UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Desigualdades para la Integral Fraccionaria y Teoremas de Inmersión para Espacios Potenciales de Funciones Radiales

Erika Porten

Director: Pablo De Nápoli

Junio de 2014

Índice general

Introducción

El punto de partida de esta tesis fue el estudio de las acotaciones con pesos potencia para la integral fraccionaria (o potencial de Riesz)

$$T_\gamma f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\gamma}\, dy \quad 0 < \gamma < n$$

en el caso en que $f(x) = f_0(|x|)$ es una función radial de $\mathbb{R}^n$, basándonos en el trabajo realizado por P. De Nápoli, I. Drelichman y R. Durán en [4].

El estudio de este operador se remonta al trabajo de Marcel Riesz (ver [14]) de 1948, del cual recibe su nombre, y fue estudiado por diversos autores a lo largo de la historia, como por ejemplo Hardy y Littlewood, Stein y Weiss, Sawyer y Wheeden, por nombrar algunos de ellos. Repasaremos algunos de sus resultados en el primer capítulo.

Stein y Weiss [18] consideran desigualdades con pesos potencia de la forma

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q}\, \||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1}$$

y dan condiciones para su validez. Posteriormente, B. Rubin [15], y también P. De Nápoli, I. Drelichman y R. Durán [4], demostraron que restringiendo el operador a funciones radiales, el rango de pesos potencia admisibles para que valga una desigualdad de este tipo es estrictamente mayor del que se obtiene cuando se consideran funciones cualesquiera de $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{\alpha p})$. Un teorema aún más general (con integrabilidad angular) fue probado por P. D'Ancona y R. Luca en [2].

En el estudio de las acotaciones para pesos más generales B. Muckenhoupt y R. L. Wheeden [11], dieron condiciones necesarias y suficientes para la validez de la desigualdad

$$\|v(x) T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q}\, \|v(x) f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

con el mismo peso en ambos lados. Más adelante, E. T. Sawyer y R. L. Wheeden en [16] obtuvieron una caracterización para los pesos admisibles en una desigualdad de tipo

$$\|w(x) T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q}\, \|v(x) f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

En este trabajo mostraremos que las potencias que cumplen la condición de Sawyer y Wheeden son las de Stein y Weiss [18], de donde puede deducirse que el resultado de Stein y Weiss no puede ser mejorado en general.

El hecho de poder obtener mejores desigualdades si nos restringimos al subespacio de funciones radiales es bien conocido. Podemos por ejemplo remontarnos a los trabajos de W. Strauss [19] y W. M. Ni [12], quienes probaron los siguientes teoremas:

Teorema 0.0.1. *[12, Ni] Sea B la bola unitaria de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 3)$, entonces toda función en $H^1_{0,rad}(B)$ es igual en casi todo punto a una función en $C(\overline{B} - \{0\})$ tal que*

$$|u(x)| \leq C_n \, |x|^{-(n-2)/2} \, \|\nabla u\|_{L^2(B)}$$

Teorema 0.0.2. *[19, W. Strauss] Sea $n \geq 2$. Entonces toda función en $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$ es igual en casi todo punto a una función en $C(\mathbb{R}^n - \{0\})$ tal que*

$$|u(x)| \leq C_n \, |x|^{-(n-1)/2} \, \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

El objetivo principal en sus trabajos era el de encontrar soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales no lineales. Estas desigualdades les permitieron obtener en particular inmersiones compactas para el espacio de Sobolev $H^1_{rad}(\mathbb{R}^n)$. Teoremas como estos desempeñan un papel importante cuando se quiere aplicar métodos variacionales para obtener soluciones de ecuaciones diferenciales no lineales, ya que nos permiten demostrar teoremas de existencia.

Esta tesis está organizada en 4 capítulos, de los cuales daremos una breve descripción a continuación.

En el capítulo 1 haremos un breve repaso de los resultados clásicos de la teoría de las acotaciones para la integral fraccionaria, comenzando por la definición del potencial de Riesz (integral fraccionaria), continuando con las acotaciones sin pesos para la integral fraccionaria de Hardy, Littlewood y Sobolev:

Teorema 0.0.3. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \gamma < n$ y $1 < p < q < \infty$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$, entonces existe una constante $C_{p,q}$ independiente de f tal que*

$$\|T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Siguiendo con las acotaciones con pesos potencias de Stein y Weiss:

Teorema 0.0.4. *Sea $n \geq 1$, $0 < \gamma < n, 1 < p \leq q < \infty, \alpha < \frac{n}{p'}, \beta < \frac{n}{q}, \alpha + \beta \geq 0$, y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$, entonces la desigualdad*

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

vale para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{p\alpha} dx)$, donde C es una constante independiente f.

Y finalmente mostraremos que el teorema de Stein y Weiss es un caso particular del teorema de Sawyer y Wheeden (que considera pesos más generales).

En el capítulo 2 restringiremos nuestro análisis al espacio de funciones con simetría radial. Aquí mostraremos el teorema de P. De Nápoli, I. Drelichman y R. Durán, al que le agregaremos el caso límite $q = \infty$.

Teorema 0.0.5. *Sea $n \geq 1$, $0 < \gamma < n$. Si $1 < p < q < \infty$, $\alpha < \frac{n}{p'}$, $\beta < \frac{n}{q}$, $\alpha + \beta \geq (n-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{n} - 1$, entonces*

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función radial $f \in L^p\left(\mathbb{R}^n, |x|^{p\alpha} dx\right)$
Si $p = 1$ o $q = \infty$ (pero no ambas condiciones simultáneamente), vale la el mismo resultado si reemplazamos la condición sobre $\alpha + \beta$ por $\alpha + \beta > (n-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$.

En el capítulo 3 daremos la definición de los espacios de Sobolev fraccionarios basados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ (conocidos como espacios potenciales), para los cuales mostraremos algunas de sus propiedades y la caracterización de los mismos cuando nos restringimos a las funciones radiales. Además daremos una generalización para los teoremas de W. M. Ni y de W. Strauss mencionados anteriormente.

Teorema 0.0.6. *(Lema de Ni para Espacios Potenciales) Sean $n > 1$, $1 < p < \infty$ y $1/p < s < n/p$. Entonces*

$$|f(x)| \leq C_n |x|^{-(n-sp)/p} \|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 0.0.7. *(Lema de Strauss para Espacios Potenciales) Sean $1 < p < \infty$ y $1/p < s < n$. Entonces*

$$|f(x)| \leq C_n |x|^{-(n-1)/p} \|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Estos teoremas serán de gran utilidad en la demostración de los teoremas de inmersión que veremos en el último capítulo.

En el capítulo 4 centraremos nuestra atención en los teoremas de inmersión compacta de los espacios potenciales de funciones radiales en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en espacios con pesos $L^p(\mathbb{R}^n, |x|^c)$

Teorema 0.0.8. *Sean* $1/p < s < n/p$ *y* $1 < p < q < p^* = \frac{np}{n-sp}$, *entonces para toda función radial se tiene la inclusión compacta*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 0.0.9. *Sean* $1/p < s < n/p$ *y* $1 < p < q < p^* = \frac{p(n+c)}{n-sp}$, *entonces para toda función radial se tiene la inclusión compacta*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n, |x|^c\, dx)$$

donde $-ps < c < \frac{(n-1)(q-p)}{p}$

Si bien estos teoremas fueron demostrados por Lions (en [13]) en el caso sin pesos y por P. De Nápoli e I. Drelichman (en [3]) para el caso con pesos, en este trabajo daremos una versión más débil, ya que hemos agregado la condición $s > 1/p$, que nos permitirá dar una demostración más elemental usando los resultados analizados en los capítulos anteriores.

Y finalmente cuenta con un apéndice en donde realizamos la demostración de un resultado auxiliar utilizado en el primer capítulo.

Capítulo 1

La Integral Fraccionaria (Potencial de Riesz)

1.1. El Potencial de Riesz

El Potencial de Riesz recibe su nombre del matemático húngaro Marcel Riesz quien lo introduce en el año 1948 [14] dando una generalización a varias variables para la integral de Riemann-Liouville

$$I_\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x f(t)(x-t)^{\alpha-1}\, dt \qquad (Re(\alpha) > 0)$$

Definición 1.1.1. *Sean $0 < \alpha < n$ y f localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Se define el Potencial de Riesz por*

$$I_\alpha(f) = C(\alpha, n) \int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{\alpha-n}\, dy$$

donde

$$C(\alpha, n) = 2^{-\alpha}\pi^{-n/2}\frac{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$$

Este operador, también conocido como Integral Fraccionaria, es de gran importancia por sus aplicaciones, ya que nos permite dar una representación integral a las potencias negativas del Laplaciano. Para poder ver cuál es esa relación vamos a realizar algunas observaciones. Partimos de la definición de la función Gama

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}\, dx \qquad (Re(\alpha) > 0)$$

y si hacemos la sutitución $x = at$

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= \int_0^\infty a^{\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-at}a\,dt \\ &= a^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-at}\,dt\end{aligned}$$

de donde podemos obtener la relación

$$a^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-at}\,dt$$

con la que podemos definir las potencias negativas de un operador A no negativo que genera un semigrupo

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-tA}\,dt$$

y si tomamos $A = -\Delta$ tenemos una representación integral para las potencias negativas del Laplaciano

$$(-\Delta)^{-\alpha}(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{t\Delta}(f)\,dt$$

tomando $f \in \mathcal{S}$, tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{e^{t\Delta}(f)} &= e^{-t|\omega|^2}\widehat{f}(\omega) \\ e^{t\Delta}(f) &= f * \left(e^{-t|\omega|^2}\right)^\vee \\ &= f * K_t\end{aligned}$$

donde K_t denota el núcleo del calor

$$K_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x|^2/4t}$$

como se puede ver en [17]. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(-\Delta)^{-\alpha} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-|x-y|^2/4t}f(y)\,dy\right)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\left(\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}e^{-|x-y|^2/4t}}{(4\pi t)^{n/2}}\,dt\right)dy \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)I(x,y)\,dy\end{aligned}$$

luego haciendo la sustitución $u = \frac{|x-y|^2}{4t}$ en $I(x,y)$ tenemos

$$\begin{aligned} I(x,y) &= \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{(4\pi)^{n/2}} \left(\frac{|x-y|^2}{4u} \right)^{\alpha-1-n/2} \frac{|x-y|^2}{4u^2}\, du \\ &= \frac{|x-y|^{2\alpha-n}}{2^{2\alpha}\pi^{n/2}} \int_0^\infty u^{-\alpha+1+n/2} e^{-u}\, du \\ &= \frac{|x-y|^{2\alpha-n}}{2^{2\alpha}\pi^{n/2}} \Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Finalmente

$$(-\Delta)^{-\alpha} f(x) = \frac{2^{-2\alpha}\pi^{-n/2}\Gamma\left(\frac{n-2\alpha}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y)|x-y|^{2\alpha-n}\, dy$$

con lo cual

$$(-\Delta)^{-\alpha/2} f(x) = I_\alpha(f)(x) \qquad (f \in \mathcal{S})$$

luego como $\mathcal{S}$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se puede extender a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

1.2. Acotaciones sin pesos para la integral fraccionaria

De aquí en adelante consideraremos al operador

$$(T_\gamma f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\gamma}\, dy \qquad (0 < \gamma < n)$$

tomando en la definición anteior $\gamma = \alpha - n$ y dejando de lado las constantes.

Teorema 1.2.1. *Sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $0 < \gamma < n$ y $1 < p < q < \infty$, con $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$, entonces existe una constante $C_{p,q}$ independiente de f tal que*

$$\|T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Observación. *La condición $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$ es necesaria. Para ver eso consideramos las funciones dilatadas $f_\lambda(x)$*

$$f_\lambda := f(\lambda x)$$

Entonces aplicando la desigualdad a f_λ tenemos

$$\|T_\gamma f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{1.1}$$

ahora

$$\begin{aligned}
T_\gamma f_\lambda(x) =& \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_\lambda(y)}{|x-y|^\gamma}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\lambda y)}{|x-y|^\gamma}\, dy \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(u)}{|\lambda|^{-\gamma}|\lambda x - u|^\gamma}\, \frac{du}{|\lambda|^n} = |\lambda|^{\gamma-n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(u)}{|\lambda x - u|^\gamma}\, du \\
=& |\lambda|^{\gamma-n} T_\gamma f(\lambda x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|T_\gamma f_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} =& \int_{\mathbb{R}^n} |T_\gamma f_\lambda(x)|^q\, dx \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda|^{(\gamma-n)q} |T_\gamma f(\lambda x)|^q\, dx \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda|^{(\gamma-n)q} |T_\gamma f(u)|^q\, \frac{du}{|\lambda|^n} \\
=& |\lambda|^{(\gamma-n)q-n} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\gamma f(u)|^q\, du \\
=& |\lambda|^{(\gamma-n)q-n} \|T_\gamma f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
\|f_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} =& \int_{\mathbb{R}^n} |f_\lambda(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda x)|^p\, dx \\
=& \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p\, \frac{du}{|\lambda|^n} = |\lambda|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p\, du \\
=& |\lambda|^{-n} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

reemplazando estas identidades en (1.1) *obtenemos*

$$\|T_\gamma f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$|\lambda|^{\gamma-n-\frac{n}{q}} \|T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C|\lambda|^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\|T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C|\lambda|^{-\gamma+n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

pero si $-\gamma+n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p} \neq 0$, podemos hacer tender λ a 0 o ∞ llegando a una contradicción, por lo tanto

$$-\gamma + n + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$$

El problema de ver cuando un operador T_γ es un operador acotado de L^p en L^q fue estudiado por varios autores a lo largo de la historia. Si bien las demostraciones de Hardy y Littelwood en el caso unidemensional y de Sobolev en el caso n-dimensional son anteriores, nos pareció interesante mostrar una demostración realizada por Hedberg en [10], donde el teorema se ve como una consecuencia sencilla del Teorema Maximal de Hardy-Littlewood-Wiener.

Recordemos la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} r^{-n} \int_{|y|<r} |f(x+y)| dy \tag{1.2}$$

y el resultado que se obtiene del Teorema maximal de Hardy-Littlewood-Wiener, ([17, I.1])

$$\|M(f)\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}, \quad p > 1 \tag{1.3}$$

Para la demostración del teorema vamos a necesitar además el siguiente lema.

Lema 1.2.1. *Si $0 < \gamma < n$ entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ se tiene*

$$\int_{|y-x|\leq\delta} |f(y)||x-y|^{-\gamma} dy \leq C\delta^{n-\gamma} M(f)(x)$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{|y-x|\leq\delta} |f(y)||x-y|^{-\gamma} dy &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{\delta 2^{-i-1}\leq|y-x|\leq\delta 2^{-i}} |f(y)||x-y|^{-\gamma} dy \\
&\leq \sum_{i=0}^{\infty} (\delta 2^{-i})^{-\gamma} \int_{|y-x|\leq\delta 2^{-i}} |f(y)| dy \\
&\leq \delta^{-\gamma} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\gamma} (\delta 2^{-i})^n M(f)(x) \\
&\leq C\delta^{n-\gamma} M(f)(x) \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i(n-\gamma)} \\
&\leq C\delta^{n-\gamma} M(f)(x)
\end{aligned}$$

□

Ahora podemos demostrar el Teorema 1.2.1

Demostración. (teorema) Sean $p > 1$, $0 < \gamma < n$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$ y $\delta > 0$ y sean $x \in \mathbb{R}^n$ y $\delta > 0$ arbitrarios. Usando desigualdad de Hölder en el caso $p > 1$ obtenemos la siguiente desigualdad

$$\int_{|y-x|\geq\delta} |f(y)||x-y|^{-\gamma} dy \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, \delta^{n-\gamma-n/p}$$

Luego, teniendo en cuenta esa desigualdad y el lema anterior, tenemos

$$\begin{aligned}
|T_\gamma f(x)| &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||x-y|^{-\gamma}\, dy \\
&= \int_{|y-x|\leq\delta} |f(y)||x-y|^{-\gamma}\, dy + \int_{|y-x|\geq\delta} |f(y)||x-y|^{-\gamma}\, dy \\
&\leq C(\delta^{n-\gamma} M(f)(x) + \delta^{n-\gamma-n/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})
\end{aligned}$$

Para minimizar esta expresión basta elegir $\delta = (M(f)(x)/\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)})^{-p/n}$ y nos queda

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(y)||x-y|^{-\gamma}\, dy \leq CM(f)(x)^{(n-(n-\gamma)p)/n}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{(n-\gamma)p/n}$$

Finalmente usando el teorema maximal de Hardy-Littlewood-Wiener y la relación $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$

$$\begin{aligned}
\|T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q = \int_{\mathbb{R}^n} |T_\gamma f(x)|^q\, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} CM(f)(x)^{(n-(n-\gamma)p)q/n}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{(n-\gamma)pq/n} dx \\
&\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{((n-\gamma)pq/n)} \int_{\mathbb{R}^n} M(f)(x)^p dx \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{((n-\gamma)pq/n)}\|M(f)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \\
&\leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{((n-\gamma)pq/n)}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q
\end{aligned}$$

□

1.3. Acotaciones con pesos para la integral fraccionaria

La teoría de las acotaciones con pesos potencias para este operador se remonta al trabajo de G.H. Hardy y J. E. Littlewood [8] en el caso unidimensional y su generalización a $n \geq 1$ corresponde a E.M. Stein y G. Weiss, quienes en [18] obtuvieron el siguiente teorema. En este trabajo reproduciremos su demostración.

Teorema 1.3.1. *Sea $n \geq 1$, $0 < \gamma < n, 1 < p \leq q < \infty, \alpha < \frac{n}{p'}, \beta < \frac{n}{q}, \alpha + \beta \geq 0$, y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$, entonces la desigualdad*

$$\||x|^{-\beta}T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

vale para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{p\alpha}dx)$, donde C es una constante independiente f.

Observación. *La condición* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$ *es necesaria. Tomando* $f_\lambda := f(\lambda x)$ *sabemos que*

$$T_\gamma f_\lambda(x) = |\lambda|^{\gamma-n} T_\gamma f(\lambda x)$$

entonces

$$\begin{aligned}
\||x|^{-\beta} T_\gamma f_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} ||x|^{-\beta q} T_\gamma f_\lambda(x)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\beta q} |\lambda|^{(\gamma-n)q} |T_\gamma f(\lambda x)|^q \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda|^{\beta q} |u|^{-\beta q} |\lambda|^{(\gamma-n)q} |T_\gamma f(u)|^q \, \frac{du}{|\lambda|^n} \\
&= |\lambda|^{(\beta+\gamma-n)q-n} \int_{\mathbb{R}^n} |T_\gamma f(u)|^q \, du \\
&= |\lambda|^{(\beta+\gamma-n)q-n} \|T_\gamma f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned}
\||x|^{\alpha} f_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |f_\lambda(x)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p} |f(\lambda x)|^p \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\lambda|^{-\alpha p} |u|^{\alpha p} |f(u)|^p \, \frac{du}{|\lambda|^n} = |\lambda|^{-\alpha p - n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^p \, du \\
&= |\lambda|^{-\alpha p - n} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

finalmente aplicando el teorema a f_λ *tenemos que*

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^{\alpha} f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$|\lambda|^{\beta+\gamma-n-\frac{n}{q}} \||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C |\lambda|^{-\alpha-\frac{n}{p}} \||x|^{\alpha} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C |\lambda|^{-\beta-\gamma-\alpha+n+\frac{n}{q}-\frac{n}{p}} \||x|^{\alpha} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

pero si $-\beta - \gamma - \alpha + n + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} \neq 0$*, podemos hacer tender* λ *a* 0 *o* ∞ *llegando a una contradicción, por lo tanto*

$$-\beta - \gamma - \alpha + n + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\beta+\gamma+\alpha}{n} - 1$$

Observación. *En general no se conoce la constante óptima en esta desigualdad, sin embargo Beckner la calcula si* $p = q$ *en [1, teorema 2] obteniendo*

$$C_{\alpha,\beta} = \pi^{n/2} \left(\frac{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2}) \Gamma(\frac{n}{2p} - \frac{\beta}{2}) \Gamma(\frac{n}{2p'} - \frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha-\beta}{2}) \Gamma(\frac{n}{2p'} + \frac{\beta}{2}) \Gamma(\frac{n}{2p} + \frac{\alpha}{2})} \right)$$

Una herramienta importante para la demostración de este teorema es la generalización al caso n-dimensional de un teorema muy útil para operadores integrales cuyos núcleos son homogéneos de grado -1 (ver [9, teorema 319]) realizada por Stein y Weiss en [18] en el siguiente lema.

