UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Aproximación por Elementos Finitos y Regularidad para el $p-$Laplaciano en $\mathbb{R}^2$

Carolina Moreno

Directora: Sandra Martínez

Fecha de Presentación: 8 de Mayo de 2014

Agradecimientos

Primero agradecerla a Sandra por las ganas, la paciencia y la dedicación durante todo el trabajo de la tesis. Fuiste una muy buena profesora y una gran directora. Gracias!

Al jurado por tomarse el trabajo de leer la tesis.

A mi hermana y ahora colega Vero, por ayudarme y aconsejarme durante toda la carrera. Ya no te molesto más!

A mis papás y hermanos por acompañarme a lo largo de toda la carrera, por la confianza y la paciencia.

A mis compañeros de la facu, en especial a Andrés, Pau, Anto, Gise, Estefi por hacer que cada cuatrimestre sea más llevadero y más divertido.

A mis amigas de siempre, por acompañarme, alentarme y compartir conmigo la alegría de un parcial aprobado o una materia terminada.

A mis compañeros de trabajo, en especial a Gus y a Pau, por alentarme día a día en los últimos años de carrera. Y a vos Gus, gracias por todos los días de estudio y los permisos para irme antes y así poder terminar la tesis a tiempo.

Índice general

Introducción

En este trabajo se estudian distintos problemas relacionados con las soluciones de la ecuación

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.0.1}$$

donde $\Delta_p u := \text{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ se denomina el $p-$laplaciano. Dicho operador es no lineal y generaliza el Laplaciano (caso $p = 2$).

Este operador tiene su interés por ejemplo para el modelado de fluídos no Newtonianos.

En esta tesis vamos a estudiar varios problemas relacionados con este operador para el caso en que la dimensión del espacio es dos.

Por un lado estamos interesados en estudiar el método de elementos finitos para aproximar las soluciones débiles de (0.0.1). Dicho método es uno de los más utilizados en problemas provenientes de diferentes disciplinas que involucren ecuaciones en derivadas parciales. Uno de los puntos de interés al hacer aproximaciones numéricas es obtener cotas del error que dependan del tamaño de la malla. Es por ello que uno de los objetivos de la tesis va a ser obtener cotas del error para este problema. Para eso nos basaremos en los resultados de [**2**].

Veremos que las cotas del error dependen fuertemente de la regularidad de las soluciones. Por lo tanto, motivados por esta aplicación, en la segunda parte de la tesis probaremos que bajo ciertas condiciones sobre los datos las soluciones débiles de (0.0.1) están en $H^2(\Omega)$. Para la demostración de este resultado nos basaremos en los resultados de [**11**].

Observamos que otra dificultad que surge, al querer implementar numéricamente el problema es encontrar las soluciones del problema discreto no lineal. Para resolver esta dificultad describiremos y utilizaremos el método de descomposición coordinada propuesto por [**8**] para hallar las soluciones del problema discreto.

A continuación daremos una breve descripción de los resultados de la tesis.

En el Capítulo 1 se recuerdan resultados esenciales de espacios de Sobolev y enunciamos algunas desigualdades clásicas necesarias para la tesis. Además probamos un teorema de existencia de las soluciones débiles de (0.0.1).

Mas precisamente la formulación débil de (0.0.1) es:

$$
\textbf{(P)} \qquad \begin{aligned} &\text{Encontrar } u \in W^{1,p}_g(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega): \ v = g \quad \text{en } \partial\Omega\} \text{ tal que} \\ &\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in W^{1,p}_0(\Omega). \end{aligned}
$$

Veremos que bajo ciertas condiciones sobre f y g el problema tiene una única solución y que además encontrar la solución del problema (**P**) es equivalente a resolver el siguiente problema:

$$
\textbf{(Q)} \qquad \text{Encontrar } u \in W^{1,p}_g(\Omega) \text{ tal que } J_\Omega(u) \ \leqslant J_\Omega(v) \quad \forall v \in W^{1,p}_g(\Omega)
$$

donde

$$
J_\Omega(v) = \frac{1}{p} \int_\Omega |\nabla v|^p \ dx - \int f v \ dx
$$

El resultado que probaremos es el siguiente.

Teorema 0.0.2. *Dadas $g \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ con $q > (p^*)'$ si $p < N$ y $q > 1$ si $p \geqslant N$. Entonces el problema* (**Q**) *tiene única solución. Además, tenemos que*

- *u es solución de* (**Q**) *si y sólo si es solución de* (**P**)
- *existe C solo depende de n y Ω tal que*

$$
\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C(\| f \|^2_{L^q(\Omega)} + \| \nabla g \|^2_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{W^{1,p}(\Omega)}); \tag{0.0.3}
$$

Además enunciamos algunos resultados clásicos de regularidad de soluciones de ecuaciones uniformemente elípticas.

Finalmente el capítulo está dedicado a resumir y comentar la teoría básica de elementos finitos discutiendo los resultados clásicos de aproximación y acotación del operador interpolador.

El problema de elementos finitos es el siguiente.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convexo y Ω^h una aproximación poligonal de Ω definida por $\overline{\Omega^h} \equiv \cup_{\tau \in T^h} \overline{\tau}$ donde T^h es una partición de Ω^h en una cantidad finita triángulos τ abiertos regulares disjuntos, con el máximo de los diámetros acotado por h. Asumimos que T^h es nodegenerada, esto es existe $\gamma_0 > 0$ tal que

$$
\max_{\kappa \in T^h} \frac{h_\kappa}{\rho_\kappa} \leq \gamma_0
$$

donde $h_\kappa = \text{diam}(\kappa)$ y $\rho_\kappa = \sup\{\text{diam} S \colon S \subset \kappa \text{ una bola}\}$.

Además para dos triángulos distintos cualquiera, sus clausuras son disjuntas o tienen un vértice o lado en común. Sea $\{P_j\}_{j=1}^J$ los vértices asociados con la trangulación T^h, donde P_j tiene coordenadas (x_j, y_j). Asumimos que $P_j \in \partial\Omega^h$ implica $P_j \in \partial\Omega$, y $\Omega^h \subseteq \Omega$.

Definimos el espacio de dimensión finita S^h asociado a T^h como:

$$
S^h = \{\chi \in C(\overline{\Omega^h}) : \ \text{lineal } \forall \tau \in T^h\} \subset W^{1,p}(\Omega^h)
$$

Se define $\pi_h : C(\overline{\Omega^h}) \longrightarrow S^h$ el operador interpolador tal que para toda $v \in C(\overline{\Omega^h})$, el interpolador $\pi_h v \in S^h$ satisface $\pi_h v(P_j) = v(P_j), j = 1, \ldots, J$.

La aproximación por elementos finitos del problema $(\mathbf{P})$ que vamos a considerar es:

$$(\mathbf{P}^h) \qquad \begin{array}{l} \text{Encontrar } u^h \in S_g^h \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_{\Omega^h} |\nabla u^h|^{p-2} \, \nabla u^h \nabla v^h \; dx = \int_{\Omega^h} f v^h \; dx \quad \forall v^h \in S_0^h \end{array}$$

donde

$$S_0^h = \{\chi \in S^h : \; \chi = 0 \text{ en } \partial\Omega^h\}$$

y

$$S_g^h = \{\chi \in S^h : \; \chi = g^h \text{ en } \partial\Omega^h\}$$

donde $g^h \in S^h$ se elige de manera tal de que aproxime el dato g. Si $u \in C(\overline{\Omega})$ se toma $g^h = \pi_h u$. Esta condición se cumple por ejemplo si $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ya que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

En el Capítulo 2 se muestran diversas cotas del error del método de elementos finitos, observando como el orden que se obtiene depende de la regularidad que se asume sobre las soluciones. Los resultados están divididos en los casos $p < 2$ y $p \geq 2$. Mas precisamente, se prueba

Teorema 0.0.4. *Sean $p \in (1, 2]$, u la solución del problema $(\mathbf{P})$, y u^h la solución de $(\mathbf{P}^h)$. Si $u \in W^{2,p}(\Omega)$,*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C h^{p/2}. \tag{0.0.5}$$

Asumiendo mas regularidad sobre las soluciones se obtiene orden optimo.

Teorema 0.0.6. *Sean $p \in (1, 2]$, u la solución del problema $(\mathbf{P})$ y u^h la solución de $(\mathbf{P}^h)$, si $u \in W^{3,1}\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha > 0$, entonces*

$$\| u - u^h \|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C(h^2 + h^{p(1+\alpha)}), \tag{0.0.7}$$

y además, si $u \in W^{3,1}(\Omega) \cap C^{2,(2-p)/p}(\overline{\Omega})$ entonces

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C h. \tag{0.0.8}$$

Se verá, mediante un ejemplo simple que en el caso $p > 2$, aunque los datos sean muy regulares, en general no se tiene que las soluciones están en $W^{2,p}(\Omega)$, por lo tanto es mas realista probar el siguiente resultado

Teorema 0.0.9. *Sean u la solución de $(\mathbf{P})$, $s \in [1, 2]$, y u^h solución de $(\mathbf{P}^h)$, si $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$ entonces*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C h^{s/p}. \tag{0.0.10}$$

La desventaja de esta cota es que el orden degenera cuando $p \to \infty$. Por ello se prueba el siguiente teorema.

Teorema 0.0.11. *Sean $p > 2$, y $u \in W^{\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$, $s \in [1, \infty]$. Si $|f|^{-\gamma} \in L^1(\Omega)$ para algún $\gamma \in (0, \infty)$ o si $|f|^{-1} \in L^{\infty}(\Omega)$ (en ese caso notamos $\gamma = \infty$), entonces tenemos para $q \in [1, p)$ que*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant \begin{cases} Ch^{2/t} & si\ s \geqslant 2 \\ Ch^{s/t} & si\ s \in [1, 2) \end{cases} \tag{0.0.12}$$

donde

$$t = \begin{cases} max\{2, q[(s+\gamma)p + (p-2)\gamma s]/[(s+\gamma)q + (p-2)\gamma s]\} & si\ \gamma < \infty, \\ max\{2, q\frac{p+s(p-2)}{q+s(p-2)}\} & si\ \gamma = \infty. \end{cases} \tag{0.0.13}$$

Observar que ahora si bien el orden sigue dependiendo de la regularidad, ya no degenera cuando $p \to \infty$.

