UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

UNA APLICACIÓN DE LA GAMMA-CONVERGENCIA A LA APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DEL PROBLEMA DEL OBSTÁCULO.

Mabel Alicia Salinovich

Director: Dr. Ariel L. Lombardi
Co – Director: Lic. Pedro R. Marangunic

Diciembre de 2014

A Rodrigo, Ramiro, Joaquín y Matías

Pido perdón a los adultos por haber dedicado este humilde trabajo a cuatro niños. Tengo una seria excusa: estas personas son lo mejor que tengo en el mundo. Tengo otra excusa: estos niños comprenden todo lo importante. Tengo una tercera excusa: estos niños se nutren sólo de amor. Si todas estas excusas no fueran suficientes, quiero dedicar este trabajo a las cuatro personas "grandes" que serán en un futuro, para que lleguen a ser grandes personas con alma de niños. Amplío pues mi dedicatoria:

A Rodrigo, Ramiro, Joaquín y Matías

porque posiblemente nunca comprendan estos resultados pero insisto, comprenden lo importante.

(Texto inspirado en el libro "El Principito" de Antoine de Saint – Exupéry)

Agradezco enormemente a mis padres por su incondicional apoyo a lo largo de mi vida, a mi hermano por idéntico apoyo y por “hacerme gustar” la Matemática, y a mi esposo e hijos por la infinita paciencia.

También quiero agradecer al Lic. Pedro Marangunic por su entera disponibilidad y confianza, al Dr. Ariel Lombardi por su acompañamiento a lo largo del trabajo y a la Dra Claudia Lederman por su participación en el comienzo del mismo. Sin ellos, nada hubiera sido posible.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales constituyen una de las ramas de la Matemática con mayor inserción en otras ciencias, ya que forman parte de muchos modelos que intentan representar el comportamiento de fenómenos de la naturaleza. Existe un gran número de ejemplos que se pueden citar, entre ellos los problemas de contacto que involucran un sólido elástico y un obstáculo rígido.

Asimismo se pueden mencionar algunos problemas que provienen de ámbitos distintos pero que se pueden modelizar en forma análoga, por ejemplo los precios de opciones americanas dentro de las finanzas, así como el problema del dique poroso, el de Stefan y el del obstáculo dentro de la Física.

Este último problema consiste en hallar la posición de equilibrio de una membrana elástica cuyo borde está fijo, la cual se encuentra por encima de un obstáculo dado: una parte de la membrana "toca" al obstáculo (*zona de contacto*), mientras que la otra está "despegada" del mismo. La frontera que separa ambas regiones es lo que se conoce como *frontera libre.*

A menudo, en diversas aplicaciones de métodos matemáticos se trata de buscar la solución al problema de minimizar una determinada magnitud: área, carga, longitud, energía, etc.

En nuestro caso se intentará hallar

$$u \in V \subset H \quad \text{tal que } J(u) = \underset{v \in V}{ínf}\, J(v)$$

donde

H es un conveniente espacio de Hilbert,

V es un apropiado subconjunto de H (que quedará definido en función del obstáculo ψ), y

$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \ dx\ dy - \int\limits_{\Omega} fu\ dx\ dy$ representa la *energía potencial total.*

Es importante aclarar que tanto el dominio $\overline{\Omega}$, siendo $\overline{\Omega}$ la clausura de Ω, como el obstáculo ψ y la función f son conocidos a priori y que, bajo ciertas condiciones sobre los mismos, este problema de minimización se podrá escribir como una *inecuación variacional.* Esto fue una de las principales motivaciones para el desarrollo de la *teoría de las desigualdades variacionales* y para los *problemas de frontera libre* en las décadas de los 60 y los 70. Los primeros resultados fueron conseguidos por Stampacchia, Lions y Browder, y se centraron en la obtención de una teoría general de existencia y unicidad de la solución (véase [13] y [14]).

En una segunda etapa, Brézis trabaja en la regularidad, dependencia continua y otras propiedades referidas a la solución, para el caso de aquellas inecuaciones variacionales donde el conjunto convexo en el cual se busca dicha solución queda definido mediante algún obstáculo como en nuestro caso (véase [1], [7] y [11]).

Una vez formulado el problema continuo en forma variacional, el *método de elementos finitos* junto con el *método de Galerkin* se encargarán de redefinirlo en forma de *problema discreto* sobre un conveniente V_h, subconjunto cerrado y convexo de un apropiado espacio de Hilbert H_h de dimensión finita. Dado que dicho esquema dependerá del "tamaño" h de la triangulación, y teniendo en cuenta la naturaleza del método (si un método numérico converge, lo hace a medida que el mallado es "menos ralo"), se utilizará entonces a lo largo del trabajo el subíndice h, el cual deberá entenderse como $\frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$, y obviamente tenderá a 0 cuando n tienda a infinito. Cabe observar que si bien n varía en un conjunto discreto de valores mientras que h podría variar teóricamente en un continuo, a la hora de la implementación computacional alcanzará con pensar en valores discretos para h, por lo cual todo lo que aquí se desarrolle se ajustará perfectamente.

Volviendo a V_h y a H_h, para su construcción es imprescindible enumerar cuatro aspectos básicos:

• Por un lado se debe subdividir el dominio $\overline{\Omega}$ mediante una cantidad finita de triángulos que llevarán el nombre de *elementos.* Para cada triángulo se desea conocer el valor de la solución del problema en los respectivos vértices, a los cuales se los llama *nodos.*

• Por otro lado las funciones que estarán en el espacio de dimensión finita deben ser lineales sobre cada elemento de la partición y continuas en la totalidad del dominio.

• Luego se eligen las *funciones base* de dicho espacio de dimensión finita, definiéndolas para cada uno de los nodos antes mencionados. El valor de tales funciones en el interior de cada elemento queda determinado a partir de sus valores en los nodos mediante interpolación.

• Y por último se procede a expresar la solución del problema como combinación lineal de dichas funciones base.

En el caso a considerar acá, el obstáculo $\psi \in H^1(\Omega)$ ($\psi \leq 0$ en $\partial\Omega$), siendo $H^1(\Omega)$ el *espacio de Sobolev* $W^{1,2}(\Omega)$. En una dimensión las funciones de H^1 resultan continuas, permitiendo interpolar en forma más sencilla con un *operador de Lagrange.* Pero en más dimensiones, como en el presente trabajo (donde la dimensión será 2), las funciones de H^1 no necesariamente son continuas. Por ello resulta necesario buscar otro operador de interpolación con características similares, más precisamente la *interpolada de Clément*, la cual se define para "funciones" del *espacio de Lebesgue* L^2 con su usual estructura de *espacio de Hilbert*.

Con el objetivo de hallar un mínimo para J, se buscará combinar el ya mencionado método de elementos finitos con algunos conceptos relacionados a la *convergencia gamma* ($\Gamma-$ *convergencia*) de sucesiones de funcionales.

Ya se habló de posibles particiones del dominio en triángulos cuyas particularidades se detallarán más adelante. A partir del h antes mencionado, V_h estará formado por "funciones" que pasan por encima de la interpolada del obstáculo inicialmente dado. Ahora nuestro problema continuo pasará a ser discreto y será menester introducir un apropiado funcional J_h.

Dado que este funcional define un nuevo problema que verifica hipótesis análogas al anterior, se está en condiciones de decir que el problema discreto admite también solución única.

Un detalle a destacar es que se puede pensar en tantos funcionales J_h como valores de h se consideren, pero cada uno definido en un dominio diferente. Para poder pensarlos como una sucesión, se unificará el lugar de definición considerando un espacio mayor a todos los V_h (en nuestro caso será H) de modo que los incluya.

A partir de ahora ya se está en presencia de una *sucesión de funcionales* F_h que definiremos como $J_h(v)$ en el caso en que $v \in V_h$ e infinito en el caso en que $v \in H - V_h$. Por ende, hallar el mínimo de estos funcionales J_h es lo mismo que hallar el mínimo de F_h, ya que este último no puede alcanzarse fuera de V_h.

Bajo ciertas condiciones, dicha sucesión F_h tendrá *límite gamma* ($\Gamma-$*límite*), el cual no tiene por qué coincidir con el límite puntual. El interés reside en la convergencia de los *minimizantes*, es decir, cómo incidirá esta $\Gamma-$convergencia de los funcionales en la búsqueda del mínimo. Se puede garantizar que si la sucesión de funcionales es *equicoerciva* y además $\Gamma-$converge a un funcional F, entonces la sucesión de minimizantes (y mínimos correspondientes) converge al minimizante (respectivamente al mínimo) del funcional F.

En el Capítulo 2 de esta tesis se refrescan algunos conceptos que serán de gran utilidad a la hora de presentar luego el problema del obstáculo junto a sus diferentes formulaciones. Esto último se hace en el Capítulo 3, donde también se analiza existencia y unicidad de solución. En el Capítulo 4 se describe el método de elementos finitos a partir de la formulación variacional mencionada anteriormente. El Capítulo 5 detalla la teoría sobre $\Gamma-$ convergencia. Finalmente en el 6 se aplica dicha teoría al método de elementos finitos para mostrar convergencia de solución en el problema del obstáculo. Cabe destacar que si bien se omite en esta tesis analizar el orden de convergencia del método, será un desafío extra promover el interés de potenciales lectores de modo que resulte un disparador atractivo para un trabajo futuro. Lo mismo ocurre con su implementación computacional utilizando FreeFem++ o algún paquete similar.

Capítulo 2

Nociones preliminares

2.1. Soporte de una función

Sea

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad\qquad \Omega \text{ abierto conexo, no necesariamente acotado.}$$

Se define

$$sop\ f = \overline{\{x \in \Omega \ / \ f(x) \neq 0\}}.$$

2.2. Funciones infinitamente derivables de soporte compacto

2.2.1. El espacio $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$

Se define el espacio de funciones infinitamente derivables en Ω con soporte acotado en Ω, el cual resultará compacto (cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto), y se notará de la siguiente manera:

$$D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega) = \{\phi \in C^\infty(\Omega) \ / \ sop\ \phi \text{ es subconjunto acotado de } \Omega\},$$

2.2.1.1. Observación

- $D(\Omega)$ es no vacío (contiene a la función constántemente nula de dominio Ω).
- $D(\Omega)$ es espacio vectorial con las operaciones usuales, de dimensión infinita.

• $D(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.

• $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, es decir, dada $f \in L^p(\Omega)$, existe una sucesión $\{\phi_k\} \subset D(\Omega)$ / $\|f - \phi_k\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x) - \phi_k(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \to 0$.

2.2.2. Convergencia de sucesiones en $\mathbf{C}_0^\infty(\Omega)$

Dado entonces $D(\Omega)$ con su estructura de espacio vectorial, se define la noción de *convergencia de sucesiones.*

Sea $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \subset D(\Omega)$ y $\phi \in D(\Omega)$. Se dice que $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty \to \phi$ si:

• $\exists\ C \subset \Omega$ compacto tal que, $\forall k \in \mathbb{N}$, *sop* $(\phi_k) \subset C$.

• Además $\forall n \in \mathbb{N}_0$, $\phi_k^{(n)} \rightrightarrows \phi^{(n)}$ sobre compactos.

2.3. Funciones generalizadas

2.3.1. Distribución

Se considera ahora una aplicación $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$. La misma recibe el nombre de *distribución sobre* Ω si es lineal y continua, es decir si:

• $T(\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha T(\phi) + \beta T(\psi),\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \forall \phi, \psi \in D(\Omega)$.

• $\phi_k \to \phi \ en \ D(\Omega) \Rightarrow T(\phi_k) \to T(\phi) \ en \ \mathbb{R}$.

2.3.2. Espacio de distribuciones

Se define el espacio de todas las distribuciones:

$$D'(\Omega) = \{T : D(\Omega) \to \mathbb{R} \ / \ T \text{ es lineal y continua}\},$$

vale decir el dual de $D(\Omega)$.

2.3.2.1. Observación

• $D'(\Omega)$ es espacio vectorial con las operaciones usuales.

• $D'(\Omega)$ está incluido en el espacio de todas las aplicaciones lineales de $D(\Omega)$ en $\mathbb{R}$.

2.3.3. Generalización de función localmente integrable

Se verá a continuación cómo el concepto de distribución generaliza el concepto de función localmente integrable. Se quiere asignar a cada $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, una cierta $T_f \in D'(\Omega)$ en forma inyectiva. Para ello se propone lo siguiente:

$$\text{a cada } f \in L^1_{loc}(\Omega), \text{ se le asigna } \; T_f : D(\Omega) \to \mathbb{R} \;/\; \forall \phi \in D(\Omega),\; T_f(\phi) = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx.$$

De ahora en más, dada una función localmente integrable, se la puede ver como función en el sentido clásico o como distribución.

2.3.3.1. Observación

• Tomando la Delta de Dirac se puede ver que $L^1_{loc}(\Omega)$ está en correspondencia con un subespacio propio de $D'(\Omega)$, es decir $L^1_{loc} \subsetneq D'(\Omega)$.

2.3.4. Derivada distribucional

Se desea introducir la derivada de distribuciones pero de un modo tal que extienda a la derivada clásica de funciones. La integración por partes nos proporciona la idea para hacerlo.

Sea *sop* $\phi \subset [a, b]$ entonces

$$\int_a^b f'(x)\phi(x)dx = f(x)\phi(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)\phi'(x)dx = -\int_a^b f(x)\phi'(x)dx.$$

Dada $T \in D'(\Omega)$, se llamará *derivada distribucional de* T a

$$T' : D(\Omega) \to \mathbb{R} \;/\; (T', \phi) = -\,(T, \phi') \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

2.3.4.1. Observación

• Dicha T' también resulta ser una distribución.

• Si f es una función suficientemente regular, puede verse que $(T_f)' = T_{f'}$, vale decir que efectivamente la derivada distribucional de f coincide con la derivada clásica, obteniéndose una *extensión.*

• Toda distribución posee derivada en el campo de las distribuciones, mientras que en la teoría clásica no siempre ocurre. Más aún, toda distribución es infinitamente derivable.

2.4. Espacios de Sobolev

2.4.1. El espacio $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$

Sea $m \geq 1$ un entero y p en la recta ampliada tal que $1 \leq p \leq \infty$, se llamará *espacio de Sobolev* a

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ / \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \text{ multi-índice tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

Es decir que una distribución está en $W^{m,p}(\Omega)$ si ella y todas sus derivadas hasta el orden m inclusive pertenecen a $L^p(\Omega)$.

2.4.1.1. Observación

• $W^{m,p}(\Omega)$ es espacio vectorial.

• $m = 0 \Rightarrow W^{m,p} = L^p(\Omega)$, y $j \leq m \Rightarrow W^{m,p} \subset W^{j,p}$.

2.4.1.2. Norma $\|\bullet\|_{m,p}$

Se introduce una norma en $W^{m,p}(\Omega)$, mediante

$$\|u\|_{m,p} = \left[\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right]^{1/p}.$$

2.4.1.3. Observación

• Dotado de esta norma $W^{m,p}(\Omega)$ resulta ser espacio de Banach.

• Para $p = 2$, dicha norma verifica la igualdad del paralelogramo, por lo cual proviene de un producto interno. Por lo tanto $\forall m \in \mathbb{N}_0, W^{m,2} = H^m$ es un espacio de Hilbert con el producto interno

$$(u, v)_{W^{m,2}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

2.4.2. El espacio $\mathbf{W}^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

En este trabajo se utilizará de manera preferencial el caso $m = 1$ y $p = 2$. Se llamará *espacio de Sobolev* $H^1(\Omega)$ al $W^{1,2}(\Omega)$.

Considerando el caso especial $n = 2$, y recordando el significado de derivada distribucional, se tiene que:

$$H^1(\Omega) =$$
$$\left\{ u \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \exists\ g_1, g_2 \in L^2(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega u(x)\frac{\partial \phi}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega g_i(x)\phi(x)dx \quad \forall \phi \in D(\Omega) \text{ con } i = 1,2 \right\}$$

y se nota $g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

2.4.2.1. Seminorma $|\bullet|_{1,2}$

Se introduce una seminorma en $H^1(\Omega)$,mediante

$$|v|_{H^1(\Omega)} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

2.4.3. El espacio $\mathbf{W}_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$

Se designa como $H_0^1(\Omega)$ a la clausura de $C_0^1(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Como antes se considerará el caso $n = 2$.

2.4.3.1. Observación

• La anterior seminorma no es una norma en H^1, pero sí lo es en H_0^1. Esto último es una consecuencia de la Desigualdad de Poincaré Steklov, que se consigna más abajo. Por otra parte, tal norma proviene del producto interno: $\int_\Omega \nabla u \nabla v \ dxdy$, y es equivalente a la heredada de H^1.

Claramente $D(\Omega)$ es un subespacio de $W^{m,p}(\Omega)$, cualesquiera sean m y p. Al ser $W^{m,p}(\Omega)$ un subespacio de $L^p(\Omega)$ y dado que $D(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, entonces toda función de $W^{m,p}(\Omega)$ se puede aproximar por una sucesión de funciones de $D(\Omega)$ que converge a ella en la norma de $L^p(\Omega)$, pero esto no significa que lo haga en la norma de $W^{m,p}(\Omega)$.

Imponiendo sobre $\partial\Omega$ algunas condiciones, por ejemplo que $\partial\Omega$ sea de Lipschitz, se llega a que el conjunto de las restricciones a Ω de todas las funciones de $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$, es decir, toda función de $W^{m,p}(\Omega)$ se puede aproximar, en la norma de $W^{m,p}(\Omega)$, por funciones infinitamente derivables de soporte compacto, pero los respectivos soportes no necesariamente están contenidos en Ω.

Se desprende que $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$, por lo que $C^{k}(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{m,p}(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}_{0.}$ Esta propiedad es la que permite pensar en condiciones de contorno, ya que muy fácilmente conduce a asignar a cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ una *traza* en $\partial\Omega$, pese a que la frontera es un conjunto de medida nula (véase [15], Pág 162).

En base a estas ideas, se puede mencionar que si $u \in H_0^1(\Omega)$ entonces $u = 0$ en $\partial\Omega$, vale decir que los elementos de $H_0^1(\Omega)$ no son otra cosa que las "funciones"de $H^1(\Omega)$ que, en sentido generalizado, se anulan en la frontera (véase [2], Teorema VIII.11).

La pregunta que surge ahora es cuán regulares son las funciones de $W^{m,p}(\Omega)$. El hecho de que una función y sus derivadas distribucionales hasta el orden m pertenezcan a $L^p(\Omega)$, no parece preanunciar que alguna de su clase sea continua en Ω, ni mucho menos que tenga derivadas continuas. Sin embargo, bajo ciertas condiciones de regularidad de la frontera, surge el siguiente enunciado:

2.4.4. Teorema de Rellich-Kondrachov

(véase [2], Teorema IX.16)

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado con frontera de clase C^1.

Se verifica:

si $p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, p^*)$ donde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

si $p = n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall q \in [1, +\infty)$,

si $p > n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$,

con inyecciones compactas.

En particular $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ $\forall p$ con inyección compacta.

2.4.5. Desigualdad de Poincaré - Steklov

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio.

Entonces $\exists$ una constante $C > 0$ tal que si $v \in H_0^1(\Omega)$ vale

$$\int_{\Omega} v^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx.$$

2.4.5.1. Observación

- Si $v \in H_0^1(\Omega)$, entonces $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \, \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = c \, |v|_{H^1(\Omega)}$.

2.5. Formas bilineales

2.5.1. Forma bilineal sobre un espacio de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert, con $(\cdot,\cdot)$ producto interno sobre H, y $\|\cdot\|$ la norma inducida por dicho producto.

Se dirá que $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una *forma bilineal* sobre H si es lineal en cada una de sus variables.

Es decir, $\forall\alpha$ escalar:

$a(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha a(u_1, v) + a(u_2, v) \qquad \forall u_1, u_2, v \in H$

$a(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha a(u, v_1) + a(u, v_2) \qquad \forall u, v_1, v_2 \in H.$

2.5.2. Forma bilineal simétrica

Una forma bilineal $a(u, v)$ es *simétrica* si

$a(u, v) = a(v, u) \ \ \forall u, v \in H.$

2.5.3. Forma bilineal continua sobre un espacio de Hilbert

Una forma bilineal $a(u, v)$ es *continua* sobre H *si*

$\exists C/ \ |a(u, v)| \leq C \|u\|_H \|v\|_H \quad \forall u, v \in H.$

2.5.4. Forma bilineal coerciva sobre un espacio de Hilbert

Una forma bilineal $a(u, v)$ es *coerciva* sobre H si

existe $\alpha > 0 \ / \ a(v, v) \geq \alpha \|v\|_H^2 \qquad \forall v \in H.$

2.6. Regularidad y estimaciones en $W^{2,p}$

2.6.1. El espacio $C^\alpha(\overline{\Omega})$

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado. Se define:

$$C^\alpha(\overline{\Omega}) = \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R} \text{ tal que } \sup \ \tfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \text{ con } 0 < \alpha < 1 \right\}.$$

Norma $\|\bullet\|_\alpha$

Se introduce una norma en $C^\alpha(\overline{\Omega})$, mediante

$$\|u\|_\alpha = \|u\|_0 + \sup \tfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

donde

$$\|u\|_0 = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| \,.$$

2.6.1.1. Observación

- Dotado de esta norma $C^\alpha(\overline{\Omega})$ resulta ser espacio de Banach.