Lema 1.3.1. *Sea* $K(u,v) \geq 0$ *una función definida en* $\{(u,v) : u \geq 0 \ y \ v \geq 0\}$ *homogénea de grado -n, que cumple, para* $p \geq 1$

$$J = \int_0^\infty K(1,t)t^{n/p'-1}\, dt < \infty$$

Sea $(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(|x|,|y|)f(y)\, dy$ *entonces*

$$\|Tf\|_{L^p} \leq C_J \|f\|_{L^p}$$

donde C_J *es una constante que depende de* J *(y por ende de* p*) y de la dimensión* n*, pero no de* f*.*

Demostración. Usando coordenadas polares

$$x = R\xi \qquad \text{con} \quad |x| = R \ , \xi \in S^{n-1}$$

$$y = r\eta \qquad \text{con} \quad |y| = r \ , \eta \in S^{n-1}$$

podemos escribir por abuso de notación

$$(Tf)(x) = (Tf)(R) = \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty K(R,r)f(r\eta)r^{n-1}\, dr \right) d\eta$$

y definimos

$$(T_\eta f)(R) = \int_0^\infty K(R,r)f(r\eta)r^{n-1}\, dr$$

Si tomamos $tR = r$, como K es una función homogénea de grado $-n$, podemos deducir,

$$(T_\eta f)(R) = \int_0^\infty K(1,t)f(tR\eta)t^{n-1}\, dt \tag{1.4}$$

$$|(Tf)(R)| \leq \int_{S^{n-1}} |T_\eta f| d\eta \tag{1.5}$$

Por otro lado, si g es una función medible en $\mathbb{R}^n$ y $t > 0$

$$\left(\int_0^\infty |g(tR\eta)|^p R^{n-1}\, dR \right)^{1/p} = t^{-n/p} \left(\int_0^\infty |g(R\eta)|^p R^{n-1}\, dR \right)^{1/p} \tag{1.6}$$

Como

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} := \sup_{\|h\|_{p'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)h(x)\, dx$$

y este supremo se realiza, sabemos que existe h que satisface $\int_0^\infty |h(R)|^{p'} R^{n-1}\, dR = 1$ tal que,

$$\left(\int_0^\infty |(T_\eta f)(R)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p} = \int_0^\infty (T_\eta f)(R)h(R)R^{n-1}\, dR \tag{1.7}$$

Entonces usando (1.4) y (1.6), el teorema de Fubini y la desigualdad de Hölder tenemos

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty |(T_\eta f)(R)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p} &= \int_0^\infty (T_\eta f)(R)h(R)R^{n-1}\, dR\\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(1,t)f(tR\eta)t^{n-1}\, dt\right) h(R)R^{n-1}\, dR\\ &= \int_0^\infty K(1,t)t^{n-1} \left(\int_0^\infty f(tR\eta)h(R)R^{n-1}\, dR\right)\, dt\\ &\le \int_0^\infty K(1,t)t^{n-1} \left(\int_0^\infty |f(tR\eta)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p}\, dt\\ &= \int_0^\infty K(1,t)t^{n-1}t^{-n/p} \left(\int_0^\infty |f(R\eta)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p}\, dt\\ &= J\left(\int_0^\infty |f(R\eta)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p}\end{aligned}$$

con lo cual

$$\left(\int_0^\infty |T_\eta f(R)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p} \le J\left(\int_0^\infty |f(R\eta)|^p R^{n-1}\, dR\right)^{1/p} \tag{1.8}$$

aplicando la desigualdad de Jensen a (1.5) se obtiene

$$|Tf(R)|^p \le \omega^{p-1} \int_{S^{n-1}} |T_\eta f(R)|^p\, d\eta$$

luego usando la desigualdad (1.8) tenemos

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |Tf(R)|^p R^{n-1}\, dR &\le \omega^{p-1} \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} |T_\eta f(R)|^p\, d\eta\right) R^{n-1} dR\\ &= \omega^{p-1} \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |T_\eta f(R)|^p R^{n-1}\, dR\right)\, d\eta\\ &\le J^p \omega^{p-1} \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |f(R\eta)|^p R^{n-1}\, dR\right)\, d\eta\\ &= J^p \omega^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, dx\end{aligned}$$

por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx = &\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(R)|^p \, dx \\
= &\int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |(Tf)(R)|^p R^{n-1} \, dR \right) \, d\eta \\
= &\omega \left(\int_0^\infty |(Tf)(R)|^p R^{n-1} \, dR \right) \\
\leq &\omega \; J^p \; \omega^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p \, dx \right)^{1/p} = J\omega \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}
$$

□

Además vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 1.3.2. *Sea* $\Delta = \Delta(t, \xi, \eta) = |1 - 2t\cos(\xi, \eta) + t^2|^{1/2}$ *donde* $0 < m \leq t \leq M < \infty$. *Si* g *es una función en* $L^p(S^{n-1})$, $p \geq 1$ *podemos definir*

$$
\hat{g}_t(\xi) = \int_{S^{n-1}} \frac{g(\eta)}{\Delta^\gamma} \, d\eta
$$

Entonces

$$
\left(\int_{S^{n-1}} |\hat{g}_t(\xi)|^p \, d\xi \right)^{1/p} \leq C|1-t|^{-\gamma/n} \left(\int_{S^{n-1}} |g(\eta)|^p \, d\eta \right)^{1/p}
$$

donde C *es independiente de* g *y* t *pero depende de* γ, n, p *y los números* m *y* M.

Demostración. Escribimos

$$
\hat{g}_t(\xi) = \int_{S^{n-1}} \frac{g(\eta)}{\Delta^{\gamma/p}} \frac{1}{\Delta^{\gamma/p'}} \, d\eta
$$

aplicando la desigualdad de Hölder vemos que

$$
|\hat{g}_t(\xi)|^p \leq \left(\int_{S^{n-1}} \frac{|g(\eta)|^p}{\Delta^\gamma} \, d\eta \right) \left(\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{\Delta^\gamma} \right)^{p/p'}
$$

luego usando la siguiente desigualdad, (ver apéndice 4.0.7)

$$
\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{\Delta^\gamma} \leq C|1-t|^{-\gamma/n} \tag{1.9}
$$

donde C depende solo de γ, n , m y M pero no de ξ se tiene

$$|\hat{g}_t(\xi)|^p \leq C|1-t|^{-\gamma p/np'} \int_{S^{n-1}} \frac{|g(\eta)|^p}{\Delta^\gamma}\, d\eta \tag{1.10}$$

luego integrando (1.10) respecto de ξ a ambos miembros y aplicando (1.9) nuevamente, obtenemos

$$\int_{S^{n-1}} |\hat{g}_t(\xi)|^p \, d\xi \leq C|1-t|^{-\gamma p/n} \int_{S^{n-1}} |g(\eta)|^p \, d\eta$$

y queda probado el lema □

Ahora pasamos a la demostración del teorema 1.3.1

Demostración. (del Teormea (1.3.1)) Primero veamos el caso $p = q$
Sea $g(x) = |x|^{-\alpha} f(x)$, consideramos

$$Sg(x) = S_{\gamma,\alpha,\beta}g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha}\, dy$$

y lo reescribimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} Sg(x) =& \int_{\mathbb{R}^n} K_1(x,y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} K_2(x,y)g(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} K_3(x,y)g(y)dy \\ =& T_1 g(x) + T_2 g(x) + T_3 g(x) \end{aligned}$$

donde

$$K_1(x,y) = \begin{cases} |x|^{-\beta}|x-y|^{-\gamma}|y|^{-\alpha} & 0 \leq \frac{|y|}{|x|} \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$K_2(x,y) = \begin{cases} |x|^{-\beta}|x-y|^{-\gamma}|y|^{-\alpha} & 2 \leq \frac{|y|}{|x|} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$K_3(x,y) = \begin{cases} |x|^{-\beta}|x-y|^{-\gamma}|y|^{-\alpha} & \frac{1}{2} \leq \frac{|y|}{|x|} \leq 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

son homogéneas de grado $-n$.
Veremos que para cada $i = 1, 2, 3$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_i g|^p \, dx \right)^{1/p} \leq C_i \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p \, dx \right)^{1/p}$$

donde las constantes C_i no dependen de g en $L^p(\mathbb{R}^n)$
Si $\frac{|y|}{|x|} \leq \frac{1}{2}$ entonces $|x-y| \geq \frac{1}{2}|x|$, con lo cual

$$K_1(x,y) \leq 2^\gamma |x|^{-\beta}|x|^{-\gamma}|y|^{-\alpha} \qquad \text{si} \quad |y|/|x| \leq 1/2$$

entonces

$$J_1 := \int_0^\infty K_1(1,t) t^{n/p'-1}\, dt \le 2^\gamma \int_0^{1/2} t^{-\alpha} t^{n/p'-1}\, dt < \infty$$

ya que $\alpha < n/p'$, y usando el Lema 1.3.1

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_1 g|^p \, dx \right)^{1/p} \le C_{J_1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Del mismo modo, $\frac{|y|}{|x|} \ge 2$ implica que $|x-y| \ge \frac{1}{2}|y|$ lo que conduce a la estimación

$$J_2 := \int_0^\infty K_2(1,t) t^{n/p'-1}\, dt \le 2^\gamma \int_2^\infty t^{-\gamma} t^{-\alpha} t^{n/p'-1}\, dt < \infty$$

ya que como $\gamma+\beta+\alpha = n$, $n/p' - (\gamma+\alpha) = n/p' - (n-\beta) = \beta - n/p < 0$. Aplicando nuevamente el lema 1.3.1 tenemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_2 g|^p \, dx \right)^{1/p} \le C_{J_2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Ahora consideramos $(T_3 g)(x) = \int_{R^n} K_3(x,y) g(y)\, dy$, y lo reescribimos

$$(T_3 g)(R\xi) = \int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty K_3(R\xi, r\eta) g(r\eta) r^{n-1}\, dr \right) d\sigma$$

tomando coordenadas polares del mismo modo que en la demostración del lema 1.3.1 Luego, haciendo el cambio de variable $r = tR$

$$\begin{aligned}
(T_3 g)(R\xi) &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 K_3(R\xi, tR\eta) g(tR\eta) t^{n-1} R^n \, dt \right) d\eta \\
&= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 R^{-\beta} |R\xi - tR\eta|^{-\gamma} (tR)^{-\alpha} g(tR\eta) t^{n-1} R^n \, dt \right) d\eta \\
&= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 R^{-\beta-\gamma-\alpha+n} |\xi - t\eta|^{-\gamma} g(tR\eta) t^{n-\alpha-1} \, dt \right) d\eta \\
&= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{g(tR\eta) t^{n-\alpha-1}}{|\xi - t\eta|^\gamma} \, dt \right) d\eta
\end{aligned}$$

ya que $-\beta-\gamma-\alpha+n = 0$, tomando $C = \max\{t^{n-\alpha-1}; \frac{1}{2} < t < 2\}$ y teniendo en cuenta la siguiente relación

$$\begin{aligned}
|\xi - t\eta|^2 =& |\xi|^2 - 2|\xi||t\eta|\cos(\xi,\eta) + |t\eta|^2 \\
=& 1 - 2t\cos(\xi,\eta) + t^2
\end{aligned}$$

nos queda

$$(T_3g)(R\xi) \leq C \int_{S^{n-1}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{g(tR\eta)}{|1 - 2t\cos(\xi,\eta) + t^2|^{\gamma/2}} \, dt \right) d\eta$$

ahora consideramos, para $\frac{1}{2} < t < 2$,

$$G_t(R\xi) = \int_{S^{n-1}} \frac{|g(tR\eta)|}{\Delta^\gamma} \, d\eta \qquad\qquad G(x) = G(R\xi) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} G_t \, dt$$

y sea $h(R)$ una función que satisface $\int_0^\infty |h(R)|^{p'} R^{n-1} \, dR = 1$ y

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty |G_t(R\xi)|^p R^{n-1} \, dR \right)^{1/p} &= \int_0^\infty h(R) G_t(R\xi) R^{n-1} \, dR \\
&= \int_0^\infty h(R) \left(\int_{S^{n-1}} \frac{|g(tR\eta)|}{\Delta^\gamma} \, d\eta \right) R^{n-1} \, dR \\
&= \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\Delta^\gamma} \left(\int_0^\infty h(R) |g(tR\eta)| R^{n-1} \, dR \right) d\eta \\
&\leq \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\Delta^\gamma} \left(\int_0^\infty |g(tR\eta)|^p R^{n-1} \, dR \right)^{1/p} d\eta \\
&\leq 2^n \int_{S^{n-1}} \frac{1}{\Delta^\gamma} \left(\int_0^\infty |g(R\eta)|^p R^{n-1} \, dR \right)^{1/p} d\eta
\end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se deduce a partir de la desigualdad de Hölder mientras que la segunda sale del cambio de variable $u = tR$, teniendo en cuenta que $t \geq \frac{1}{2}$. Luego aplicando el lema 1.3.2 y la última cadena de desigualdades, obtenemos

$$\left(\int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |G_t(R\xi)|^p R^{n-1} \, dR \right) d\xi \right)^{1/p} \leq C|1-t|^{-\gamma/n} \left(\int_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty |g(R\eta)|^p R^{n-1} \, dR \right) d\eta \right)^{1/p}$$

Por lo tanto, usando la desigualdad de Minkowski para integrales, y recordando que

$0 < \gamma < n$ y tomando $Q = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} |G_t(R\xi)|^p \, dt\right)^{1/p}$ tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x)|^p \, dx\right)^{1/p} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left|\int_{\frac{1}{2}}^{2} G_t(R\xi) \, dt\right|^p \, dx\right)^{1/p} \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |G_t(R\xi)|^p \, dx\right)^{1/p} \, dt \\
&\leq \int_{\frac{1}{2}}^{2} C|1-t|^{-\gamma/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p} dt \\
&\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

Con esto llegamos a mostrar que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |T_3 g|^p \, dx\right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g|^p \, dx\right)^{1/p}$$

Y por lo tanto

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |Sg|^p \, dx\right)^{1/p} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

y luego recordando las definiciones de g y Sg llegamos a la desigualdad que queríamos probar

$$\| |x|^{-\beta} T_\gamma f \|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \| |x|^\alpha f \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

en el caso $q = p$.

Caso $p < q < \infty$. Usando nuevamente $g(x) = |x|^{-\alpha} f(x)$, veamos que probar el teorema es equivalente a mostrar que para $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $h \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ se tiene

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y) h(x)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha} \, dy \, dx \right| \leq A \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

ya que

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha} \, dy \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = \sup_{h \in L^{q'}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)(h(x)/\|h\|_{q'})}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha} \, dy \, dx \right\}$$

ver [20, teorema 8.8 página 128] .

Ahora consideramos en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ las regiones R_1, R_2 y R_3 dadas por

$$\begin{aligned}
R_1 &= \left\{ (x, y) : \frac{1}{2}|y| < |x| < 2|y| \right\} \\
R_2 &= \left\{ (x, y) : |x| < \frac{1}{2}|y| \right\} \\
R_3 &= \left\{ (x, y) : |y| < \frac{1}{2}|x| \right\}
\end{aligned}$$

y escribimos

$$I = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha}\, dy\, dx = I_1 + I_2 + I_3$$

donde

$$I_i = \int_{R_i} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha}\, dy\, dx \qquad\qquad i = 1,2,3$$

con lo cual es suficiente ver que

$$I_i \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \qquad\qquad i = 1,2,3$$

Veamos primero I_1

como en R_1, $\frac{1}{2}|y| < |x| < 2|y|$, entonces $|x-y| < 3|x|$. Ahora como $\alpha+\beta \geq 0$ por hipótesis, se obtiene que

$$|x-y|^{\alpha+\beta} < 3^{\alpha+\beta}|x|^{\alpha+\beta} < 3^{\alpha+\beta}2^{|\beta|}|x|^\alpha |y|^\beta$$

y de esa forma

$$\begin{aligned}\int\int_{R_1} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha}\, dy\, dx \leq & C\int\int_{R_1} \frac{g(y)h(x)}{|x-y|^{\gamma+\beta+\alpha}}\, dy\, dx \\ \leq & C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{g(y)h(x)}{|x-y|^{\gamma+\beta+\alpha}}\, dy\, dx.\end{aligned}$$

Luego como $0<\gamma$, $\alpha+\beta \geq 0$, tenemos que $\gamma+\alpha+\beta \geq 0$. Por otro lado $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$ implica $0 < \gamma+\alpha+\beta < n$, entonces usando la desigualdad de Hölder y el Teorema 1.2.1

$$\begin{aligned}|I_1| \leq & C\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{g(y)h(x)}{|x-y|^{\gamma+\beta+\alpha}}\right| dy\, dx = C\int_{\mathbb{R}^n}|h(x)|\int_{\mathbb{R}^n}\left|\frac{g(y)}{|x-y|^{\gamma+\beta+\alpha}}\right| dy\, dx \\ \leq & C\left\|\int_{\mathbb{R}^n}\frac{|g(y)|}{|x-y|^{\gamma+\beta+\alpha}}\, dy\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^{q'}} = C\left\|T_{\gamma+\beta+\alpha}(|g|)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^{q'}} \\ \leq & C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^{q'}}\end{aligned}$$

Para acotar I_2 y I_3 vamos a necesitar el siguiente lema

Lema 1.3.3. *Sea $V_\delta g(x) = |x|^{-n+\delta}\int_{|y|<|x|}|y|^{-\delta}g(y)\, dy$, con $\delta < \frac{n}{p'}$, entonces*

a) $\|V_\delta g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

b) $|V_\delta g(x)| \leq C|x|^{-n/p}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Demostración. (lema (1.3.3))

Notemos que $V_\delta g = \int_{\mathbb{R}^n} K(|x|,|y|)g(y)\,dy$, donde

$$K(u,v) = \begin{cases} |u|^{-n+\delta}|v|^{-\delta} & v < u \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

para todo $u, v \geq 0$. Como K es homogéneo de grado $-n$ podemos aplicar el Lema 1.3.1, ya que $\int_0^1 t^{-\delta} t^{n/p'-1}\,dt < \infty$ (pues $\delta < \frac{n}{p'}$), entonces

$$\|V_\delta g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

De esa forma hemos probado la parte a).
Para la parte b) observemos que

$$|V_\delta g| \leq |x|^{-n+\delta} \int_{|y|<|x|} |y|^{-\delta}|g(y)|\,dy \leq |x|^{-n+\delta}\left(\int_{|y|<|x|} |y|^{-\delta p'}\,dy\right)^{1/p'} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

por la desigualdad de Hölder, y como

$$\left(\int_{|y|<|x|} |y|^{-\delta p'}\,dy\right)^{1/p'} \leq C|x|^{n-\delta-n/p}$$

se ve que

$$|V_\delta g| \leq C|x|^{-n/p}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

con lo que concluimos la demostración del lema. $\square$

Continuando con la demostración del teorema, analicemos

$$I_2 = \int\int_{R_2} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |x-y|^\gamma |y|^\alpha}\,dy\,dx$$

En R_2, $|x| < \frac{1}{2}|y|$, entonces $|x-y|^{-\gamma} \leq 2^\gamma |y|^{-\gamma}$. Entonces

$$\begin{aligned} I_2 \leq & C\int_{R_2} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |y|^{\alpha+\gamma}}\,dy\,dx = C\int_{|x|<|y|/2} \frac{g(y)h(x)}{|x|^\beta |y|^{\alpha+\gamma}}\,dy\,dx \\ \leq & C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{-\alpha-\gamma} g(y)\left(\int_{|x|<|y|} h(x)|x|^{-\beta}\,dx\right)dy \\ \leq & C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{n-\alpha-\gamma-\beta} g(y)\left(|y|^{-n+\beta}\int_{|x|<|y|} h(x)|x|^{-\beta}\,dx\right)dy \\ \leq & C\int_{\mathbb{R}^n} |y|^{n-\alpha-\gamma-\beta} g(y) V_\beta h\,dy \end{aligned}$$