En el Capítulo 3 se muestra que las condiciones del Teorema 0.0.4 se cumplen en el caso en que $1 < p \leq 2$, tanto para dominios regulares como para el caso en que Ω es convexo y el dato de borde es cero. Mas precisamente, se prueba el siguiente resultado

Teorema 0.0.14. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto con $\partial\Omega \in C^2$. Sean $g \in H^2(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ ($q > 2$), $1 < p \leq 2$ y u la única soluación débil de* (1.2.1). *Entonces $u \in H^2(\Omega)$.*

Teorema 0.0.15. *Sean Ω un conjunto abierto acotado convexo en $\mathbb{R}^2$, $g = 0$, $f \in L^q(\Omega)$ ($q > 2$) y u la única solución de* (**P**). *Entonces $u \in H^2(\Omega)$ si $1 < p \leqslant 2$.*

Como corolario a estos resultados de regularidad tenemos el siguiente teorema

Teorema 0.0.16. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convexo con $\partial\Omega \in C^2$ y $1 < p \leq 2$, $f \in L^q(\Omega)$ con $q > 2$, $g \in H^2(\Omega)$, u y u^h las únicas soluciones de* (**P**) *y* ($\mathbf{P}^h$) *respectivamente. Entonces*

$$\|u - u^h\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq Ch^{p/2},$$

donde C depende de p, $\|f\|_{L^q(\Omega)}$ y $\|g\|_{H^2(\Omega)}$.

Finalmente en el Capítulo 4 daremos algunos ejemplos numéricos que validan y mejoran algunos de los resultados del Capítulo 2. Describiremos el método de descomposición coordinada propuesto por [**8**], que nos permite aproximar las soluciones del problema de elementos finitos no lineal. Con los ejemplos numéricos veremos como estas aproximaciones no afectan el orden. Es más veremos que aunque las souciones tienen, en algunos casos, condiciones mínimas de regularidad, el orden resulta ser mejor que el esperado por los resultados teóricos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Espacios de Sobolev

En esta sección definiremos los espacios de Sobolev y enunciaremos algunos resultados que vamos a usar en los siguientes capítulos. A lo largo de esta sección Ω es un abierto en $I\!R^N$

DEFINICIÓN 1.1.1. *Para $1 \leqslant p < \infty$ definimos $W^{k,p}(\Omega)$ como el espacio de todas las funciones $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tales que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para $|\alpha| \leqslant k$, donde $D^\alpha u$ son las derivadas débiles de orden α*

Así mismo definimos la norma en $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

y la seminorma en $W^{k,p}(\Omega)$ como

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha| = k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

OBSERVACIÓN 1.1.2. *Notaremos $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$*

DEFINICIÓN 1.1.3. *Notaremos $W_0^{k,p}(\Omega)$ a la clausura de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, donde $C_0^\infty(\Omega)$ es el espacio de funciones infinitamente diferenciables de soporte compacto en Ω.*

TEOREMA 1.1.4 (Inmersión de Sobolev). *Sea $\Omega \subset I\!R^N$ $(N \geqslant 2)$ un dominio Lipschitz luego $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para*

1. *$p < N$ y $1 \leqslant q \leqslant p^*$ donde $p^* = \frac{pN}{N-p}$*
2. *$p = N$ y $q \in [1, \infty)$*
3. *$p > N$ y $q \in [1, \infty]$.*

donde la constante de continuidad depende de la constante de Lipschitz de Ω.

DEMOSTRACIÓN. Ver ecuación (3.1.3) en [**4**]. □

TEOREMA 1.1.5. *Sea Ω un dominio Lipschitz, $1 \leqslant p < \infty$,*

1. *Si $kp > N$ entonces existe $0 < \alpha \leq 1$ tal que $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$,*
2. *$W^{N,1}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.*

Demostración. Para la demostración de 1. ver Teorema 5.7.8 en [**13**]. Para ver la demostración de 2. ver Sección 5.12.1 (ii) en [**13**]. $\square$

Teorema 1.1.6 (Compacidad). *La inmersión*

1. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *es compacta si* $1 \leqslant q < p^*$, $p < N$,
2. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ *es compacta si* $1 \leqslant q < \infty$, $p = N$,
3. $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *es compacta si* $p > N$.

Demostración. Para la demostración ver el Teorema (3.1.4) en [**4**]. $\square$

Teorema 1.1.7 (Desigualdad de traza). *Sea* Ω *un dominio Lipschitz entonces* $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$ *es compacta si*

1. *si* $N < p$ *y* $q < p_* = \frac{p(N-1)}{N-p}$
2. *si* $N \geqslant p$ *y* $q < \infty$.

Demostración. Ver Teoremas 6.4.1, 6.4.2 y 6.5.1 en [**13**]. $\square$

Teorema 1.1.8 (Desigualdad de Poincaré). *Sea* Ω *un subconjunto de* $I\!R^N$ *abierto acotado. Sea* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *para un* $1 \leqslant p < N$, *tenemos la siguiente estimación*

$$\| u \|_{L^q(\Omega)} \leqslant C \| Du \|_{L^p(\Omega)}$$

para $q \in [1, p^*]$. *La constante* C *depende de* p, q, N *y* Ω.

Demostración. Para la demostración ver Teorema 3 en el capítulo 5.6 de [**6**]. $\square$

Teorema 1.1.9. *Sea* Ω *un dominio Lipschitz, entonces*

$$H_0^1(\Omega) \equiv \{v \in H^1(\Omega) : \exists\ \tilde{v} \in H^1(I\!R^N), \tilde{v} \equiv v \ \text{ en } \Omega \text{ y } \ \tilde{v} = 0 \text{ en } I\!R^N \setminus \Omega\}$$

Demostración. Para la demostración ver Corolario 1.4.4.5 en [**9**]. $\square$

1.2. Soluciones del $p-$laplaciano

En esta sección probaremos la existencia de soluciones débiles del $p-$laplaciano en dimensión dos. Más precisamente dado Ω un dominio en $\mathbb{R}^2$ y $p \in (1, \infty)$, el problema es hallar u tal que

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{en } \Omega \\ \quad\ \ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.2.1}$$

donde $\Delta_p u := \nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$.

La formulación débil del problema es

$$\textbf{(P)} \qquad \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in W^{1,p}_g(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) : \ v = g \quad \text{en } \partial\Omega\} \text{ tal que} \\ \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in W^{1,p}_0(\Omega) \end{array}$$

Veremos que bajo ciertas condiciones sobre f y g el problema tiene única solución y que además encontrar la solución del problema $(\mathbf{P})$ es equivalente a resolver el siguiente problema:

$$(\mathbf{Q}) \qquad \text{Encontrar } u \in W^{1,p}_g(\Omega) \text{ tal que } J_\Omega(u) \ \leqslant J_\Omega(v) \quad \forall v \in W^{1,p}_g(\Omega)$$

donde

$$J_\Omega(v) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \ dx - \int fv \ dx$$

Finalemente probaremos el resultado de existencia, y daremos una estimación de la solución en término de los datos.

Teorema 1.2.2. *Dadas $g \in W^{1,p}(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ con $q > (p^*)'$ si $p < N$ y $q > 1$ si $p \geqslant N$. Entonces el problema $(\mathbf{Q})$ tiene única solución. Además, tenemos que*

- *u es solución de $(\mathbf{Q})$ si y sólo si es solución de $(\mathbf{P})$*
- *y existe C solo depende de n y Ω tal que*

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant C(\| f \|^2_{L^q(\Omega)} + \| \nabla g \|^2_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{W^{1,p}(\Omega)}). \tag{1.2.3}$$

Demostración. Vamos a probarlo en varios pasos. Para facilitar la escritura pondremos J en vez de J_Ω.

1. Veamos que J es estríctamente convexa:

$$J\Big((1-t)u + tv\Big) = \frac{1}{p} \| (1-t)\nabla u + t\nabla v \|^p_{L^p(\Omega)} - \int_\Omega f((1-t)u + tv)\, dx$$
$$< \frac{1}{p}\Big[(1-t) \| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} + t \| \nabla v \|^p_{L^p(\Omega)}\Big] - \Big[(1-t)\int_\Omega fu\, dx \ + \ t\int_\Omega fv\, dx\Big]$$
$$= (1-t)J(u) + tJ(v)$$

   en esta desigualdad usamos la convexidad de $|x|^p$.

2. Ahora veamos que J es débilmente semicontinuo, osea queremos ver que $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega) \ \Rightarrow J(u) \leqslant \liminf J(u_k)$

   Sea $u_k \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ entonces $\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant \liminf \| u_k \|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

   Por Teorema 1.1.6 tenemos que $u_k \to u$ en $L^{q'}(\Omega)$ (pues $q' < p^*$ si $p < 2$ o $q' < \infty$ si $p \geqslant 2$), entonces

$$\int_\Omega fu_k\, dx \to \int_\Omega fu\, dx$$

   y

$$\| u_k \|_{L^p(\Omega)} \to \| u \|_{L^p(\Omega)} \ .$$

Luego

$$\frac{\| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} + \| u \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} - < f, u > = \frac{\| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\text{lím} \| u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} - \text{lím} < f, u_k >$$
$$\leqslant \text{lím inf} \left(\frac{\| \nabla u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\| u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} \right)$$
$$- \text{lím} < f, u_k > .$$

Por lo tanto,

$$\frac{\| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} - < f, u > \leqslant \frac{\text{lím inf} \| \nabla u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} + \frac{\text{lím} \| u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p}$$
$$- \text{lím inf} < f, u_k > - \frac{\| u \|^p_{L^p(\Omega)}}{p}.$$

Usando en la desigualdad anterior que $\dfrac{\text{lím} \| u_k \|^p_{L^p(\Omega)}}{p} = \dfrac{\| u \|^p_{L^p(\Omega)}}{p}$ llegamos a que

$$J(u) \leqslant \text{lím inf} J(u_k).$$

3. En este paso queremos ver que existe un mínimo. Sea $w \in W^{1,p}(\Omega)$ luego usando Holder, la inmersión de Sobolev y Poincaré tenemos que,

$$J(w) = \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - < f, w > \geqslant \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| w \|_{L^{q'}(\Omega)}$$
$$\geqslant \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| w \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$
$$\geqslant \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| g \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$
$$- C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla w - \nabla g \|_{L^p(\Omega)}$$
$$\geqslant \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| g \|_{W^{1,p}(\Omega)}$$
$$- C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla w \|_{L^p(\Omega)} - C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)}$$

Luego,

$$J(w) \geqslant \frac{1}{p} \| \nabla w \|^p_{L^p(\Omega)} - C_1 - C_2 \| \nabla w \|_{L^p(\Omega)}$$

. Es fácil ver que $\frac{1}{p}|t|^p - C|t| - C$ está acotada inferiormente, entonces J está acotada inferiormente. Por lo tanto existe una sucesión $u_k \in W^{1,p}_g(\Omega)$ tal que $J(u_k) \to m$ y entonces

$$J(u_k) = \frac{1}{p} \| \nabla u_k \|^p_{L^p(\Omega)} - < f, u_k > \leqslant C.$$

Usando nuevamente las desigualdades de Holder, Sobolev y Poincaré tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \parallel \nabla u_k \parallel^p_{L^p(\Omega)} &\leqslant C + \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel u_k \parallel_{L^{q'}(\Omega)} \leqslant C + \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel u_k \parallel_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\leqslant C + \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel g \parallel_{W^{1,p}(\Omega)} + \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel \nabla u_k \parallel_{L^p(\Omega)} \\ &+ \parallel f \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel \nabla g \parallel_{L^p(\Omega)} .\end{aligned}$$

Entonces,

$$\parallel \nabla u_k \parallel^p_{L^p(\Omega)} \leqslant A + B \parallel \nabla u_k \parallel_{L^p(\Omega)},$$

lo que implica que $\frac{1}{p} \parallel \nabla u_k \parallel_{L^p(\Omega)}$ está acotado y

$$\parallel u_k \parallel_{L^p(\Omega)} \leqslant \parallel g \parallel_{L^p(\Omega)} + \parallel u_k - g \parallel_{L^p(\Omega)} \leqslant C.$$

Por lo tanto existe una subsucesión $u_{k_j} \rightharpoonup u$ en $W^{1,p}(\Omega)$ y usando la débil semicontinuidad de J tenemos que

$$J(u) \leqslant \liminf J(u_k) = m$$

y como m es el ínfimo entonces $J(u) = m$.