2.6.2. Operador elíptico

Sea el operador A dado mediante

$$Au = -\sum_{i,j=1\ldots n} a_{i,j}(x) \tfrac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1\ldots n} b_i(x) \tfrac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u.$$

Se dice que el operador A es elíptico en Ω si $\forall x \in \Omega$, $\exists\ \lambda_x$ y Λ_x, ambas mayores que 0, tales que

$$\lambda_x |\zeta|^2 \leq \sum_{i,j=1\ldots n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \leq \Lambda_x |\zeta|^2 \qquad \forall\ \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

Se dice que el operador A es estrictamente elíptico en Ω si $\exists\ \lambda > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1\ldots n} a_{i,j}(x)\zeta_i\zeta_j \geq \lambda |\zeta|^2 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \forall\ \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

2.6.3. Existencia de solución del problema de Dirichlet

(véase [10], Teorema 9.15)

Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^n$ con frontera de clase $C^{1,1}$.

Sea L un operador estrictamente elíptico en Ω.

Si $f \in L^p(\Omega)$

y $g \in W^{2,p}(\Omega)$ con $1 < p < \infty$.

Entonces el problema de Dirichlet $Lu = f$ en Ω, $u = g$ en $\partial\Omega$ tiene única solución $u \in W^{2,p}(\Omega)$.

2.6.4. Estimación L^p de la solución

(véase [10], Lema 9.17)

(véase [8], Pág. 21)

Bajo las hipótesis del teorema anterior, existe una constante C tal que

$$\|u\|_{2,p} \leq C(\|f\|_p + \|g\|_{2,p}).$$

2.6.5. Teorema del Punto Fijo de Schauder

(véase [10], Corolario 11.2)

Sea G un conjunto cerrado y convexo contenido en un espacio de Banach B.

Sea además T una aplicación continua de G en sí mismo tal que la imagen $T(G)$ es precompacta.

Luego T tiene un punto fijo en G.

2.6.6. Principio débil del máximo

Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$.

Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$-\triangle u \leq 0 \qquad \text{en } \Omega.$$

Entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Capítulo 3

Problemas elípticos

Como ya se anticipó someramente en el Capítulo 1, muchos problemas de elasticidad son representados matemáticamente por medio de modelos donde se debe minimizar un funcional J, es decir:

$$\text{hallar } u \in V \subset H \quad \text{tal que } J(u) = \underset{v \in V}{\text{ínf}}\, J(v).$$

Asimismo se adelantó que, bajo ciertas condiciones, estos problemas pueden expresarse en forma variacional, la cual resulta equivalente a la formulación original, y su solución no sólo existe sino que es única.

Este capítulo se basa principalmente en los textos [5] Dacorogna, [8] Friedman, [19] Vázquez y [20] Wolanski, y presenta dos problemas centrales:

El primero es uno simple, referido a un fenómeno que ocurre en un dominio conocido. Se buscará la solución en un espacio vectorial (más específicamente $V = H$), y el problema resultará *lineal*.

El segundo y más importante aún será el problema del obstáculo, que es justamente con el que se trabajará a lo largo de la tesis. Este problema es *no lineal* ya que el conjunto V donde se busca solución no resulta espacio vectorial. Por otro lado, la que se ha denominado en Capítulo 1 como zona de contacto es desconocida a priori y es parte de lo que se trata de determinar, obteniéndose así un problema de frontera libre.

3.1. Problema de la membrana elástica

3.1.1. Descripción

En la teoría clásica de elasticidad, una *membrana* es un cuerpo de pequeño grosor que no ofrece resistencia a curvarse pero que actúa únicamente bajo presión. Geométricamente, se caracteriza por poseer un pequeño espesor a un lado y al otro de lo que informalmente podríamos llamar una "superficie central".

Dicha membrana se verá inicialmente plana, pero luego de ser forzada por una tensión externa, ésta dejará de ser plana para tomar un nuevo formato.

Asumiremos entonces que la membrana entra en contacto con el plano rígido de la base ocupando un cierto dominio Ω acotado de $\Re^2$ (con borde Γ), y que es igualmente estirable en todas las direcciones. A ella se le aplica una fuerza normal distribuida uniformemente que será llamada f, la cual logra deformarla. Su nueva posición vendrá dada por $u(x, y)$.

Se verá más adelante que, una vez que la membrana ya se deformó por el influjo de la fuerza externa y llegó a su equilibrio, la ecuación de *Poisson* será la encargada de describir su comportamiento. Esta ecuación es *estática*, es decir que no tiene sentido hablar de la posición del objeto en un determinado tiempo inicial. Es por ello que no es necesario considerar *condiciones iniciales* (obsérvese que u sólo depende de variables espaciales y no temporales).

Pero existen condiciones (también llamadas *condiciones de contorno*) que determinan la interacción de la membrana con el medio que lo rodea, y sólo tienen sentido cuando el objeto estudiado tiene frontera.

La posición de dicha membrana dependerá de cómo se la sujeta en el borde $\Gamma = \partial\Omega$. Si a la misma se la deforma conforme a una $g(x, y)$, se impondrá que:

$$u = g \text{ en } \partial\Omega.$$

Esto se conoce como condición de *tipo Dirichlet* y consiste en fijar el valor de la función incógnita en los puntos de la frontera. Cuando $g \neq 0$ se dirá que la condición es *no homogénea,* mientras que si $g = 0$ se obtiene un problema con condición *homogénea.*

La *energía potencial total* de la membrana vendrá dada como la diferencia de dos componentes, y esto se debe a que las fuerzas resultantes intervinientes tienen igual dirección (normal a la región Ω del plano) pero sentido opuesto. Esto último resulta fácil de imaginar ya que, mientras algunas fuerzas externas intentan derfomar la membrana, ésta (por sus propiedades) trata de volver a su posición natural.

Dichas componentes resultan ser:

• Por un lado el *trabajo* $F(u)$ que realiza durante el proceso de desplazamiento una *fuerza externa transversal* $f(x,y)$, definido como

$$F(u) = \int_{\Omega} fu \; dx \; dy.$$

• Por otro lado la *energía potencial de deformación* que representa el trabajo que costó estirarla. Este último es proporcional al incremento en el área, debido a que la membrana es elástica.

Esa área es

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \; dx \; dy \simeq \int_{\Omega} 1 + \tfrac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) \; dx \; dy$$

por lo cual el cambio de área se verá como la diferencia entre el área de la membrana estirada y la que corresponde a la membrana sin estirar, es decir

$$\int_{\Omega} 1 + \tfrac{1}{2}(u_x^2 + u_y^2) \; dx \; dy - (\acute{a}rea \; \Omega) = \tfrac{1}{2}\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2) \; dx \; dy = \tfrac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \; dx \; dy$$

y la energía potencial de deformación tendrá la expresión funcional

$$d(u) = \tfrac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \; dx \; dy$$

donde λ es una constante positiva que dependerá de las propiedades elásticas de la membrana, y que se toma igual a 1 sin pérdida de generalidad.

De esta forma se define la energía potencial total cómo

$$J(u) = d(u) - F(u) = \tfrac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \; dx \; dy - \int_{\Omega} fu \; dx \; dy.$$

3.1.2. Minimización del funcional integral

A partir de ahora se tomará, sin pérdida de generalidad, $g = 0$. En la posición de equilibrio, el principio de la energía potencial mínima reduce el problema a encontrar, entre todas las $u = u(x, y)$ admisibles, aquélla que minimice el funcional $J(u)$, es decir

$$\text{hallar } u = 0 \text{ en } \partial\Omega \;/\;\; J(u) \leq J(v) \;\; \forall\, v, \;\text{con } v = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Se analiza entonces, qué debe verificar el extremo del funcional

$$J(u(x,y)) = \int_{\Omega} L((x,y), u(x,y), \nabla u(x,y)) dxdy$$

donde

$L((x,y), u(x,y), \nabla u(x,y)) =$
$\frac{1}{2} |\nabla u|^2 - fu =$
$\frac{1}{2}(\sqrt[2]{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2})^2 - f(x,y)u(x,y) =$
$L(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y})$.

Se supone a partir de ahora que tanto L como u son suficientemente derivables, y se considera la familia paramétrica de superficies

$$u = u(x, y, \epsilon) = u(x, y) + \epsilon\; (v(x, y) - u(x, y)),$$

con $v(x, y)$ función admisible (recordemos que todas las superficies para ser admisibles, deben pasar por Γ que es el borde de Ω).

Dicha familia u contiene:

- La superficie $u = u(x, y)$ en la cual se realiza el mínimo, si $\epsilon = 0$.
- La superficie $u = v(x, y)$, si $\epsilon = 1$.

Entonces el funcional J se transforma en función de ϵ, el cual debe tener un extremo en $\epsilon = 0$.

Por Teorema de Fermat vale:

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}(J(u(x, y, \epsilon))) = 0 \qquad \text{para } \epsilon = 0.$$

Llamaremos por simplicidad $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ y $\delta u = (v(x, y) - u(x, y))$;
entonces

$$u(x,y,\epsilon) = u(x,y) + \epsilon\ \delta u,$$
$$p(x,y,\epsilon) = \frac{\partial u(x,y,\epsilon)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \epsilon\ (\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}) = p + \epsilon\ \delta p,$$
$$q(x,y,\epsilon) = \frac{\partial u(x,y,\epsilon)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \epsilon\ (\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}) = q + \epsilon\ \delta q,$$

quedando así

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \epsilon}(J(u(x,y,\epsilon)))\ |_{\epsilon=0}= \\
&\left\{\frac{\partial}{\partial \epsilon}\int_\Omega L(x,y,u(x,y,\epsilon),p(x,y,\epsilon),q(x,y,\epsilon))\ dxdy\right\}|_{\epsilon=0}= \\
&\int_\Omega (\frac{\partial L}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \epsilon})\ dxdy = \\
&\int_\Omega (\frac{\partial L}{\partial u}\delta u + \frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q)\ dxdy = \\
&\int_\Omega \frac{\partial L}{\partial u}\delta u\ dxdy + \int_\Omega (\frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q)\ dxdy.
\end{aligned}$$

Por otro lado, por la regla del producto para la derivación se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\}\delta u + \frac{\partial L}{\partial p}\delta p,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta u\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\delta u + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q,$$

y se desprende

$$\frac{\partial L}{\partial p}\delta p = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\}\delta u,$$
$$\frac{\partial L}{\partial q}\delta q = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta u\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\delta u.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q)\ dxdy = \\
&\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\right\} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\}\delta u + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta u\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = \\
&\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta u\right\}\right] dxdy - \int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy,
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\}$ es la llamada derivada parcial completa o total con respecto a x. Al calcularla, y se considera fija, pero se toma en cuenta la dependencia de u, p y q de x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial L}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial L}{\partial p})\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial L}{\partial p})\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial q}(\frac{\partial L}{\partial p})\frac{\partial q}{\partial x}$$

en forma análoga

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial L}{\partial q})\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial p}(\frac{\partial L}{\partial q})\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial q}(\frac{\partial L}{\partial q})\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Por la conocida Fórmula de Green

$$\int\limits_{\Omega}(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y})\ dxdy = \int\limits_{\Gamma}(Ndy - Mdx),$$

obteniéndose así

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\delta u\right\}\right] - \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = \\
&\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial L}{\partial p}\delta u\ dy - \frac{\partial L}{\partial q}\delta u\ dx\right] - \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = \\
&\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{\partial L}{\partial p}\ dy - \frac{\partial L}{\partial q}\ dx\right]\delta u - \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = \\
&-\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy
\end{aligned}$$

ya que la primera integral es igual a 0 debido a que, en la frontera Γ, la variación δu es 0.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}(\frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q)\ dxdy = \\
&-\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy.
\end{aligned}$$

Volviendo a la condición necesaria de extremo se llega a

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \epsilon}(J(u(x,y,\epsilon)))\ |_{\epsilon=0}= \\
&\int\limits_{\Omega}\frac{\partial L}{\partial u}\delta u\ dxdy + \int\limits_{\Omega}(\frac{\partial L}{\partial p}\delta p + \frac{\partial L}{\partial q}\delta q)\ dxdy = \\
&\int\limits_{\Omega}\frac{\partial L}{\partial u}\delta u\ dxdy - \int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = \\
&\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\}\right]\delta u\ dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Como esto vale para cualquier δu y además el término entre corchetes es continuo, entonces por el Lema Fundamental del Cálculo Variacional, en la superficie $u = u(x,y)$ donde se realiza el extremo se verificará

$$\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial L}{\partial p}\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}\right\} = 0,$$

concluyendo que dicha $u(x,y)$ debe ser solución de esta ecuación diferencial en derivadas parciales conocida como *ecuación de Ostrogradski* (cuando Ω es un rectángulo, esta ecuación se conoce como ecuación de Euler-Lagrange (véase [5])).

Volviendo a nuestro caso en particular, la ecuación de Ostrogradski correspondiente será

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial u}{\partial y}) - f = 0 \quad \text{en } \Omega.$$

Es decir

$$\Delta u = -f \quad \text{en } \Omega$$

conocida como ecuación de Poisson tal cual se adelantó al principio del capítulo.

Si desde el comienzo de este desarrollo hubiéramos considerado sólo el funcional J, el cálculo habría sido mucho más sencillo, a saber:

$$J(u(x,y,\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \; dxdy + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla (v-u)|^2 \; dxdy + \; \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) \; dxdy - \; \int_{\Omega} f(u + \varepsilon(v-u)) \; dxdy$$

de donde

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon}(J(u(x,y,\epsilon))) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla (v-u) \; dxdy - \int_{\Omega} f(v-u) \; dxdy = 0 \qquad \text{para } \varepsilon = 0.$$

y el resto se reduce a aplicar integración por partes.

3.1.3. Espacio de funciones admisibles

Resulta natural concentrar la atención en aquellas funciones continuamente derivables en Ω de modo que ∇u esté definido.

Muchos problemas provenientes de la matemática aplicada se escriben de manera similar, siendo necesario minimizar un funcional integral. Los conjuntos compactos juegan un rol muy importante a la hora de establecer existencia de solución. Para ello se ha estudiado lo que se conoce como *método directo*, el cuál consiste básicamente en encontrar una *sucesión minimizante de funciones* que converja dentro del mismo espacio. Es decir, que dada una sucesión v_n de funciones de un cierto conjunto V, tal que $v_n \to u$ (en algún apropiado sentido) y $\underset{n\to\infty}{\text{lím}}\, J(v_n)$ $= \underset{y\in V}{\text{ínf}}\, J(y)$, se pretende que u pertenezca a V.

En los espacios de Banach de dimensión infinita existen sucesiones acotadas que no poseen subsucesiones convergentes. Esta pérdida de compacidad es responsable de algunas dificultades que se presentan en el Cálculo de Variaciones. Otros inconvenientes aparecen si se trabaja con un espacio que no es completo: cuando una sucesión converge (en algún sentido), no siempre se puede ver que la función límite pertenece al mismo espacio. La realidad muestra que, aunque dicha sucesión converja, no siempre se puede ver que la función límite $u \in V$. Un ejemplo de ello es $C^1(\Omega)$, lo que queda demostrado a continuación.

Sea la siguiente sucesión de funciones

$$v_n(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \\ -\frac{n}{2}x^2 + \frac{n}{2}x - \frac{(n-2)^2}{8n} & x \in (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \\ (1-x) & x \in (\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1) \end{cases} .$$

Obviamente esta sucesión converge uniformemente a la función

$$u(x) = \begin{cases} x & x \in (0, \frac{1}{2}) \\ (1-x) & x \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} ,$$

la cual no resulta derivable en $x = \frac{1}{2}$.

Más adelante se verá que un candidato razonable para el espacio de funciones admisibles deberá tener las siguientes propiedades:

- Por un lado deberá ser completo.
- Por otro lado la expresión $J(v)$ debe estar bien definida para cualquier v de dicho espacio.

3.1.4. Solución débil

Hay casos en que, aunque se trabaje con máxima generalidad, el concepto clásico de función no alcanza, como por ejemplo ante la necesidad de derivar cierta función que no es derivable en uno o más puntos del dominio. Por otra parte no es conveniente restringir el conjunto de funciones admisibles, dadas las características del circunstancial problema.

Como ya se vió en Capítulo 2, es posible extender el concepto de función por medio de una distribución o función generalizada.

Dado que C^1 no es cerrado con la norma H^1, aplicaremos esta idea al problema de la membrana planteado al inicio del capítulo, buscando entonces una solución en el espacio de Sobolev $H_o^1(\Omega)$, el cual representa (físicamente hablando) el conjunto de todas las $u(x, y)$ con energía finita de deformación d que satisfacen la condición de borde.

Aún no se puede garantizar la existencia de una función minimizante. Suponiendo que dicha *solución débil* exista en el espacio de las distribuciones, resulta interesante saber cuán suave es, de manera de ver si es también *solución fuerte* o *clásica.* Este tema representa una de las claves fundamentales a la hora de analizar problemas de este tipo, y será retomado al final del capítulo bajo el nombre de *regularidad de la solución.*

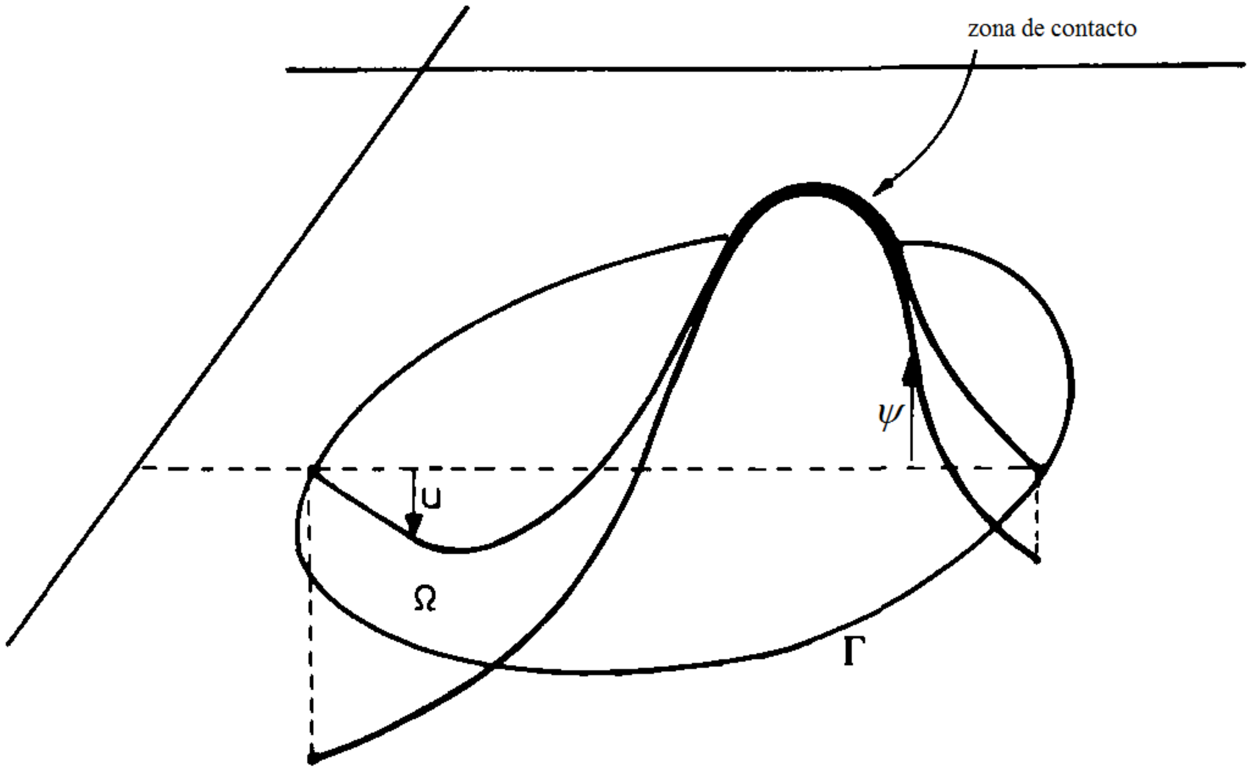
3.2. Problema del obstáculo. Frontera libre

3.2.1. Descripción

Se supone ahora que la membrana está forzada a estar arriba de un cuerpo cuyo borde superior viene dado por $\{(x, y, z)/z=\psi(x, y)\}$. Se quiere encontrar su posición de equilibrio u, la cual debe valer $g = 0$ en la frontera. Resulta natural pedir que ψ esté definida sobre Ω y que verifique además

$$\psi \leq 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Bajo ciertas condiciones de regularidad del *obstáculo* ψ (que serán especificadas más adelante), resulta previsible que existirá una zona de contacto entre la membrana y el obstáculo como muestra el siguiente gráfico:



3.2.2. Minimización del funcional integral

Tomando la idea del problema desarrollado anteriormente, y aceptando que la energía potencial total de la membrana es la misma pese a la presencia del obstáculo, el problema se reduce a:

hallar, entre todas las $u \in H_0^1(\Omega)$ que están por encima del obstáculo en Ω , aquella que minimice $J(v)$

donde $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$.

