de densidad, como queríamos ver.

Utilizando el Postulado 4, se puede ver sin mucho esfuerzo que $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_n$ es el operador de densidad del sistema compuesto con espacio de estados $\mathcal{H} = \otimes_{j=1,\alpha_2}^{n} \mathcal{H}_j$.

Hemos brindado los postulados de la mecánica cuántica y su interpretación desde el punto de vista de los operadores de densidad. Notemos que la descripción dada está plagada de probabilidades. Cabe preguntarse entonces si es posible dar una descripción determinística de esta teoría o si la misma naturaleza tiene un comportamiento estadístico intrínseco. ¿Será que los físicos, a pesar de sus grandes esfuerzos, no han podido lograr una teoría que describa a las propiedades cuánticas sin necesidad de apelar a las probabilidades? ¿O es acaso imposible lograr esta hazaña?

1.3. Un experimento ilustrativo

Veamos ahora, a través del planteo de un experimento imaginario, que lo predicho por la teoría clásica se contradice con la mecánica cuántica. Veremos luego con más detalle que esta contradicción se debe a la asunción de existencia de variables locales ocultas, base de toda teoría clásica. A continuación describiremos el experimento.

Supongamos que Alicia, Beto y Carlos realizan un experimento en el cual Carlos prepara dos partículas, luego envía una a Alicia y otra a Beto, quienes practican mediciones sobre ellas simultáneamente, estando suficientemente lejos como para que ningún tipo de influencia que tenga la medición de uno sobre la del otro tenga lugar. No está de más aclarar que suficientemente lejos significa tan lejos como para que, el pequeño tiempo en el que transcurren las mediciones no alcance para que la luz logre viajar desde el lugar en que se lleva a cabo una hasta el sitio donde se realiza la otra. De esta manera no podrá existir ninguna influencia de una medición sobre la otra, ya que según la relatividad toda propiedad física viaja más lento que la luz. Este comportamiento según el cual un experimento no influencia a otro si es que los sitios en que cada uno se lleva a cabo están lo suficientemente lejos se denomina *localidad* y es una de las hipótesis fuertes que Einstein, Podolsky y Rossen (EPR) tenían en mente cuando esgrimieron sus argumentos.

En dicho experimento Alicia puede medir dos propiedades físicas, que llamaremos P_Q y P_R, cuyos valores llamaremos Q y R respectivamente. Para realizar la medición puede elegir entre dos aparatos de medición, el primero mide P_Q y el segundo P_R, entre los cuales elige tirando una moneda al aire en el instante anterior a la medición. Del mismo modo, Beto podrá medir las propiedades P_S y P_T cuyos valores nombraremos S y T con dos diferentes aparatos de medición entre los cuales elige igual que Alicia. Imaginemos que los posibles valores tanto Q, R, S y T son $+1$ o -1 (esto no es algo que solo viven en nuestras imaginaciones, sino que, por ejemplo los espines de partículas de luz o electrones suelen representarse de esta manera). Aquí, quizás sin notarlo, también se asume una hipótesis fuerte sobre el comportamiento de la naturaleza y es que de antemano existe un resultado posible para el experimento. Para verlo gráficamente, si alguien nos dice que dentro de una caja cerrada hay una manzana y que cuando, al abrir la caja, la veamos será verde o roja, seguramente pensemos en que la manzana es verde o es roja independientemente de que nosotros la observemos. Si cuando hacemos contacto visual con la manzana esta es verde pensaremos que siempre ha sido verde. Esta hipótesis sobre la naturaleza se llama *realismo* y veremos a continuación que pedirle a la mecánica cuántica que cumpla con el *realismo* y la *localidad* al mismo tiempo es mucho pedir.

Consideraremos ahora la variable aleatoria $QS+RS+RT-QT = (Q+R)S+(R-Q)T$. Sin importar los valores que Q, R, S y T tomen deberá suceder que $Q+R=0$ o $Q-R=0$, y luego los posibles valore para $QS+RS+RT-QT$ serán $+2$ o -2. Llamemos $p(q,r,s,t)$ a la probabilidad de que el resultado del experimento sea $Q=q$, $R=r$, $S=s$ y $T=t$. Estas probabilidades pueden depender de la forma en que Carlos prepare las partículas que envía a Alicia y Beto y del ruido que puedan tener los aparatos de medición, de cualquier forma si se calcula la esperanza de $QS+RS+RT-QT$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(QS+RS+RT-QT) &= \mathbb{E}(QS)+\mathbb{E}(RS)+\mathbb{E}(RT)-\mathbb{E}(QT)\\
&= \sum_{q,s=\pm1} p(Q=q,S=s)qs + \sum_{r,s=\pm1} p(R=r,S=s)rs\\
&\quad + \sum_{r,t=\pm1} p(R=r,T=t)rt - \sum_{q,t=\pm1} p(Q=q,T=t)qt\\
&= \sum_{q,r,s,t=\pm1} p(q,r,s,t)(qs+rs+rt-qt)\\
&\leq \sum_{q,r,s,t=\pm1} p(q,r,s,t)2 = 2,
\end{aligned}$$

donde se usa que las variables Q, R, S, T son todas independientes entre sí por lo cual $P(Q = q, T = t) = \sum_{r,s=\pm1} p(q, r, s, t)$, y análogamente para las demás variables (esto se verá más claro en la sección siguiente). Se tiene entonces que

$$\mathbb{E}(QS+RS+RT-QT) \leq 2. \tag{1.14}$$

Repitiendo muchas veces el experimento, y tomando el promedio de los datos obtenidos, gracias a la ley de los grandes números, Alicia y Beto podrían aproximar el valor de la esperanza tanto como quieran.

La ecuación (1.14) es el resultado al que se llega mediante el análisis que tiene como hipótesis la *localidad* y el *realismo*. Ahora analicemos el mismo experimento desde el punto de vista de la mecánica cuántica.

Supongamos ahora que Carlos prepara el estado cuántico de dos partículas

$$\psi = \frac{(0,1)\otimes(1,0)-(1,0)\otimes(0,1)}{\sqrt{2}}.$$

Además consideremos que Alicia y Beto realizan sus mediciones a través de los operadores

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Puede verse que los autovalores de todos estos operadores son $\{-1, +1\}$, por lo cual las propiedades físicas que se miden en la versión cuántica del experimento toman los mismos valores que en la clásica.

Como antes, en el instante previo a la medición tanto Alicia como Beto deciden de forma aleatoria con qué aparato medir. Al ser Q, R, S y T operadores Hermíticos $Q\otimes S, Q\otimes T, R\otimes S$ y $R\otimes T$ también lo serán, por lo cual la esperanza en las mediciones se calcula como

$$\mathbb{E}(QS) = \langle Q\otimes S\psi, \psi\rangle,$$

y análogamente para los demás. Calculemos sus valores, llamando $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$

$$\begin{aligned}
\langle Q\otimes S\psi, \psi\rangle &= \langle Q\otimes S\Big(\frac{e_2\otimes e_1 - e_1\otimes e_2}{\sqrt{2}}\Big), \frac{e_2\otimes e_1 - e_1\otimes e_2}{\sqrt{2}}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle Q\otimes S(e_2\otimes e_1 - e_1\otimes e_2), e_2\otimes e_1 - e_1\otimes e_2\rangle \\
&= \frac{1}{2}\Big(\langle Qe_2, e_2\rangle\langle Se_1, e_1\rangle - \langle Qe_2, e_1\rangle\langle Se_1, e_2\rangle \\
&\quad -\langle Qe_1, e_2\rangle\langle Se_2, e_1\rangle + \langle Qe_1, e_1\rangle\langle Se_2, e_2\rangle\Big),
\end{aligned}$$

además

$$\langle Qe_2, e_2\rangle\langle Se_1, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle Qe_1, e_2\rangle\langle Se_2, e_2\rangle,$$

$$\langle Qe_2, e_1\rangle\langle Se_1, e_2\rangle = 0 = \langle Qe_1, e_2\rangle\langle Se_2, e_1\rangle,$$

por lo que $\mathbb{E}(QS) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, y análogamente

$$\mathbb{E}(RS) = \mathbb{E}(RT) = -\mathbb{E}(QT) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

se sigue de esto que

$$\mathbb{E}(QS + RS + RT - QT) = 2\sqrt{2} > 2,$$

contradiciendo (1.14).

Esto prueba que hay casos en que las teoría clásica y la mecánica cuántica predicen comportamientos de la naturaleza contradictorios entre sí.

Se han podido realizar en laboratorios experimentos de características similares al recién descrito con resultados que respaldan que las predicciones de la mecánica cuántica son que las mejor describen a la naturaleza en este tipo situaciones.

1.4. Variables locales ocultas

Veremos ahora las consecuencias que tiene plantear un modelo de variables ocultas, o sea, un modelo descrito por variables aleatorias, en el cual existen otras variables, llamadas variables locales ocultas, que no pueden medirse, pero que de poder medirse determinarían el valor exacto que toman las variables aleatorias. Esto quiere decir que, el comportamiento estadístico que inducen las variables aleatorias, es en realidad determinístico desde el punto de vista de las variables ocultas.

Lo que Einstein Podolsky y Rossen creían, a la hora de plantear el problema que devino en las desigualdades de Bell, era que la mecánica cuántica no podía tener un comportamiento estadístico intrínseco, sino que de alguna manera debían existir mecanismos que los físico de su época desconocían, y que provocaban la conducta en apariencia aleatoria de las mediciones. Al tirar una moneda al aire se observa un comportamiento aleatorio en la obtención de cara o ceca pero, se podría esperar un resultado específico si se configuraran con precisión las condiciones iniciales de las variables de las que depende este experimento (e.j., la fuerza con la que se lanza la moneda, el lugar donde se la impacta, su distancia al suelo). De la misma forma, según EPR, existen este tipo de variables ocultas para la mecánica cuántica. Introduciremos ahora un formalismo para la teoría de variables locales ocultas y observaremos que asumiendo una teoría de este tipo se tienen consecuencias que, en ciertos casos, se contradicen con lo predicho por el formalismo cuántico.

Diremos que una familia de variables aleatorias discretas y de rango finito $(A_i)_{1\leq i\leq n}$, o que su correlación asociada

$$\{p(A_1 = a_1, \cdots, A_n = a_n)\}_{a_i \in R_{A_i}, 1\leq i\leq n},$$

admite un modelo de variables locales ocultas si existe un conjunto Λ, al que llamaremos espacio de variables ocultas, n particiones $\Lambda_{A_i} = \{\Lambda^1_{A_i}, \cdots, \Lambda^{k_i}_{A_i}\}$ con $k_i = |R_{A_i}|$, y funciones características $\chi_{A_i}(a_i, \lambda)$ con $a_i \in R_{A_i}$ tales que

$$\chi_{A_i}(a_i, \lambda) = \begin{cases} 1 & \textit{si } \lambda \in \Lambda^j_{A_i} \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases},$$

si a_i el j-ésimo valor del rango de A_i. Las probabilidades están dadas por la siguiente formula

$$p(A_i = a_i) = \int_\Lambda \chi_{A_i}(a_i, \lambda) d\mu(\lambda), \tag{1.15}$$

donde μ es una medida de probabilidad sobre Λ. Además la probabilidad de intersecciones de eventos de este tipo se calcula como la integral del producto de sus características del siguiente modo

$$p(A_{i_1} = a_{i_1}, \cdots, A_{i_k} = a_{l_k}) = \int_\Lambda \chi_{A_{i_1}}(a_{i_1}, \lambda) \cdots \chi_{A_{i_k}}(a_{l_k}, \lambda) d\mu(\lambda), \tag{1.16}$$

donde $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$.

Notemos que $\chi_{A_i}(a_i, \lambda)$ es siempre independiente de A_j si $i \neq j$, teniéndose así la hipótesis de *localidad* que se introdujo informalmente en la sección anterior. Por otro lado, la existencia de las funciones $\chi_{A_i}(a_i, \lambda)$ (sin necesidad de la independencia que recién resaltábamos) y del espacio Λ es una formalización de la hipótesis del *realismo*. Además, como Λ_{A_i} es una partición Λ vale que

$$1 = \sum_{a_j \in R_{A_j}} \chi_{A_j}(a_j, \lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

Observemos también que bajo este modelo, si $i \neq j$,

$$p(A_i = a_i) = \sum_{a_j \in R_{A_j}} p(A_i = a_i, A_j = a_j), \tag{1.17}$$

ya que

$$\begin{aligned} p(A_i = a_i) &= \int_\Lambda \chi_{A_i}(a_i, \lambda) d\mu(\lambda) \\ &= \int_\Lambda \chi_{A_i}(a_i, \lambda) \Big(\sum_{a_j \in R_{A_j}} \chi_{A_j} a_j, \lambda \Big) d\mu(\lambda) \\ &= \sum_{a_j \in R_{A_j}} \int_\Lambda \chi_{A_i}(a_i, \lambda) \chi_{A_j} a_j, \lambda d\mu(\lambda) \\ &= \sum_{a_j \in R_{A_j}} p(A_i = a_i, A_j = a_j). \end{aligned}$$

A continuación utilizaremos algunas nociones de la teoría de formas multilineales, más detalles sobre esta teoría se darán en el capítulo 2. Aunque estos concepto volverán a aparecer en el siguiente capítulo, demos algunas definiciones. Dada una forma multilineal $T : l_\infty^{D_1} \times \cdots \times l_\infty^{D_n} \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) \in \mathbb{R}$ para todo $(i_1, \ldots, i_N)$ con $1 \leq i_j \leq D_j$ diremos que es una forma multilineal real. Definiremos su norma real como

$$\|T\|_\infty = \sup_{|t_{i_j}| \leq 1} |\sum_{j=1}^{n} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_1, \ldots, e_n) t_{i_1} \cdots t_{i_n}|, \tag{1.18}$$

con $t_{i_j} \in \mathbb{R}$.

Analicemos ahora el modelo clásico, bajo la hipótesis de existencia de variables locales ocultas. Consideremos el caso en que m observadores puedan medir, cada uno n_m propiedades físicas distintas dadas por variables aleatorias $A^j_{i_j}$, cada una con dos posibles resultados de modulo menor o igual que uno. Sumemos la hipótesis de que dado un observador, indexado por $1 \leq j \leq m$, en el instante anterior a la medición elige aleatoriamente qué propiedad $A^j_{i_j}$ (con $1 \leq i_j \leq n_j$) medir, y esta elección es independiente de las elecciones hechas del mismo modo por los demás observadores. En este caso, dada una forma multilineal real

$$T : l^{n_1}_\infty \times \cdots \times l^{n_m}_\infty \longrightarrow \mathbb{C},$$

si notamos $A^j = (A^j_1, \ldots, A^j_{n_j})$ al vector de las variables aleatorias dadas por las posibles mediciones que realiza el observador j, veremos que vale

$$\mathbb{E}\Big(T(A^1, \ldots, A^m)\Big) \leq \|T\|_\infty.$$

En lo siguiente usaremos las notaciones $C = \{(i_1, \ldots, i_m) : 1 \leq i_j \leq n_j\}$, $T_{i_1,\ldots,i_n} = T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_m})$ y $R^j_{i_j}$ será el rango de la variable aleatoria $A^j_{i_j}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(T(A^1, \ldots, A^m)) = \\
&= \mathbb{E}\Big(\sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in C} T_{i_1,\ldots,i_n} A^1_{i_1} \cdots A^m_{i_m} \Big) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in C} T_{i_1,\ldots,i_n} \mathbb{E}(A^1_{i_1} \cdots A^m_{i_m}) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in C} T_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} a^1_{i_1} \cdots a^m_{i_m} p(A^1_{i_1} = a^1_{i_1}, \cdots, A^m_{i_m} = a^m_{i_m}) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in C} T_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} a^1_{i_1} \cdots a^m_{i_m} \sum_{(l_j\neq i_j)} \sum_{a^j_{l_j}\in R^j_{l_j}} p(A^1 = a^1, \ldots, A^m = a^m) \\
&= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in C} \sum_{j=1}^{m} \sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} \sum_{l_j\neq i_j} \sum_{a^j_{l_j}\in R^j_{l_j}} T_{i_1,\ldots,i_n} a^1_{i_1} \cdots a^m_{i_m} p(A^1 = a^1, \ldots, A^m = a^m) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i_j=1}^{n_j} \sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} T(a^1, \ldots, a^m) p(A^1 = a^1, \ldots, A^m = a^m),
\end{aligned}$$

donde $a^j = (a^j_1, \ldots, a^j_{n_j})$ y usamos una generalización muy simple de la ecuación (1.17). Ahora, teniendo en cuenta que $|a^j_{i_j}| \leq 1$

$$
\begin{aligned}
\left|\mathbb{E}(T(A^1,\ldots,A^m))\right| &= \left|\sum_{j=1}^{m}\sum_{i_j=1}^{n_j}\sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} T(a^1,\ldots,a^m)p(A^1=a^1,\ldots,A^m=a^m)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i_j=1}^{n_j}\sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} |T(a^1,\ldots,a^m)|p(A^1=a^1,\ldots,A^m=a^m) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i_j=1}^{n_j}\sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} \|T\|_\infty p(A^1=a^1,\ldots,A^m=a^m) \\
&\leq \|T\|_\infty \sum_{j=1}^{m}\sum_{i_j=1}^{n_j}\sum_{a^j_{i_j}\in R^j_{i_j}} p(A^1=a^1,\ldots,A^m=a^m) = \|T\|_\infty.
\end{aligned}
$$

Tenemos entonces que

$$\mathbb{E}(T(A^1,\ldots,A^m)) \leq \|T\|_\infty. \tag{1.19}$$

1.5. Desigualdades de Bell

En el experimento antes presentado se plantea el problema de determinar cual es la cota máxima para la esperanza de cierta variable aleatoria. Analizando la variable aleatoria que allí se presenta podemos observar que, si definimos la forma bilineal

$$
\begin{aligned}
b : l^2_\infty \times l^2_\infty &\longrightarrow \mathbb{R} \\
((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &\longrightarrow x_1x_2 + y_1x_2 + y_1y_2 - x_1y_2,
\end{aligned}
$$

se observa que esta es exactamente

$$b((Q,R),(S,T)) = QS + RS + RT - QT,$$

y más aún, puede verse fácilmente que $\|b\|_\infty = 2$, que es la cota que el modelo clásico (bajo las hipótesis de *localidad* y *realismo*) predice para la esperanza.

Gracias a este ejemplo, si llamamos $\mathcal{Q}$ a la familia de correlaciones dadas por la mecánica cuántica y $\mathcal{C}$ a la familia tablas de correlaciones que cumplen con un modelo de variables locales ocultas, está claro que $\mathcal{Q} \neq \mathcal{C}$. En la sección anterior vimos que toda correlación en $\mathcal{C}$ cumple la desigualdad (1.19). Esto motiva la siguiente definición.

En general dada una forma multilineal real

$$T : l_\infty^{m_1} \times \cdots \times l_\infty^{m_N} \longrightarrow \mathbb{C},$$

una familia de operadores observables $(A^1_{i_1})_{1 \leq i_1 \leq m_1}, \ldots, (A^N_{i_N})_{1 \leq i_N \leq m_N}$ tales que

$$-Id \leq A^j_{i_j} \leq Id \quad \forall 1 \leq i_j \leq m_j, \quad \forall 1 \leq j \leq N$$

y un operador de densidad ρ definido en el espacio de estado $\mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$, si $(e^j_i)^{m_j}_{i=1}$ es la base canónica de $l_\infty^{m_j}$, diremos que

$$\Big| \sum_{i_1,\ldots,i_N} T(e^1_{i_1}, \ldots, e^N_{i_N}) tr(\rho A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N}) \Big| \leq \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}, \tag{1.20}$$

es una desigualdad de Bell. Como se ve en el ejemplo anterior, a veces, en la naturaleza se presentan violaciones a estas desigualdades, diremos que la violación máxima a una desigualdad de Bell, para los parámetros recién especificados, es el mínimo número K para el que se cumple

$$\Big| \sum_{i_1,\ldots,i_N} T(e^1_{i_1}, \ldots, e^N_{i_N}) tr(\rho A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N}) \Big| \leq K \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}. \tag{1.21}$$

Ahora, cabe preguntarse cual es la máxima violación a desigualdades de Bell fijada la forma multilineal y moviendo los demás parámetros, o al revés, fijado el operador de densidad y moviendo la forma multilineal y los observables. Este será el objeto de estudio de los siguientes capítulos.

Veamos a continuación un primer acercamiento al estudio de estos problemas utilizando herramientas del análisis funcional. Será necesario para esto el siguiente teorema con gran cantidad y diversidad de aplicaciones debido al matemático Alexander Grothendieck.

Teorema 2 (Desigualdad de Grothendieck)**.** *Existe una constante postiva K tal que, para cualquier número natural n, cualquier matriz $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) y vectores $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ en la bola unitaria cerrada de algún espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se tiene:*

$$\Big| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle \Big| \leq K \sup \{ \Big| \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} s_i t_j \Big| : |s_i|, |t_j| \leq 1 | \}. \tag{1.22}$$

Demostración. Daremos la prueba para el caso real ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$) y luego, usando eso, la del caso complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sale vía técnicas usuales, descomponiendo en parte real e imaginaria. En primer lugar, como $(x_i)_{i=1}^n$ y $(y_i)_{i=1}^n$ están en la bola unitaria de un espacio de Hilbert cualquiera, más aún, en un subespacio de dimensión finita, puedo pensar que pertenecen a un subespacio de dimensión finita de $L_2\,[0,1]$, de dimensión $2n$.

Tomando el subespacio generado por las primeras $2n$ funciones de Radermacher $r_1, \ldots, r_{2n}$ se tiene que $x_j(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} x_{ij} r_i(t)$ y $y_j(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} y_{ij} r_i(t)$ donde $t \in [0,1]$ y $x_j(t)$, $y_j(t)$ son las identificaciones de x_j, y_j en $L_2[0,1]$ respectivamente.

Primero consideramos las funciones x_i y y_i truncadas, teniendo para cualquier función f su truncada $\overline{f}$ definida como sigue:

$$\overline{f}(t) = \begin{cases} \text{mín}\{f(t), 1\} & \text{si } f(t) \geq 0 \\ \text{máx}\{f(t), -1\} & \text{si } f(t) < 0 \end{cases}$$

Luego, definiendo

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\left\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij} s_i t_j | : |s_i\Big|, |s_j| \leq 1 \right\} \\ \|A\|_\beta &= \sup\left\{ \Big| \sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \Big| : \|x_i\|, \|y_j\| \leq 1 \right\}, \end{aligned}$$

se tiene

$$|\sum_{i,j} a_{ij} \langle \overline{x_i}, \overline{y_j} \rangle| = |\sum_{i,j} a_{ij} \int_0^1 \overline{x_i}(t) \overline{y_j}(t) dt| \leq \int_0^1 |\sum_{i,j} a_{ij} \overline{x_i}(t) \overline{y_j}(t)| dt \leq \|A\|.$$

Ahora como,

$$|\sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle| \leq |\sum_{i,j} a_{ij} \langle \overline{x_i}, \overline{y_j} \rangle| + |\sum_{i,j} a_{ij} \langle x_i, y_j - \overline{y_j} \rangle| + |\sum_{i,j} a_{ij} \langle x_j - \overline{x_i}, y_j \rangle|, \quad (1.23)$$

sólo queda probar que los miembros segundo y tercero del lado derecho son más chicos o iguales que $c\|A\|_\beta$, donde c es una constante tal que $1 - 2c > 0$. En ese caso tendríamos que $\|A\|_\beta \leq \frac{1}{1-2c}\|A\|$, que es lo que queríamos demostrar.

Veamos entonces que existe tal constante. En general, si $f(t) \neq \overline{f}(t)$, entonces

$$|f(t) - \overline{f}(t)| = |f(t)| - 1.$$

Luego, usando que siempre vale $(\lambda-2)^2 \geq 0$, se tiene $\lambda - 1 \leq \frac{\lambda^2}{4}$, y aplicando eso a la igualdad antes obtenida conseguimos

$$|f(t) - \overline{f}(t)| \leq \frac{f(t)^2}{4}. \tag{1.24}$$

Claramente si $f(t) = \overline{f}(t)$ también se sigue (1.24) y luego vale para cualquier $t \in [0,1]$ y cualquier $f \in L^2[0,1]$. Ahora consideremos la escritura de f en la base de Radermacher

$$f = \sum_{j=1}^{n} b_j r_j,$$

siendo $\|f\| = 1$. Usando la ortogonalidad de las funciones de Radermacher tendremos que

$$\begin{aligned}
16\int_0^1 |f(t) - \overline{f}(t)|^2 dt &\leq \int_0^1 f(t)^4 \\
&= \int_0^1 \sum_{j,k,l,m=1}^{n} b_j b_k b_l b_m r_j(t) r_k(t) r_l(t) r_m(t) dt \\
&= \sum_{j=k,l=m} b_j b_k b_l b_m + \sum_{j=l,k=m} b_j b_k b_l b_m + \sum_{j=m,k=l} b_j b_k b_l b_m - 2\sum_j {b_j}^4 \\
&\leq 3\Big(\sum_j {b_j}^2\Big)^2 \leq 3.
\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\|x_i - \overline{x_i}\|, \|x_i - \overline{x_i}\| \leq \frac{\sqrt{3}}{4},$$

por lo tanto, reescalando por $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ se sigue que

$$|\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i, \overline{y_j} - \overline{y_j}\rangle|, |\sum_{i,j} a_{ij}\langle x_i - \overline{x_i}, \overline{y_j}\rangle| \leq \|A\|\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Hemos probado que la constante c existe y es igual a $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$, teniendo en cuenta (1.23) tendremos

$$\|A\|_\beta \leq \|A\| + \frac{\sqrt{3}}{4}\|A\|_\beta + \frac{\sqrt{3}}{4}\|A\|_\beta,$$

y por lo tanto

$$\|A\|_\beta \leq \frac{2}{2-\sqrt{3}}\|A\|.$$

Teniendo así la demostración para el caso real.

□

El ínfimo sobre todas las constantes que cumplen (1.22) se llama constante de Grothendieck y la notaremos $K_G(\mathbb{R})$ para el caso real y simplemente K_G en el caso complejo, por ser de uso más frecuente. Se sabe que

$$\frac{\pi}{2} \leq K_G(\mathbb{R}) \leq senh(\frac{\pi}{2}),$$

pero no se ha podido calcular su valor exacto.

Puede verse fácilmente que, para cualquier par de matrices cuadradas A y B, $tr(AB) = tr(BA)$ y luego que

$$\begin{aligned} tr : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) &\longrightarrow tr(A^*B), \end{aligned}$$

define un producto interno en $M_n(\mathbb{C})$.

Veamos ahora como se puede aplicar el Teorema 2 al estudio de las desigualdades de Bell. El siguiente teorema fue probado por primera por Tsirelson demostrando que las violaciones a desigualdades de Bell para dos observadores son siempre acotadas. El mismo luego dejaría la pregunta pendiente ¿Son estas violaciones acotadas en los casos de tres o mas observadores? Veremos una forma de responder esta pregunta por la negativa en el capítulo 4.

Teorema 3. *Las violaciones máximas a desigualdades de Bell, para el caso de dos observadores y observables de autovalores de módulo menor o igual que uno, están siempre acotadas por K_G.*

Demostración. Sean $(A_i)_{i=1}^n \subset \mathcal{B}(l_2^N), (B_j)_{j=1}^m \subset l_2^M$ dos familia de observables, una forma multilineal

$$T : l_\infty^n \times l_\infty^m \longrightarrow \mathbb{C},$$

y $\rho = \rho_A \otimes \rho_B \in \mathcal{B}(l_2^N \otimes_{\alpha_2} l_2^M)$ un operador de densidad. Supongamos sin perdida de generalidad que $n \leq m$ y consideremos la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} T(e_i, e_j) & \text{si } 1 \leq i \leq n \\ 0 & \text{si } n < i \leq m \end{cases}$$

Observemos que, por ser ρ un operador de densidad es positivo y luego autoadjunto sobre $\mathbb{C}$, por lo que

$$tr(\rho_A \otimes \rho_B A_i \otimes B_j) = tr(\rho^* A_i \otimes B_j) = \langle \rho_A \otimes \rho_B, A_i \otimes B_j \rangle,$$

que es un producto interno. Además

$$\|\rho\| \leq tr(\rho) \leq 1,$$

y por ser A_i, B_j matrices Hermitianas son diagonalizables, luego

$$\begin{aligned} \|A_i\| &= \sup_{\lambda \text{ autovalor de } A_i} |\lambda| \leq 1, \\ \|B_j\| &= \sup_{\lambda \text{ autovalor de } B_j} |\lambda| \leq 1. \end{aligned}$$

Se tiene entonces, por el Teorema 2, que

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T(e_i, e_j) tr(\rho_A \otimes \rho_B A_i \otimes B_j) \Big| &= \Big| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T(e_i, e_j) \langle \rho_A \otimes \rho_B, A_i \otimes B_j \rangle \Big| \\ &\leq K_G \sup_{|s_i|, |t_j| \leq 1} | \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} T(e_i, e_j) s_i t_j | \\ &= K_G \|T\|_{\infty, \mathbb{R}} \ \textit{(usando (1.18))}. \end{aligned}$$

Teniendo así lo que buscabamos probar. □

Capítulo 2

Violaciones para estados diagonales y S_∞

El objetivo de este capítulo será ver que las violaciones a desigualdades de Bell inducidas por estados diagonales N-partitos (N observadores), están acotadas por una constante elevada a la N. Para eso introduciremos los conceptos de clases de Schatten y Q-álgebras, y veremos que el problema recién planteado es equivalente a que la clase de Schatten S_∞ dotada con el producto de Schur sea una Q-álgebra (como lo hacen en [10]). Esto remite a una clásica pregunta del análisis funcional planteada por Varopoulus en la década del setenta: ¿son las clases de Schatten provistas de este producto Q-álgebras? Siguiendo [2] daremos una respuesta afirmativa a esta pregunta. Para esto será necesario una caracterización de Q-álgebras de mucha importancia en esta teoría dada por Davie y una generalización para varias variables del la desigualdad de Grothendieck debida a Tonge, cuya demostración incluiremos al final de este capítulo.

Por el momento $\mathcal{H}$ será un espacio de Hilbert separable y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ los espacio de operadores acotados y operadores compactos de él en sí mismo, respectivamente. Asimismo $M_N(\mathbb{K})$ será notación para el espacio de las matrices de $N \times N$ y coeficientes en el cuerpo $\mathbb{K}$.

2.1. Un poco de teoría espectral y álgebras de Banach

Dado un operador $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ autoadjunto existe una sucesión de números reales $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ tendiendo a cero y un conjuto ortonormal $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{H}$ tales que

$$K = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n.$$

Para cualquier operador compacto K sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se define el operador modulo como $|K| := (KK^*)^{\frac{1}{2}}$, el cual es autoadjunto y compacto. Se define también el conjunto de valores singulares de K como los números no negativos $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ tales que

$$|K| = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n,$$

donde $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$.

Recordemos que un operador $W \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ se dice una isometría parcial si dado $h \in (Ker(W))^\perp$ se tiene $\|Wh\| = \|h\|$. El espacio $(Ker(W))^\perp$ se llama el espacio inicial de W y $Ran(W)$ se llama el espacio final de W. Un resultado importante de la teoría de operadores dice que para todo operador $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ existe una isometría parcial W cuyo espacio inicial es $(Ker(A))^\perp$ y $cl(Ran(A))$ su espacio final, tal que $A = W|A|$. Más aún, si $A = UP$ donde $P \geq 0$ (i.e., $\langle Ph, h\rangle \geq 0$, $\forall h \in \mathcal{H}$) y $KerU = KerP$ entonces $P = |A|$ y $U = W$. Este resultado se conoce como descomposición polar y de allí se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3. *Dado un operador compacto K, existen conjuntos ortonormales $\{e_n\}_{n\geq 1}$ y $\{f_n\}_{n\geq 1}$ en $\mathcal{H}$ y números reales no negativos $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ tales que:*

$$K = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n.$$

Demostración. Usando la descomposición polar $K = W|K|$. Por otro lado, como $|K|$ es compacto y autoadjunto, se tiene:

$$|K| = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n.$$

Donde $\{e_n\}_{n\geq 1}$ es un conjunto ortonormal de $\mathcal{H}$. Como W es una isometría entre $(KerK)^\perp$ y $cl(RanK)$ entonces definiendo $f_n = We_n$ se tiene que $\{f_n\}_{n\geq 1}$ es un conjunto ortonormal.

Luego,

$$K = W|K| = W(\sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle e_n) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n \langle \cdot, e_n \rangle f_n,$$

y esto prueba la afirmación. □

Dado K un operador compacto en un espacio de Hilbert separable $\mathcal{H}$ se define su traza de la siguiente manera:

$$Tr(K) := \sum_{n\geq 1} \langle Ke_n, e_n \rangle,$$

donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$. En el caso de $|K|$ se tiene que $Tr(|K|) = \sum_{n\geq 1} \lambda_n$, donde $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ es el conjunto de valores singulares de K.

Definición 1. *Dados un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y $1 \leq p < \infty$ se define la clase p-Schatten como:*

$$S_p(\mathcal{H}) := \left\{ K \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) / \left(Tr(|K|^p)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

provisto de la norma $\|K\|_{S_p} := (Tr(|K|^p))^{\frac{1}{p}}$.

Se define también la clase ∞-Schatten exactamente como el espacio de operadores compactos con la norma usual allí, o sea, $S_\infty(\mathcal{H}) := \mathcal{K}(\mathcal{H})$ como espacios de Banach.

$S_p(\mathcal{H})$ resulta un espacio de Banach con su respectiva norma para todo $1 \leq p \leq \infty$. Es interesante notar el paralelismo que existe entre los espacios l_p y los espacios S_p. Es sabido que se tienen los isomorfismo isométricos $C_0^* = l_1$ y $l_1^* = l_\infty$, y en el caso de las clases de Shcatten puede probarse que $\mathcal{K}(\mathcal{H})^* = S_1(\mathcal{H})$ y $S_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En ambos casos la dualidad es la dada por la traza de modo que si $u \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, $v \in S_1(\mathcal{H})$ y $w \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces

$$v(u) := Tr(vu), \tag{2.1}$$

$$w(v) := Tr(wv). \tag{2.2}$$

Recordemos que un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ (un cuerpo) es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ que también es un anillo con una multiplicación entre sus elementos, de forma tal que:

$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall a, b \in \mathcal{A}$

Una subálgebra $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial cerrado para el producto.

Asimismo se dice que un álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{K}$ (en este caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) es de Banach si posee una norma $\|\cdot\|$ con la cual $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach y que cumple

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

Si $\mathcal{A}$ tiene una identidad e, entonces se dice que es un álgebra de Banach con identidad y se asume que $\|e\| = 1$ Se dice que es además conmutativa o Abeliana si $ab = ba\ \forall a, b \in \mathcal{A}$. Por último diremos que $\mathcal{A}$ es una C^*-álgebra si es un álgebra de Banach junto con una involución

$$
\begin{aligned}
* : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A} && (2.3)\\
a &\longrightarrow a^*, && (2.4)\\
& && (2.5)
\end{aligned}
$$

tal que para todo par $a, b \in \mathcal{A}$ y todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se cumplen las siguientes condiciones

1. $(a + b)^* = a^* + b^*$.