4. Para ver que existe un único mínimo vamos a usar que J es estríctamente convexa, supongamos existen u y v tal que $J(u) = J(v) = m$ entonces

$$J(\frac{u+v}{2}) < \frac{J(u) + J(v)}{2} = m$$

lo que es un absurdo pues m es el mínimo.

5. Probaremos que J es diferenciable.

Definimos $F(t) := \int_\Omega \frac{1}{p} |\nabla u + tv|^p \, dx - \int_\Omega f(u + tv) \, dx$ para $v \in W^{1,p}_0(\Omega)$, vamos a querer ver que F es diferenciable en 0.

$$\begin{aligned}\frac{F(t) - F(0)}{t} &= \int_\Omega \frac{|\nabla u + tv|^p - |\nabla u|^p}{p} \, \frac{1}{t} \, dx \, ds - \int_\Omega fv \, dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{t} \int_0^t \frac{d}{ds} \left| \nabla u + \frac{s \nabla v}{p} \right|^p \, ds \, dx - \int_\Omega fv \, dx \\ &= \int_\Omega \frac{1}{t} \int_0^t \left| \nabla u + s\nabla v \right|^{p-2} \, (\nabla u + s\nabla v) \cdot \nabla v \, ds \, dx - \int_\Omega fv \, dx\end{aligned}$$

Llamamos

$$\varphi(t) := \frac{1}{t} \int_0^t \left| \nabla u + s\nabla v \right|^{p-2} \, (\nabla u + s\nabla v) \cdot \nabla v \, ds,$$

tenemos que

$$\left| |\nabla u + s\nabla v|^{p-2} \, (\nabla u + s\nabla v) \cdot \nabla v \right| \leqslant \frac{|\nabla u + s\nabla v|^p}{p} + \frac{|\nabla v|^p}{p} \leqslant C \Big(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p \Big)$$

entonces

$$|\varphi(t)| \leqslant C(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \in L^1(\Omega)$$

y además

$$\lim_{t\to 0}\varphi(t) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v.$$

Luego, pasando el límite en t llegamos a que

$$J'(u)(v) := \lim_{t\to 0}\frac{F(t)-F(0)}{t} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int fv\,dx$$

6. Probaremos que u es mínimo de $J \Leftrightarrow$ es solución débil.

   Sea u mínimo entonces $J(u) < J(u+tv)$ para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall v \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\int_\Omega \frac{|\nabla u|^p}{p}\,dx - \int_\Omega fu\,dx < \int_\Omega \frac{|\nabla(u+tv)|^p}{p}\,dx - \int_\Omega f(u+tv)\,dx$$

   entonces $F(0) < F(t) \quad \forall t$.

   Por lo tanto,

$$F'(0) = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int fv\ \ dx = 0$$

   Luego, u es solucion de $(\mathbf{P})$.

   Supongamos u es solucion de $(\mathbf{P})$, luego por convexidad tenemos que

$$J(tv+(1-t)u) \leqslant tJ(v)+(1-t)J(u)$$

   Entonces,

$$\frac{J(tv+(1-t)u)}{t} \leqslant J(v)-J(u)$$

   y tomando límite tenemos que

$$J'(u)(v-u) \leqslant J(v)-J(u)$$

   y como $J'(u)(v-u)=0$, tenemos que $J(u) \leqslant J(v)$. Lo que implica que u es mínimo.

7. Finalmente probaremos (1.2.3). Sea u solución de $(\mathbf{P})$ luego,

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\ \ dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

   Tomando como función test $v = u-g$ ($u = g$ en $\partial\Omega$, por lo tanto $u-g=0$ en $\partial\Omega$), entonces

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla(u-g)\ \ dx = \int_\Omega f(u-g)\ \ dx$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\ \ dx = \int f(u-g)\ \ dx + \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla g\ \ dx$$

Utilizando la desigualdad de Hölder e inmersión de Sobolev tenemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u|^p\,dx &\leqslant \| f \|_{L^q(\Omega)} \| u-g \|_{L^{q'}(\Omega)} + \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| u-g \|_{W^{1,p}(\Omega)} + \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C \| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla(u-g) \|_{L^p(\Omega)} + \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C(\| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} + \| f \|_{L^q(\Omega)} \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)}) \\ &\quad + \| \nabla g \|_{L^p(\Omega)} \| \nabla u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

donde en las últilmas dos desigualdades utilizamos primero la desigualdad de Poincaré ya que $u-g=0$ en $\partial\Omega$, y luego la desigualdad triangular.

Por lo tanto, hemos llegado a que

$$\| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} \leq C(\| f \|^2_{L^q(\Omega)} + \| \nabla g \|^2_{L^p(\Omega)})\Bigg(\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} + 1 + \| \nabla u \|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \Bigg)$$

donde C es una constante que depende solo de n y de Ω.

Usando que

$$t^p \leq M(t^{p-1}+1+t) \quad \text{implica que} \quad t \leq 3\,\text{máx}\{M,1\}$$

tenemos que

$$\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \leqslant C(\| f \|^2_{L^q(\Omega)} + \| \nabla g \|^2_{L^p(\Omega)}).$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Poincaré tenemos que

$$\begin{aligned}\| u \|_{L^p(\Omega)} &\leqslant \| u-g \|_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leqslant C \| \nabla(u-g) \|_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C(\| f \|^2_{L^q(\Omega)} + \| \nabla g \|^2_{L^p(\Omega)} + \| g \|_{W^{1,p}(\Omega)})\end{aligned}$$

y con esto queda probada la desigualdad (1.2.3).

□

En el siguiente lema enunciaremos una serie de desigualdades muy utilizadas a la hora de trabajar con el $p-$laplaciano.

LEMA 1.2.4. *Para todo $p>1$ y $\delta \geqslant 0$ existen constantes C_1, C_2, C_3 y C_4 tal que para todo $\xi,\eta \in R^2$, $\xi \neq \eta$,*

$$||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta| \leqslant C_1|\xi-\eta|^{1-\delta}(|\xi|+|\eta|)^{p-2+\delta} \tag{1.2.5}$$

$$(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi-\eta)_{R^2} \geqslant C_2|\xi-\eta|^{2+\delta}(|\xi|+|\eta|)^{p-2-\delta} \tag{1.2.6}$$

$$(|\xi|+|\eta|)^p \leq C_3(|\xi|^p+|\eta|^p) \tag{1.2.7}$$

$$\left|(\varepsilon+|\eta|^2)^{\frac{p-2}{2}}\eta-(\varepsilon+|\xi|^2)^{\frac{p-2}{2}}\xi\right|\leqslant C_4|\eta-\xi|^{p-1} \tag{1.2.8}$$

Demostración. Para las demostraciones de (1.2.5) y (1.2.6) ver Lema 2.1 en [**2**]. Para ver la demostración de (1.2.8) ver Proposición 3.2 en [**1**]. ☐

1.3. Aproximación por elementos finitos

Sea Ω^h una aproximación poligonal de Ω definida por $\overline{\Omega^h}\equiv\cup_{\tau\in T^h}\overline{\tau}$ donde T^h es una partición de Ω^h en una cantidad finita triángulos τ abiertos regulares disjuntos, con el máximo de los diámetros acotado por h. Asumimos que T^h es nondegenerada, esto es

$$\max_{\kappa\in T^h}\frac{h_\kappa}{\rho_\kappa}\leq\gamma_0$$

donde $h_\kappa=\operatorname{diam}(\kappa)$ y $\rho_\kappa=\sup\{\operatorname{diam}S\colon S\subset\kappa \text{ una bola}\}$.

Además para dos triángulos distintos cualquiera, sus clausuras son disjuntas o tienen un vértice o lado en común. Sea $\{P_j\}_{j=1}^J$ los vértices asociados con la trangulación T^h, donde P_j tiene coordenadas (x_j,y_j). Asumimos que $P_j\in\partial\Omega^h$ implica $P_j\in\partial\Omega$, y $\Omega^h\subseteq\Omega$.

Definimos el espacio de dimensión finita S^h asociado a T^h como:

$$S^h\equiv\{\chi\in C(\overline{\Omega^h}):\ \text{lineal } \forall\tau\in T^h\}\subset W^{1,p}(\Omega^h)$$

Se define $\pi_h:C(\overline{\Omega^h})\longrightarrow S^h$ el operador interpolador tal que para toda $v\in C(\overline{\Omega^h})$, el interpolador $\pi_h v\in S^h$ satisface $\pi_h v(P_j)=v(P_j)$, $j=1,\ldots,J$.

Se tienen las siguientes desigualdades de interpolación

Lema 1.3.1. *Para $m=0$ o 1, para todo $\tau\in T^h$, $q\in[1,\infty]$ y $s\in[1,\infty]$ se tiene que*

$$|v-\pi_h v|_{W^{m,q}(\tau)}\leqslant Ch^{2(1/q-1/s)}h^{2-m}|v|_{W^{2,s}(\tau)}\quad\forall v\in W^{2,s}(\tau) \tag{1.3.2}$$

Demostración. Para la demostración ver Teorema 3.1.5 en [**4**]. ☐

Lema 1.3.3. *Sea $q>2$ tenemos,*

$$|v-\pi_h v|_{W^{m,q}(\tau)}\leqslant Ch^{1-m}|v|_{W^{1,q}(\tau)}\quad\forall v\in W^{1,q}(\tau) \tag{1.3.4}$$

Demostración. Ver [**2**]. ☐

La aproximación por elementos finitos del problema (**P**) que vamos a considerar es:

$$(\mathbf{P}^h)\qquad \begin{aligned}&\text{Encontrar } u^h\in S_g^h \text{ tal que}\\ &\int_{\Omega^h}|\nabla u^h|^{p-2}\ \nabla u^h\cdot\nabla v^h\ dx=\int_{\Omega^h}fv^h\ dx\quad\forall v^h\in S_0^h\end{aligned}$$

donde

$$S_0^h = \{\chi \in S^h : \ \chi = 0 \text{ en } \partial\Omega^h\}$$

y

$$S_g^h = \{\chi \in S^h : \ \chi = g^h \text{ en } \partial\Omega^h\}$$

donde $g^h \in S^h$ se elige de manera tal de que aproxime el dato g. Si $u \in C(\overline{\Omega})$ se toma $g^h = \pi_h u$. Esta condición se cumple por ejemplo si $u \in W^{2,p}(\Omega)$ ya que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