3.2.3. Espacio de funciones admisibles

Formalizando entonces la idea de recién, se introduce el subconjunto convexo de $H_0^1(\Omega)$,

$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / v \geq \psi \text{ en } \Omega \right\}.$$

Entonces el problema del obstáculo para la membrana, por el principio de minimización de la energía, vendrá dado de la siguiente forma:

$$\text{hallar } u \in V \ / \ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \qquad (3.1)$$

3.2.4. Formulación variacional

Suponiendo la existencia de dicha u, es decir que u es aquélla que resuelve (3.1), se toma $u(x, y, \epsilon) = u(x, y) + \epsilon \ (v(x, y) - u(x, y))$ para cualquier v admisible, con $\epsilon \in [0, 1]$ como ya se consideró en 3.1.2.

Se verifica:

- $u(x, y, \epsilon)$ pertenece a V por ser V convexo.
- Además $J(u) \leq J(u + \epsilon(v - u))$.

Escribiendo $J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - l(u)$ con $a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v$ forma bilineal simétrica y $l(u) = \int\limits_{\Omega} f u$ forma lineal continua (se profundizarán más adelante estos conceptos), se llega a otra formulación del problema, llamada *formulación variacional* o *débil,* de la manera que se expone a continuación.

Primero se hace

$$\begin{aligned}
&J(u + \epsilon(v - u)) - J(u) = \\
&\tfrac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), u + \epsilon(v - u)) - \tfrac{1}{2}a(u, u) - \epsilon l(v - u) = \\
&\tfrac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), u + \epsilon(v - u)) - \tfrac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), u) + \tfrac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), u) - \tfrac{1}{2}a(u, u) - \epsilon l(v - u) = \\
&\tfrac{1}{2}a(u + \epsilon(v - u), \epsilon(v - u)) + \tfrac{1}{2}a(\epsilon(v - u), u) - \epsilon l(v - u) = \\
&\epsilon a(u, v - u) + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 a(v - u, v - u) - \epsilon l(v - u) = \\
&\epsilon \left[a(u, v - u) - l(v - u) \right] + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 a(v - u, v - u) \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Luego, dividiendo por ϵ y tomando límite cuando $\epsilon \to 0$, se llega a que u es solución del siguiente problema:

$$\text{hallar } u \in V \ / \ \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla (v - u) dxdy \geq \int\limits_{\Omega} f(v - u) dxdy \quad \forall v \in V \ . \qquad (3.2)$$

La desigualdad (3.2), llamada *inecuación variacional elíptica*, proporciona una condición necesaria para el problema de minimización (3.1) y debe ser considerada como una analogía de la ecuación de Ostrogradski para el correspondiente problema de la membrana sin obstáculo.

3.2.5. Problemas equivalentes

Si u satisface (3.2), se tiene que $\forall v \in V$

$$J(v) =$$
$$J(u + (v - u)) =$$
$$J(u) + \int_\Omega \nabla u \nabla (v-u) dxdy - \int_\Omega f(v-u)dxdy + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(v-u)|^2 \geq J(u),$$

con lo cual u es solución de (3.1), obteniendose así la equivalencia entre (3.1) y (3.2).

Hasta ahora se propuso buscar la solución u en el espacio $H_0^1(\Omega)$ con cierta restricción y, supuesta la existencia, se llega a una forma alternativa: la formulación variacional o débil del problema. En esta versión, la inecuación resultante se escribe en forma integral, dando lugar a un tratamiento basado en métodos del álgebra lineal sobre un espacio funcional de dimensión infinita.

3.2.6. Formulación complementaria

Resulta interesante detenerse aquí por un momento para analizar ciertas cuestiones importantes asociadas al problema, y que ayudarán a entender mejor el desarrollo posterior.

Dado que el problema proviene de una situación de la realidad física resulta razonable pensar que la función u que describe la posición de la membrana será continua. Se supondrá, hasta nuevo aviso, que la función ψ también es continua.

Si bien el problema con obstáculo se desprendió en forma casi natural del problema sin obstáculo, se observa que en el caso de existir una solución u continua de (3.1) o (3.2), ésta induce la siguiente partición de Ω :

- $\Upsilon = \{(x,y) \in \Omega \ / \ u(x,y) = \psi(x,y)\}$, llamado *conjunto de coincidencia* o *zona de contacto.*
- $\Lambda = \{(x,y) \in \Omega \ / \ u(x,y) \ > \ \psi(x,y)\}$, llamado *conjunto de no coincidencia,* el cual es abierto (pues u es continua) y complementario del anterior.

El conjunto $\Gamma' = \Upsilon \cap \Omega$, llamado *frontera libre*, es desconocido a priori.

Aquí el dominio Ω es conocido pero se tienen distintas ecuaciones (o inecuaciones) para cada parte Υ y Λ del mismo. Dado que Γ' se desconoce, estamos en presencia de un *problema de frontera libre.*

Sea ahora $\varphi(x,y) \in C_0^\infty(\Lambda)$, donde $C_0^\infty(\Lambda)$ es el espacio de funciones con derivada continua de todos los órdenes y soporte compacto en Λ, es decir $sop\varphi \subset \{u > \ \psi\}$. A partir de la ya supuesta existencia de solución u, la cual es continua, se hará un procedimiento similar al anterior.

Tomando $u(x,y,\epsilon) = u(x,y) + \epsilon\varphi(x,y)$, entonces $u(x,y,\epsilon) \in H_0^1(\Omega)$ $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$. Se quiere comparar $J(u(x,y))$ con $J(u(x,y,\epsilon))$ para lo cual se necesita que, como función de x e y, $u(x,y,\epsilon) > \psi(x,y)$. Ahora bien, recordando que $\{u > \ \psi\}$ es abierto y que $sop\varphi \subset \{u > \ \psi\}$, surge que $\exists\ \epsilon_0 > 0$ tal que $u(x,y,\epsilon) = u(x,y) \pm \epsilon\varphi(x,y) \in V, \quad \forall\ 0 < \epsilon < \epsilon_0$
de donde $J(u(x,y)) \leq J(u(x,y,\epsilon))$, es decir:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u + \epsilon\nabla\varphi|^2 - \int_\Omega f(u+\epsilon\varphi) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega fu$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u + \epsilon\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2) - \int_\Omega (f(u+\epsilon\varphi) - fu) \geq 0$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega (|\nabla u + \epsilon\nabla\varphi|^2 - |\nabla u|^2) - \epsilon\int_\Omega f\varphi \geq 0$$
$$\frac{1}{2}\epsilon^2\int_\Omega |\nabla\varphi|^2 + \epsilon\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \epsilon\int_\Omega f\varphi \geq 0$$

dividiendo por ϵ y tomando $\epsilon = 0$ se obtiene

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f\varphi \geq 0.$$

Reemplazando φ por -φ queda

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi - \int_\Omega f\varphi = 0 \quad \forall\varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Si $u \in C^2(\Omega)$, vale usando el Teorema de Green

$$\int_\Omega \nabla u\nabla\varphi\ dx = -\int_\Omega \varphi\triangle u = \int_\Omega f\varphi,$$

que es la forma débil de decir

$$\triangle u = -f \qquad\qquad \text{en } \{u > \ \psi\},$$

sólo pidiendo que $u \in C(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Si $sop\varphi \nsubseteq \{u > \psi\}$, no se puede garantizar que $u(x,y,\epsilon) = u(x,y) + \epsilon\varphi(x,y) \in V$ a menos que $\varphi \geq 0$ y que ϵ sea positivo, pudiendo en principio sólo garantizar la desigualdad $\int\limits_\Omega \nabla u \nabla\varphi - \int\limits_\Omega f\varphi \geq 0$ o

$$\triangle u \geq -f \qquad \text{en sentido débil en } \Omega,$$

quedando así demostrada la siguiente afirmación:

3.2.6.1. Proposición

Si u es solución de (3.2), entonces $\triangle u + f \geq 0$ en el sentido de las distribuciones en Ω. Más aún, si $u - \psi \geq c > 0$ en un subconjunto abierto $V \subset \Omega$, se tiene que $\triangle u = -f$ en V.

Si se sabe que u y ψ son continuas, se puede concluir por la proposición anterior que si $x_0 \in \Omega$ entonces, o bien $u - \psi > 0$ en x_0, con lo cual $\triangle u + f = 0$ en un entorno de x_0, o bien $u = \psi$ en x_0. Esto motiva a introducir otra formulación llamada *formulación complementaria,* que se dará a continuación:

Hallar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \triangle u + f \geq 0 & en\ \Omega \\ u - \psi \geq 0 & en\ \Omega \\ (\triangle u + f)(u - \psi) = 0 & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \partial\Omega \end{cases} . \qquad (3.3)$$

Pero aun no se sabe si la solución de (3.1) o (3.2) satisface lo deseado, es decir $u \in C^2(\Omega)$, como para que (3.3) tenga solución clásica, ni siquiera se está en condiciones de asegurar la continuidad de u de manera de poder efectuar el planteo anterior. Por lo tanto será conveniente valerse de hipótesis más fuertes y mostrar la existencia de solución de (3.3).

3.2.7. Existencia, unicidad y regularidad de la solución

Resulta imprescindible, a esta altura, poder garantizar que estamos frente a un problema con solución, y que la misma es única.

Algunas cuestiones de la teoría de ecuaciones (o inecuaciones) variacionales pueden ser formuladas en términos de formas bilineales sobre espacios de Hilbert. Mediante una generalización de la teoría variacional de problemas de contorno, se garantizará solución única para el problema del obstáculo.

Una vez que esto esté saldado, surgen cuestiones básicas que interesan y que se refieren a la regularidad de tal solución.

Específicamente interesa saber en qué espacio está u (si es derivable, si tiene derivadas continuas). Nos preguntamos por ejemplo si la solución u, en los puntos de la frontera libre, "se pega bien".

Otra cuestión a tratar es la regularidad de la propia frontera libre. Pero en esto, en general, es mucho más difícil obtener resultados. Esto es así para cualquier problema de este tipo.

Sería importante saber, por ejemplo, si la membrana toca al obstáculo en uno o más puntos. Si son muchos, la pregunta que surge es si forman una o varias curvas o una superficie. Y en el caso de ser una curva, si ésta será regular. Y en el caso de ser una superficie, si la frontera de la misma será regular.

Proponemos entonces dedicar esta sección a dichas cuestiones, y comenzamos por el siguiente teorema fundamental.

3.2.7.1. Teorema

Sea H espacio de Hilbert,

$V \subset H$ no vacío, cerrado y convexo,

$a(u, v)$ una forma bilineal simétrica, continua y coerciva sobre H (véase 2.5).

$l(v)$ forma lineal continua.

Entonces existe una única solución $u \in V$ tal que $a(u, v - u) \geq l(v - u)$, $\forall v \in V$

Además si u_1 y u_2 son soluciones correspondientes a l_1 y l_2 entonces $\|u_{1-}u_2\|_H \leq \frac{1}{\alpha} \|l_1 - l_2\|_H$.

Demostración Mostraremos primero la última desigualdad.

Sea u_1 una solución de la inecuación variacional correspondientea l_1.

Sea u_2 una solución de la inecuación variacional correspondientea l_2.

Entonces se tiene:

$a(u_1, v - u_1) \geq l_1(v - u_1) \quad \forall v \in V$, en particular para $v = u_2$

$a(u_2, v - u_2) \geq l_2(v - u_2) \quad \forall v \in V$, en particular para $v = u_1$.

Quedando

$a(u_1, u_2 - u_1) \geq l_1(u_2 - u_1) = -\, l_1(u_1 - u_2)$

$a(u_2, u_1 - u_2) \geq l_2(u_1 - u_2)$

Sumando m.a.m. resulta:

$-a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \geq (l_2 - l_1)(u_1 - u_2)$

es decir

$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (l_1 - l_2)(u_1 - u_2)$

y por lo tanto, como $a(u, v)$ es coerciva se obtiene que:

$\alpha \|u_1 - u_2\|_H^2 \leq a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) \leq (l_1 - l_2)(u_1 - u_2) \leq \|l_1 - l_2\|_H \; \|u_{1-}u_2\|_H$

y de acá se desprende inmediatamente la unicidad.

Queda mostrar la existencia.

Si $a(u, v) = (u, v)$ coincide con el producto interno de H, se sabe que por Teorema de Riesz existirá un $h \in H$ tal que $l(v) = a(h, v) \quad \forall v \in H$.

Se busca entonces $u \in V$ tal que $a(u, v$ - $u) \geq l(v - u) = a(h, v - u) \quad \forall v \in V$. (1)

Se muestra a continuación que u verifica (1) sii $u \in V$ verifica $\|h - u\|_H \leq \|h - v\|_H$ $\forall v \in V$.

$\Rightarrow)$

$\exists u \in V$ tal que $a(u, v$ - $u) \geq a(h, v - u) \quad \forall v \in V \Rightarrow$

$a(h - u, v - u) \leq 0 \quad \forall v \in V$.

Por otro lado

$\|h - v\|_H^2 = \|h - u\|_H^2 + \|v - u\|_H^2 - 2a(h - u, v - u) \geq \|h - u\|_H^2$.

(esto significa que la u buscada es la proyección de h sobre V).

$\Leftarrow)$

$u \in V$ verifica $\|h - u\|_H \leq \|h - v\|_H \quad \forall v \in V$.

Entonces

$\|h - v\|_H^2 \leq \|h - v\|_H^2 = \|h - u\|_H^2 + \|v - u\|_H^2 - 2a(h - u, v - u) \Rightarrow$

$\|v - u\|_H^2 - 2a(h - u, v - u) \geq 0 \quad \forall v \in V$.

Sea $w \in V$ y sea $v = u + \lambda(w - u)$ con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Entonces $v \in V$ y se satisface $\|v-u\|_H^2 - 2a(h-u, v-u) \geq 0$.

Dividiendo por λ y haciéndola tender a 0 se tiene

$a(h-u, w-u) \leq 0$

y como $w \in V$ es arbitrario, se sigue que u satisface $a(u, v$ - $u) \geq a(h, v-u)$.

Es decir que cuando $a(u,v)$ es el producto interno de H, la solución buscada es un elemento de V que minimice la distancia de h a V. Como V es no vacío, cerrado y convexo, dicha proyección existe siempre.

En el caso en que $a(u,v) = ((u,v))$ es una forma bilineal simétrica, continua y coerciva en H que no coincide con el producto interno, se sabe que definirá un producto interno equivalente al original de H. Esto indica que es posible aplicar lo que se mostró arriba, es decir, consideramos ahora $g \in H$ tal que $l(v) = ((g,v)) \quad \forall v \in H$.

Sea $u \in V$ la proyección de g sobre V para la norma inducida por $((\bullet, \bullet))$. Por lo visto antes,

$((g-u, v-u)) \leq 0 \qquad \forall v \in V$

que es equivalente a $a(u, v-u) \geq l(v-u) \qquad \forall v \in V$.■

3.2.7.2. Teorema

Existe solución única del problema del obstáculo (3.2) planteado en forma variacional.

Demostración Tomar:

$H = H_0^1(\Omega)$ espacio de Hilbert,

$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) / v \geq \psi \text{ en } \Omega \right\} \subset H$ no vacío, cerrado y convexo,

$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ forma bilineal simétrica y continua sobre H (además $a(u,v)$ es coerciva por la Desigualdad de Poincaré 2.4.5),

$l(u) = \int_\Omega f u$ forma lineal,

Luego por Teorema 3.2.7.1. resulta que el problema (3.2) admite única solución.■

A partir de ahora se mostrará, mediante otro procedimiento llamado *técnica de penalización* (consiste en proponer problemas penalizados y mostrar que la solución u del problema del obstáculo es límite de las soluciones de dichos problemas), que el problema (3.3) también admite única solución, obteniendo como "plus" resultados de regularidad.

3.2.7.3. Teorema (existencia y regularidad $W^{2,p}$)

Sean $\psi \in C^2(\ \overline{\Omega}\ )$.

$f \in C^\alpha(\ \overline{\Omega}\ )$.

Entonces existe una única solución del problema del obstáculo en forma complementaria y está en $W^{2,p}\quad, \forall\ p<\infty$.

Demostración Para cada $0 < \epsilon < 1$ fijo, se toma una $\beta_\epsilon(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$ de modo que:

$$\beta'_\epsilon(t) \geq 0$$
$$\beta_\epsilon(t) \leq c$$
$$\beta_\epsilon(0) \geq -c$$

donde c es una constante independiente de ϵ.

Además cuando $\epsilon \to 0$, $\beta_\epsilon(t)$ debe verificar las siguiente condiciones:

$$\begin{array}{ll} \beta_\epsilon(t) \to -\infty & si\ t < 0 \\ \beta_\epsilon(t) \to 0 & si\ t > 0 \end{array}$$

De este modo queda definida una *familia de funciones de penalización.*

Se define entonces para cada $0 < \epsilon < 1$ el problema (P_ϵ), conocido como *problema de penalización.*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u - \beta_\epsilon(u-\psi) = -f & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \Gamma \end{array} \right.$$

Conviene ahora establecer dos resultados preliminares.

Lema A Para cada ε fijo, existe al menos una solución u_ϵ del problema (P_ϵ), y está en $W^{2,p}\quad, \forall\ p<\infty$.

Demostración Se fija t, resultando así $\beta_\epsilon(t)$ un número fijo.

Entonces, para $N > 0$

$$\beta_{\epsilon,N}(t) = máx\left\{mín\left\{\beta_\epsilon(t), N\right\}, -N\right\} = \left\{ \begin{array}{ll} -N & \beta_\epsilon(t) \leq -N \\ \beta_\epsilon(t) & -N \leq \beta_\epsilon(t) \leq N \\ N & N \leq \beta_\epsilon(t) \end{array} \right.$$

que resulta un truncamiento de la función β_ϵ cada vez que toma valores por debajo de $-N$, o bien por arriba de N. La razón de acotar por debajo β_ε es para hacer posibles las estimaciones que se utilizarán después.

Fijando p suficientemente grande, se probará a continuación que existe $u_{\epsilon,N} \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_{\epsilon,N}$ es solución de $(P_{\epsilon,N})$

$$\begin{cases} \Delta u = -f + \beta_{\epsilon,N}(u-\psi) & en\ \Omega \\ u = 0 & en\ \Gamma \end{cases}.$$

Para mostrar esto se procede de la siguiente manera:

• Dado $v \in L^p(\Omega)$, existe una única $w \in W^{2,p}(\Omega)$ que resulta solución de:

$$\begin{cases} -\Delta w = F & en\ \Omega \\ w = 0 & en\ \Gamma \end{cases}.$$

donde $F = f - \beta_{\epsilon,N}(v-\psi)$ (véase 2.6.3).

Nótese que $F \in L^p(\Omega)$ y queda fijada al elegir v.

Además esta solución satisface la siguiente estimación a priori (véase 2.6.4):

$$\|w\|_{2,p} \leq c\,\|F\|_p \leq c\,(\|f\|_p + N)$$

donde c es una constante que depende de Ω, pero es independiente de los datos y de $\beta_{\varepsilon,N}$ (dicha independencia hace posible que la constante "c" utilizada en la definición de β_ε coincida con esta constante). Sea $R = c\,(\|f\|_p + N)$.

• Llamando $w = T(v)$, se tiene $T : L^p(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$ y por lo tanto $T : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$.

• De este modo queda definida una aplicación de la bola $B = B_{L^p}[0,R]$ en sí misma. Se puede ver que dicha aplicación verifica las hipótesis del Teorema de Punto fijo de Schauder (véase 2.6.5):

1) B es un subconjunto cerrado y convexo del espacio de Banach $L^p(\Omega)$.

2) T es una aplicación continua.

3) $T(B)$ es precompacta. (esto se muestra usando que T es continua y que $W^{2,p} \subset W^{1,p} \subset L^p$ con inclusión compacta (véase Teorema 2.4.4)).

Entonces

$\exists\ u \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $T(u) = u$, donde $u = u_{\varepsilon,N}$ es solución del problema $(P_{\epsilon,N})$. Además $\|u_{\varepsilon,N}\|_{2,p} \leq R$.