2. $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$.

3. $(ab)^* = a^* b^*$.

4. $\|aa^*\| = \|a\|^2$.

Dado un operado $K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ se lo puede pensar como una matriz infinita $(B_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}}$ con numerables filas y columnas donde $B_{ij} = \langle \mathcal{K}(e_i), f_j \rangle$ (con e_i, f_j los dados por el Teorema 3). Se define el producto de Schur $*$ como la multiplicación de matrices lugar a lugar, es decir, dadas dos matrices $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ y $B = (b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ se tiene

$$(A * B)_{i,j} := a_{i,j} b_{i,j} \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

Las clases de Schatten dotadas con el producto de Schur forman un álgebra de Banach conmutativa. Observemos que, con el producto dado por la composición de operadores, también se obtiene un álgebra de Banach pero, en ese caso, no conmutativa.

Otro ejemplo de álgebra de Banach es el espacio $\mathcal{C}(K)$ de las funciones continuas en un espacio topológico compacto y Hausdorff K y que llegan a $\mathbb{R}$. Aquí el producto es el producto punto a punto de funciones y la norma es la del supremo.

Diremos que un álgebra de Banach conmutativa es uniforme si es isométricamente isomorfa a una subálgebra cerrada de $\mathcal{C}(K)$, para algún K como en el ejemplo anterior; asimismo un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$ se dice una Q-álgebra si existe un álgebra uniforme $\mathcal{B}$ y un ideal cerrado $\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A}$ es isomorfo al cociente $\mathcal{B}/\mathcal{I}$.

A continuación veremos algunas definiciones y se fijará notación útil para enunciar un teorema de suma importancia que caracteriza a las Q-álgebras debido a Davie.

Llamaremos $\mathbb{T}$ al disco unitario en $\mathbb{C}$ y, cuando X sea un espacio de Banach, B_X a la bola unitaria en X. Dado un número natural n usaremos la notación $[n] := \{1, \ldots, n\}$. Si N es otro número natural, notaremos al producto cartesiano de N veces el conjunto $[n]$ como $[n]^N$, y abreviaremos a una N-upla $(i_1, \ldots, i_N)$ allí escribiendo I. Para una función de la forma $T : [n]^N \longrightarrow \mathbb{C}$ notaremos $T[I] = T(i_1, \ldots, i_N)$ siempre que $I = (i_1, \ldots, i_N)$ y se define su norma como

$$\|T\|_\infty = \sup \left\{ \Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \sigma_1(i_1) \cdots \sigma_N(i_N) \Big| \Big/ \sigma_1, \ldots, \sigma_N : [n] \longrightarrow \mathbb{T} \right\}.$$

Llamaremos C_n^N al espacio vectorial de las funciones de este tipo y en el caso en que $N = 1$ lo notaremos C_n . Es interesante observar que este tipo de funciones, si bien no son tensores, se pueden interpretar como tales de la siguiente manera

$$\sum_{I \in [n]^N} T[I] e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N} \in \otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^n$$

donde e_j es el j-ésimo vector canónico de $\mathbb{C}^n$. Por esta razón son llamados tensores complejos en [2], aunque nosotros no los llamaremos así para no generar la confusión natural que se presentaría en el contexto de este trabajo. También es útil notar que considerando la base dual de la canónica en $\mathbb{C}^n$, $\{e_i^{'}\}_{1 \le i \le n}$, se obtiene una forma multilineal

$$T_{mult} = \sum_{I \in [n]^N} T[I] e_{i_1}^{'} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}^{'} \in \otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^n = \mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{C}),$$

donde $\mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{C})$ es el conjunto de las formas N-lineales que llegan a $\mathbb{C}$ saliendo de l_∞^n y vale que $\|T_{mult}\|_{\mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{C})} = \|T\|_\infty$. Si la imagen de T este incluida en $\mathbb{R}$ se puede considerar a T_{mult} en $\mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{C})$ o en $\mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{R})$ que es el conjunto de la formas N-lineales que llegan a $\mathbb{R}$. Esta formas multilineales son aquellas que llamamos reales en el capítulo 1. En el último caso su norma es

$$\|T_{mult}\|_{\mathcal{L}({}^N l_\infty^n, \mathbb{R})} = sup \left\{ \Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \sigma_1(i_1) \ldots \sigma_N(i_N) \Big| \Big/ \sigma_1, \cdots, \sigma_N : [n] \longrightarrow [-1, 1] \right\},$$

y la notaremos, como en el capítulo 1, $\|T\|_{\infty, \mathbb{R}}$.

Lema 2. *Dada $T \in C_n^N$ con todos sus coeficientes reales se tiene que $\|T\|_\infty \leq 2^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}$.*

Demostración. Dados $N > 1$ un natural y $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ notemos las partes real e imaginaria de cada c_j del siguiente modo

$$c_{j,0} = Re(c_j), c_{j,1} = Im(c_j).$$

Valdrá entonces que

$$\prod_{j=1}^{N} c_j = \prod_{j=1}^{N} (c_{j,0} + i c_{j,1}) = \sum_{\tau} \prod_{j=1}^{N} c_{j,\tau(j)} i^{\tau(j)}, \tag{2.6}$$

donde la suma es sobre todas las funciones $\tau : [N] \longrightarrow \{0,1\}$.

Dadas $\sigma_1, \dots, \sigma_n : [n] \longrightarrow \mathbb{T}$, es claro que

$$|Re(\sigma_j)|, |Re(\sigma_j)| \leq 1.$$

Luego, gracias a (2.6) se obtiene, con la notación anterior para parte real e imaginaria, y usando la notación $I = (j_1, \dots, j_N)$ para evitar confusiones

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \sigma_1(j_1) \cdots \sigma_N(j_N) \Big| &\leq \Big| \sum_{\tau} \sum_{I \in [n]^N} T[I] \sigma_1(j_1, \tau(j_1)) \cdots \sigma_N(j_N, \tau(j_N)) i^{\tau(j_1) + \dots + \tau_{j_N}} \Big| \\ &= \Big| \sum_{\tau} i^{\tau(j_1) + \dots + \tau_{j_N}} \sum_{I \in [n]^N} T[I] \sigma_1(j_1, \tau(j_1)) \cdots \sigma_N(j_N, \tau(j_N)) \Big| \\ &\leq 2^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que la cantidad de funciones $\tau : [N] \longrightarrow \{0,1\}$ es 2^N. De allí, tomando supremo se sigue lo que queríamos probar. $\square$

Si además X es un álgebra de Banach, siempre que se tengan sucesiones X-valuadas $A_1, \cdots, A_N : [n] \longrightarrow B_X$ definimos

$$\mathcal{T}(A_1, \dots, A_N) = \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) \cdots A_N(i_N)$$

y, en los caso en los que no se presenten ambigüedades, escribiremos sólamente $\mathcal{T}$.

Una propiedad importante de las Q-álgebras es el siguiente criterio dado por Davie que las caracteriza de forma intrínseca y no dependiendo de como son respecto de algún álgebra uniforme. La demostración del próximo teorema se encuentra al final del capítulo en la página 71.

Teorema 4 (Davie)**.** *Los siguientes son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra*

2. *Hay una constante $K > 0$ tal que si $T \in C_n^m$ con $\|T\| \leq 1$ y $x_1, \ldots, x_n \in A$ con $\|x_i\| \leq 1$, luego $\left\| \sum_I T[I] x_{i_1} \cdots x_{i_m} \right\| \leq K^m$.*

Lo siguiente es tal solo una reformulación a fines prácticos.

Teorema 5 (Davie)**.** *El álgebra de Banach conmutativa X es una Q-álgebra si y solo si existe una constante universal $K > 0$ tal que para cualquier elección de n y N naturales, $T \in C_n^N$ y sucesiones X valuadas $A_1, \cdots, A_N : [n] \longrightarrow B_X$, se tiene la desigualdad*

$$\|\mathcal{T}\|_X \leq K^N \|T\|_\infty.$$

El próximo objetivo es enunciar y demostrar el resultado central del capítulo siguiendo [10]. Un estado diagonal N-partito es una combinación lineal de tensores en $\otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^n$ de la forma

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i e_i \otimes \cdots \otimes e_i$$

donde e_i es el i-ésimo vector canónico. Por otro lado dada $T \in C_n^N$ con coeficientes reales y $A_1, \cdots, A_N : [n] \longrightarrow B_{M_D(\mathbb{C})}$ decimos que $\psi \in \otimes_{j=1}^N \mathbb{C}^n$ viola una desigualdad de Bell si

$$\Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle \psi, A_1(i_1) \cdots A_N(i_N) \psi \rangle \Big| > \|T\|_{\infty, \mathbb{R}},$$

y que la violación está acotada por C si

$$\Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle \psi, A_1(i_1) \cdots A_N(i_N) \psi \rangle \Big| \leq C \|T\|_{\infty, \mathbb{R}}.$$

Para más detalles ver el capítulo 1.

Antes de exponer el teorema veamos un lema técnico que será de utilidad para su demostración y se volverá a utilizar más adelante en el capítulo.

Lema 3. *Si $A_1, \ldots, A_N \in M_D(\mathbb{C})$ Hermitianas entonces $A_1 * \cdots * A_N$ también lo es (donde $*$ es el producto de Schur).*

Demostración. Dadas $A_1, \cdots, A_N \in M_D(\mathbb{C})$ Hermitianas se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle A_1 * \cdots * A_N e_j, e_i\rangle &= \langle A_1 e_j, e_i\rangle \cdots \langle A_N e_j, e_i\rangle \\
&= \langle e_j, A_1 e_i\rangle \cdots \langle e_j, A_N e_i\rangle \ \text{ (por ser } A_1, \cdots, A_N \text{ Hermitianas)} \\
&= \overline{\langle A_1 e_i, e_j\rangle} \cdots \overline{\langle A_N e_i, e_j\rangle} \\
&= \overline{\langle A_1 * \cdots * A_N e_i, e_j\rangle} \\
&= \langle e_j, A_1 * \cdots * A_N e_i\rangle,
\end{aligned}$$

luego, siendo $x = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i, y = \sum_{i=1}^{N} b_i e_i \in \mathbb{C}^N$ concluimos que

$$\begin{aligned}
\langle A_1 * \cdots * A_N x, y\rangle &= \sum_{i,j=1}^{N} a_i \overline{b_j} \langle A_1 * \cdots * A_N e_i, e_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} a_i \overline{b_j} \langle e_i, A_1 * \cdots * A_N e_i\rangle = \langle x, A_1 * \cdots * A_N y\rangle,
\end{aligned}$$

por lo cual se tiene que $(A_1 * \cdots * A_N)^* = A_1 * \cdots * A_N$, como se quería demostrar. □

2.2. Violaciones de estados diagonales

Es hora de retomar las desigualdades de Bell. El siguiente teorema plantea una relación profunda entre la violación a las desigualdades de Bell para estados cuánticos diagonales y la estructura de S_∞ como álgebra de Banach, dos cosas que en principio parecen totalmente desconectadas.

Teorema 6. *$S_\infty(l_2) = S_\infty$ es una Q-álgebra si y solo si existe una constante K tal que para todo numero natural N y cualquier estado diagonal N-partito $\psi = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \otimes \cdots \otimes e_i$ la violación máxima que ψ puede inducir en una desigualdad de Bell está acotada por K^N.*

Demostración. Dada $T \in C_n^N$ cuya imagen está contenida en $\mathbb{R}$ y

$$A_1, \ldots, A_N : [n] \longrightarrow B_{M_D(\mathbb{C})} \subset B_{S_\infty},$$

con $A_j(i_j)$ Hermitiana para todo $j \in [N]$ y $i_j \in [n]$. Si S_∞ es una Q-álgebra y $n, N \in \mathbb{N}$, por el criterio de Davie (Teorema 5), se tiene

$$\|\mathcal{T}\|_{S_\infty} \leq K'^N \|T\|_\infty \leq (2K')^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}} \text{ (debido al Lema 2).}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\|_{S_\infty} &= \Big\| \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) \Big\|_{M_D(\mathbb{C})} \\ &= \max_{x \in B_{\mathbb{C}^D}} \Big| \langle x, \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) x \rangle \Big|, \end{aligned}$$

usando en la última igualdad que $A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N)$ es Hermitiana gracias al Lema 3. Asimismo dada $x = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i$ con norma 1 y teniendo en cuenta que

$$\langle e_i, A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) e_j \rangle = \langle e_i \otimes \cdots \otimes e_i, A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N) e_j \otimes \cdots \otimes e_j \rangle,$$

se sigue

$$\begin{aligned} &\langle x, \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) x \rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \sum_{I \in [n]^N} T[I] a_i \overline{a_j} \langle e_i, A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) e_j \rangle \\ &= \sum_{I \in [n]^N} \sum_{i,j=1}^{N} T[I] a_i \overline{a_j} \langle e_i \otimes \cdots \otimes e_i, (A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N)) e_j \otimes \cdots \otimes e_j \rangle. \end{aligned}$$

Volviendo a la igualdad anterior y usando lo recién obtenido se desprende

$$\begin{aligned} &\max_{x \in B_{\mathbb{C}^D}} \Big| \langle x, \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) x \rangle \Big| = \\ &= \max_{\sum_{i=1}^{N} |a_i|^2 = 1} \Big| \sum_{I \in [n]^N} \sum_{i,j=1}^{N} T[I] a_i \overline{a_j} \langle e_i \otimes \cdots \otimes e_i, A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N) e_j \otimes \cdots \otimes e_j \rangle \Big| \\ &= \max_{\psi \text{ diagonal}} \Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle \psi, A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N) \psi \rangle \Big|. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que existe un estados diagonal $\sum_{i=1}^{N} a_i e_i \otimes \cdots \otimes$ tal que

$$\|\mathcal{T}\|_{S_\infty} = \sum_{I\in[n]^N} \sum_{i,j=1}^{N} T[I] a_i \overline{a_j} \langle e_i \otimes \cdots \otimes e_i, A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N) e_j \otimes \cdots \otimes e_j \rangle, \tag{2.7}$$

y luego $\max_{\psi \text{ diagonal}} \left| \sum_{I\in[n]^N} T[I] \langle \psi, A_1(i_1) \otimes \cdots \otimes A_N(i_N) \psi \rangle \right| \leq (2K')^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}$, lo cual nos permite concluir que la violación máxima a un estado diagonal está acotada por $K^N = (2K')^N$.

En el otro sentido, si la violación máxima para estados diagonales está acotada por K^N, usando (2.7), se tiene

$$\Big\| \sum_{I\in[n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) \Big\|_{M_D(\mathbb{C})} \leq K^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}, \tag{2.8}$$

para T real y $A_j(i_j)$ matriz Hermitiana y con norma menor o igual que 1 para todo j, i_j. Dado T no necesariamente real, $T = T_R + iT_I$ donde T_R y T_I son sus partes real e imaginaria respectivamente y usando el Lema 2 se ve fácilmente que

$$\|T_R\|_\infty + \|T_I\|_\infty \leq 2^N \Big(\|T_R\|_{\infty,\mathbb{R}} + \|T_I\|_{\infty,\mathbb{R}} \Big) \leq 2^{N+1} \|T\|_\infty \leq 4^N \|T\|_\infty,$$

ya que $\|T_R\|_{\infty,\mathbb{R}}, \|T_I\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \|T\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq \|T\|_\infty$.

Luego por (2.8) se obtiene una desigualdad análoga pero con constante $4K$ en vez de K para T complejas. Veamos que si $A_j(i_j) \in M_D(\mathbb{C})$ no necesariamente Hermitianas y T compleja vale una desigualdad como (2.8) con constante $8K$. En el caso en que las matrices no sean Hermitianas considerando la descomposición $A_j(i_j) = \frac{A_j(i_j)+A_j(i_j)^*}{2} + \frac{A_j(i_j)-A_j(i_j)^*}{2}$ obtenemos de forma análoga al Lema 2

$$\Big\| \sum_{I\in[n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) \Big\|_{M_D(\mathbb{C})} \leq 2^N (4K)^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}}.$$

Por otro lado, debido a la aproximación de operadores compactos por operadores de rango finito, dados $\varepsilon > 0$ y $A_j(i_j) \in S_\infty$ existen D un número natural y $B_j(i_j) \in M_D(\mathbb{C}) \subset S_\infty$ tales que $\|A_j(i_j) - B_j(i_j)\|_{S_\infty} < \varepsilon$. Veamos cómo aproxima el producto Schur de los operadores de rango finito $B_j(i_j)$ al de los operados compactos $A_j(i_j)$. Siendo $I = (i_1, \ldots, i_N) \in [n]^N$ observemos que

$$\begin{aligned}
&\|A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) - B_1(i_1) * \cdots * B_N(i_N)\|_{S_\infty}^2 = \\
&= \sup_{x \in B_{l_2}} \Big\| (A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) - B_1(i_1) * \cdots * B_N(i_N))x \Big\|^2 \\
&= \sup_{x \in B_{l_2}} \Big\| \sum_{k \geq 1} x_k (A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) - B_1(i_1) * \cdots * B_N(i_N))e_k \Big\|^2 \\
&= \sup_{x \in B_{l_2}} \sum_{l \geq 1} | \sum_{k \geq 1} x_k \langle (A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) - B_1(i_1) * \cdots * B_N(i_N))e_k, e_l \rangle|^2 \\
&\leq \sup_{x \in B_{l_2}} \sum_{l \geq 1, k \geq 1} |x_k|^2 |\langle (A_1(i_1) - B_1(i_1)), e_l \rangle|^2 \cdots |\langle (A_N(i_N) - B_N(i_N))e_k, e_l \rangle|^2 \\
&\leq \varepsilon^{2N},
\end{aligned}$$

donde usamos que $x = \sum_{k \geq 1} x_k e_k$ y también, en la última desigualdad, que $x, e_l \in B_{l_2}$ y $\|A_j(i_j) - B_j(i_j)\|_{S_\infty} < \varepsilon$.

De la última observación se deduce que

$$\Big\| \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) - B_1(i_1) * \cdots * B_N(i_N) \Big\|_{S_\infty} \leq \varepsilon^N \|T\|_\infty.$$

Ahora, si se tienen $A_1, \ldots, A_N : [n] \longrightarrow S_\infty$, para cualquiera $\varepsilon > 0$ considerando D natural y $B_1, \ldots, B_N : [n] \longrightarrow M_D(\mathbb{C})$ que aproximen en menos de ε como recién y que vale una desigualdad como en (2.8) con constante $8K$ para T complejo y matrices se obtiene

$$\Big\| \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N) \Big\|_{S_\infty} \leq \Big((8K)^N + (2\varepsilon)^N \Big) \|T\|_{\infty, \mathbb{R}},$$

y haciendo tender ε a 0 obtenemos lo que queríamos probar. □

2.3. S_∞ es una Q-álgebra

Ahora es natural pensar que en el contexto de este trabajo sería útil saber si efectivamente S_∞ es o no una Q-álgebra. Es notable, que si bien esta pregunta fue planteada por Varopoulos en los '70 en un contexto totalmente diferente, resurge naturalmente como un problema de la mecánica cuántica, más específicamente de desigualdades de Bell. En efecto S_∞ es una Q-álgebra, esto fue probado en [2] respondiendo a una pregunta planteada en [10], y a continuación daremos la demostración que allí se presenta. Este es un claro ejemplo de la relación tan íntima que existe entre la física y la matemática, de total reciprocidad, en la cual ambas se brindan para el progreso de la otra. Para la demostración de este hecho serán indispensable tanto el Teorema 5 como una generalización multilineal de la desigualdad de Grothendieck debida a Tonge.

Consideremos la siguiente generalización del producto interno de dos a N variables. Si $y_1, \dots, y_N \in l_2$ se tiene

$$\langle y_1, \dots, y_N \rangle := \sum_{k \geq 1} (y_1)_k \cdots (y_N)_k,$$

que es una forma multilineal. La generalización de Tonge, dice en este caso que:

Teorema 7 (Tonge). *Para todo par de enteros n, N, $T : [n]^N \longrightarrow \mathbb{C}$ y sucesiones $x_1, \dots, x_N : [n] \longrightarrow B_{l_2}$ se cumple la desigualdad*

$$\Big| \sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle x_1(i_1), \dots, x_N(i_N) \rangle \Big| \leq 2^{\frac{N-2}{2}} K_G \|T\|_\infty$$

Donde K_G es la constante de Grothendieck.

Daremos la demostración de este hecho, al final del capítulo, esta se encuentra en la página 61.

Teorema 8. *$(S_\infty(l_2), *)$ es una Q-álgebra.*

Demostración. En vista de la equivalencia de Davie dada en 5, bastará ver que fijados primero los naturales n y N, $T : [n]^N \longrightarrow \mathbb{C}$, y la sucesión l_2 valuada $A_1, \dots, A_N : [n] \longrightarrow B_{S_\infty}$ existe K independiente de todos ellos tal que

$$\|\mathcal{T}\|_{S_\infty} \leq K^N \|T\|_\infty, \tag{2.9}$$

(recordemos que $\mathcal{T} = \sum_{I \in [n]^N} T[I] A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N)$).

Veremos que se pueden hacer varias reducciones. La primera es que basta verlo para T real, o sea que su imagen esté contenida en $\mathbb{R}$.

En efecto, dado T complejo, como hemos observado en la demostración del Teorema 6, $\|T_R\|_\infty + \|T_I\|_\infty \leq 2^{N+1} \|T\|_\infty$. Por otro lado estos definen los operadores $\mathcal{T}_\mathcal{R}$ y $\mathcal{T}_\mathcal{I}$, que cumplen $\|\mathcal{T}\|_{S_\infty} \leq \|\mathcal{T}_\mathcal{R}\|_{S_\infty} + \|\mathcal{T}_\mathcal{I}\|_{S_\infty}$. Luego si suponemos que vale la desigualdad (2.9) para aplicaciones reales, tenemos

$$\|\mathcal{T}\|_{S_\infty} \leq \|\mathcal{T}_\mathcal{R}\|_{S_\infty} + \|\mathcal{T}_\mathcal{I}\|_{S_\infty} \leq K^N \|T_R\|_{\infty,\mathbb{R}} + K^N \|T_I\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq K^N 2^{N+1} \|T\|_\infty,$$

y se tiene entonces (2.9) para T a valores complejos.

La segunda reducción nos permite considerar que los operadores $A_1, \dots, A_N$ son matrices de dimensión finita tomados en la base canónica de l_2. En efecto, tenemos que

$$\|\mathcal{T}\| = sup\left\{|\langle u, \mathcal{T}v\rangle : u, v \in B_{l_2}|\right\},$$

luego, dado $\varepsilon > 0$ existen $u, v \in B_{l_2}$ tales que $\|\mathcal{T}\|(1-\varepsilon)| \leq |\langle u, \mathcal{T}v\rangle|$. Además existen $D \in \mathbb{N}$ y u', v' soportados por $e_1, \dots, e_D$ de forma tal que $\|u - u'\|, \|v - v'\| \leq \varepsilon$. Se tiene entonces

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}\|(1-\varepsilon) &\leq |\langle u, \mathcal{T}v\rangle| \\ &\leq |\langle u-u', \mathcal{T}v'\rangle| + |\langle u', \mathcal{T}(v-v')\rangle| + |\langle u-u', \mathcal{T}(v-v')\rangle| + |\langle u', \mathcal{T}v'\rangle| \\ &\leq 2\varepsilon\|\mathcal{T}\| + \varepsilon^2\|\mathcal{T}\| + |\langle u', \mathcal{T}v'\rangle|, \end{aligned}$$

por lo tanto $\|\mathcal{T}\|(1-\varepsilon-2\varepsilon-\varepsilon^2) \leq |\langle u', \mathcal{T}v'\rangle|$. Eligiendo ε suficientemente chico se tiene que $\|\mathcal{T}\| \leq 2|\langle u', \mathcal{T}v'\rangle|$.

Ahora, definiendo $A_k'(i_k) = \Big(\langle e_l, A_k(i_k)e_m\rangle\Big)_{1\leq l,m\leq D}$ se observa que

$$\begin{aligned} \Theta := \langle u', \mathcal{T}v'\rangle &= \sum_{I\in[n]^N} T[I]\langle u', A_1(i_1) * \cdots * A_N(i_N)v'\rangle \\ &= \sum_{I\in[n]^N} T[I]\langle u', A'_1(i_1) * \cdots * A'_N(i_N)v'\rangle. \end{aligned}$$

Luego basta ver que $|\Theta| \leq K^N\|T\|_\infty$ para concluir lo que queremos, por lo tanto solo basta considerar operadores de rango y co-núcleo finitos (más aún, incluidos en el subespacio generado por $e_1, \dots, e_D$).

La tercera reducción consiste en absorber la parte compleja de Θ en alguno de los operadores. Como Θ es un número complejo existe $\phi \in [0, 2\pi]$ tal que $\Theta = |\Theta|e^{i\phi}$, por lo tanto si definimos $A_1''(i_1) = e^{-i\phi}A_1'(i_1)$ se obtiene que

$$|\Theta| = \sum_{I\in[n]^N} T[I]\langle u', A_1''(i_1) * \cdots * A_N''(i_N v')\rangle.$$

En la cuarta reducción el objetivo es considerar solo matrices Hermitianas, que en este caso serán de $\mathbb{C}^{2D\times 2D}$. Para eso consideramos el operador $\rho : \mathbb{C}^{D\times D} \longrightarrow \mathbb{C}^{2D\times 2D}$ tal que

$$\rho(A) = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que $\rho(A)$ es Hermitiana para todo $A \in \mathbb{C}^{D\times D}$. Veamos que también se tiene que ρ es una isometría. En primer lugar dado $x \in B_{\mathbb{C}^D}$ como $\|\rho(A)(0 \oplus x)\| = \|Ax \oplus 0\| = \|Ax\|$, y como $B_{\mathbb{C}^D} \subset B_{\mathbb{C}^{2D}}$ tomando supremo sobre $B_{\mathbb{C}^{2D}}$ se concluye que $\|\rho(A)\| \geq \|A\|$. Por otro lado todo $z \in \mathbb{C}^{2D}$ es de la forma $z = (x \oplus y)$ donde $x, y \in \mathbb{C}^D$ cumpliendo $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, con eso en mente uno puede entonces observar que para cierto $(x \oplus y) \in B_{\mathbb{C}^{2D}}$ vale

$$\|\rho(A)(x \oplus y)\|^2 = \|Ay\|^2 + \|A^*x\|^2 \leq \|y\|^2\|A\|^2 + \|x\|^2\|A\|^2 = \|A\|^2,$$

y nuevamente tomando supremo sobre $B_{\mathbb{C}^{2D}}$ tenemos $\|\rho(A)\|^2 \leq \|A\|^2$ y luego $\|\rho(A)\| \leq \|A\|$, lo cual, sumado a la conclusión anterior, basta para decir que $\|\rho(A)\| = \|A\|$ para todo $A \in M_D(\mathbb{C})$.

A partir de ρ definimos $B_1, \ldots, B_N : \{1, \ldots, n\} \longrightarrow M_{2D}(\mathbb{C})$ de la siguiente forma: $B_1 = \rho(A_1^{''}(i_1))$ y luego para $2 \leq k \leq N$ $B_k = \rho(A_k^{'}(i_k))$. Por lo dicho antes, es obvio que $\|B_k(i_k)\| \leq 1$ para todo $1 \leq k \leq N$. Definimos ahora las matrices u operadores

$$\begin{aligned} M' &:= \mathcal{T}(A_1^{''}, A_2^{'}, \ldots, A_N^{'}), \\ M'' &:= \mathcal{T}(B_1, B_2, \ldots, B_N). \end{aligned}$$

Como T es real se tiene que $M'' = \rho(M')$. Definimos ahora $w = \frac{(v' \oplus u')}{\sqrt{2}}$ que claramente tiene norma menor o igual que 1. Además

$$\begin{aligned} \langle w, M''w \rangle &= \tfrac{1}{2}[(u')^* \oplus (v')^*] \begin{bmatrix} 0 & M' \\ M'^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} \\ &= Re\Big(\langle u', M'v' \rangle\Big) \\ &= Re\Big(\textstyle\sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle u', A''_1(i_1) * A'_2(i_2) * \cdots * A'_N(i_N) v' \rangle\Big) \\ &= |\Theta|. \end{aligned}$$

La última de las reducciones consiste en considerar a w un vector real. Más precisamente, usando coordenadas polares podemos escribir $w = \sum_{l=1}^{2D} w_l e^{i\psi_l} e_l$, para ciertos módulos $w_l \in \mathbb{R}_+$ y argumentos $\psi_l \in [0, 2\pi]$. Nos referimos con vector real a un vector cuyos argumentos son todos nulos. Definamos luego la matriz $U = diag(e^{i\psi_1}, \ldots, e^{i\psi_{2D}}) \in M_{2D}(\mathbb{C})$, se tiene así que el vector $w' = U^*w = \sum_{l=1}^{2D} w_l e_l$ es real. Definamos también $B_1^{'}(i_1) = U^* B_1(i_1) U$ para cualquier $1 \leq i_1 \leq n$. Es claro que $\|B_1^{'}(i_1)\| \leq \|B_1(i_1)\| \leq 1$. Se ve fácilmente que

$$\sum_{I \in [n]^N} T[I] \langle w', B_1^{'}(i_1) * B_2(i_2) * \ldots * B_N(i_N) w' \rangle = \langle w, M''w \rangle = |\Theta|, \tag{2.10}$$

luego podemos considerar que w es un vector real.

Ahora enunciaremos dos hechos importantes para culminar la demostración, su prueba se encuentra a continuación de la misma.

Hecho 1. *Existen números reales* $\mu_1, \ldots, \mu_{2D} \geq 0$ *tales que* $0 \leq \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_m \min\{l,m\} \leq 1$ *y para* $1_l = \sum_{j=1}^{l} e_j$ *se cumple*

$$|\Theta| = \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_m\Theta_{l,m},$$

y $\Theta_{l,m} = \sum_{I\in\{1,\ldots,n\}^N} T[I] < 1_l, B_1'(i_1) * B_2(i_2) * \ldots * B_N(i_N)1_m >$

Hecho 2. *Para* $1 \leq l, m \leq 2D$ *se tiene que* $|\Theta_{l.m}| \leq 2^{\frac{N-2}{2}} K_G min\{l,m\}\|t\|_\infty$

Se sigue de los Hechos 1 y 2 que

$$\begin{aligned} |\Theta| &= \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_m\Theta_{l,m} \\ &\leq \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_m|\Theta_{l,m}| \\ &\leq C_N\|T\|_\infty \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_m min\{l,m\} \\ &\leq C_N\|T\|_\infty, \end{aligned}$$

y luego se obtiene lo que buscábamos probar con $K \leq 4$. □

Demos ahora la demostración de los Hechos 1 y 2.

Demostración del Hecho 1. A lo sumo reordenando los vectores $e_1, \ldots, e_{2D}$ podemos suponer que $w_1 \geq w_2 \geq \cdots \geq w_{2D} \geq 0$. Luego si definimos $\mu_l = w_l - w_{l+1}$ para $1 \leq l \leq 2D - 1$ y $\mu_{2D} = w_{2D}$ se cumple que $\mu_l \geq 0$ para todo $1 \leq l \leq 2D$ y además $< \sum_{l=1}^{2D} \mu_l 1_l, e_k >= \sum_{l=k}^{2D} \mu_l = w_k$, por lo tanto $w' = \sum_{l=1}^{2D} \mu_l 1_l$ (recordar que $w' = \sum_{l=1}^{2D} w_l e_l$). Además, como $< 1_l, 1_m >= min\{l,m\}$, entonces

$$0 \leq< w', w' >=< \sum_{l=1}^{2D} \mu_l 1_l, \sum_{l=1}^{2D} \mu_l 1_l >= \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_l < 1_l, 1_m >= \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l\mu_l \min\{l,m\} \leq 1.$$

Se ve fácilmente expandiendo w' en (2.10) que $|\Theta| = \sum_{l,m=1}^{2D} \mu_l \mu_m \Theta_{l,m}$. □

Demostración del Hecho 2. Expandiendo 1_l en la base canónica se tiene

$$< 1_l, B_1^{'}(i_1) * B_2(i_2) * \cdots * B_N(i_N) 1_m >= \sum_{s=1}^{l} \sum_{t=1}^{m} < e_s, B_1^{'}(i_1) * B_2(i_2) * \cdots * B_N(i_N) e_t > . \tag{2.11}$$

Notemos que el lado de la derecha en (2.11) es el producto de las (s,t)-entradas de las matrices $B_1^{'}(i_1), B_2(i_2), \ldots, B_N(i_N)$, y por lo tanto se tiene que

$$< e_s, B_1^{'}(i_1) * B_2(i_2) * \cdots * B_N(i_N) e_t >=< e_s, B_1^{'}(i_1) e_t >< e_s, B_2(i_2) e_t > \cdots < e_s, B_N(i_N) e_t > .$$

Suponiendo que $l \leq m$,

$$\begin{aligned} |\Theta_{l,m}| &= \Big| \sum_{I \in \{1,\ldots,n\}^N} T[I] < 1_l, B_1^{'}(i_1) * B_2(i_2) * \cdots * B_N(i_N) 1_m > \Big| \\ &\leq \sum_{s=1}^{l} \Big| \sum_{I \in \{1,\ldots,n\}^N} T[I] \sum_{t=1}^{m} < e_s, B_1^{'}(i_1) e_t >< e_s, B_2(i_2) e_t > \cdots < e_s, B_N(i_N) e_t > \Big| \\ &\leq l 2^{\frac{N-2}{2}} K_G \|T\|_\infty , \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe al Teorema 7. El teorema se puede aplicar ya que $B_1^{'}(i_1), B_2(i_2), \cdots, B_N(i_N)$ tienen norma a lo sumo 1, luego sus filas pertenecen a $B_{l_2^m} \subset B_{l_2}$, y por lo tanto

$$\sum_{t=1}^{m} < e_s, B_1^{'}(i_1) e_t >< e_s, B_2(i_2) e_t > \cdots < e_s, B_N(i_N) e_t >$$

es el producto interno generalizado en B_{l_2}. □

2.4. Resultados pendientes

Ahora que hemos visto una concreta aplicación de los Teoremas 5 y 7 y ha surgido naturalmente su necesidad es buen momento para su demostración. No obstante, parece oportuno aclarar que estos teoremas tienen valor propio y no solo como lemas para la prueba de que S_∞ es una Q-álgebra. Por ejemplo el teorema de Davie da una caracterización intrínseca de las Q-álgebras que no depende de su representación como cociente de álgebras particulares, sino de una relación entre sus elementos, la cual es en muchos casos más fácilmente verificable (como se ilustra en las demostraciones de los Teoremas 6 y 8). Por otro lado el teorema debido a Tonge generaliza la famosa desigualdad de Grothendieck, descrita en el Teorema 2, al contexto de formas multilineales. La desigualdad de Grothendieck tiene un valor sobradamente probado y esta generalización debida a Tonge es utilizada, por ejemplo, en el terreno de la desigualdad de von Neumann.