La aproximación por elementos finitos del problema $(\mathbf{Q})$ que vamos a considerar es:

$$(\mathbf{Q}^h) \qquad \text{Encontrar } u^h \in S_g^h \text{ tal que } J_{\Omega^h}(u^h) \leqslant J_{\Omega^h}(v^h) \quad \forall v^h \in S_g^h.$$

TEOREMA 1.3.5. *Sea $g^h \in W^{1,p}(\Omega^h)$ y $f \in L^q(\Omega^h)$ con $p < 2$ y $q > (p^*)'$, o $p \geqslant 2$ y $q > 1$, entonces el problema $(\mathbf{Q}^h)$ tiene única solución. Además,*

- *u^h es solución de $(\mathbf{Q}^h)$ si y sólo si es solución de $(\mathbf{P}^h)$,*
- *y tenemos que*

$$\| u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C(\| f \|^2_{L^q(\Omega^h)} + \| \nabla g^h \|^2_{L^p(\Omega^h)} + \| g^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)}). \tag{1.3.6}$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $J_h(v) \to \infty$ cuando $\| v \|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \to \infty$ y $v \in S_g^h$ luego por (1.2.7), las desigualdades de Hölder y Poincaré tenemos que

$$\begin{aligned}
J_h(v) &= \int_{\Omega^h} \frac{|\nabla v|^p}{p}\, dx^h - \int_{\Omega^h} f v\, dx \\
&\geqslant \int_{\Omega^h} \frac{|\nabla v - \nabla g^h|^p}{p}\, dx - C \int_{\Omega^h} |\nabla g^h|^p\, dx^h - \| f \|_{L^q(\Omega^h)} \| v \|_{L^{q'}(\Omega^h)} \\
&\geqslant C \| v - g^h \|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} - C_1 - C_2 \| v \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \\
&\geqslant C \| v \|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} - C \| g^h \|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} - C_1 - C_2 \| v \|_{W^{1,p}(\Omega^h)}
\end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos nuevamente (1.2.7). Por lo tanto, sabiendo que $Ct^p - C_3 - C_2 t \to \infty$ cuando $t \to \infty$ probamos que $J_h(v) \to \infty$ cuando $\| v \|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \to \infty$ y $v \in S_g^h$ Además, como $\dim(S_g^h) < \infty$, resulta que J_h tiene un mínimo global en S_g^h.

Se puede ver que J_h es estrictamente convexo repitiendo la demotración del Teorema 1.2.2 en la que se prueba que J es estrictamente convexo. Por lo tanto el mínimo es único.

Finalemente se puede probar (1.3.6) siguiendo la demostración del Teorema 1.2.2. □

1.4. Regularidad para operadores uniformemente elípticos

Daremos dos resultados sobre la regularidad para soluciones de ecuaciones uniformemente elípticas que serán de utilidad.

Teorema 1.4.1. *Sea Ω dominio en $I\!R^2$, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^2(\Omega)$ y u una solución de*

$$\begin{cases} \mathcal{M}u = f & en\ \Omega \\ \quad u = g & en\ \partial\Omega \end{cases} \tag{1.4.2}$$

donde $\mathcal{M}u = a_{ij}(x)u_{x_ix_j}$, es tal que $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $\xi \in I\!R^2$

$$\lambda|\xi|^2 \leqslant a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda|\xi|^2$$

y

$$M_1 \leqslant a_{11}(x) + a_{22}(x) \leqslant M_2 \quad en\ \Omega$$

con λ, Λ, M_1 y M_2 constantes positivas. Luego,

1. *si Ω es convexo y $g = 0$ entonces*
$$|u|_{H^2(\Omega)} \leqslant C \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)}$$
con C independiente del dominio,
2. *si $\partial\Omega \in C^2$ entonces*
$$\parallel u \parallel_{H^2(\Omega)} \leqslant C(\parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} + \parallel g \parallel_{H^2(\Omega)})$$

con C dependiendo de $\parallel H \parallel_{L^\infty}$, donde H es la curvatura de $\partial\Omega$.

Demostración. Para la demotración ver Teorema 37 III en [**12**]. □

Teorema 1.4.3. *Sea Ω un dominio C^2, u la solución de* (1.4.2) *con f, $a_{ij} \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\overline{\Omega})$, entonces $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Demostración. Para la demotración ver Teorema 6.3 en [**7**]. □

Capítulo 2

Orden de convergencia del método de elementos finitos

En este capítulo probaremos cotas para el error entre la solución u de $(\mathbf{P})$ y u^h la solución de $(\mathbf{P}^h)$. A lo largo dde este capítulo asumimos que $N = 2$.

2.1. Una cota abstracta del error

En esta sección demostraremos una desigualdad que generaliza el Lema de Cea para el caso $p = 2$. Dicha desigualdad involucra ciertas seminormas que definiremos a continuación.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Para $p \in (1, \infty)$ y $\sigma \geqslant 0$ definimos para cualquier $v \in W^{1,p}(\Omega^h)$:*

$$|v|_{(p,\sigma)} = \int_{\Omega^h} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-\sigma} |\nabla v|^\sigma \, dx \tag{2.1.2}$$

donde u es la soluación de $(\mathbf{P})$.

LEMA 2.1.3. *Para $p \in (1, \sigma]$ tenemos*

$$|v|_{(p,\sigma)}^{\sigma/p} \leqslant |v|_{W^{1,p}(\Omega^h)}^{\sigma} \leqslant C(|u|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + |v|_{W^{1,p}(\Omega^h)})^{\sigma-p} |v|_{(p,\sigma)} \tag{2.1.4}$$

y para $p \in [\sigma, \infty)$,

$$|v|_{W^{1,p}(\Omega^h)}^{p} \leqslant |v|_{(p,\sigma)} \leqslant C(|u|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + |v|_{W^{1,p}(\Omega^h)})^{p-\sigma} |v|_{W^{1,p}(\Omega^h)}^{\sigma} \tag{2.1.5}$$

Por lo tanto, (2.1.2) *está bien definido para $v \in W^{1,p}(\Omega^h)$.*

DEMOSTRACIÓN. Para $p \in (1, \sigma]$, definimos

$$W = (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-\sigma}$$

como $p < \sigma$, entonces $p - \sigma \leq 0$ por lo tanto $W \leq |\nabla v|^{p-\sigma}$, lo que implica

$$|v|_{(p,\sigma)}^{\sigma/p} = \left(\int_{\Omega^h} W |\nabla v|^\sigma \, dx \right)^{\sigma/p} \leqslant \left(\int_{\Omega^h} |\nabla v|^p \, dx \right)^{\sigma/p} = |v|_{W^{1,p}(\Omega^h)}^{\sigma}$$

Lo que demuestra el lado izquierdo de la desigualdad (2.1.4).

Aplicando la desigualdad de Hölder con $s = \sigma/p$ y $s' = \sigma/(\sigma - p)$, luego reemplazando a W y utilizando la desigualdad (1.2.7) tenemos

$$
\begin{aligned}
|v|^{\sigma}_{W^{1,p}(\Omega^h)} &= \left\{ \int_{\Omega^h} W^{-p/\sigma}(W^{1/\sigma}|\nabla v|)^p \, dx \right\}^{\sigma/p} \\
&\leqslant \left\{ \int_{\Omega^h} W^{-p/(\sigma-p)} \, dx \right\}^{(\sigma-p)/p} |v|_{(p,\sigma)} \\
&= \left\{ \int_{\Omega^h} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p \, dx \right\}^{(\sigma-p)/p} |v|_{(p,\sigma)} \\
&\leqslant \left\{ \int_{\Omega^h} C_p(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p) \, dx \right\}^{(\sigma-p)/p} |v|_{(p,\sigma)} \\
&= C\Big[\, |u|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} + |v|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} \Big]^{(\sigma-p)/p} |v|_{(p,\sigma)}
\end{aligned}
\tag{2.1.6}
$$

Obteniendo así el lado derecho de la desigualdad (2.1.4).

Para $p \geqslant \sigma$,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx = \int_{\Omega} W|\nabla v|^{\sigma} W^{-1} |\nabla v|^{p-\sigma} \, dx$$

Usando que $p \geqslant \sigma$, tenemos que $\left(\frac{|\nabla v|}{|\nabla u|+|\nabla v|}\right)^{p-\sigma} \leqslant 1$. Luego,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \leqslant \int_{\Omega} |\nabla v|^{\sigma} W \, dx = |v|_{(p,\sigma)}$$

El lado derecho de la desigualdad en (2.1.5) sale aplicando Hölder con $s = p/\sigma$,

$$
\begin{aligned}
|v|_{(p,\sigma)} &\leqslant \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^{\sigma p/\sigma} \, dx \right)^{\sigma/p} \left(\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p \, dx \right)^{\frac{p-\sigma}{p}} \\
&= \left(|u|_{W^{1,p}(\Omega)} + |v|_{W^{1,p}(\Omega)} \right)^{p-\sigma} |v|^{\sigma}_{W^{1,p}(\Omega)}
\end{aligned}
$$

$\square$

TEOREMA 2.1.7. *Sean $f \in L^q(\Omega)$ con $q > (p^*)'$, $g \in W^{1,p}(\Omega)$, u y u^h las únicas soluciones de* $(\mathbf{P}) \equiv (\mathbf{Q})$ *y* $(\mathbf{P}^h) \equiv (\mathbf{Q}^h)$ *respectivamente. Para cualquier $\delta_1 \in [0, 2)$ y $\delta_2 \geqslant 0$, y $v^h \in S^h_g$ se tiene que*

$$|u - u^h|_{(p,2+\delta_2)} \leqslant C|u - v^h|_{(p,2-\delta_1)} \tag{2.1.8}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cualquier $v^h \in S^h_g$ tenemos

$$
\begin{aligned}
J_{\Omega^h}(v^h) - J_{\Omega^h}(u) &= \int_0^1 J'_{\Omega^h}\Big(u + s(v^h - u)\Big)(v^h - u)\ ds \\
&= \int_0^1 \Big[J'_{\Omega^h}\Big(u + s(v^h - u)\Big)\Big([u + s(v^h - u)] - u\Big) \\
&\quad - J'_{\Omega^h}(u)\Big([u + s(v^h - u)] - u\Big)\Big]\ \frac{ds}{s} + J'_{\Omega^h}(u)(v^h - u) \\
&= A(v^h) + J'_{\Omega^h}(u)(v^h - u)
\end{aligned} \tag{2.1.9}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
A(v^h) = \int_0^1 \ \Big[\int_{\Omega^h} \Big\{ \Big[\Big|\nabla\Big(u + s(v^h - u)\Big)\Big|^{p-2} \nabla\Big(u + s(v^h - u)\Big) \\
- \Big|\nabla u\Big|^{p-2} \nabla u\Big] \nabla(v^h - u) \Big\}\, dx\ \Big]\ ds
\end{aligned} \tag{2.1.10}
$$

Por lo que usando (1.2.5) y

$$
\frac{1}{2}s\Big(|\nabla v_1| + |\nabla v_2|\Big) \leqslant \Big|\nabla[v_1 + s v_2]\Big| + |\nabla v_1| \leqslant 2\Big(|\nabla v_1| + |\nabla v_2|\Big) \tag{2.1.11}
$$

tenemos que

$$
\begin{aligned}
|A(v^h)| &\leqslant C_1 \int_0^1 s^{1-\delta_1} \int_{\Omega^h} \Big(\Big|\nabla[u + s(v^h - u)]\Big| + |\nabla u|\Big)^{p-2+\delta_1} \Big|\nabla(v^h - u)\Big|^{2-\delta_1}\, dx\ ds \\
&\leqslant C|u - v^h|_{(p,2-\delta_1)} \Big(\int_0^1 s^{1-\delta_1} ds\Big) = C|u - v^h|_{(p,2-\delta_1)},
\end{aligned} \tag{2.1.12}
$$

pues $\delta_1 < 2$.