Por construcción se sabe que $\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi)$ está acotado para cada ε y para cada N.

Nos disponemos a encontrar una cota general. Para ello demostraremos el siguiente resultado:

Lema B $\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi)$ está acotado independientemente de ε y N en L^∞, es decir:

$$\left|\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi)\right| \leq c \quad \forall \varepsilon, N.$$

Demostración 1) $\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi) \leq c$ por construcción de la familia β_ε.

2) Falta ver que $-c \leq \beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi)$.

Llamamos $\rho(x,y) = \beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N}(x,y) - \psi(x,y)) = máx\left\{mín\left\{\beta_\epsilon(u_{\varepsilon,N} - \psi), N\right\}; -N\right\}.$

Lo que se sabe por el momento es que, para cada ε y para cada N, ρ tendrá un mínimo. Sea $\mu = mín\rho$. Es decir que existe $(x_0, y_0) \in \overline{\Omega}$ tal que $\rho(x_0, y_0) = \mu$. Supongamos que $\mu \leq 0$ *y* $\mu < \beta_\varepsilon(0)$, porque de lo contrario no queda nada por demostrar.

a) Sea $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$. Entonces $u(x_0, y_0) - \psi(x_0, y_0) \geq 0$.

Por lo tanto

$\mu = \rho(x_0, y_0) = \beta_{\varepsilon,N}(u(x_0, y_0) - \psi(x_0, y_0)) \geq \beta_{\varepsilon,N}(0) \geq -c$ por ser $\beta_{\varepsilon,N}$ creciente.

b) Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$.

Dado que $\beta_{\varepsilon,N}(t)$ es monótona no decreciente en t, $\beta_{\varepsilon,N}(u_{\varepsilon,N}(x,y) - \psi(x,y))$ tendrá un mínimo donde lo tenga $u_{\varepsilon,N}(x,y) - \psi(x,y)$.

$u_{\varepsilon,N}(x,y) - \psi(x,y)$ tiene un mínimo en (x_0, y_0) y es no positivo.

Se puede obtener además, por el Principio del máximo (véase 2.6.6), que:

$-\triangle(u(x_0, y_0) - \psi(x_0, y_0)) \leq 0.$

Resultando:

$\mu = \rho(x_0, y_0) = \beta_{\varepsilon,N}(u(x_0, y_0) - \psi(x_0, y_0)) = \triangle(u(x_0, y_0)) + f(x_0, y_0) \geq \triangle(\psi(x_0, y_0)) + f(x_0, y_0) \geq -c.\blacksquare$ (fin de Lema B)

Resumiendo tenemos:

$\|u_{\varepsilon,N}\|_{2,p} \leq R(N).$

$\left|\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N} - \psi)\right| \leq c \quad \forall \varepsilon, N.$

$\sup_{x\in\Omega} |\Delta u_{\varepsilon,N}(x,y)| \leq c.$

Tomando N suficientemente grande, se tiene que $\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N}-\psi) = \beta_{\epsilon}(u_{\varepsilon,N}-\psi)$ y $u_{\epsilon,N}$ resultan ser también soluciones de los problemas (P_ϵ), y como $\left|\beta_{\epsilon,N}(u_{\varepsilon,N}-\psi)\right| \leq c \quad \forall\varepsilon, N$, por Teorema de estimación $\|u_{\varepsilon,N}\|_{2,p} \leq C$ con C independiente de ε y N, Por lo tanto para cada ε, existe al menos una solución u_ε del problema (P_ϵ).■(fin de Lema A).

Ahora se concentra la atención en el pasaje al límite cuando ε tiende a 0 (N suficientemente grande).

Ya se vió que u_ε está acotado en $W^{2,p}$ para todo ε.

Se toma ε_m una sucesión tal que $\varepsilon_m \to 0$.

Por lo tanto u_{ε_m} está acotado en $W^{2,p}$, y por el Teorema de Eberlein-Shmulyan se puede garantizar que existe una subsucesión $\overline{u_{\varepsilon_m}}$ débilmente convergente a u en $W^{2,p}$.

Utilizando nuevamente resultados de inmersión compacta se llega a que $\overline{u_{\varepsilon_m}} \in C(\overline{\Omega})$ y $\overline{u_{\varepsilon_m}}$ converge uniformemente a u en $\overline{\Omega}$.

Rebautizamos $u_{\varepsilon_m} = \overline{u_{\varepsilon_m}}$

Ya conseguimos una función límite u. El objetivo final será ver que esta u es solución del problema del obstáculo en forma complementaria, lo que daría fin a la demostración del teorema.

1) Se supone primero que $u < \psi$ en algún lugar, es decir que existirá algún punto (x_1, y_1) tal que $u(x_1,y_1) < \psi(x_1,y_1)$.

Como $\{u(x,y) < \psi(x,y)\}$ es abierto por ser u continua, existirá $r > 0$ de modo que la bola cerrada $\overline{B} = B[(x_1,y_1),r] \subset \{u(x,y) < \psi(x,y)\}$.

Se considerará ahora el $\underset{(x,y)\in\overline{B}}{máx}[u(x,y)-\psi(x,y)] = -\gamma$ (con $\gamma > 0$), y luego se elige $\delta = \frac{\gamma}{2}$.

Dado que $u_{\varepsilon_n} \to u$ uniformemente en $\overline{\Omega}$, también $u_{\varepsilon_n} \to u$ uniformemente en $\overline{B}$.

Por lo tanto $\exists\, n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$ y $\forall (x,y) \in \overline{B} \qquad |u_{\varepsilon_n}(x,y) - u(x,y)| < \delta$.

Entonces $\forall n \geq n_0$ y $\forall (x,y) \in \overline{B}$

$u_{\varepsilon_n}(x,y) - \psi(x,y) = u_{\varepsilon_n}(x,y) - u(x,y) + u(x,y) - \psi(x,y) < \delta - \gamma = -\delta$

Por ser β_{ε_n} no decreciente, se tiene que

$\beta_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(x,y) - \psi(x,y)) \leq \beta_{\varepsilon_n}(-\delta) \to -\infty$ cuando $\varepsilon_n \to 0$ por definición de β

Pero esto contradice la estimación a priori $|\beta(u-\psi)| \leq c$.

2) Sabiendo ahora que $u \geq \psi$ en todo punto, se analiza que ocurrirá en aquéllos puntos donde $u > \psi$.

Con un argumento análogo al anterior sale

$\forall n \geq n_0 \qquad \beta_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(x,y) - \psi(x,y)) \rightarrow \quad 0$ cuando $\varepsilon_n \rightarrow 0$ por definición de β .

Pero teníamos

$\Delta u_{\varepsilon_n} + f = \beta_{\epsilon_n}(u_{\varepsilon_n} - \psi) \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon_n \rightarrow 0$, en $\{u(x,y) > \psi(x,y)\}$

Por otra parte $\Delta u_{\varepsilon_n} + f \rightarrow \Delta u + f$ débilmente en L^p.

Luego $\Delta u + f = 0$ en casi todo punto de $\{u(x,y) > \psi(x,y)\}$

Más generalmente

$\overline{lím}_{\varepsilon_n \rightarrow 0} \beta_{\epsilon_n}(u_{\varepsilon_n} - \psi) \leq 0$ en Ω, es decir

$\Delta u + f \leq 0$ en Ω.■(fin de Teorema 3.2.7.3.)

Hasta acá se demostró que el problema complementario admite solución. El siguiente teorema aporta una herramienta fundamental a la hora de mostrar su unicidad.

3.2.7.4. Teorema (véase [8], Teorema 3.3)

Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.7.3.

Sean u_1 y u_2 soluciones correspondientes a f_1 y a f_2 respectivamente. Si $f_1 \geq f_2$ entonces $u_1 \geq u_2$.

3.2.7.5. Corolario (unicidad)

Bajo las hipótesis del Teorema 3.2.7.3. la solución del problema complementario admite única solución.

3.2.7.6. Observación

Bajo estas hipótesis se puede ver que la única solución de (3.3) es también solución de (3.2). Como ya se mostró que el problema (3.2) tiene solución única, éstas coincidirán y entonces estará en $W^{2,p}, \forall\ p < \infty$, y en particular será $C^1(\overline{\Omega})$ si p es suficientemente grande por Teorema de inmersión 2.4.4. (en general las derivadas segundas sobre la frontera libre son discontinuas, arribando a la conclusión de que no se logrará probar que u sea $C^2(\Omega)$). Queda entonces que (3.1) (3.2) y (3.3) son problemas equivalentes bajo estas hipótesis.

3.2.7.7. Máxima regularidad de la solución del problema del obstáculo

Si bien no se profundizará sobre este tema, resulta interesante mencionar que la mayor regularidad posible en el problema del obstáculo es $u \in C^{1,1}(\Omega)$, es decir $u \in C^1(\Omega)$ y ∇u es de Lipschitz en Ω, de modo que $\nabla u = \nabla \psi$ en la frontera libre (véase [20]).

Capítulo 4

Método de elementos finitos en problemas no lineales

Ya se mostró en el Capítulo 3 que, bajo ciertas condiciones, el problema de minimización asociado al problema del obstáculo tiene única solución.

Además dicho problema es equivalente a la siguiente inecuación variacional:

$$\text{hallar} \quad u \in V \quad \text{tal que} \quad a(u,v-u) \geq l(v-u) \qquad \text{para todo } v \in V,$$

la cual obviamente tendrá también solución única.

Con el objetivo de llegar a la versión discreta de dicha desigualdad será conveniente introducir nociones básicas asociadas al método. Surgen entonces conceptos nuevos tales como nodo, triangulación, etc, los cuales junto con el operador de interpolación de Clément asociado a la malla serán ampliantemente utilizados.

De todas formas cabe aclarar que muchos resultados serán sólo enunciados ya que no es el objetivo de la tesis demostrarlos. Para aquel lector que quiera ampliar los conceptos, recomendamos el libro [3] Ciarlet y [4] Clément.

4.1. Forma general de un problema continuo

Tal como se acaba de expresar, una de las maneras de formular un problema de minimización asociado a un fenómeno de la naturaleza es mediante una inecuación variacional de la siguiente forma:

$$\text{hallar } u \in V \quad \text{tal que } a(u, v-u) \geq l(v-u) \quad \forall\, v \in V,$$

donde

V es un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un conveniente espacio de Hilbert H de dimensión infinita,

$a(u, v)$ es una forma bilineal continua, simétrica y coerciva sobre H, y

$l(v)$ es una forma lineal continua sobre H.

4.2. Forma general de un problema discreto

Dado V_h subespacio de H, se puede considerar el problema del siguiente modo:

$$\text{hallar } u_h \in V_h \ \text{ tal que } \ a(u_h, v_h - u_h) \geq l(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in V_h.$$

donde

V_h será un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de un adecuado espacio de Hilbert H_h (a elegir), pero en este caso de dimensión finita,

$a(u, v)$ es una forma bilineal continua, simétrica y coerciva sobre H_h, y

$l(v)$ es una forma lineal continua sobre H_h.

4.3. Discretización

4.3.1. Partición de un dominio general

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado cuya frontera Γ es Lipschitz (en este trabajo se hará referencia a una frontera poligonal). A partir de ahí se realizará un mallado del mismo subdividiéndolo en subdominios también llamados *elementos.*

4.3.2. Triangulación admisible y regular

Un mallado de este tipo será conocido como *triangulación* sobre el dominio Ω y la notaremos (para cada h) Υ_h. Se indicará con K a los elementos de la misma.

Dichos K deben verificar:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{K \in \Upsilon_h} K \ ,$$

y además

• Cada elemento K es un polígono (en nuestro caso serán triángulos), con interior no vacío y conexo.

• Cada elemento K tiene frontera Lipschitz continua (si K es un polígono su frontera es Lipschitz).

• Para cada par K_1 y K_2 distintos, $\overset{\circ}{K_1} \cap \overset{\circ}{K_2} = \emptyset$.

Si una triangulación verifica lo recién enunciado será considerada *admisible* y los vértices de cada K serán llamados *nodos.*

Se dirá que una triangulación es *regular* si existe una constante σ tal que

$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma \qquad \forall K \in \Upsilon_h$

donde:

$h_K = \text{diam } (K)$

$\rho_K = \sup\{\text{diam } (S)$, tal que S es una bola contenida en $K\}$.

4.3.3. Espacio discreto y sus funciones base asociadas a la triangulación

Como ya fue comentado, dado V_h subespacio de H se puede considerar lo que llamamos problema discreto.

Se describe a continuación la manera de construir las *funciones base* p_i de dicho subespacio, las cuales deben verificar las siguiente propiedades:

• $p_i \in C(\overline{\Omega})$.

• Cada función p_i es distinta de cero únicamente en los elementos conectados por el nodo i.

• $p_i = 1$ en el nodo i del polígono K y cero en los otros nodos.

• La función p_i en cada K es un polinomio de grado menor o igual que k donde $k \geq 1$.

4.3.3.1. Observación

• Los nodos se eligen de tal manera que las funciones base pertenecen a H. Por ejemplo, si $k = 1$, se eligen como nodos los vértices de los triángulos. Si $k = 2$, se eligen como nodos los vértices más los puntos medios, etc.

Resumiendo, por definición de base aparecerán convenientes funcionales ϕ_i sobre H /

$$\forall p \in V_h \qquad p = \sum_{1 \leq i \leq N} \phi_i(p) p_i.$$

4.4. Error de discretización

Obviamente se desea estimar el error cometido. Si bien este trabajo no se dedicará, como ya fue mencionado al comienzo, a estudiar el orden de convergencia, existe un resultado que se considera de suma importancia y es el siguiente:

4.4.1. Estimación del error

4.4.1.1. Proposición (véase [3], Teorema 5.1.1)

Sea el espacio de Hilbert H_0^1 con su respectiva norma $\|\bullet\|_{H_0^1}$.
Sea u la solución del problema continuo en V y u_h la solución del problema discreto en V_h.
Sea $a(u,v)$ una forma bilineal continua, simétrica y coerciva sobre H_0^1 y
$l(v)$ una forma lineal continua.

Entonces existirá una constante C independiente de la familia de espacios H_h y V_h tal que

$$\|u - u_h\|_{H_0^1} \leq C \ (\underset{v_h \in V_h}{ínf} \left\{ \|u - v_h\|_{H_0^1}^2 + |a(u, u - v_h) - \ l(u - v_h)| \right\} + \\ \underset{v \in V}{ínf} |a(u, u_h - v) - \ l(u_h - v)| \ )^{\frac{1}{2}}$$

4.4.1.2. Observación

- En el Capítulo 3 se definió la forma bilineal $a(u,v) \quad \forall\ u,v \in H$ y la forma lineal $l(u) \quad \forall\ u \in H$. Además se vio que en el problema lineal de la membrana sin obtáculo V coincide con H. Además el extremo que minimiza el problema debe verificar la ecuación variacional $a(u,v) = \ l(v)$. Se desprende entonces que $V_h = H_h$ y la estimación del error se reduce a lo que se conoce como Lema de Cea.

- Si se verifica la inclusión $V_h \subset V$ (recordar que en este trabajo V_h no está incluído en V), luego el término $\underset{v \in V}{ínf} |a(u, u_h - v) - \ l(u_h - v)|$ desaparecería.

• En el problema del obstáculo, tanto H_h como V_h vendrán definidos mediante un operador lineal y continuo $r_h : H_0^1 \to H_h$. Es por ello que para estimar el error será necesario primero acotar $\|u - r_h u\|_{H_0^1}$, lo cual será tenido en cuenta más adelante.

4.5. Aplicación al problema del obstáculo

Se asume por simplicidad que Ω es un dominio poligonal en el plano con frontera Γ.

4.5.1. Interpolación de Lagrange para funciones continuas

Se introduce esta interpolación, la cual estará bien definida para funciones de H^1 en dimensión 1, ya que las mismas resultan continuas.

Supongamos por un momento que el dominio es el segmento cerrado $[0,1]$.

Se divide el mismo en segmentos, de modo de poder definir una partición cuyos nodos son x_i, con $1 \leq i \leq n$.

Se presenta entonces un nuevo espacio, el cual es de dimensión finita y tendrá la siguiente forma:

$$H_h = \{poligonales\ continuas\ con\ v\acute{e}rtices\ en\ x_i,\ que\ se\ anulan\ en\ x_1\ y\ en\ x_n\}$$

A partir de ahora, la interpolada de Lagrange vendrá definida como:

$l_h : H \subset C[0,1] \to H_h$

tal que $\quad l_h v = \underset{i:1,..,M}{\Sigma} v(x_i) w_i$

donde $w_i(x_j) = \delta_{ij}$ es base.

4.5.2. Interpolación de Clément para funciones más generales

(véase [3], Ejercicio 3.2.3)

Un análisis más cuidadoso de esta interpolada y de sus principales propiedades se puede ver también en [4]. No obstante, se dará a continuación una primera idea del tema, el cual será retomado en el Capítulo 6.

Al pasar a dimensión 2, no se puede garantizar que las funciones H^1 sigan siendo continuas. A raíz de ello es que resulta necesario definir esta nueva interpolación.

A partir de ahora se considerarán un espacio de elementos finitos que llamaremos H_h y una triangulación admisible $\{\Upsilon_h\}$ sobre el dominio Ω. Cada vértice de los triángulos será un nodo que anotaremos $\{a_i\}$. Para cada $a_i, 1 \leq i \leq M$, de la triangulación, se asocia una función base $p_i \in H_h$, de modo que $p_i(a_j) = \delta_{ij} \qquad 1 \leq i,\, j \leq M$.

Se define entonces para cada i:

$S_i = sop\ p_i$

Dada una función $v \in L^2(\Omega)$,

para cada $i = 1, .., M$, sea $P_i v$ la proyección de la función v en el espacio $L^2(S_i)$ sobre el subespacio $P_1(S_i)$

donde $P_1(S_i)$ denota el conjunto de los polinomios de grado a lo sumo 1.

Y se tiene

$P_i v \in P_1(S_i) \qquad \text{y} \qquad \forall p \in P_1(S_i), \qquad \int\limits_{S_i} (v - P_i v) p dx = 0.$

Sea $v \in L^2(\Omega)$. Se define la interpolada de Clément $r_h v$ de la siguiente forma:

$r_h : H \subset L^2(\Omega) \to H_h$ tal que

$r_h v = \sum\limits_{i:1,..,M} P_i v(a_i) p_i$

4.5.3. Acotación del error de interpolación de Clément

4.5.3.1. Proposición (véase [3], Ejercicio 3.2.3, ítem v)

Sea el espacio de Hilbert H_0^1 con su respectiva norma $\|\bullet\|_{H_0^1}$,

y sea H_h un subespacio de dimensión finita.

Entonces existe una constante C positiva e independiente de h tal que $\forall v \in H_0^1$ se verifica:

$$|v - r_h v|_{H^1} \leq C \ |v|_{H^1} \,.$$

Además

$$\lim_{h \to 0} |v - r_h v|_{H^1} = 0.$$

4.5.3.2. Observación

• Para el problema discreto del obstáculo en dos dimensiones se buscará la solución en V_h, que será subconjunto de H_h y vendrá expresado en función de la interpolación del obstáculo ψ.

4.5.4. Caso particular: construcción del subespacio H_h de dimensión finita y de una conveniente base para discretizar el problema del obstáculo. Elección del subconjunto V_h

Resumiendo, la discretización del problema del obstáculo vendrá dada por la expresión:

$$\text{hallar } u_h \in V_h \ \text{ tal que } \ a(u_h, v_h - u_h) \geq l(v_h - u_h) \quad \forall\, v_h \in V_h$$

donde los espacios de elementos finitos para el problema del obstáculo en dimensión 2 son, para cada h particular:

$$H_h = \left\{ v \in H_0^1 \text{ tal que } v|_T \in P_1(T),\, \forall\, T \in \Upsilon_h \right\} \ \text{ y}$$
$$V_h = \{ v \in H_h \ tal\ que\ v \geq r_h \psi\ en\ \Omega \},$$

y donde $r_h : H^1 \to H_h$ indica el operador de interpolación de Clément.

4.5.4.1. Observación

- $V_h \subset H_h \subset H_0^1$.
- H_h tiene dimensión finita (dim $H_h \leq 3 * N^\circ$ de triángulos).

Esta idea será retomada en el Capítulo 6, donde se utilizará además la teoría desarrollada en el próximo capítulo.

Capítulo 5

Introducción a la $\Gamma-$convergencia, un caso particular de convergencia variacional

El Cálculo de Variaciones se ocupa de maximizar o minimizar funcionales. Generalmente, dichos funcionales vienen expresados como integrales que dependen de funciones x definidas en un cierto espacio y de sus derivadas, del tipo

$$F(x) = \int_{\Omega} f(z, x(z), Dx(z))dz$$

donde

Ω es un conjunto abierto y acotado de $\mathbb{R}^n$,

$f : \Omega \text{ x } \mathbb{R} \text{ x } \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$,

$x : \Omega \to \mathbb{R}$ y

$Dx : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es el gradiente de x.