Luego usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$I_2 \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\||y|^{n-\alpha-\gamma-\beta}V_\beta h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.11}$$

Ahora queremos estimar

$$\||y|^{n-\alpha-\gamma-\beta}V_\beta h\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Para eso escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(|y|^{n-\alpha-\gamma-\beta}V_\beta h\right)^{p'}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}(V_\beta h)^{q'}\,(V_\beta h)^{p'-q'}\left(|y|^{n-\alpha-\gamma-\beta}\right)^{p'}\,dy$$

como $1 < p < q < \infty$, entonces $1 < q' < p' < \infty$, y $p' - q' > 0$, y usando el Lema 1.3.3 parte b) se obtiene

$$V_\beta h(y) \leq C|y|^{-n/q'}\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

ya que $\beta < n/q$, y por lo tanto

$$\left(|y|^{n-\alpha-\gamma-\beta}\right)^{p'}(V_\beta h)^{p'-q'} \leq C|y|^{(-n/q')(p'-q')+(n-\alpha-\gamma-\beta)p'}\|h\|^{p'-q'}_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

observemos que el exponente del $|y|$ es igual a 0, pues

$$\begin{aligned}(-n/q')(p'-q') + (n-\alpha-\gamma-\beta)p' =& -np'(1/q' - 1/p' - 1) + (-\alpha-\gamma-\beta)p'\\ =& -np'(-1/q + 1/p - 1) + (-\alpha-\gamma-\beta)p'\\ =& p'(\alpha+\gamma+\beta) + (-\alpha-\gamma-\beta)p' = 0\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(V_\beta h|y|^{n-\alpha-\beta-\gamma}\right)^{p'}\,dy \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(V_\beta h)^{q'}\,dy\right)\|h\|^{p'-q'}_{q'}$$

luego usando el Lema 1.3.3 parte a)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\left(V_\beta h|y|^{n-\alpha-\beta-\gamma}\right)^{p'}\,dy \leq& C\left(\int_{\mathbb{R}^n}(V_\beta h)^{q'}\,dy\right)\|h\|^{p'-q'}_{q'}\\ \leq& C\|h\|^{q'}_{q'}\|h\|^{p'-q'}_{q'} \leq C\|h\|^{p'}_{q'}\end{aligned}$$

Finalmente combinando la desigualdad anterior con (1.11)

$$I_2 \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

De manera análoga podemos probar la desigualdad para I_3, ya que en R_3, $|y| < \frac{1}{2}|x|$ con lo cual $|x-y|^{-\gamma} \leq 2^{\gamma}|x|^{-\gamma}$. Entonces

$$\begin{aligned}
I_3 \leq & C \int\int_{R_3} \frac{g(y)h(x)}{|x|^{\beta+\gamma}|y|^{\alpha}}\, dy\, dx = C \int\int_{|y|<|x|/2} \frac{g(y)h(x)}{|x|^{\beta+\gamma}|y|^{\alpha}}\, dy\, dx \\
\leq & C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\beta-\gamma} h(x) \left(\int_{|y|<|x|} g(y)|y|^{-\alpha}\, dy \right) dx \\
\leq & C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{n-\alpha-\gamma-\beta} h(x) \left(|x|^{-n+\alpha} \int_{|y|<|x|} g(y)|y|^{-\alpha}\, dy \right) dx \\
\leq & C \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{n-\alpha-\gamma-\beta} h(x) V_{\alpha} g\, dx
\end{aligned}$$

Luego, usando la desigualdad de Hölder tenemos

$$I_3 \leq C\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)} \||x|^{n-\alpha-\gamma-\beta} V_{\beta} g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.12}$$

Ahora queremos estimar

$$\||x|^{n-\alpha-\gamma-\beta} V_{\alpha} g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

para eso escribimos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|x|^{n-\alpha-\gamma-\beta} V_{\alpha} g\right)^q\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (V_{\alpha} g)^p (V_{\alpha} g)^{q-p} \left(|x|^{n-\alpha-\gamma-\beta}\right)^q\, dx$$

como por hipótesis sabemos que $\alpha < n/p'$ podemos usar el Lema 1.3.3 parte b) y de esa manera obtenemos

$$V_{\alpha} g \leq C|x|^{-n/p} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

y por lo tanto

$$\left(|x|^{n-\alpha-\gamma-\beta}\right)^q (V_{\alpha} g)^{q-p} \leq C|x|^{(-n/p)(q-p)+(n-\alpha-\gamma-\beta)q} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{q-p}.$$

Observemos que el exponente del $|x|$ es igual a 0, pues

$$\begin{aligned}
(-n/p)(q-p) + (n-\alpha-\gamma-\beta)q = & -nq(1/p - 1/q - 1) + (-\alpha-\gamma-\beta)q \\
= & q(\alpha+\gamma+\beta) + (-\alpha-\gamma-\beta)q = 0
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(V_{\alpha} g|x|^{n-\alpha-\beta-\gamma}\right)^q\, dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} (V_{\alpha} g)^p\, dx \right) \|g\|_p^{q-p}$$

luego usando el lema (1.3.3) parte a)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \left(V_\alpha g|x|^{n-\alpha-\beta-\gamma}\right)^q \ dx \leq & C\left(\int_{\mathbb{R}^n} (V_\alpha g)^p \ dx\right) \|g\|_p^{q-p} \\ \leq & C\|g\|_p^p\|g\|_p^{q-p} \leq C\|g\|_p^q\end{aligned}$$

Y finalmente combinando la desigualdad anterior con (1.12)

$$I_3 \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\|h\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^n)}$$

Lo que concluye la prueba.

□

1.4. Relación con las condiciones de Sawyer y Wheeden

Desigualdades con pesos más generales fueron estudiadas por E.T. Sawyer y R. L. Wheeden, quienes en [16] obtuvieron una caracterización de tipo $A_{p,q}$ para los pesos admisibles.

$$(A_{p,q}) \quad |B|^{-\gamma/n}\left(\int_B w(x)\ dx\right)^{1/q}\left(\int_B v(x)^{1-p'}\ dx\right)^{1/p'} \leq C \quad \textit{para toda bola} \quad B \subseteq \mathbb{R}^n$$

En su trabajo demostraron que para pesos w, v que cumplen la condición $(A_{p,q})$ se tiene la siguiente desigualdad

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} (T_\gamma f(x))^q w(x)\ dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p v(x)\ dx\right)^{1/p} \tag{1.13}$$

de donde se puede ver que el teorema de Stein y Weiss 1.3.1 es un caso particular, ya que tenemos el siguiente lema.

Lema 1.4.1. *Para* $n \geq 1$, $0 < \gamma < n, 1 < p \leq q < \infty, \alpha < \frac{n}{p'}, \beta < \frac{n}{q}, \alpha+\beta \geq 0$, *con* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$, *tenemos que* $w(x) = |x|^{-\beta q}$ *y* $v(x) = |x|^{\alpha p}$ *cumplen la condición* $(A_{p,q})$

Demostración. Consideraremos los siguientes casos

1. $B = B(x_0, R)$ con $|x_0| \geq 2R$
2. $B = B(x_0, R)$ con $|x_0| < 2R$

Si $x \in B(x_0, R)$ entonces

$$|x_0| - R \leq |x| \leq |x_0| + R$$

$$\frac{1}{2}|x_0| \leq |x| \leq \frac{3}{2}|x_0|$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
|B|^{-\gamma/n}\left(\int_B |x|^{-\beta q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_B |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx\right)^{1/p'} &\leq C R^{-\gamma}\left(\int_B |x_0|^{-\beta q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_B |x_0|^{\alpha p(1-p')}\,dx\right)^{1/p'}\\
&\leq C R^{-\gamma}|x_0|^{-\beta} R^{n/q}|x_0|^{-\alpha} R^{n/p'}\\
&\leq C R^{-\gamma+n/q+n-n/p}|x_0|^{-(\beta+\alpha)}
\end{aligned}$$

luego como $\beta + \alpha \geq 0$ tenemos que $|x_0|^{-(\beta+\alpha)} \leq (2R)^{-(\beta+\alpha)}$ entonces

$$\begin{aligned}
|B|^{-\gamma/n}\left(\int_B |x|^{-\beta q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_B |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx\right)^{1/p'} &\leq C R^{-\gamma+n/q+n-n/p}|x_0|^{-(\beta+\alpha)}\\
&\leq C R^{-\gamma+n/q+n-n/p-\beta-\alpha} = CR^0 = C
\end{aligned}$$

ya que $-\gamma + \frac{n}{q} + n - \frac{n}{p} - \beta - \alpha = 0$ pues $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma+\alpha+\beta}{n} - 1$

En el segundo caso, podemos tomar una bola centrada en el origen que contenga a $B(x_0, R)$, ya que si $x \in B(x_0, R)$ tenemos que

$$|x| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq 3R$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,R)} |x|^{-\beta q}\,dx &\leq \int_{|x|\leq 3R} |x|^{-\beta q}\,dx\\
&\leq \int_0^{3R}\int_{S^{n-1}} r^{-\beta q} r^{n-1}\,dr\,d\sigma\\
&\leq C R^{-\beta q+n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{B(x_0,R)} |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx &\leq \int_{|x|\leq 3R} |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx\\
&\leq \int_0^{3R}\int_{S^{n-1}} r^{-\alpha p'} r^{n-1}\,dr\,d\sigma\\
&\leq C R^{-\alpha p'+n}
\end{aligned}$$

Notemos que para que $r^{-\beta q+n-1}$ y $r^{-\alpha p'+n-1}$ sean integrables en el origen necesitamos de las condiciones $\beta < \frac{n}{q}$ y $\alpha < \frac{n}{p'}$.

Entonces

$$|B|^{-\gamma/n}\left(\int_B |x|^{-\beta q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_B |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx\right)^{1/p'} \leq CR^{-\gamma}R^{-\beta+n/q}R^{-\alpha+n/p'} \leq C$$

ya que $-\gamma-\beta-\alpha+\frac{n}{q}+\frac{n}{p'} = -\gamma-\beta-\alpha+\frac{n}{q}+1-\frac{n}{p} = 0$.

Finalmente hemos probado que para toda bola $B \in \mathbb{R}^n$ se cumple

$$|B|^{-\gamma/n}\left(\int_B |x|^{-\beta q}\,dx\right)^{1/q}\left(\int_B |x|^{\alpha p(1-p')}\,dx\right)^{1/p'} \leq C$$

□

Si además w, $v^{1-p'}$ cumplen con la condición doubling

$$(D) \quad \int_{2B} f(x)\,dx \leq \int_B f(x)\,dx \quad \textit{para toda bola} \quad B \subseteq \mathbb{R}^n$$

Sawyer y Wheeden probaron que la desigualdad (1.13) vale si y solo si w y v cumplen la condición $A_{p,q}$. Por lo tanto a partir del siguiente lema (que se puede encontrar en [7]) podemos inferir que las condiciones del teorema son óptimas, ya que los pesos admisibles en 1.3.1 cumplen con ambas condiciones .

Lema 1.4.2. *Si $a > -n$, tenemos que $|x|^a$ cumple con la condición (D)*

$$\int_{2B} |x|^a\,dx \leq C\int_B |x|^a\,dx \quad \textit{para toda bola} \quad B \subseteq \mathbb{R}^n$$

Demostración. 1. Consideremos primero las bolas $B(x_0, R)$ con $|x_0| \geq 3R$.

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a\,dx \leq \begin{cases} C(2R)^n(|x_0|+2R)^a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ C(2R)^n(|x_0|-2R)^a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

$$\int_{B(x_0,R)} |x|^a\,dx \geq \begin{cases} CR^n(|x_0|-R)^a & \text{si} \quad a \geq 0 \\ CR^n(|x_0|+R)^a & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$

Como $|x_0| \geq 3R$, tenemos que

$$|x_0|+2R = |x_0|+6R-4R \leq |x_0|+2|x_0|-4R \leq 4(|x_0|-R)$$

$$|x_0| - 2R = |x_0| + \frac{1}{4}R - \frac{9}{4}R \leq |x_0| - \frac{3}{4}|x_0| + \frac{1}{4}R \leq \frac{1}{4}(|x_0| + R)$$

con lo cual

$$\int_{2B} |x|^a \, dx \leq 2^n 4^{|a|} \int_B |x|^a \, dx$$

2. Si $B(x_0, R)$ con $|x_0| \leq 3R$

$$\int_{B(x_0,2R)} |x|^a \, dx \leq \int_{B(0,5R)} |x|^a \, dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^5 r^a r^{n-1} \, dr \, d\sigma = C(5R)^{n+a}$$

si $n + a > 0$.
Por otro lado podemos acotar la integral sobre $B(x_0, R)$ haciendo las siguientes traslaciones

$$\int_{B(x_0,R)} |x|^a \, dx \geq \begin{cases} \int_{B(0,R)} |x|^a \, dx & \text{si} \quad a \geq 0 \\ \int_{B(3R\frac{x_0}{|x_0|},R)} |x|^a \, dx & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$
$$\geq \begin{cases} C \int_0^R r^a r^{n-1} \, dr & \text{si} \quad a \geq 0 \\ \int_{B(3R\frac{x_0}{|x_0|},R)} (2R)^a \, dx & \text{si} \quad a < 0 \end{cases}$$
$$\geq C R^{n+a}$$

ya que si $x \in B(3R\frac{x_0}{|x_0|}, R)$, tenemos $|x| \geq 2R$.
Y por lo tanto

$$\int_{2B} |x|^a \, dx \leq C \int_B |x|^a \, dx$$

$\square$

Observación. *Notemos que las condiciones $\beta < n/q$ y $\alpha < n/p'$ son equivalentes a $-\beta q > -n$ y $\alpha p(1-p') > -n$ y por lo tanto $|x|^{-\beta q}$ y $|x|^{\alpha p(1-p')}$ cumplen con la condición (D).*

Capítulo 2

La Integral Fraccionaria para funciones radiales

2.1. Acotaciones con pesos para funciones radiales

Como es bien conocido, cuando restringimos nuestro análisis al subespacio de funciones con simetría radial, el rango de exponentes admisibles en los pesos suele mejorar. Como se puede ver en el teorema 1.2 del trabajo de P. De Napoli, I. Drelichman y R. Duran (ver [4]), ya que se consigue un rango más amplio de exponentes para los cuales se verifica la desigualdad de Stein y Weiss expuesta en el capítulo anterior. A continuación enunciaremos dicho teorema e incluiremos en él el caso $q = \infty$.

Teorema 2.1.1. *Sea $n \geq 1$, $0 < \gamma < n$. Si $1 < p < q < \infty$, $\alpha < \frac{n}{p'}$, $\beta < \frac{n}{q}$, $\alpha + \beta \geq (n-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$ y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{n} - 1$, entonces*

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función radial $f \in L^p(\mathbb{R}^n, |x|^{p\alpha} dx)$
Si $p = 1$ o $q = \infty$ (pero no ambas condiciones simultáneamente) , vale la el mismo resultado si reemplazamos la condición sobre $\alpha + \beta$ por $\alpha + \beta > (n-1)(\frac{1}{q} - \frac{1}{p})$.

Observación. *Notemos que si $n = 1$ o $p = q$ ($p \neq \infty$) obtenemos el mismo rango de exponentes que en el teorema de Stein y Weiss 1.3.1.*

Observación. *Para funciones no radiales, la condición $\alpha + \beta \geq 0$ no se puede mejorar. Para verlo, consideramos*

$$f_\lambda(x) = f(x - \lambda e_1)$$

suponiendo que la desigualdad vale para f_λ tenemos

$$\||x|^{-\beta} T_\gamma f_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \||x|^\alpha f_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{2.1}$$

luego

$$\begin{aligned} T_\gamma f_\lambda(x) =& \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_\lambda(y)}{|x-y|^\gamma}\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y-\lambda e_1)}{|x-y|^\gamma}\, dy \\ =& \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(u)}{|x-(u+\lambda e_1)|^\gamma}\, du = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(u)}{|x-\lambda e_1-u|^\gamma}\, du \\ =& T_\gamma f(x-\lambda e_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \||x|^{-\beta}T_\gamma f_\lambda\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\beta q}|T_\gamma f_\lambda(x)|^q\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-\beta q}|T_\gamma f(x-\lambda e_1)|^q\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u+\lambda e_1|^{-\beta q}|T_\gamma f(u)|^q\, du = |\lambda|^{-\beta q}\int_{\mathbb{R}^n} |u\lambda^{-1}+e_1|^{-\beta q}|T_\gamma f(u)|^q\, du \end{aligned}$$

además

$$\begin{aligned} \|f_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|f_\lambda(x)|^p\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\alpha p}|f(x-\lambda e_1)|^p\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u+\lambda e_1|^{\alpha p}|f(u)|^p\, du = |\lambda|^{\alpha p}\int_{\mathbb{R}^n} |u\lambda^{-1}+e_1|^{\alpha p}|f(u)|^p\, du \end{aligned}$$

entonces reemplazando en (2.1) *obtenemos*

$$\||x\lambda^{-1}+e_1|^{-\beta}T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C|\lambda|^{\alpha+\beta}\||x\lambda^{-1}+e_1|^{\alpha}f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

de donde, haciendo $\lambda \to \infty$ (usando lema de Fatou y Convergencia Mayorada),deducimos que $\alpha+\beta \geq 0$, ya que de lo contrario se obtiene una contradicción.

Para la demostración de este teorema vamos a seguir la demostración realizada en [4] tanto para el caso $q < \infty$ como en el caso $q = \infty$ donde imitaremos el procedimiento. Antes de comenzar debemos recordar algunas definiciones y la desigualdad de Young en el contexto de grupos topológicos localmente compactos con una medida de Haar.

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio de medida y μ una medida positiva en X. Para f una función μ-medible en X, la función distribución d_f en $[0,\infty)$ se define como:*

$$d_f = \mu\left(\{x \in X : |f(x)| > \alpha\}\right)$$

Definición 2.1.2. *Para $0 < p < \infty$, el espacio débil$-L^p(X,\mu)$ se define como el conjunto de funciones μ-medibles f tales que $\|f\|_{L^{p,\infty}}$ es finita, donde*

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} = \text{ínf}\{C > 0 : d_f(\alpha) \leq (C/\alpha)^p\ \forall \alpha > 0\}$$

El espacio débil$-L^\infty(X,\mu)$ es por definción $L^\infty(X,\mu)$
El espacio débil$-L^p(X,\mu)$ se denota por $L^{p,\infty}(X,\mu)$

Si G es un grupo localmente compacto, entonces G posee una medida de Haar, esto es, una medida de Borel positiva μ tal que $\mu(At) = \mu(A)$ para todo $t \in G$ y $A \subseteq G$ medible. En particular si $G = \mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$, entonces $\mu = \frac{dx}{|x|}$, y si $G = \mathbb{R}^+$, entonces $\mu = \frac{dx}{x}$.

Definición 2.1.3. *La convolución de dos funciones $f, g \in L^1(G)$ se define como*

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)\, d\mu(y)$$

donde y^{-1} es el inverso de y en el grupo G.

Con estas definiciones estamos en condiciones de enunciar la versión de la desigualdad de Young que vamos a usar en esta sección.