2.4.1. Teorema de Tonge

Para probar el Teorema 7 necesitaremos previamente de algunos resultados que serán presentados a continuación.

Teorema 9 (Kintchine - Steinhauss). *Para todo número $1 \leq p < \infty$ existen constantes a_p y b_p tales que para cualquier elección de números $c_1, \ldots, c_N \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$a_p^{-1}\Big(\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_{\mathbb{T}^N}\Big|\sum_{k=1}^{N}c_k w_k\Big|^p d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{p}} \leq b_p\Big(\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\Big)^{1/2},$$

donde en particular $a_1 \leq \sqrt{2}$.

Demostración. Vale observar que cuando integre con respecto a la medida σ_1, estaré haciendo referencia a la medida de Haar normalizada en $\mathbb{T}$ y también que notaremos σ_N a la medida producto N veces de esta. Primero probemos que vale $\Big(\sum_{k=1}^{N}|c_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\int_{\mathbb{T}^N}|\sum_{k=1}^{N}c_k w_k|^2 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2}}$.

Como $|\sum_{k=1}^{N}c_k w_k|^2 = \sum_{k,j=1}^{N}c_k w_k\overline{c_j w_j}$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^N}|\sum_{k=1}^{N}c_k w_k|^2 d\sigma_N(w) &= \int_{\mathbb{T}^N}\sum_{k,j=1}^{N}c_k w_k\overline{c_j w_j}d\sigma_N(w) \\
&= \sum_{k=1,j=1}^{N}c_k\overline{c_j}\int_{\mathbb{T}^N}w_k\overline{w_j}d\sigma_N(w) \\
&= \sum_{k=1,j=1}^{N}c_k\overline{c_j}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(\theta_k-\theta_j)}\frac{d\theta_k}{2\pi}\frac{d\theta_j}{2\pi} \\
&= \sum_{k=1}^{N}c_k\overline{c_k} = \sum_{k=1}^{N}|c_k|^2.
\end{aligned}$$

Como $\|\cdot\|_p$ es monótona, si $1 \leq p \leq 2$ se tiene trivialmente la desigualdad de la derecha con $b_p = 1$, ya que

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{k=1}^{N} |c_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &= \Big(\int_{\mathbb{T}^N} |\sum_{k=1}^{N} c_k w_k|^2 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2}} = \|\sum_{k=1}^{N} c_k w_k\|_2 \\
&\leq \|\sum_{k=1}^{N} c_k w_k\|_p = \Big(\int_{\mathbb{T}^N} |\sum_{k=1}^{N} c_k w_k|^p d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Análogamente, si $2 \leq p$, se tiene trivialmente la desigualdad de la izquierda con $a_p = 1$.

Para probar los casos que faltan será necesaria la siguiente desigualdad

$$\int_{\mathbb{T}} \Big|a + \frac{bw}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_1(w) \leq \Big(|a|^2 + |b|^2\Big)^k, \tag{2.12}$$

Por un lado

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} \Big|a + \frac{bw}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_1(w) &= \int_{\mathbb{T}} \Big|\Big(a + \frac{bw}{\sqrt{k}}\Big)^k\Big|^2 d\sigma_1(w) \\
&\leq \int_{\mathbb{T}} \Big|\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j \Big(\frac{bw}{\sqrt{k}}\Big)^{k-j}\Big|^2 d\sigma_1(w) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^j \Big(\frac{bw}{\sqrt{k}}\Big)^{k-j} \overline{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a^i \Big(\frac{bw}{\sqrt{k}}\Big)^{k-i}} d\sigma_1(w) \\
&= \int_{\mathbb{T}} \sum_{j=0}^{k} \Big|\binom{k}{j} a^{k-j} \Big(\frac{bw}{\sqrt{k}}\Big)^{j}\Big|^2 d\sigma_1(w) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 |a|^{2(k-j)} \frac{|b|^{2j}}{k^j},
\end{aligned}$$

luego,

$$\int_{\mathbb{T}} \Big|a + \frac{bw}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_1(w) \leq \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 |a|^{2(k-j)} \frac{|b|^{2j}}{k^j}, \tag{2.13}$$

y por el otro

$$\Big(|a|^2 + |b|^2\Big)^k = \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j} |a|^{2(k-j)} |b|^{2j}. \tag{2.14}$$

Analizando cada término de la sumatoria en las ecuaciones (2.13) y (2.14) y llamando

$$\alpha_j = \binom{k}{j},$$

se observa que es suficiente ver que $\frac{{\alpha_j}^2}{k^j} \leq \alpha_j$ para todo $2 \leq j \leq k$ para tener que la desigualdad (2.12) es verdadera. La condición recién expuesta es equivalente a $\alpha_j \leq k^j$, lo cual es trivialmente verdadero.

Lo próximo será probar que fijado un número natural k

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\Big(\int_{\mathbb{T}^N} |\sum_{j=1}^{N} c_j w_j|^{2k} d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2k}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^2.$$

Veamoslo por inducción en N. Primero el caso con $N = 2$. Sea $w_1 \in \mathbb{T}$, notemos que por (2.12), tomando $a = \frac{c_1 w_1}{\sqrt{k}}$ y $b = c_2$ se consigue

$$\int_{\mathbb{T}} \Big|\frac{c_1 w_1}{\sqrt{k}} + \frac{c_2 w_2}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_1(w_2) \leq \Big(\frac{|c_1 w_1|^2}{k} + |c_2|^2\Big)^k \leq \Big(|c_1|^2 + |c_2|^2\Big)^k \tag{2.15}$$

luego integrando con respecto a w_1 en $\mathbb{T}$ logramos lo que estamos buscando,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{k}} & \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^2} |c_1 w_1 + c_2 w_2|^{2k}(w_2) d\sigma_1(w_2) d\sigma_1(w_1)\Big)^{\frac{1}{2k}} \\
= & \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^2} \Big|\frac{c_1 w_1}{\sqrt{k}} + \frac{c_2 w_2}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_1(w_2) d\sigma_1(w_1)\Big)^{\frac{1}{2k}} \\
\leq & \quad \Big(\int_{\mathbb{T}} (|c_1|^2 + |c_2|^2\Big)^k d\sigma_1(w_1))^{\frac{1}{2k}} \quad \text{por (2.15)} \\
= & \quad \Big(|c_1|^2 + |c_2|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(el integrando no depende de } w_1\text{).}
\end{aligned}$$

En el paso inductivo, siendo $N > 2$, usaremos nuevamente (2.12) análogamente a como fue utilizado en el paso anterior, solo que esta vez con $a = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j w_j}{\sqrt{k}}$ y $b = c_{N+1}$. Así se obtiene

$$
\begin{aligned}
& \tfrac{1}{\sqrt{k}} \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^{N+1}} \Big|\sum_{j=1}^{N+1} c_j w_j\Big|^{2k} d\sigma_{N+1}(w)\Big)^{\frac{1}{2k}} \\
= & \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^N}\int_{\mathbb{T}} \Big|\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j w_j}{\sqrt{k}} + \frac{c_{N+1}w_{N+1}}{\sqrt{k}}\Big|^{2k} d\sigma_N(w_{N+1}) d\sigma_N(w_1\cdots w_N)\Big)^{\frac{1}{2k}} \\
\leq & \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big(\Big|\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j w_j}{\sqrt{k}}\Big|^2 + |c_{N+1}|^2\Big)^k d\sigma_N(w_1\cdots w_N)\Big)^{\frac{1}{2k}} \text{ por (2.12)} \\
= & \quad \Big(\Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big(\Big|\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j w_j}{\sqrt{k}}\Big|^2 + |c_{N+1}|^2\Big)^k d\sigma_N(w_1\cdots w_N)\Big)^{\frac{1}{k}}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
\leq & \quad \Big(\Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big(\Big|\sum_{j=1}^{N} \frac{c_j w_j}{\sqrt{k}}\Big|^2\Big)^k d\sigma_N(w_1\cdots w_N)\Big)^{\frac{1}{k}} + |c_{N+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \text{ (usando desig. triangular para } \|\cdot\|_k) \\
\leq & \quad \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2 + |c_{N+1}|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_{j=1}^{N+1} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \text{ (usando la hipótesis inductiva).}
\end{aligned}
$$

Ahora, dado un número real $2 \leq p$ tomamos k un entero tal que $2(k-1) \leq p \leq 2k$, luego

$$
\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p}}\Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big|\sum_{j=1}^{N} c_j w_j\Big|^p d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\int_{\mathbb{T}^N} \Big|\sum_{j=1}^{N} c_j w_j\Big|^{2k} d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2k}} \leq \Big(\sum_{j=1}^{N} |c_j|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.
$$

Esto prueba que la desigualdad en la derecha del enunciado del teorema vale para todo número real $p \geq 1$.

Para ver que vale la desigualdad de la izquierda en el caso que falta ($1 \leq p \leq 2$) definamos $P(w) = \sum_{j=1}^{N} c_j w_j$. Usando la desigualdad de Hölder se obtiene

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^N} |P(w)|^2 d\sigma_N(w) \quad &= \quad \int_{\mathbb{T}^N} |P(w)|^{\frac{2}{3}} |P(w)|^{\frac{4}{3}} d\sigma_N(w) \\
&\leq \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^N} |P(w)| d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{2}{3}} \Big(\int_{\mathbb{T}^N} |P(w)|^4 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{3}} \\
&\leq \quad \Big(\int_{\mathbb{T}^N} |P(w)| d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{2}{3}} \Big(2^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\mathbb{T}^N} |P(w)|^2 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{3}},
\end{aligned}
$$

de donde se desprende

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{T}^N}|P(w)|^2 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{3}} &\leq 2^{\frac{4}{6}}\Big(\int_{\mathbb{T}^N}|P(w)|d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{2}{3}}\\ \Big(\int_{\mathbb{T}^N}|P(w)|^2 d\sigma_N(w)\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\{\int_{\mathbb{T}^N}|P(w)|d\sigma_N(w)\Big).\end{aligned}$$

Por último, debido a la monotonía de $\|\cdot\|_p$ se tiene lo que buscábamos. □

Corolario 4 (Desigualdad de Littlewood)**.** *Dado un operador lineal y acotado $U : l_\infty^n \longrightarrow l_1$, puede pensarse como una matriz de n columnas e infinitas filas que tiene al número*

$$u(j,k) = \langle U(e_k), e_j\rangle,$$

en la fila j y columna k . Se tiene entonces que $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j\geq 1}|u(k,j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}\|U\|$.

Demostración. Por el Teorema 9 se tiene que $\Big(\sum_{j=1}^{M}|u(k,j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq a_1\int_{\mathbb{T}^M}\Big|\sum_{j=1}^{M}u(k,j)w_j\Big|d\sigma_M(w)$, para todo $1 \leq k \leq n$, luego $\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{M}|u(k,j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq a_1\int_{\mathbb{T}^M}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{M}u(k,j)w_j\Big|d\sigma_M(w)$. Observemos que $\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{M}u(k,j)w_j\Big| = \Big\|\Big(\sum_{j=1}^{M}u(k,j)w_j\Big)_{1\leq k\leq n}\Big\|_{l_1^n}$. Por el Teorema de Hahn-Banach y, al ser l_∞ el dual de l_1, existe $\mathbf{b}(w) = (b_1(w),\ldots,b_n(w)) \in l_\infty^n$ de norma 1 tal que

$$\Big\|\Big(\sum_{k=1}^{M}u(k,j)w_k\Big)_{1\leq j\leq n}\Big\|_{l_\infty^n} = \sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{M}u(k,j)w_k\Big)b_j(w)$$

para todo $w \in \mathbb{T}^M$.

Por otro lado si consideramos $P_M : l_1 \to l_1^M$ la proyección a las primeras M coordenadas, y definiendo $U_M = P_M \circ U : l_\infty^n \to l_1^M$, se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{M}u(k,j)w_k\Big)b_j(w) = \langle U_M(b_1(w),\ldots,b_n(w)),(w_1,\ldots,w_M)\rangle$$

y por último

$$\langle U_M(b_1(w),\ldots,b_N(w)),(w_1,\ldots,w_M)\rangle \leq \|U_M\|\|\mathbf{b}\|\|w\| \leq \|U_M\| \leq \|U\|,$$

donde $w = (w_1,\ldots,w_M)$.

Por todo lo dicho recién se tiene que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{M}|u(k,j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} &\leq a_1\int_{\mathbb{T}^M}\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{j=1}^{M}u(k,j)w_j\Big|d\sigma_M(w)\\ &\leq a_1\int_{\mathbb{T}^M}\|U\|d\sigma_M(w)\\ &\leq a_1\|U\|,\end{aligned}$$

para todo M número natural, tendiendo en cuenta que $a_1 \leq \sqrt{2}$y tomando límite con M tendiendo a infinito se concluye que

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k\geq 1}|u(k,j)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq 2^{\frac{1}{2}}\|U\|.$$

□

Antes de finalmente dar la demostración del Teorema 7 será necesario introducir conceptos sobre la teoría de normas en productos tensoriales de espacios de Banach.

Dados $X_1,\dots X_n$ espacios de Banach, podemos considerar su producto tensorial algebraico $X = \otimes_{i=1}^{n}X_i$. Sería bueno poder considerar alguna norma en él y, de esa forma construir un espacio de Banach nuevo mediante su completación, de eso se encarga la teoría de productos tensoriales de espacios de Banach. Existen muchas normas que se pueden definir en el producto tensorial, pero dos de ellas, por muchos motivos, son las más importantes. Estas son la norma proyectiva (π) y la inyectiva (ε). Dado $x \in X = \otimes_{i=1}^{n}X_i$ existen muchas posibles escrituras $x = \sum_{j=1}^{M} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n$, se define la norma proyectiva como

$$\pi(x) = \text{ínf}\Big\{\sum_{j=1}^{M}\|x_j^1\|_{X_1}\cdots\|x_j^n\|_{X_n} : x = \sum_{j=1}^{M}x_j^1\otimes\cdots\otimes x_j^n\Big\}, \tag{2.16}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles escrituras de x en $X = \otimes_{i=1}^{n}X_i$. Llamaremos producto tensorial proyectivo a la completación de X por esta norma y lo notaremos

$$\overline{X}^{\pi} = \otimes_{i=1,\pi}^{n}X_i \;\; o \;\; \Big(X_1\otimes\cdots\otimes X_n,\pi\Big).$$

Por otro lado se define la norma tensorial inyectiva como

$$\varepsilon(x) = \sup\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{M}\varphi_1(x_j^1)\cdots\varphi_n(x_j^n)\Big| : \varphi_1\in B_{X_1^*},\dots,\varphi_n\in B_{X_n^*}\Big\}. \tag{2.17}$$

Al espacio que se obtiene al completar X mediante ε lo llamaremos producto tensorial inyectivo y lo notaremos

$$\overline{X}^{\varepsilon} = \otimes_{i=1,\varepsilon}^{n} X_i \ \ o \ \ \Big(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n, \varepsilon\Big).$$

Puede verse muy sencillamente que $\varepsilon(x) \leq \pi(x)$ para todo $x \in X$.

Lo siguiente es la demostración del Teorema 7.

Demostración. Queremos probar una desigualdad multilineal. La prueba en este caso será por inducción en el número de variables N. El caso $N = 2$ es exactamente la desigualdad de Grothendieck, Teorema 2. Pensemos entonces que N es un número natural mayor o igual que 3 y supongamos que la desigualdad del teorema se cumple para todo natural menor que N. Sea $T : [n]^N \longrightarrow \mathbb{C}$ con norma menor o igua que 1, esto define una contracción

$$t : l_\infty^n \to \Big(l_1^n \otimes \cdots \otimes l_1^n, \varepsilon\Big),$$

donde lo que está a la derecha es el producto tensorial inyectivo de $N-1$ copias de l_1^n. Dicha contracción se define así, dado $a = (a_1, \ldots, a_n) \in l_\infty^n$,

$$t(a) = \sum_{I \in [n]^N} a_{i_1} T[I] e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}.$$

Veamos que efectivamente su norma es menor o igual que 1. Sea $a \in l_\infty^n$, se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t(a)) &= \sup_{\alpha^j \in B_{l_\infty^n}, 2 \leq j \leq N} \Big| \sum_{I \in [n]^N} a_{i_1} T[I] \alpha_{i_2}^2 \cdots \alpha_{i_N}^N \Big| \\
&= \sup_{\alpha^j \in B_{l_\infty^n}, 2 \leq j \leq N} \Big| \sum_{I \in [n]^N} \frac{a_{i_1}}{\|a\|_\infty} T[I] \alpha_{i_2}^2 \cdots \alpha_{i_N}^N \Big| \|a\|_\infty \\
&\leq \varepsilon\Big(\sum_{I \in [n]^N} T[I] e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_N} \Big) \|a\|_\infty \\
&= \|T\|_\infty \|a\|_\infty = \|a\|_\infty.
\end{aligned}$$

Luego se tiene que la norma de t como operador es menor o igual que 1, como queríamos ver.

En el enunciado del teorema se habla de sucesiones $x_1, \ldots, x_N : [n] \longrightarrow B_{l_2}$. Definimos vía x_1, la contracción lineal $X_1 : l_2 \to l_\infty^n$ de forma tal que

$$X_1(a) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{k \geq 1} a_k x_1(j;k)) e_j).$$

Además por la hipótesis inductiva se tiene que, al definir $X_2 \cdots X_N : \otimes_{i=1,\varepsilon}^{N-1} l_1^n \to l_1$ como

$$X_2 \cdots X_N(b) = \sum_{k\geq 1} \Big(\sum_I b(i_2, \ldots, i_N) x_2(i_2; k) \cdots x_N(i_N; k) \Big) e_k,$$

su norma está acotada por $K_G 2^{\frac{N-3}{2}}$. Veamos que $\sum_I T(I)\langle x_1(i_1), \ldots, x_N(i_N)\rangle$ es la traza de la composición

$$l_2 \xrightarrow{X_1} l_\infty^n \xrightarrow{t} \otimes_{i=1,\varepsilon}^{N-1} l_1^n \xrightarrow{X_2 \cdots X_N} l_1 \xrightarrow{i} l_2 .$$

Sea $\phi = i \circ (X_2 \cdots X_N) \circ t \circ X_1$, se tiene que

$$\phi(e_k) = \sum_{j\geq 1} \sum_I T(I) x_1(i_1; k) x_2(i_2; k) \cdots x_N(i_N; k) e_k,$$

por lo tanto $\langle \phi(e_k), e_k\rangle = \sum_{j\geq 1} \sum_I T(I) x_1(i_1; k) x_2(i_2; k) \cdots x_N(i_N; k)$, luego

$$tr(\phi) = \sum_{k\geq 1} \langle \phi(e_k), e_k\rangle = \sum_I T(I)\langle x_1(i_1), \ldots, x_N(i_N)\rangle.$$

Por otro lado si pensamos al operador $U = (X_2 \cdots X_N \circ t)$ como una matriz de n columnas e infinitas filas que en la fila j y columna k tiene al número $u(j, k) = \langle U(e_k), e_j\rangle$ y notamos que $\phi = i \circ U \circ X_1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
|tr(\phi)| &= \Big| \sum_{j\geq 1} \langle U(\sum_{k=1}^n x_1(j; k) e_j), e_k\rangle \Big| \\
&= \Big| \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^n x_1(j; k) \langle U(e_j), e_k\rangle \Big| \\
&\leq \sum_{j\geq 1} \sum_{k=1}^n |x_1(j; k) u(k, j)| \\
&\leq \sum_{k=1}^n \|x_1(j)\|_{l_2} \Big(\sum_{j\geq 1} |u(k, j)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{k=1}^n \Big(\sum_{j\geq 1} |u(k, j)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Del Corolario 4 se deduce $\sum_{j=1}^n \Big(\sum_{k\geq 1} |u(k, j)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}\|U\|$ y como $\|U\| \leq K_G 2^{\frac{N-3}{2}}$, se tiene lo que se quería probar. $\square$

Quedó entonces probado el Teorema 7 (de Tonge), crucial para la prueba del Teorema 8. Por último probemos la caracterización de Davie de Q-álgebras enunciada en el Teorema 5.

2.4.2. Teorema de Davie

A continuación desarrollaremos un poco más de notación y teoría con el objetivo de probar el teorema de Davie que caracteriza a las Q-álgebras. Primero veremos algunos resultados que serán de utilidad sobre formas multilineales y nos interesará sobre todo su aplicación a polinomios. Estos resultados y sus demostraciones fueron extraídos de [8].

Dados dos espacios de Banach X e Y notaremos el espacio de las formas m-lineales y continuas de X en Y como $\mathcal{L}(^m X, Y)$. Dada $A \in \mathcal{L}(^m X, Y)$ diremos que es simétrica si para cualquier permutación $\sigma : [m] \longrightarrow [m]$ ($\sigma \in S_m$) y cualquier $(x_1, \ldots, x_m) \in X^m$ vale que $A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)})$. Al espacio de las formas multilineales contínuas y simétricas lo notaremos $\mathcal{L}^s(^m X, Y)$. Dotado de la norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(^k E,F)} = sup\{\|A(x_1, \ldots, x_k)\|_F : \|x_j\|_E \leq 1 \ \forall \ 1 \leq j \leq m+n\},$$

$\mathcal{L}(^m X, Y)$ es un espacio de Banach y $\mathcal{L}^s(^m X, Y)$ un subespacio propio.

Es interesante notar una caracterización útil de las formas $(m+n)$-lineales de X en Y, como formas m-lineales de X en $\mathcal{L}(^n X, Y)$. Este hecho es sencillo pero de mucho valor en la teoría de formas multilineales, y el isomorfismo que se detalla en la demostración de este hecho será utilizado más adelante a la hora de probar la Fórmula de Leibniz, cuyo corolario será la Fórmula de Polarización.

Teorema 10. *Hay un isomorfismo isométrico de espacios de Banach entre $\mathcal{L}(^{m+n} X, Y)$ y $\mathcal{L}(^m X, \mathcal{L}(^n X, Y))$.*

Demostración. El isomorfismo es el siguiente,

$$\begin{aligned} \phi :\in \mathcal{L}(^{m+n} X, Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(^m X, \mathcal{L}(^n X, Y)) \\ A &\longrightarrow \overline{A}, \end{aligned}$$

con $\overline{A}(x_1, \ldots, x_m)(y_1, \ldots, y_n) = A(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$ y $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X$. Veamos que esto es efectivamente una isometría.

$$\begin{aligned}
\|A\|_{\mathcal{L}(^{m+n}X,Y)} &= \sup_{x_j, y_l B_X} \|A(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)\|_Y \\
&= \sup_{x_j B_X} \|\overline{A}(x_1,\ldots,x_m)\|_{\mathcal{L}(^{n}X,Y)} \\
&= \|\overline{A}\|_{\mathcal{L}(^{m}X,\mathcal{L}(^{n}X,Y))},
\end{aligned}$$

y de allí que ϕ sea una isometría. Además se ve fácilmente que es una biyección, luego se tiene que es un isomorfismo isométrico. $\square$

Observemos que dada $A \in \mathcal{L}(^mX,Y)$ se define $A^s = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(1)})$ y se tiene que A^s pertenece a $\mathcal{L}^s(^mX,Y)$. Esto es así ya que dada $\tau \in S_m$ tenemos

$$\begin{aligned}
A^s(x_{\tau(1)},\ldots,x_{\tau(m)}) &= \sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(\tau(1))},\ldots,x_{\sigma(\tau(1))}) \\
&= \sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(1)}) \text{ya que } \tau S_m = S_m \\
&= A^s(x_1,\ldots,x_m).
\end{aligned}$$

Antes de enunciar la Fórmula de Leibniz será conveniente fijar notación y definir algunos conceptos. Dados X un espacio de Banach, un número natural N y un vector $I = (i_1,\ldots,i_N) \in \mathbb{N}_0^N$, al que llamaremos multi-índice, se definen $|I| = i_1 + \cdots + i_N$ y $I! = i_1!\cdots i_N!$. Además dados $x = (x_1,\ldots,x_N) \in X^N$, un multi-índice I con $|I| = m$ y $T \in \mathcal{L}(^mX,\mathbb{C})$ definimos $Tx_1^{i_1}\cdots x_N^{i_N} = T(x_1,\ldots,x_1,\ldots,x_N,\ldots,x_N)$, donde los primeros i_1 lugares de T están ocupados por x_1, los siguientes i_2 por x_2 y así hasta que los últimos i_N lo están por x_N. Dada $A \in \mathcal{L}(^mX,Y\Big)$ se define

$$A(x_1+\cdots+x_n)^m = A(x_1+\cdots+x_n,\ldots,x_1+\cdots+x_n).$$

Teniendo en cuenta la identificación $\mathcal{L}(^mX,Y) = \mathcal{L}(^{m-1}X,\mathcal{L}(X,Y))$ es fácil ver que vale

$$A(x_1+\cdots+x_n)^{m+1} = A(x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_n)^m.$$

Teorema 11 (Fórmula de Leibniz). *Dada $A \in \mathcal{L}^s({}^mX, Y)$, y para toda N-upla $x_1, \ldots, x_N \in X$ se tiene la Fórmula de Leibniz*

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_I \frac{m!}{I!} A x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}.$$

Donde la suma recorre todos los multi-índices $I = (i_1, \ldots, i_N)$ tales que $|I| = m$.

Demostración. La prueba será por inducción en m. Para $m = 1$ el resultado es claro ya que los únicos índices posibles son aquellos en los cuales solo uno de los $i_j = \delta_{jk}$ (delta de Kronecker)para algún $1 \leq k \leq N$ por lo cual $Ax_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} = Ax_k$ donde k cumple $i_k \neq 0$. Sumando sobre todos los índices de esta forma y debido a la linealidad de A se obtiene lo que asegura el enunciado para $m = 1$ (además en este caso $m! = I! = 1$). En el paso inductivo, asumiendo que la fórmula vale para $m \geq 1$ veremos que vale también para $m + 1$. Dada $A \in \mathcal{L}^s({}^{m+1}X, Y)$, se puede escribir $A(x_1+\cdots+x_N)^{m+1} = A(x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_N)^m$. La forma m-lineal $A(x_1 + \cdots + x_N)$ es simétrica ya que A lo es y dados $y_1, \ldots y_m \in X$ $A(x_1 + \cdots + x_N)(y_1, \ldots, y_m) = A(x_1 + \cdots + x_N, y_1, \ldots, y_m)$. Observemos además que $A(x_1 + \cdots + x_N) = A(x_1) + \cdots + A(x_N)$ ya que, nuevamente, dados $y_1, \ldots y_m \in X$,

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_N)(y_1, \ldots, y_m) &= A(x_1 + \cdots + x_N, y_1, \ldots, y_m) \\ &= A(x_1, y_1, \ldots, y_m) + \cdots + A(x_N, y_1, \ldots, y_m), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a la linealidad de A en la primer coordenada. Luego aplicando la hipotesis inductiva se tiene que

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_N)^{m+1} &= \sum_{|I|=m} \frac{m!}{I!} A(x_1 + \cdots + x_N) x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \\ &= \sum_{|I|=m} \frac{m!}{I!} \sum_{j=1}^{N} A(x_j) x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N} \\ &= \sum_{|I|=m+1} \frac{(m+1)!}{I!} A x_1^{i_1} \cdots x_N^{i_N}. \end{aligned}$$

En la última igual el $(m+1)!$ se debe a que, por ejemplo $A(x_1)x_1^{1_1} \cdots x_N^{i_N} = Ax_1^{1_1+1} \cdots x_N^{i_N}$, y recorriendo todos los posibles multi-índices tales que $|I| = m$ y x_j con $1 \leq j \leq N$ se tiene que cada valor tomado por la suma se repite $m+1$ veces. En suma se tiene lo que se buscaba en el paso inductivo, luego queda probado el teorema. $\square$

El último resultado que enunciaremos puramente de formas multilineales es la famosa fórmula de polarización.

Teorema 12 (Fórmula de Polarización). *Dada $A \in \mathcal{L}^s\left({}^m X, Y\right)$, y para todos $x_0, \ldots, x_m \in X$ se tiene la Fórmula de Polarización*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m).$$

Demostración. Por la Fórmula de Leibinz (Teorema 11) se tiene

$$A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m = \sum_{|I|=m} \frac{m!}{i_0! i_1! \cdots i_m!} \varepsilon_1^{i_1} \cdots \varepsilon_m^{i_m} A x_0^{i_0} \cdots x_m^{i_m}.$$

Luego sumando sobre todas las posibles combinaciones de $\varepsilon_j = \pm 1$ tenemos

$$\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m = m! \sum_{|I|=m} \frac{A x_0^{i_0} \cdots x_m^{i_m}}{i_0! i_1! \cdots i_m!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1}.$$

Observemos que, siempre que $i_{j_0} = 0$ para algún $1 \leq j_0 \leq m$

$$\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} = \sum_{\varepsilon_j = \pm 1, j \neq j_0} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} - \sum_{\varepsilon_j = \pm 1, j \neq j_0} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} = 0,$$

y en otro caso, al ser $i_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq m$ y $|I| = m$ se tiene que i_j debe ser 1 para todos los subíndices; se sigue que $\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} = 2^m$. Tenemos entonces que $\sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} \neq 0$ sólo cuando $I = (0, 1, \ldots, 1)$, en cuyo caso

$$A x_0^{i_0} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m} = A(x_1, \ldots, x_m),$$

por lo cual

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, x_m) &= \frac{1}{2^m} \sum_{|I|=m} \frac{A x_0^{i_0} \cdots x_m^{i_m}}{i_0! i_1! \cdots i_m!} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1^{i_1+1} \cdots \varepsilon_m^{i_m+1} \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Ahora vamos a probar la caracterización intrínseca de lo que es ser una Q-álgebra dada por Davie. Seguiremos aquí el desarrollo planteado en [3]. Recordemos el desarrollo hecho al principio sobre el espacio vectorial C_n^m. Dada $T \in C_n^m$ existe una forma m-lineal asociada a T y su norma viene dada por la norma de esa forma multilineal. Dada una función $T \in C_n^m$ decimos que es simétrica si su forma multilineal asociada es simétrica. Un polinomio $P \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_m]$ de grado d se dice homogéneo si existe $T \in C_m^d$ asociada a él tal que $P = \sum_I T[I] z_{i_1} \cdots z_{i_d}$. Observemos que cualquier polinomio $P \in \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_m]$ de grado d puede escribirse como $P = \sum_{n=0}^{d} P_n$ donde los polinomios P_n son homogéneos de grado n; además cualquier polinomio homogéneo tiene una escritura en la que su función T asociada es simétrica.

Lema 4. *Dada $T \in C_n^m$ simétrica se tiene que*

$$\|T\| \leq (2e)^m sup\{\Big|\sum_I T[I] f(i_1) \cdots f(i_m)\Big| : f \in C_n \textit{ con } \|f\| \leq 1\}$$

Demostración. Dadas $f_1, \ldots, f_m \in C_n$ con $\|f_j\| \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq m$ veamos que vale

$$\sum_I T[I] f_1(i_1) \cdots f_m(i_m) = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_\Omega (-1)^{|\Omega|} \sum_I T[I] g_\Omega(i_1) \cdots g_\Omega(i_m),$$

donde Ω recorre todos los subconjuntos de $[m]$ y $g_\Omega = \sum_{i \in \Omega} f_i \in C_n$. Para eso consideramos la forma multilineal asociada a T, $T_{mult} = \sum_{I \in [n]^N} T[I] e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}$, y la acción de $\mathcal{L}(^m l_\infty^n, \mathbb{C})$ sobre C_n^m de forma tal que $T_{mult}(f_1, \ldots, f_m) = \sum_I T[I] f_1(i_1) \cdots f_m(i_m)$. En primer lugar

$$\begin{aligned}
\tfrac{(-1)^m}{m!} & \sum_\Omega (-1)^{|\Omega|} \sum_I T[I] g_\Omega(i_1) \cdots g_\Omega(i_m) \\
= \quad & \frac{(-1)^m}{m!} \sum_\Omega (-1)^{|\Omega|} \sum_I T[I] \Big(\sum_{j \in \Omega} f_j(i_1)\Big) \cdots \Big(\sum_{j \in \Omega} f_j(i_m)\Big) \\
= \quad & \frac{(-1)^m}{m!} \sum_\Omega (-1)^{|\Omega|} \sum_I T[I] \sum_{j_1 \in \Omega, \ldots, j_1 \in \Omega} f_{j_1}(i_1) \cdots f_{j_m}(i_m) \\
= \quad & \frac{1}{m!} \sum_\Omega (-1)^{m-|\Omega|} \sum_{j_1 \in \Omega, \ldots, j_1 \in \Omega} \sum_I T[I] f_{j_1}(i_1) \cdots f_{j_m}(i_m).
\end{aligned}$$

Observemos que el $(-1)^{|\Omega|}$ puede pensarse como el producto $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m$ donde solo $|\Omega|$ de ellos son -1. Por otra parte, para cada elección de Ω, y cada elección de $i_j \in \Omega$ se ve facilmente que existe un multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ con $|\alpha| = m$ y una elección de $(\varepsilon_j)_{j=1}^m$, tal que

$$\sum_I T[I] f_{j_1}(i_1) \cdots f_{j_m}(i_m) = A f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m},$$

luego

$$(-1)^m \sum_I T[I] f_{j_1}(i_1) \cdots f_{j_m}(i_m) = A f_1^{\alpha_1} \cdots f_m^{\alpha_m} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1}.$$

Por la simetría de T se tiene que hay $\frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_m!}$ elecciones de Ω y luego $i_j \in \Omega$ que corresponden a un mismo multi-índice α y elección de $(\varepsilon_j)_{j=1}^m$. Además, al sumar sobre todas las posibles combinaciones de multi-índices con $|\alpha| = m$ y $(\varepsilon_j)_{j=1}^m$ se obtiene

$$\frac{1}{m!} \sum_\Omega (-1)^{m-|\Omega|} \sum_{j_1 \in \Omega, \dots, j_1 \in \Omega} \sum_I T[I] f_{j_1}(i_1) \cdots f_{j_m}(i_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m} A(\varepsilon_1 f_1 + \cdots + \varepsilon_m f_m),$$

donde el $\frac{1}{2^n}$ aparece por el mismo motivo que aparece en la demostración de la Fórmula de Polarización (Teorema 12) y luego, nuevamente por la Fórmula de Polarización, se sigue que

$$\frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(\varepsilon_1 f_1 + \cdots + \varepsilon_m f_m) = A(f_1, \dots, f_n),$$

obteniéndose entonces la igualdad buscada.