Sea F un funcional sobre un cierto conjunto X.

Se quiere hallar

$$m_X(F) = \inf_{y \in X} F(y)$$

junto con el conjunto de todos los *puntos minimizantes*

$$M_X(F) = \{x \in X \ / \ F(x) = m_X(F)\}.$$

Es esencial estudiar la existencia de tales puntos (funciones), y eventualmente su unicidad.

Para ello se comienza examinando el comportamiento de una *sucesión minimizante* que llamaremos (x_n) en X, tal que verifique

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{y\in X} F(y),$$

la cual existe siempre. De hecho, si X tiene más de un punto existen infinitas sucesiones minimizantes.

Lo primero a chequear es si esta sucesión, o una apropiada subsucesión elegida, converge. Para ello alcanzaría con ver que cualquier sucesión minimizante está en un conjunto compacto $K \subset X$.

La estandarización del concepto de compacidad tardó muchos años en producirse. Desde principios del siglo XX se fueron introduciendo distintas definiciones de compacidad, que pretendían extender a espacios topológicos generales algunas propiedades conocidas de los intervalos cerrados y acotados de la recta real, cruciales en la demostración de ciertos teoremas sobre máximos y mínimos. Surgieron así distintos tipos de compacidad, como por ejemplo *compacidad numerable*, y se asumió que era posible encontrar una definición en términos más débiles y generales, de hecho en términos de recubrimientos del espacio por conjuntos abiertos.

Sin embargo, este enfoque nos lleva a centrarnos en las características del espacio y en particular en la propia complejidad de la noción de compacidad. Se buscará entonces la manera de lograr resultados favorables exigiendo condiciones sobre el funcional F y no tanto sobre el espacio, generalizando convenientemente la teoría.

Más adelante se introducirá la noción de *coercividad* de un funcional y, mediante dicho concepto, se verá que la sucesión minimizante admite un punto especial x, que será denominado *punto de aglomeración*. A esta altura se espera que dicho punto sea el "candidato natural" a minimizar F, es decir que se debe probar que

$$F(x) = \inf_{y\in X} F(y).$$

Como una de las dos desigualdades es trivial, nos queda por probar

$$F(x) \leq \inf_{y \in X} F(y) = \lim_{n \to \infty} F(x_n).$$

Pero dado que no se quiere usar propiedades particulares de la sucesión ni de su eventual límite (en definitiva, del espacio), se pedirá una nueva condición conveniente sobre el funcional. La misma será llamada *semicontinuidad inferior de* F y resultará suficiente para garantizar la desigualdad antedicha.

Este nuevo concepto vendrá dado de la siguiente manera
$\forall x \in X$ y $\forall$ sucesión x_n tal que $x_n \to x$

$$F(x) \leq \lim_{n \to \infty} inf F(x_n).$$

Se verá luego que coercividad más semicontinuidad inferior garantizan la existencia de mínimo para el funcional F.

A partir de este desarrollo, conocido como *método directo*, es posible abordar otro tipo de problemas de minimización: aquéllos donde no interviene un único funcional sino una sucesión de ellos (no necesariamente con el mismo dominio X). Esta idea se aplicará muy notoriamente en el Capítulo 6, donde se utilizará el "tamaño" h de los triángulos (ya presentados en el Capítulo 4) para construir diferentes espacios X_h que darán lugar a los respectivos funcionales F_{X_h}.

Se presenta entonces la siguiente dificultad: definir una apropiada convergencia para una sucesión de funcionales. Las "convergencias variacionales" han cobrado mayor interés en los últimos años. Esto se debe a sus aplicaciones en muy diversos campos, tales como aproximación de problemas variacionales, transición de fase y teoría de homogeneización; ésta última en situaciones donde la estructura del material es heterogénea a nivel microscópico, pero en escala macroscópica se comporta en forma homogénea.

Tales convergencias también sirven para justificar el pasaje de la teoría discreta a la continua, por ejemplo en el estudio de la elasticidad de ciertos materiales.

Resulta común encontrar que en dichos problemas intervienen parámetros que son propios de la estructura geométrica subyacente, o que provienen de procesos de discretización. Algunas veces, a medida que dichos parámetros varían, se produce una degeneración del problema transformándose en algo cada vez más complejo. Es por ello que se intenta sustituir el problema original por otro diferente, posiblemente más simple y con un comportamiento más "amigable", donde los parámetros aparecen en forma más conveniente, o bien simplemente desaparecen.

Entre las convergencias variacionales, la *$\Gamma-$convergencia* juega un rol central por sus numerosas propiedades, así como por las aplicaciones que involucran *$\Gamma-$límites* de funcionales integrales.

Ahora bien, el hecho de que los dominios de los funcionales puedan ser diferentes representa otro posible agravante. Esto en general se salva reformulando el problema en un espacio Y que contenga a todos los X_h (el cual no necesariamente coincide con X), e introduciendo los correspondientes funcionales $F_{X_h} : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ tales que

$$F_{X_h}(x) = \begin{cases} F(x) & x \in X_h \\ \infty & x \in Y - X_h \end{cases}.$$

Pero a su vez Y debería ser lo suficientemente grande como para contener al punto candidato a ser solución de nuestro problema original.

Esta reformulación no modifica el problema inicial ya que, de existir un mínimo, el minimizante correspondiente seguirá estando en el espacio "más chico" porque la extensión fue definida con el "valor" infinito, quedando finalmente

$$\begin{array}{l} m_Y(F_{X_h}) = \underset{y \in Y}{inf} F_{X_h}(y) = \underset{y \in X_h}{inf}\, F(y) = m_{X_h}(F) \quad \text{y} \\ M_Y(F) = M_{X_h}(F) \quad \text{siempre que} \quad m_{X_h}(F) < \infty. \end{array}$$

Es deseable entonces independizarse de las características del espacio. Resultará por tanto conveniente introducir una propiedad inspirada en la coercividad de un funcional, la cual será llamada *equicoercividad* de una familia de funcionales.

Este capítulo seguirá principalmente el libro "An Introduction to $G-$convergence" de Gianni Dal Maso [6]. A lo largo del mismo se trabajará con dicha noción ($\Gamma-$convergencia), la cual está vinculada con la búsqueda de un *límite inferior común y óptimo* para una cierta sucesión de funcionales, en particular para los F_{X_h} antes definidos, en cuyo caso se desea que tal límite sea F, lo cual afortunadamente ocurrirá.

Si bien la generalidad en la definición de la $\Gamma-$convergencia la hace estable frente a perturbaciones continuas, lo cual constituye una de sus propiedades más interesantes, no se trabajará acá sobre este tema. Pero esto permite vislumbrar una propuesta de trabajo para el futuro.

5.1. Método directo en el Cálculo de Variaciones

A partir de ahora (X, τ) será un espacio topológico.

5.1.1. Semicontinuidad inferior y superior

5.1.1.1. Definición

Se dice que una función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es *semicontinua inferiormente* en un punto $x \in X$ si para todo $t \in \mathbb{R}$, con $t < F(x)$, existe un entorno U de x (lo notaremos $U \in \text{Ŋ}(x)$) tal que $t < F(y)$ para todo $y \in U$. Analogamente se puede definir *semicontinuidad superior* en un punto.

Se dice que F es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) sobre X si F lo es en cada punto $x \in X$.

Claramente, una función es continua en x si y sólo si es semicontinua inferiormente y superiormente en dicho punto. Coloquialmente, la continuidad de una función real significa la conservación local de desigualdades estrictas para ambos lados. Mientras que en las semicontinuidades sólo se garantiza preservación para un único lado.

Ejemplo Un simple ejemplo muestra esta idea. La función $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es semicontínua superiormente en $x = 1$.

$$g_1(x) = \begin{cases} x^2 & x < 1 \\ x+1 & x \geq 1 \end{cases} .$$

Modificando el valor en $x = 1$, se tiene que la función g_2 es semicontinua inferiormente.

$$g_2(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ x+1 & x > 1 \end{cases} .$$

Ninguna de las dos resulta continua en $x = 1$.

5.1.1.2. Observación

• Si se analiza cuidadosamente la definición, surge que una función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es semicontinua inferiormente en un punto $x \in X$ si y sólo si

$$F(x) \leq \sup_{U \in \mathfrak{V}(x)} \inf_{y \in U} F(y).$$

• Por otro lado $F(x) \geq \inf_{y \in U} F(y)$ para todo $U \in \mathfrak{V}(x)$. Se concluye entonces que F es semicontinua inferiormente en x si y sólo si

$$F(x) = \sup_{U \in \mathfrak{V}(x)} \inf_{y \in U} F(y).$$

• Surge además que si F es semicontinua inferiormente en el punto x, se tendrá que

$$F(x) \leq \liminf_{n \to \infty} F(x_n)$$

para toda sucesión (x_n) convergente a x en X.

5.1.2. Epígrafo

5.1.2.1. Definición

Para toda función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ y para todo $t \in \mathbb{R}$ se define

$$\{F > t\} = \{x \in X, \text{ tal que } \ F(x) > t \ \} = F^{-1}((t, \infty]).$$

El *epigrafo (o sobregráfico) de* F se define como

$$epi(F) = \{(x,t) \in X \times \mathbb{R}, \text{ tal que } F(x) \leq t \ \}.$$

El siguiente resultado es una consecuencia relativamente sencilla de las Definiciones 5.1.1.1. y 5.1.2.1.

5.1.2.2. Proposición (véase [6], Proposición 1.7)

Sea $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Las siguientes propiedades son equivalentes

(a) F es semicontinua inferiormente sobre X.

(b) Para todo $t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{F > t\}$ es abierto en X.

(c) $epi(F)$ es cerrado en $X \times \mathbb{R}$.

5.1.3. Compacidad numerable

5.1.3.1. Definición

Se llamará *punto de aglomeración* de una sucesión (x_n) en X a un punto $x \in X$ tal que para todo $U \in \mathrm{IJ}(x)$ y para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $n \geq k$ tal que $x_n \in U$. En otras palabras x es un punto de aglomeración de (x_n) si y sólo si x está en $\cap_{k\in\mathbb{N}}\overline{\{x_n : n \geq k\}}$ donde la barra denota la clausura en X. Está claro que si x es el límite de una subsucesión de (x_n), tal x resulta un punto de aglomeración de (x_n).

5.1.3.2. Definición

Se dice que $K \subset X$ es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos admite un subcubrimiento finito.

Se dice que $K \subset X$ es *numerablemente compacto* si toda sucesión en K tiene al menos un punto de aglomeración en K. Puede probarse que K será numerablemente compacto si y sólo si todo cubrimiento numerable mediante abiertos tiene un subcubrimiento finito. También puede notarse que si K es numerablemente compacto entonces toda sucesión decreciente de subconjuntos cerrados y no vacios de K tiene intersección no vacía.

5.1.4. Axiomas de numerabilidad

5.1.4.1. Definición

Se dice que una colección $\beta \subseteq \tau$ es una *base* para τ si todo abierto es unión de elementos de β. Es decir, $\forall U \in \tau$ y para cada punto $x \in U$, $\exists V \in \beta$ tal que $x \in V \subset U$.

Se dice que un espacio topológico (X, τ) satisface el *segundo axioma de numerabilidad* si alguna de sus bases es numerable.

Ejemplo $\mathbb{R}$ con la topología euclídea verifica el segundo axioma de numerabilidad. Para verlo basta con tomar la familia formada por los intervalos abiertos racionales.

5.1.4.2. Definición

Se dice que una colección $\sigma \subseteq \tau$ es una *subbase* para τ si las intersecciones finitas de abiertos de σ forman una base de τ. Es decir, $\forall U \in \tau$ y para cada punto $x \in U$, $\exists$ un número finito de abiertos en σ $(W_1, ..., W_n)$, tales que $x \in W_1 \cap ... \cap W_n \subset U$.

Ejemplo Una subbase para $\mathbb{R}$ con la topología usual resulta de tomar, para cada $a \in \mathbb{R}$, los conjuntos :

$$L_a = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < a\} \qquad R_a = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}.$$

Luego $(a, b) = R_a \cap L_b$.

5.1.4.3. Definición

Se dice que una colección β de entornos de un punto x es una *base local (*o *base de entornos)* de X en dicho punto, si todo entorno de x en X contiene un elemento de β.

Se dice que un espacio topológico (X, τ) satisface el *primer axioma de numerabilidad* si tiene una base local numerable en cada uno de sus puntos, que es lo mismo que decir que para cualquier $x \in X$ existe una colección numerable de abiertos tales que cualquier entorno de x contiene necesariamente a alguno de ellos.

Ejemplo $\mathbb{R}$ verifica el primer axioma de numerabilidad. En efecto, sea p un punto en $\mathbb{R}$. Para cada número real positivo $\delta > 0$, se define:

$$N_\delta(p) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x - p| < \delta\}.$$

Se considera $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_i, ...$una sucesión de números reales positivos que converge a 0. Luego la colección $\{N_{\delta_i}(p) \ / \ i = 1, 2...\}$ es una base local numerable de $\mathbb{R}$ en p.

5.1.4.4. Observación

- Si un espacio verifica el segundo axioma de numerabilidad entonces verifica también el primero.

5.1.4.5. Proposición

a) Si K es numerablemente compacto y verifica el Segundo Axioma de Numerabilidad, entonces K es compacto.

b) Todo subespacio compacto de X es numerablemente compacto.

5.1.4.6. Observación

Aunque esto no se demostrará acá, conviene mencionar que:

• Existen espacios numerablemente compactos que no son compactos.

• Si X es metrizable, las nociones de compacto y numerablemente compacto coinciden.

5.1.5. Coercividad

5.1.5.1. Definición

Se dice que una función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es *coerciva* sobre X si $\forall t \in \mathbb{R}$ la clausura del conjunto $\{F \leq t\} = \{x \in X, \text{ tal que } F(x) \leq t\ \} = F^{-1}((-\infty, t])$ es numerablemente compacta.

5.1.5.2. Observación

• Si F es coerciva sobre X y $G \geq F$ sobre X, entonces G es coerciva sobre X.

• Si F es coerciva sobre X, entonces toda sucesión (x_n) en X con $\limsup_{n\to\infty} F(x_n) < +\infty$ tiene un punto de aglomeración en X.

• El recíproco es verdadero si F es semicontínua inferiormente o si X es metrizable.

Como ya fue anunciado al principio del capítulo, resultará importante coronar esta etapa con un teorema que reúna los conceptos que se vinieron gestando a lo largo de la sección. Este desarrollo en su totalidad es conocido como método directo y servirá como puntapié inicial a la hora de buscar una función que realice el mínimo del funcional propuesto en nuestro problema del obstáculo.

5.1.6. Existencia de punto mínimo

5.1.6.1. Teorema

Si $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es una función coerciva y semicontinua inferiormente, entonces F admite mínimo en X.

Demostración Si F es idénticamente $+\infty$, no hay nada que demostrar.

Supongamos ahora que F no es idénticamente $+\infty$. Sea (x_n) una sucesión minimizante de F en X.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{y\in X} F(y) < +\infty.$$

Como F es coerciva por hipótesis, y utilizando la Observación 5.1.5.2., se concluye que (x_n) tiene un punto de aglomeración en X.

Por otro lado, F es semicontinua inferiormente, es decir

$$\inf_{y\in X} F(y) \leq F(x) \leq \limsup_{n\to\infty} F(x_n) = \inf_{y\in X} F(y).\blacksquare$$

Nos permitimos ahora hacer una pequeña digresión, en apariencia desvinculada del contenido del capítulo, que sin embargo será procedente para "aclarar posiciones" y obtener un resultado a utilizar más adelante.

5.1.7. Topología débil

5.1.7.1. Definición

Se dirá que una topología τ_1 es *más débil* que otra τ_2 si $\tau_1 \subsetneq \tau_2$.

5.1.7.2. Observación

• τ_1 tiene menos conjuntos abiertos que τ_2. Si se piensa en recubrimientos por abiertos se concluye que podría tener más compactos.

- Debilitando la topología en el dominio se pueden obtener menos funciones continuas.

Se buscará a partir de ahora la topología más débil posible que asegure la continuidad de una familia previamente escogida de funciones. En otras palabras, nos preguntamos si existirá la menor topología en X que haga de una familia de funciones F_i una familia de funciones continuas, en el sentido de que cualquier otra topología en X que haga a las F_i continuas la contiene. Se formaliza esta idea para el caso en que tal familia sea el dual de un espacio vectorial topológico.

5.1.7.3. Definición

Sea X un espacio vectorial topológico sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Aquí $\mathbb{R}$ está tomado con la topología usual.

$X' = \{\text{funciones lineales y continuas del espacio } X \text{ al cuerpo } \mathbb{R}\}$.

Se llamará *topología débil* $\sigma(X, X')$ sobre X a la menor topología sobre X que haga continuas a todas las aplicaciones $F \in X'$.

5.1.8. Propiedad de Hausdorff

5.1.8.1. Definición

Se dice que un espacio topológico (X, τ) tiene la *propiedad de Hausdorff* (o que es un espacio T_2), si para cada pareja de puntos distintos $x, y \in X$ existen entornos disjuntos de ellos. Es decir que existen $U \in \text{Ŋ}(x)$ y $V \in \text{Ŋ}(y)$ tales que $U \cap V = \varnothing$.

5.1.9. Convexidad

A partir de ahora se supone que X es un espacio normado.

5.1.9.1. Definición

Se dice que una función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es *convexa* si $\forall x, y \in X$ tales que $F(x) < \infty$, $F(y) < \infty$, y $\forall t \in (0, 1)$ se verifica

$$F(tx + (1-t)y) \leq tF(x) + (1-t)F(y).$$

5.1.9.2. Definición

Se dice que un conjunto $C \subset X$ es *convexo* si $\forall x, y \in C$ se verifica

$$[x,y] = \{tx + (1-t)y \ / \ t \in [0,1]\} \subset C.$$

5.1.9.3. Observación

• La función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ es convexa sii $epi(F)$ es un subconjunto convexo de $X \times \mathbb{R}$.

5.1.10. Hahn - Banach

5.1.10.1. Definición

Se dice que $\hat{\mathrm{H}}$ es un hiperplano en X si

$$\hat{\mathrm{H}} = \{x \in X \ \ / \ \ F(x) = \alpha\} \text{ para alguna } F \text{ lineal y no nula, y algún } \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.1.10.2. Definición

Se dice que Ħ es un semiespacio cerrado en X si

$$\text{Ħ} = \{x \in X \ \ / \ \ F(x) \leq \alpha\} \text{ para alguna } F \in X' \text{ y no nula, y algún } \alpha \in \mathbb{R}.$$

5.1.10.3. Teorema (véase [2], Teorema 1.6)

Sea $C \subset X$ un conjunto convexo, cerrado y no vacío.

Entonces cada $u \notin C$ puede ser fuertemente separado de C por un hiperplano cerrado, es decir, $\exists F \in X'$ tal que $F \neq 0$ y $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ que verifican:

$$F(u) > \alpha \quad \text{y} \quad F(x) \leq \alpha \quad \forall x \in C.$$

5.1.10.4. Corolario

Sea $C \subset X$ un conjunto convexo cerrado no vacío.

Entonces C es la intersección de todos los semiespacios cerrados que lo contienen, es decir,

$$C = \bigcap_{C \subset \text{Ħ}_{z^*,\alpha}} \text{Ħ}_{z^*,\alpha}$$

donde $\text{Ħ}_{z^*,\alpha} = \{x \in X \ / \ z^*(x) \leq \alpha\}$ para $z^* \in X'$ no nula, y $\alpha \in \mathbb{R}$.

5.1.10.5. Observación

• Los conjuntos cerrados $\text{Ħ}_{z^*,t}$ del corolario anterior también resultan ser cerrados para la topología débil.

• Como la intersección de cerrados es cerrada, y utilizando el Corolario 5.1.10.4, se concluye que todo conjunto convexo cerrado en la topología fuerte, es también cerrado para la débil.

5.1.11. Semicontinuidad inferior en la topología débil

5.1.11.1. Proposición

Sean X un espacio vectorial topológico de Hausdorff localmente convexo (no necesariamente normado), y

$F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función convexa.

Entonces F es semicontinua inferiormente sobre X en la topología original sii F es semicontinua inferiormente sobre X en la topología débil.

Demostración Por Observación 5.1.9.3. $epi(F)$ es un subconjunto convexo de $X \times \mathbb{R}$.

Y ahora la tesis es una consecuencia inmediata de la Proposición 5.1.2.2.c y de la Observación 5.1.10.5.■

5.2. $\Gamma-$convergencia y $K-$convergencia

Sea (F_h) una sucesión de funciones de X en $\overline{\mathbb{R}}$ donde X es un espacio topológico cualquiera (recordar que se trabajará con subíndice h en vez de n).