Por (2.1.10), (1.2.6) y (2.1.11) tenemos

$$
\begin{aligned}
|A(v^h)| &\geqslant C_2 \int_0^1 s^{1+\delta_2}\ \int_{\Omega^h} \Big(\Big|\nabla[u + s(v^h - u)]\Big| + |\nabla u|\Big)^{p-2-\delta_2} \Big|\nabla(v^h - u)\Big|^{2+\delta_2}\, dx\ ds \\
&\geqslant C|u - v^h|_{(p,2+\delta_2)} \Big(\int_0^1 s^{p-1} ds\Big) = C|u - v^h|_{(p,2+\delta_2)}
\end{aligned} \tag{2.1.13}
$$

Luego, usando que u^h es solución de ($\mathbf{Q}^h$), (2.1.9) y (2.1.10) llegamos a que para toda $v^h \in S_g^h$

$$
\begin{aligned}
A(u^h) + J'_{\Omega^h}(u)(u^h - u) &= J_{\Omega^h}(u^h) - J_{\Omega^h}(u) \leqslant J_{\Omega^h}(v^h) - J_{\Omega^h}(u) \\
&= A(v^h) + J'_{\Omega^h}(u)(v^h - u).
\end{aligned} \tag{2.1.14}
$$

Por lo tanto, concluimos por (2.1.14), (2.1.12) y (2.1.13) que

$$
|u - u^h|_{(p,2+\delta_2)} \leqslant C|u - v^h|_{(p,2-\delta_1)} + J'_{\Omega^h}(u)(v^h - u^h). \tag{2.1.15}
$$

Como Ω^h es Lipschitz, $\Omega^h \subset \Omega$ y $\chi = v^h - u^h \in S_0^h$, puede ser extendida por cero a $\Omega \setminus \Omega^h$ y si la notamos $\overline{\chi}$, $\overline{\chi} \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces $J'_{\Omega^h}(u)(\chi) = J'_{\Omega}(u)(\overline{\chi}) = 0$. Por lo tanto podemos deducir el resultado del teorema. □

2.2. Caso $p \in (1, 2]$

TEOREMA 2.2.1. *Sea u la solución del problema* $(\mathbf{P})$*, si $u \in W^{2,p}(\Omega)$, y u^h solución de* $(\mathbf{P}^h)$ *entonces*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant Ch^{p/2}. \tag{2.2.2}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad de Poincaré tenemos que $\forall q \in [1, \infty)$, y $\forall v \in W^{1,q}(\Omega)$, y para toda v^h, $w^h \in S_g^h$ que

$$\| v - w^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant C \| v - v^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} + C|v - w^h|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \tag{2.2.3}$$

Usando la desigualdad anterior con $q = p$, $v = u$, $w^h = u^h$ y $v^h = \pi_h u$ llegamos a que

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + C|u - u^h|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \tag{2.2.4}$$

Como $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p^*}(\Omega)$ (pues $p^* > 2$) tenemos por (1.3.4) que

$$\|\pi_h u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C\|\pi_h u\|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p^*}(\Omega)} \leq C, \tag{2.2.5}$$

entonces por (1.2.3), (1.3.6), (2.2.5) y (2.1.4) tenemos que

$$|u - u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C|u - u^h|_{(p,2)} \tag{2.2.6}$$

y luego usando el resultado (2.1.8) con $\delta_2 = 0$ y $\delta_1 \in [0, 2)$, tenemos que para toda $v^h \in S_g^h$

$$|u - u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C|u - v^h|_{(p,2-\delta_1)} \tag{2.2.7}$$

Eligiendo $\delta_1 = 2 - p$ en la desigualdad anterior y por (2.1.4) obtenemos que para toda $v^h \in S_g^h$

$$|u - u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C|u - v^h|_{(p,p)} \leqslant C|u - v^h|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} \tag{2.2.8}$$

Por lo tanto, tomando $v^h = \pi_h u$ obtenemos

$$|u - u^h|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C|u - \pi_h u|^{p/2}_{W^{1,p}(\Omega^h)}. \tag{2.2.9}$$

Ahora bien, de (2.2.4) y(2.2.9) obtenemos

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + C|u - \pi_h u|^{p/2}_{W^{1,p}(\Omega^h)}. \tag{2.2.10}$$

Además, por (1.3.2) tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \| u - \pi_h u \|_{L^p(\Omega^h)} &\leqslant Ch^2, \\ |u - \pi_h u|_{W^{1,p}(\Omega^h)} &\leqslant Ch. \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Finalmente podemos concluir que

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant Ch^{p/2}$$

$\square$

Observar que en el caso $p = 2$ se tiene orden óptimo. Para el caso $p < 2$ probaremos orden óptimo asumiendo mejor regularidad de las soluciones. Previamente debemos probar el siguiente

LEMA 2.2.12. *Sea $\alpha \in (-1,0)$ y $v \in W^{2,1}(\Omega)$ entonces*

$$\int_\Omega |v|^\alpha |\nabla v|^2 \, dx < \infty \tag{2.2.13}$$

DEMOSTRACIÓN. Para $i = 1,2$ tenemos que,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |v|^\alpha |v_{x_i}|^2 \, dx_1 \, dx_2 &= \frac{1}{\alpha+1} \int_\Omega \Big(sign(v)|v|^{\alpha+1} \Big)_{x_i} v_{x_i} \, dx_1 \, dx_2 \\
&\equiv \frac{1}{\alpha+1} \Big\{ \int_{\partial\Omega} sign(v)|v|^{\alpha+1} v_{x_i} \, dx_j - \int_\Omega sign(v)|v|^{\alpha+1} v_{x_i x_i} \, dx_1 \, dx_2 \ \Big\} \\
&\le C(\|v_{x_i}\|_{L^1(\partial\Omega)} + \|v_{x_i x_i}\|_{L^1(\Omega)}) \\
&\le C(\|v_{x_i}\|_{W^{1,1}(\Omega)} + \|v_{x_i x_i}\|_{L^1(\Omega)}) \\
&\le C\|v\|_{W^{2,1}(\Omega)} < \infty
\end{aligned}$$

donde en las tres últimas desigualdades estamos usando que $W^{2,1}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$ (Teorema 1.1.5) y $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\partial\Omega)$ (Teorema 1.1.7). $\square$

TEOREMA 2.2.14. *Sea $u \in W^{3,1}(\Omega) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ con $\alpha > 0$, entonces*

$$\| u - u^h \|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C(h^2 + h^{p(1+\alpha)}), \tag{2.2.15}$$

y además, si $u \in W^{3,1}(\Omega) \cap C^{2,(2-p)/p}(\overline{\Omega})$ entonces

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant Ch. \tag{2.2.16}$$

DEMOSTRACIÓN. Como $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, por (1.3.2) para todo $\tau \in T^h$ y para todo $(x_1,x_2) \in \overline{\tau}$ existe $(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \in \overline{\tau}$ tal que

(2.2.17)
$$\begin{aligned}
|\nabla(u - \pi_h u)(x_1,x_2)| &\leqslant Ch\|H[u]\|_{L^\infty(\tau)} = ChH[u](\overline{x}_1,\overline{x}_2) \\
&= ChH[u](x_1,x_2) + Ch\Big[H[u](\overline{x}_1,\overline{x}_2) - H[u](x_1,x_2)\Big] \\
&\leqslant ChH[u](x_1,x_2) + Ch^{1+\alpha}
\end{aligned}$$

donde $H[u] = |u_{x_1x_1}| + |u_{x_1x_2}| + |u_{x_2x_2}|$.

Luego, por (2.2.7) con $\delta_1 = 0$ y $v^h = \pi_h u$, el hecho de que $q(t) = (a+t)^{p-2}t^2$ con $a \geqslant 0$ es decreciente en $\mathbb{R}^+$ y (2.2.17) tenemos que

(2.2.18)
$$\begin{aligned}
|u - u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} &\leqslant C \int_{\Omega^h} (|\nabla u| + |\nabla(u - \pi_h u)|)^{p-2} |\nabla(u - \pi_h u)|^2 \, dx \\
&\leqslant C \int_{\Omega^h} \Big(|\nabla u| + \Big[ChH[u] + Ch^{1+\alpha}\Big]\Big)^{p-2} \Big(ChH[u] + Ch^{1+\alpha}\Big)^2 \, dx
\end{aligned}$$

Usando que $q(|t_1+t_2|) \leqslant 2[q(|t_1|)+q(|t_2|)]$ para todo $t_1, t_2 \in I\!R$ en la última desigualdad en (2.2.18), que $(p-2)(1+\alpha)+2(1+\alpha) = (1+\alpha)p$, y que $p \leqslant 2$ llegamos a que

$$
\begin{aligned}
|u-u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} &\leqslant Ch^2 \int_{\Omega^h} \Big(|\nabla u| + ChH[u]\Big)^{p-2} (H[u])^2\,dx \\
&\quad + \int_{\Omega^h} \Big(|\nabla u| + Ch^{1+\alpha}\Big)^{p-2} Ch^{2(1+\alpha)}\,dx \\
&\leqslant Ch^2 \int_{\Omega^h} |\nabla u|^{p-2}(H[u])^2\,dx + Ch^{p(1+\alpha)}
\end{aligned}
\tag{2.2.19}
$$

Por otro lado tenemos, definiendo $v_1 \equiv u_x$ y $v_2 \equiv u_y$ y usando Lema 2.2.12, que

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega^h} |\nabla u|^{p-2}(H[u])^2\,dx &= \int_{\Omega^h} (v_1^2+v_2^2)^{\frac{p-2}{2}} (|v_{1x}|+|v_{1y}|+|v_{2y}|)^2\,dx \\
&\leqslant C\int_{\Omega^h} (v_1^2+v_2^2)^{\frac{p-2}{2}} (|\nabla v_1|^2+|\nabla v_2|^2)\,dx \\
&\leqslant C\int_{\Omega^h} |v_1|^{p-2}|\nabla v_1|^2 + |v_2|^{p-2}|\nabla v_2|^2\,dx < \infty,
\end{aligned}
\tag{2.2.20}
$$

Por (2.2.19) y (2.2.20) resulta

$$
|u-u^h|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C(h^2 + h^{p(1+\alpha)}).
\tag{2.2.21}
$$

Finalmente por (2.2.10) y (2.2.11) podemos concluir (2.2.15) y (2.2.16). □

2.3. Caso $p > 2$

A lo largo de esta sección se asume que $p > 2$.