Como Ω recorre todos los subconjuntos de $[m]$ y $\|f_i\| \le 1$, se tiene que $\|g_\Omega\| \le m$. Además al haber $2^m - 1$ posibles elecciones de Ω,

$$\begin{aligned} |\sum_I T[I] f_1(i_1) \cdots f_m(i_m)| &\le \frac{1}{m!} \sum_\Omega \Big| \sum_I T[I] g_\Omega(i_1) \cdots g_\Omega(i_m) \Big| \\ &= \frac{m^m}{m!} \sum_\Omega \Big| \sum_I T[I] \frac{g_\Omega(i_1)}{m} \cdots \frac{g_\Omega(i_m)}{m} \Big| \\ &\le \frac{2^m m^m}{m!} \sup \Big\{ \Big| \sum_I T[I] f(i_1) \cdots f_{i_m} \Big| : f \in C_n \text{ con } \|f\| \le 1 \Big\}, \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que $\frac{2^m m^m}{m!} \le (2e)^m$, se puede concluir el enunciado del lema. □

Después de ese lema técnico veremos a continuación lo que es la clave del teorema de Davie. Se encuentra en el lema siguiente la idea principal, lo que seguirá luego de este será tan solo una modificación de esta idea para llevarla a una forma más manejable.

Lema 5. *$\mathcal{A}$ es una Q-álgebra si y solo si existen números positivos M y δ tales que: $(*)$ siempre que $a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{A}$ con $\|a_i\| \leq \delta$ para todo $1 \leq i \leq p$ y si es P un polinomio complejo en p variables tal que $|P(z_1, \ldots, z_p)| \leq 1$ cuando $|z_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq p$ se tiene que $\|P(a_1, \ldots, a_p)\| \leq M$*

Demostración. Veamos que si $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra se cumple la condición de la derecha. Como $\mathcal{A}$ es una Q-álgebra existe un álgebra uniforme $\mathcal{B}$ y un ideal cerrado I de $\mathcal{B}$ tales que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}/I$, y al ser $\mathcal{B}$ un álgebra uniforme existe un compacto X tal que $\mathcal{B} \subset C(X)$.

Veremos primero que si el isomorfismo entre $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}/I$ fuera isométrico la condición de la derecha se cumple con $M = \delta = 1$. Dadas $a_1, \ldots, a_p \in B_{\mathcal{A}}$, para cualquier $\varepsilon > 0$ existen $f_1, \ldots, f_p \in C(X)$ y $h_1, \ldots, h_p \in I$ tales que $\|f_i - h_i\|_{C(X)} \leq \|a_i\|_{\mathcal{A}} + \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq p$ ($a_i = [f_i]$). Por otro lado, como $sup_{|z_i| \leq 1}|P(z_1, \ldots, z_p)| \leq 1$ y por la continuidad de P por ser un polinomio, dado $\lambda > 0$ hay un $\eta > 0$ tales que

$$sup_{|z_i| \leq 1+\eta}|P(z_1, \ldots, z_p)| \leq 1 + \lambda,$$

luego para cualquier $\lambda > 0$ se puede considerar ε suficientemente chico para que

$$|P(f_1(x) - h_1(x), \ldots, f_p(x) - h_p(x))| \leq 1 + \lambda,$$

para todo $x \in X$. Se tiene entonces que $\|P(f_1 - h_1, \ldots, f_p - h_p)\|_{C(X)} \leq 1 + \lambda$ para cualquier $\lambda > 0$. Además es fácil ver que $[P(f_1, \ldots, f_p)] = P([f_1], \ldots, [f_p])$ usando que I es un ideal y por lo tanto

$$\|P(a_1, \ldots, a_p)\|_{\mathcal{A}} = \|[P(f_1, \ldots, f_p)]\|_{\mathcal{A}} = inf_{h_i \in I}\|P(f_1 - h_1, \ldots, f_p - h_p)\|_{C(X)} \leq 1,$$

que es lo que queríamos ver.

En el caso general en que el isomorfismo no es isometrico existe $\Phi : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{C}$ un isomorfismo de álgebras de Banach donde $\mathcal{C}$ es isométricamente isomorfo a un cociente de un álgebra uniforme por un ideal cerrado. Como Φ es continuo, existe $\delta > 0$ tal que si $a_1, \ldots, a_p \in \delta B_{\mathcal{A}}$ entonces $\Phi(a_1), \ldots, \Phi(a_p) \in B_{\mathcal{C}}$ y por ser isomorfismo dados $a_1, \ldots, a_p \in \delta B_{\mathcal{A}}$ existen $c_1, \ldots, c_p \in \mathcal{C}$ con $a_i = \Phi^{-1}(c_i)$. Sea n el grado del polinomio P y sean $a_1, \ldots, a_p \in \delta B_{\mathcal{A}}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
\|P(a_1, \ldots, a_p)\|_{\mathcal{A}} &= \|P(\Phi(c_1), \ldots, \Phi(c_p))\|_{\mathcal{A}} \\
&\leq \|\Phi\|^n \|P(c_1, \ldots, c_p)\|_{\mathcal{C}} \leq \|\Phi\|^n,
\end{aligned}$$

y tenemos lo que queríamos con $M = \|\Phi\|^n$.

Para la vuelta, sean $\Lambda = \{a \in \mathcal{A} : \|a\| \leq \delta\}$ y $X = D^\Lambda$ el producto cartesiano de D (el disco unitario en $\mathbb{C}$), con la topología producto. Sea B_0 el álgebra de polinomios sin término constante en las funciones coordenadas $\{z_a : a \in \Lambda\}$ y B su clausura en $C(X)$ (dotado con la norma de la convergencia uniforme). Sea $T_0 : B_0 \to \mathcal{A}$ dado por la extensión lineal y multiplicativa de definir $T_0(z_a) = a$ para todo $a \in \mathcal{A}$, por la condición de la derecha se tiene que T es acotado, luego puede extenderse por continuidad a B. Claramente la extensión $T : B \to \mathcal{A}$ es suryectiva (por serlo T_0), por lo tanto $\mathcal{A}$ es isomorfo como álgebra de Banach a $B/Ker(T)$. □

El lema que sigue es de naturaleza más técnica y, aunque no por eso menos valioso, busca enunciar lo anterior a partir de una condición más fácilmente tratable.

Lema 6. *Suponiendo que dados $K > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $\|x_i\| \leq 1$ y $T \in C_n^m$ con $\|T\| \leq 1$ se sigue que*

$$\Big\| \sum_I T[I] x_{i_1} \cdots x_{i_m} \Big\| \leq K^m,$$

luego vale $(*)$ del lema anterior con $M = 1$ y $\delta = (4eK)^{-1}$.

Demostración. Sean $x_1, \dots, x_n \in A$ y P un polinomio de grado d como en $(*)$. Escribiendo $P = \sum_{k=1}^d P_k$ donde $P_k = \sum_I T_k[I] z_{i_1} \cdots z_{i_m}$ es un polinomio homogéneo de grado n y $T_k \in C_n^k$ es simétrica.

Como $|P(z_1, \dots, z_n)| \leq 1$ cuando $|z_i| \leq 1$ veamos que los P_k cumplen lo mismo. Fijados $|z_i| \leq 1$ consideremos la función $\mathbb{C}$ en A dada por $Q(w) = P(wz_1, \dots, wz_n)$. Vía la Fórmula integral de Cauchy para la derivada j-ésima se tiene

$$\begin{aligned} |Q^{(j)}(0)| &= \Big| \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{Q(e^{i\theta})}{(e^{i\theta})^{j+1}} d\theta \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(e^{i\theta})| d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n)| d\theta \leq 1 \quad (\text{porque } |e^{i\theta} z_l|). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} Q^{(j)}(w) &= \sum_{k=1}^{d} \Big(P_k(wz_1, \ldots, wz_n)\Big)^{(j)} \\ &= \sum_{k=1}^{d} \Big(w^k P_k(z_1, \ldots, z_n)\Big)^{(j)} \text{ (por la homogeneidad de } P_n) \\ &= \sum_{k=j}^{d} k \cdots (k-j+1) w^{k-j} P_k(z_1, \ldots, z_n), \end{aligned}$$

evaluando en $w = 0$ y tomando valor absoluto se tiene $|\binom{d}{j} P_j(z_1, \ldots, z_n)| = |Q^{(j)}(0)| \leq 1$. Por lo tanto $|P_j(z_1, \ldots, z_n)| \leq (j!)^{-1} \leq 1$.

Ahora, por el Lema 4

$$\begin{aligned} \|T_k\| &\leq (2e)^k sup\{\Big|\sum_I T_k[I] f(i_1) \cdots f(i_k)\Big| : f \in C_n \|f\| \leq 1\} \\ &\leq (2e)^k (\text{porque } \Big|\sum_I T_k[I] f(i_1) \cdots f(i_k)\Big| \leq 1), \end{aligned}$$

por lo tanto $\left\|\frac{T_k}{(2e)^k}\right\| \leq 1$. Por hipótesis, si $\|x_i\| \leq 1$ se tiene $\left\|\sum_I \frac{T_k}{(2e)^k}[I] x_{i_1} \cdots x_{i_k}\right\| \leq 1$ y luego si $\|x_i\| \leq \delta = (4eK)^{-1}$ entonces $\sum_I T_k[I] x_{i_1} \cdots x_{i_k} \leq \left(\frac{2eK}{2eK}\right)^k \leq \frac{1}{2^k}$. Por lo cual se sigue que

$$\|P(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \sum_{k=1}^{d} \|P_k(x_1, \ldots, x_n)\| \leq 1,$$

lo cual nos permite concluir que vale $(*)$ con $M = 1$ y $\delta = (4eK)^{-1}$, como buscábamos. □

Por último daremos la demostración del Teorema de Davie 4.

Demostración del Teorema 4. Que (2) implica (1) es consecuencia directa del Lema 5 y el Lema 6 . Por otro lado que (1) implica (2) se debe al siguiente argumento. Dada $T \in C_n^m$ con $\|T\| \leq 1$, el polinomio asociado

$$P(z_1, \ldots, z_n) = \sum_I T[I] z_{i_1} \cdots z_{i_m},$$

cumple que $|P(z_1, \ldots, z_n)| \leq 1$ siempre que $|z_i| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Al ser $\mathcal{A}$ una Q-álgebra, por el Lema 5, se tiene que existen $\delta, M > 0$ tales que si $\|x_i\|$ para todo $1 \leq i \leq n$

entonces $\|P(x_1, \ldots, x_n)\| \leq M$. Al ser P un polinomio homogéneo por su definición, dados $\|x_i\| \leq 1$

$$\begin{aligned} \|P(x_1, \ldots, x_n)\| &= \delta^n \|P(\frac{x_1}{\delta}, \ldots, \frac{x_n}{\delta})\| \\ &\leq \delta^n M = (\delta M^{\frac{1}{n}})^n, \end{aligned}$$

y tomando $K = \delta M^{\frac{1}{n}}$ se tiene lo buscado. □

El Teorema 5 de Davie es corolario del teorema recién demostrado.

Capítulo 3

Violaciones acotadas de estados GHZ

Los estados GHZ son estados cuánticos de la forma $\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \cdots \otimes e_i$ y se deben a Greenberger, Horne y Zeilinger. Dichos estados son un claro ejemplo de estados cuánticos entrelazados que involucran al menos tres subsistemas. Históricamente permitieron mostrar propiedades extremadamente no clásicas. Se sabe que las violaciones máximales a desigualdades de Bell multipartitas con dos observables dicotómicos por observador se alcanzan para estados GHZ [7, 16, 18].

El objetivo de este capítulo será probar que los estados cuánticos GHZ inducen violaciones acotadas mediante técnicas de productos tensoriales de espacios de Banach. Si bien los estados GHZ son estados diagonales y en el capítulo anterior hemos visto que las violaciones para cualquier estados diagonal están acotadas, aquí veremos un enfoque totalmente diferente en la forma de atacar este problema. Hacemos hincapié en la importancia de las técnica aquí desarrolladas y no tanto en el resultado que será corolario del capítulo anterior. Asimismo veremos que estas técnicas son las que permiten probar que S_p dotado del producto de Schur es una Q-álgebra para todo $1 \leq p \leq \infty$, culminando la prueba que comenzó en el capítulo anterior con la muestra de que S_∞ lo es.

Teorema 13. *Dado un estado GHZ* $\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \cdots \otimes e_i \in \otimes_{i=1}^{k} \mathbb{R}^N$ *la mayor violación inducida por* ψ *a una desigualdad de Bell para observadores dicotómicos está acotada por* $K_G^{k-1} 2^k$.

En el Teorema 13 el estado $\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes \cdots \otimes e_i$ pertenece a $\otimes_{i=1}^{k} l_2^N$, a continuación seguiremos el tratamiento que se la da a este problema en [10]. Allí, debido a una dificultad excesiva en la escritura de la demostración (que se verá más adelante), se encuentra la prueba de este hecho para el caso de $\psi = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i \otimes e_i \in \otimes_{i=1}^{3} l_2^N$. Sin embargo, la idea de la prueba es la misma para cualquier valor de $k \geq 3$.

Para la demostración del teorema serán necesarios algunos resultado de las teorías de formas multilineales y operadores en productos tensoriales normados que en lo que sigue enunciaremos y demostraremos.

3.1. Espacios $\mathcal{L}_p$ y λ-inyectivos

Existen propiedades de los espacios de Banach de dimensión infinita que solo dependen de sus subespacios de dimensión finita. A estas propiedades se las conoce con el nombre de propiedades *locales*. A continuación veremos algunas definiciones y propiedades que explotan esta nociones *locales* de los espacio de Banach.

Diremos que un espacio de Banach X es $\mathcal{L}_{p,\lambda}$, con $1 \leq p \leq \infty$, si para cierto número $\lambda \geq 1$ se tiene que cualquier subespacio de dimensión finita $M \subset X$ esté contenido en otro subespacio $N \subset X$ de dimensión n y existe un isomorfismo lineal $T : N \longrightarrow l_p^n$ cumpliendo que

$$\|T\|\|T^{-1}\| < \lambda.$$

Diremos que X es un espacio $\mathcal{L}_p$ si es $\mathcal{L}_{p,\lambda}$ para algún valor de $\lambda \geq 1$.

Por otra parte, diremos que un espacio de Banach X es λ-inyectivo con $\lambda \geq 1$ si, dado otro espacio de Banach E, un superespacio $F \supset E$ y un operador lineal $\phi : E \longrightarrow X$ existe una extensión $\tilde{\phi} : F \longrightarrow X$ tal que $\|\tilde{\phi}\| \leq \lambda\|\phi\|$. Situación que se grafica en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[dr, dashed, "\tilde{\phi}"] & \\ E \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi"'] & X. \end{tikzcd}$$

Veamos que l_∞^k es 1-inyectivo, esto será una concecuencia directa del siguiente lema.

Lema 7. *Si X es un espacio de Banach y $T : X \longrightarrow l_\infty^k$ un operador, luego para todo superespacio de Banach $Y \supset X$ existe una extensión $\overline{T} : Y \longrightarrow l_\infty^k$ tal que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demostración. Dado un operador $T : X \longrightarrow l_\infty^k$ podemos pensar a $T = (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ donde $\varphi_j : X \longrightarrow \mathbb{K}$ para todo $1 \leq j \leq k$ y además $\|T\| = \max\limits_{1\leq j\leq k} \|\varphi_j\|$, ya que

$$\begin{aligned}
\|T\| &= \sup_{x\in B_X} \|(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x))\|_\infty \\
&= \sup_{x\in B_X} \sup_{1\leq j\leq k} |\varphi_1(x)| \\
&= \sup_{1\leq j\leq k} \sup_{x\in B_X} |\varphi_1(x)| \\
&= \max_{1\leq j\leq k} \|\varphi_j\|.
\end{aligned}$$

Teniendo $Y \supset X$ un superespacio, debido al teorema de Hahn-Banach se tiene que para toda $1 \leq j \leq k$ existe una extensión $\tilde{\varphi}_j$ de φ_j que conserva la norma, luego definiendo $\tilde{T} = (\tilde{\varphi}_1, \ldots, \tilde{\varphi}_k)$ es claro que $\tilde{T}$ extiende a T y además conserva la norma. $\square$

Es fácil generalizar el argumento para probar que $l_\infty(\Gamma)$ es 1-inyectivo para cualquier conjunto de índices Γ, donde

$$l_\infty(\Gamma) := \{(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} : x_\gamma \in \mathbb{R},\ \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| \leq \infty\},$$

dotado de la norma

$$\|(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|.$$

Observemos que $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

Teorema 14. *Para cualquier familia de índices Γ y para todo $\varepsilon > 0$, $l_\infty(\Gamma)$ es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,1+\varepsilon}$.*

No incluiremos la demostración del Teorema 14. Este hecho puede deducirse de [4, Teorema 3.2].

3.2. Multilineales extensibles vs. producto tensorial extensible

En esta sección estudiaremos la relación que existe entre las formas multilineales extensibles y el producto tensorial extensible. A partir de este estudio lograremos una cota para desigualdades de Bell en el caso N-partito que depende tanto de N (número de observadores), como de las dimensiones de los espacios de salida de la multilineal que se utilice (cantidad de observables que cada observador utiliza). Nos referimos al Teorema 19, que daremos al final de esta sección.

Un concepto importante que proviene de la teoría de productos tensoriales normados es la norma tensorial extensible. Dado $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ esta se define como

$$\alpha_{ext}(u) = \inf \Big\{ \pi(u; Y_1 \otimes \cdots \otimes Y_N) : X_j \subset Y_j \Big\}.$$

Es usual considerar la inclusión de un espacio de Banach X en $l_\infty(B_{X^*})$ vía la isometría

$$\begin{aligned} \iota : X &\longrightarrow l_\infty(B_{X^*}) \\ x &\longrightarrow (\varphi(x))_{\varphi \in B_{X^*}}, \end{aligned}$$

ya que, como se verá a continuación, es útil a menudo incluir a un espacio de Banach en otro inyectivo. Un claro ejemplo de esto es la demostración del siguiente teorema, que devela que esencialmente la norma extensible es la norma proyectiva vía esa inclusión.

Teorema 15. *Dado un producto tensorial de espacios de Banach $\otimes_{i=1}^N X_i$ y un elemento u en él, se puede calcular su norma tensorial extensible como*

$$\alpha_{ext}(u) = \pi(u; \otimes_{i=1}^N l_\infty(B_{X_i^*})).$$

Daremos la demostración del siguiente teorema que es más general.

Teorema 16. *Sea $\otimes_{i=1}^N X_j$ un producto tensorial de espacios de Banach tal que, X_i está incluido isométricamente en Z_i inyectivo para todo $1 \leq i \leq N$. Dado un elemento u en él, se puede calcular su norma tensorial extensible como*

$$\alpha_{ext}(u) = \pi(u; \otimes_{i=1}^N Z_i).$$

Demostración. En primer lugar, como $X_i \subset Z_i$ para todo $1 \leq i \leq N$, es claro por la definición de la norma tensorial extensible que dado $u \in \otimes_{i_1}^N X_i$

$$\alpha_{ext}(u) \leq \pi(u; \otimes_{i=1}^N Z_i).$$

Para ver la otra desigualdad, tomemos $Y_i \supset X_i$ y consideremos $\iota_j : X_j \longrightarrow Z_j$ la inclusión, debido a la 1-inyectividad de Z_j se tiene

$$\begin{tikzcd}
Y_j \arrow[dr, dashed, "\tilde{\iota_j}"] & \\
X_j \arrow[u, hook] \arrow[r, "\iota_j"'] & Z_j,
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\iota_j}$ extiende a ι_j conservando la norma. Luego dado $u \in \otimes_{i=1}^N X_j$, y llamando

$$\beta : \otimes_{i=1}^N X_i \longrightarrow \otimes_{i=1}^N Y_i,$$

a la inclusión se sigue que

$$\begin{aligned}
\pi\Big(u; \otimes_{i=1}^N Z_j\Big) &= \pi\Big((\iota_1 \otimes \cdots \otimes \iota_N)(u); \otimes_{i=1}^N Z_j\Big) \\
&= \pi\Big(((\tilde{\iota_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\iota_N}) \circ \beta)(u); \otimes_{i=1}^N Z_j\Big) \\
&\leq \|(\tilde{\iota_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{\iota_N})\| \pi(\beta(u); \otimes_{i=1}^N Y_i) \\
&\leq \|\tilde{\iota_1}\| \cdots \|\tilde{\iota_N}\| \pi(u; \otimes_{i=1}^N Y_i) \\
&\leq \pi(u; \otimes_{i=1}^N Y_i).
\end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre todos los superespacios posibles $Y_i \supset X_i$ se tiene que para todo elemento $u \in \otimes_{i=1}^N X_i$

$$\pi(u; \otimes_{i=1}^N Z_j) \leq \alpha_{ext}(u).$$

Con esto se conlcuye lo que buscabamos. $\square$

De esta propiedad de la norma extensible se deriva otra de gran importancia, la norma extensible respeta subespacios.

Corolario 5. *Dados $X_i \subset Y_i$ espacios Banach con esta inclusión isometrica para todo $1 \leq i \leq n$, se tiene entonces que la inclusión $\otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n X_i \subset \otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n Y_i$ es también una isometría.*

Demostración. Observemos que gracias a la inclusión isométrica $X_i \subset Y_i$ y al teorema de Hahn-Banach todo funcional $\varphi \in X_i^*$ se extiende a otra $\tilde{\varphi} \in Y_i^*$ con igual norma. Esto da lugar a la inclusión isométrica $l_\infty(B_{X_i^*}) \subset l_\infty(B_{Y_i^*})$. Como $l_\infty(B_{Y_i^*})$ es inyectivo, gracias al Teorema 16 tendremos que, dado $u \in \otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n X_i$,

$$\alpha_{ext}(u; \otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n X_i) = \pi(u; \otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n l_\infty(B_{Y_i^*})) = \alpha_{ext}(u; \otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^n Y_i),$$

teniendo así lo que buscábamos probar. □

No podremos decir lo mismo de la norma proyectiva, esta en general no respeta subespacios, sin embargo a continuación veremos otra propiedad que esta norma si tiene. El producto tensorial proyectivo es en esencia *local*.

Teorema 17. *Dados $X_1, \ldots, X_n$ espacios de Banach, para todo x en el producto tensorial algebraico $\otimes_{i=1}^n X_i$ vale que*

$$\pi(x, \otimes_{i=1}^n X_i) = \text{ínf}\, \pi(x, \otimes_{i=1}^n M_i),$$

donde el ínfimo es tomado sobre todos los subespacios de dimensión finita $M_i \subset X_i$ tales que $x \in \otimes_{i=1}^n M_i$.

Demostración. En primer lugar es claro que para toda n-upla de subespacios $M_i \subset X_i$ tales que $x \in \otimes_{i=1}^n M_i$, vale que

$$\pi(x, \otimes_{i=1}^n X_i) \leq \pi(x, \otimes_{i=1}^n M_i),$$

ya que el conjunto de escrituras de x en $\otimes_{i=1}^n M_i$ contiene al conjuto de escrituras de x en $\pi(x, \otimes_{i=1}^n M_i)$, y como la norma π es un ínfimo sobre ese conjunto se sigue la desigualdad. Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$ existe cierta escritura $x = \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n \in$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \|x_j^1\|_{X_i} \cdots \|x_j^n\|_{X_n} \leq \pi(x, \otimes_{i=1}^n X_i) + \varepsilon.$$

Considerando $M_i = \langle x_j^i : 1 \leq j \leq N(\varepsilon) \rangle$, tenemos que $x \in M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$ que es un subespacio de dimensión finita de $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Además

$$\pi(x, \otimes_{i=1}^n M_i) \leq \sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} \|x_j^1\|_{X_i} \cdots \|x_j^n\|_{X_n},$$

ya que $\sum_{j=1}^{N(\varepsilon)} x_j^1 \otimes \cdots \otimes x_j^n$ es una escritura de x en $\otimes_{i=1}^n M_i$. De esta última observación se deduce finalmente el enunciado del teorema. $\square$

Se dice que el producto tensorial proyectivo es finitamente generado para resumir el enunciado del Teorema 17.

La siguiente es una caracterización interesante de la norma tensorial extensible en un producto tensorial $\otimes_{i=1}^N X_i$ que la relaciona con los operadores de norma uno de X_i en l_∞^k. Esta caracterización saca a relucir la relación entre la norma extensible y la inyectividad de los espacios l_∞^k, propiedad que explotaremos más tarde en la sección.

Lema 8. *Dados $X_1, \ldots, X_N$ espacios de Banach y $u \in X_1 \otimes \cdots \otimes X_N$ se tiene que*

$$\alpha_{ext}(u) = \sup \Big| \sum_{I \in [k]^N} M_I(a_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes a_{i_N}^N)(u) \Big|,$$

donde el supremo es tomado sobre todas las sucesiones $(a_{i_j}^j)_{i_j=1}^k \subset B_{X_j^*}$ con $1 \leq j \leq N$ y $(M_I)_{I \in [k]^N} \in B_{\otimes_{i=1,\varepsilon}^n l_1^k}$.

Demostración. En primer lugar veamos que

$$\alpha_{ext}(u) = \sup \Big\{ \pi\Big((a_1 \otimes \cdots \otimes a_N)(u); \otimes_{j=1}^N l_\infty^k \Big) \Big\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los operadores $a_j : X_j \longrightarrow l_\infty^k$ de norma menor o igual que 1 y $k \in \mathbb{N}$. Por un lado, dadas $a_j : X_j \longrightarrow l_\infty^k$ con $\|a_j\| \leq 1$ para cada j y, dado cualquier superespacio $Y_j \supset X_j$, debido a la 1-inyectividad de l_∞^k se tiene

$$\begin{tikzcd} Y_j \arrow[dr, dashed, "\tilde{a_j}"] & \\ X_j \arrow[u, hook] \arrow[r, "a_j"'] & l_\infty^k, \end{tikzcd}$$

con $\|\tilde{a_j}\| = \|a_j\|$, por lo cual, como en la demostración anterior, tendremos que

$$\pi\Big((a_1 \otimes \cdots \otimes a_N)(u); \otimes_{i=1}^N l_\infty^k \Big) \leq \|(\tilde{a_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_N})\| \pi\Big(u; \otimes_{i=1}^N Y_j \Big),$$

luego usando que $\|(\tilde{a_1} \otimes \cdots \otimes \tilde{a_N})\| \leq 1$ se sigue entonces

$$\pi\Big((a_1 \otimes \cdots \otimes a_N)(u); \otimes_{i=1}^N l_\infty^k \Big) \leq \pi\Big(u; \otimes_{i=1}^N Y_j \Big),$$

y tomando supremo sobre los operadores a_j de norma menor o igual que 1 e ínfimo sobre todos los superespacios Y_j se deduce la desigualdad

$$\sup\left\{\pi\Big((a_1\otimes\cdots\otimes a_N)(u);\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^k\Big)\right\}\leq \alpha_{ext}(u).$$

Por el otro lado por el Teorema 15 basta ver que

$$\pi\Big(u;\otimes_{i=1}^N l_\infty(B_{X_i^*})\Big)\leq \sup\left\{\pi\Big((a_1\otimes\cdots\otimes a_N)(u);\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^k\Big)\right\}.$$

Como la norma proyectiva es finitamente generada se tiene que

$$\pi\Big(u;\otimes_{i=1}^N l_\infty(B_{X_i^*})\Big)=\inf_{u\in\ \otimes_{i=1}^N E_i}\pi\Big(u;\otimes_{i=1}^N E_i\Big),$$

donde $E_i\subset l_\infty(B_{X_i^*})$ de dimensión finita. Como $l_\infty(B_{X_i^*})$ es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ para todo $\lambda>1$, dados $\varepsilon>0$ y $E_i\subset l_\infty(B_{X_i^*})$, de dimensión finita, existen y $E_i\subset F_i$ con $dim(F_i)=k_i$ y $T_i:F_i\longrightarrow l_\infty^{k_i}$ un isomorfismo, tales que $\|T_i^{-1}\|\|T_i\|\leq 1+\varepsilon$. Podemos considerar, sin perdida de generalidad, que $\|T_i\|\leq 1$ para todo $1\leq i\leq N$, de lo que se sigue

$$\begin{aligned}
\pi\Big(u;\otimes_{i=1}^N l_\infty(B_{X_i^*})\Big) &\leq \pi\Big(u;\otimes_{i=1}^N F_i\Big)\\
&= \pi\Big(((T_1^{-1}\otimes\cdots\otimes T_N^{-1})\circ(T_1\otimes\cdots\otimes T_N))(u);\otimes_{i=1}^N F_i\Big)\\
&\leq \Big(\prod_{i=1}^N\|T_i^{-1}\Big)\|\pi\Big((T_1\otimes\cdots\otimes T_N)(u);\otimes_{i=1}^N l_\infty^{k_i}\Big),\\
&\leq (1+\varepsilon)^N\pi\Big((T_1\otimes\cdots\otimes T_N)(u);\otimes_{i=1}^N l_\infty^{k_i}\Big),
\end{aligned}$$

por lo tanto, haciendo tender ε a 0

$$\alpha_{ext}(u)\leq \sup\left\{\pi\Big((a_1\otimes\cdots\otimes a_N)(u);\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^{k_i}\right\}.$$

Es fácil ver que, debido a la inyectividad de l_∞^k para todo $k\in\mathbb{N}$, es lo mismo tomar el supremo sobre todos los operadores $a_i:X_i\longrightarrow l_\infty^{k_i}$ con k_i cualquiera que tomar el supremo sobre todos los operadores cuyo lugar de llegada sea l_∞^k, o sea $k_i=k$ para todo $1\leq i\leq N$.

Como $\mathcal{L}(X_j,l_\infty^k)=l_\infty^k(X_j^*)$, entonces $a_j=(A_{j_1}^j,\ldots,A_{j_k}^j)\in\mathcal{L}(X_j,l_\infty^k)$ y luego, llamando

$\mathcal{B} = B_{\left(\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^k\right)^*}$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\|(a_1 \times \cdots \times a_N)(u)\|_{\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^k} = \\
&= \| \sum_{I \in [k]^N} (A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N)(u) e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N} \|_{\otimes_{j=1,\pi}^N l_\infty^k} \\
&= \sup_{T \in \mathcal{B}} | \sum_{I \in [k]^N} (A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N)(u) T(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N}) |,
\end{aligned}$$

tomando entonces $M_{i_1,\ldots,i_N} = T(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_N})$ tenemos lo que queríamos demostrar. □

Será de crucial importancia para entender las violaciones a desigualdades de Bell inducidas por estados GHZ el concepto de forma multilineal extensible. En general para formas multilineales no se tiene un teorema de extensión como el de Hanh-Banach para funcionales lineales, aquellas forma multilineales para las que siempre existen estas extensiones se llaman extensibles. Una forma N-lineal $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para cualquier elección de superespacios $X_i \subset Y_i$ existe una extensión N-lineal y contínua $\overline{T} : Y_1 \times \cdots \times Y_N \longrightarrow \mathbb{C}$ se llama extensible. Se define la norma extensible de T como

$$\|T\|_{ext} = \sup_{Y_i} \inf_{\overline{T}} \|\overline{T}\|,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los posibles superespacios Y_i y, fijados los superespacios, el ínfimo sobre todas las posibles extensiones de T en el producto cartesiano de ellos. Llamemos $\mathcal{L}_{ext}(X_1, \ldots, X_N; \mathbb{C})$ al subespacio de las formas multilineales extensibles que salen de $X_1 \times \cdots \times X_N$ y llegan a $\mathbb{C}$.

Observemos que siempre que una forma multilineal sea extensible tendrá norma extensible finita. De hecho, si $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{C}$ es extensible se extiende de forma contínua a $l_\infty(B_{X_1^*}) \times \cdots l_\infty(B_{X_N^*})$. Ahora, debido a la 1-inyectividad de $l_\infty(B_{X_i^*})$, para cualquier superespacio de X_i existirán extensiones de norma igual a cualquier extensión a $l_\infty(B_{X_1^*}) \times \cdots l_\infty(B_{X_N^*})$. Tendremos entonces que $\|T\|_{ext}$ será menor que la norma de cualquiera de estas, más aún será igual al ínfimo de las normas de esas extensiones.

Teorema 18. *Dados X_j espacios de Banach vale que* $(\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^* = \mathcal{L}_{ext}(X_1, \ldots, X_N; \mathbb{C})$

Demostración. Consideremos

$$F : (\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^* \longrightarrow \mathcal{L}_{ext}(X_1, \ldots, X_N; \mathbb{C}),$$

tal que $F(\varphi)(x_1,\ldots,x_N) = \varphi(x_1\otimes\cdots\otimes x_N)$ y veamos a continuación que T es un isomorfismo isométrico.

Veamos primero que está bien definido, o sea que, dada $\varphi \in (\otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j)^*$, $F(\varphi)$ es efectivamente una forma N-lineal extensible. En primer lugar es claro que $F(\varphi)$ es una N-forma lineal para cualquier φ. Por otro lado, dada φ y dados $Y_j \supset X_j$ superespacios, gracias a que la norma extensible respeta subespacios (Corolario 5) se tiene la inclusión isométrica $\otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j \subset \otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} Y_j$, y luego debido al teorema de Hahn-Banach existe $\tilde{\varphi} \in (\otimes^N_{j,\alpha_{ext}} Y_j)^*$ una extensión de φ que conserva la norma. Luego, $F(\tilde{\varphi}) \in \mathcal{L}(Y_1,\ldots,Y_N;\mathbb{C})$ definida como

$$F(\tilde{\varphi})(y_1,\ldots,y_N) = \tilde{\varphi}(y_1\otimes\cdots\otimes y_N),$$

es una extensión de $F(\varphi)$ (podemos pensar que F se define sobre el dual de cualquier producto tensorial de espacios de Banach). Además

$$\begin{aligned} \|F(\tilde{\varphi})\| &= \sup_{\|y_j\|\le 1} |\widetilde{F(\varphi)}(y_1,\ldots,y_N)| \\ &= \sup_{\|y_j\|\le 1} |\tilde{\varphi}(y_1\otimes\cdots\otimes y_N)| \\ &\le \sup_{\alpha_{ext}(y_1\otimes\cdots\otimes y_N)\le 1} |\tilde{\varphi}(y_1\otimes\cdots\otimes y_N)| = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Tendremos entonces que para cualquier N-upla de superespacios $Y_j \supset X_j$, el ínfimo sobre la norma de las extensiones posible de $F(\varphi)$ allí, será siempre menor o igual que $\|\varphi\|$. Se sigue de esto que

$$\|F(\varphi)\|_{ext} \le \|\varphi\|_{(\otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j)^*}. \tag{3.1}$$

Esto permite decir que $F(\varphi)$ es una N-forma lineal extensible para todo funcional de $(\otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j)^*$, al mismo tiempo nos da una desigualdad importante a la hora de probar que F es una isometría.