5.2.1. $\Gamma-$límite

Ŋ(x) denota el conjunto de todos los entornos abiertos de x.

5.2.1.1. Definición

Se llamará Γ-*límite inferior* de una sucesión (F_h) (y se notará $\Gamma - \liminf_{h\to 0} F_h$), a la función F' de X en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$F'(x) = (\Gamma - \liminf_{h\to 0} F_h)(x) = \sup_{U\in \mathcal{N}(x)} \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y).$$

Análogamente queda definido el Γ-*límite superior* de una sucesión (F_h) (y se notará $\Gamma - \limsup_{h\to 0} F_h$), a la función F'' de X en $\overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$F''(x) = (\Gamma - \limsup_{h\to 0} F_h)(x) = \sup_{U\in \mathcal{N}(x)} \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y).$$

Si existe una función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que

$$F = F' = F'',$$

entonces se escribirá $F = \Gamma - \lim_{h\to 0} F_h$ y se dirá que la sucesión (F_h) $\Gamma-$*converge* a F en X.

Los siguientes ejemplos servirán para clarificar las definiciones dadas recientemente y muestran que, en general, $\Gamma-$convergencia y convergencia puntual son conceptos independientes. En todos ellos se tomará $X = \mathbb{R}$.

Ejemplo 1) Sea $F_h(x) = \frac{1}{h} x e^{-2(\frac{1}{h})^2 x^2}$

Para cada h fijo se obtiene una función que depende de x.

Derivando respecto de x e igualando a 0 se obtiene:

$\frac{\partial F_h}{\partial x} = \frac{1}{h}(e^{-2(\frac{1}{h})^2 x^2} + x.e^{-2(\frac{1}{h})^2 x^2}.(-2(\frac{1}{h})^2 2x))$

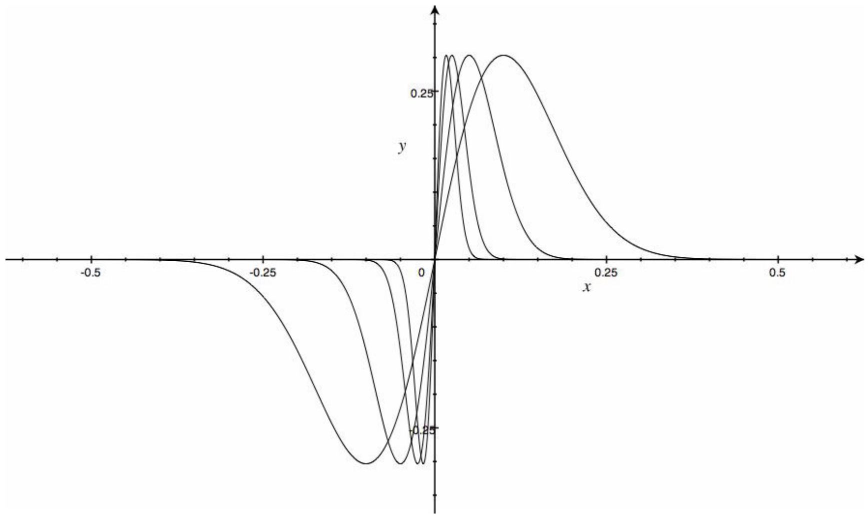
$= \frac{1}{h} e^{-2(\frac{1}{h})^2 x^2}(1 - 4x^2(\frac{1}{h})^2)$

$= 0 \quad \Rightarrow$

$(1 - 4x^2(\frac{1}{h})^2) = 0 \quad \Rightarrow$

$x = \pm \frac{h}{2}$

El siguiente gráfico muestra $F_h(x)$ para distintos valores de h.



Se puede ver que con h fijo se alcanza el siguiente valor mínimo:

$F_h(-\frac{h}{2}) = \frac{1}{h}(-\frac{h}{2})e^{-2(\frac{1}{h})^2(-\frac{h}{2})^2} = (-\frac{1}{2})e^{(-\frac{1}{2})}$

Aplicando límite cuando h tiende a 0

$\underset{h\to 0}{lím} F_h(y) = (-\frac{1}{2})e^{(-\frac{1}{2})}$.

Utilizando la definición de $\Gamma-$convergencia se llega a que:

$$\sup_{U\in \mathrm{N}(x)} \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y) = \sup_{U\in \mathrm{N}(x)} \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y) = F(x)$$

donde

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

concluyendo que (F_h) $\Gamma-$converge a F.

Por otro lado (F_h) converge puntualmente a la función $G(x) = 0$.

2) Sea $F_h(x) = (\frac{1}{h})xe^{(\frac{1}{h})x}$

Análogamente se puede ver que, para cada h fijo,

$\frac{\partial F_h}{\partial x} = (\frac{1}{h})(e^{(\frac{1}{h})x} + x.(\frac{1}{h})e^{(\frac{1}{h})x})$

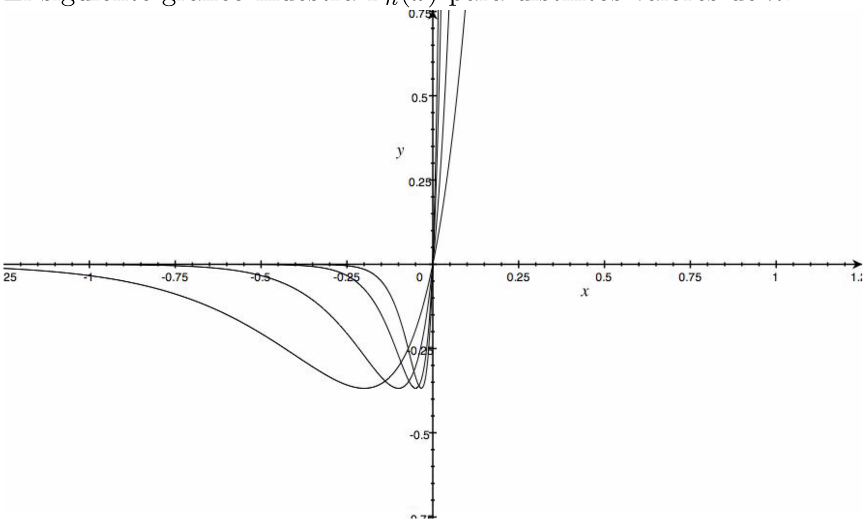
$= (\frac{1}{h})e^{(\frac{1}{h})x}(1 + (\frac{1}{h})x)$

$= 0 \quad \Rightarrow$

$(1 + (\frac{1}{h})x) = 0 \quad \Rightarrow$

$x = -h$

El siguiente gráfico muestra $F_h(x)$ para distintos valores de h.



Se puede ver que con h fijo se alcanza el siguiente valor mínimo:

$F_h(-h) = \frac{1}{h}(-h)e^{(\frac{1}{h})(-h)} = -\frac{1}{e}$

Aplicando límite cuando h tiende a 0

$\lim\limits_{h \to 0} F_h(y) = -\frac{1}{e}$.

Del mismo modo que antes se concluye que (F_h) $\Gamma-$converge en $\mathbb{R}$ a la función

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{1}{e} & x = 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}.$$

Además (F_h) converge puntualmente a la función

$$G(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0] \\ \infty & x \in (0, \infty) \end{cases}.$$

5.2.1.2. Observación

Se puede ver en el primer ejemplo que $(m_X(F_h))$ converge a $-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$ mientras que $m_X(G) = 0$. Algo similar ocurre en el segundo ejemplo donde $(m_X(F_h))$ converge a $-\frac{1}{e}$ mientras que

$m_X(G) = 0$. Nótese que los puntos mínimos y los mínimos valores de los funcionales F_h convergen al punto mínimo y al mínimo valor de F. Esta idea será ampliada más adelante y muestra la importancia de la $\Gamma-$convergencia de una sucesión.

5.2.2. K−límite

5.2.2.1. Definición

Se llamará *K-límite inferior* de una sucesión (E_h) de subconjuntos de X (y se notará $K - \liminf\limits_{h\to 0} E_h$), al conjunto de puntos $x \in X$ que verifican la siguiente propiedad

$$\forall U \in \text{Ņ(x)} \; \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall h \leq \tfrac{1}{k} \text{ se verifica } U \cap E_h \neq \varnothing.$$

Analogamente queda definido el *K-límite superior* de una sucesión (E_h) (y se notará $K - \limsup\limits_{h\to 0} E_h$), como el conjunto de puntos $x \in X$ que verifican la siguiente propiedad

$$\forall U \in \text{Ņ(x)} \text{ y } \forall k \in \mathbb{N}, \; \exists \; h \leq \tfrac{1}{k} \text{ tal que } U \cap E_h \neq \varnothing.$$

Se puede seguir de la definición que

$K - \limsup\limits_{h\to 0} E_h = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{\bigcup\limits_{h\leq\frac{1}{k}} E_h}$

Si existe un conjunto $E \subseteq X$ tal que

$$E = K - \liminf_{h\to 0} E_h = K - \limsup_{h\to 0} E_h,$$

entonces se escrbirá $E = K - \lim\limits_{h\to 0} E_h$ y se dirá que la sucesión (E_h) $K-$*converge* a E en X.

5.2.2.2. Proposición (véase [6], Remarca 4.11)

(E_h) $K-$ converge a E en X sii se satisfacen las siguientes condiciones
$\forall x \in E$ y $\forall U \in$ Ņ(x) $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \leq \frac{1}{k}$ se verifica $U \cap E_h \neq \varnothing$ y
$\forall x \in X - E$ $\exists U \in$ Ņ(x) y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \leq \frac{1}{k}$ se verifica $U \cap E_h = \varnothing$.

Ejemplo. Si E es un subconjunto de X y $\forall h$ se tiene $E_h = E$, entonces (E_h) $K-$converge a $\overline{E}$.

5.2.3. Relación entre $\Gamma-$límites y K$-$límites mirando epígrafos

5.2.3.1. Teorema (véase [6], Teorema 4.16)

Sea (F_h) una sucesión de funciones de X a $\overline{\mathbb{R}}$, entonces

$$epi(F') = K - \limsup_{h\to 0}(epi\ (F_h))$$
$$epi(F'') = K - \liminf_{h\to 0}(epi\ (F_h)).$$

En particular, (F_h) $\Gamma-$converge a F en X sii $(epi(F_h))$ $K-$converge al $(epi(F))$ en X x $\mathbb{R}$.

5.3. Algunas propiedades de los $\Gamma-$límites

5.3.1. $\Gamma-$límite de subsucesiones

5.3.1.1. Proposición (véase [6], Proposición 6.1)

Sea (F_{h_k}) una subsucesión de (F_h).

Entonces se verifican las siguientes desigualdades

$$\Gamma - \liminf_{h\to 0} F_h \leq \Gamma - \liminf_{k\to\infty} F_{h_k},$$
$$\Gamma - \limsup_{h\to 0} F_h \geq \Gamma - \limsup_{k\to\infty} F_{h_k}.$$

En particular, si (F_h) $\Gamma-$converge a F en X, entonces (F_{h_k}) $\Gamma-$converge a F en X.

5.3.2. Relación entre $\Gamma-$límites de sucesiones

5.3.2.1. Proposición (véase [6], Proposición 6.7)

Sean (F_h) y (G_h) dos sucesiones de funciones tales que $\forall h$, $F_h \leq G_h$.

Entonces se verifican las siguientes desigualdades

$$\Gamma - \liminf_{h\to 0} F_h \leq \Gamma - \liminf_{h\to 0}\ G_h,$$
$$\Gamma - \limsup_{h\to 0} F_h \leq \Gamma - \limsup_{h\to 0} G_h.$$

En particular, si (F_h) $\Gamma-$converge a F y (G_h) $\Gamma-$converge a G, entonces $F \leq G$.

Sea $H : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función semicontinua inferiormente tal que $\forall h$, $H \leq F_h$.

Luego

$$H \leq \Gamma - \liminf_{h\to 0} F_h \leq \Gamma - \limsup_{h\to 0} F_h.$$

En particular, si (F_h) $\Gamma-$ converge a F, entonces $H \leq F$.

5.3.3. Semicontinuidad de $\Gamma-$límites

5.3.3.1. Lema

Sea $\tilde{U}$ la familia de todos los subconjuntos abiertos de X y

$\alpha : \tilde{U} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función arbitraria.

Luego la función $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definida como

$$F(x) = \sup_{U \in \mathrm{N}(x)} \alpha(U)$$

es semicontinua inferiormente sobre X.

Demostración $\forall$ U subconjunto abierto de X, y $\forall y \in U$ se tiene que $U \in \mathrm{N}(y)$, entonces $F(y) \geq \alpha(U)$.

Esto implica que $\forall U \subseteq X$ se verifica

$$\inf_{y \in U} F(y) \geq \alpha(U).$$

Se desprende entonces que $\forall x \in X$

$$F(x) = \sup_{U \in \mathrm{N}(x)} \alpha(U) \leq \sup_{U \in \mathrm{N}(x)} \inf_{y \in U} F(y).$$

Por observación 5.1.1.2. resulta F una función semicontinua inferiormente.■

5.3.3.2. Proposición

Las funciones F' y F'' son semicontinuas inferiormente sobre X.

Demostración Alcanza con aplicar el lema anterior a las funciones así definidas:

$$\alpha(U) = \liminf_{h\to 0} \inf_{y \in U} F_h(y) \qquad \text{y}$$
$$\beta(U) = \limsup_{h\to 0} \inf_{y \in U} F_h(y)$$

para cada U abierto de X.■

5.3.4. $\Gamma-$límites de la composición

5.3.4.1. Proposición

Sea $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función continua y creciente.

Entonces se verifican las siguientes igualdades

$$\mathbf{\Gamma}-\liminf_{h\to 0}(\Phi \circ F_h) = \Phi \circ (\mathbf{\Gamma}-\liminf_{h\to 0} F_h),$$
$$\mathbf{\Gamma}-\limsup_{h\to 0}(\Phi \circ F_h) = \Phi \circ (\mathbf{\Gamma}-\limsup_{h\to 0} F_h).$$

En particular, si (F_h) $\Gamma-$ converge a F, entonces $(\Phi \circ F_h)$ $\Gamma-$ converge a $(\Phi \circ F)$.

Demostración Dado que Φ es continua y creciente, se tiene que $\forall A$ subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}$ se verifica

$$\Phi(\inf A) = \inf\ \Phi(A)$$
$$\Phi(\sup A) = \sup\ \Phi(A).$$

Entonces

$$\Phi \circ (\mathbf{\Gamma}-\liminf_{h\to 0} F_h(x)) = \Phi \circ (\sup_{U\in\mathcal{U}(x)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{h\leq\frac{1}{k}} \inf_{y\in U} F_h(y)) = \sup_{U\in\mathcal{U}(x)} \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{h\leq\frac{1}{k}} \inf_{y\in U} (\Phi \circ F_h(y)) = \mathbf{\Gamma}-\liminf_{h\to 0}(\Phi \circ F_h)(x).$$

La otra igualdad se demuestra en forma análoga.■

5.4. Convergencia de mínimos y minimizantes

Se presentará acá la noción de *equicoercividad* de una sucesión de funciones F_h. Se tratará de ver que en tal caso la $\Gamma-$convergencia de la misma a una función F implica la convergencia de los valores mínimos de F_h al valor mínimo de F.

Más aún, si tanto la sucesión como su $\Gamma-$límite poseen un único punto mínimo, se puede probar entonces que la sucesión de los minimizantes de F_h converge al minimizante de F.

5.4.1. Algunas desigualdades

5.4.1.1. Proposición (véase [6], Proposición 7.1)

Sea U un subconjunto abierto de X.

Entonces se verifican las siguientes desigualdades

$$\inf_{y\in U} F' \geq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y),$$
$$\inf_{y\in U} F'' \geq \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in U} F_h(y)$$

5.4.1.2. Proposición (véase [6], Proposición 7.2)

Sea K un subconjunto numerablemente compacto de X .

Entonces se verifica la siguiente desigualdad

$$\min_{y\in K} F'(y) \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in K} F_h(y). \qquad (5.2)$$

Se presenta a continuación un ejemplo que muestra que cuando $F' \neq F''$, la desigualdad

$$\min_{y\in K} F''(y) \leq \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in K} F_h(y) \qquad (*)$$

puede ser falsa para algún K subconjunto numerablemente compacto de X (aun cuando la sucesión (F_h) sea equicoerciva).

Ejemplo Sea $X = \mathbb{R}$,

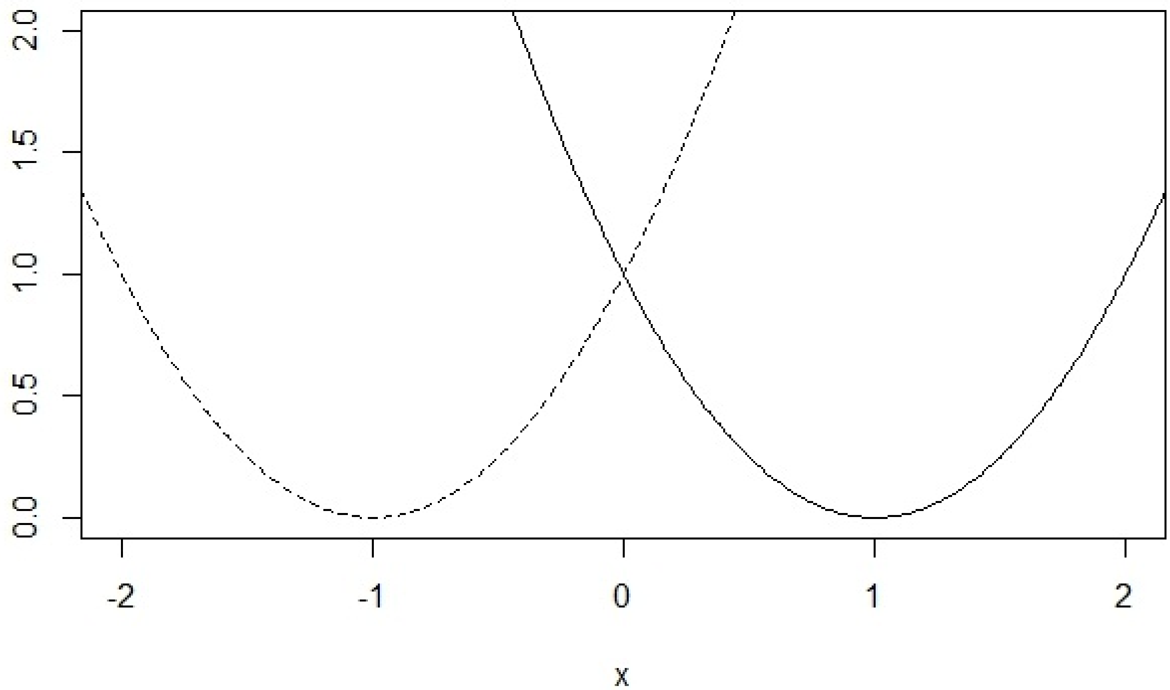
$F_n(x) = (x - (-1)^n)^2$,

$K = [-1, 1]$.