Teorema 2.1.2. *[7, Teorema 1.4.24] Sea G un grupo localmente compacto con μ la medida de Haar que cumple $\mu(A) = \mu(A^{-1})$, para todo conjunto medible $A \in G$, y $1 < p, q, r < \infty$ tales que*

$$\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{s}.$$

Entonces, existe una constante $B_{p,q,r} > 0$ tal que para toda f en $L^p(G)$ y g en $L^{q,\infty}(G)$ tal que

$$\|f * g\|_{L^q(G,\mu)} \leq B_{p,q,r}\|f\|_{L^p(G,\mu)}\|g\|_{L^{s,\infty}(G,\mu)}$$

Demostración. (Teorema 2.1.1) Analicemos primero el caso $n = 1$ (caso unidimensional) Recordemos que queremos probar

$$\||x|^{-\beta}T_\gamma f\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq C\||x|^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

La clave en esta demostración es reescribir a la integral fraccionaria como una convolución en el grupo $\mathbb{R}^*$ con su correspondiente medida de Haar $\mu = \frac{dx}{|x|}$.
Si $q < \infty$ reescribiendo la desigualdad anterior obtenemos

$$\||x|^{-\beta+\frac{1}{q}}T_\gamma f\|_{L^q(\mu)} \leq C\||x|^{\alpha+\frac{1}{p}}f\|_{L^p(\mu)}$$

Ahora

$$|x|^{-\beta+\frac{1}{q}}T_\gamma f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{-\beta+\frac{1}{q}}f(y)|y|^{\alpha+\frac{1}{p}}}{|y|^{\gamma-1+\alpha+\frac{1}{p}}|1-\frac{x}{y}|^\gamma}\frac{dy}{|y|} = (h * g)(x)$$

donde $h(x) = f(x)|x|^{\alpha+\frac{1}{p}}$, $g(x) = \frac{|x|^{-\beta+\frac{1}{q}}}{|1-x|^\gamma}$, y $\gamma - 1 + \alpha + \frac{1}{p} = -\beta + \frac{1}{q}$. Luego usando el Teorema 2.1.2 obtenemos

$$\||x|^{-\beta+\frac{1}{q}}T_\gamma f\|_{L^q(\mu)} \leq C\||x|^{\alpha+\frac{1}{p}}f\|_{L^p(\mu)}\|g\|_{L^{s,\infty}(\mu)}$$

donde
$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{s}-1.$$
Por lo tanto, basta ver que $\|g\|_{L^{s,\infty}(\mu)}<\infty$. Para ello consideramos $\varphi\in C^{\infty}(\mathbb{R})$, con soporte en $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$ y tal que $0\leq\varphi\leq 1$ y $\varphi\equiv 1$ en $(\frac{3}{4},\frac{5}{4})$. Reescribimos a g como $g=\varphi g+(1-\varphi)g:=g_1+g_2$
Claramente $g_2\in L^s(\mu)$, ya que

$$\begin{aligned}\|g_2\|_{L^s(\mu)}&=\int_{|1-x|\geq\frac{1}{2}}|g_2(x)|^s\,\frac{dx}{|x|}+\int_{|1-x|\leq\frac{1}{2}}|g_2(x)|^s\,\frac{dx}{|x|}\\&=\int_{|1-x|\geq\frac{1}{2}}\frac{|x|^{(-\beta+\frac{1}{q})s}}{|1-x|^{\gamma s}}\frac{dx}{|x|}+\int_{|1-x|\leq\frac{1}{2}}|(1-\varphi)|^s\frac{|x|^{(-\beta+\frac{1}{q})s}}{|1-x|^{\gamma s}}\frac{dx}{|x|}\end{aligned}$$

En $|1-x|\leq\frac{1}{2}$ la función es continua y por lo tanto integrable.
En cambio en $|1-x|\geq\frac{1}{2}$, para ver si es integrable tenemos que analizar que pasa en el origen y cuando $x\to\infty$, para eso separamos la integral en las regiones $|x|\leq\frac{1}{2}$ y $|\frac{1}{2}-x|\geq 1$, luego

$$\int_{|x|\leq\frac{1}{2}}\frac{|x|^{(-\beta+\frac{1}{q})s}}{|1-x|^{\gamma s}}\frac{dx}{|x|}\leq C\int_{|x|\leq\frac{1}{2}}|x|^{(-\beta+\frac{1}{q})s-1}\,dx\leq C$$

bajo la condición $(-\beta+\frac{1}{q})s>0$ que es equivalente a pedir que $\beta<\frac{1}{q}$, y cuando $x\to\infty$

$$\int_{|\frac{1}{2}-x|\geq 1}\frac{|x|^{(-\beta+\frac{1}{q})s}}{|1-x|^{\gamma s}}\frac{dx}{|x|}\sim\int_{|\frac{1}{2}-x|\geq 1}|x|^{(-\beta+\frac{1}{q}-\gamma)s-1}\,dx$$

y resulta acotada si $(-\beta+\frac{1}{q}-\gamma)s<0$, pero como por hipótesis tenemos $\frac{1}{q}-\beta-\gamma=\frac{1}{p}-1+\alpha$ esa condición equivalente a $\alpha<\frac{1}{p'}$.
Entonces

$$\begin{aligned}\mu(\{g_1+g_2>\lambda\})\leq&\mu\left(\left\{g_1>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)+\mu\left(\left\{g_2>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)\\\leq&\mu\left(\left\{g_1>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)+\left(\frac{2\|g_2\|_{L^s(\mu)}}{\lambda}\right)^s\\\leq&\mu\left(\left\{g_1>\frac{\lambda}{2}\right\}\right)+\frac{C}{\lambda^s}\end{aligned}$$

pues,

$$
\begin{aligned}
\|g_2\|_{L^s(\mu)} &= \int_{\left\{g_2>\frac{\lambda}{2}\right\}} |g_2|^s \, d\mu + \int_{\left\{g_2<\frac{\lambda}{2}\right\}} |g_2|^s \, d\mu \\
&\geq \int_{\left\{g_2>\frac{\lambda}{2}\right\}} |g_2|^s \, d\mu \\
&\geq \left(\frac{\lambda}{2}\right)^s \mu\left(\left\{g_2 > \frac{\lambda}{2}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

además,

$$
\begin{aligned}
\mu\left(\left\{g_1 > \frac{\lambda}{2}\right\}\right) \leq& \mu\left(\left\{\frac{C}{|1-x|^\gamma} > \lambda\right\}\right) \\
=& \mu\left(\left\{\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}} > |1-x|\right\}\right) \\
\leq& \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}} \leq \frac{C}{\lambda^s}
\end{aligned}
$$

siempre que $s\gamma \leq 1$, esto es, $\gamma \leq 1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, que es equivalente a $\alpha + \beta \geq 0$.
Por lo tanto $g \in L^{s,\infty}(\mu)$.
Si $q = \infty$ la desigualdad nos queda

$$
\||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^\infty(\mu)} \leq C \||x|^{\alpha+\frac{1}{p}} f\|_{L^p(\mu)}
$$

Ahora

$$
|x|^{-\beta} T_\gamma f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{-\beta} f(y) |y|^{\alpha+\frac{1}{p}}}{|y|^{\gamma-1+\alpha+\frac{1}{p}} |1-\frac{x}{y}|^\gamma} \frac{dy}{|y|} = (h * g)(x)
$$

donde $h(x) = f(x)|x|^{\alpha+\frac{1}{p}}$, $g(x) = \frac{|x|^{-\beta}}{|1-x|^\gamma}$, y $\gamma - 1 + \alpha + \frac{1}{p} = -\beta$, luego usando la desigualdad de Young se obtiene

$$
\|h * g\|_{L^\infty(\mu)} = \||x|^{-\beta} T_\gamma f\|_{L^\infty(\mu)} \leq C \||x|^{\alpha+\frac{1}{p}} f\|_{L^p(\mu)} \|g\|_{L^{p'}(\mu)}
$$

Luego basta ver que $\|g\|_{L^{p'}(\mu)} \leq C$

$$
\begin{aligned}
\|g\|^{p'}_{L^{p'}(\mu)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}} \frac{dx}{|x|} \\
&= \int_{|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}} \frac{dx}{|x|} + \int_{\frac{1}{2}<|x|\leq\frac{3}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}} \frac{dx}{|x|} + \int_{|x|>\frac{3}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}} \frac{dx}{|x|}
\end{aligned}
$$

Luego

1.
$$\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'-1}}{|1-x|^{\gamma p'}}dx \leq C\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-\beta p'-1}dx$$

pues si $|x|\leq\frac{1}{2}$ tenemos que $|1-x|\geq\frac{1}{2}$, con lo cual $|1-x|^{-\gamma p'}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{-\gamma p'}=C$, ya que $\gamma p'>0$ y además
$$\int_{|x|\leq\frac{1}{2}} |x|^{-\beta p'-1}dx \leq C$$
pues la condición de integrabilidad en el origen es $-\beta p'>0$ y eso se cumple ya que $\beta<0$.

2.
$$\int_{\frac{1}{2}<|x|\leq\frac{3}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|} \leq C\int_{\frac{1}{2}<|x|\leq\frac{3}{2}} |1-x|^{-\gamma p'}dx$$

ya que si $\frac{1}{2}<|x|\leq\frac{3}{2}$, se tiene que $|x|^{-\beta p'-1}\leq C$
y además
$$\int_{\frac{1}{2}<|x|\leq\frac{3}{2}} |1-x|^{-\gamma p'}dx \leq C$$
pues la condición de integrabilidad en $x=1$ es $-\gamma p'+1>0$ (es decir $\gamma<\frac{1}{p'}$) y esto se cumple ya que $\gamma=1-\frac{1}{p}-(\alpha+\beta)=\frac{1}{p'}-(\alpha+\beta)<\frac{1}{p'}$ pues $\alpha+\beta>0$.

3. Cuando $x\to\infty$ sabemos que $|1-x|\sim|x|$, entonces existe $M\in\mathbb{R}$ tal que si $|x|>M$ se verifica $|1-x|\geq C|x|$, luego podemos tomar
$$\int_{|x|>\frac{3}{2}} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|} = \int_{\frac{3}{2}<|x|<M} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|} + \int_{|x|>M} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|}$$
Claramente la primera integral está acotada, para la segunda usaremos la cota mencionada anteriormente
$$\int_{|x|>M} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|1-x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|} \leq C\int_{|x|>M} \frac{|x|^{-\beta p'}}{|x|^{\gamma p'}}\frac{dx}{|x|} = C\int_{|x|>M} |x|^{(-\beta-\gamma)p'-1}\,dx$$
y esta última resulta acotada si $(-\beta-\gamma)p'<0$, y esto se cumple ya que como $\alpha<\frac{1}{p'}$ y $-\beta-\gamma=\frac{1}{p}-1+\alpha=\alpha-\frac{1}{p'}$, resulta $-\beta-\gamma<0$.

Por lo tanto $g\in L^{p'}(\mu)$.
Con lo que concluimos la demostración para el caso $n=1$.

De manera análoga se puede ver el caso $p=1$, ya que del mismo modo que en $q=\infty$ podemos tomar la desigualdad de Young clásica.

Para demostrar el teorema en el caso $n > 1$, la idea principal, como en el caso unidimensional, es reescribir a la integral fraccionaria de funciones radiales como una convolución sobre el grupo $\mathbb{R}^*$ con la medida de Haar $\mu = \frac{dx}{x}$. Para ello, vamos a necesitar el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea $x \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ y consideramos la siguiente integral:*

$$I(x) = \int_{S^{n-1}} f(x \cdot y)\, dy$$

donde $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, f \in L^1([-1, 1], (1 - t^2)^{(n-3)/2})$. Entonces, $I(x)$ es una constante independiente de x y además

$$I(x) = \omega_{n-2} \int_{-1}^{1} f(t)(1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt$$

donde ω_{n-2} es el área de S^{n-2}.

Demostración. (lema 2.1.1)

Observemos que $I(x)$ es constante para todo $x \in S^{n-1}$. Dado $\tilde{x} \in S^{n-1}$, existe una rotación $R \in O(n)$ tal que $\tilde{x} = Rx$, entonces,

$$I(\tilde{x}) = \int_{S^{n-1}} f(\tilde{x}.y)\, dy = \int_{S^{n-1}} f(Rx.y)\, dy = \int_{S^{n-1}} f(x.R^{-1}y)\, dy = I(x)$$

Por lo tanto basta calcular $I(x)$ para $x = e_n$. Para ello vamos a separar la integral en dos y vamos a considerar primero la integral sobre $(S^{n-1})^+ = \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$, y como $(S^{n-1})^+$ es el gráfico de una función $g : \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : |x| < 1\} \longrightarrow (S^{n-1})^+$ definida por $g(x) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$, obtenemos,

$$\int_{(S^{n-1})^+} f(y_n)\, dy = \int_{\{|x|<1\}} f(\sqrt{1 - |x|^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - |x|^2}}\, dx$$

luego usando coordenadas polares, esto es

$$\int_{S^{n-2}} \int_0^1 f(\sqrt{1 - r^2}) \frac{1}{\sqrt{1 - r^2}} r^{n-2}\, dr\, dx' = \omega_{n-2} \int_0^1 f(t)(1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt$$

Analogamente con la semiesfera inferior, se obtiene

$$\int_{(S^{n-1})^-} f(y_n)\, dy = \omega_{n-2} \int_{-1}^{0} f(t)(1 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt$$

Con lo cual,

$$
\begin{aligned}
I(e_n) = & \int_{(S^{n-1})^+} f(y_n)\, dy + \int_{(S^{n-1})^-} f(y_n)\, dy \\
=& \omega_{n-2} \int_{-1}^{0} f(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt + \omega_{n-2} \int_{-1}^{0} f(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt \\
=& \omega_{n-2} \int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}\, dt = I(x)
\end{aligned}
$$

□

Ahora volvamos a la demostración del teorema.
Usando coordenadas polares,

$$y = ry' \quad r = |y| \quad y' \in S^{n-1}$$

$$x = \rho x' \quad \rho = |x| \quad x' \in S^{n-1}$$

y la identidad:

$$|x-y|^2 = |x|^2 - 2|x||y|x' \cdot y' + |y|^2$$

podemos escribir la integral fraccionaria de una función radial $v(x) = v_0(|x|)$ como

$$T_\gamma v(x) = \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \frac{v_0(r) r^{n-1}\, dr\, dy'}{(r^2 - 2r\rho x'.y' + \rho^2)^{\gamma/2}}$$

Usando el lema (2.1.1), tenemos que

$$T_\gamma v(x) = \omega_{n-2} \int_0^\infty v_0(r) r^{n-1} \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{(n-3)/2}}{(\rho^2 - 2\rho r t + r^2)^{\gamma/2}}\, dt \right\} dr$$

donde

$$f(x.y) = \frac{1}{(r^2 - 2r\rho x.y + \rho^2)^{\frac{\gamma}{2}}}$$

Ahora escribimos

$$\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{(n-3)/2}}{(\rho^2 - 2\rho r t + r^2)^{\gamma/2}}\, dt = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^{(n-3)/2}}{r^\gamma \left[1 - 2\left(\frac{\rho}{r}\right) t + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2\right]^{\gamma/2}}\, dt$$

Entonces

$$T_\gamma v(x) = \omega_{n-2} \int_0^\infty v_0(r) r^{n-\gamma} I_{\gamma,k}\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{dr}{r}$$

donde $k = \frac{n-3}{2}$, y, para $a \geq 0$

$$I_{\gamma,k}(a) = \int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^k}{(1-2at+a^2)^{\gamma/2}}\, dt$$

Notar que el denominador de la integral se anula solamente si $a = 1$ y $t = 1$. Entonces, $I_{\gamma,k}(a)$ está bien definida y es continua para $a \neq 1$.
Si $q < \infty$ haciendo abuso de notación podemos escribir

$$\begin{aligned}
\rho^{\frac{n}{q}-\beta} T_\gamma v(\rho) =& \omega_{n-2} \int_0^\infty v_0(r) r^{n-\gamma+\frac{n}{q}-\beta} \frac{\rho^{\frac{n}{q}-\beta}}{r^{\frac{n}{q}-\beta}} I_{\gamma,k}\left(\frac{\rho}{r}\right) \frac{dr}{r} \\
=& \omega_{n-2} \left(v_0 \rho^{n-\gamma+\frac{n}{q}-\beta}\right) * \left(\rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho)\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, usando el Teorema 2.1.2 se tiene

$$\begin{aligned}
\||x|^{-\beta} T_\gamma v\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} =& \left(\omega_{n-1} \int_0^\infty |T_\gamma v(\rho)|^q \rho^{n-\beta q} \frac{d\rho}{\rho}\right)^{1/q} \\
=& \|\rho^{\frac{n}{q}-\beta} T_\gamma v(\rho)\|_{L^q(\mu)} \\
\leq& \omega_{n-2}^{1/q} \omega_{n-2} \|v_0(\rho) \rho^{n-\gamma+\frac{n}{q}-\beta}\|_{L^p(\mu)}\ \|\rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{s,\infty}(\mu)}
\end{aligned}$$

Con la condición

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{s} - 1 = \frac{1}{q}$$

Usando nuevamente coordenadas polares podemos ver que

$$\begin{aligned}
\omega_{n-1}^{1/p}\ \|v_0(\rho) \rho^{n-\gamma+\frac{n}{q}-\beta}\|_{L^p(\mu)} =& \omega_{n-1}^{1/p} \left(\int_0^\infty |v_0(\rho)|^p \rho^{(n-\gamma-\beta)p-n} \rho^n \frac{d\rho}{\rho}\right)^{1/p} \\
=& \|v_0(|x|)|x|^{n-\gamma+\frac{n}{q}-\beta-\frac{n}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
=& \||x|^\alpha\ v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

pero, por las condiciones de nuestro teorema,

$$n - \gamma + \frac{n}{q} - \beta - \frac{n}{p} = \alpha$$

Entonces, es suficiente probar que

$$\|\rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{s,\infty}(\mu)} < +\infty$$

Para ello, consideramos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$, con soporte en $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y tal que $0 < \varphi < 1$ y $\varphi \equiv 1$ en $(\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$, luego podemos escribir $\rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho) = \varphi \rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho) + (1-\varphi) \rho^{\frac{n}{q}-\beta} I_{\gamma,k}(\rho) := g_1 + g_2$
.

Afirmamos que $g_2 \in L^s(\mu)$. De hecho, como $I_{\gamma,k}(\rho)$ es una función continua para $\rho \neq 1$, para analizar el comportamiento (en relación a la integrabilidad) de g_2 es suficiente con considerar el comportamiento de $|\rho^{\frac{n}{q}-\beta}|^s|I_{\gamma,k}(\rho)|^s$ en $\rho = 0$ y cuando $\rho \to \infty$.
Como $I_{\gamma,k}(\rho)$ no tiene una singularidad en $\rho = 0$, la condición para la integrabilidad en $\rho = 0$ es $\beta < \frac{n}{q}$.
Cuando $\rho \to +\infty$, podemos observar que

$$I_{\gamma,k}(\rho) = \frac{1}{\rho^\gamma}\int_{-1}^{1} \frac{(1-t^2)^k}{(\rho^{-2}-2\rho^{-1}t+1)^{\gamma/2}}\, dt$$

y observemos que cuando $\rho \to +\infty$

$$I_{\gamma,k}(\rho) \sim \frac{C_k}{\rho^\gamma} \qquad \left(con \quad C_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k\, dt \right)$$

se tiene que la condición de integrabilidad en el infinito es $\frac{n}{q} - \beta - \gamma < 0$, lo que resulta equivalente a $\alpha < \frac{n}{p'}$.
Ahora para analizar el comportamiento de g_1 para $\rho = 1$, es necesario el siguiente lema.

Lema 2.1.2. *Para $a \sim 1$ y $k \in \mathbb{N}_0$ o $k = m - \frac{1}{2}$ con $m \in \mathbb{N}_0$, se tiene:*

$$|I_{\gamma,k}(a)| \leq \begin{cases} C_{k,\gamma} & si \quad \gamma < n-1 \\ C_{k,\gamma} \log \frac{1}{|1-a|} & si \quad \gamma = n-1 \\ C_{k,\gamma}|1-a|^{-\gamma+2k+2} & si \quad n-1 < \gamma < n \end{cases}$$

Demostración. (Lema 2.1.2) Consideremos primero el caso $k \in \mathbb{N}_0$ y $\gamma < 2k+2$, entonces como $a \sim 1$,

$$I_{\gamma,k}(a) \sim \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)^k}{\left(2-2t\right)^{\gamma/2}}\, dt \sim C \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-t\right)^k}{\left(1-t\right)^{\gamma/2}}\, dt$$

que resulta acotado ya que $k - \frac{\gamma}{2} + 1 > 0$, pues $\gamma < 2k + 2$.
Si $\gamma = 2k + 2$, entonces

$$I_{\gamma,k}(a) \sim \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}+k} \right)\, dt$$

integrando por partes k veces (y observando que los terminos de borde se anulan),

$$I_{\gamma,k}(a) \sim \left| \int_{-1}^{1} \frac{d^k}{dt^k} \left(\left(1-t^2\right)^k \right) \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}+k}\, dt \right|$$

pero, $\frac{d^k}{dt^k}\left(\left(1-t^2\right)^k \right)$ es un polinomio de grado k y por lo tanto acotado en $[-1,1]$ (de hecho, es el polinomio de Legendre multiplicado por una constante), entonces,

$$I_{\gamma,k}(a) \sim C \int_{-1}^{1} \left(1-2at+a^2\right)^{-1}\, dt = \frac{C}{2a} \log \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^2 \leq C \log \frac{1}{|1-a|}$$

Si $\gamma > 2k+2$, integrando por partes como en el caso anterior,

$$I_{\gamma,k}(a) \sim C \int_{-1}^{1} \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}+k} \ dt$$

entonces,

$$I_{\gamma,k}(a) \sim C \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}+k+1} |_{t=-1}^{t=1} \leq C|1-a|^{-\gamma+2k+2}$$

Veamos ahora el caso $k = m - \frac{1}{2}$, con $m \in \mathbb{N}_0$, para ello analizaremos por separado el caso $k = -\frac{1}{2}$

Tomemos primero el caso $k \neq -\frac{1}{2}$, es decir, $k = m + \frac{1}{2}$ con $m \in \mathbb{N}_0$. Para $\gamma < 2k+2$ la prueba es exactamente igual que en el caso $k \in \mathbb{N}_0$.