Observemos que F es biyectiva ya que podemos definir su inversa como

$$L : \mathcal{L}_{ext}(X_1,\ldots,X_N;\mathbb{C}) \longrightarrow (\otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j)^*,$$

donde, dada una N-forma T y un tensor $u \in \otimes^N_{j=1,\alpha_{ext}} X_j$ con representación

$$u = \sum_{i=1}^{r} x_i^1 \otimes\cdots\otimes x_i^N$$

$$L(T)(u) = \sum_{i=1}^{r} T(x_i^1, \dots, x_i^N).$$

Es fácil corroborar que $L = F^{-1}$. Notemos también que $L(T) \in (\otimes_{j=1}^N X_j)^*$ debido a la propiedad universal del producto tensorial. Hace falta ver que L esta bien definida, o sea, que dada una N-forma extensible T, $\|L(T)\|_{(\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^*} < \infty$. Veamoslo: dados $Y_j \supset X_j$ superespacios y dado $\varepsilon > 0$, existe una extensión $\overline{T} \in \mathcal{L}(Y_1, \dots, Y_N; \mathbb{C})$ con

$$\|\overline{T}\|_\infty \leq \|T\|_{ext} + \varepsilon,$$

luego dado $u \in \otimes_{j=1}^N X_j$ tenemos

$$\begin{aligned} |L(T)(u)| &= |L(\overline{T})(u)| \\ &\leq \|\overline{T}\|_\infty \pi(u; \otimes_{j=1}^N Y_j) \\ &\leq (\|T\|_{ext} + \varepsilon)\pi(u; \otimes_{j=1}^N Y_j), \end{aligned}$$

con lo cual, tomando ínfimo sobre los esapcios Y_j tendremos

$$|L(T)(u)| \leq (\|T\|_{ext} + \varepsilon)\alpha_{ext}(u; \otimes_{j=1}^N X_j).$$

Haciendo tender ε a 0 se deduce que

$$\|L(T)\|_{(\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^*} \leq \|T\|_{ext}. \tag{3.2}$$

Se tiene entonces la buena definición de L, y además a partir de (3.2) y componiendo con T podemos decir que

$$\|\varphi\|_{(\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^*} \leq \|F(\varphi)\|_{ext},$$

para toda $\varphi \in (\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N X_j)^*$. Esto sumado a (3.1), termina por concluir que F es una isometría. $\square$

El siguiente teorema da una cota para las violaciones inducidas a desigualdades de Bell por estados cuánticos N-partitos y cualquier número de observables dicotómicos. Observemos que la cota depende tanto de N como de la cantidad de observables (que se traduce en la dimensión de los espacios $S_1^{D_j}$ del enunciado).

Recordemos que el dual del espacio de clases de traza es el espacio de los operadores acotados vía la dualidad dada por la traza como se especifica en 2.2.

Teorema 19. *Sea ρ un operador de densidad N-partito, la violación máxima posible dada por ρ a una desigualdad de Bell para un número arbitrario de observables dicotómicos esta acotada superiormente por*

$$2^N \|\rho\|_{\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N S_1^{D_j}}.$$

Demostración. Sea $T : l_\infty^{D_1} \times \cdots \times l_\infty^{D_N} \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma N-lineal real y sean $-Id \leq A_{i_1}, \ldots, A_{i_N} \leq Id$ observables para cada $1 \leq j \leq N$ y $1 \leq i_j \leq D_j$. Observemos que $\rho = \rho_1 \otimes \cdots \otimes \rho_N$, con cada ρ_i operador de densidad, luego mediante la dualidad dada por la traza tenemos que

$$\begin{aligned} Tr(\rho A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N}) &= Tr(A_{i_1}\rho_1) \cdots Tr(A_{i_N}\rho_N) \\ &= A_{i_1}\rho_1 \cdots A_{i_N}\rho_N \\ &= (A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N})(\rho_1 \otimes \rho_N), \end{aligned}$$

donde el lado derecho de la igualdad no se trata de una composición de operadores sino de la aplicación $(A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N})$ sobre ρ vía la dualidad de $S_1^{D_j}$ para cada j. Debido al Lema 8 se sigue que

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{I \in [k]^N} T_I Tr(\rho A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N}) \Big| &= \Big| \sum_{I \in [k]^N} \frac{T_I}{\|T\|_\infty} (A_{i_1} \otimes \cdots \otimes A_{i_N}) \rho \Big| \|T\|_\infty \\ &\leq \|\rho\|_{\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N S_1^{D_j}} \|T\|_\infty, \end{aligned}$$

ya que $\|A_j\| \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq k$

Por otra parte, usando el Lema 2 conseguimos

$$\|T\|_\infty \leq 2^N \|T\|_{\infty,\mathbb{R}},$$

y tomando supremo sobre $\|T\|_{\infty,\mathbb{R}} \leq 1$ se logra ver, como queríamos, que las desigualdades de Bell están acotadas superiormente por $2^N \|\rho\|_{\otimes_{j=1,\alpha_{ext}}^N S_1^{D_j}}$. □

3.3. Formas multilineales $(s; r)$-sumantes

Es momento de introducir un concepto nuevo hasta el momento, el de forma multilineal $(s; r)$-sumante. Una forma N-lineal $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow Y$ que llega a un espacio de

Banach se dice $(s;r)$-sumante (con $1 \leq s,r < \infty$) si existe una constante K tal que, para cualquier elección de sucesiones finitas $x^j = (x_i^j)_{i=i}^M \in X_j$ se tiene

$$\Big(\sum_i \|T(x_i^1 \cdots x_i^N)\|^s\Big)^{\frac{1}{s}} \leq K \prod_{j=1}^N \|x^j\|_r^w, \tag{3.3}$$

donde $\|x^j\|_r^w$ es la norma r-débil de esa sucesión que se define como

$$\|x^j\|_r^w = \sup_{x^* \in B_{X_j^*}} \Big(\sum_i |x^*(x_i^j)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}.$$

Además al ínfimo sobre las constantes que cumplen (3.3) se denomina la norma $(r;s)$-sumante de la forma multilineal y se lo nota $\|T\|_{(r;s)}$; también vale que

$$\|T\|_{(r;s)} = \sup\Big\{\Big(\sum_i \|T(x_i^1 \cdots x_i^N)\|^s\Big)^{\frac{1}{s}} : \|x^1\|_r^w \leq 1, \dots, \|x^N\|_r^w \leq 1\Big\}.$$

Por otro lado, dados dos espacios de Banach X e Y, un operador $T : X \longrightarrow Y$ se dice que T es p-sumante si es $(p;p)$-sumante como 1-forma lineal, en este caso notaremos su norma p-sumante de la siguiente forma

$$\|T\|_{(p;p)} := \pi_p(T).$$

Observemos que dado un operador contínuo $T : X \longrightarrow Y$ de espacios de Banach se calcula su norma como $\sup\limits_{x \in B_X} \|T(x)\|$, y como $B_X \subset \{x \in X : \|x\|_1^w \leq 1\} = B_1^w{}_X$ (ya que $\|x\|_1^w \leq \|x\|$), se sigue

$$\|T\| \leq \sup_{x \in \mathcal{B}_1^w(X)} \|T(x)\| \leq \pi_1(T).$$

El siguiente teorema da una cota superior para la norma $(1;2)$-sumante de cualquier forma multilineal extensible en función de su norma extensible y la constante de Grothendieck. Se deduce de este que cualquier forma multilineal extensible es $(1;2)$-sumante, además de tenerse la continuidad del operador inclusión del espacio de las formas multilineales extensibles al de las $(1;2)$-sumantes.

Teorema 20. *Toda forma N-lineal extensible T es $(1;2)$-sumante y $\|T\|_{(1;2)} \leq K_G^{N-1}\|T\|_{ext}$, donde K_G es la constante de Grothendieck.*

En [9] se prueba un resultado del cual se deduce el Teorema 20. Allí David Pérez-García lo usa para probar que las clases de Schatten S_p con el producto de Schur son Q-álgebras para

$1 \leq p \leq 2$ (una demostración de este último hecho se encontrará en la sección de resultados pendientes en la página 100). Seguiremos lo hecho en ese trabajo para probar el Teorema 20 dando una serie de proposiciones a continuación.

Lema 9. *Dados X un espacio $\mathcal{L}_1$ y H un Hilbert todo operador $u : X \longrightarrow H$ es 1-sumante, más aún $\pi_1(u) \leq K_G\|u\|$.*

Una demotración del Lema 9 puede encontrarse en [12, Corolario 6.29].

Lema 10. *Sean $N, M \in \mathbb{N}$ y $u_i \in \mathcal{B}(l_1^M, l_2^M)$ con $\|u_i\| \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq N$. Llamando $\iota : l_1^m \longrightarrow l_2^m$ a la inclusión y $P_N : \prod_{j=1}^{N} l_2^M \longrightarrow l_1^M$ al operador producto*

$$P_N\Big((x_i^1)_{i=1}^M \cdots (x_i^1)_{i=1}^M\Big) = (x_i^1 \cdots x_i^N)_{i=1}^M$$

y $\overline{P_N} : l_2^M \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi l_2^M \longrightarrow l_1^M$ a su linealización en el producto tensorial proyectivo, si definimos v_N por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\otimes_{j=1,\varepsilon}^N l_1^M \arrow[r, "v_N"] \arrow[d, "u_1\otimes\cdots\otimes u_N"'] & l_2^M \\
\otimes_{j=1,\pi}^N l_2^M \arrow[r, "\overline{P_N}"'] & l_1^M, \arrow[u, "\iota"']
\end{tikzcd}$$

luego $\pi_1(v_N) \leq K_G^N$.

Demostración. La demostración será por inducción en N. Para el caso $N = 1$ el operador v_1 cumple las hipotesis del Lema 9 que aseguran que $\pi_1(v_1) \leq K_G$, por lo cual tenemos lo que buscamos. Para el paso inductivo, supongamos que es cierto para N y veamos que vale con $N + 1$. Observemos que

$$\begin{aligned}
v_{N+1} &= \iota \circ \overline{P_{N+1}} \circ (u_1 \otimes \cdots \otimes u_N \otimes u_{N+1}) \\
&= \iota \circ \overline{P_2} \circ (id \otimes u_{N+1}) \circ (v_N \otimes id),
\end{aligned}$$

luego por hipotesis inductiva sabemos que $\pi_1(v_N) \leq K_G^N$, por lo tanto

$$\pi_1(v_{N+1}) \leq \pi_1(\iota)\|\overline{P_2}\|\|(id \otimes u_{N+1})\|\|(v_N \otimes id)\| \leq \pi_1(\iota)K_G^N\|\overline{P_2}\|, \tag{3.4}$$

ya que claramente $\|(id \otimes u_{N+1})\| \leq \|id\|\|u_{N+1}\| \leq 1$ y $\|(v_N \otimes id)\| \leq \|id\|\|v_N\| \leq \pi_1(v_N)$.

Observemos que, dado $v \in l_2^M \otimes_\pi l_2^M$, tomando una representación $v = \sum_{j=1}^{J} x^j \otimes y^j$, se tiene que

$$\begin{aligned}\overline{P_2}(v) &= \sum_{j=1}^{J} P_2(x^j, y^j)\\ &= \sum_{j=1}^{J} \left(x_i^j y_i^j\right)_{i=1}^{M} = \left(\sum_{j=1}^{J} x_i^j y_i^j\right)_{i=1}^{M},\end{aligned}$$

luego, tomando norma 1 y usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz se obtiene que

$$\begin{aligned}\|\overline{P_2}(v)\|_1 &= \sum_{i=1}^{M} |\sum_{j=1}^{J} x_i^j y_i^j|\\ &\leq \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{J} |x_i^j y_i^j| = \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{M} |x_i^j y_i^j|\\ &\leq \sum_{j=1}^{J} \|x^j\|_2 \|y^j\|_2,\end{aligned}$$

por lo cual, tomando supremo sobre todas las representaciones de v, se deduce que $\|\overline{P_2}(v)\|_1 \leq \pi(v)$, por lo que $\|\overline{P_2}\| \leq 1$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $\iota : l_1^M \longrightarrow l_2^M$, l_1^M es claramente un espacio $\mathcal{L}_1$ y l_2^M un Hilbert, gracias al Lema 9 $\pi_1(\iota) \leq K_G$. Por último gracias a la desigualdad en (3.4) se conlcuye lo que queríamos probar. $\square$

Se deduce del Lema 10 la siguiente generalización multilineal de la desigualdad de Grothendieck.

Teorema 21. *Para par M y $N \geq 2$ de números naturales, si $(a_{i_1\cdots i_N})_{i_j=1}^{M} \subset \mathbb{K}$ y $x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_N}^N \in B_{l_2^M}$ se tiene que*

$$\Big|\sum_{i_j=1}^{M} a_{i_1\cdots i_N} \sum_{k=1}^{M} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| \leq K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big|\sum_{i_j=1}^{M} a_{i_1\cdots i_N} t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big|,$$

para todo $1 \leq j \leq N$.

Demostración. Sea $z_{i_N} := \sum_{I\in[M]^{N-1}} a_{I(i_N)} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{N-1}} \in \otimes_{i=1,\varepsilon}^{N-1} l_1^M = Y$, donde $I(i_N) = (i_1,\ldots,i_{N-1},i_N)$ para todo $I=(i_1,\ldots,i_{N-1})$. Veamos que

$$\|(z_{i_N})_{i_N=1}^M\|_1^w \leq \sup\Big\{\Big|\sum_{I\in[M]^N} a_I t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big| : |t_{i_1}|,\cdots,|t_{i_N}|\leq 1\Big\}. \tag{3.5}$$

Usaremos ahora que vale la igualdad $\Big(\otimes_{i=1,\varepsilon}^{N-1} l_1^M\Big)^* = \otimes_{i=1,\pi}^{N-1} l_\infty^M$ como espacios de Banach (i.e, es una isometría).

Recordemos que $\|(z_{i_N})_{i_N=1}^M\|_1^w = \sup_{\varphi\in B_{Y^*}} \sum_{i_N=1}^M |\varphi(z_{i_N})|$. Tomemos entonces cierto $\varphi\in B_{(Y^*)} = B_{\otimes_{i=1,\pi}^{N-1} l_\infty^M}$ y alguna representación $\varphi = \sum_{j=1}^J \phi_j^1\otimes\cdots\otimes\phi_j^{N-1}$. En ese caso tendremos

$$\sum_{i_N=1}^M |\varphi(z_{i_N})| = \sum_{i_1=1}^M \Big|\Big(\sum_{j=1}^J \phi_j^1\otimes\cdots\otimes\phi_j^{N-1}\Big)\Big(\sum_{I\in[M]^{N-1}} a_{I(i_N)} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{N-1}}\Big)\Big|. \tag{3.6}$$

Definiendo $t_{i_N} = sg\Big(\Big(\sum_{j=1}^J \phi_j^1\otimes\cdots\otimes\phi_j^{N-1}\Big)\Big(\sum_{I\in[M]^{N-1}} a_{I(i_N)} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{N-1}}\Big)\Big)$, y siguiendo la igualdad en (3.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{i_N=1}^M |\varphi(z_{i_N})| &= \sum_{i_1=1}^M t_{i_N}\Big(\sum_{j=1}^J \phi_j^1\otimes\cdots\otimes\phi_j^{N-1}\Big)\Big(\sum_{I\in[M]^{N-1}} a_{I(i_N)} e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_{N-1}}\Big)\\
&= \sum_{i_N=1}^M t_{i_N}\sum_{j=1}^J \sum_{I\in[M]^{N-1}} a_{I(i_N)}\phi_j^1(e_{i_1})\cdots\phi_j^{N-1}(e_{i_{N-1}})\\
&= \sum_{I\in[M]^N}\sum_{j=1}^J a_I\phi_j^1(e_{i_1})\cdots\phi_j^{N-1}(e_{i_{N-1}})t_{i_N}\\
&= \sum_{j=1}^J \|\phi_j^1\|\cdots\|\phi_j^{N-1}\| \sum_{I\in[M]^N} a_I \frac{\phi_j^1}{\|\phi_j^1\|}(e_{i_1})\cdots\frac{\phi_j^{N-1}}{\|\phi_j^{N-1}\|}(e_{i_{N-1}})t_{i_N}.
\end{aligned}$$

Logramos entonces ver que

$$\sum_{i_N=1}^M |\varphi(z_{i_N})| = \sum_{j=1}^J \|\phi_j^1\|\cdots\|\phi_j^{N-1}\| \sum_{I\in[M]^N} a_I \frac{\phi_j^1}{\|\phi_j^1\|}(e_{i_1})\cdots\frac{\phi_j^{N-1}}{\|\phi_j^{N-1}\|}(e_{i_{N-1}})t_{i_N}. \tag{3.7}$$

De la ecuación (3.7) se deduce que

$$\sum_{i_N=1}^M |\varphi(z_{i_N})| \leq \sum_{j=1}^J \|\phi_j^1\|\cdots\|\phi_j^{N-1}\| \sup\Big\{\Big|\sum_{I\in[M]^N} a_I t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big| : |t_{i_1}|,\cdots,|t_{i_N}|\leq 1\Big\},$$

luego tomando ínfimo sobre las representaciones de φ, y luego supremo sobre todas aquellas φ tales que $\pi(\varphi) \leq 1$ tenemos (3.5).

Hecha esta observación continuemos con la prueba. Para todo $1 \leq j \leq N-1$ definamos el operador $u_j : l_1^M \longrightarrow l_2^M$, de forma tal que $u_j(e_{i_j}) = x^j_{i_j}$ para cualquier $1 \leq i_j \leq M$. Notemos que $\|u_j\| \leq 1$, ya que dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_M) \in l_1^M$ y recordando que $\|x^j_{i_j}\|_2 \leq 1$ para todo $1 \leq i_j \leq M$, entonces

$$\begin{aligned} \|u_j(\alpha)\|_2 &= \|\sum_{i_j=1}^M \alpha_{i_j} u_j(e_{i_j})\|_2 \\ &\leq \sum_{i_j=1}^M |\alpha_{i_j}| \|u_j(e_{i_j})\|_2 \\ &= \sum_{i_j=1}^M |\alpha_{i_j}| \|x^j_{i_j}\|_2 \leq \sum_{i_j=1}^M |\alpha_{i_j}| = \|\alpha\|_1. \end{aligned}$$

Por el Lema 10 tenemos que

$$\sum_{i_N=1}^M \|v_{n-1}(z_{i_N})\| \leq K_G^{N-1} \|(z_{i_N})_{i_N=1}^M\|_1^w.$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{i_N=1}^M \|v_{n-1}(z_{i_N})\| &\geq \sum_{i_N=1}^M \langle v_{n-1}(z_{i_N}), x^N_{i_N} \rangle \\ &= \Big| \sum_{i_j}^M a_{i_1 \cdots i_N} \sum_{k=1}^M x^1_{i_1}(k) \cdots x^N_{i_N}(k) \Big|. \end{aligned}$$

Concluyendo así lo que queríamos probar. □

Observemos que en el Teorema 21 se tienen $(a_{i_1 \cdots i_N})_{i_j}^M \subset \mathbb{K}$ y sucesiones $x^1_{i_1}, \ldots, x^N_{i_N} \in l_2^M$, probaremos a continuación un lema que extiende el resultado de ese teorema al caso en que $x^1_{i_1}, \ldots, x^N_{i_N} \in l_2$.

Lema 11. *Para todo número natural M y otro $N \geq 2$, si $(a_{i_1 \cdots i_N})_{i_j}^M \subset \mathbb{K}$ y $x^1_{i_1}, \ldots, x^N_{i_N} \in B_{l_2}$ se tiene que*

$$\Big| \sum_{i_j}^M a_{i_1 \cdots i_N} \sum_{k \geq 1} x^1_{i_1}(k) \cdots x^N_{i_N}(k) \Big| \leq K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}| \leq 1} \Big| \sum_{i_j=1}^M a_{i_1 \cdots i_N} t_{i_1} \cdots t_{i_N} \Big|$$

Demostración. Sean $(a_{i_1\cdots i_N})_{i_j}^M \subset \mathbb{K}$ y $x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_N}^N \in B_{l_2}$, luego las sucesiones resultantes de truncar $x_{i_1}^1, \ldots, x_{i_N}^N$ en el lugar L están en $B_{l_2}^L$ para todo $L \in \mathbb{N}$. Veamos primero que, dado $L > M$

$$\Big|\sum_{i_j}^{M} a_{i_1\cdots i_N} \sum_{k=1}^{L} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| \leq K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big|\sum_{i_j=1}^{M} a_{i_1\cdots i_N} t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big|.$$

Dado un número natural $L > M$, definamos para todo $(i_1, \ldots, i_n) \in [L]^N$

$$\tilde{a}_{i_1,\ldots,i_N} = \begin{cases} a_{i_1,\ldots,i_N} & si (i_1, \ldots, i_n) \in [M]^N \\ 0 & \textit{en caso contrario} \end{cases},$$

luego

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i_j}^{M} a_{i_1\cdots i_N} \sum_{k=1}^{L} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| &= \Big|\sum_{i_j}^{L} \tilde{a}_{i_1\cdots i_N} \sum_{k=1}^{L} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| \\ &\leq K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big|\sum_{i_j=1}^{L} \tilde{a}_{i_1\cdots i_N} t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big| \\ &= K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big|\sum_{i_j=1}^{M} a_{i_1\cdots i_N} t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big|. \end{aligned}$$

Tomando $L \longrightarrow \infty$ tenemos

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i_j}^{M} a_{i_1\cdots i_N} \sum_{k\geq 1} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| &= \lim_{L\to\infty} \Big|\sum_{i_j}^{L} \tilde{a}_{i_1\cdots i_N} \sum_{k=1}^{L} x_{i_1}^1(k)\cdots x_{i_N}^N(k)\Big| \\ &\leq K_G^{N-1} \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big|\sum_{i_j=1}^{M} a_{i_1\cdots i_N} t_{i_1}\cdots t_{i_N}\Big|, \end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Veremos ahora que cualquier forma multilineal definida sobre un producto cartesiano de espacios $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ es $(1;2)$-sumante, de este resultado se va a desprender que toda forma multilineal extensible lo es. Antes de enunciar y demostrar el teorema observemos que dadas

$$T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{K}$$

un forma N-lineal contínua y $L_j : Y_j \longrightarrow X_j$ operadores contínuos con $1 \leq j \leq N$, entonces $T \circ (L_1 \times \cdots \times L_N) : Y_1 \times \cdots \times Y_N \longrightarrow \mathbb{K}$ es una forma N-lineal contínua y vale que

$$\begin{aligned} \|T \circ (L_1 \times \cdots \times L_N)\|_\infty &\leq \|T\|_\infty \prod_{j=1}^{N} \|L_j\| \\ \|T \circ (L_1 \times \cdots \times L_N)\|_{(s;r)} &\leq \|T\|_{(s,r)} \prod_{j=1}^{N} \|L_j\|. \end{aligned}$$

Teorema 22. *Dados X_j un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda_j}$ para cada $1 \leq j \leq N$, luego toda forma multilineal $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{K}$ es $(1;2)$-sumante y se cumple que*

$$\|T\|_{(1;2)} \leq K_G^{N-1} \Big(\prod_{j=1}^{N} \lambda_j \Big) \|T\|_\infty .$$

Demostración. Veamos primero que el teorema es verdadero con $X_j = l_\infty^{D_j}$ para cierto $D_j \in \mathbb{N}$ y para todo $1 \leq j \leq N$. Notemos que $l_\infty^{D_j}$ es un espacio $\mathcal{L}_{\infty,1}$, por lo que en este caso $\lambda_j = 1$ para todo $1 \leq j \leq N$.

Dada $T : l_\infty^{D_1} \times \cdots \times l_\infty^{D_N} \longrightarrow \mathbb{K}$ y vectores $(x_r^j)_{r=1}^M \in l_\infty^{D_j}$ con norma 2-débi menor o igual 1, definamos $h_r = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) x_r^1(i_1) \cdots x_r^N(i_N)$ y

$$\theta_r = \begin{cases} \dfrac{|h_r|}{h_r} & si \;\; h_r \neq 0 \\ 0 & si \;\; h_r = 0. \end{cases}$$

Si tomamos $y_{i_j}^1 = \theta_r x_r^1(i_j)$ y $y_{i_j}^j = \theta_r x_r^j(i_j)$ valdrá que

$$\Big(\sum_{r=1}^{M} |y_{i_j}^j(r)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \Big(\sum_{r=1}^{M} |x_r^j(i_j)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \leq \|(x_r^j)_{j=1}^M\|_2^w \leq 1,$$

por lo cual $y_{i_j}^j \in B_{l_2^M}$. Tomemos $M = \text{máx}\{D_1, \ldots, D_N\}$ y consideremos que $T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) = 0$ si para algún $1 \leq j \leq N$ $i_j > D_j$. Luego, aplicando el Teorema 21 a $y_{i_1}^1, \ldots, y_{i_N}^N$ se obtiene

$$\Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{M} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) \sum_{r=1}^{M} y_{i_1}^1(r) \cdots y_{i_N}^N(r) \Big| \leq K_G^{N-1} \|T\|_\infty .$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{I\in[M]^N} T_I \sum_{r=1}^{M} y^1_{i_1}(r)\cdots y^N_{i_N}(r)\Big| &= \Big|\sum_{r=1}^{M}\theta_r\Big|\Big|\sum_{I\in[M]^N} T_I x^1_r(i_1)\cdots x^N_r(i_N)\Big| \\ &= \sum_{r=1}^{M}|T(x^1_r,\ldots,x^N_r)|,\end{aligned}$$

y, como siempre, tomando supremo sobre todas las sucesiones x^j con $\|x^j\|_2^w \leq 1$ obtenemos el resultado que buscamos.

Veamos ahora como se deduce el caso general de lo que obtuvimos hasta acá. Observemos que el comportamiento de los operadores $(r;s)$-sumantes es local, ya que, la norma $(r;s)$-sumante depende solo de subespacios de dimensión finita de los espacios X_j. A continuación explotaremos este hecho sumado a que los espacios X_j son $\mathcal{L}_{\infty,\lambda_j}$. Analicemos ahora el caso general que se enuncia en el teorema.

Dados $(z_i^j)_{i=1}^{d_j} \subset X_j$, pensemos en el subespacio $A_j = \langle z_i^j : 1 \leq i \leq d_j\rangle \subset X_j$. Por ser X_j un espacio $\mathcal{L}_{\infty,\lambda_j}$, y A_j de dimensión finita, existe $A_j \subset B_j \subset X_j$ con $dim(B_j) = D_j$ y $L_j : B_j \longrightarrow l_\infty^{D_j}$ isomorfismo lineal tal que $\|L_j^{-1}\|\|L_j\| \leq \lambda_j$. Como $T = T\circ(L_1^{-1}\times\cdots\times L_N^{-1})\circ(L_1\times\cdots\times L_N)$, por la observación anterior

$$\|T\|_{(1;2)} \leq \|T\circ(L_1^{-1}\times\cdots\times L_N^{-1})\|_{(1;2)}\prod_{j=1}^{N}\|L_j\|,$$

además $T\circ(L_1^{-1}\times\cdots\times L_N^{-1}) : l_\infty^{D_1}\times\cdots\times l_\infty^{D_N} \longrightarrow \mathbb{K}$. Luego, por lo probado en el caso en que $X_j = l_\infty^{D_j}$, su norma $(1;2)$-sumante será menor o igual que su norma como forma multilineal multiplicado por K_G^{N-1}. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}\|T\|_{(1;2)} &\leq \Big(\prod_{j=1}^{N}\|L_j\|\Big)\|T\circ(L_1^{-1}\times\cdots\times L_N^{-1})\|_{(1;2)} \\ &\leq \Big(\prod_{j=1}^{N}\|L_j\|\Big)K_G^{N-1}\|T\circ(L_1^{-1}\times\cdots\times L_N^{-1})\|_\infty \\ &\leq K_G^{N-1}\Big(\prod_{j=1}^{N}\|L_j\|\Big)\Big(\prod_{j=1}^{N}\|L_j^{-1}\|\Big)\|T\|_\infty \\ &= K_G^{N-1}\Big(\prod_{j=1}^{N}\|L_j\|\|L_j^{-1}\|\Big)\|T\|_\infty \leq K_G^{N-1}\Big(\prod_{j=1}^{N}\lambda_j\Big)\|T\|_\infty,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. □

Veamos ahora como concluir que toda forma multilineal extensible es $(1;2)$-sumante. Observemos antes que si $\overline{T} : Y_1 \times \cdots \times Y_N \longrightarrow \mathbb{C}$ es una forma multilineal que extiende a

$$T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{C},$$

entonces vale que $\|T\|_{(1;2)} \leq \|\overline{T}\|_{(1;2)}$.

Demostración del Teorema 20. Sea $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{C}$ una forma N-lineal extensible, como $X_i \subset l_\infty(B_{X_i^*})$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\overline{T} : l_\infty(B_{X_1^*}) \times \cdots \times l_\infty(B_{X_N^*}) \longrightarrow \mathbb{C}$ una extensión N-lineal y contínua de T tal que $\|\overline{T}\|_\infty \leq \|T\|_{ext} + \varepsilon$. Al ser $l_\infty(B_{X_i^*})$ un espacio $\mathcal{L}_{\infty,1}$ y por el Teorema 22 vale que

$$\|T\|_{1;2} \leq \|\overline{T}\|_{(1;2)} \leq K_G^{N-1}\|\overline{T}\|_\infty \leq K_G^{N-1}(\|T\|_{ext} + \varepsilon).$$

Por último, haciendo tender ε a 0 tenemos

$$\|T\|_{(1;2)} \leq K_G^{N-1}\|T\|_{ext}$$

como queríamos probar. □

3.4. Operador de densidad para estados GHZ

En esta sección culminaremos con la prueba del Teorema 13. Para eso estudiaremos la norma del operador de densidad asociado a estos estados. Fijemos algo de notación para continuar. Notaremos $e_i \underline{\otimes} e_j : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ a la tranformación que dado $v \in \mathbb{R}^N$ actúa así:

$$e_i \underline{\otimes} e_j(v) = \langle e_i, v \rangle e_j.$$

En los capítulos anteriores esta transformación lineal la notamos $\langle \cdot, e_i \rangle e_j$, pero, con el objetivo de facilitar las operaciones, la notaremos como se describe arriba. Observemos que $\{e_i \underline{\otimes} e_j\}_{1 \leq i,j \leq N}$ define una base de $M_N(\mathbb{R})$, definiremos también $(e_i \underline{\otimes} e_j)^* \in M_N(\mathbb{R})^*$ como los vectores que determinan su base dual, es decir, aquellos que cumplen $(e_i \underline{\otimes} e_j)^*(e_k \underline{\otimes} e_l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$.

Notaremos S_1^N a la clase de Schatten 1 o clase de traza de los operadores de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$. Para probar la acotación de los estados GHZ será de gran importancia el operador

$$\rho = \sum_{i,j=1}^{N} (e_i \underline{\otimes} e_j) \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j) \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j) \in \otimes_{i=i}^{3} S_1^N,$$

que es el operador de densidad asociado al estado $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} e_i \otimes e_i \otimes e_i$ sin normalizar, y también lo será su dual,

$$\rho^* = \sum_{i,j=1}^{N} (e_i \underline{\otimes} e_j)^* \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j)^* \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j)^* \in \Big(\otimes_{i=i}^{3} S_1^N \Big)^*.$$

Será necesario ahora contar con una herramienta muy útil en el análisis en general y que permite tener una noción buena de integración en espacios métricos en los cuales actúa un grupo, la medida de Haar. Más precisamente, si (M, d) es un espacio métrico y G un grupo, se dice que G actúa por isometrías en M si G en M y, cualquieras sean $x, y \in M$, $g \in G$ se tiene que $d(gx, gy) = d(x, y)$. Recordemos que la acción de un grupo G en un conjunto X es transitiva si para cualquier $x \in X$ $Gx := \{gx : g \in G\} = M$ y se dice fiel si dados $g \neq h \in G$ existe $x \in M$ tal que $gx \neq hx$. Veremos en la sección de "Resultados pendientes" que, en estas condiciones, la acción de G sobre (M, d) induce una distancia en G que dados $g, h \in G$ se define así

$$\rho(g, h) = \sup_{x \in M} d(gx, hx).$$

Teorema 23. *Sea (M, d) un espacio métrico y G un grupo que actúa por isometrías en M, luego existe una medida regular μ definida sobre la σ-álgebra de Borel de M que es G-invariante, o sea que $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo $g \in G$ y todo $A \subset M$ boreliano. Más aún, si G es un subespacio cerrado de las isometrías de M con la distancia ρ, entonces hay una única medida que cumple con lo anterior y además $\mu(M) = 1$, esta medida se denomina la medida de Haar de M respecto de la acción de G.*

Una demostración muy interesante de este teorema que utiliza un resultado importante en la teoría de grafos será expuesta en la sección de "Resultados pendientes" en la página 106.

Dados dos espacios vectoriales V, W llamaremos $isom(V, W)$ al conjunto de las isometrías lineales que salen de V y llegan a W. Observemos que si $W = V$ se puede definir la operación de composición entre los elementos de $isom(V,V)$ y esta operación le brinda una estructura de grupo topológico El siguiente lema da una relación entre las normas del operador ρ y su dual ρ^* si suponemos que existe un subgrupo compacto de las isometrías de $\otimes_{i=i,\alpha}^3 S_1^N$ en sí mismo con ciertas propiedades que pueden ser interpretadas como de punto fijo para la acción de ese grupo en $\otimes_{i=i,\alpha}^3 S_1^N$.

Lema 12. *Para cualquier norma tensorial α en $A = \otimes_{i=i,\alpha}^3 S_1^N$, si se tiene un grupo topologico compacto $G \subset isom(A,A)$ tal que:*

1. *$g\rho = \rho$ para todo $g \in G$.*
2. *Dada $L \in A^*$ si $L \circ g = L$ para todo $g \in G$ entonces $L = \lambda\rho$ para alguna constante λ.*

Entonces

$$\|\rho\|_A \|\rho^*\|_{A^*} = N^2$$

.

Demostración. Sea $L \in A^*$ tal que $L(\rho) = \|\rho\|_A$ y $\|L\|_{A^*} = 1$ (que existe por el teorema de Hahn-Banach). Definamos ahora $L_0 = \int_G L \circ g d\mu(g)$ integrando respecto de la medida de Haar definida en G (la cual existe y es única por ser G un grupo topológico compacto dentro de $isom(A,A)$). Más precisamente, $L_0 \in A^*$ aplicado a $x \in A$ es

$$L_0(x) = \int_G (L \circ g)(x) d\mu(g),$$

esto está bien definido ya que, si llamamos $L^x(g) = (L \circ g)(x)$, es sencillo observar que $L^x \in C(G)$ para cualquier $x \in A$. Se ve facilmente que L_0 es lineal y llega a valores de $\mathbb{C}$ por lo tanto pertenece a A^*. Observemos que $\|L_0\|_{A^*} \leq \|L\|_{A^*}$, ya que

$$\begin{aligned} \|L_0\|_{A^*} &= \sup_{x \in B_A} |L_0(x)| \\ &= \sup_{x \in B_A} \left| \int_G (L \circ g)(x) d\mu(g) \right| \\ &\leq \sup_{x \in B_A} \int_G |(L \circ g)(x)| d\mu(g) \\ &\leq \int_G \|L\|_{A^*} \|g\|_{\mathcal{A}} \|x\|_A d\mu(g) = \|L\|_{A^*}, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que la medida de G es 1. Ahora, usando I

$$L_0(\rho) = \int_G (L \circ g)(\rho) d\mu(g) = \int_G L(\rho) d\mu(g) = L(\rho).$$

Por otro lado dada $h \in G$

$$L_0 \circ h = \int_G L \circ g \circ h d\mu(g) = \int_G L \circ g d\mu(g) = L_0,$$

donde la segunda igualdad se debe a la invarianza por traslaciones de la medida de Haar. Debido a II tenemos que $L_0 = \lambda \rho^*$ para algún valor de λ. Luego $\|\rho\| = L(\rho) = \lambda \rho^* \rho = \lambda N^2$ y como $\lambda \|\rho^*\|_{A^*} = \|L_0\|_{A^*} \leq \|L\|_{A^*} = 1$ se sigue que $\|\rho\| \|\rho^*\| \leq \frac{1}{\lambda} \lambda N^2 = N^2$. Por último, como $N^2 = \rho^* \rho = |\rho^* \rho| \leq \|\rho^*\|_{A^*} \|\rho\|_A$, se obtiene lo queríamos probar. □

Teorema 24. *Para cualquier norma tensorial α que defina $A = \otimes_{i=1,\alpha}^3 S_1^N$ se tiene*

$$\|\rho\|_A \|\rho^*\|_{A^*} = N^2.$$

Antes de la demostración de este teorema me gustaría observar que es en este punto en el que se presenta una dificultad en la escritura que impide hacer la prueba para un enunciado con $A = \otimes_{i=1,\alpha}^M S_1^N$ con un M cualquiera. El argumento de la demostración descansa en probar que efectivamente existe en $isom(A, A)$ un subgrupo compacto como en el Lema 12, se verá en el desarrollo de la misma que al momento de probar que se cumple la propiedad II de dicho lema las cuentas serían inmanejables con un valor cualquiera de M, de todas formas uno puede imaginar cómo hacerlo de forma iterativa, solo que escribirlo sería demasiado engorroso.