Entonces si n es par, $F_n(x) = (x-1)^2$

si n es impar, $F_n(x) = (x+1)^2$

Obteniéndo el siguiente gráfico:



Sea $U_\varepsilon = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$

CASO 1: $\quad x > 0$

Si n es un número impar entonces

$$\inf_{y \in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ x-\varepsilon \leq -1 \\ (x-\varepsilon+1)^2 & si \ x-\varepsilon > -1 \end{cases}$$

Si n es un número par entonces

$$\inf_{y \in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ x+\varepsilon \geq 1 \\ (x+\varepsilon-1)^2 & si \ x+\varepsilon < 1 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{y \in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} (x+\varepsilon-1)^2 & si \ \varepsilon - 1 < x < 1-\varepsilon \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

CASO 2: $\quad x = 0$

Si n es un número impar entonces

$$\inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ -\varepsilon \leq -1 \\ (-\varepsilon+1)^2 & si \ -\varepsilon > -1 \end{cases}$$

Si n es un número par entonces

$$\inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ \varepsilon \geq 1 \\ (\varepsilon-1)^2 & si \ \varepsilon < 1 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ \varepsilon \geq 1 \\ (\varepsilon-1)^2 = (-\varepsilon+1)^2 & si \ \varepsilon < 1 \end{cases}$$

CASO 3: $\quad x < 0$

Si n es un número impar entonces

$$\inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ x-\varepsilon \leq -1 \\ (x-\varepsilon+1)^2 & si \ x-\varepsilon > -1 \end{cases}$$

Si n es un número par entonces

$$\inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} 0 & si \ x+\varepsilon \geq 1 \\ (x+\varepsilon-1)^2 & si \ x+\varepsilon < 1 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} (x-\varepsilon+1)^2 & si \ \varepsilon-1 < x < 1-\varepsilon \\ 0 & en \ otro \ caso \end{cases}$$

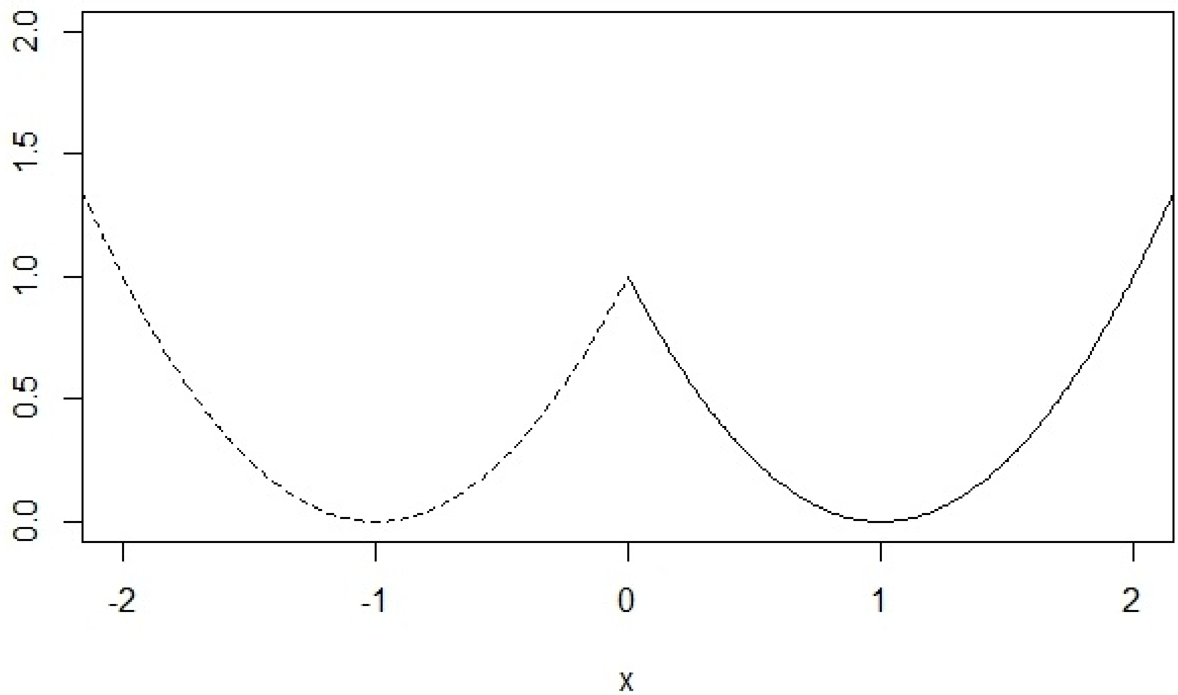
Resumiendo:

$$\liminf_{n\to\infty} \inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & si \ x-\varepsilon \leq -1 \text{ o } x+\varepsilon \geq 1 \\ (x+\varepsilon-1)^2 & si \ x-\varepsilon > -1 \text{ y } x+\varepsilon < 1 \end{cases} & \text{con } x \geq 0 \\ \begin{cases} 0 & si \ x-\varepsilon \leq -1 \text{ o } x+\varepsilon \geq 1 \\ (x-\varepsilon+1)^2 & si \ x-\varepsilon > -1 \text{ y } x+\varepsilon < 1 \end{cases} & \text{con } x < 0 \end{cases}$$

y por lo tanto

$$F'(x) = \sup_{\varepsilon>0} \liminf_{n\to\infty} \inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 0 \\ (x+1)^2 & x < 0 \end{cases},$$

cuyo gráfico se muestra a continuación

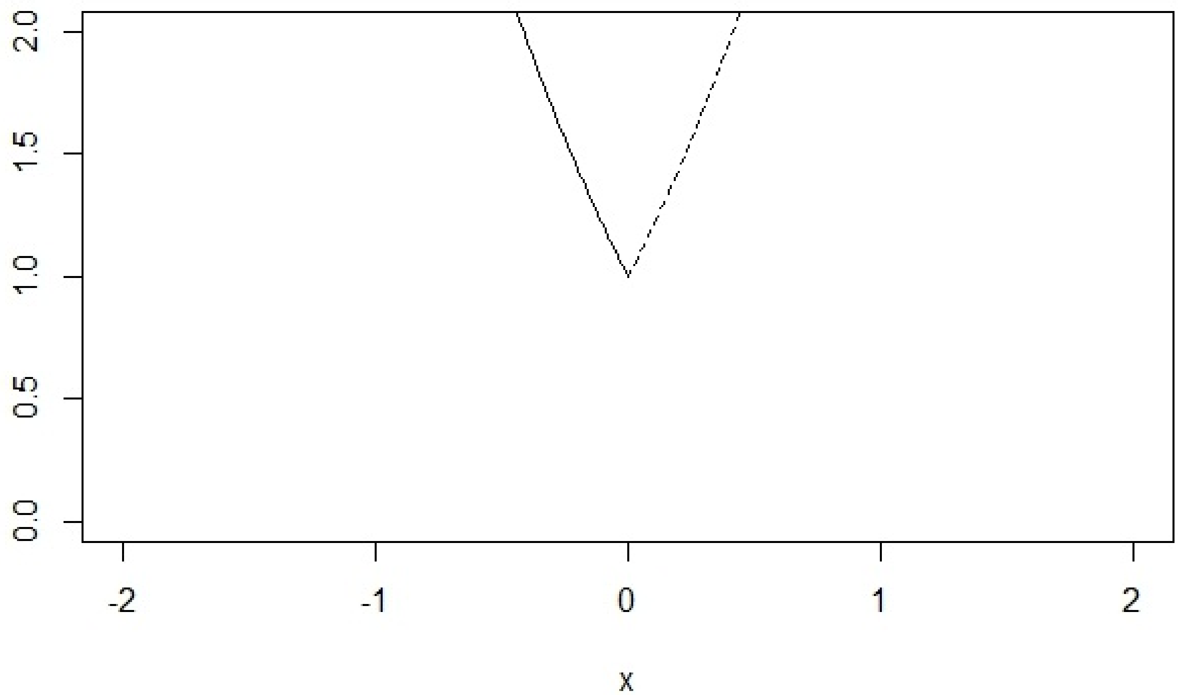


Resultando $F'(x) = \quad mín \left\{(x-1)^2, (x+1)^2\right\}$.

Haciendo un desarrollo análogo se llega a que

$$F''(x) = \sup_{\varepsilon>0} \limsup_{n\to\infty} \inf_{y\in U_\varepsilon} F_n(y) = \begin{cases} (x+1)^2 & x \geq 0 \\ (x-1)^2 & x < 0 \end{cases}$$

cuyo gráfico se muestra a continuación:



$F''(x) = máx\ \left\{(x-1)^2, (x+1)^2\right\}$.

Entonces $\forall h$ se ve que

$$\min_{y\in\mathbb{R}} F''(y) = \min_{y\in K} F''(y) = 1 > \ 0 = \min_{y\in\mathbb{R}} F_h(y) = \min_{y\in K} F_h(y)$$

y la desigualdad (*) no se cumple.

5.4.1.3. Teorema

Supongamos que existe K subconjunto numerablemente compacto de X tal que $\forall h$ se verifica

$$\inf_{y\in X} F_h(y) = \inf_{y\in K} F_h(y). \qquad (5.3)$$

Luego F' alcanza su mínimo sobre X y

$$\min_{y \in X} F'(y) = \liminf_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y). \qquad (5.4)$$

Si además (F_h) $\Gamma-$converge a una función F en X entonces F alcanza su mínimo sobre X y

$$\min_{y \in X} F(y) = \lim_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y) \qquad (5.5).$$

Demostración Por Proposición 5.4.1.1. aplicada a $U = X$ se tiene

$$\liminf_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y) \leq \inf_{y \in X} F'.$$

Además, por Proposición 5.4.1.2. y por (5.3) se tiene

$$\inf_{y \in X} F' \leq \inf_{y \in K} F' \leq \liminf_{h \to 0} \inf_{y \in K} F_h(y) = \liminf_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y)$$

Entonces F' alcanza su mínimo sobre X quedando probado (5.4).

Si además (F_h) $\Gamma-$converge a una función F en X, luego por (5.4) junto con Proposición 5.4.1.1. aplicada a $U = X$ se tiene

$$\liminf_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y) = \min_{y \in X} F'(y) = \min_{y \in X} F = \min_{y \in X} F'' \geq \limsup_{h \to 0} \inf_{y \in X} F_h(y)$$

que prueba (5.5).■

5.4.2. Equicoercividad

5.4.2.1. Definición

Se dice que una sucesión (F_h) es *equicoerciva* sobre X si $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists K_t$ subconjunto cerrado y numerablemente compacto de X tal que $\forall h$ se verifica $\{F_h \leq t\} \subseteq K_t$.

5.4.2.2. Proposición

(F_h) es equicoerciva en X sii existe una función coerciva y semicontinua inferiormente $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\forall h$, $\Psi \leq F_h$ sobre X.

Demostración $\Longleftarrow$) Para una tal función Ψ, por Proposición 5.1.2.2. b, el conjunto $\{\Psi \leq t\}$ resulta cerrado $\forall t \in \mathbb{R}$.

Y al ser Ψ coerciva, por Definición 5.1.5.1., la clausura del conjunto $\{\Psi \leq t\}$ es numerablemente compacta en X $\forall t \in \mathbb{R}$.

Y ahora basta tomar $K_t = \{\Psi \leq t\}$ el cual verifica $\{F_h \leq t\} \subseteq K_t$ $\forall h$.

$\Longrightarrow$) Recíprocamente, al ser (F_h) equicoerciva se tiene que $\forall t \in \mathbb{R}$ $\exists K_t$ subconjunto cerrado y numerablemente compacto de X tal que $\forall h$ $\{F_h \leq t\} \subseteq K_t$.

Sea $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ la función definida como

$$\Psi(x) = \operatorname{ínf} \{s \in \mathbb{R} \text{ tal que } x \in K_t \text{ para todo } t > s\},$$

con la convención usual $\operatorname{ínf} \emptyset = \infty$.

Sea $x \in X$ y $s \in \mathbb{R}$ tal que $F_h(x) \leq s$.

Entonces $\forall t > s$, $x \in \{F_h \leq s\} \subset \{F_h \leq t\} \subseteq K_t$ y por lo tanto $\forall t > s$, $x \in K_t$, de modo que $\Psi(x) \leq s$.

Esto implica que $\forall h$

$$\Psi \leq F_h \quad \text{sobre } X.$$

Dado que

$$\{\Psi \leq s\} = \bigcap_{t>s} K_t,$$

resulta que el conjunto $\{\Psi \leq s\}$ es cerrado y numerablemente compacto para todo $s \in \mathbb{R}$ y por ende Ψ es coerciva. Por otro lado, por Proposición 5.1.2.2. Ψ es semicontinua inferiormente sobre X.■

5.4.3. Convergencia de mínimo para sucesiones equicoercivas

5.4.3.1. Teorema

Sea (F_h) equicoerciva en X.

Entonces F' y F'' son coercivas y se verifica la siguiente igualdad

$$\min_{y\in X} F'(y) = \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y). \tag{5.6}$$

Si además (F_h) Γ -converge a una función F en X entonces F es coerciva y verifica

$$\min_{y\in X} F(y) = \lim_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y). \qquad (5.7)$$

Demostración Por ser (F_h) equicoercivа en X, por Proposición 5.4.2.2. existirá una función coerciva y semicontínua inferiormente $\Psi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\forall h$, $F_h \geq \Psi$ sobre X.

Luego por Proposición 5.3.2.1. $F'' \geq F' \geq \Psi$. Más aún, F' y F'' son coercivas por Observación 5.1.5.2. y semicontinuas inferiormente por Proposición 5.3.3.2. Por lo tanto, por Teorema 5.1.6.1. F' y F''alcanzan su mínimo sobre X.

Se probará a continuación la igualdad (5.6), para lo cual se tiene por Proposición 5.4.1.1. aplicada a $U = X$

$$\min_{y\in X} F'(y) \geq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y).$$

Luego, asumiendo que el segundo miembro es menor que ∞, será suficiente probar la desigualdad

$$\min_{y\in X} F'(y) \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) \qquad (5.8)$$

En ese caso existe una constante $t \in \mathbb{R}$ y una subsucesión (F_{h_k}) de (F_h) tal que

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{y\in X} F_{h_k}(y) = \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) < t.$$

Además es posible elegir una subsucesión de modo que $\forall k$ valga

$$\inf_{y\in X} F_{h_k}(y) < t. \qquad (5.9)$$

Dado que (F_h) es equicoerciva, existe K subconjunto cerrado y numerablemente compacto de X tal que $\forall k$ $\{F_{h_k} \leq t\} \subseteq K$.

Por (5.9) los conjuntos $\{F_{h_k} \leq t\}$ son no vacíos, entonces $\forall k$ se verifica

$$\inf_{y\in X} F_{h_k}(y) = \inf_{y\in K} F_{h_k}(y).$$

Sea $G' = \Gamma - \liminf_{k\to\infty} F_{h_k}$. Por Proposición 5.3.1.1. se sabe que $F' \leq G'$.

Aplicando el Teorema 5.4.1.3. a la subsucesión (F_{h_k}) y el hecho de que $F' \leq G'$

$$\min_{y\in X} F'(y) \leq \min_{y\in K} G'(y) = \lim_{k\to\infty} \inf_{y\in X} F_{h_k}(y) = \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y).$$

llegando a (5.8).

Si (F_h) $\Gamma-$ converge a F, entonces $F = F' = F''$.

Luego por Proposición 5.4.1.1. aplicada a $U = X$, sale

$$\inf_{y\in X} F(y) \geq \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y),$$

que junto con (5.6) prueba (5.7).■

Ahora se quiere estudiar la convergencia de los minimizantes. Para cada $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, sea $M(F)$ el conjunto de los minimizantes de F definidos al comienzo del capítulo. Para tener un resultado completo, que incluya el caso donde la función F_h no alcanza el mínimo en x (o cuando no son fáciles de calcular), se introduce la noción de $\varepsilon-$ minimizante.

5.4.4. $\varepsilon-$minimizantes. Algunas propiedades

5.4.4.1. Definición

Sea $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una función y sea $\varepsilon > 0$.

Se dirá que $x \in X$ es un $\varepsilon-$minimizante de F en X si verifica

$$F(x) \leq máx \left\{ (\inf_{y\in X} F(y) + \varepsilon), (-\tfrac{1}{\varepsilon}) \right\}.$$

El conjunto de todos los $\varepsilon-$minimizantes de F en X se denotan como $M_\varepsilon(F)$.

5.4.4.2. Observación

- Si $\inf_{y\in X} F(y) > -\infty$ se puede tomar ε suficientemente chico de modo que

$$x \text{ es un } \varepsilon-\text{minimizante de } F \text{ en } X \text{ sii } F(x) \leq \inf_{y\in X} F(y) + \varepsilon.$$

- Si $F \geq 0$, esto último es verdadero para todo $\varepsilon > 0$.
- Si $\inf_{y\in X} F(y) = -\infty$ se unifica criterio tomando el término $(-\frac{1}{\varepsilon})$.
- Se podría mostrar que

x es minimizante de F en X sii x es un $\varepsilon-$minimizante de F en X para todo $\varepsilon > 0$,

que es lo mismo que decir

$$M(F) = \underset{\varepsilon>0}{\cap} M_\varepsilon(F).$$

• El conjunto $M_\varepsilon(F)$ de todos los $\varepsilon-$minimizantes es no vacío para todo $\varepsilon > 0$, incluso en el caso en que el conjunto $M(F)$ de todos los minimizantes sea vacío.

5.4.4.3. Teorema (véase [6], Teorema 7.19)

(F_h) $\Gamma-$ converge a una función F en X.

F no es identicamente $+\infty$.

Entonces

$$\underset{\varepsilon>0}{\cap} K - \limsup_{h\to 0} M_\epsilon(F_h) \neq \emptyset \quad \text{sii} \quad \left[M(F) \neq \emptyset \;\; \text{y} \;\; \min_{y\in X} F(y) = \limsup_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) \right]$$

y esto implica que

$$M(F) = \underset{\varepsilon>0}{\cap} K - \limsup_{h\to 0} M_\epsilon(F_h). \quad (5.10)$$

Más aún

$$\underset{\varepsilon>0}{\cap} K - \liminf_{h\to 0} M_\epsilon(F_h) \neq \emptyset \quad \text{sii} \quad \left[M(F) \neq \emptyset \;\; y \;\; \min_{y\in X} F(y) = \lim_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) \right]$$

lo cual implica que

$$M(F) = \underset{\varepsilon>0}{\cap} K - \liminf_{h\to 0} M_\epsilon(F_h) = \underset{\varepsilon>0}{\cap} K - \limsup_{h\to 0} M_\epsilon(F_h). \quad (5.11)$$

Nótese que no fue necesario pedir equicoercividad de la sucesión (F_h).

5.4.5. Límites de $\varepsilon-$minimizantes y minimizantes de $\Gamma-$límites

5.4.5.1. Teorema

Sea (F_h) equicoerciva en X y

(F_h) $\Gamma-$converge a una función F en X.

Entonces $\forall U$ entorno de $M(F)$, $\exists \epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \leq \frac{1}{k}$ se verifica

$$M(F_h) \subseteq M_\varepsilon(F_h) \subseteq U. \quad (5.12)$$

Si además F no es idénticamente $+\infty$ entonces $\forall x \in M(F)$, $\forall V$ entorno de x y $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \leq \frac{1}{k}$ se verifica

$$M_\varepsilon(F_h) \cap V \neq \emptyset. \quad (5.13)$$

Demostración Si F es indénticamente $+\infty$, luego $M(F) = X$ y (5.12) resulta trivial.

De lo contrario, $\exists t \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf_{y \in X} F(y) < t.$$

Dado que (F_h) es equicoerciva $\exists K$ subconjunto cerrado y numerablemente compacto de X tal que $\forall h$ se verifica

$$\{F_h \leq t\} \subseteq K. \quad (5.14a)$$

Además F' y F'' son coercivas por Teorema 5.4.3.1. Pero como (F_h) $\Gamma-$converge F, entonces $F = F' = F''$ resulta coerciva. Es decir que $\forall t \in \mathbb{R}$ la clausura del conjunto $\{F \leq t\}$ es numerablemente compacto, obteniendo

$$\{F \leq t\} \subseteq K. \quad (5.14b)$$

Sea U un entorno abierto de $M(F)$ en X.

$K \backslash U$ es numerablemente compacto y F es semicontínua inferiormente por Proposición 5.3.3.2. Entonces, por Teorema 5.1.6.1., $\exists x \in K \backslash U$ tal que

$$s = \min_{y \in K \backslash U} F(y). \quad (5.15)$$

Dado que $x \notin M(F)$ se tiene

$$\min_{y\in X} F(y) < F(x) = s.$$

Por Proposición 5.4.1.2. se tiene

$$s = \min_{y\in K\setminus U} F(y) \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in K\setminus U} F_h(y) \quad \text{y}$$

por (5.14) se obtiene además

$$t \leq \inf_{y\in X\setminus K} F_h(y).$$

Entonces

$$\textit{mín}\ \{s,t\} \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X\setminus U} F_h(y).$$

Por otro lado, del Teorema 5.4.3.1. se obtiene

$$\lim_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) = \min_{y\in X} F(y) < \textit{mín}\ \{s,t\}.$$

Entonces

$$\lim_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y) < \textit{mín}\,\{s,t\} \leq \liminf_{h\to 0} \inf_{y\in X\setminus U} F_h(y).$$

Esto implica que $\exists\varepsilon > 0$ y $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $\forall h \leq \frac{1}{k}$

$$\textit{máx}\ \left\{(\inf_{y\in X} F_h(y) + \varepsilon), (-\tfrac{1}{\varepsilon})\right\} < \inf_{y\in X\setminus U} F_h(y)$$

Y entonces, por definición de $M_\varepsilon(F_h)$, se verifica que $\forall h \leq \frac{1}{k}$

$$M_\varepsilon(F_h) \subseteq U$$

concluyendo así la prueba de (5.12).

Dado que (F_h) es equicoerciva y aplicando Teorema 5.4.3.1. se verifican las siguientes condiciones $M(F) \neq \emptyset$ y $\min_{y\in X} F(y) = \lim_{h\to 0} \inf_{y\in X} F_h(y)$.

Como F no es idénticamente $+\infty$, el Teorema 5.4.4.3. garantiza (5.11), lo que lleva a (5.13) por definición de $K-$límite.■

El siguiente enunciado se desprende inmediatamente de los Teoremas 5.4.3.1. y 5.4.5.1.

5.4.5.2. Corolario (véase [6], Corolario 7.24)

Sea (F_h) equicoerciva en X tal que

(F_h) $\Gamma-$converge a una función F en X y

F tiene un único punto mínimo x_0 en X.