Si $\gamma > 2k+2$ ($\gamma > 2m+3$), tomemos $\gamma > 2k+3$ ($\gamma > 2m+4$), entonces

$$\begin{aligned} I_{\gamma,k}(a) &= \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{k} \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{2}} \ dt \\ &= \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}m} \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{4}} \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}(m+1)} \left(1-2at+a^2\right)^{-\frac{\gamma}{4}} \ dt \end{aligned}$$

aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos queda que

$$I_{\gamma,k}(a) \leq \left(I_{\gamma,m}(a)\right)^{1/2} \left(I_{\gamma,m+1}(a)\right)^{1/2}$$

luego como $m \in \mathbb{N}_0$ podemos utilizar las cotas encontradas anteriormentes para $I_{\gamma,m}(a)$ y $I_{\gamma,m+1}(a)$, y de esa forma nos queda,

$$I_{\gamma,k}(a) \leq \left(C|1-a|^{-\gamma+2m+2}\right)^{1/2} \left(C|1-a|^{-\gamma+2m+4}\right)^{1/2} = C|1-a|^{-\gamma+2m+3}$$

si, por el contrario, $2m+3 < \gamma < 2m+4$, notemos que podemos considerar siempre $a < 1$, pues $I_{\gamma,k}(a) = a^{-\gamma} I_{\gamma,k}(a^{-1})$, entonces,

$$\begin{aligned} I'_{\gamma,k}(a) =& \gamma \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)^k (t-a)}{\left(1-2at+a^2\right)^{\frac{\gamma}{2}+1}} \ dt \\ \leq& \gamma \int_{a}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)^k (t-a)}{\left(1-2at+a^2\right)^{\frac{\gamma}{2}+1}} \ dt \\ \leq& \gamma \left(1-a\right) \int_{a}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)^k}{\left(1-2at+a^2\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \ dt \\ \leq& \gamma \left(1-a\right) \int_{-1}^{1} \frac{\left(1-t^2\right)^k}{\left(1-2at+a^2\right)^{\frac{\gamma+2}{2}}} \ dt \\ \leq& \gamma \left(1-a\right) I_{\gamma+2,k}(a) \end{aligned}$$

pero $\gamma+2>2k+2$, entonces $I_{\gamma+2,k}(a)\le C|1-a|^{-(\gamma+2)+2k+2}$, luego

$$I_{\gamma,k}(a)\le\int_0^a I'_{\gamma,k}(s)\,ds\le C\int_0^a(1-s)^{-\gamma+2k+1}\,ds\le C|1-a|^{-\gamma+2k+2}$$

y cuando $\gamma=2k+2$, usando el resultado anterior (ya que también se cumple $\gamma+2>2k+2$), tenemos

$$I_{\gamma,k}(a)\le\int_0^a\frac{1}{1-s}\,ds=C\log\frac{1}{|1-a|}$$

Finalmente si $k=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}I_{\gamma,-\frac{1}{2}}(a)=&\int_{-1}^0\frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}}}\,dt+\int_0^1\frac{(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}}}\,dt\\=&I+II\end{aligned}$$

como $\gamma>0$,

$$I\le\int_{-1}^0\frac{1}{(1+t)^{1/2}}\,dt=2$$

$$\begin{aligned}II\le&\int_0^1\frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}}}\,dt\\=&-2\int_0^1\frac{\frac{d}{dt}(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}}}\,dt\\\le&2a\gamma\int_0^1\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}+1}}\,dt\\\le&2a\gamma\int_0^1\frac{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}{(1-2at+a^2)^{\frac{\gamma}{2}+1}}\,dt\\\le&CI_{\gamma+2,\frac{1}{2}}(a)\end{aligned}$$

y nuevamente usando las cotas halladas para $k\ne-\frac{1}{2}$ concluimos la prueba. □

Continuando con el estudio de g_1, consideramos los siguientes casos.

1. Si $0<\gamma<n-1$ (es decir, $0<\gamma<2k+2$), entonces $|I_{\gamma,k}(\rho)|$ resulta acotado cuando $\rho\sim1$ y por lo tanto $g_1\in L^s(\mu)$
2. Si $\gamma=n-1$ (es decir, $\gamma=2k+2$)

$$|I_{\gamma,k}(\rho)|\le C\log\frac{1}{|1-\rho|}$$

por lo que concluimos, como en el caso anterior, que $g_1\in L^s(\mu)$

3. Si $n-1<\gamma<n$

$$|I_{\gamma,k}(\rho)| \leq C|1-\rho|^{-\gamma+2k+2} = C|1-\rho|^{-\gamma+n-1}$$

entonces,

$$\begin{aligned}\mu\left(\{g_1>\lambda/2\}\right) \leq & \mu\left(\left\{\frac{C}{|1-\rho|^{\gamma-n+1}}>\lambda\right\}\right)\\ = & \mu\left(\left\{\frac{C}{\lambda^{\frac{1}{\gamma-n+1}}}>|1-\rho|\right\}\right)\\ \leq & \frac{C}{\lambda^{\frac{1}{\gamma-n+1}}} \leq \frac{C}{\lambda^s}\end{aligned}$$

siempre y cuando $s(\gamma-n+1)\leq 1$, lo que es equivalente a $\alpha+\beta \geq (n-1)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$. Entonces, $\|g_1\|_{L^{s,\infty}(\mu)}<+\infty$.

Si $q=\infty$, al igual que en el caso anterior, haciendo abuso de notación podemos escribir

$$\begin{aligned}\rho^{-\beta}T_\gamma v(\rho) = & \omega_{n-2}\int_0^\infty v_0(r)r^{n-\gamma-\beta}\frac{\rho^{-\beta}}{r^{-\beta}}I_{\gamma,k}\left(\frac{\rho}{r}\right)\frac{dr}{r}\\ = & \omega_{n-2}\left(v_0\rho^{n-\gamma-\beta}\right)*\left(\rho^{-\beta}I_{\gamma,k}(\rho)\right)\end{aligned}$$

Luego usando la Desigualdad de Young tenemos

$$\begin{aligned}\||x|^{-\beta}T_\gamma v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = & \|\rho^{-\beta}T_\gamma v(\rho)\|_{L^\infty(\mu)}\\ \leq & \omega_{n-2}\|v_0(\rho)\rho^{n-\gamma-\beta}\|_{L^p(\mu)}\ \|\rho^{-\beta}I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{p'}(\mu)}\end{aligned}$$

Usando nuevamente coordenadas polares podemos ver que

$$\begin{aligned}\omega_{n-1}^{1/p}\ \|v_0(\rho)\rho^{n-\gamma-\beta}\|_{L^p(\mu)} = & \omega_{n-1}^{1/p}\ \left(\int_0^\infty |v_0(\rho)|^p\rho^{(n-\gamma-\beta)p-n}\rho^n\frac{d\rho}{\rho}\right)^{1/p}\\ = & \|v_0(|x|)|x|^{n-\gamma-\beta-\frac{n}{p}}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ = & \||x|^\alpha\ v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

ya que la condición

$$1=\frac{1}{p}+\frac{\gamma+\alpha+\beta}{n}$$

implica que

$$n-\gamma-\beta-\frac{n}{p}=\alpha$$

Solo resta ver que $\|\rho^{-\beta} I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{p'}(\mu)} < \infty$
para ello escribimos

$$\begin{aligned}
\|\rho^{-\beta} I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{p'}(\mu)}^{p'} =& \int_0^\infty \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} \\
=& \int_0^{1-\varepsilon} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} + \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} \\
=& I + II + III
\end{aligned}$$

Luego

$$I = \int_0^{1-\varepsilon} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} < C \int_0^{1-\varepsilon} \rho^{-\beta p' - 1} d\rho$$

pues $I_{\gamma,k}(\rho)$ es continua para $\rho \neq 1$
y la integral resulta acotada si $-\beta p' > 0$ y esto se cumple ya que $\beta < 0$

Para II vamos a usar el lema 2.1.2 ya que $\rho \sim 1$, y por lo tanto vamos a considerar los siguientes casos

1. Si $0 < \gamma < n-1$
$$II = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} < C$$
ya que $|I_{\gamma,k}(\rho)| < C_{k,\gamma}$

2. Si $\gamma = n-1$
$$II = \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p'} |I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'} \frac{d\rho}{\rho} \sim \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p'} C_{k,\gamma} \left(\log \frac{1}{|1-\rho|} \right)^{p'} \frac{d\rho}{\rho}$$
si usamos que:
$$\log \frac{1}{|1-\rho|} < C \left(\frac{1}{|1-\rho|} \right)^{\delta} \quad (para\ 1-\varepsilon < \rho < 1+\varepsilon \quad y \quad \delta > 0)$$
obtenemos
$$\begin{aligned}
\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p'} C_{k,\gamma} \left(\log \frac{1}{|1-\rho|} \right)^{p'} \frac{d\rho}{\rho} <& C_{k,\gamma} \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} \rho^{-\beta p' - 1} \frac{1}{|1-\rho|^{\delta p'}} d\rho \\
<& C \int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon} |1-\rho|^{-\delta p'} d\rho
\end{aligned}$$
y esta integral resulta acotada si $-\delta p' + 1 > 0$, para eso basta con tomar $0 < \delta < \frac{1}{p'}$

3. Si $n-1<\gamma<n$

$$II=\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}\rho^{-\beta p'}|I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'}\frac{d\rho}{\rho}\sim\int_{1-\varepsilon}^{1+\varepsilon}|1-\rho|^{(-\gamma+n-1)p'}\;d\rho$$

y está última resulta acotada si $(-\gamma+n-1)p'+1>0$, lo que resulta equivalente a la condición $\alpha+\beta>(n-1)\left(-\frac{1}{p}\right)$

Nos resta ver que pasa con III

$$III=\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\rho^{-\beta p'}|I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'}\frac{d\rho}{\rho}$$

cuando $\rho\to+\infty$ podemos observar que

$$I_{\gamma,k}(\rho)=\frac{1}{\rho^{\gamma}}\int_{-1}^{1}\frac{(1-t^2)^k}{(\rho^{-2}-2\rho^{-1}+1)^{\frac{\gamma}{2}}}dt\sim\frac{C_k}{\rho^{\gamma}}\qquad\left(con\ C_k=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^k dt\right)$$

con lo cual

$$\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\rho^{-\beta p'}|I_{\gamma,k}(\rho)|^{p'}\frac{d\rho}{\rho}\sim C_k\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\rho^{-\beta p'-1-\gamma p'}d\rho$$

y esta resulta acotada si $-\beta p'-\gamma p'<0$ y nuevamente si reemplazamos γ por $n-\alpha-\beta-\frac{n}{p}$ esta condición se traduce en $\alpha<\frac{n}{p'}$

Entonces $\|\rho^{-\beta}I_{\gamma,k}(\rho)\|_{L^{p'}(\mu)}<\infty$.
Y con eso concluye la demostración. $\square$

Capítulo 3

Espacios Potenciales

3.1. Introducción

Los espacios de Sobolev de orden entero suelen definirse en término de sus derivadas, como es el caso de la clásica definición:

Definición 3.1.1. *Dado un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $k \in \mathbb{N}$ se define*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega) : D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad con \quad |\alpha| \leq k\}$$

donde $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ un multiíndice.

donde la derivada $D^\alpha f$ debe entenderse en el sentido de las distribuciones. Se suele notar al espacio $W^{k,2}$ como H^k.
En el caso de $p = 2$ se puede definir el espacio de Sobolev $W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$ (o $H^k(\mathbb{R}^n)$) haciendo uso de la transformada de Fourier, como veremos en la siguiente definición.

Definición 3.1.2. *Sea $k \in \mathbb{N}$*

$$H^k(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\omega|^2)^{k/2}\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Notemos que si $p = 2$ ambas definiciones son equivalentes, es decir, $W^{k,2} = H^k$. Equivalencia que podemos encontrar en [7].
A partir de esta definición podemos definir los espacios de Sobolev de orden fraccionario (para cualquier $s \geq 0$ real)

Definición 3.1.3. *Sea $s \geq 0$ un número real,*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n) : (1 + |\omega|^2)^{s/2}\widehat{f}(\omega) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

En este capítulo estudiaremos los espacios de Sobolev de orden fraccionario basados en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 < p < \infty$. Una forma de definir estos espacios, conocidos como espacios potenciales, es a partir del operador $(I-\Delta)^{-s/2}$ que podemos definir usando transformada de Fourier (para funciones en la clase de Schwarz):

$$(I-\Delta)^{-s/2}\, g = \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\omega|^2)^{-s/2}\mathcal{F}(g)\right) = G_s * g$$

donde

$$G_s(\omega) = \mathcal{F}^{-1}\left((1+|\omega|^2)^{-s/2}\right)$$

que es conocido como el potencial de Bessel. Luego usando un argumento de densidad podemos definirlo para funciones en $L^p(\mathbb{R}^n)$

Definición 3.1.4. *Sean $s \geq 0 \in \mathbb{R}$ y $1 < p < \infty$*

$$H^{s,p}(\mathbb{R}^n) = \{f \in L^p(\mathbb{R}^n) : f = (I-\Delta)^{-s/2}\, g \qquad \textit{con} \qquad g \in L^p(\mathbb{R}^n)\}$$

Observación. *Si $k \in \mathbb{N}$ y $1 < p < \infty$, tenemos que $H^{k,p}(\mathbb{R}^n) = W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$ (ver [17, pág. 135])*

Definición 3.1.5. *Sea $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_s * g$, definimos la norma en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ como,*

$$\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Como consecuencia de la siguiente proposición podemos observar que la norma está bien definida.

Proposición 3.1.1.

$$G_s * g_1 = G_s * g_2 \Rightarrow g_1 = g_2$$

Demostración. Sea $\varphi \in \mathcal{S}$

$$< G_s * g_1, \varphi >= \int (G_s * g_1)(x)\varphi(x)\, dx = \int\int G_s(y-x) g_1(x)\varphi(x)\, dx\, dy =$$

$$\int g_1(x)(G_s * \varphi)(x)\, dx =< g_1, G_s * \varphi >$$

como $G_s * g_1 = G_s * g_2 \Rightarrow \int (g_2 - g_1)(G_s * \varphi)(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$, para ver que $g_2 - g_1 = 0$ basta ver que $G_s * \varphi$ está en $\mathcal{S}$ para toda φ en $\mathcal{S}$,
supongamos que $\psi \in \mathcal{S}$ y tomamos $\widehat{\varphi}(x) = (1+4\pi^2|x|^2)^{s/2}\,\widehat{\psi}(x)$, como $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}$, $\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}$ y por lo tanto $\varphi \in \mathcal{S}$,
luego

$$\widehat{\psi} = \widehat{\varphi}\left(1+4\pi^2|x|^2\right)^{-s/2}$$

$$\Rightarrow \psi = G_s * \varphi$$
$$\Rightarrow \int (g_1 - g_2)(G_s * \varphi)(x)\, dx = \int (g_1 - g_2)\psi\, dx \quad \forall \psi \in \mathcal{S}$$
$$\Rightarrow g_1 = g_2$$

$\square$

Proposición 3.1.2. *Sea $0 < s < n$. Entonces G_s es una función suave en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que satisface $G_s(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$. Más aún, existen $C(s,n), c(s,n), C_{s,n}$ constantes positivas tal que*

$$G_s \leq C(s,n) e^{-|x|/2} \qquad si\ |x| \geq 2$$

y

$$\frac{1}{c(s,n)} \leq \frac{G_s(x)}{H_s(x)} \leq c(s,n) \qquad si\ |x| \leq 2$$

donde

$$H_s(x) = \begin{cases} |x|^{s-n} + 1 + O(|x|^{s-n+2}) & si\ 0 < s < n \\ log\left(\frac{2}{|x|}\right) + 1 + O(|x|^2) & s = n \\ 1 + O(|x|^{s-n}) & s > n \end{cases}$$

Demostración. La demostración es análoga al desarrollo realizado para el potencial de Riesz. Para $a, s > 0$ tenemos la identidad de la función Gamma

$$a^{-s/2} = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty e^{-ta} t^{s/2}\, \frac{dt}{t}$$

que usamos para obtener

$$\left(1 + 4\pi^2|\xi|^2\right)^{-s/2} = \frac{1}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty e^{-t\left(1+4\pi^2|\xi|^2\right)} t^{s/2}\, \frac{dt}{t}$$

antitransformando en ξ y usando que $e^{-\pi|\xi|^2}$ es igual a su transformada se obtiene

$$G_s(x) = \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_0^\infty e^{-t} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \tag{3.1}$$

entonces $G_s(x) > 0$ y suave en $\mathbb{R}^n - \{0\}$.
Ahora si suponemos $|x| \geq 2$, entonces $t + \frac{|x|^2}{4t} \geq t + \frac{1}{t}$ y además $t + \frac{|x|^2}{4t} \geq |x|$, entonces

$$-t - \frac{|x|^2}{4t} \leq -\frac{t}{2} - \frac{1}{2t} - \frac{|x|}{2}$$

por lo tanto, cuando $|x| \geq 2$ se tiene

$$|G_s(x)| \leq \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \left(\int_0^\infty e^{\frac{-t}{2}} e^{\frac{-t}{2t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \right) e^{\frac{-|x|}{2}} = C_{s,n} e^{\frac{-|x|}{2}}.$$

Cuando $|x| \leq 2$, escribimos $G_s(x) = G_s^1(x) + G_s^2(x) + G_s^3 1(x)$, donde

$$\begin{aligned} G_s^1(x) =& \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_0^{|x|^2} e^{-u} e^{\frac{-|x|^2}{4u}} u^{\frac{s-n}{2}} \frac{du}{u} \\ =& |x|^{s-n} \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_0^1 e^{-t|x|^2} e^{\frac{-1}{4t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \\ G_s^2(x) =& \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_{|x|^2}^4 e^{-t} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \\ G_s^3(x) =& \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_4^\infty e^{-t} e^{\frac{-|x|^2}{4t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

como $|x| \leq 2$, si $t < 1$ se tiene $t|x|^2 \leq 4$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} G_s^1(x) \approx& |x|^{s-n} \frac{(2\sqrt{\pi})^{-n}}{\Gamma(s/2)} \int_0^1 e^{\frac{-1}{4t}} t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} \\ \approx& c_{s,n}^1 |x|^{s-n} \end{aligned}$$

además como $0 \leq \frac{|x|^2}{4t} \leq \frac{1}{4}$, si $0 \leq t \leq 4$ se tiene $e^{\frac{-17}{4}} \leq e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}} \leq 1$, y por lo tanto

$$G_s^2(x) \approx \int_{|x|^2}^4 t^{\frac{s-n}{2}} \frac{dt}{t} = \begin{cases} \frac{2}{n-s}|x|^{s-n} - \frac{2^{s-n+1}}{n-s} & \text{si } 0 < s < n \\ 2\log\left(\frac{2}{|x|}\right) & s = n \\ \frac{1}{s-n} 2^{s-n+1} - \frac{2}{s-n}|x|^{s-n} & s > n \end{cases}$$

por último, usando que $e^{\frac{-1}{4}} \leq e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \leq 1$, se tiene que

$$c_1 \leq G_s^3(x) \leq c_2$$

y combinando las tres estimaciones se obtiene que

$$\frac{1}{c(s,n)} \leq \frac{G_s(x)}{H_s(x)} \leq c(s,n)$$

$\square$

Proposición 3.1.3. *Para $s > 0$, $G_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$*

Demostración.