TEOREMA 2.3.1. *Sea u la solución de* ($\mathbf{P}$), *con* $u \in W^{2,p}(\Omega)$, *y* u^h *solución de* ($\mathbf{P}^h$) *entonces*

$$
\| u-u^h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant Ch^{2/p}.
\tag{2.3.2}
$$

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad (2.1.5) y luego por (2.1.8) con $\delta_1 = 0$ y $\delta_2 = p-2$ tenemos que

$$
|u-u^h|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant |u-u^h|_{(p,p)} \leqslant C|u-\pi_h u|_{(p,2)} \leqslant C|u-\pi_h u|^2_{W^{1,p}(\Omega^h)}
\tag{2.3.3}
$$

Donde en la última desigualdad estamos usando (2.1.8), (1.2.3), (1.3.4) y (1.3.6).

Además por (2.2.4) teníamos lo siguiente

$$
\| u-u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C \| u-\pi_h u \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + C|u-u^h|_{W^{1,p}(\Omega^h)}
\tag{2.3.4}
$$

Entonces, por (2.3.3), (2.3.4) y (1.3.2) concluimos que

$$
\| u-u^h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant Ch^{2/p}.
\tag{2.3.5}
$$

□

Veremos en el Ejemplo 2.3.15 que en general no tenemos, aunque los datos sean regulares, que la solución está en $W^{2,p}(\Omega)$. Tenemos el siguiente teorema alternativo que se podrá aplicar en esos casos.

TEOREMA 2.3.6. *Sea u la solución de* $(\mathbf{P})$*, con* $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$*,* $s \in [1,2]$*, y* u^h *solución de* $(\mathbf{P}^h)$ *entonces*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C h^{s/p}. \tag{2.3.7}$$

DEMOSTRACIÓN. Razonando parecido a (2.3.3), utilizando (2.1.5) y (2.1.8) con $\delta_1 = 2 - s$ y $\delta_2 = p - 2$ tenemos

$$|u - u^h|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant |u - u^h|_{(p,p)} \leqslant C|u - \pi_h u|_{(p,s)}. \tag{2.3.8}$$

De la desigualdad de interpolación (1.3.4) con $m = 1$ y $q = \infty$ obtenemos la siguientes cota para la seminorma $W^{1,\infty}(\Omega^h)$

$$|u - \pi_h u|_{W^{1,\infty}(\Omega^h)} \leqslant C|u|_{W^{1,\infty}(\Omega^h)} \tag{2.3.9}$$

lo mismo tomando $m = 0$, tenemos una cota para la norma $L^\infty(\Omega^h)$

$$|u - \pi_h u|_{L^\infty(\Omega^h)} \leqslant Ch|u|_{L^\infty(\Omega^h)}. \tag{2.3.10}$$

Por lo que podemos inferir que $|\nabla u| + |\nabla(u - \pi_h u)|$ está acotado. Entonces

$$|u - \pi_h u|_{(p,s)} = \int_{\Omega^h} \Big(|\nabla u| + |\nabla(u - \pi_h u)|\Big)^{p-s} |\nabla(u - \pi_h u)|^s \, dx \leqslant M|u - \pi_h u|^s_{W^{1,s}(\Omega^h)}. \tag{2.3.11}$$

Juntando (2.3.8) y (2.3.11) tenemos que

$$|u - u^h|^p_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C|u - \pi_h u|^s_{W^{1,s\cdot}(\Omega^h)} \tag{2.3.12}$$

Luego por (2.2.3), (2.3.12) obtenemos que

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} + C|u - \pi_h u|^{s/p}_{W^{1,s}(\Omega^h)}. \tag{2.3.13}$$

Por otro lado notemos que por (2.3.9) y (2.3.10) tenemos que $\forall q \geqslant s$

$$\| u - \pi_h u \|^q_{L^q(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|^s_{L^s(\Omega^h)},$$

$$|u - \pi_h u|^q_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant C|u - \pi_h u|^s_{W^{1,s}(\Omega^h)}.$$

Por lo tanto,

$$\| u - \pi_h u \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|^{s/q}_{W^{1,s}(\Omega^h)} . \tag{2.3.14}$$

Por esto último arribamos al siguiente resultado

$$\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega^h)} \leqslant C \| u - \pi_h u \|^{s/p}_{W^{1,s}(\Omega^h)} \leqslant Ch^{s/p}$$

donde en esta última desigualdad usamos (1.3.2). $\square$

EJEMPLO 2.3.15. *Si tomamos $f = 1$, $g = 0$ y $\Omega = B_1(0)$ es fácil ver que la solución es de la forma $u(x,y) = C(1 - r^{\frac{p}{p-1}})$ donde $r = \sqrt{x^2+y^2}$.*

Además tenemos que,

- $u \in W^{2,s}(\Omega)$ *si y solo si* $s < \frac{2(p-1)}{p-2}$,
- $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$.

Por lo tanto en general no podemos aplicar el Teorema 2.3.1, pues, si $p > \frac{2(p-1)}{p-2}$ $u \notin W^{2,p}(\Omega)$. Sin embargo si podemos aplicar el Teorema 2.3.6, pues $2 < \frac{2(p-1)}{p-2}$, luego $u \in W^{2,2}(\Omega)$ y entonces tenemos que $\|u - u_h\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq Ch^{2/p}$.

OBSERVACIÓN 2.3.16. *En el ejemplo anterior podemos ver que incluso teniendo las mejor condiciones de regularidad sobre los datos, cuando $p > 2$ podemos no tener regularidad $W^{2,p}(\Omega)$. Además observemos que ambas cotas (2.3.1) y (2.3.6) degeneran cuando $p \to \infty$.*

Por ello, en lo que sigue queremos ver bajo que condiciones tenemos cotas que no degeneran cuando $p \to \infty$ y condiciones donde se tiene orden uno pidiendo condiciones de regularidad que incluyan el Ejemplo 2.3.15. Para ello debemos acotar el error con normas mas débiles, esto es en la norma $\|\cdot\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ con $q \in [1,p)$.

Por ejemplo, podremos concluir, para el Ejemplo 2.3.15 que

$$\|u - u_h\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq Ch, \tag{2.3.17}$$

donde $q = \frac{2s}{s+1}$ y $2 \leq s < \frac{2(p-1)}{p-2}$.

LEMA 2.3.18. *Para todo $t \in [2,p]$ y $q \in [1,t]$ para los que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{-(p-t)q/(t-q)}\, dx < \infty \quad \text{si } q \in [1,t) \tag{2.3.19}$$

y

$$|\nabla u|^{-(p-t)} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{si } q = t \tag{2.3.20}$$

tenemos que si $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$ con $s \in [1,2]$ entonces

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leq Ch^{s/t}. \tag{2.3.21}$$

DEMOSTRACIÓN. Por la desigualdad de Hölder, suponiendo $q < t$ y por hipótesis (2.3.19) tenemos

(2.3.22)

$$
\begin{aligned}
&|u-u^h|^q_{W^{1,q}(\Omega^h)}\\
&= \int_{\Omega^h} |\nabla(u-u^h)|^q \,\Big(|\nabla u| + |\nabla(u-u^h)|\Big)^{(p-t)q/t}\Big(|\nabla u| + |\nabla(u-u^h)|\Big)^{-(p-t)q/t}\, dx\\
&\leq \left(\int_{\Omega^h} |\nabla(u-u^h)|^t\Big(|\nabla u| + |\nabla(u-u^h)|\Big)^{p-t} dx\right)^{q/t}\\
&\quad \left(\int_{\Omega^h} \Big(|\nabla u| + |\nabla(u-u^h)|\Big)^{-(p-t)q/(t-q)} dx\right)^{\frac{t-q}{t}}\\
&\leqslant |u-u^h|^{q/t}_{(p,t)}\left(\int_{\Omega^h} |\nabla u|^{-(p-t)q/(t-q)}\, dx\right)^{\frac{t-q}{t}}\\
&\leqslant C|u-u^h|^{q/t}_{(p,t)}.
\end{aligned}
$$

En forma análoga usando (2.3.20), obtenemos la misma desigualda en el caso $q = t$.

Por la desigualdad anterior, usando el resultado (2.1.8) con $\delta_1 = 2-s$, $\delta_2 = t-2$ y $v^h = \pi_h u$ llegamos a que

$$
|u-u^h|^t_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant C|u-u^h|_{(p,t)} \leqslant C|u-\pi_h u|_{(p,s)}. \tag{2.3.23}
$$

Por otro lado, por (1.3.4) tenemos que

$$
|u-\pi_h u|_{W^{1,\infty}(\Omega^h)} \leqslant C|u|_{W^{1,\infty}(\Omega^h)} \tag{2.3.24}
$$

luego,

$$
\| \nabla(u-\pi_h u) \|_{L^\infty(\Omega^h)} \leqslant C \| \nabla u \|_{L^\infty(\Omega^h)} . \tag{2.3.25}
$$

Por lo que resulta, usando que $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$

$$
\begin{aligned}
|u-\pi_h u|_{(p,s)} &= \int_{\Omega^h} \Big(|\nabla(u-\pi_h u)| + |\nabla u|\Big)^{p-s} |\nabla(u-\pi_h u)|^s\, dx\\
&\leqslant C \| \nabla u \|^{p-s}_{L^\infty(\Omega^h)} \int_{\Omega^h} |\nabla(u-\pi_h u)|^s\, dx\\
&\leqslant C|u-\pi_h u|^s_{W^{1,s}(\Omega^h)}.
\end{aligned} \tag{2.3.26}
$$

Juntando esto último con (2.3.23) obtenemos que

$$
|u-u^h|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant C|u-\pi_h u|^{s/t}_{W^{1,s}(\Omega^h)}. \tag{2.3.27}
$$

Finalmente por (2.2.4), (2.3.27) y (2.3.14) podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
\| u-u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} &\leqslant C \| u-\pi_h u \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} + |u-u^h|_{W^{1,q}(\Omega^h)}\\
&\leqslant C \| u-\pi_h u \|^{s/q}_{W^{1,s}(\Omega^h)} + C|u-\pi_h u|^{s/t}_{W^{1,s}(\Omega^h)}\\
&\leqslant C(h^{s/q} + h^{s/t})
\end{aligned} \tag{2.3.28}
$$

donde en la última desigualdad usamos la desigualdad de interpolación (1.3.2) y que $u \in W^{2,s}(\Omega)$. $\square$

LEMA 2.3.29. *Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$, $s \in [1,\infty]$, entonces existe $M \in L^s(\Omega)$ tal que*

$$|f| \leqslant M|\nabla u|^{p-2} \quad c.t.p \ en \ \Omega. \tag{2.3.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $(v_1, v_2) = \nabla u \in [W^{1,s}(\Omega)]^2$ y

$$v = (v_1^2 + v_2^2)^{1/2} \equiv |\nabla u| \in L^\infty(\Omega).$$

Observemos que $|v_1/v| + |v_2/v|$ está acotada y que $\nabla v = (v_1 \nabla v_1 + v_2 \nabla v_2)/v$, por lo que $v \in W^{1,s}(\Omega)$.