Demostración del Teorema 24. Usando el Lema 12 es claro que basta ver que efectivamente hay un subgrupo topológico $G \subset isom(A, A)$ compacto que cumple las propiedades I y II del lema. A continuación definiremos un subgrupo tal y veremos que cumple efectivamente lo que necesitamos.

Dado $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \{-1, 1\}^N$ definimos $g_\varepsilon : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $g(e_i) = \varepsilon_i e_i$; dada $\sigma \in S_N$ una permutación, definimos $h_\sigma : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ tal que $h(e_i) = e_{\sigma(i)}$ (en ambos casos e_i representa el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^N$). Pensando S_1^N como $\mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^N$ $g_\varepsilon \otimes g_\theta, h_\sigma \otimes h_\tau$ definen operadores lineales de S_1^N en S_1^N siempre que $\varepsilon, \theta \in \{-1, 1\}^N$ y $\sigma, \tau \in S_N$, veamos que además son isometrías. Dada $T = \sum_{i,j=1}^N \lambda_{ij} e_i \underline{\otimes} e_j \in S_1^N$ debido a la linealidad de $g_\varepsilon \otimes g_\theta$ se tiene que

$$g_\varepsilon \otimes g_\theta(T) = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ij}\varepsilon_i\theta_j e_i \underline{\otimes} e_j \in S_1^N.$$

Calculemos el operador módulo de $g_\varepsilon \otimes g_\theta$ con el objetivo de comparar la traza de su raíz cuadrada con la del operador $|T|^{\frac{1}{2}}$. Observemos primero que el operador transpuesto de $g_\varepsilon \otimes g_\theta$ es $\big((g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)\big)^t = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{ji}\varepsilon_j\theta_i e_i \underline{\otimes} e_j$, luego

$$\begin{aligned}
\big(|(g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)|\big)_{ij} &= \langle (g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T) \circ \big((g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)\big)^t(e_i), e_j\rangle \\
&= \langle \big(\sum_{k',l'=1}^{N} \lambda_{k'l'}\varepsilon_{k'}\theta_{l'} e_{k'} \underline{\otimes} e_{l'}\big)\big(\sum_{l=1}^{N} \lambda_{li}\varepsilon_l\theta_i e_l\big), e_j\rangle \\
&= \langle \sum_{l',l=1}^{N} \lambda_{ll'}\lambda_{li}\varepsilon_l\theta_{l'}\varepsilon_l\theta_i e_{l'}, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{lj}\lambda_{li}\varepsilon_j\theta_i\varepsilon_k\theta_l
\end{aligned}$$

Es fácil ver que

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_{lj}\lambda_{li}\varepsilon_j\theta_i\varepsilon_k\theta_l = \big(g_\theta \circ L \circ L^t \circ g_\theta\big)_{ij} = \big(g_\theta \circ |L| \circ g_\theta\big)_{ij},$$

y por eso

$$|(g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)| = g_\theta \circ |L| \circ g_\theta,$$

al ser g_θ su propia inversa, de allí se desprende que tienen los mismos autovalores y por lo tanto la misma traza. Luego $\|(g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)\|_{S_1^N} = \|T\|_{S_1^N}$.

Análogamente puede verse que

$$|(h_\sigma \otimes g_\tau)(T)| = g_\tau \circ |L| \circ g_{\tau^{-1}},$$

y de la misma manera que antes se concluye que $\|(g_\varepsilon \otimes g_\theta)(T)\|_{S_1^N} = \|T\|_{S_1^N}$.

Es claro que los elementos de la forma $(g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta)$, $(g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id$, $(h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau)$ son operadores de A en A y, como cada operador está definido como un producto tensorial de isometrías y α es una norma tensorial en A, ellos mismos también son isometrías en A. Definimos G como el subgrupo de $isom(A, A)$ generado por los elementos de la forma recién descrita.

Veamos ahora que G cumple I y II. Para ver I observemos que

$$\begin{aligned}(g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta)\rho &= \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i\theta_j(e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \otimes \varepsilon_i\theta_j(e_i \otimes e_j) \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} \varepsilon_i^2\theta_j^2(e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) = \rho,\end{aligned}$$

analogamente $(g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id\rho = \rho$. Por otro lado

$$\begin{aligned}(h_\sigma \otimes g_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes g_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes g_\tau)\rho &= \sum_{i,j=1}^{N} (e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}) \otimes (e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}) \otimes (e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{N} (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) = \rho,\end{aligned}$$

luego se tiene $g\rho = \rho$ para los generadores de G y de ahi sigue que esto valga para todo elemento de G.

Para ver II, supongamos que

$$L = \sum_{i,j,k,l,m,n=1}^{N} \lambda_{i,j,k,l,m,n}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_k \otimes e_l) \otimes (e_m \otimes e_n) \in A^*$$

es tal que $L \circ g = g$ para todos los elementos de G, en ese caso

$$\begin{aligned}&\sum_{i,i,k,l,m,n=1}^{N} \lambda_{i,j,k,l,m,n}\varepsilon_i\theta_j\varepsilon_m\theta_n(e_i \otimes e_j) \otimes (e_k \otimes e_l) \otimes (e_m \otimes e_n) = \\ &= L \circ (g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta) \\ &= \sum_{i,i,k,l,m,n=1}^{N} (e_i \otimes e_j) \otimes (e_k \otimes e_l) \otimes (e_m \otimes e_n),\end{aligned}$$

y luego se obtiene que $\lambda_{i,j,k,l,m,n} = \lambda_{i,j,k,l,m,n}\varepsilon_i\varepsilon_m\theta_j\theta_n$, de esta igual, y dado que esto vale para todos los valores posibles de i, j, k, l, m, n y $\varepsilon_i\varepsilon_m\theta_j\theta_n \in \{-1, 1\}$, se sigue que $\lambda_{i,j,k,l,m,n} = 0$ si $i \neq m$ o $j \neq n$. Análogamente, pero esta vez aplicando la isometría $(g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes (g_\varepsilon \otimes g_\theta) \otimes id$, se logra ver que $\lambda_{i,j,k,l,m,n} = 0$ si $i \neq k$ o $j \neq l$. Hasta aquí, por las simetrías obtenidas en los coeficientes de L, si llamamos $\lambda_{i,j,k,l,m,n} = \lambda_{i,j}$ tenemos que

$$L = \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{i,j}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j).$$

Ahora aplicando el mismo razonamiento para $(h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau)$ se sigue que

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{i,j}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) = L = \\
&= L \circ (h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau) \otimes (h_\sigma \otimes h_\tau) \\
&= \sum_{i,j=1}^{N} \lambda_{i,j}(e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}) \otimes (e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}) \otimes (e_{\sigma(i)} \otimes e_{\tau(j)}),
\end{aligned}$$

de esto se deduce que $\lambda_{ij} = \lambda_{\sigma(i)\tau(j)}$ para todo par de permutaciones σ y τ, lo cual implica que $\lambda_{ij} = \lambda$ que no depende de i ni j, por lo tanto $L = \lambda\rho$. Esto prueba que G cumple I y II, y por el Lema 12 se concluye lo que queríamos ver. $\square$

Con lo desarrollado hasta aquí podemos demostrar el siguiente teorema principal de esta sección.

Demostración del Teorema 13. Debido al Teorema 19 basta ver que para el estado

$$\rho = \sum_{i,j=1}^{N-1} (e_i \underline{\otimes} e_j) \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j) \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j)$$

tenemos que $\|\rho\|_{\otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^{3} S_1^N} \leq K_G^2 N$, por ser $\frac{\rho}{N}$ el operador de densidad para el estado ψ. Gracias al Teorema 24 solo hará falta ver que

$$\|\rho^*\|_{(\otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^{3} S_1^N)^*} \geq \frac{1}{K_G^2} N.$$

Viendo a ρ^* como una forma trilineal, tendremos que $\|\|_{(\otimes_{i=1,\alpha_{ext}}^{3} S_1^N)^*} = \|\rho^*\|_{ext} =$ gracias al Teorema 18 y usando el Teorema 20 tenemos que $\|\rho^*\|_{(1;2)} \leq K_G^2 \|\rho^*\|_{ext}$. Luego el problema se reduce a probar que $\|\rho^*\|_{(1;2)} \geq \dfrac{1}{K_G^2} N$.

Considerando la sucesión $(e_j \underline{\otimes} e_1)_{j=1}^{N} \subset S_1^N$ cuya norma 2-débil es menor o igual que 1 y cumple

$$\sum_{j=1}^{N} \rho^*((e_j \underline{\otimes} e_1) \otimes (e_j \underline{\otimes} e_1) \otimes (e_j \underline{\otimes} e_1)) = N,$$

se deduce la desigualdad necesaria, ya que esto implica que $\|\rho^*\|_{(1;2)} \geq N$. $\square$

3.5. Resultados pendientes

En esta sección probaremos dos resultados que han quedado sin demostración en el capítulo, que S_p es una Q-álgebra con el producto de Schur si $1 \leq p \leq 2$ y el Teorema 23 de la medida de Haar.

3.5.1. Las clases de Schatten son Q-álgebras

Comencemos esta sección probando que la clase de traza S_1 junto con el producto de Schur es una Q-álgebra. Como se ha dicho en la sección anterior este resultado se debe a David Pérez-García y se encuentra en [9]. Este resultado junto con lo visto en el capítulo anterior acerca de que S_∞ con el producto de Schur es también una Q-álgebra alcanzan para probar que todas las clases de Schatten lo son vía técnicas de interpolación de espacios de Banach que provienen del análisis armónico abstracto y que no trataremos en este trabajo. Responderemos así a la pregunta planteada en la década del '70 por Varopoulos acerca de si las clases de Schatten eran o no Q-álgebras. Es por esto que el siguiente teorema es de gran relevancia.

Teorema 25. *Para todo $1 \leq p \leq 2$ la clase de Schatten S_p con el producto de Schur $*$ es una Q-álgebra.*

Antes de demostrar el teorema enunciaremos un resultado de la teoría de clases de Schatten que da una cota superior para la norma de todo $u \in S_p(H)$, con $1 \leq p \leq 2$, en función de los valores que toma u para cada elemento de una base ortonormal de H.

Lema 13. *Dado $u \in B(H)$ con H Hilbert y $(g_j)_{j\in J}$ una base ortonormal de H, si $1 \leq p \leq 2$ y $\Big(\|u(g_j)\|\Big)_{j\in J} \in l_p^J$, entonces $u \in S_p(H)$ y*

$$\|u\|_{S_p} \leq \Big(\sum_{j\in J} \|u(g_j)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

La demostración de este lema se encuentra en [4, Teorema $4.7(a)$]. Observemos que del Lema 13 se sigue que, $\forall u \in S_p = S_p(l_2)$,

$$\|u\|_{S_p} \leq \sum_{k,h\geq 1} \|u(k,h)\|, \tag{3.8}$$

ya que, si $\|(\|u(e_j)\|)_{j\geq 1}\|_p = \infty$, como $\|(\|u(e_j)\|)_{j\geq 1}\|_p \leq \|(\|u(e_j)\|)_{j\geq 1}\|_1$ y $\|u\|_{S_p} \leq \infty$, es clara la desigualdad planteada en (3.8) y si $(\|u(e_j)\|)_{j\geq 1} \in l_p$, por el Lema 13 tenemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{S_p} &\leq \Big(\sum_{h\geq 1} \|u(e_h)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \Big(\sum_{h\geq 1} \|u(e_h)\|^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{h,j\geq 1} \|u(e_h)(j)\| \\ &= \sum_{k,h\leq 1} \|u(k,h)\|. \end{aligned}$$

Demostración del Teorema 25. Dado $1 \leq p \leq 2$, debido al criterio de Davie (Teorema 5), $(S_p, *)$ será una Q-álgebra si y solo si existe una constante universal $K > 0$ tal que para todo par $m, n \in \mathbb{N}$, toda elección de sucesiones $(a_I)_{I\in[m]^n}$ y $x^1_{i_1}, \ldots, x^n_{i_n} \in B_{S_p}$ (con $I = (i_1, \ldots, i_n) \in [m]^n$), se tiene

$$\Big\| \sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1} * \cdots * x^n_{i_n} \Big\|_{S_p} \leq K^n \sup_{|t_{i_j}|\leq 1} \Big| \sum_{I\in[m]^n} a_I t_{i_1} \cdots t_{i_n} \Big|. \tag{3.9}$$

Veremos a continuación que se cumple (3.9) con $K = K_G$.

Tomando entonces cualquier elección de $(a_I)_{I\in[m]^n}$ y $x^1_{i_1}, \ldots, x^n_{i_n} \in B_{S_p}$, y aplicando (3.8) a cada $\sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1} * \cdots * x^n_{i_n} \in S_p$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1} * \cdots * x^n_{i_n} \Big\|_{S_p} &\leq \sum_{k,h\geq 1} \Big| \sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1}(h,k) \cdots x^n_{i_n}(h,k) \Big| && (3.10) \\ &= \sum_{k,h\geq 1} \varepsilon_{k,h} \sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1}(k,h) \cdots x^n_{i_n}(k,h), && (3.11) \\ & && (3.12) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_{k,h} = sg\Big(\sum_{I\in[m]^n} a_I x^1_{i_1}(k,h) \cdots x^n_{i_n}(k,h) \Big)$. Llamemos $\tilde{x}^1_{i_1}(k,h) = \varepsilon_{k,h} x^1_{i_1}(k,h)$ para todo $k, h \in \mathbb{N}$, claramente $(\tilde{x}^1_{i_1}(k,h))_{k,h\geq 1}, (x^1_{i_1}(k,h))_{k,h\geq 1}$ tienen la misma norma en l_2. Observemos que $(x^j_{i_j}(k,h))_{k,h\geq 1} \in B_{l_2}$ como sucesiones de $\mathbb{C}$, ya que

$$\|(x^j_{ij}(k,h))_{k,h\geq 1}\|_2 = \Big(\sum_{k,h\geq 1} |x^j_{ij}(k,h)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} = \|x^j_{ij}\|_{S_2} \leq \|x^j_{ij}\|_{S_2} \leq 1,$$

teniendo que como $1 \leq p \leq 2$ vale $\|x\|_{S_2} \leq \|x\|_{S_p}$ para todo $x \in K(l_2)$.Luego se cumplen las hipotesis del Lema 11 para a_I y $\tilde{x}^1_{i_1}, x^2_{i_2}, \ldots, x^n_{i_n}$ y aplicandolo conseguimos ver que

$$\Big\| \sum_{I \in [m]^n} a_I x^1_{i_1} * \cdots * x^n_{i_n} \Big\|_{S_p} \leq K_G^{n-1} \sup_{|t_{i_j}| \leq 1} \Big| \sum_{I \in [m]^n} a_I t_{i_1} \cdots t_{i_n} \Big|,$$

usando el conocido hecho de que $K_G \geq 1$ podemos asegurar que $K_G^{n-1} \leq K_G^n$ y por lo tanto tenemos (3.9) con $K = K_G$ como queríamos ver. $\square$

3.5.2. Medida de Haar

El otro resultado que queda por demostrar es la existencia y unicidad de la medida de Haar para un espacio métrico donde actúa un grupo de forma transitiva y por isometría, resultado que se encuentra enunciado en el Teorema 23. La prueba que daremos aquí de este hecho es a mi entender particularmente bella por conectar partes de la matemática de una forma inesperada. Comenzaremos por dar rapidamente algunos conceptos sobre la teoría de grafos y un resultado importante en ella que será ultizado en la demostración del teorema en cuestión.

Un grafo es un objeto que consta de un conjuto V de vértices (que suele ser pensado como un conjunto de puntos)y otro

$$E \subset \Big\{ \{u, v\} : u, v \in V \times V \Big\}$$

de aristas (este último suele ser pensado como líneas que conectan los vértices o puntos). Dado un grafo (V, E) y $v \in V$ definimos $E_v = \{u \in V : u, v \in E\}$, además notaremos $u \sim v$ si $u \in E_v$ o equivalentemente $v \in E_u$ ($u \sim v$ es una relación de equivalencia) y si $u \sim v$ diremos que u y v son vecinos; también, dado $A \subset V$ llamaremos al conjunto de vecinos de A así

$$K(A) = \{u : \exists v \in V \quad \textit{tal que} \quad u \in E_v\}.$$

Por último diremos que un grafo (E, V) es bipartito si existen dos subconjutos $X, Y \subset E$ tales $X \cup Y = E$, $X \cap Y = \emptyset$, si $x_1, x_2 \in X$ entonces $x_1 \nsim x_2$ y de la misma manera si $y_1, y_2 \in Y$ entonces $y_1 \nsim y_2$, en este caso diremos que $\{X, Y\}$ es una partición de (E, V). Un grafo bipartito verifica la condición de Hall si dada una partición $\{X, Y\}$ la cantidad de elementos de $K(A)$ es mayor o igual la de A para todo $A \subset X$.

Teorema 26 (Teorema del matrimonio de Hall)**.** *Para cualquier grafo bipartito (E, V) con partición $\{X, Y\}$ tal que $|X| = |Y|$ y verificando la condición de Hall existe una biyección $f : X \longrightarrow Y$ tal que $f(x) \sim x$ para todo $x \in X$.*

Demostración. La prueba será por inducción en $|V|$ (la cantidad de elementos de V). Si $|E| = 2$, entonces $|X| = |Y|$ y el resultado es trivial, supongamos entonces que $|E| \geq 2$. Supongamos ahora que el enunciado vale para $|V| = k$ con $k \leq n$ y veamos que vale para $|V| = n + 1$. Contemplemos primero el caso en que exista algún subconjunto $A \subset X$ tal que $A \neq X$ y $|A| = |K(A)|$. En esta situación podremos descomponer el problema en otros 2 problemas idénticos pero con menor cantidad de vértices $\{A, K(A)\}$ y, si llamamos $B := X \setminus A$ y $\tilde{K}(B) := K(B) \cap (Y \setminus K(A))$, $\{B, \tilde{K}(B)\}$ (donde ambas son particiones que definen grafos bipartitos heredando las relaciones de (V, E)). Notemos que $\{A, K(A)\}$ verifica la condición de Hall, además $|A| \leq n$, luego por hipotesis inductiva existe $f_A : A \longrightarrow K(A)$ biyectiva tal que $f_A(x) \sim x$ para todo $x \in A$. Por otro lado, si $\{B, \tilde{K}(B)\}$ cumpliera la condición de Hall, razonando como antes, existiría $f_B : B \longrightarrow \tilde{K}(B)$ biyectiva tal que $f_B(x) \sim x$ para todo $x \in B$, veamos que la cumple. Supongamos que no, en ese caso debería haber cierto $S \subset B$ tal que $|S| > |\tilde{K}(S)|$, en ese caso

$$|K(S \cup A)| \leq |\tilde{K}(S)| + |K(A)| < |S| + |A| = |S \cup A|,$$

por lo cual $S \cup A$ rompería con la condición de Hall que se cumple en $\{X, Y\}$ concluyendo así algo absurdo, por lo que $\{B, \tilde{K}(B)\}$ efectivamente satisface la condición de Hall. Para finalizar con este caso, teniendo en cuenta que $A \cap B, K(A) \cap \tilde{K}(B) = \emptyset$, $Y = K(X) = K(A) \cup \tilde{K}(B)$ y definiendo

$$f(x) = \begin{cases} f_A(x) & si x \in A \\ f_B(x) & \textit{en caso contrario} \end{cases},$$

conseguimos una función bien definida y biyectiva entre X e Y tal que $f(x) \sim x$ para todo $x \in X$.

El caso que queda por analizar es aquel en que $|A| < |K(A)|$ para todo $A \subset X$. Si este es el caso, tomando cualquier $x_0 \in X$ e $y_0 \in K(\{x\})$ y considerando $\tilde{X} := X \setminus \{x_0\}$ $\tilde{Y} := Y \setminus \{y_0\}$ se tiene que para cualquier $A \subset \tilde{X}$, si llamamos $\tilde{K}(A)$ al conjunto de vecino de A en el nuevo grafo inducido por $\{\tilde{X}, \tilde{Y}\}$, entonces $\tilde{K}(A) = K(A) \setminus \{y_0\}$ y luego

$$|A| \leq |K(A) - 1| \leq |\tilde{K}(A)|,$$

por lo cual el grafo inducido por sacar los vertices x_0 e y_0 cumple con la condición de Hall; por inducción existe $f_{x_0,y_0} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{Y}$ biyectiva tal que $f(x) \sim x$. Definiendo

$$f(x) = \begin{cases} f_{x_0,y_0}(x) & si x \neq x_0 \\ y_0 & \textit{en caso contrario} \end{cases},$$

conseguimos nuevamente una función bien definida y biyectiva entre X e Y tal que $f(x) \sim x$ para todo $x \in X$, que es lo queríamos. □

Recordemos que dado un espacio métrico (M, d) y dado un conjunto compacto $K \subset M$ para cualquier $\varepsilon > 0$ existe un cubrimiento finito por abiertos de K, más aún puede tomarse a eso abiertos como bolas centradas en ciertos puntos $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset M$ y a esos punto se los llama una ε-red; en este contexto diremos que una ε-red es minimal si la cantidad de elementos que tiene es la menor suficiente para cubrir a K (no hay una única red minimal, pero claramente siempre existe una debido a la buena ordenación de los números naturales).

Lema 14. *Si un grupo G actúa transitiva y fielmente por isometrías sobre un espacio métrico (M, d), el grupo hereda una estructura de espacio métrico con la distancia*

$$\rho(g_1, g_2) = \sup_{x \in M} d(g_1 x, g_2 x).$$

Si además la acción de G sobre M es isométrica, entonces la acción de G sobre sí mismo por multiplicación a derecha también lo será y, si (M, d) es compacto y G es cerrado en las ismetrias de M, entonces (G, ρ) resulta compacto.

Demostración. Notemos que, si la acción de G sobre M es fiel, entonces $H = \{h \in G : hx = x \forall x \in M\} = \{id\}$, y G hereda una métrica de M, definida como en el enunciado, o sea:

$$\rho(g_1, g_2) = \sup_{x \in M} d(g_1 x, g_2 x).$$

La desigualdad triangular se satisface ya que para cualquier trío $h, g_1, g_2 \in G$:

$$\begin{aligned}
\rho(g_1, g_2) &= \sup_{x\in M} d(g_1x, g_2x) \\
&\leq \sup_{x\in M} d(g_1x, hx) + d(g_2x, hx) \\
&\leq \sup_{x\in M} d(g_1x, hx) + \sup_{x\in M} d(g_2x, hx) \\
&= \rho(g_1, h) + \rho(g_2, h)
\end{aligned}$$

Además, como $H = \{h \in G : hx = x \forall x \in M\} = \{id\}$, si $\rho(g, h) = 0$ entonces para todo $x \in M$ $gx = hx$, luego $h^{-1}g \in H$, por lo cual $h = g$.

Por otro lado, si G actúa por isometrías en M también lo hará sobre sí mismo por multiplicación a derecha ($h \bullet g = gh$) con la métrica heredada, ya que si $g, h, k \in G$

$$\rho(k \bullet g, k \bullet h) = \sup_{x\in M} d((gk)x, (hk)x) = \sup_{x\in M} d(k(gx), k(hx)) = \sup_{x\in M} d(gx, hx) = \rho(g, h).$$

Observemos que esta distancia está definida sobre todas las funciones continuas de M en M y en particular sobre las isometrias ($isom(M, M)$).

Probaremos que el espacio métrico $(isom(M, M), \rho)$ hereda también la compacidad de (M, d) a travez de un argumento diagonal. Luego, al ser G cerrado en $isom(M, M)$ será también compacto. Sea $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset isom(M, M)$, dado $k \in \mathbb{N}$ existe una $\frac{1}{k}$-red minimal $\{x^k_1, \ldots, x^k_{m(k)}\}$. Considerando la primer red, y al ser (M, d) compacto puedo extraer una subsucesiones convergente de cada $(g_n(x^1_j))_{n\in\mathbb{N}}$ y más aún una subsucesión $(g^1_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(g^1_{i_n}(x^1_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $1 \leq j \leq m(1)$; repitiendo este argumento para $(g^1_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ con $\{x^2_1, \ldots, x^2_{m(2)}\}$ tendremos una subsucesión $(g^1_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(g^2_{i_n}(x^k_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $1 \leq j \leq m(k)$ con $k = 1, 2$. Inductivamente para cualquier $l \in \mathbb{N}$ podemos conseguir una subsucesión $(g^{l+1}_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(g^l_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(g^{l+1}_{i_n}(x^k_j))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $1 \leq j \leq m(k)$ con $1 \leq k \leq l + 1$. Tomando la subsucesión diagonal $(g^k_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y llamando $\tilde{g}_k = g^k_{i_k}$ tendremos que $(\tilde{g}_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in A = \cup_{k\geq 1}\{x^k_1, \ldots, x^k_{m(k)}\}$ que es denso en M.

Observemos que dado $x \in M$ $l(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x)$ depende claramente de x, pero veamos que es una isometría. Dados $x, y \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned}
d(l(x), l(y)) &= \lim_{n,m\to\infty} d(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}_m(y)) \\
&\leq \lim_{n,m\to\infty} d(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}_n(y)) + d(\tilde{g}_n(y), \tilde{g}_m(y)) \\
&\leq \lim_{n,m\to\infty} d(x, y) + d(\tilde{g}_n(y), \tilde{g}_m(y)) \\
&= d(x, y) + \lim_{n,m\to\infty} d(\tilde{g}_n(y), \tilde{g}_m(y)) = d(x, y),
\end{aligned}$$

donde usamos que $d(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}_n(y)) = d(x, y)$ para todo n. Por densidad de A sobre M se tendrá que

$$\lim_{n,m\to\infty} \rho(\tilde{g}_n, \tilde{g}_m).$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}
d(l(x), l(y)) &= \lim_{n,m\to\infty} d(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}_m(y)) \\
&\geq \lim_{n,m\to\infty} d(\tilde{g}_n(x), \tilde{g}_n(y)) - d(\tilde{g}_n(y), \tilde{g}_m(y)) \\
&\geq d(x, y),
\end{aligned}$$

de donde se deduce que l es una isometría.

$\square$

Demostración Teorema 23. En primer lugar debemos definir una medida sobre el espacio métrico (M, d), y lo haremos de forma tal que tenga las buenas propiedades que buscamos y enunciamos en el teorema. Al ser (M, d) compacto, dado $\varepsilon > 0$ sea N_ε una ε-red minimal. Definiremos ahora un funcional sobre el espacio $C(M)$ (de las funciones contínuas sobre M) del siguiente modo:

$$\mu_{N_\varepsilon}(f) = \frac{1}{|N_\varepsilon|} \sum_{x \in N_\varepsilon} f(x).$$

Es fácil ver que $\mu_{N_\varepsilon}(1) = 1$, $\mu_{N_\varepsilon}(f) \geq 0$ siempre que $f \geq 0$ y además

$$\|\mu_{N_\varepsilon}\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} |\sum_{x \in N_\varepsilon} f(x)| \leq \sum_{x \in N_\varepsilon} |f(x)| \leq 1,$$

además μ_{N_ε} es lineal, luego son todos funcionales contínuos de $C(M)$. Luego contamos con un conjunto de funcionales en $B_{C(M)^*}$, debido al teorema de representación de Riesz sabemos que el dual de $C(M)$ es el espacio de las medidas borelianas y regulares sobre M que notaremos

$\mathcal{M}(M)$. Por el teorema de Banach-Alaoglu $B_{C(M)^*}$ es débil* compacto, y como $C(M)$ es separable, por teorema de Stone - Weierstrass, resulta que la topología débil* en $C(M)^* = \mathcal{M}(M)$ es metrizable y luego existe una sucesión $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ y una medida $\mu \in \mathcal{M}(M)$ tal que esa sucesión converge en la topología débil* a μ, o sea que para cualquier $f \in C(M)$

$$\mu_{N_{\varepsilon_i}}(f) \longrightarrow \mu(f) = \int_M f d\mu.$$

La medida límite μ hereda las propiedades antes enumeradas para la familia de medidas $(\mu_{N_\varepsilon})_{\varepsilon>0}$, o sea, $\mu(1) = 1$, si $f \geq 0$ entonces $\mu(f) \geq 0$ y $\|\mu\| = 1$ (ya que $\|\mu\| \leq 1$ y $\mu(1) = 1$), luego μ es una medida de probabilidad.

Veamos ahora que la definición de μ no depende de la red minimal N_ε elegida, o sea que, dada $(N'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ otra familia de redes minimales considerando la respectiva familia de medidas definida como

$$\mu'_{N_\varepsilon}(f) = \frac{1}{|N'_\varepsilon|}\sum_{x\in N'_\varepsilon} f(x),$$

y para cualquier sucesión $(\varepsilon'_j)_{j\geq 1}$ conseguida a travéz del argumento anterior, $\mu_{\varepsilon'_j} \longrightarrow \mu$ en el sentido débil*. Sea entonces $(N'_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ cualquier familia de redes minimales, mostraremos a continuación que existe, para cada $\varepsilon > 0$ una biyección

$$\phi_\varepsilon : N_\varepsilon \longrightarrow N'_\varepsilon,$$

tal que $d(x, \phi_\varepsilon(x)) < 2\varepsilon$. Suponiendo que existe tal familia de biyecciones tendremos, dada $f \in C(M)$,

$$\begin{aligned}
|\mu_\varepsilon(f) - \mu_\varepsilon(f)'| &= \Big|\frac{1}{|N_\varepsilon|}\sum_{x\in N_\varepsilon} f(x) - \frac{1}{|N'_\varepsilon|}\sum_{x'\in N'_\varepsilon} f(x')\Big| \\
&= \frac{1}{|N_\varepsilon|}\sum_{x\in N_\varepsilon} f(x) - \frac{1}{|N_\varepsilon|}\sum_{x\in N_\varepsilon} f(\phi_\varepsilon(x)) = \Big|\frac{1}{|N_\varepsilon|}\sum_{x\in N_\varepsilon} f(x) - f(\phi_\varepsilon)\Big| \\
&\leq \sup_{d(a,b)\leq 2\varepsilon} |f(a) - f(b)| \longrightarrow_{(\varepsilon\to 0)} 0
\end{aligned}$$

Para probar que dado $\varepsilon > 0$ existe tal ϕ_ε pensaremos en el grafo bipartito dado por $\{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ donde $x \sim y$ si $x \in N_\varepsilon, y \in N'_\varepsilon$ y $B(x,\varepsilon) \cap B(y,\varepsilon) \neq \emptyset$ y veremos que satisface la condición de Hall, eso sumado a que $|N_\varepsilon| = |N'_\varepsilon|$, son las hipotesis del Teorema 26 que asegura la existencia de dicha biyección por la condición de minimalidad de ambas redes.

Veamos entonces que el grafo que recién definimos cumple efectivamente con la condición de Hall. Supongamos que no es así, en ese caso debería existir un subconjunto $A \subset N_\varepsilon$ tal que $|A| > |K(A)|$ y se tendrá entonces que $(N_\varepsilon \backslash A) \cup K(A)$ es una ε-red de M con menos elementos que N_ε, lo cual es absurdo. Aclaremos por que vale la última afirmación, dado $z \in M$ existen $x \in N_\varepsilon$ e $y \in N'_\varepsilon$ tales que $z \in B(x, \varepsilon) \cup B(y, \varepsilon)$, supongamos que $x \in A$, en ese caso, por la definición de $K(A)$ y como fue definida la relación de vecindad en el grafo $y \in K(A)$; hemos probado entonces que para cualquier elemento $z \in M$ existe $x \in (N_\varepsilon \setminus A) \cup K(A)$ tal que $z \in B(x, \varepsilon)$, luego $(N_\varepsilon \setminus A) \cup K(A)$ es una ε-red.

Hasta aquí hemos visto que cierta medida μ es punto fijo de la familia de medidas que nace de considerar los promedios de f sobre las ε-redes para todo $\varepsilon > 0$ con la topología débil* debido a que cierto grafo que surge naturalmente del problema cumple con las hipotesis del Teorema 26 (de Hall). Veamos que esa medida que hasta ahora solo hemos probado que existe (probamos la buena definición) falta ver que es G-invariante para conseguir una medida como la que se nombra en el enunciado del teorema. Veamos que μ es G-invariante, si $g \in G$, como G actúa en M por isometrías luego, para cualquier $\varepsilon > 0$ y dada una ε-red minimal N_ε, veremos que $gN_\varepsilon = N'_\varepsilon$ es otra ε-red minimal, usando esto se sigue

$$\begin{aligned}
\mu(f) &= \lim_{i \to \infty} \mu'_{\varepsilon_i}(f) \\
&= \lim_{i \to \infty} \frac{1}{|N_\varepsilon|} \sum_{x \in gN_{\varepsilon_i}} f(x) \\
&= \lim_{i \to \infty} \frac{1}{|N_\varepsilon|} \sum_{x \in N_{\varepsilon_i}} f(gx) = \lim_{i \to \infty} \mu_{\varepsilon_i}(f \circ g) = \mu(f \circ g),
\end{aligned}$$

luego dado cualquier conjunto $A \subset M$ que sea boreliano, considerando la función característica de A χ_A (que vale 1 para todo elemento de A y 0 en su complemento) obtenemos que para cualquier $g \in G$

$$\mu(A) = \int_M \chi_A d\mu = \mu(\chi_A) = \mu(\chi_A \circ g) = \mu(gA),$$

o sea que μ es G-invariante.