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_s(x)|\, dx = \int_{\{|x|\le 2\}} |G_s(x)|\, dx + \int_{\{|x|\ge 2\}} |G_s(x)|\, dx$$
$$= I + II.$$

Luego usando la Proposición 3.1.2 tenemos que,

$$II = \int_{\{|x|\ge 2\}} |G_s(x)| \le \int_{\{|x|\ge 2\}} e^{-|x|/2}\, dx \le C$$

y como para $|x| \le 2$ tenemos,

$$|G_s(x)| \le \begin{cases} C|x|^{s-n} & \text{si } 0 < s < n \\ C\log\left(\frac{2}{|x|}\right) & s = n \\ C & s > n \end{cases}$$

se sigue que,

$$I = \int_{\{|x|\le 2\}} |G_s(x)|\, dx \le C$$

por lo tanto $G_s \in L^1(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corolario 3.1.1. *Si $s > 0$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $1 \le p \le \infty$ tenemos que*

$$\|G_s * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. Usando la desigualdad de Young

$$\|G_s * f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|G_s\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

$\square$

Observación. *Es inmediato del corolario que $H^{\beta,p}(\mathbb{R}^n) \subset H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ y que*

$$\|f\|_{H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{H^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)} \quad si\ \beta > \alpha$$

ya que si $f \in H^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_\beta * g$ y como $\beta > \alpha$ puedo tomar $h > 0$ que cumpla $\beta = \alpha + h$, de esa manera

$$f = G_\beta * g = G_{\alpha+h} * g$$

$$f = (G_\alpha * G_h) * g = G_\alpha * (G_h * g)$$

luego

$$\|f\|_{H^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \|G_h * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{H^{\beta,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Proposición 3.1.4. *Sean* $0 < s < n$ *y* $1 < p < q < \infty$ *que cumplen* $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$*. Entonces para toda* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *existe una constante* $C_{p,q,n,s} < \infty$ *tal que*

$$\|G_s * f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q,n,s}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Demostración. Por la proposición 3.1.2 sabemos que

$$|G_s(x)| \leq C|x|^{s-n}$$

entonces

$$|G_s * f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |G_s(y-x)||f(y)|\, dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |y-x|^{s-n}|f(y)|\, dy = CT_{n-s}(|f|)$$

luego usando el Teorema 1.2.1, con $\gamma = n - s$ tenemos que,

$$\|T_{n-s}(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ya que para $\gamma = n-s$, la condición $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\gamma}{n} - 1$ es equivalente a $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{s}{n}$.

De esa forma se obtiene,

$$\|G_s * f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

□

Finalmente si nos restringimos al espacio de funciones con simetría radial

$$H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) = \{f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n) : f(x) = f_0(|x|)\}$$

obtenemos el siguiente teorema, que es el que nos va a permitir demostrar los teoremas de inmersión (para funciones radiales) junto con los resultados estudiados en el primer capítulo.

Teorema 3.1.1. *Sea* $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f = G_s * g$*, donde* g *es una función radial de* $L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Basta ver que $g \circ R(x) = g(R(x)) = g(x)$, para toda rotación $R \in SO(n)$. Tomemos $\langle g \circ R, \psi\rangle$ con $\psi \in S$ y definimos

$$\varphi = \left((1+|x|^2)^{s/2}\widehat{\psi}\right)^{\vee} \quad \in S$$

con lo cual

$$\widehat{\varphi} = (1+|x|^2)^{s/2}\widehat{\psi}$$

$$\widehat{\psi} = (1+|x|^2)^{-s/2}\widehat{\varphi} = \widehat{G_s}\ \widehat{\varphi} = \widehat{G_s * \varphi}$$

luego

$$\psi = G_s * \varphi$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\langle g \circ R, \psi\rangle &= \langle g \circ R, G_s * \varphi\rangle = \langle g, (G_s * \varphi) \circ R^{-1}\rangle \\
&= \langle g, (G_s \circ R^{-1}) * (\varphi \circ R^{-1})\rangle = \langle g, G_s * (\varphi \circ R^{-1})\rangle \\
&= \langle G_s * g, \varphi \circ R^{-1}\rangle = \langle f, \varphi \circ R^{-1}\rangle = \langle f \circ R, \varphi\rangle \\
&= \langle f, \varphi\rangle = \langle G_s * g, \varphi\rangle = \langle g, G_s * \varphi\rangle = \langle g, \psi\rangle
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\langle g \circ R, \psi\rangle = \langle g, \psi\rangle \quad \forall \psi \in S$$

es decir,

$$g \circ R(x) = g(x) \quad \forall R \in SO(n)$$

□

3.2. Lemas de Ni y Strauss para espacios potenciales

En esta sección mostraremos una generalización de los lemas de Ni y W.Strauss (ver [19] y [12]) para espacios potenciales. Estos teoremas serán de gran utilidad para demostrar los teoremas de inmersión de espacios $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ (o en $L^p(|x|^c, \mathbb{R}^n)$) para funciones con simetría radial.

Teorema 3.2.1. *(Lema de Ni para Espacios Potenciales) Sean* $n > 1,\ \ 1 < p < \infty$ *y* $1/p < s < n/p$. *Entonces*

$$|f(x)| \leq C_n |x|^{-(n-sp)/p} \|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ una función radial, entonces existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ radial, tal que $f = G_s * g$, y sabemos que

$$|G_s(x)| \leq C|x|^{s-n}$$

luego

$$f(x) = G_s * g(x) \leq |G_s * g(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G_s(y-x)|g(y)|\, dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} C|y-x|^{s-n}|g(y)|\, dy = CT_{n-s}(|g|)$$

entonces

$$|x|^{(n-sp)/p}|f(x)| \leq \||x|^{(n-sp)/p}f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \||x|^{(n-sp)/p}G_s * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq$$
$$\leq C\||x|^{(n-sp)/p}T_{n-s}(|g|)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

tomando $\alpha = 0$, $\beta = -(n-sp)/p$, y $\gamma = n-s$, se cumple $0 < \gamma < n$, $\alpha < n/p'$, $\beta < 0$, $\alpha+\beta > -(n-1)(1/p)$ y $1 = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{n}$, por lo tanto estamos en condiciones de aplicar el Teorema 2.1.1, obteniendo la siguiene desigualdad:

$$|x|^{(n-sp)/p}|f(x)| \leq C\||x|^{(n-sp)/p}T_{n-s}(|g|)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p} = C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

y finalmente

$$|f(x)| \leq C|x|^{-(n-sp)/p}\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

□

Observación. *Si en el teorema anterior tomamos $p = 2$ y $s = 1$ y notamos que $H^{1,2} = H^1$ obtenemos la desigualdad de Ni para funciones radiales de H^1 (ver [12]).*

$$|f(x)| \leq C|x|^{-(n-2)/2}\|f\|_{H^1}$$

Teorema 3.2.2. *(Lema de Strauss para Espacios Potenciales) Sean $1 < p < \infty$ y $1/p < s < n$. Entonces*

$$|f(x)| \leq C_n|x|^{-(n-1)/p}\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ una función radial, entonces existe $g \in L^p$ radial $g = g_0(|x|)$, tal que

$$f = G_s * g = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)G_s(y)\, dy$$

Notemos que G_s es decreciente, como puede verse fácilmente de (3.1).
Fijamos $a > 0$ y partimos la integral en las coronas $2^{k-1}a \leq |y| < 2^k a$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
G_s * g(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\{2^{k-1}a \leq |y| \leq 2^k a\}} g(x-y)G_s(y)\, dy \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a) \int_{\{|y| \leq 2^k a\}} g(x-y)\, dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a) \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\chi_{B(0,2^k a)}(y)\, dy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a)\; g * \chi_{B(0,2^k a)}(x)
\end{aligned}$$

veamos como se comporta la convolución entre una función radial y la característica de una bola ($g * \chi_{B(0,R)}$)

$$g * \chi_{B(0,R)}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\chi_{B(0,R)}(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\chi_{B(x,R)}(y)\, dy$$

observemos que si $y \in B(x,R)$ entonces

$$|x| = |x - y + y| \leq |x-y| + |y| \leq R + |y|$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |x-y| + |x| \leq R + |x|$$

con lo cual,

$$|x| - R \leq |y| \leq R + |x|$$

tomando coordenadas polares

$$y = ry' \quad r = |y| \quad y' \in S^{n-1}$$

$$x = \rho x' \quad \rho = |x| \quad x' \in S^{n-1}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} g * \chi_{B(0,R)}(x) &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} \int_{S^{n-1}} g_0(r)\chi_{B(x,R)}(ry')r^{n-1}\, dy'\, dr \\ &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} g_0(r) \left(\int_{S^{n-1}} \chi_{B(x,R)}(ry')\, dy' \right) r^{n-1}\, dr. \end{aligned}$$

Analicemos la integral

$$\int_{S^{n-1}} \chi_{B(x,R)}(ry')\, dy'$$

para ello observemos que,

$$\chi_{B(x,R)}(ry') = \chi_{[t_0,1]}(x'.y') \quad con \quad t_0 = \frac{r^2 + \rho^2 - R^2}{2r\rho}$$

pues,

$$\begin{aligned} ry' \in B(x,R) &\Leftrightarrow |x-y| = \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho t} \leq R \\ &\Leftrightarrow r^2 + \rho^2 - 2r\rho t \leq R^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{r^2 + \rho^2 - R^2}{2r\rho} \leq t \quad donde \quad t = x'.y' \end{aligned}$$

veamos que $t_0 \le 1$,

$$\begin{aligned} t_0 \le 1 &\Leftrightarrow \frac{r^2+\rho^2-R^2}{2r\rho} \le 1 \\ &\Leftrightarrow r^2+\rho^2-R^2 \le 2r\rho \\ &\Leftrightarrow r^2+\rho^2-2r\rho \le R^2 \\ &\Leftrightarrow (r-\rho)^2 \le R^2 \\ &\Leftrightarrow |r-\rho| \le R \\ &\Leftrightarrow \rho - R \le r \le R+\rho \end{aligned}$$

si además se cumple $t_0 \ge -1$, estaríamos en condiciones de aplicar el Lema 2.1.1,

$$\begin{aligned} t_0 \ge -1 &\Leftrightarrow \frac{r^2+\rho^2-R^2}{2r\rho} \ge -1 \\ &\Leftrightarrow r^2+\rho^2-R^2 \ge -2r\rho \\ &\Leftrightarrow r^2+\rho^2+2r\rho \ge R^2 \\ &\Leftrightarrow (r^2+\rho^2)^2 \ge R^2 \\ &\Leftrightarrow r+\rho = |r+\rho| \ge R \end{aligned}$$

luego como $r \ge \rho - R \Rightarrow r+\rho \ge 2\rho - R$, entonces si pedimos que $\rho \ge R$ tenemos que $t_0 \ge -1$ y por lo tanto aplicando el Lema 2.1.1 obtenemos,

$$\int_{S^{n-1}} \chi_{B(x,R)}(ry')\, dy' = \int_{S^{n-1}} \chi_{[t_0,1]}(x'y')\, dy' = \int_{-1}^{1} \chi_{[t_0,1]}(t) \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\, dt$$

Luego si $\rho \ge R$ tenemos,

$$\begin{aligned} g * \chi_{B(0,R)}(x) &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} \int_{S^{n-1}} g_0(r)\chi_{B(x,R)}(ry') r^{n-1}\, dy'\, dr \\ &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} g_0(r) \left(\int_{S^{n-1}} \chi_{B(x,R)}(ry')\, dy' \right) r^{n-1}\, dr \\ &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} g_0(r) \left(\int_{-1}^{1} \chi_{[t_0,1]}(t) \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\, dt \right) r^{n-1}\, dr \\ &= \int_{\rho-R}^{\rho+R} \int_{t_0}^{1} g_0(r) \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} r^{n-1}\, dt\, dr \end{aligned}$$

ahora utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |g * \chi_{B(0,R)}(x)| \le& \left(\int_{\rho-R}^{\rho+R} |g_0(r)|^p r^{n-1}\, dr \right)^{1/p} \left(\int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(\int_{t_0}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}}\, dt \right)^{p'} r^{n-1}\, dr \right)^{1/p'} \\ \le& \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} A(\rho) \end{aligned}$$

donde,

$$A(\rho) = \left(\int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(\int_{t_0}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \, dt \right)^{p'} r^{n-1} \, dr \right)^{1/p'}$$

Buscamos acotar $A(\rho)$, para ello primero acotemos la integral interior

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{1} \left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} \, dt =& \int_{t_0}^{1} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} (1+t)^{\frac{n-3}{2}} \, dt \\ \leq& 2^{\frac{n-3}{2}} \int_{t_0}^{1} (1-t)^{\frac{n-3}{2}} \, dt \\ \leq& C_n (1-t_0)^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} A(\rho) \leq& C_n \left(\int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(1 - \frac{r^2+\rho^2-R^2}{2r\rho} \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} r^{n-1} \, dr \right)^{1/p'} \\ \leq& C_n \left(\int_{\rho-R}^{\rho+R} \left(1 - \left(\frac{1+(r/\rho)^2-(R/\rho)^2}{2(r/\rho)} \right) \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} r^{n-1} \, dr \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

tomando $u = r/\rho$, $u \in [1-R/\rho, 1+R/\rho]$

$$\begin{aligned} \leq& C_n \left(\rho^n \int_{1-R/\rho}^{1+R/\rho} \left(1 - \left(\frac{1+(u)^2-(R/\rho)^2}{2u} \right) \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} u^{n-1} \, du \right)^{1/p'} \\ =& C_n \left(\rho^n \int_{1-R/\rho}^{1+R/\rho} \left(\frac{2u-1-(u)^2+(R/\rho)^2}{2u} \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} u^{n-1} \, du \right)^{1/p'} \\ =& C_n \left(\rho^n \int_{1-R/\rho}^{1+R/\rho} \left(\frac{(R/\rho)^2-(1-u)^2}{2u} \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} u^{n-1} \, du \right)^{1/p'} \\ \leq& C_n \left(\rho^n \int_{1-R/\rho}^{1+R/\rho} \left(\frac{2}{u} (R/\rho)^2 \right)^{\frac{(n-1)p'}{2}} u^{n-1} \, du \right)^{1/p'} \\ \leq& C_n R^{n-1} \left(\rho^{n-(n-1)p'} \int_{1-R/\rho}^{1+R/\rho} u^{(n-1)(1-\frac{p'}{2})} \, du \right)^{1/p'} \end{aligned}$$

Notemos que el exponente $(n-1)(1-\frac{p'}{2})$ no es mayor que -1 en general, luego la integral no va a ser integrable en el origen. Si pedimos que $\rho \geq 2R$, estaremos integrando en el intervalo $[1/2, 3/2]$, donde el integrando es acotado, y por lo tanto nos queda,

$$\begin{aligned} A(\rho) \leq & C_n R^{n-1} \left(\rho^{n-(n-1)p'} 2\frac{R}{\rho} \right)^{1/p'} \\ \leq & C_n R^{n-1+1/p'} \rho^{-(n-1)/p} \\ = & C_n R^{n-1/p} \rho^{-(n-1)/p} \end{aligned}$$

por lo tanto, para $\rho \geq 2R$ tenemos que,

$$|g * \chi_{B(0,R)}(x)| \leq C_n R^{n-1/p} \rho^{-(n-1)/p} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Veamos que pasa si $\rho < 2R$,

$$\begin{aligned} |g * \chi_{B(0,R)}(x)| \leq & \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \chi_{B(0,R)}(x-y)\, dy \\ \leq & \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{B(0,R)} 1^{p'}\, dy \right)^{1/p'} \\ \leq & C_n \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} R^{n/p'} \end{aligned}$$

y tendremos que

$$C_n R^{n/p'} \leq C_n R^{n-1/p} \rho^{-(n-1)/p} \Leftrightarrow \rho^{(n-1)/p} \leq C_n R^{n-1/p-n/p'} = C_n R^{(n-1)/p}$$

luego esta desigualdad se cumple con $C_n = 2^{(n-1)/p}$, pues

$$\rho < 2R \Rightarrow \rho^{(n-1)/p} < (2R)^{(n-1)/p}$$

con lo cual tomando $C_n = \max\{C_n, (2R)^{(n-1)/p}\}$,

$$|g * \chi_{B(0,R)}(x)| \leq C_n R^{n-1/p} \rho^{-(n-1)/p} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

finalmente hemos probado el siguiente lema

Lema 3.2.1. *Sea $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ radial, entonces*

$$|g * \chi_{B(0,R)}(x)| \leq C_n R^{n-1/p} \rho^{-(n-1)/p} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Volviendo a la demostración del teorema, teníamos

$$|G_s * g(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a)\, |g * \chi_{B(0,2^k a)}(x)|$$

aplicando el lema anterior

$$|G_s * g(x)| \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p} \sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a)(2^k a)^{n-1/p}$$

ahora si consideramos $r_k = 2^{k-1}a$ vemos que,

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = 2^{k-1}a$$

luego podemos escribir la suma anterior como

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(2^{k-1}a)(2^{k-1}a)^{n-1/p}2^{n-1/p-1} = C\sum_{k\in\mathbb{Z}} G_s(r_k)(r_k)^{n-1/p}\Delta r_k$$

y esta es la suma de Riemann para la integral,

$$\int_0^\infty G_s(r)r^{n-1/p-1}\, dr$$

por lo tanto si hacemos $a \to 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}|G_s * g(x)| \leq& C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p}\int_0^\infty G_s(r)r^{n-1/p-1}\, dr\\ =& C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p}\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x)|x|^{-1/p}\, dx\\ \leq& C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p}\end{aligned}$$

ya que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x)|x|^{-1/p}\, dx \leq +\infty$$

pues,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x)|x|^{-1/p}\, dx =& \int_0^\infty G_s(r)r^{n-1/p-1}\, dr\\ =& \int_0^2 G_s(r)r^{n-1/p-1}\, dr + \int_2^\infty G_s(r)r^{n-1/p-1}\, dr\\ \leq& \int_0^2 Cr^{s-n}r^{n-1/p-1}\, dr + \int_2^\infty Ce^{-|x|/2}r^{n-1/p-1}\, dr\\ \leq& C_n\end{aligned}$$

para $s - 1/p - 1 > -1$, que es equivalente a pedir que $s > 1/p$
finalmente podemos concluir que

$$|f(x)| = |G_s * g(x)| \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p} = C_n\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}|x|^{-(n-1)/p}$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Capítulo 4

Teoremas de inmersión

En este capítulo enunciaremos y demostraremos teoremas de inmersión de espacios potenciales $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ en espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ y en espacios con pesos $L^p(|x|^c, \mathbb{R}^n)$ para funciones radiales. Estos teoremas son de gran utilidad en la teoría de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en particular, resulta de fundamental importancia conocer cuándo las inmersiones en los espacios L^p (o $L^p(|x|^c, \mathbb{R}^n)$) resultan compactas, ya que esto nos permite demostrar teoremas de existencia para ecuaciones no lineales, por medio de métodos variacionales.

El teorema de inmersión sin pesos fue demostrado por Lions (en [13]), usando el método de interpolación compleja. Y recientemente en un trabajo realizado por P. De Nápoli e I. Drelichman (ver [3]) se puede encontrar la demostración del teorema de inmersión con pesos. En esta tesis daremos una versión más débil de estos teoremas, ya que agregaremos la condición $s > 1/p$, que nos permitirá dar una demostración sencilla que utiliza los resultados analizados en los capítulos anteriores.