Además tenemos que

$$\begin{aligned} f &= -\mathrm{div}(v^{p-2}v_1, v^{p-2}v_2) \\ &= -v^{p-2}\{[(v_1)_{x_1} + (v_2)_{x_2}] + (p-2)[v_1 v_{x_1} + v_2 v_{x_2}]/v\} \\ &\leqslant M|\nabla u|^{p-2} \end{aligned} \tag{2.3.31}$$

donde $M = |(v_1)_{x_1}| + |(v_2)_{x_2}| + (p-2)(|v_{x_1}| + |v_{x_2}|) \in L^s(\Omega)$. $\square$

TEOREMA 2.3.32. *Sea $u \in W^\infty(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$, $s \in [1,\infty]$. Si $|f|^{-\gamma} \in L^1(\Omega)$ para algún $\gamma \in (0,\infty)$ o si $|f|^{-1} \in L^\infty(\Omega)$ (en ese caso notamos $\gamma = \infty$), entonces tenemos para $q \in [1,p)$ que*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant \begin{cases} Ch^{2/t} & si \ s \geqslant 2, \\ Ch^{s/t} & si \ s \in [1,2) \end{cases} \tag{2.3.33}$$

donde

$$t = \begin{cases} max\{2, q[(s+\gamma)p + (p-2)\gamma s]/[(s+\gamma)q + (p-2)\gamma s]\} & si \ \gamma < \infty, \\ max\{2, q\frac{p+s(p-2)}{q+s(p-2)}\} & si \ \gamma = \infty. \end{cases} \tag{2.3.34}$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos que si t satisface (2.3.34) entonces $t \in [2,p)$ y $t > q$.

Definiendo $\eta = q(p-t)/[(p-2)(t-q)]$, podemos concluir que $\eta \leqslant \gamma s/(s+\gamma)$ y luego $s\eta \leqslant \gamma(s-\eta)$. Si γ es finito entonces $\eta < s$.

Luego por (2.3.30) y la desigualdad de Hölder para $s\eta$ tenemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla u|^{-(p-t)q/(t-q)}\, dx &= \int_\Omega |\nabla u|^{-(p-2)\eta}\, dx \\ &\leqslant \int_\Omega (M|f|^{-1})^\eta\, dx \\ &\leqslant \Big(\int_\Omega M^s\, dx\Big)^{\eta/s} \Big(\int_\Omega |f|^{-\eta s/(s-\eta)}\, dx\Big)^{(s-\eta)/s} < \infty \end{aligned} \tag{2.3.35}$$

donde en la última desigualdad usamos que $M \in L^s(\Omega)$ y que $|f|^{-1} \in L^\gamma(\Omega)$, por lo tanto $|f|^{-1} \in L^{\frac{\eta s}{s-\eta}}(\Omega)$ pues $\frac{\eta s}{s-\eta} \leqslant \gamma$.

Finalmente (2.3.35) sigue valiendo si γ es infinito, pues, en este caso $\eta \leqslant s$.

Luego por (2.3.19) y (2.3.35) deducimos (2.3.33). □

Corolario 2.3.36. *Sea $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,s}(\Omega)$, $s \in [1, \infty]$. Suponiendo que existe una constante $\rho > 0$ tal que $|f| \geqslant \rho$ c.t.p. en Ω, entonces para $q \in [1, p)$ tenemos que*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant \begin{cases} Ch^{2/t} & si\ s \geqslant 2 \\ Ch^{s/t} & si\ s \in [1, 2) \end{cases} \tag{2.3.37}$$

donde

$$t = max\{2, q[p + (p-2)s]/[q + (p-2)s]\}$$

Además, para $q = 2s/(1+s)$

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega^h)} \leqslant \begin{cases} Ch & si\ s \geqslant 2 \\ Ch^{s/2} & si\ s \in [1, 2). \end{cases} \tag{2.3.38}$$

Demostración. Tomando $\gamma = \infty$ se puede deducir directamente usando en teorema anterior el resultado (2.3.37).

Luego notando que para $q = 2s/(1+s)$ se tiene que $t = 2$, obtenemos (2.3.38). □

Observación 2.3.39. *Tenemos entonces que $t \to \text{máx}\{2, q\frac{s+1}{s}\}$ cuando $p \to \infty$ por lo tanto la cota (2.3.37) no degenera cuando $p \to \infty$ mientras que las cotas de los Teoremas 2.3.1 y 2.3.6 si lo hacen.*

Observar que con este resultado tenemos, en particular, que para el Ejemplo 2.3.15 vale (2.3.17) si $q = \frac{2s}{s+1}$ y $2 \leq s < \frac{2(p-1)}{p-2}$.

Capítulo 3

Regularidad H^2 para el caso $p \in (1, 2]$

En este capítulo probaremos la regularidad H^2 de las soluciones de (**P**) para el caso $1 < p \leq 2$ y $N = 2$. Primero haremos la demostración en el caso en que el borde es C^2 y luego en el caso que el dominio es convexo.

3.1. Caso borde C^2

Comenzaremos por enunciar un resultado de regularidad para el problema regularizado asociado a (**P**).

LEMA 3.1.1. *Sean $f \in Lip(\Omega)$, $p > 1$ y u la solución débil de*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot ((\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p}{2}-1} \nabla u) = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.2}$$

luego $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Si además $\partial\Omega \in C^2$, $f \in L^\infty(\Omega)$, y $g \in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$ entonces existe α dependiendo de γ y p tal que $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

DEMOSTRACIÓN. Para ver la demotración de la primera afirmación ver Proposición 1 en [**14**]. Y para la demostración de la segunda parte ver [**10**]. □

LEMA 3.1.3. *Sean $\Omega \in I\!R^N$ con borde en $C^{1,\gamma}$, $f \in Lip(\Omega)$ y $g \in C^{1,\beta}(\partial\Omega)$ luego el problema (3.1.2) tiene una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 3.1.1 sabemos que la solución está en $H^2_{loc}(\Omega)$. Para cualquier $\Omega' \subset\subset \Omega$ podemos derivar la ecuación y mirar la solución de (3.1.2) como la solución de la siguiente ecuación,

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\varepsilon u = a_\varepsilon(x) & \text{en } \Omega', \\ u = u & \text{en } \partial\Omega' \end{cases} \tag{3.1.4}$$

donde,

$$\mathcal{M}_\varepsilon u = a^\varepsilon_{ij}(x) u_{x_i x_j}$$

con

$$a^\varepsilon_{ij}(x) = \delta_{ij} + (p-2)\frac{u_{x_i} u_{x_j}}{v_\varepsilon^2}, \quad v_\varepsilon = (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{1/2}$$

$$a_\varepsilon(x) = f v_\varepsilon^{2-p}$$

. El operador $\mathcal{M}_\varepsilon$ es uniformemente elíptico en Ω, ya que para todo $\xi \in I\!R^N$

$$(p-1)|\xi|^2 \leqslant a^\varepsilon_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant |\xi|^2$$

Por otro lado por Lema 3.1.1, $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Luego para $\varepsilon > 0$, $a_{ij}^{\varepsilon} \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ usando que $f \in Lip(\Omega)$, tenemos que $a \in C^{\rho}(\Omega)$, donde $\rho = min(\alpha, \beta)$. Si $\partial\Omega' \in C^2$, como u es la única solución de (3.1.4), por Teorema 1.4.3 , tenemos que $u \in C^{2,\rho}(\Omega')$. $\square$

TEOREMA 3.1.5. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *conjunto abierto con* $\partial\Omega \in C^2$. *Sean* $g \in H^2(\Omega)$, $f \in L^q(\Omega)$ *(*$q > 2$*)*, $1 < p \leq 2$ *y* u *la única soluación débil de* (1.2.1). *Entonces* $u \in H^2(\Omega)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 < \varepsilon \leq 1$ y $0 < \alpha < 1$. Sean $f_\varepsilon \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ y $g_\varepsilon \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que $f_\varepsilon \longrightarrow f$ en $L^q(\Omega)$ y $g_\varepsilon \longrightarrow g$ en $H^2(\Omega)$ cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$. Para $\varepsilon > 0$ tomemos u_ε la solución de (3.1.2) con $f = f_\varepsilon$ y $g = g_\varepsilon$. Por Lema 3.1.3, tenemos que $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Luego podemos derivar y concluir que u_ε resuelve la siguiente ecuación

$$\begin{cases} a_{11}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1^2} + a_{22}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_2^2} + a_{12}\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_1 \partial x_2} = -v^{2-p} f_\varepsilon & \text{en } \Omega \\ u_\varepsilon = g_\varepsilon & \text{en } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1.6}$$

donde $v = (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}}$, $v_1 = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1}$ y $v_2 = \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2}$ y los coeficientes son:

$$a_{11} = [1 + (p-2)(\frac{v_1}{v})^2],$$
$$a_{22} = [1 + (p-2)(\frac{v_2}{v})^2],$$
$$a_{12} = 2(p-2)(\frac{v_1 v_2}{v^2}).$$

Luego (3.1.6) es uniformemente elíptica, luego por Teorema 1.4.1 tenemos:

$$\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C(\| f_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^{2-p} \|_{L^2(\Omega)} + \| g_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)}) \tag{3.1.7}$$

con C independiente de ε.

En particular, para el caso $p = 2$ tenemos

$$\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)} \leqslant C(\| f_\varepsilon \|_{L^2(\Omega)} + \| g_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)})$$

por lo tanto, $\{\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)}\}$ está acotada.

Por otro lado, si $p < 2$, a partir de la desigualdad de Hölder y los teoremas de inclusión de Sobolev 1.1.4, y que $2^* = \infty$ cuando $N = 2$ llegamos a que

$$\| f_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^{2-p} \|_{L^2(\Omega)} \leqslant C \| f_\varepsilon \|_{L^{q^*}(\Omega)} (\| u_\varepsilon \|_{W^{1,2(2-p)q^*/(q^*-2)}(\Omega)})^{2-p} \leqslant C(\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)})^{2-p},$$

donde C es independiente de ε y $2 < q^* \leqslant q$ es tal que $2(2-p)q^*/(q^*-2) > 1$. Por lo tanto en este caso también $\{\| u_\varepsilon \|_{H^2(\Omega)}\}$ está acotada ya que $2 - p < 1$.