Probemos ahora la unicidad de la medida. Por el Lema 14 se tiene que (G, ρ) es un espacio métrico compacto (con ρ como en el lema) que actúa sobre sí mismo isométricamente. Al ser G compacto, como actúa sobre si mismo por multiplicación y la acción es transitiva, fiel y por isometrías, por lo probado hasta recién, existe una medida de probabilidad ν definida sobre G que es además G-invariante, o sea que para cualquier $f \in C(G)$ y cualquier $g \in G$

$$\int_G f(g)d\nu(g) = \int_G f(gh)d\nu(g).$$

Sea μ otra una medida de probabilidad G-invariante sobre M (que también existe por la primera parte de existencia de la demostración), dada $f \in C(M)$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\nu(G)\int_M f d\mu &= \int_G \int_M f(x)d\mu(x)d\nu(g) \\
&= \int_G \int_M f(gx)d\mu(x)d\nu(g) \ \textit{(por G-invarianza de } \mu) \\
&= \int_M \Big(\int_G f(gx)d\nu(x)\Big)d\mu(x) \ \textit{(Fubini)}.
\end{aligned}$$

Veamos que $\int_G f(gx)d\nu(x)$ no depende de x. Fijado $x \in M$ y dado $y \in M$, por la transitividad de la acción existe $h \in G$ tal que $y = hx$, por lo que

$$\int_G f(gy)d\nu(g) = \int_G f(ghx)d\nu(g) = \int_G f(h(gx))d\nu(g) = \int_G f(gx)d\nu(g),$$

notando que $F(g) = f(gx)$ define una función contínua sobre G. Esto implica que, si notamos $\overline{\nu}(f) = \int_G f(gx)d\nu(x)$ tendremos

$$\nu(G)\int_M f d\mu = \overline{\nu}(f)\int_M d\mu,$$

y luego

$$\int_M f d\mu = \frac{\overline{\nu}(f)}{\nu(G)}\mu(M),$$

como μ es medida de probabilidad entonces $\int_M f d\mu = \dfrac{\overline{\nu}(f)}{\nu(G)}$ que de un lado de la igualdad no depende de ν y del otro no depende de μ, luego no depende de ninguna, solo depende de f, lo que implica la unicidad de μ. $\square$

Capítulo 4

Violaciones no acotadas

Veremos en este capítulo una manera de probar la existencia de estado cuánticos con violaciones a desigualdades de Bell tan grandes como uno quiera en el caso de tres observadores. la pregunta de sí existían o no este tipo de violaciones fue planteada en la década del '70 por Tsirelson, quién probodó que para el caso bipartito las violaciones son siempre acotadas. La técnica que reproduciremos aquí, usada en [10] para probar este hecho, involucra nociones de probabilidades. En esencia las técnicas de este tipo buscan probar que el conjunto de elementos con cierta propiedad tiene probabilidad positiva, luego existirán elementos con esa propiedad. De todas formas la utilización de este recurso no bastará para encontrar estos estados, como veremos en el capítulo.

Por otro lado veremos que la teoría de espacios de operadores, que introduciremos a continuación, brinda el contexto más adecuado para entender las violaciones a desigualdades de Bell y en particular para aplicar la técnica antes mencionada.

A continuación diremos que dos sucesiones cumplen la relación de orden $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \preceq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si existe $C > 0$ tal que $a_n \leq Cb_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en este caso diremos también que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \succeq (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; por último diremos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \asymp (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \preceq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \succeq (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

El objetivo del capítulo será demostrar el siguiente teorema, y seguiremos lo hecho en [10].

Teorema 27. 1. *Para cualquier dimensión $d \in \mathbb{N}$ existe $D \in \mathbb{N}$, un estado puro $\psi_d \in \mathbb{C}^d \otimes \mathbb{C}^D \otimes \mathbb{C}^D$, cierta multilineal $T : \mathbb{C}^{d^2} \otimes \mathbb{C}^{D^2} \otimes \mathbb{C}^{D^2} \longrightarrow \mathbb{C}$ y observables tales la violación para $\psi_d \succeq \sqrt{d}$.*

2. *El estado ψ_d (sin normalizar) puede tomarse como*

$$\psi_d = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j,k=1}^{D} \langle U_i e_j, e_k \rangle e_i \otimes e_j \otimes e_k,$$

donde $(U_i)_{i=1}^d \in M_D(\mathbb{C})$ es una familia de matrices unitarias.

4.0.3. Espacios de Operadores y desigualdades de Bell

Presentaremos ahora una teoría conocida con el nombre de espacios de operadores. El estudio de los espacios de operadores surge desde la teoría abstracta de espacios de Banach, dotando a estos espacios de una estructura más compleja. Desde el punto de vista conjuntístico los espacios de Banach y los espacios de operadores serán los mismos (notaremos pronto que todo espacio de Banach es un espacio de operadores y viceversa), pero visto desde la teoría de categorías son diferentes. Más aún veremos luego que un mismo espacio de Banach puede dotarse de diferentes estructuras que lo hacen diferente como espacio de operadores.

Un espacio de operadores es un espacio de Banach X junto con una isometría

$$\phi : X \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

donde $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert. Llamaremos a la terna $(X, \phi, \mathcal{H})$ una representación de X como espacio de operadores.

Notemos que gracias al teorema de Gelfand-Naimark [1][Teorema 4.8.4], toda C^*-álgebra tiene una representación como espacio de operadores. Una observación importante es que cualquier espacio de Banach X tiene una representación como espacio de operadores. De hecho podemos considerar $T = B_{X^*}$ con la topología débil-$*$ que, debido al teorema de Banach-Alaoglu, es un espacio topológico compacto. Mediante la inclusión canónica

$$\begin{aligned} J : X &\longrightarrow X^{**} \subset C(T) \\ x &\longrightarrow x^{**}, \end{aligned}$$

podemos ver a X como subespacio de $C(T)$ isométricamente (donde $x^{**}(y) = y(x)$ para todo $x \in Y, y \in X^*$), y luego al ser $C(T)$ una C^*-álgebra es también un espacio de operadores.

Hemos visto recién que todo espacio de Banach puede ser visto como un espacio de operadores, por otro lado, todo espacio de operadores puede ser visto como un espacio de Banach con tan solo olvidar la estructura extra que da la representación.

Así como en el contexto de espacios de Banach los operadores acotados conforman el conjunto de funciones de interés, los operadores que cumplirán este rol en el caso de los espacios de operadores serán los completamente acotados. A continuación daremos la definición de este tipo de operadores. Dados $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}), Y \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$ dos espacios de operadores y un operador $u : X \longrightarrow Y$, podemos considerar

$$M_n(X) = \{(x_{ij})_{1\leq i,j\leq n} : x_{ij} \in X\},$$

el espacio de las matrices de $n \times n$ con coeficientes en X. Gracias a la estructura de espacio de operadores de X se tiene la identificación natural

$$M_n(X) \subset M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \simeq \mathcal{B}(l_2^n(\mathcal{H})),$$

donde $\mathcal{B}(l_2^n(\mathcal{H})) = \oplus_{i=1}^n \mathcal{H}$. Luego puede proveerse a $M_n(X)$ de la norma que le induce $\mathcal{B}(l_2^n(\mathcal{H}))$ como subespacio. En este contexto podemos definir

$$\begin{aligned} u_n : M_n(X) &\longrightarrow M_n(Y) \\ (x_{ij})_{i,j=1}^n &\longrightarrow (u(x_{ij}))_{i,j=1}^n, \end{aligned}$$

Observemos que $u_n = u \otimes Id_n$ si pensamos que $(x_{ij})_{i=1}^n = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \otimes (e_j \underline{\otimes} e_i)$. Diremos que u es un operador completamente acotado si

$$\|u\|_{cb} := \sup_{n\geq 1} \|u_n\|_{M_n(X)\longrightarrow M_n(Y)} < \infty,$$

llamaremos a $\|u\|_{cb}$ la norma completamente acotada de u o norma *cb* de forma abreviada. Al espacio de los operadores completamente acotados de X a Y lo notaremos $\mathcal{CB}(X, Y)$, y resulta ser un espacio de Banach con la norma *cb* (más aún, puede verse que si $X = Y$, con la composición como producto, este espacio es un álgebra de Banach). Diremos que un operador $u \in \mathcal{CB}(X, Y)$ es un completo isomorfismo si tiene un inverso $u^{-1} \in \mathcal{CB}(X, Y)$ (i.e, $\|u^{-1}\|_{cb} < \infty$), en este caso diremos que X e Y son completamente isomorfos. Un operado u entre dos espacios de operadores se dirá un completo cociente si u_n es cociente para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último llamaremos a $u \in \mathcal{CB}(X, Y)$ completamente contráctil si $\|u\|_{cb} \leq 1$.

Teorema 28. *Todo $*$-morfismo es completamente contráctil.*

Demostración. Es conocido que los $*$-morfismos son siempre operadores contráctiles, por lo cual, dado u uno de ellos tendremos $\|u\| \leq 1$. El siguiente paso será notar que si $u : \mathcal{A}_1 \longrightarrow \mathcal{A}_2$ es un $*$-morfismo entre C^*-álgebras, para todo $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u \otimes Id_n$ será de nuevo un $*$-morfismo. En efecto, dada una matriz escrita en su forma tensorial $x = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} e_i \underline{\otimes} e_j \in M_n(\mathcal{A}_1)$ tendremos

$$\begin{aligned} u \otimes Id_n(x^*) &= u \otimes Id_n\Big(\sum_{i,j=1}^{n} x_{ij}^* e_j \underline{\otimes} e_i\Big) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} u(x_{ij}^*) e_j \underline{\otimes} e_i \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} u(x_{ij})^* e_j \underline{\otimes} e_i \\ &= \Big(\sum_{i,j=1}^{n} u(x_{ij}) e_i \underline{\otimes} e_j\Big)^* \\ &= \Big(u \otimes Id_n(x)\Big)^*. \end{aligned}$$

Luego al ser u_n nuevamente un $*$-morfismo será contractil, por lo que $\|u_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, teniendo entonces que u es completamente contráctil. $\square$

Del mismo modo puede definirse la norma completamente acotada para formas multilineales. Dada una forma multilineal $T : X_1 \times \cdots \times X_N \longrightarrow \mathbb{C}$ con X_j espacio de operadores para todo $1 \leq j \leq N$, si $n_1, \ldots, n_N$ son números naturales cualesquiera, podemos considerar

$$T_{n_1,\ldots,n_N} = T \otimes Id_{n_1} \otimes \cdots \otimes Id_{n_N} : M_{n_1}(X_1) \times \cdots \times M_{n_N}(X_N) \longrightarrow M_{n_1 \cdots n_N}(\mathbb{C}),$$

donde pensamos en las identificaciones

$$\begin{aligned} M_{n_1}(X_1) \times \cdots \times M_{n_N}(X_N) &= (X_1 \times \cdots \times X_N) \otimes M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes M_{n_N}(\mathbb{C}) \\ &= (X_1 \times \cdots \times X_N) \otimes M_{n_1 \cdots n_N}(\mathbb{C}), \end{aligned}$$

por lo que

$$\|T_{n_1,\ldots,n_N}\| = \sup_{A_i \in \mathcal{B}(M_{n_i}(X_i))} \|T_{n_1,\ldots,n_N}(A_1, \ldots, A_N)\|_{M_{n_1 \cdots n_N}(\mathbb{C})}. \tag{4.1}$$

Luego definiremos la norma *cb* de T como

$$\|T\|_{cb} = \sup_{n_j \geq 1,\ 1 \leq j \leq N} \|T_{n_1,\dots,n_N}\|.$$

Diremos que T es una forma multilineal completamente acotada si $\|T\|_{cb} < \infty$. En este contexto llamaremos a $T_{n_1,\dots,n_N}$ el engordado $(n_1,\dots,n_N)$-ésimo de T y a cada N-upla $(n_1,\dots,n_N)$ la llamaremos nivel.

El siguiente lema da una descripción del engordado $(n_1,\dots,n_N)$-ésimo de una forma multilineal cuyo espacio de salida es producto de espacios del tipo $l_\infty^{D_j}$ en función de matrices complejas. En él, el espacio $M_n(l_\infty^m)$ será dotado de la norma dada por la identificación $M_n(l_\infty^m) = l_\infty^m(M_n)$.

Lema 15. *Dadas $A_j \in B_{M_{n_j}(l_\infty^{D_j})}$ para cada $1 \leq j \leq N$ existen $(A_{i_j}^j)_{i_j=1}^{D_j} \in B_{M_{n_j}(\mathbb{C})}$ y tales que para toda forma multilineal $T : l_\infty^{D_N} \times \cdots \times l_\infty^{D_N} \longrightarrow \mathbb{C}$ vale*

$$T_{n_1,\dots,n_N}(A_1,\dots,A_N) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{n_j} T(e_{i_1},\dots,e_{i_N}) A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N, \tag{4.2}$$

y viceversa, dadas $(A_{i_j}^j)_{i_j=1}^{D_j} \in B_{M_{n_j}(\mathbb{C})}$, pueden encontrarse $A_j \in B_{M_{n_j}(l_\infty^{D_j})}$ cumpliendo (4.2). Además si $A_1,\dots,A_N$ son autoadjuntas si y solo sí $(A_{i_j}^j)_{i_j=1}^{D_j}$ lo son para todo $1 \leq j \leq N$.

Demostración. Escribiremos a cada A_j en la base $(e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j})_{k_j,l_j=1}^{n_j}$ de $M_{n_j}(\mathbb{C})$ así

$$A_j = \sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} x_{k_j,l_j}^j e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j},$$

y luego, como $x_{k_j,l_j}^j \in l_\infty^{D_j}$,

$$x_{k_j,l_j}^j = \sum_{i_j=1}^{D_j} \beta_{i_j,k_j,l_j} e_{i_j}.$$

Utilizaremos el abuso de notación $\alpha_{i_j,k_j,l_j} = \beta_{i_1,k_1,l_1} \cdots \beta_{i_N,k_N,l_N} \in \mathbb{C}$, esto podría ser ambigüo en principio aunque veremos que en contexto no aparece tal ambigüedad. Usando la linealidad de T en cada coordenada se tiene

$$T_{n_1,\dots,n_N}(A_1,\dots,A_N) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} \sum_{i_j=1}^{D_j} \alpha_{i_j,k_j,l_j} T(e_{i_1},\dots,e_{i_N})(e_{k_1} \underline{\otimes} e_{l_1}) \otimes \cdots \otimes (e_{k_N} \underline{\otimes} e_{l_N}). \tag{4.3}$$

Consideremos ahora las matrices $A^j_{i_j} = \sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} \beta_{i_j,k_j,l_j} e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j}$. Como $A_j \in M_{n_j}(l_\infty^{D_j})$ tiene norma menor o igual que 1 para todo $1 \leq j \leq N$ se sigue que

$$\|A^j_{i_j}\|_{M_{n_j}(\mathbb{C})} \leq \max_{1\leq k_j \leq n_j} \|(\beta_{i_j,k_j,1},\ldots,\beta_{i_j,k_j,n_j})\|_\infty \leq \|A_j\|_{M_{n_j}(l_\infty^{D_j})} \leq 1,$$

y además

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_N}) A^1_{i_1} \otimes \cdots \otimes A^N_{i_N} \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_N}) \otimes_{j=1}^N \Big(\sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} \beta_{i_j,k_j,l_j} e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j} \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_N}) \sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} \beta_{i_j,k_j,l_j} \otimes_{j=1}^N (e_{k^j_{i_j}} \underline{\otimes} e_{k^j_{i_j}}) \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k_j,l_j=1}^{n_j}\sum_{i_j=1}^{D_j} \alpha_{i_j,k_j,l_j} T(e_{i_1},\ldots,e_{i_N})(e_{k_1}\underline{\otimes} e_{l_1}) \otimes \cdots \otimes (e_{k_N} \underline{\otimes} e_{l_N}) \\
&= T_{n_1,\ldots,n_N}(A_1,\ldots,A_N) \ \ \textit{(gracias a (4.3))}.
\end{aligned}$$

Hemos concluido que, dadas las matrices A_j con elementos en $l_\infty^{D_j}$, podemos conseguir matrices complejas $A^j_{i_j}$ que cumplen (4.2). Para ver que comenzando con las matrices complejas se pueden conseguir aquellas que tienen elementos en $l_\infty^{D_j}$ y que cumplen con (4.2) solo hay que revisar la demostración en el camino inverso.

Observemos ahora que la condición de ser autoadjunta para A_j implica que

$$\begin{aligned}
\sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} (x^j_{l_j,k_j})^* e_{l_j} \underline{\otimes} e_{k_j} &= \Big(\sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} x^j_{k_j,l_j} e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j} \Big)^* \\
&= A_j^* \\
&= A_j \\
&= \sum_{k_j,l_j=1}^{n_j} x^j_{k_j,l_j} e_{k_j} \underline{\otimes} e_{l_j},
\end{aligned}$$

por lo que

$$\sum_{i_j=1}^{D_j} \overline{\beta_{i_j,l_j,k_j}} e_{i_j} = (x^j_{l_j,k_j})^* = x^j_{k_j,l_j} = \sum_{i_j=1}^{D_j} \overline{\beta_{i_j,k_j,j_j}} e_{i_j}.$$

Tenemos entonces que $\beta_{i_j,k_j,l_j} = \overline{\beta_{i_j,l_j,k_j}}$ para todo $1 \leq j \leq N$ y todo par $1 \leq k_j, l_j \leq n_j$, por lo que todos las matrices $A^j_{i_j}$ serán autoadjuntas. Recorriendo el camino inverso se puede probar que si todas las matrices $A^j_{i_j}$ son Hermitianas, luego las A_j lo serán. □

El siguiente teorema brinda una conexión inmediata entre la teoría de espacios de operadores y las desigualdades de Bell y dará un nuevo sentido a su estudio dentro de este contexto.

Teorema 29. *Dada una forma multilineal completamente acotada* $T : l_\infty^{D_1} \times \cdots \times l_\infty^{D_N} \longrightarrow \mathbb{C}$ *vale la igualdad*

$$\|T\|_{cb} = \sup \Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{n_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big|,$$

donde el supremo es tomado sobre todo ρ *con* $tr(|\rho|) \leq 1$ *y* $A_{i_j}^j$ *operadores de norma menor o igual que* 1. *Además vale también*

$$S \leq \|T\|_{cb} \leq 2^N S, \tag{4.4}$$

con

$$S = \sup \Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{n_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big|,$$

donde, ahora, el supremo es tomado sobre todas las N*-uplas de números naturales* $(n_1, \dots, n_N)$*, los operadores de densidad* ρ *definidos sobre* $\otimes_{j=1,\alpha_2}^N l_2^{n_j}$ *y operadores observables* $(A_{i_j}^j)_{1 \leq i_j \leq D_j} \in \mathcal{B}(l_2^{n_j})$ *tales que* $-Id \leq A_{i_j}^j \leq Id$ *para todo* $1 \leq i_j \leq D_j$ *y* $1 \leq j \leq N$.

Demostración. Veremos que para cada nivel $(n_1, \dots, n_N)$ se da la igualdad

$$\|T_{n_1,\dots,n_N}\| = \sup \Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{n_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big|, \tag{4.5}$$

donde el supremos lo tomaremos del modo especificado en el enunciado del teorema, pero esta vez $(n_1, \dots, n_N)$ estará fijo.

Fijemos el nivel $(n_1, \dots, n_N)$ luego, si $\rho \in \mathcal{B}(\otimes_{j=1,\alpha_2}^N l_2^{n_j})$ es un operador cuyo módulo tiene traza menor o igual a 1 y $(A_{i_j}^j)_{i_j=1}^{D_j} \in B_{M_{n_j}(\mathbb{C})}$ para todo $1 \leq j \leq N$,

$$\begin{aligned}
&\Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big| = \\
&= \Big| tr\Big(\rho \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N \Big) \Big| \\
&\leq tr(|\rho|) \Big\| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N \Big\| \\
&\leq \Big\| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N \Big\|.
\end{aligned}$$

Gracias al Lema 15 sabemos que existen $A_j \in B_{M_{n_j}(l_\infty^{D_j})}$ para cada $1 \leq j \leq N$ cumpliendo con la ecuación (4.2). Como

$$\|T(A_1, \ldots, A_N)\|_{M_{n_1 \cdots n_N}(\mathbb{C})} \leq \|T_{n_1,\ldots,n_N}\|,$$

siempre que $A_j \in B_{M_{n_j}(l_\infty^{D_j})}$, se tiene

$$\Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big| \leq \|T_{n_1,\ldots,n_N}\|,$$

para todo ρ con $tr(|\rho|) \leq 1$ y toda familia de matrices complejas $A_{i_j}^j$ de norma menor o igual que 1. Tomando supremo se llega a la primer desigualdad.

Por otro lado, al ser $B_{M_{n_1}(l_\infty^{D_1})} \otimes \cdots \otimes B_{M_{n_N}(l_\infty^{D_N})}$ compacto existen

$$A_1 \in B_{M_{n_1}(l_\infty^{D_1})}, \ldots, A_N \in B_{M_{n_N}(l_\infty^{D_N})},$$

tales que

$$\|T_{n_1,\ldots,n_N}\| = \|T(A_1, \ldots, A_N)\|_{M_{n_1 \cdots n_N}(\mathbb{C})}. \tag{4.6}$$

Nuevamente debido al Lema 15 existen $(A_{i_j}^j)_{i_j=1}^{D_j}$ de norma menor o igual que 1 tales que

$$\|T_{n_1,\ldots,n_N}\| = \Big\| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N \Big\|,$$

y, más aún, por la dualidad dada por la traza y el Teorema de Hahn-Banach existe ρ con $tr(|\rho|) = 1$tal que

$$\|T_{n_1,\ldots,n_N}\| = \Big| \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \ldots, e_{i_N}) tr(\rho A_{i_1}^1 \otimes \cdots \otimes A_{i_N}^N) \Big|.$$

Hemos concluido entonces la igualdad dada en (4.5) para cada nivel, de lo cual se deduce inmediatamente lo sostenido por la primer igualdad dada en el enunciado del teorema.

Lo probado hasta aquí también nos dice que $S \leq \|T\|_{cb}$. Probemos la segunda desigualdad. Tomando los A_j que realizan la norma en (4.6) y considerando la descomposición en operadores autoadjuntos $A_j = \frac{A_j + A_j^*}{2} - i\frac{A_j - A_j^*}{2i}$ y debido a la multilinealidad de T tendremos que

$$\|T_{n_1,\ldots,n_N}\| \leq 2^N \sup \|T(B_1, \ldots, B_N)\|,$$

donde el supremo es tomado sobre todos los $B_1, \dots, B_N$ autoadjuntos. Por el Lema 15, para cada N-ulpa de operadores autoadjuntos $B_1, \dots, B_N$ existen $(A^j_{i_j})_{i_j=1}^{D_j}$ de norma menor o igual a 1 y auotadjuntos tales que

$$\|T(B_1, \dots, B_N)\| = \|\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) A^1_{i_1} \otimes \dots \otimes A^N_{i_N})\|,$$

además, en este caso, $\sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{D_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) A^1_{i_1} \otimes \dots \otimes A^N_{i_N})$ es autoadjunta, por lo cual, tomando ρ la proyección en el autovalor de módulo máximo se tiene un operador de densidad que vía la dualidad de la traza da su norma. Tendremos entonces que

$$\|T(B_1, \dots, B_N)\| \leq 2^N \sup \left| \sum_{j=1}^{N}\sum_{i_j=1}^{n_j} T(e_{i_1}, \dots, e_{i_N}) tr(\rho A^1_{i_1} \otimes \dots \otimes A^N_{i_N}) \right|,$$

con el supremo tomado como lo dice la segunda ecuación en el enunciado del teorema pero esta vez con $(n_1, \dots, n_N)$ fijo. Ahora tomando supremo sobre todos los niveles $(n_1, \dots, n_N)$ tendremos lo que faltaba probar. $\square$

Gracias al Teorema 29, dada una forma multilineal real T, podemos pensar en la violación máxima a una desigualdad de Bell para cualquier operdador de densidad y cualquier familia de observables, como una relación entre la norma T como forma multilineal real y su norma cb. Más explícitamente, si K es el menor número positivo que cumple

$$\|T\|_{cb} \leq K \|T\|_{\infty, \mathbb{R}}, \tag{4.7}$$

recordando la ecuación (1.21) que define una violación máxima, tendremos que toda violación máxima deberá ser menor o igual que K. Por otro lado el Teorema 29 puede ser interpretado de forma inversa y, de cumplirse la inecuación (4.7), podemos asegurar que existen una sucesión de observables y un operadores de densidad cuyas violaciones tienden, por lo menos, a $\frac{K}{2^N}$.

4.1. Producto tensorial minimal y RC_n

Dados dos espacios de operadores $X \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}), Y \subset \mathcal{B}(\mathcal{K})$, sería bueno poder definir en el producto tensorial $X \otimes Y$ una norma que haga de este espacio de Banach un espacio de operadores que herede su estructura de X e Y como tales. Definiremos al producto tensorial minimal como la completación $X \otimes Y$ como subespacio de $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{\alpha_2} \mathcal{K})$. Este será el menor espacio de Banach tal que

$$X \otimes Y \subset X \otimes_{min} Y \subset \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{\alpha_2} \mathcal{K}),$$

isométricamente.

Hemos visto que la estructura de espacio de operador depende de la representación del espacio de Banach como tal. Podría pasar entonces que para un mismo espacio de Banach X y Hilbert $\mathcal{H}$ haya dos representaciones totalmente diferentes de X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. A continuación veremos un ejemplo de esto que es de vital importancia en la teoría de espacios de operadores, ya que ejemplifica el caso de dos estructuras no completamente isomorfas definidas en un mismo espacio de Banach. Consideremos el espacio de Hilbert de dimensión finita l_2^n, por un lado podemos pensar en la representación de l_2^n dentro de $\mathcal{B}(l_2^n) = M_n(\mathbb{C})$ dada por

$$\begin{aligned} \phi_R : l_2^n &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ e_i &\longrightarrow e_i \underline{\otimes} e_1, \end{aligned}$$

esto da lugar a lo que se conoce como el espacio de operadores columna que notaremos C_n. Por otro lado si utilizamos la representación

$$\begin{aligned} \phi_C : l_2^n &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ e_i &\longrightarrow e_1 \underline{\otimes} e_i, \end{aligned}$$

tendremos el espacio de operadores conocido como fila (en inglés *row*) y que notaremos R_n.

Dados dos espacios de operadores X, Y, con representaciones ϕ_X y ϕ_Y respectivamente, dentro $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ambas (i.e., $\phi_X(X), \phi_Y(Y) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$) definiremos $X \cap Y$, como el espacio de operadores cuyo conjunto es $X \cap Y$ dotado de la norma

$$\|x\|_{X \cap Y} = \max\{\|x\|_X, \|x\|_Y\}.$$

Puede verse que esto resulta un espacio de operadores.

Para este trabajo será de utilidad considerar el espacio $R_n \cap C_n = C_n \cap R_n$, notaremos RC_n. Utilizaremos también el espacio $RC_n \otimes_{min} RC_n$, al cual notaremos RC_n^2. Puede verse que valen la identificaciones isométricas

$$R_n \otimes_{min} R_n = R_{n^2}, \quad C_n \otimes_{min} C_n = C_{n^2}, \quad C_n \otimes_{min} R_n = M_n,$$

y descomponiendo

$$(R_n \cap C_n) \otimes_{min} (R_n \cap C_n) = (R_n \otimes_{min} R_n) \cap (R_n \otimes_{min} C_n) \cap (C_n \otimes_{min} R_n) \cap (C_n \otimes_{min} C_n),$$

es sencillo comprobar que valen las siguiente igualdades

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i \otimes e_i \Big\|_{M_k \otimes_{min} RC_n} = \max \Big\{ \Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i A_i^* \Big\|^{\frac{1}{2}}, \sum_{i=1}^{n} A_i^* A_i \Big\|^{\frac{1}{2}} \Big\} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \otimes (e_i \otimes e_j) \Big\|_{M_k \otimes_{min} RC_n^2} &= \max \Big\{ \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} A_{ij}^* \Big\|^{\frac{1}{2}}, \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}^* A_{ij} \Big\|^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \otimes (e_i \underline{\otimes} e_j) \Big\|_{M_k \otimes_{min} M_k}^{\frac{1}{2}}, \\ &\quad \Big\| \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \otimes (e_j \underline{\otimes} e_i) \Big\|_{M_k \otimes_{min} M_k}^{\frac{1}{2}} \Big\}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

de las que se deduce el siguiente lema.

Lema 16. $\Big\| \sum_{i,j=1}^{N} (e_i \underline{\otimes} e_j) \otimes (e_i \otimes e_j) \Big\|_{M_N(RC_{N^2})} = \sqrt{N}.$

Observemos que tanto ϕ_R como ϕ_C son isometrías ya que

$$\begin{aligned} \|\phi_R(x)\| &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|\phi_R(x)(y)\|_{l_2^n} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} \|\langle e_1, y \rangle x\|_{l_2^n} \\ &= \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle e_1, y \rangle| \|x\|_{l_2^n} = \|x\|_{l_2^n}. \end{aligned}$$

Análogamente se puede ver que $\|\phi_C(x)\|_{M_n} = \|x\|_{l_2^n}$. Además podemos identificar $R_n^* = C_n$ de forma tal que un vector $x \underline{\otimes} e_1 \in C_n$ se aplica a otro $e_1 \underline{\otimes} y R_n$ del modo siguiente,

$$(x \underline{\otimes} e_1)(e_1 \underline{\otimes} y) = \langle x, y \rangle.$$

Esa identificación es isométrica. Análogamente se ve que $C_n^* = R_n$ vía una identificación isométrica. Así se tiene la identificación isométrica $RC_n^* = RC_n$.

El siguiente teorema da una especie de desigualdad de Khintchine no conmutativa y fue probado por Lust-Picar y Pisier en [6]. No incluiremos una demostración de este hecho. En el enunciado del teorema $E_n = \langle \epsilon_i : 1 \leq i \leq n \rangle$ será el espacio generado por las n primeras funciones de Radermacher $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\}$. Considerando el grupo de signos $D_n = \{-1, 1\}^n$ junto con la medida de Haar normalizada ν_n definida allí, puede pensarse $\epsilon_i : D_n \longrightarrow \mathbb{R}$ como la función que da la i-ésima coordenada. De esta manera $E_n \subset L_1(D_n, \nu_n) = l_1^{2^n}$ y, dando a $l_1^{2^n}$ la estructura de espacio de operador inducida por $l_\infty^{2^n}$ debido a $l_1^{2^n} = (l_\infty^{2^n})^*$, E_n hereda una representación como espacio de operadores.

Teorema 30. *[Lust-Picard / Pisier] La aplicación canónica*

$$\begin{aligned} \iota : RC_n^* &\longrightarrow E_n \\ e_j &\longrightarrow \epsilon_j, \end{aligned}$$

se verifica que $\|\iota\|_{cb}\|\iota^{-1}\|_{cb} \leq C$ para cierta constante C universal (no depende de n).

Ha quedado plasmado que en l_2^n uno puede definir muchas estructuras que lo hagan un espacio de operadores. Existe una estructura particular a la que llamaremos minimal y notaremos $min(l_2^n)$. Dicha estructura cumple que, cualquier operador acotado con rango $min(l_2^n)$ será completamente acotado; definiremos a esta estructura como la que hereda l_2^n a través de la inclusión isométrica que queda definida en la base canónica así

$$\begin{aligned} l_2^n &\longrightarrow C(S^{n-1}) \\ e_i &\longrightarrow f_i, \end{aligned}$$

donde $f_i(x) = \langle e_i, x \rangle$ para todo $x \in S^{n-1}$. Al ser $C(S^{n-1})$ una C^*-álgebra tiene una estructura como espacio de operadores. De hecho en el caso de la funciones continuas sobre un espacio topológico localmente compacto pueden incluirse isométricamente en el espacio de operadores acotado de las funciones de cuadrado integrable con la medida de Haar $\mathcal{B}(L_2(T))$, del siguiente modo

$$\phi : C(T) \longrightarrow \mathcal{B}(L_2(T)) \tag{4.10}$$

$$f \longrightarrow \phi_f, \tag{4.11}$$

donde ϕ_f actúa sobre cierta $g \in L_2(T)$ por multiplicación así $\phi_f(g) = fg$. Es sencillo verificar que $\|\phi_f\| = \|f\|_\infty$. El espacio l_2^n equipado con la estructura minimal tiene ciertas propiedades buenas, para poder verlo debemos primero definirlas.

Un espacio de operadores X se llamará λ-exacto si, dada cualquier C^*-álgebra $\mathcal{A}$ y cualquier ideal bilatero cerrado $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$, el operador completamente contráctil

$$Q : \frac{\mathcal{A} \otimes_{min} X}{\mathcal{I} \otimes_{min} X} \longrightarrow \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \otimes_{min} X,$$

cumple que $\|Q^{-1}\| \leq \lambda$.

Lema 17. *Para todo espacio de operadores X se tiene que*

$$X \otimes_{min} min(l_2^n) = X \otimes_\varepsilon l_2^n,$$

como espacios de Banach.

Demostración. En primer lugar, se sabe que $X \otimes_\varepsilon C(S^{n-1}) = \Big(C(S^{n-1}, X), \|\cdot\|_\infty\Big)$ isométricamente (ver [12][Página 49]). Por otro lado, dado $x = \sum_k^n x_k \otimes e_k \in X \otimes_{min} min(l_2^n)$, se tiene la siguiente caracterización de la norma minimal

$$\|x\|_{min} = \sup_{N, v \in B_n} \Big\| \sum_k^n v(x_k) \otimes e_k \Big\|_{M_N(l_2^n)}, \tag{4.12}$$

donde el supremo es tomado sobre todo N natural y $B_N = \{v : X \longrightarrow M_N : \|v\|_{cb} \leq 1\}$ (para más detalles sobre esta caracterización ver [11][*Remark* 2.1.2]).

Como $\varepsilon(x) = \sup_{\varphi \in X^*} \| \sum_k^n \varphi(x_k) \otimes e_k \Big\|_{l_2^n}$ es claro que $\varepsilon(x) \leq \|x\|_{min}$ debido a (4.12).