Teorema 4.0.3. *Sean* $0 < s < n/p,\ \ 1 < p \leq q \leq p^* = \frac{np}{n-sp}$. *Entonces*

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Demostración. Sea $f \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_s * g$, luego

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|G_s * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|G_s\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Además como $|G_s(x)| \leq C|x|^{s-n}$ tenemos que

$$|f| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|g(y)|}{|x-y|^{n-s}}\, dy = CT_{n-s}(|g|)$$

y usando el teorema de Hardy-Litletwood-Sobolev 1.2.1, tomando $q = p^*$ y $\gamma = n - s$ obtenemos

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Ahora tomamos $q = \nu p + (1-\nu)p^*$ $(0 < \nu < 1)$, y usando Hölder obtenemos la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\nu p + (1-\nu)p^*} \, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx\right)^{\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*} \, dx\right)^{1-\nu} \\ &\leq \|f\|^{p\nu}_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{p^*(1-\nu)}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|^{p\nu}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{p^*(1-\nu)}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C\|f\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

que es lo que queríamos probar. □

Teorema 4.0.4. *Sean $1/p < s < n/p$ y $1 < p < q < p^* = \frac{np}{n-sp}$, entonces se tiene la inclusión compacta*

$$H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n)$$

Demostración. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ una sucesión de funciones radiales acotada en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, queremos ver que existe una subsucesión $\left(f_{k_j}\right)$ convergente en $L^q(\mathbb{R}^n)$.
Aplicando el teorema de Kolmogorov basta ver

1. (f_k) acotada en $L^q(\mathbb{R}^n)$
2. (f_k) equicontinua en $L^q(\mathbb{R}^n)$, es decir, si tomamos $\Delta_h f = f(x+h) - f(x)$ queremos ver que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\|\Delta_h f_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$
3. para todo $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ tal que $\int_{|x|>R} |f_k|^q \, dx < \varepsilon$

Veamos 1)
Usando el teorema 4.0.3 tenemos que

$$\|f_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_k\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

y como (f_k) es acotada en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces (f_k) resulta acotada en $L^q(\mathbb{R}^n)$.
2)

Como $f_k \in H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, entonces $f_k = G_s * g_k$, con $g_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$, luego tomando r tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1$, y usando la desigualdad de Young obtenemos

$$\begin{aligned}\|\Delta_h f_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} =& \|\Delta_h (G_s * g_k)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\ =& \|\ (\Delta_h G_s) * g_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \\ \leq& \|\Delta_h G_s\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}\ \|g_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\end{aligned}$$

luego como $g_k \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|g_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C$, y si $G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$ se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|h| < \delta$, entonces $\|\Delta_h G_s\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon / C$ y por lo tanto $\|\Delta_h f_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$.
Veamos que efectivamente $G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$, para ello vamos a usar la proposición 3.1.2
Consideramos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |G_s(x)|^r\ dx = \int_{|x|\leq 2} |G_s(x)|^r\ dx + \int_{|x|\geq 2} |G_s(x)|^r\ dx$$

cuando $|x| \geq 2$ la integral converge para todo r pues $G_s(x) \simeq e^{-|x|/2}$
cuando $|x| \leq 2$

$$\begin{aligned}\int_{|x|\leq 2} |G_s(x)|^r\ dx \leq& C \int_{|x|\leq 2} \left(|x|^{s-n}\right)^r\ dx = C \int_0^2 \left(\rho^{s-n}\right)^r \rho^{n-1}\ d\rho \\ =& C \int_0^2 \rho^{(s-n)r+n-1}\ d\rho \leq C\end{aligned}$$

ya que $(s-n)r + n > 0$, pues $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{p}$ y $q < p^*$.
Por lo tanto $G_s \in L^r(\mathbb{R}^n)$.
Por último veamos el punto 3)
En este caso usaremos el teorema 3.2.2

$$\begin{aligned}\int_{|x|>R} |f_k(x)|^q\ dx =& \int_{|x|>R} |f_k(x)|^{q-p} |f_k(x)|^p\ dx \\ \leq& C \int_{|x|>R} |x|^{-(n-1)\frac{q-p}{p}} \|f_k(x)\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} |f_k(x)|^p\ dx \\ \leq& C R^{-(n-1)\frac{q-p}{p}} \|f_k(x)\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f_k(x)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ \leq& C R^{-(n-1)\frac{q-p}{p}} \|f_k(x)\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\ \leq& C R^{-(n-1)\frac{q-p}{p}} \leq \varepsilon\end{aligned}$$

tomando R suficientemente grande, ya que $-(n-1)\frac{q-p}{p} < 0$. Para finalizar hemos visto que dado $\varepsilon > 0$ existe R (independiente de k) tal que $\int_{|x|>R} |f_k(x)|^q\ dx < \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$ $\square$

Antes de enunciar los teoremas de inmersión con pesos, vamos a considerar el siguiente lema.

Lema 4.0.2. *Sean $0 < s < n/p$, $c > -n$ tal que $(1-sp)c \leq (n-1)ps$,*
y $p_c^* = \frac{p(n+c)}{n-sp}$. Entonces

$$\||x|^{c/p_c^*} f\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función radial en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $f \in H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n)$, entonces existe una función radial $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que $f = G_s * g$,
además si observamos que $G_s(x) \leq C|x|^{s-n}$ tenemos que

$$|G_s * g| \leq CT_{n-s}(|g|)$$

y por lo tanto

$$\||x|^{c/p_c^*} f\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)} = \||x|^{c/p_c^*} G_s * g\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\||x|^{c/p_c^*} T_{n-s}(|g|)\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)}$$

Ahora si consideramos $q = p_c^*$, $\gamma = n - s$, $\alpha = 0$ y $\beta = \frac{-c}{p_c^*}$ estamos en condiciones de aplicar el teorema 2.1.1, ya que
si $\gamma = n - s$ como $0 < s < n/p$, se tiene $0 < \gamma < n$
claramente si $\alpha = 0$ se cumple $\alpha < n/p'$
$\beta = \frac{-c}{p_c^*} < \frac{n}{p_c^*} < \frac{n}{q}$ pues $c > -n$
$\alpha + \beta \geq (n-1)\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)$ pues $c(1-sp) \leq sp(n-1)$
$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{n} - 1$ ya que $p_c^* = \frac{p(n+c)}{n-sp}$

Entonces

$$\||x|^{c/p_c^*} f\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\||x|^{c/p_c^*} T_{n-s}(|g|)\|_{L^{p_c^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

□

Teorema 4.0.5. *Sean $0 < s < n/p$, $1 < p \leq q \leq p_c^* = \frac{p(n+c)}{n-sp}$. Entonces*

$$\||x|^{c/q} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

para toda función radial, donde $-ps < c < \frac{(n-1)(q-p)}{p}$

Observación. *Para describir mejor la región determinada por las inecuaciones* (4.1) *y* (4.2)

$$p \leq q \leq p_c^* = \frac{p(n+c)}{n-sp} \tag{4.1}$$

$$-ps < c < \frac{(n-1)(q-p)}{p} \tag{4.2}$$

podemos observar que la condición

$$c < \frac{(n-1)(q-p)}{p}$$

la podemos reescribir como

$$L(c) := p + c\frac{p}{n-1} < q$$

del mismo modo podemos reescribir a (4.1)

$$V(c) := p \leq q \leq U(c) := p^* + c\frac{p}{n-sp}$$

Entonces si graficamos en el plano los valores admisibles (c, q) *obtenemos una región determinada por las rectas* L,U,V.
Tenemos que distinguir los casos de acuerdo a los valores de sp.

1. *Si* $sp < 1$ *tenemos un* c^* *cota superior de los valores posibles de* c *dado por la intersección de las rectas* L *y* U, *es decir* $L(c^*) = U(c^*)$, *ya que como*

   $$L(c) < q \leq U(c)$$

   tenemos que $L(c) < U(c) \Leftrightarrow p + c\frac{p}{n-1} < p^* + c\frac{p}{n-sp}$

   $$\begin{aligned} p + c\frac{p}{n-1} &< p^* + c\frac{p}{n-sp} \\ c\left(\frac{p}{n-1} - \frac{p}{n-sp}\right) &< p^* - p \\ c\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-sp}\right) &< \frac{n}{n-sp} - 1 \\ c\left(\frac{n-sp-n+1}{(n-1)(n-sp)}\right) &< \frac{n-n+sp}{n-sp} \\ c\left(\frac{1-sp}{(n-1)(n-sp)}\right) &< \frac{sp}{n-sp} \\ c &< \frac{sp(n-1)}{1-sp} \end{aligned}$$

   de donde

   $$c^* = \frac{sp(n-1)}{1-sp}$$

con el cual obtenemos el valor máximo para q

$$q_{max} = L(c^*) = p + \frac{sp^2}{1 - sp}$$

y como además $U(-sp) = V(-sp) = p$ concluimos que la región descripta por (4.1) y (4.2) es el triangulo de vertices $(-sp, p)$, $(p, 0)$ y (c^*, q_{max})

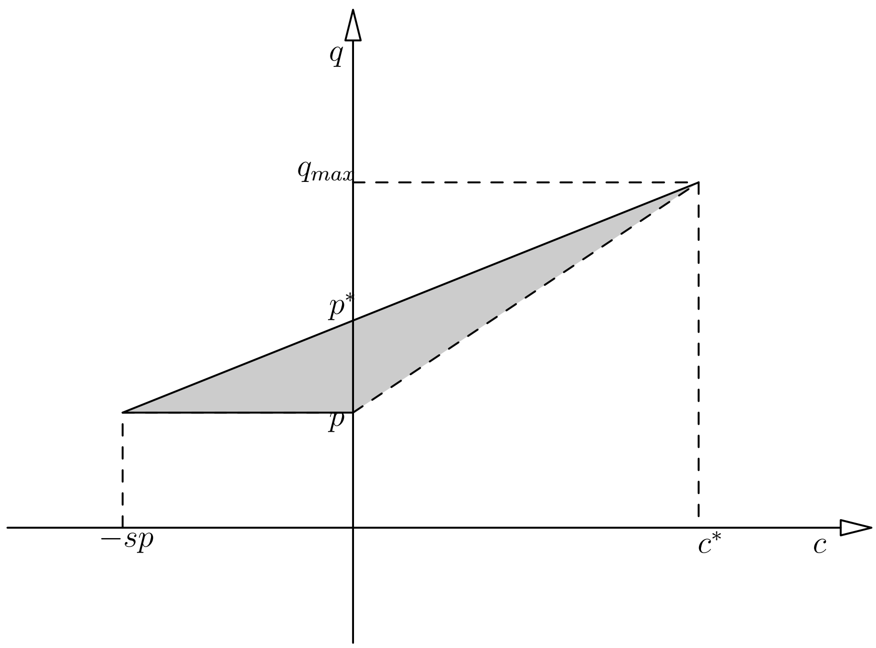


Figura 4.1: R_1, $s < 1/p$

2. *Si $sp = 1$ las rectas U y L son paralelas y para todo c se cumple $L(c) < U(c)$, como además $c > -sp$ y $p < q$, obtenemos la siguiente región*

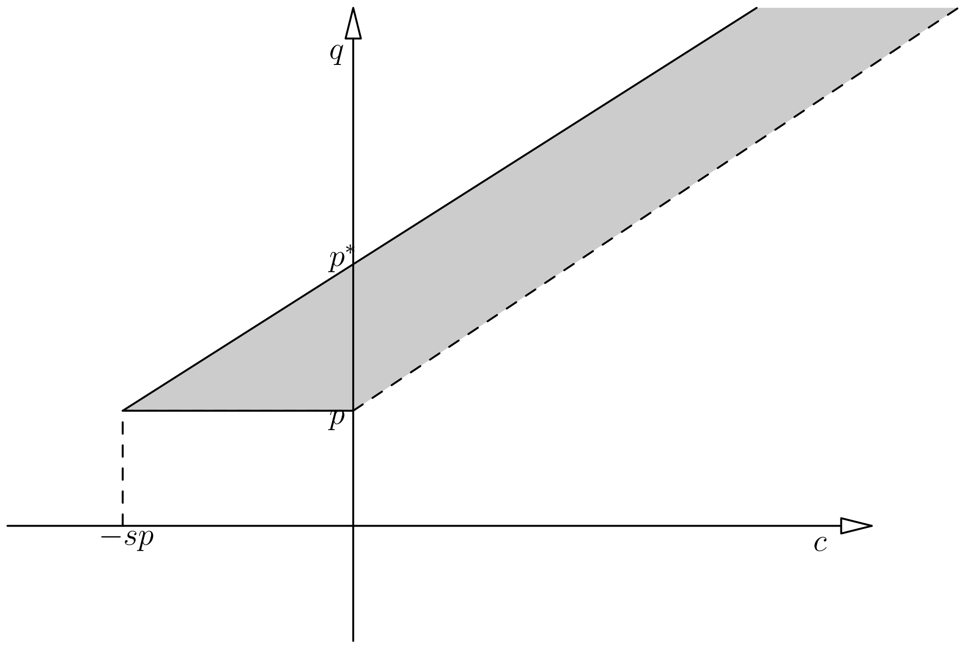


Figura 4.2: R_2, $s = 1/p$

3. *Si $sp > 1$ la condición $L(c) < U(c)$ nos dice*

$$
\begin{aligned}
p + c\frac{p}{n-1} &< p^* + c\frac{p}{n-sp} \\
c\left(\frac{p}{n-1} - \frac{p}{n-sp}\right) &< p^* - p \\
c\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-sp}\right) &< \frac{n}{n-sp} - 1 \\
c\left(\frac{n-sp-n+1}{(n-1)(n-sp)}\right) &< \frac{n-n+sp}{n-sp} \\
c\left(\frac{1-sp}{(n-1)(n-sp)}\right) &< \frac{sp}{n-sp} \\
c &> \frac{sp(n-1)}{1-sp}
\end{aligned}
$$

además $c > -sp$, luego como $-sp > \frac{sp(n-1)}{1-sp}$, solo tenemos una cota inferior para c y por lo tanto obtenemos una región abierta comprendida entre las tres rectas, como podemos observar en el siguiente gráfico.

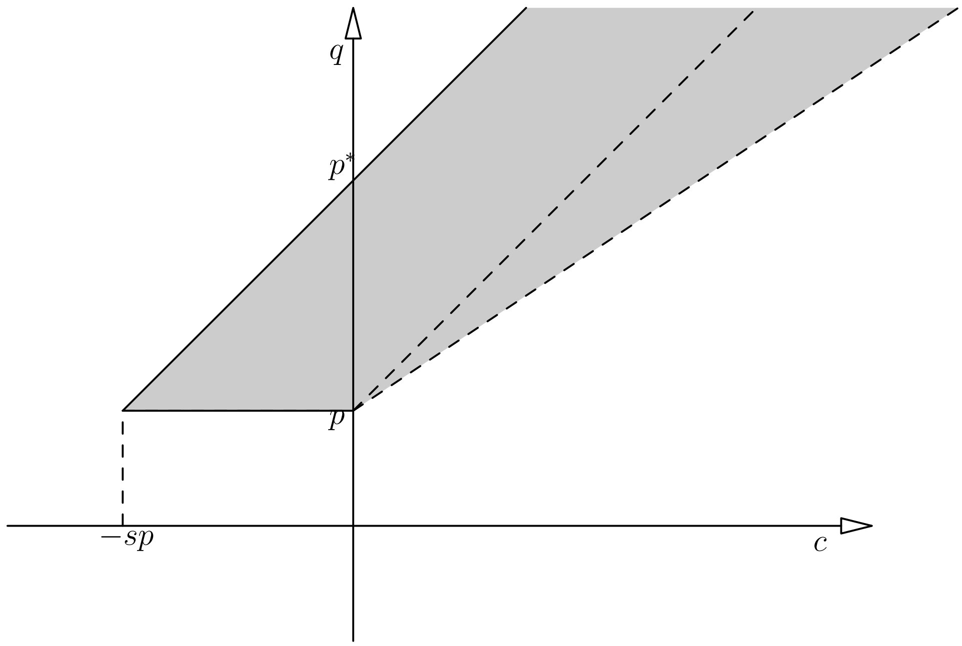


Figura 4.3: R_3, $s > 1/p$

Demostración. (del Teorema 4.0.5) Si consideramos el par $(c, q) \in \mathbb{R}^2$ podemos observar que pertenece a las regiones $R_1 R_2$ o R_3 (ver las figuras 4.1,4.2, 4.3) si $s < 1/p$ $s = 1/p$ y $s > 1/p$ respectivamente

1. Si consideramos $s < 1/p$, $(c, q) \in R_1$, y por lo tanto podemos escribir

$$q = (1 - \nu)p^*_{\tilde{c}} + \nu p$$

   donde $(\tilde{c}, p^*_{\tilde{c}})$ son las coordenadas del punto de intersección entre la recta que une los puntos $(0, p)$ y (c, q) y la recta de ecuación $U(c) = \frac{p(n+c)}{n-sp}$ y $0 < \nu < 1$

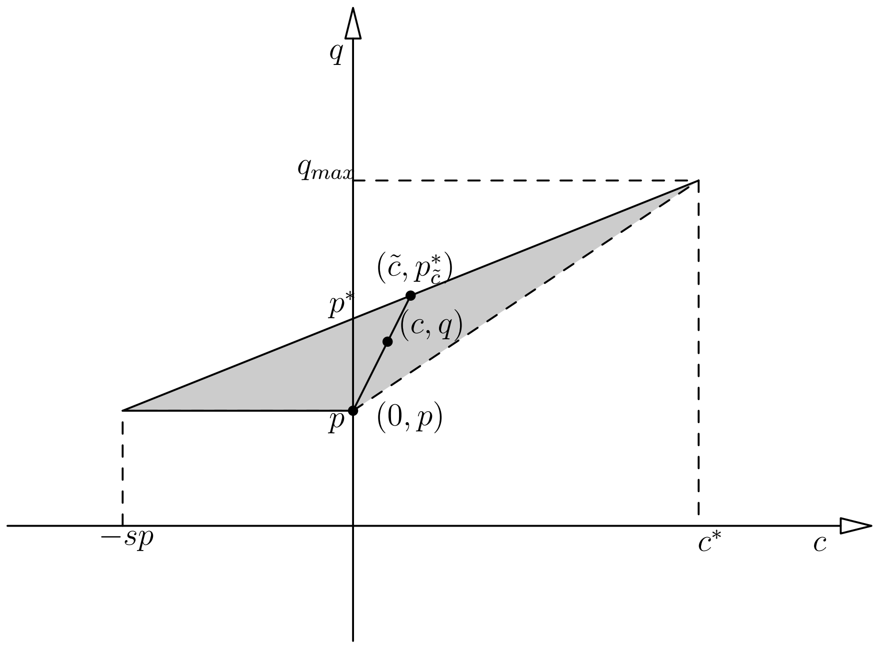


Figura 4.4: R_1, $s < 1/p$

además podemos observar que $\tilde{c} = \frac{c}{1-\nu}$ ya que $\frac{q-p}{c} = \frac{p^*_{\tilde{c}}-p}{\tilde{c}}$ entonces utilizando la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
\||x|^{c/q} f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |f|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |f|^{(1-\nu)p^*_{\tilde{c}}} |f|^{\nu p} \, dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{c/(1-\nu)} |f|^{p^*_{\tilde{c}}} \, dx \right)^{1-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{\nu} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tilde{c}} |f|^{p^*_{\tilde{c}}} \, dx \right)^{1-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \right)^{\nu} \\
&= \||x|^{\tilde{c}/p^*_{\tilde{c}}} f\|^{(1-\nu)p^*_{\tilde{c}}}_{L^{p^*_{\tilde{c}}}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{\nu p}_{L^p(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

luego como $(\tilde{c}, p^*_{\tilde{c}}) \in R_1$ se tiene $0 < s < n/p$, $\tilde{c} > -n$, y

$$\begin{aligned}
&\tilde{c} < (n-1)\frac{p^*_{\tilde{c}} - p}{p} \\
&p\tilde{c} < (n-1)\left(\frac{p(n+\tilde{c})}{n-sp} - p\right) \\
&p\tilde{c} < (n-1)\frac{p(n+\tilde{c}) - p(n-sp)}{n-sp} \\
&(n-sp)p\tilde{c} < (n-1)(p\tilde{c} + sp^2) \\
&np\tilde{c} - sp^2\tilde{c} < np\tilde{c} + nsp^2 - p\tilde{c} - sp^2 \\
&p\tilde{c} - sp^2\tilde{c} < sp^2(n-1) \\
&(1-sp)p\tilde{c} < sp^2(n-1) \\
&(1-sp)\tilde{c} < sp(n-1)
\end{aligned}$$

Estamos en condiciones de aplicar el lema 4.0.2 y por lo tanto,

$$\||x|^{c/q} f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|^{(1-\nu)p^*_{\tilde{c}}}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^{\nu p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} = C\|f\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

Finalmente

$$\||x|^{c/q} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

que es lo que queríamos probar.