Supongamos además que (x_h) es una sucesión en X tal que $\forall h$, x_h es un ε_h-minimizante para F_h en X, donde (ε_h) es una sucesión de números reales positivos que converge a 0.

Entonces (x_h) converge a x_0 en X y $(F_h(x_h))$ converge a $F(x_0)$.

5.4.5.3. Observación

• La unicidad del punto mínimo es esencial.

5.5. Caracterización secuencial de $\Gamma-$límite

5.5.1. $\Gamma-$límites en la topología débil de un espacio de Banach reflexivo

5.5.1.1. Proposición (véase [6], Proposición 8.16)

Sea X un espacio de Banach reflexivo,

y supongamos que se lo dota de la topología débil.

(F_h) equicoerciva en la topología débil de X.

Entonces $F^{'} = \Gamma - \liminf\limits_{h\to 0} F_h(x)$ en la topología débil verifica

a) $\forall x \in X$ y $\forall$ sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X, vale

$$F'(x) \leq \liminf_{h\to 0} F_h(x_n) \quad \text{y}$$

b) $\forall x \in X$, $\exists$ una sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X, tal que

$$F'(x) = \liminf_{h\to 0} F_h(x_h).$$

Por su parte $F'' = \Gamma - \limsup\limits_{h\to 0} F_h(x)$ en la topología débil verifica

c) $\forall x \in X$ y $\forall$ sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X, vale

$$F''(x) \leq \limsup_{h\to 0} F_h(x_h) \quad \text{y}$$

d) $\forall x \in X$, $\exists$ una sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X, tal que

$$F''(x) = \limsup_{h \to 0} F_h(x_h).$$

5.5.1.2. Teorema

Bajo las hipótesis de la proposición anterior, y
si además existe F que satisface

$e)$ $\forall x \in X$ y $\forall$sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X, vale

$$F(x) \leq \liminf_{h \to 0} F_h(x_h) \quad \text{y}$$

$f)$ $\forall x \in X$, $\exists$ una sucesión (x_h) que converge débilmente a x en X tal que

$$F(x) = \lim_{h \to 0} F_h(x_h).$$

entonces (F_h) $\Gamma-$converge a F en la topología débil de X.

Demostración Por hipótesis F satisface $e)$ y $f)$. De la proposición anterior surge inmediatamente el resultado.■

Capítulo 6

Aplicación de la $\Gamma-$ convergencia y del método de elementos finitos al problema del obstáculo

A lo largo de estas últimas décadas se ha trabajado intensamente para conseguir resultados sobre existencia, unicidad y regularidad de solución para el problema del obstáculo. Inclusive, usando hipótesis relativamente fuertes y convenientes métodos del Análisis Numérico, se han logrado aproximaciones interesantes de las soluciones.

En esta parte del trabajo se combinarán los resultados de los Capítulos 4 y 5 para lograr objetivos similares utilizando métodos variacionales con hipótesis más débiles, y así obtener adecuadas propiedades de convergencia.

Como ya fue mencionado en el Capítulo 4, la versión continua del problema del obstáculo se puede discretizar por medio del método de elementos finitos, llegando a la siguiente expresión:

$$\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } a(u_{h,}v - u_h) \geq l(v - u_h) \text{ para todo } v \in V_h.$$

A partir de ahora y para simplificar la notación llamaremos $H = H_0^1$. Si bien en los capítulos anteriores ya se han definido los conjuntos H_h, V y V_h, ahora es buen momento para mencionar ciertas características de los mismos que serán de suma importancia en el desarrollo subsiguiente. Sean entonces H un espacio de Hilbert y H_h un subespacio de dimensión finita de H (el cual obviamente resulta también de Hilbert), y sea V_h un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de H_h. A esta altura ya se sabe que $V \subset H$, y además $V_h \subset H_h \subset H$. Si bien en los casos "cómodos" V_h está contenido en V, y además V_h tiene estructura de espacio vectorial (de dimensión finita), en esta tesis existirán elementos de V_h que no necesariamente estarán en V. Más aún, ninguno de los dos conjuntos será espacio vectorial a causa de la presencia del obstáculo (de ahí la no linealidad del problema).

Las condiciones sobre H, V y J de las que se habló antes para el caso continuo, y que sirvieron para garantizar existencia y unicidad de solución, se verifican también para H_h, V_h y F_h en el caso discreto (F_h será definido utilizando la idea de extensión presentada en el Capítulo 1).

Se concluirá entonces que el siguiente problema de minimización:

$$\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } F_h(u_h) = \underset{v \in V_h}{inf}\, F_h(v)$$

tiene solución y es única para cada h.

En una segunda etapa se muestra que F_h es una sucesión equicoerciva y que $\Gamma-$converge a una cierta F (definida más adelante). Utilizando los resultados del Capítulo 5 se llega a que tanto la sucesión de mínimos como la de minimizantes de F_h convergen respectivamente al mínimo y al minimizante buscados.

6.1. Problema del obstáculo

6.1.1. Forma continua. Introducción del funcional $F(v)$ asociado al problema

Concentraremos nuestra atención en el problema del obtáculo no lineal descripto en el Capítulo 3. Sean entonces los siguientes datos conocidos a priori, donde se asume por simplicidad que Ω es un dominio poligonal en el plano con frontera Γ :

$\psi \in H^1(\Omega)$ y $\psi \leq 0$ en Γ,

$f \in L^2(\Omega)$.

Sean

$$H = H_0^1(\Omega)$$
$$V = \left\{ v \in H_0^1(\Omega) \ / \ v \geq \psi \text{ en } \Omega \right\}.$$

Finalmente se define el funcional $F : H \to \overline{\mathbb{R}}$ como:

$$F(v) = \begin{cases} J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy - \int\limits_{\Omega} fvdxdy & v \in V \\ +\infty & v \in H|V \end{cases}.$$

Y así el problema del obstáculo se convierte en:

$$\text{hallar } u \in H \quad \text{tal que } F(u) = \inf_{v \in H} F(v), \qquad (6.1)$$

donde obviamente se buscará la solución u en V. Utilizando ideas ya desarrolladas en el antedicho capítulo, surge que el problema (6.1) tiene única solución $u \in V$.

6.1.2. Forma discreta. Introducción de la sucesión de funcionales $\{F_h\}$ asociada al problema

Consideremos ahora una familia de triangulaciones admisibles $\{\Upsilon_h\}$ de Ω.

Entonces se definen, para cada h, los espacios de elementos finitos:

$$H_h = \{v \in H \text{ tal que } v|_T \in P_1(T), \forall T \in \Upsilon_h\} \ \text{ y}$$
$$V_h = \{v \in H_h \text{ tal que } v \geq r_h \psi \text{ en } \Omega\},$$

donde $r_h : H \to H_h$ es un operador de interpolación de Clément.

Para cada h, sea $F_h : H \to \overline{\mathbb{R}}$ dada como:

$$F_h(v) = \begin{cases} J(v) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy - \int\limits_{\Omega} fvdxdy & v \in V_h \\ +\infty & v \in H|V_h \end{cases}$$

Entonces se propone el siguiente problema discreto:

$$\text{hallar } u \in H \quad \text{tal que } F_h(u) = \inf_{v \in H} F_h(v) \qquad (6.2)$$

el cual es equivalente a :

$$\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } F_h(u_h) \text{ sea mínimo.}$$

6.1.3. Existencia y unicidad de solución del problema para cada h

6.1.3.1. Lema

Para cada h, el problema (6.2) tiene única solución $u_h \in V_h$.

Demostración Tomar:

H_h espacio de Hilbert (recordar que H_h es subespacio de H y además es cerrado por ser de dimensión finita)

$V_h \subset H_h$ no vacío, cerrado y convexo,

$a(u,v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v$ forma bilineal sobre H_h,

$l(u) = \int\limits_{\Omega} fu$ forma lineal.

Luego por Teorema 3.2.8.1. resulta que el problema (6.2) admite solución única.■

6.2. Convergencia de mínimos y minimizantes en el problema del obstáculo

Con el propósito de estudiar covergencia de mínimos y minimizantes, será de gran utilidad analizar el comportamiento de la sucesión $\{F_h\}$.

Para ello consideramos primero el funcional $\Psi : H \to \mathbb{R}$ tal que

$$\Psi(v) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy - \int\limits_{\Omega} fv \; dxdy.$$

A partir de la conocida propiedad de espacios con producto interno (no necesariamente de Hilbert)

$$|\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2|^2 \leq \lambda |v_1|^2 + (1-\lambda) |v_2|^2 \qquad \forall \lambda \in (0,1),$$

donde la desigualdad es estricta si $v_1 \cdot v_2 < |v_1| |v_2|$, se desprende inmediatamente que Ψ es convexo.

Obviamente Ψ resulta continuo en la topología fuerte de H, y por ende semicontinuo inferiormente en la misma topología.

Por otra parte vamos a demostrar que $\forall t \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{\Psi \leq t\}$ es acotado.

Por lo ya visto en Nociones Preliminares se tiene

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = c\,|v|_{H^1(\Omega)}$$

donde c es una constante positiva adecuada (que depende de Ω).

Entonces

$$\|v\|^2_{H(\Omega)} = \|v\|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{H^1(\Omega)} \leq (1+c^2)\,|v|^2_{H^1(\Omega)}\,.$$

Por otra parte

$t + \frac{1}{2}(c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2 \geq \Psi(v) + \frac{1}{2}(c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2$

$\geq \frac{1}{2}\,\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2$

$\geq \frac{1}{2}\,\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}(c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2$

$= \frac{1}{2}(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} - c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2,$

resultando

$$|v|_{H^1(\Omega)} \leq (2t + (c\,\|f\|_{L^2(\Omega)})^2)^{\frac{1}{2}} + c\,\|f\|_{L^2(\Omega)}\,. \quad (6.3)$$

Por lo tanto $\{\Psi \leq t\}$ es acotado, como se quería demostrar.

6.2.1. Equicoercividad de la sucesión $\{F_h\}$ en la topología débil de H

6.2.1.1. Proposición

La sucesión $\{F_h\}$ es equicoerciva en H con la topología débil.

Demostración Claramente $F_h \geq \Psi$ para todo $h > 0$. Por la Proposición 5.4.2.2. bastará demostrar que Ψ es débilmente coercivo y débilmente semicontinuo inferiormente.

Dado que Ψ es convexo se concluye, por Proposición 5.1.11.1., que Ψ es semicontínuo inferiormente para la topología débil de H.

Sea $\{v_n\}$ una sucesión en $\{\Psi \leq t\}$. Por lo recién visto está acotada en H.

Como H es reflexivo, el Teorema de Eberlein-Shmulyan garantiza que $\{v_n\}$ tiene una subsucesión débilmente convergente. Por ende $\overline{\{\Psi \leq t\}}$ (clausurado en la topología débil) es numerablemente compacto. Esto muestra la coercividad débil de Ψ en H.■

6.2.2. Caracterización secuencial del $\Gamma-$límite de la sucesión $\{F_h\}$ en la topología débil de H

Tal como fue anunciado en el Capítulo 4, se retoma ahora la interpolación de Clément (véase [4] Clément) :

$$r_h : H \subset L^2(\Omega) \to H_h,$$

recordando que para toda $v \in H$ se verifica que $r_h v \to v$ cuando $h \to 0$.

6.2.2.1. Lema

Sea $\{v_h\}_h \subset H$ tal que $v_h \to v$ débilmente en H.

Entonces

$$F(v) \leq \liminf_{h \to 0} F_h(v_h). \quad (6.4)$$

Demostración Primer caso: $F(v) < +\infty$.

Si $\liminf_{h \to 0} F_h(v_h) = +\infty$ no hay nada que demostrar.

Se supone entonces que $\liminf_{h \to 0} F_h(v_h)$ es finito. Considerando una conveniente subsucesión $\{v_{h_k}\}$, se tendrá que $\forall k \quad F_{h_k}(v_{h_k})$ es finito.

Como $v_{h_k} \to v$ débilmente en H sale que:

$$\|v\|_H \leq \liminf_{h \to 0} \|v_{h_k}\|_{H.} \quad (6.5)$$

Por Teorema de Rellich, $\exists$ una nueva subsucesión, que llamaremos $\left\{v_{h_{k_l}}\right\}$, que converge a v en $L^2(\Omega)$, de lo que se desprende:

$$\int_\Omega f v_{h_{k_l}} \; dxdy \quad \to \int_\Omega f v \; dxdy \quad (6.6)$$

Por otra parte

$\|v\|_H \leq \liminf_{h \to 0} \|v_h\|_H \leq \liminf_{h \to 0} \|v_{h_k}\|_H \leq \liminf_{h \to 0} \left\|v_{h_{k_l}}\right\|_H \Leftrightarrow$

$(\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2)^{1/2} \leq \liminf_{h \to 0} (\left\|v_{h_{k_l}}\right\|_{L^2}^2 + \left\|\nabla v_{h_{k_l}}\right\|_{L^2}^2)^{1/2} \Leftrightarrow$

$\|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq \|v\|_{L^2}^2 + \liminf_{h \to 0} \left\|\nabla v_{h_{k_l}}\right\|_{L^2}^2$

quedando

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy \leq \liminf_{h \to 0} \int_{\Omega} \left|\nabla v_{h_{k_l}}\right|^2 dxdy \quad (6.7)$$

Entonces a partir de (6.7) se tiene

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dxdy + \int_{\Omega} f v_{h_{k_l}} \, dxdy \leq \liminf_{h \to 0} (\int_{\Omega} \left|\nabla v_{h_{k_l}}\right|^2 dxdy + \int_{\Omega} f v_{h_{k_l}} \, dxdy)$$

utilizando (6.6) y rebautizando a $\left\{v_{h_{k_l}}\right\}$ como $\{v_h\}$ se llega a (6.4).

Segundo caso: $F(v) = +\infty$.

Se supone entonces que $\liminf_{h \to 0} F_h(v_h)$ es finito.

Como $F(v) = +\infty$ entonces $v \notin V$ y por lo tanto $|\{v < \psi\}| > 0$.

Por otra parte $\liminf_{h \to 0} F_h(v_h)$ es finito. Considerando una conveniente subsucesión $\{v_{h_k}\}$, se tendrá que $\forall k \quad F_h(v_{h_k})$ es finito, de lo que surge que $v_{h_k} \geq r_{h_k} \psi$.

Además, por Teorema de Rellich, $\exists$ una nueva subsucesión $\left\{v_{h_{k_l}}\right\}$ que converge a v en $L^2(\Omega)$, y como sabemos que $r_{h_{k_l}} \psi$ converge a ψ en $L^2(\Omega)$ resulta entonces que $v \geq \psi$ en casi todo punto de Ω.

Esto último contradice el hecho que $|\{v < \psi\}| > 0$ y por lo tanto $\liminf_{h \to 0} F_h(v_h)$ es infinito, quedando demostrado (6.4).■

6.2.2.2. Lema

Para toda $v \in H$, existe una sucesión $\{v_h\} \subset H$ que converge débilmente a v en H y que satisface:

$$F(v) = \lim_{h \to 0} F_h(v_h). \quad (6.8)$$

Demostración Para mostrar existencia de la sucesión sea $v_h = r_h v$.

Como $v_h \to v$ en H entonces $v_h \to v$ débilmente en H.

Faltaría probar (6.8).

Primer caso: $v \in V$.

$v \in V \Longrightarrow$

$v \in H \quad$ y $\quad v \geq \psi \Longrightarrow$

$r_h v \geq r_h \psi \Longrightarrow$

$v_h \geq r_h\psi \Longrightarrow$

$v_h \in V_h$

resultando

$$F_h(v_h) = F_h(r_h v) = \int_\Omega |\nabla r_h v|^2 \, dxdy + \int_\Omega f \; r_h v \; dxdy.$$

De este modo, utilizando convergencia en H, queda demostrado (6.8).

Segundo caso: $v \notin V$.

Veamos que $v_h \notin V_h$ ya que en caso contrario $r_h v \geq r_h\psi$, y como $r_h v$ converge a v y $r_h\psi$ converge a ψ (ambas en $H(\Omega)$), se concluye que $v \geq \psi$ en casi todo punto de Ω, obteniendo un absurdo.

Se llega de este modo a que $v_h \notin V_h$ y por ende a (6.8)..■

Como consecuencia de los Lemas 6.2.2.1. y 6.2.2.2. se llega al siguiente resultado.

6.2.3. $\Gamma-$convergencia de la sucesión $\{F_h\}$ en la topología débil de H

6.2.3.1. Proposición

La sucesión $\{F_h\}$ $\Gamma-$converge a F en la topología débil de H.

Demostración En vista de los Lemas 6.2.2.1 y 6.2.2.2., y dado que el espacio H es de Banach reflexivo y que F_h es equicoerciva débilmente en H, basta aplicar el Teorema 5.5.1.2.■

6.2.4. Convergencia de minimizantes de la sucesión $\{F_h\}$ al minimizante de F en la topología débil de H. Convergencia de mínimos

6.2.4.1. Teorema

Sea u la solución del problema (6.1) y, para cada h, sea u_h la solución de (6.2). Entonces

$$u_h \to u \text{ débilmente en } H$$

$$\text{y}$$

$$F_h(u_h) \to F(u).$$

Demostración La existencia y unicidad de u y u_h fueron previamente analizadas. Además $\{F_h\}$ es equicoerciva en la topología débil de H por la Proposición 6.2.1.1, y $\Gamma-$converge a F, también en la topología débil de H, por la Proposición 6.2.3.1.

Sea ε_h una sucesión de números reales positivos tales que $\varepsilon_h \underset{h\to 0}{\to} 0$.

Dado que u_h es un minimizante para F_h, resulta que $\forall\varepsilon$, u_h es un $\varepsilon-$minimizante para F_h. En particular u_h es un ε_h-minimizante para F_h.

Entonces el teorema sigue del Corolario 5.4.5.2.■

6.2.4.2. Observación

• Los $\varepsilon-$ minimizantes adquieren protagonismo a la hora de implementar numéricamente este tipo de problemas, dada la dificultad o imposibilidad de encontrar minimizantes en forma exacta. Poniendo énfasis en la acotación de errores, cabe esperar que los ε_h-minimizantes se aproximen a los minimizantes a medida que h tiende a 0.

Capítulo 7

Bibliografía básica

[1] Brézis, H (1972). *Problemes Unilateraux.* J. Math. Pures et Appl. 51.

[2] Brézis, H (1983). *Análisis Funcional.* Alianza Universidad Textos.

[3] Ciarlet, F. G. (1978). *The finite element method for elliptic problems.* North - Holland.

[4] Clément (1975). *Aproximation by finite element functions using local regularization.* RAIRO Análisis Numérico. 9(R-2):77-84.

[5] Dacorogna, B. (2004). *Introduction to the calculus of variations.* Imperial College Press.

[6] Dal Maso, G. (1993). *An introduction to* $\Gamma-$*convergence.* Birkhauser.

[7] Duvaut, G y Lions J.L. (1972). *Les Inequations en Mecanique et en Physique.* Dunod.

[8] Friedman, A. (1982). *Variational principles and free - boundary problems.* Wiley.

[9] Garguichevich, G; Gariboldi, C.M.; Marangunic P.R. y Pallara D. (2006). *Direct Methods in the Calculus of Variations.* MAT serie A Número 13

[10] Gilbarg, D. y Trudinger, N. (2nd edition 1984). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer.

[11] Kinderleehrer D. y Stampacchia G. (1980). *An introductions to Variational Inequalities an their applications.* Academic Press.

[12] Lederman, C. (1998). *Notas de Análisis Numérico.* Universidad de Buenos Aires.

[13] Lions J.L. y Stampacchia G (1967). *Variational inequalities.* Comm. Pure Appl. Math.

20.

[14] Lions J.L. (1969). *Quelques methodes de resolution des problemes aux non lineaires.* Dunod.

[15] Marangunic, P.R. (1986). *Distribuciones y Espacios de Sobolev,* en *II Seminario sobre el problema de Stefan y sus aplicaciones. Cuadernos del Instituto de Matemática "Beppo Levi". Volumen 2. Cuaderno 14.* Universidad Nacional de Rosario.

[16] Rodríguez, J. F. (1987). *Obstacle problems in mathematical physics.* Elsevier Science Ltd.

[17] Sze-Tsen Hu. (1966). *Introduction to General Topology.* Holden-Day, Inc.

[18] Tarzia, D.A. (1981). *Introducción a las inecuaciones variacionales elípticas y sus aplicaciones a problemas de frontera libre.* CLAMI.

[19] Vázquez, J. L. (1996). *An introduction to the theory of free boundaries (based on the Ph.D.Course tought at the Univ. Aut. de Madrid).*

[20] Wolanski, N. (1998). *Problemas de frontera libre. Notas de curso en Unión Matemática Argentina.*