Veamos que, la inclusión de $C(S^{n-1}, M_N(\mathbb{C}) \subset M_n(C(S^{n-1}))$ es contráctil, o sea que dado $f = \sum_{j=1}^J A_j f_j \in C(S^{n-1}, M_N(\mathbb{C}))$ tenemos que

$$\|f\|_{M_n(C(S^{n-1}))} \leq \|f\|_{C(S^{n-1}, M_N(\mathbb{C}))}. \tag{4.13}$$

De hecho tomando $g_i \in \mathcal{B}(L_2(S^{n-1}))$ para todo $1 \leq i \leq N$

$$
\begin{aligned}
&\|\sum_{j=1}^{J} A_j \otimes f_j(g_1,\dots,g_n)\|^2_{\otimes^N_{k=1,\alpha_2} L_2(S^{n-1})} \\
&= \|\sum_{j=1}^{J} f_j\Big(\sum_{k=1}^{N}(A_j)_{1k}g_k,\dots,\sum_{k=1}^{N}(A_j)_{Nk}g_k\Big)\|^2_{\otimes^N_{k=1,\alpha_2} L_2(S^{n-1})} \\
&= \sum_{l=1}^{N}\|\sum_{j=1}^{J} f_j(\sum_{k=1}^{N}(A_j)_{lk}g_k)\|^2_{L_2(S^{n-1})} \\
&= \sum_{l=1}^{N}\int_{S^{n-1}}\Big|\sum_{j=1}^{J} f_j(y_l)(\sum_{k=1}^{N}(A_j)_{lk}g_k(y_l))\Big|^2 d\mu(y_l) \\
&= \int_{(S^{n-1})^N}\|\sum_{j=1}^{J} A_j \otimes f_j(g_1,\dots,g_n)\|^2 d\mu(y_1)\cdots d\mu(y_N) \\
&\leq \int_{(S^{n-1})^N}\|\sum_{j=1}^{J} A_j \otimes f_j\|^2_\infty \|(g_1(y_1),\dots,g_n(y_N))\|^2 d\mu(y_1)\cdots d\mu(y_N) \\
&\leq \|\sum_{j=1}^{J} A_j \otimes f_j\|^2_\infty.
\end{aligned}
$$

Tomando raiz cuadrada y luego supremo en $\mathcal{B}(L_2(S^{n-1})) \times \cdots \times \mathcal{B}(L_2(S^{n-1}))$ se sigue la desigualdad que buscábamos.

Gracias a la inclusión isométrica $min(l_2^n) \subset C(S^{n-1})$ y a que la inclusión $C(S^{n-1}, M_N(\mathbb{C}) \subset M_n(C(S^{n-1}))$ es contráctil, para todo natural n y cualquier $v \in B_n$ se sigue que

$$
\begin{aligned}
\|\sum_{k}^{n} v(x_k)\otimes e_k\|_{M_n(l_2^n)} &= \|\sum_{k}^{n} v(x_k)\otimes e_k\|_{M_n(S^{n-1})} \\
&\leq \|\sum_{k}^{n} v(x_k)\otimes e_k\|_{C(S^{n-1},M_N(\mathbb{C})} \\
&= \varepsilon\Big(\sum_{k}^{n} v(x_k)\otimes e_k; M_N(\mathbb{C})\otimes C(S^{n-1}\Big) \\
&= \varepsilon((v\otimes Id)x; M_N(\mathbb{C})\otimes C(S^{n-1}) \\
&\leq \|v\otimes Id\|\varepsilon(x; X\otimes C(S^{n-1})) \\
&\leq \|v\|\|Id\|\varepsilon(x; X\otimes l_2^n) \\
&\leq \|v\|_{cb}\|Id\|\varepsilon(x; X\otimes l_2^n) \leq \varepsilon(x; X\otimes l_2^n).
\end{aligned}
$$

Tomando ahora supremo sobre todos los naturales n y sobre los $v \in B_n$ tendremos lo que queríamos probar. □

Corolario 6. *El espacio de operadores $min(l_2^n)$ es 1-exacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Más aún Q, como está definido para operadores λ-exactos será en este caso una completa isometría.*

Demostración. Por el Lema 17 tendremos que, para cualquier C^*-álgebra $\mathcal{A}$ y cualquier ideal bilatero cerrado $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A} \otimes_{min} min(l_2^n)}{\mathcal{I} \otimes_{min} min(l_2^n)} &= \frac{\mathcal{A} \otimes_{\varepsilon} l_2^n}{\mathcal{I} \otimes_{\varepsilon} l_2^n} \\ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \otimes_{min} min(l_2^n) &= \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \otimes_{\varepsilon} l_2^n. \end{aligned}$$

luego basta ver que

$$\begin{aligned} Q : \frac{\mathcal{A} \otimes_{\varepsilon} l_2^n}{\mathcal{I} \otimes_{\varepsilon} l_2^n} &\longrightarrow \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \otimes_{\varepsilon} l_2^n \\ \Big[\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i\Big] &\longrightarrow \sum_{i=1}^n [a_i] \otimes e_i, \end{aligned}$$

es una contracción.

Sea $u = \sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i$, entonces

$$\begin{aligned} \|[u]\|_{\frac{\mathcal{A}\otimes_\varepsilon l_2^n}{\mathcal{I}\otimes_\varepsilon l_2^n}} &= \text{ínf}\{\varepsilon(\sum_{i=1}^n a_i \otimes e_i + \sum_{i=1}^n b_i \otimes e_i) : b_i \in \mathcal{I}\} && (4.14) \\ &= \text{ínf}\{\varepsilon(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i) \otimes e_i : b_i \in \mathcal{I}\} && (4.15) \\ &= \|\sum_{i=1}^n [a_i] \otimes e_i\|_{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}\otimes_\varepsilon l_2^n} = \|Q(u)\|_{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}}\otimes_\varepsilon l_2^n}. && (4.16) \end{aligned}$$

Como $M_n(\mathcal{A})$ es una C^*-álgebra, $M_n(\mathcal{I})$ es un ideal bilatero y cerrado de ella, y

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A} \otimes_{\varepsilon} l_2^n}{\mathcal{I} \otimes_{\varepsilon} l_2^n} \otimes M_n(\mathbb{C}) &= \frac{M_n(\mathcal{A}) \otimes_{\varepsilon} l_2^n}{M_n(\mathcal{I}) \otimes_{\varepsilon} l_2^n} \\ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{I}} \otimes_{\varepsilon} l_2^n \otimes M_n(\mathbb{C}) &= \frac{M_n(\mathcal{A})}{M_n(\mathcal{I})} \otimes_{\varepsilon} l_2^n, \end{aligned}$$

aplicando lo recién obtenido a $Q \otimes Id_n$ se tiene que esta es una isometría. Tenemos entonces que Q es una completa isometría. $\square$

Gracias al Lema 17 y a la ecuación (4.9) se tiene que

$$\|\sum_{i,j=1}^n (e_i \otimes e_j) \otimes (e_i \otimes e_j)\|_{RC_n^2 \otimes_{min} min(l_n^2)} \leq 1 \tag{4.17}$$

4.2. Existencia de una trilineal con violaciones no acotadas

Para un grupo $G = \{g_i\}_{i\geq 1}$ numerable y discreto se tendrá $l_2(G)$, el espacio de Hilbert definido a través del isomorfismo isométrico dado por la asignación

$$\begin{aligned} \phi : l_2 &\longrightarrow l_2(G) \\ e_i &\longrightarrow \delta_{g_i}, \end{aligned}$$

vamos a definir la representación regular a izquierda de

$$\lambda : G \longrightarrow \mathcal{B}(l_2(G)),$$

tal que $\lambda(g)(\delta_h) = \delta_{gh}$. Notaremos $C_{red}(G)$ a la clausura de $\lambda(G)$ en $\mathcal{B}(l_2(G))$ y la llamaremos la C^*-álgebra reducida de G. Observemos que el grupo de matrices unitarias de $N \times N$ $\mathbb{U}_N \subset M_N(\mathbb{C})$ es un subgrupo cerrado de $Isom(\mathbb{C}^N)$, luego por el Teorema 23 existe una única medida de Haar de probabilidad en $\mathbb{U}_N$ la cual notaremos μ_N. Para el grupo libre $\mathbb{F}_n$ con n generadores $\{g_1, \ldots, g_n\}$ su C^*-álgebra reducida puede ser realizada por matrices unitarias aleatorias. En efecto, sean $(U_{N_i})_{i=1}^n$ matrices unitarias y aleatorias en $\mathbb{U}_N^n = \oplus_{i=1}^n \mathbb{U}_N$ equipado de la medida de Haar; definiremos la traza normalizada en $\mathbb{U}_N$ como

$$\tau_N(x) = \frac{1}{N} tr_N(X),$$

para todo $x \in \mathbb{U}_N$, donde tr_N es la traza clásica definida en $M_N(\mathbb{C})$. Dadas $U_1, \ldots, U_n \in \mathbb{U}_N$, llamaremos al morfismo de grupos determinado por

$$\begin{aligned} \pi_{U_1,\ldots,U_n} : \mathbb{F}_n &\longrightarrow \mathbb{U}_N \\ g_i &\longrightarrow U_i, \end{aligned}$$

una representación de $\mathbb{F}_n$ vía $(U_1, \ldots, U_n)$.

Teorema 31. *[Voiculescu] Dado $\varepsilon > 0$ y cierto $1 \neq a \in \mathbb{F}_n$, sea*

$$\Lambda_n(a) = \{(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{U}_N^n : |\tau_N(\pi_{U_1,\ldots,U_n}(a))| < \varepsilon\},$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_N(\Lambda_n(a)) = 1.$

No incluiremos una demostración, para más detalles sobre el Teorema 31 ver [14].

Definamos $\Omega := \{w = (a_1, \ldots, a_k) : k \in \mathbb{N}, 1 \notin (a_1, \ldots, a_k)\}$, el conjunto de k-uplas de palabras distintas de 1. El Teorema 31 dirá que dada una palabra $a \in \mathbb{F}_n$,

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(\{(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{U}_N^n : |\tau_N(\pi_{U_1,\ldots,U_n}(a))| < \frac{1}{k}\}) = 1,$$

por lo cual, dada una k-ulpa $\omega = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega$ existe un número natural N_ω tal que

$$\mu_{N_\omega}(\{(U_1, \ldots, U_n) \in \mathbb{U}_{N_\omega}^n : |\tau_{N_\omega}(\pi_{U_1,\ldots,U_n}(a_i))| < \frac{1}{k}, \forall 1 \leq i \leq k\}) > \frac{1}{2}. \tag{4.18}$$

Gracias a la ecuación 4.18, para cada $\omega = (a_1, \ldots, a_k) \in \Omega$ deben existir $(U_{N_\omega,j})_{j=1}^n \in \mathbb{U}_{N_\omega}^n$ tales que $\tau_{N_\omega}(a_i) < \frac{1}{k}$ para cada $1 \leq i \leq k$. De ahora en más, para cada $\omega \in \Omega$, N_ω y dichas matrices estarán fijos. Podremos entonces simplificar la notación de la siguiente forma, $\pi_{U_{N_\omega,1},\ldots,U_{N_\omega,k}}$ será π_ω y en vez de τ_{N_ω} diremos τ_ω.

Es necesario introducir a continuación algunas nociones acerca de filtros. Dado un conjunto X, un filtro en X es un conjunto $\mathcal{F}$ en partes de X tal que:

1. El conjunto vacío no está en $\mathcal{U}$.

2. Si A y B son subconjuntos de X, $A \subset B$ y $A \in \mathcal{U}$, entonces $B \in \mathcal{U}$.

3. Si $A, B \in \mathcal{U}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{U}$.

4. Si A es subconjunto de X luego A o A^c pertenecen a $\mathcal{U}$.

Diremos que $\mathcal{B}$ es base de un filtro si es no vacía, $\emptyset \notin \mathcal{B}$ y la intersección de dos conjuntos en $\mathcal{B}$ también pertenece a $\mathcal{B}$. Es fácil ver que

$$[\mathcal{B}] = \{F \subset X : B \subset F \;\; \textit{para algún} \;\; B \in \mathcal{B}\},$$

es un filtro, y lo llamaremos el filtro generado por $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son dos filtros sobre X diremos que $\mathcal{F}_1$ es más fino que $\mathcal{F}_2$ si $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$. Dada una función $f : X \longrightarrow Y$, con Y un espacio topológico, si $\mathcal{B}$ es base de un filtro en X, diremos que y es un punto límite de f con respecto a $\mathcal{B}$ si $f^{-1}(V)[\mathcal{B}]$ para cada V entorno de y; a esto lo notaremos $y = \lim_{\mathcal{B}} f$. Por último, llamaremos ultrafiltro a todo filtro maximal en este sentido, o sea, que no existen filtro más finos que él. Puede verse, vía el Lema de Zorn, que para cualquier filtro existe un ultra filtro que lo refina.

Tomemos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ refinando a los conjuntos de la forma

$$\Omega_{\omega=(a_1,\ldots,a_n)} = \Big\{\{b_1,\ldots,b_n\} \subset \mathbb{F}_n : k \leq n, \omega \subset \{b_1,\ldots,b_n\}\Big\}.$$

Observemos que para todo $a \in \Omega$ se tiene que

$$\lim_{\mathcal{U}} \tau_\omega \pi_\omega(a) = 0. \tag{4.19}$$

De hecho, dado $\varepsilon > 0$ podemos tomar $\frac{1}{k} < \varepsilon$ y considerar la k-upla $\omega = (a,\ldots,a)$. Vale que $\tau_\omega(\pi_\omega(a)) < \frac{1}{k}$, más aún si $\overline{b} = (b_1,\ldots,b_n) \in \Omega_{(a,\ldots,a)}$ entonces, como $a \in \{b_1,\ldots,b_n\}$, $\tau_{\overline{b}}(\pi_{\overline{b}}(a)) < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}$. Tenemos entonces que $\tau_\omega(\pi_\omega(a)) \subset (-\varepsilon,\varepsilon)$ para todo $\omega \in \Omega_{a,\ldots,a}$ por lo cual la pre-imagen de $(-\varepsilon,\varepsilon)$ por la función en cuestión incluye siempre un elemento del ultrafiltro. Hemos visto entonces que $\mathcal{U}$ refina al filtro generado por las pre-imágenes, que es lo que queríamos ver.

Consideremos ahora el espacio $l_\infty(\Omega, M_{N_\omega})$ y definamos el ideal bilátero cerrado

$$\mathcal{I} = \{(x_\omega)_\omega \in l_\infty(\Omega, M_{N_\omega}) : \lim_{\mathcal{U}} \tau_\omega(x_\omega^* x_\omega) = 0\}.$$

Tengamos en cuenta también al cociente $M_{\mathcal{U}} = l_\infty(\Omega, M_{N_\omega})/\mathcal{I}$ y la representación de grupo

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{F}_n &\longrightarrow M_{\mathcal{U}} \\ a &\longrightarrow [(\pi_\omega(a))_\omega]. \end{aligned}$$

Observemos que uno puede hacer la misma construcción definiendo $\overline{\pi} : \mathbb{F}_n \longrightarrow M_{\mathcal{U}}$ de manera análoga, pero de forma tal que, dado $N_\omega, \overline{\pi}_{N_\omega} : \mathbb{F}_n \longrightarrow M_{N_\omega}$ quede definido en los generadores de $\mathbb{F}_n$ como $\overline{\pi_\omega}(g_i) = \overline{U}_{N_\omega,i}$.

Pensemos ahora en el producto cartesianos de los grupos libres $\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n$, usemos el espacio $l_\infty(\Omega, M_{N_\omega} \otimes M_{N_\omega})$ y consideremos dentro de él, el ideal bilatero cerrado

$$\mathcal{I}^2 = \{(x_\omega)_\omega : \sum_{\mathcal{U}} \tau_{N_\omega^2}(x_\omega^* x_\omega) = 0\}.$$

Notaremos $M_{\mathcal{U}}^2 = l_\infty(\Omega, M_{N_\omega} \otimes M_{N_\omega})/\mathcal{I}^2$ al cociente y τ_ω^2 a la traza dada por $\tau_\omega^2(x_\omega) = \tau_{N_\omega^2}(x_\omega^* x_\omega)$. Si definimos

$$\begin{aligned} \pi^2 : \mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n &\longrightarrow M_{\mathcal{U}}^2 \\ (a_1, a_2) &\longrightarrow [(\overline{\pi}_\omega(a_1) \otimes \pi_\omega(a_2))_\omega], \end{aligned}$$

se tiene el siguiente teorema.

Teorema 32. *π^2 se extiende a un $*$-morfismo de $\lambda(\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n)''$ $M^2_{\mathcal{U}}$ al que llamaremos π^2.*

No probaremos el Teorema 32, para más detalles sobre este ver [15].

El Teorema 32 será crucial en el siguiente teorema técnico que utilizaremos en la prueba del teorema principal de la sección. El siguiente teorema habla de la existencia de ciertas matrices necesarias para la construcción de una sucesión de formas multilineales cuya norma completamente acotada tienda a infinito mientras que su norma como forma multilineal siempre es acotada.

Teorema 33. *$C_{red}(\mathbb{F}_n)$ es completamente isomorfo a RC_n, más aún, se tiene que*

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i\|_{min} \leq \|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes g_i\|_{min} \leq 2\|\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes e_i\|_{min} \tag{4.20}$$

Una demostración de este hecho puede verse en [11][Teorema 9.7.1]

Teorema 34. *Existen matrices $T^{N_\omega}_{i,i'} \in M_{N^2_\omega}$ tales que, si definimos $S^{N_\omega}_{i,i'} = \overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'} + T^{N_\omega}_{i,i'}$ se tiene que*

$$\sup\{\Big|\sum a_{ii'} b_{jj'} c_{kk'} \langle e_k \otimes e_{k'}, S^{N_\omega}_{ii'} e_j \otimes e_{j'}\rangle\Big|\} \leq 5, \tag{4.21}$$

donde el supremo se toma sobre todos los posibles $\sum_{ii'} |a_{ii'}|, \sum_{jj'} |b_{jj'}|, \sum_{kk'} |c_{kk'}| \leq 1$, y además

$$\lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega(\overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'} S^{N_\omega}_{h,h'}) = \delta_{ih}\delta_{i'h'} \tag{4.22}$$

Demostración. Definamos la aplicación

$$\begin{aligned} id : RC_n &\longrightarrow C_{red}(\mathbb{F}_n) \\ e_i &\longrightarrow g_i, \end{aligned}$$

y definiremos

$$id^2 : RC^2_n \longrightarrow C_{red}(\mathbb{F}_n) \otimes_{min} C_{red}(\mathbb{F}_n) = C_{red}(\mathbb{F}_n \times \mathbb{F}_n)$$

como $id^2 = id \otimes id$. Gracias al Teorema 33 tendremos que $\|id\|_{cb} \leq 2$ y luego $\|id^2\| \leq 4$.

Consideramos $\pi^2 id^2 : RC^2_n \longrightarrow M^2_{\mathcal{U}}$ y su engordado n^2-ésimo

$$\pi^2 id^2 \otimes Id_{n^2} : RC^2_n \otimes_{min} min(l_2^{n^2}) \longrightarrow \frac{l_\infty(M_{N_\omega} \otimes M_{N_\omega})}{\mathcal{I}^2_{\mathcal{U}}} \otimes_{min} min(l_2^{n^2}).$$

Gracias al Teorema 32 sabemos que π^2 es un $*$-morfismo, y por el Lema 28 tendremos entonces que π^2 es completamente contractil. Por otro lado gracias al Lema 4.17

$$\| \sum_{i,i'=1}^{n} \overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'} \|_{M^2_{\mathcal{U}}} \leq 4,$$

y como $min(l_2^m)$ es un espacio de operador 1-exacto, existe un levantado

$$Z_{N_\omega} = \sum_{i,i'=1}^{n} \overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'} + T^{N_\omega}_{ii'} \in M^2_{\mathcal{U}} \otimes_{min} min(l_2^{n^2}),$$

con $T^{N_\omega}_{ii'} \in \mathcal{I}^2_{\mathcal{U}}$ y $\sup_{\omega\in\Omega} \|Z_{N_\omega}\|_{M^2_{\mathcal{U}} \otimes_{min} min(l_2^{n^2})} \leq 5$.

Teniendo en cuenta que $M_{N^2_\omega} \otimes_{min} min(l_2^{n^2}) = M_{N^2_\omega} \otimes_\varepsilon l_2^{n^2}$, tenemos que

$$\sup \left\{ \left| \sum a_{ii'} b_{jj'} c_{kk'} \langle e_k \otimes e_{k'}, S^{N_\omega}_{ii'} e_j \otimes e_{j'} \rangle \right| \right\} = \|Z_{N_\omega}\| \leq 5,$$

donde el supremo se toma sobre todos los posibles $\sum_{ii'} |a_{ii'}|, \sum_{jj'} |b_{jj'}|, \sum_{kk'} |c_{kk'}| \leq 1$, que es una de las cosas que buscábamos probar.

Sólo falta probar (4.22). En primer lugar veamos que

$$\lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))(\overline{U}_{N_\omega,h} \otimes U_{N_\omega,h'})) = \delta_{ih}\delta_{i'h'}, \tag{4.23}$$

ya que, si $i = h, i' = h'$, entonces $(\overline{U}_{N_\omega,h} \otimes U_{N_\omega,h'}) = (U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))^{-1}$, y luego la traza normalizada de su producto será 1, en otro caso, gracias a (4.19), tendremos que vale 0.

Gracias a la linealidad de la traza y del límite, basta ver entonces que

$$\lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))T^{N_\omega}_{hh'}) = 0. \tag{4.24}$$

Usando que la traza induce un producto interno en cada $M_{N^2_\omega}$ y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))T^{N_\omega}_{hh'}) &\leq \lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))(\overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'}))\tau^2_\omega((T^{N_\omega}_{hh'})^* T^{N_\omega}_{hh'}) \\
&= \lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((U^T_{N_\omega,i} \otimes U^*_{N_\omega,i'}))(\overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'})) \lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((T^{N_\omega}_{hh'})^* T^{N_\omega}_{hh'}) \\
&= \delta_{ih}\delta_{i'h'} \lim_{\mathcal{U}} \tau^2_\omega((T^{N_\omega}_{hh'})^* T^{N_\omega}_{hh'}) = 0,
\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $(T^{N_\omega}_{hh'})_{\omega\in\Omega} \in \mathcal{I}^2_{\mathcal{U}}$. Luego gracias a (4.23) y (4.24) conseguimos ver lo que faltaba. □

Observemos que la prueba de la existencia de los $T_{i,i'}^{N_\omega}$ es totalmente no constructiva, ya que involucra la existencia de las matrices $U_{N_\omega,i}$ que se debe a un argumento probabilístico y luego explota el hecho de que $min(l_2^m)$ se 1-exacto por lo que puede levantarse $\sum_{i,i'=1}^{n} \overline{U}_{N_\omega,i} \otimes U_{N_\omega,i'}$ controlando su norma.

Ahora probaremos el Teorema 27.

Demostración del Teorema 27. Definamos el estado (sin normalizar)

$$\psi_{N_\omega} = \frac{1}{\sqrt{nN_\omega}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j,k=1}^{N_\omega} \langle e_j, U_{N_\omega^*,i} e_k \rangle e_i \otimes e_j \otimes e_k,$$

como las matrices $U_{N_\omega,i}$ son unitarias su norma es 1, se tendrá entonces que

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{N_\omega}, \psi_{N_\omega} \rangle &= \frac{1}{nN_\omega} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{j,k,j',k'=1}^{N_\omega} \langle e_j, U^*_{N_\omega,i} e_k \rangle \langle e_{j'}, U^*_{N_\omega,i'} e_{k'} \rangle \langle e_i, e_{i'} \rangle \langle e_j, e_{j'} \rangle \langle e_k, e_{k'} \rangle \\
&= \frac{1}{nN_\omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j,k=1}^{N_\omega} \langle e_j, U^*_{N_\omega,i} e_k \rangle^2 \\
&= \frac{1}{nN_\omega} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{N_\omega} \| U^*_{N_\omega,i} e_k \|^2 \leq 1,
\end{aligned}$$

por lo tanto $\langle \psi_{N_\omega}, \psi_{N_\omega} \rangle \leq 1$, para todo $\omega \in \Omega$.

Definamos ahora la forma trilineal

$$\begin{aligned}
v_{N_\omega} : l_2^{n^2} \times l_2^{N_\omega^2} \times l_2^{N_\omega^2} &\longrightarrow \mathbb{C} \\
((e_i \otimes e_{i'}), (e_j \otimes e_{j'}), (e_k \otimes e_{k'})) &\longrightarrow \langle e_k \otimes e_{k'}, S_{ii'}^{N_\omega} e_j \otimes e_{j'} \rangle.
\end{aligned}$$

Gracias al Teorema 34 vale que $\|v_{N_\omega}\| \leq 5$. Llamemos $q = \iota^*$, con ι la aplicación definida en el Teorema 30, y definamos una forma trilineal T mediante el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
l_\infty^{n^2} \times l_\infty^{N_\omega^2} \times l_\infty^{N_\omega^2} \arrow[d, "q\otimes q\otimes q"'] \arrow[dr, "T"] & \\
l_2^{n^2} \times l_2^{N_\omega^2} \times l_2^{N_\omega^2} \arrow[r, "v_{N_\omega}"] & \mathbb{C}.
\end{tikzcd}$$

En primer lugar $\|T\|_\infty \preceq 1$, ya que

$$
\begin{aligned}
\|T\|_\infty &= \|v_{N_\omega}(q \otimes q \otimes q)\|_\infty \\
&= \sup_{x_1 \in B_{l_\infty^{n^2}}, x_2, x_3 \in B_{l_\infty^{N_\omega^2}}} |v_{N_\omega}(q \otimes q \otimes q)\|_\infty(x_1, x_2, x_3)| \\
&= \sup_{x_1 \in B_{l_\infty^{n^2}}, x_2, x_3 \in B_{l_\infty^{N_\omega^2}}} |v_{N_\omega}(q(x_1), q(x_2), q(x_3))| \\
&\leq \|q\|^3 \sup_{x_1 \in B_{l_\infty^{n^2}}, x_2, x_3 \in B_{l_\infty^{N_\omega^2}}} |v_{N_\omega}(x_1, x_2, x_3)| \\
&= \|q\|^3 \|v_{N_\omega}\| \leq \|q\|^3 5.
\end{aligned}
$$

Además, gracias al Teorema 30 $q : l_\infty^M \longrightarrow RC_m$ es un completo cociente, por lo cual existen $b \in M_n(l_\infty^{2^{n^2}})$ y $\widehat{b} \in M_{N_\omega}(l_\infty^{2^{N_\omega^2}})$ tales que $\|b\|, \|\widehat{b}\| \preceq 1$ y

$$
\begin{aligned}
(q \otimes Id_n)(b) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,i'=1}^{n} (e_i \underline{\otimes} e_{i'}) \otimes (e_i \otimes e_{i'}), \\
(q \otimes Id_{N_\omega})(\widehat{b}) &= \frac{1}{\sqrt{N_\omega}} \sum_{j,j'=1}^{N_\omega} (e_j \underline{\otimes} e_{j'}) \otimes (e_j \otimes e_{j'}),
\end{aligned}
$$

la condición $\|b\|, \|\widehat{b}\| \preceq 1$ se debe al Lema 16 que implica que $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i,i'=1}^{n} (e_i \underline{\otimes} e_{i'}) \otimes (e_i \otimes e_{i'})$ tiene norma 1 para cualquier natural n.

Veamos que para todo n existe cierto N_ω para el cual $\|\langle \psi_{N_\omega}, T_{n,N_\omega,N_\omega}(b, \widehat{b}, \widehat{b})\psi_{N_\omega}\rangle\| \succeq \sqrt{n}$. Primero observemos que

$$
\begin{aligned}
& T_{n,N_\omega,N_\omega}(b, \widehat{b}, \widehat{b}) = \\
&= T \otimes Id_n \otimes Id_{N_\omega} \otimes Id_{N_\omega}(b, \widehat{b}, \widehat{b}) \\
&= v_{N_\omega}(q \otimes q \otimes q) \otimes Id_n \otimes Id_{N_\omega} \otimes Id_{N_\omega}(b, \widehat{b}, \widehat{b}) \\
&= v_{N_\omega}((q \otimes Id_n)b, (q \otimes Id_{N_\omega})\widehat{b}, (q \otimes Id_{N_\omega})\widehat{b}) \\
&= \frac{1}{N_\omega \sqrt{n}} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{j,j',k,k'=1}^{N_\omega} v_{N_\omega}((e_i \otimes e_{i'}), (e_j \otimes e_{j'}), (e_k \otimes e_{k'}))((e_i \underline{\otimes} e_{i'}) \otimes (e_j \underline{\otimes} e_{j'}) \otimes (e_k \underline{\otimes} e_{k'})) \\
&= \frac{1}{N_\omega \sqrt{n}} \sum_{i,i'=1}^{n} \sum_{j,j',k,k'=1}^{N_\omega} \langle e_k \otimes e_{k'}, S_{ii'}^{N_\omega} e_j \otimes e_{j'} \rangle ((e_i \underline{\otimes} e_{i'}) \otimes (e_j \underline{\otimes} e_{j'}) \otimes (e_k \underline{\otimes} e_{k'})),
\end{aligned}
$$

tendremos entonces

$$
\begin{aligned}
&|\langle \psi_{N_\omega}, T_{n,N_\omega,N_\omega}(b,\widehat{b},\widehat{b})\psi_{N_\omega}\rangle| = \\
&= \frac{1}{N_\omega\sqrt{n}}\Big|\langle \psi_{N_\omega}, \sum_{i,i'=1}^{n}\sum_{j,j',k,k'=1}^{N_\omega} \langle e_k\otimes e_{k'}, S_{ii'}^{N_\omega} e_j\otimes e_{j'}\rangle ((e_i\underline{\otimes} e_{i'})\otimes(e_j\underline{\otimes} e_{j'})\otimes(e_k\underline{\otimes} e_{k'}))\ \psi_{N_\omega}\rangle\Big| \\
&= \frac{1}{N_\omega^2 n\sqrt{n}}\Big|\sum_{i,i'=1}^{n}\sum_{j,j',k,k'=1}^{N_\omega} \langle e_k\otimes e_{k'}, S_{ii'}^{N_\omega}(e_j\otimes e_{j'})\rangle \overline{\langle e_j, U_{N_\omega,i}^{*}e_k\rangle}\langle e_{j'}, U_{N_\omega,i'}^{*}e_{k'}\rangle\Big| \\
&= \frac{1}{N_\omega^2 n\sqrt{n}}\Big|\sum_{i,i'=1}^{n} Tr\Big((U_{N_\omega,i}^{T}\otimes U_{N_\omega,i'}^{*})S_{ii'}^{N_\omega}\Big)\Big| \\
&= \frac{1}{n\sqrt{n}}\Big|Tr\Big(\sum_{i,i'=1}^{n}\sum_{h,h'=1}^{N_\omega}\tau_\omega^2((U_{N_\omega,i}^{T}\otimes U_{N_\omega,i'}^{*})S_{hh'}^{N_\omega})(e_i\otimes e_{i'})\underline{\otimes}(e_h\otimes e_{h'})\Big)\Big| \to_{\mathcal{U}} \sqrt{n},
\end{aligned}
$$

ya que el Teorema 34 asegura que

$$
\sum_{i,i'=1}^{n}\sum_{h,h'=1}^{N_\omega}\tau_\omega^2((U_{N_\omega,i}^{T}\otimes U_{N_\omega,i'}^{*})S_{hh'}^{N_\omega})(e_i\otimes e_{i'})\underline{\otimes}(e_h\otimes e_{h'}) \to_{\mathcal{U}} id_{l_2^{n^2}}.
$$

Logramos entonces una forma trilineal cuya norma como tal es acotada pero con norma cb infinita, con lo cual, por el Teorema 29, las violaciones para ella serán no acotadas. Más aún encontramos el operador de densidad y obrservables con los cuales la violación es mayor que alguna constante por $\sqrt{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El operador de densidad es aquel que proviene del estado que se explicita en el enunciado del Teorema 27. □

Capítulo 5

Conclusión

Hemos estudiado a lo largo de este trabajo el problema de las desigualdades de Bell y sus violaciones. Logramos ver las implicaciones que tienen en la interpretación del mundo desde la física y estudiamos varios problemas surgidos del estudio de estas desigualdades mediante técnicas propias del análisis funcional. Vimos una notable relación entre la estructura de las clases de Schatten y las violaciones a desigualdades de Bell, develando una de los tantos vínculos inesperados que hay entre la matemática y la física que hacen tan rica su relación. Además entendimos como los espacios de operadores brindan una nueva interpretación desde la matemática de estas violaciones cuando se considera la norma completamente acotada de una forma multilineal. Pudimos encontrar violaciones no acotadas, aunque de forma para nada constructiva. Queda entonces la pregunta pendiente ¿pueden hallarse de forma constructiva estados cuánticos cuyas violaciones a desigualdades de Bell sean no acotadas? Contestar esta pregunta será muy productivo tanto en el terreno de la matemática como para la física, donde saber que estados dan violaciones no acotadas ayudaría mucho en el desarrollo de experimentos concretos para su estudio en laboratorios. En conclusión, desde el momento del planteo del problema esencial acerca de la no completitud de la cuántica, hecho por EPR a principios del siglo pasado, hasta hoy a corrido mucha agua bajo el puente de las desigualdades de Bell. Gran parte de la evolución en su estudio se debe a la aplicación de técnicas tensoriales en espacios de Banach y de espacios de operadores en él. Asimismo el problema de las desigualdades de Bell ha impulsado el desarrollo de la matemática respondiendo por ejemplo a una pregunta que parecía totalmente disconexa sobre la estructura de las clases de Schatten y dando también la existencia de una forma multilineal con norma acotada pero con norma cb infinita. Creo que este campo de estudio todavía tiene mucho con que sorprendernos y, por lo tanto, vale la pena dedicarse a su estudio.

Bibliografía

[1] W. Arveson. *A short course on spectral theory*, volume 209. Springer, 2002.

[2] J. Briët, H. Buhrman, T. Lee, and T. Vidick. All schatten spaces endowed with the schur product are q-algebras. *Journal of Functional Analysis*, 262(1):1–9, 2012.

[3] A. M. Davie. Quotient algebras of uniform algebras. *Journal of the London Mathematical Society*, 2(1):31–40, 1973.

[4] J. Diestel, H. Jarchow, and A. Tonge. *Absolutely summing operators*, volume 43. Cambridge University Press, 1995.

[5] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical review*, 47(10):777, 1935.

[6] F. Lust-Piquard and G. Pisier. Non commutative khintchine and paley inequalities. *Arkiv för Matematik*, 29(1):241–260, 1991.

[7] N. D. Mermin. Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states. *Physical Review Letters*, 65(15):1838, 1990.

[8] J. Mujica. *Complex analysis in Banach spaces: holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions*. Elsevier, 1985.

[9] D. Pérez-Garcıa. The trace class is a q-algebra. *rn*, 1(r1):1, 2006.

[10] D. Perez-Garcia, M. M. Wolf, C. Palazuelos, I. Villanueva, and M. Junge. Unbounded violation of tripartite bell inequalities. *Communications in Mathematical Physics*, 279(2):455–486, 2008.

[11] G. Pisier. *Introduction to operator space theory*, volume 294. Cambridge University Press, 2003.

[12] R. A. Ryan. *Introduction to tensor products of Banach spaces*. Springer, 2002.

[13] E. Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(49):823–828, 1935.

[14] D. V. Voiculescu, K. J Dykema, and A. Nica. *Free random variables*. Number 1. American Mathematical Soc., 1992.

[15] Simon Wassermann. On tensor products of certain group¡ i¿ c¡/i¿¡ sup¿â¡/sup¿-algebras. *Journal of Functional Analysis*, 23(3):239–254, 1976.

[16] R. F. Werner and M. M. Wolf. All-multipartite bell-correlation inequalities for two dichotomic observables per site. *Physical Review A*, 64(3):032112, 2001.

[17] V. J. Yohai. Notas de probabilidades y estadística. 2003.

[18] M. Żukowski and Č. Brukner. Bell's theorem for general n-qubit states. *Physical review letters*, 88(21):210401, 2002.