Observación. *Para $s < 1/p$ podemos considerar $c \leq \frac{(n-1)(q-p)}{p}$ ya que si tomamos un par (c, q) para el que se cumpla esta la igualdad podremos hallar el punto de intersección $(\tilde{c}, p^*_{\tilde{c}}) \in R_1$ y como*

$$\tilde{c} \leq (n-1)\frac{p^*_{\tilde{c}} - p}{p} \Leftrightarrow (1-sp)\tilde{c} \leq sp(n-1)$$

se cumplen las hipótesis del lema 4.0.2 y la demostración se sigue de la misma manera.

2. Si consideramos $s = 1/p$, $(c, q) \in R_2$. Aquí la demostración es exactamente igual al caso anterior, ya que podemos tomar nuevamente

$$q = (1-\nu)p^*_{\tilde{c}} + \nu p$$

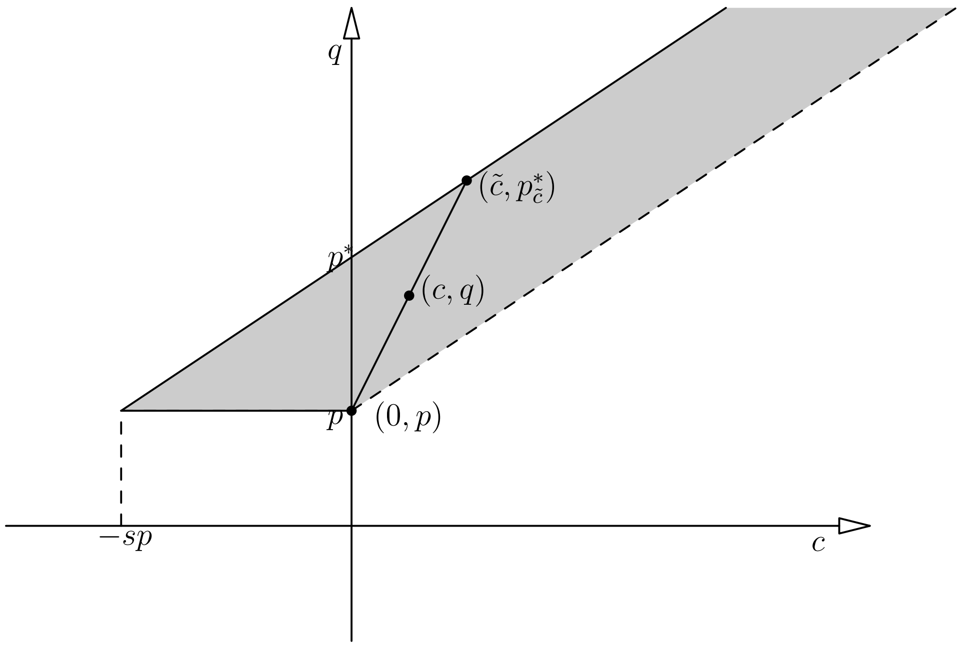


Figura 4.5: R_2, $s = 1/p$

3. Finalmente si consideramos $s > 1/p$, $(c, q) \in R_3$, podemos observar que si c, q cumplen además la condición $q > \frac{p}{n-sp}c + p$, la demostración sigue como en el caso $s < 1/p$

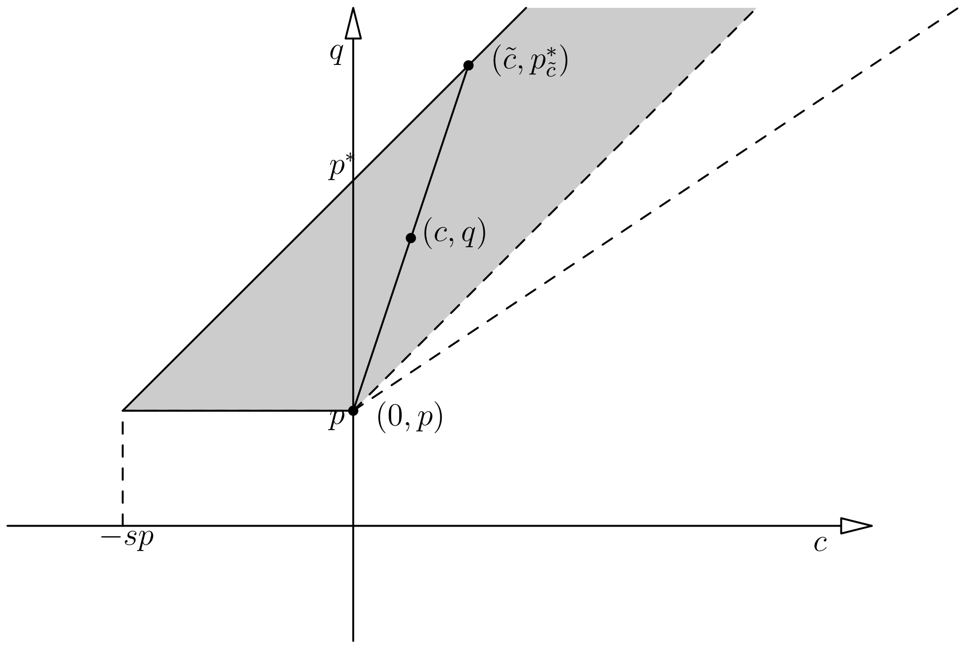


Figura 4.6: R_3, $s > 1/p$

Ahora bien, si cumplen con $q \leq \frac{p}{n-sp}c + p$, tenemos que usar un argumento diferente.
Entonces para $q \leq \frac{p}{n-sp}c + p$, tenemos

$$(n - sp)\frac{q - p}{p} \leq c < (n - 1)\frac{q - p}{p}$$

luego

$$\begin{aligned}
\||x|^{c/q} f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |f|^q \, dx \\
&= \int_{|x|\leq 1} |x|^c |f|^q \, dx + \int_{|x|\geq 1} |x|^c |f|^q \, dx \\
&= (I) + (II)
\end{aligned}$$

en (I) usando la desigualdad de Ni (3.2.1) del capítulo anterior y $c-(n-sp)\frac{q-p}{p} \geq$

0, obtenemos,

$$
\begin{aligned}
(I) = \int_{|x|\leq 1} |x|^c |f|^q \, dx = & \int_{|x|\leq 1} |x|^c |f|^{q-p} |f|^p \, dx \\
\leq & \int_{|x|\leq 1} |x|^c C |x|^{-(n-sp)\frac{q-p}{p}} \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\leq 1} |x|^{c-(n-sp)\frac{q-p}{p}} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\leq 1} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\
\leq & C \|f\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

en (II) usaremos la desigualdad de Strauss (3.2.2) y $c - (n-1)\frac{q-p}{p} < 0$

$$
\begin{aligned}
(II) = \int_{|x|\geq 1} |x|^c |f|^q \, dx = & \int_{|x|\geq 1} |x|^c |f|^{q-p} |f|^p \, dx \\
\leq & \int_{|x|\geq 1} |x|^c C |x|^{-(n-1)\frac{q-p}{p}} \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\geq 1} |x|^{c-(n-1)\frac{q-p}{p}} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{|x|\geq 1} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, dx \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\
\leq & C \|f\|^{q-p}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \|f\|^p_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \\
\leq & C \|f\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\||x|^{c/q} f\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq (I) + (II) \leq C \|f\|^q_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

entonces,

$$\||x|^{c/q} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$$

□

Teorema 4.0.6. *Sean* $1/p < s < n/p$ *y* $1 < p < q < p^* = \frac{p(n+c)}{n-sp}$, *entonces se tiene la inclusión compacta*

$$H^{s,p}_{rad}(\mathbb{R}^n) \subset L^q(\mathbb{R}^n, |x|^c\, dx)$$

donde $-ps < c < \frac{(n-1)(q-p)}{p}$

Demostración. Sea $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones radiales acotadas en $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, queremos ver que existe una subsucesión convergente en $L^q(\mathbb{R}^n, |x|^c\, dx)$.
Si consideramos el par admisible $(c, q) \in \mathbb{R}^2$, como $s > 1/p$, podemos observar que se encuentra en la región abierta

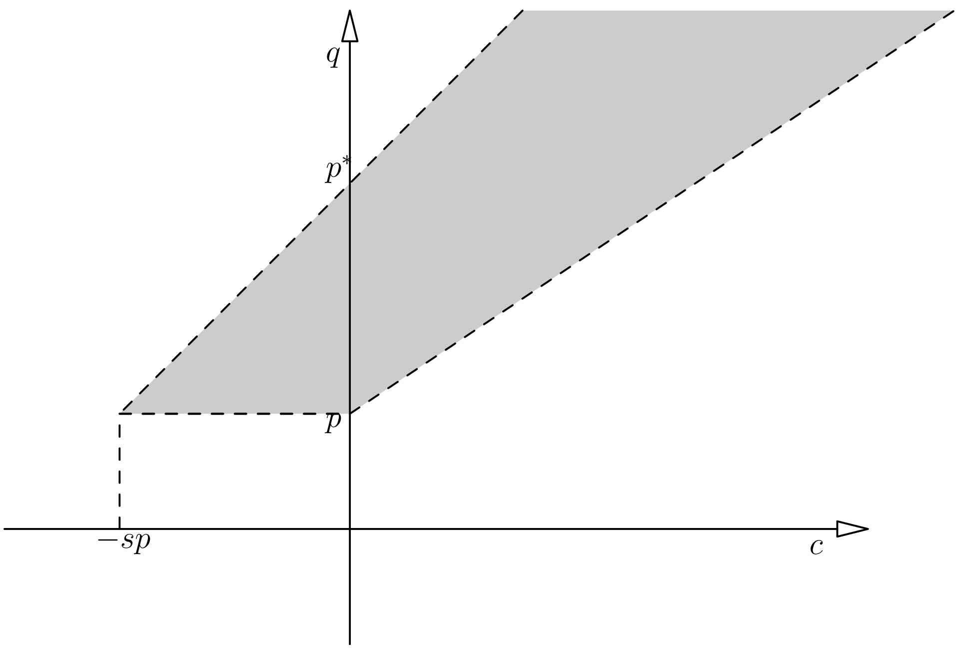
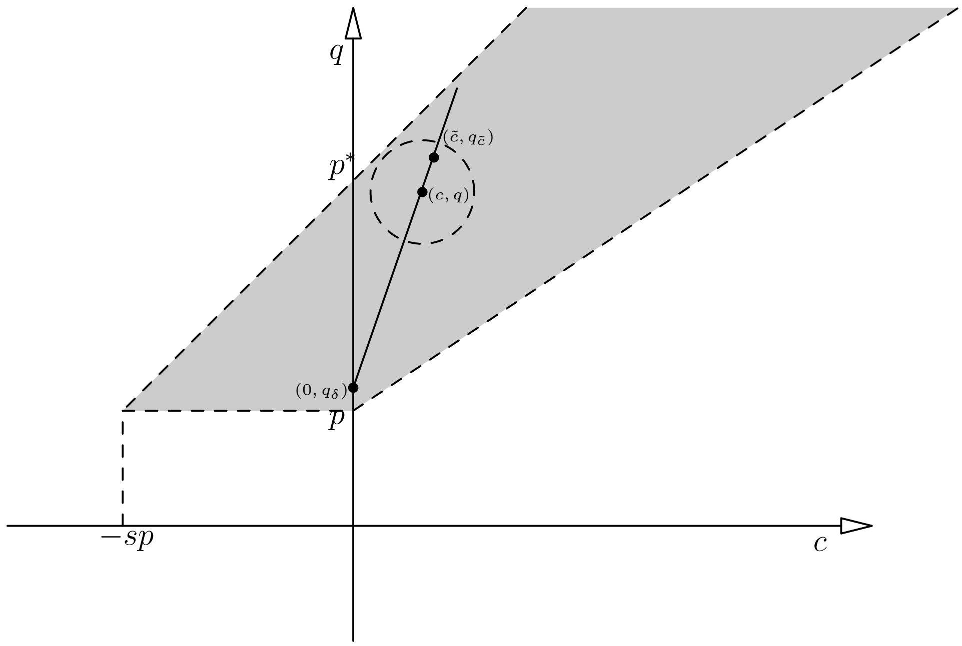


Figura 4.7: Región abierta ($s > 1/p$)

Y por lo tanto podemos tomar los puntos $(0, q_\delta)$ y $(\tilde{c}, \tilde{q})$. Donde $q_\delta = p + \delta$ con $\delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que se cumpla $p < q_\delta < q$, y $(\tilde{c}, \tilde{q})$ el punto sobre la recta que une los puntos $(0, q_\delta)$ y (c, q) perteneciente a la región 4.7. Como se puede observar en la siguiente figura



Luego, como en la demostración del teorema anterior, podemos escribir

$$\begin{aligned} q =& (1-\nu)\tilde{q} + \nu\, q_\delta \qquad \textit{con} \quad 0 < \nu < 1 \\ \tilde{c} =& \frac{c}{1-\nu} \end{aligned}$$

Por el teorema 4.0.4 (aquí es donde necesitamos la restricción $s > 1/p$) sabemos que para q_δ la sucesión $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente en $L^{q_\delta}(\mathbb{R}^n)$. Veamos que esa subsucesión es también convergente en $L^q(\mathbb{R}^n, |x|^c\, dx)$. Para ello vamos a probar que si $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{q_\delta}(\mathbb{R}^n)$ también lo es para $L^q(\mathbb{R}^n, |x|^c\, dx)$.

$$\begin{aligned} \||x|^{c/q}(f_{k_j} - f_{k_i})\|^q_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |f_{k_j} - f_{k_i}|^q\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |x|^c |f_{k_j} - f_{k_i}|^{(1-\nu)\tilde{q}} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{\nu q_\delta}\, dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{c}{1-\nu}} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{\tilde{q}}\, dx\right)^{1-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{q_\delta}\, dx\right)^{\nu} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tilde{c}} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{\tilde{q}}\, dx\right)^{1-\nu} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{q_\delta}\, dx\right)^{\nu} \end{aligned}$$

Aplicando el teorema 4.0.5 al primer factor, tenemos que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\tilde{c}} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{\tilde{q}}\, dx\right)^{1-\nu} \leq C \|f_{k_j} - f_{k_i}\|^{1-\nu}_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C$$

Y como además $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $L^{q\delta}(\mathbb{R}^n)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $j(\varepsilon)$ tal que si $i, j > j(\varepsilon)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_{k_j} - f_{k_i}|^{q\delta}\, dx\right)^{\nu} < \varepsilon$$

Finalmente

$$\||x|^{c/q}(f_{k_j} - f_{k_i})\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$$

que es lo que queríamos probar.

$\square$

Apéndice

Lema 4.0.3. *Sean $t > 0$, $\eta, \xi \in S^{n-1}$, entonces*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} \leq C|1-t|^{-1}$$

Demostración. Si tomamos $t < 1$, $t\xi \in S^{n-1}$ y

$$\frac{1-|t\xi|^2}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} = 1$$

ya que, como podemos ver en [6], $u(t\xi) = 1$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 \quad \text{en} \quad S^{n-1} \\ u &= 1 \quad \text{en} \quad \partial S^{n-1} \end{cases}$$

entonces

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} \leq C|1-t^2|^{-1} \leq C|1-t|^{-1}$$

Ahora para $t > 1$, tomamos $\tilde{t} = \frac{1}{t} < 1$, entonces

$$\frac{1-|\tilde{t}\xi|^2}{\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|\tilde{t}\xi - \eta|^n} = 1$$

luego si obsevamos que

$$|\tilde{t}\xi - \eta|^n = |1 - 2\tilde{t}\cos(\xi,\eta) + \tilde{t}^2|^{n/2}$$

donde $\cos(\xi,\eta)$ es el producto interno entre ξ y η ,tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|\tilde{t}\xi - \eta|^n} &= \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|1 - 2\tilde{t}\cos(\xi,\eta) + \tilde{t}^2|^{n/2}} \\
&= \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|\frac{1}{t^2}|^{n/2}|1 - 2t\cos(\xi,\eta) + t^2|^{n/2}} \\
&= t^n \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|1 - 2t\cos(\xi,\eta) + t^2|^{n/2}} \\
&= t^n \int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n}
\end{aligned}$$

entonces

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} = Ct^{-n}t^2|1-t^2|^{-1} = Ct^{-n+2}|1-t|^{-1}|1+t|^{-1} \leq C|1-t|^{-1}$$

Finalmente para todo $t > 0$

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} \leq C|1-t|^{-1}$$

□

Teorema 4.0.7. *Sean $t > 0$, $\eta, \xi \in S^{n-1}$, entonces*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^\gamma} \leq C|1-t|^{-\gamma/n}$$

Demostración. Usando la desigualdad de Jensen con $\varphi(x) = x^{n/\gamma}$ y el lema anterior tenemos

$$\left(\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^\gamma}\right)^{n/\gamma} \leq C\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^n} \leq C|1-t|^{-1}$$

por lo tanto

$$\int_{S^{n-1}} \frac{d\eta}{|t\xi - \eta|^\gamma} \leq C|1-t|^{-\gamma/n}$$

□

Bibliografía

[1] W. Beckner *Pitt's inequality with sharp convolution estimates*, American Mathematical Society,Volume 136, May 2008.

[2] P. D'Ancona and R. Luca *Stein-Weiss and Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities with angular integrability.* J. Math. Anal. Appl. 388 (2012),1061–1079. arXiv:1105.5930

[3] P. L. De Nápoli, I. Drelichman, *Elementary proofs of embedding theorems for potencial spaces of radial functions*. Preprint. arXiv:1404.7468 [math.CA]

[4] P. L. De Nápoli, I. Drelichman, R. G. Durán *On weighted inequalities for fractional integrals of radial functions*. Illinois Journal of Mathematics. Volumen 55, Nro. 2 (2011), 575–587.

[5] J. Duoandikoetxea *Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), DOI 10.1007/s10231-011-0237-7, (to appear in print).

[6] L. C. Evans,*Partial diferential equations*, Graduate Studies in mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[7] L. Grafakos, *Classical and Modern Fourier Analysis.* (2004) Prentice Hall.

[8] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, *Some Properties of Fractional Integrals*, I, Math. Z.,27 (1928) 565–606

[9] G.H.Hardy, J.E.Littlewood, G. Polya, *Inequlities* (Cambridge, 1934)

[10] Hedberg, *On certain convolution inequalities* (AMS 1970)

[11] B. Muckenhouptoa, R. Wheeden, *Weighted Norm Inequalities for Fractional Integrals.* American Mathematical Society, Vol. 192, 1974

[12] W. M. Ni, *A nonlinear Dirichlet problem on the unit ball and its applications.* Indiana Univ. Math. J. 31, (1982) no. 6, pp. 801–807.

[13] Pierre-Louis, Lions, *Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev* Funct. Anal. 49 (1982), no. 3, 315–334. MR 683027 (84k:46027)

[14] M.Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, (Acta Mathematica 1948)

[15] Rubin, B.S. *One-dimensional representation, inversion and certain properties of Riesz potentials of radial functions* (Russian), Mat. Zametki 34 (1983), no. 4, 521–533. English translation: Math. Notes 34 (1983), no. 3–4, 751–757.

[16] E. Sawyer, R. L. Wheeden, *Weighted Inequalities for Fractional Integrals on Euclidean and Homogeneous Spaces*, Amer. J Math.114 (1992), pp. 813–874.

[17] E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Univ. Press, 1970.

[18] E. M. Stein, G. Weiss, *Fractional integrals on n-dimensional Euclidean space*, J. Math. Mech. 7 (1958), 503–514.

[19] W. A. Strauss, *Existence of Solitary Waves in Higher Dimensions*. Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149–162.

[20] R.L. Wheeden,A. Zygmund, *Measure and integral. An introduction to real analysis* (M.Dekker,1977)