Lo que implica la existencia de una subsucesión, que por comodidad notaremos u_ε, tal que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ fuerte en $H^1(\Omega)$ y débil en $H^2(\Omega)$ (pues la inmersión $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ es compacta cuando $N = 2$). Es claro usando el teorema de traza que $u \in V_g$.

Resta probar que u es solución débil de (1.2.1).

Para el caso $p = 2$ como u_ε cumple que

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \nabla v \, dx = \int_\Omega f_\varepsilon v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

y $u_\varepsilon \to u$ en $H^1(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx$$

Luego queda demostrado para el caso $p = 2$.

Veamos ahora el caso $1 < p < 2$.

Como u_ϵ es solución de la ecuación (3.1.6) tenemos que

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{p/2-1} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f_\varepsilon v\, dx \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{3.1.8}$$

Por otro lado,

$$\int_\Omega \left[(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right] \cdot \nabla v\, dx = I + II \tag{3.1.9}$$

Donde,

$$I = \int_\Omega [(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon - (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u] \nabla v\, dx$$
$$II = \int_\Omega [(\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u - |\nabla u|^{p-2} \nabla u] \nabla v\, dx$$

Usando la desigualdad (1.2.8) tenemos que

$$|(\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon - (\varepsilon + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u| \leqslant M |\nabla (u_\varepsilon - u)|^{p-1}$$

con M independiente a ε.

Por lo tanto tenemos que $I \leqslant C \parallel \nabla(u_\varepsilon - u) \parallel_{L^p}^{p-1} \parallel \nabla v \parallel_{L^p}$, y como u_ε converge a u fuerte en $H^1(\Omega)$ entonces $I \longrightarrow 0$

Por otro lado, como $\left| (|\nabla u|^2 + \varepsilon)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u \right| \leqslant |\nabla u|^{p-1} \ \in L^1(\Omega)$ por convergencia mayorada, $II \longrightarrow 0$

Luego tenemos que

$$\int_\Omega (\varepsilon + |\nabla u_\varepsilon|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u_\varepsilon \nabla v\, dx \longrightarrow \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \forall v \in \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Por esto último, usando que $f_\varepsilon \to f$ en $L^q(\Omega)$ y tomando límite en (3.1.8) tenemos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

Luego u es solución de (1.2.1) y $u \in H^2(\Omega)$ $\square$

Observación 3.1.10. *Observar que para el caso $p > 2$ y $f = 0$ se puede repetir la misma cuenta que en el teorema anterior (ver (3.1.7)). Luego en ese caso también se tiene regularidad H^2. Pero en general no se sabe si se tiene esta regularidad global.*

3.2. Caso Dominio Convexo

OBSERVACIÓN 3.2.1. *Sea Ω un conjunto convexo, existe una sucesión $\{\Omega_m\}_{m\in I\!N}$ de subconjuntos de Ω convexos con borde C^2 tal que $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$ para todo $m \in I\!N$ y $|\Omega \setminus \Omega_m| \to 0$*

1. *Luego, existe una constante C que depende de $|\Omega|$ tal que*

$$\| v \|_{L^p(\Omega_m)} \leq C \| \nabla v \|_{L^p(\Omega_m)} \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega_m)$$

   para todo $m \in I\!N$. Esto se deduce del Teorema 1.1.8, usando que $\Omega_m \subset \Omega_{m+1}$ para todo $m \in I\!N$.
2. *Las constantes de Lipschitz de Ω_m ($m \in I\!N$) están uniformemente acotadas (ver [**3**]). Por lo tanto, los operadores de extensión $E_{1,m} : W^{1,p}(\Omega_m) \to W^{1,p}(\Omega)$ y $E_{2,m} : H^2(\Omega_m) \to H^2(\Omega)$ definidos como en [**3**] satisfacen que $\| E_{1,m} \|$ y $\| E_{2,m} \|$ están uniformemente acotadas.*
3. *Por (2) y el Teorema 1.1.4 existe una constante C independiente de m tal que*

$$\| v \|_{L^{p*}(\Omega_m)} \leq C \| v \|_{W^{1,p}(\Omega_m)} \quad \forall v \in W^{1,p}(\Omega_m),$$

   para todo $m \in I\!N$

TEOREMA 3.2.2. *Sea Ω un conjunto abierto acotado convexo en $I\!R^2$. Sea $g = 0$, $f \in L^q(\Omega)$ $(q > 2)$ y u la única solución de* (1.2.1)*. Entonces $u \in H^2(\Omega)$ si $1 < p \leqslant 2$*

DEMOSTRACIÓN. Por la observación anterior podemos asumir que existen $\Omega_m \subset \Omega$ convexos con borde C^2 tal que $dist(\partial\Omega, \partial\Omega_m) \to 0$.

Sea u_m la solución de

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (|\nabla u_m|^{p-2} \nabla u_m) = f & \text{en } \Omega_m \\ u_m = 0 & \text{en } \partial\Omega_m \end{cases} \tag{3.2.3}$$

por el teorema anterior sabemos que $u_m \in H^2(\Omega_m) \cap H_0^1(\Omega_m)$ luego derivando tenemos que u_m resuelve (3.1.6) para $\varepsilon = 0$ y $\Omega = \Omega_m$. Luego tenemos por el Teorema 1.4.1 que,

$$|u_m|_{H^2(\Omega_m)} \leqslant C \| f |\nabla u_m|^{2-p} \|_{L^2(\Omega_m)} \tag{3.2.4}$$

con C independiente a m.

Usando las desigualdad 1 de la Observación 3.2.1 tenemos que

$$\| u_m \|_{L^2(\Omega_m)} \leq C |u_m|_{H^1(\Omega_m)} \tag{3.2.5}$$

con C independiente de m.

Por otro lado usando la desigualdad de Young tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2\, dx &= -\int_{\Omega_m} u_m \triangle u_m\, dx\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_m} |u_m|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\Omega_m} (\triangle u_m)^2\, dx\\ &\leqslant C\frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_m} |\nabla u_m|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|u_m|^2_{H^2(\Omega_m)}\, dx\end{aligned}$$

donde usamos nuevamente el ítem 1 de la Observación 3.2.1.

Luego

$$\| \nabla u_m \|_{L^2(\Omega_m)} \leqslant C|u_m|_{H^2(\Omega_m)} \tag{3.2.6}$$

con C independiente de m.

Luego, por (3.2.5) y (3.2.6) tenemos que

$$\| u_m \|_{H^2(\Omega_m)} \leqslant C|u_m|_{H^2(\Omega_m)} \leqslant C \| f|\nabla u_m|^{2-p} \|_{L^2(\Omega_m)} . \tag{3.2.7}$$

Tomando q^* tal que $2 < q^* < q$, $s = \frac{2(2-p)q*}{q*-2} > 1$, y aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\| f|\nabla u_m|^{2-p} \|_{L^2(\Omega_m)} \leqslant \| f \|_{L^{q^*}(\Omega_m)} \| \nabla u_m \|^{2-p}_{L^s(\Omega_m)} . \tag{3.2.8}$$

Además por el ítem 3 de la Observación 3.2.1 podemos decir que existe una constante C independiente de m tal que:

$$\begin{aligned}\| \nabla u_m \|^{2-p}_{L^s(\Omega_m)} &\leqslant C\Big[\| (\nabla u_m)_{x_1} \|_{W^{1,2}(\Omega_m)} + \| (\nabla u_m)_{x_2} \|_{W^{1,2}(\Omega_m)} \Big]^{2-p}\\ &\leqslant C \| u_m \|^{2-p}_{H^2(\Omega_m)} .\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Luego por (3.2.7), (3.2.8) y (3.2.9) llegamos a que existe C independiente de m tal que

$$\| u_m \|_{H^2(\Omega_m)} \leqslant C.$$

Ahora llamemos $\underline{u}_m$ a la extensión por cero de u_m. Luego $\{\| \underline{u}_m \|_{H^1(I\!R^2)}\}$ está acotada por lo que existe una sucesión que notaremos $\{\underline{u}_{m_k}\}$ que converge débilmente en $H^1(I\!R^2)$ a una $\underline{u}$. Además podemos suponer (vía otra subsucesión) que para cualquier abierto $G \subset\subset \Omega$, $\underline{u}_{m_k} \to \underline{u}$ fuerte en $H^1(G)$.

Notemos que $u_{m_k}(1-\chi_\Omega) = 0$ para todo k (χ_Ω la función característica en Ω), entonces $\underline{u}(1-\chi_\Omega) = 0$ ya que $\underline{u}_{m_k} \to \underline{u}$ fuerte en $L^2(\Omega)$. Luego, sea $u = \underline{u}|_\Omega$, por Teorema 1.1.9, $u \in H^1_0(\Omega)$.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, y sea $K(\varphi) \in I\!N$ tal que el soporte de φ esté contenido en Ω_{m_k} $\forall k \geqslant K(\varphi)$. Utilizando que u_{m_k} es solución de (3.2.3) tenemos

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega_{m_k}} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\, dx = \int_{\Omega_{m_k}} f\varphi\, dx$$

Si ahora mostramos que

$$\int_{\Omega_{m_k}} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\,dx \to \int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi\,dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx$$

vamos a tener que u es solución de $(\mathbf{P})$, pues ya sabemos que

$$\int_{\Omega_{m_k}} f\varphi\,dx = \int_{\Omega} f\varphi\,dx \quad \forall k \geqslant K(\varphi).$$

Sea $G \subset\subset \Omega$, como $\bigcup_{m_k}\Omega_{m_k}$ es un cubrimiento por abiertos entonces existe $K(G) \in \mathbb{N}$ tal que $G \subset \Omega_{m_k}$ $\forall k \geqslant K(G)$. Luego para todo $k \geqslant max\{K(G), K(\varphi)\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{\Omega} |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi\,dx - \int_{\Omega_{m_k}} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\,dx\Big| \leqslant \Big|\int_{\Omega\setminus G} |\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u}\nabla\varphi\,dx\Big|\\
&+\Big|\int_{\Omega_{m_k}\setminus G} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\,dx\Big| + \Big|\int_{G} (|\nabla \underline{u}|^{p-2}\nabla \underline{u} - |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k})\nabla\varphi\,dx\Big|\\
&= T_1^k + T_2^k + T_3^k
\end{aligned}$$

Veamos que eligiendo un G adecuado, obtenemos que $T_1^k + T_2^k + T_3^k \xrightarrow{k\to\infty} 0$.

Primero tenemos que,

$$\begin{aligned}
T_1^k + T_2^k &\leqslant M\Big[\Big|\int_{\Omega\setminus G} |\nabla \underline{u}|^{p-1}\,dx\Big| + \Big|\int_{\Omega_{m_k}\setminus G} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-1}\,dx\Big|\Big]\\
&\leqslant M\Big[|\Omega\setminus G|^{1/p}\Big(\parallel \underline{u} \parallel_{W^{1,p}(\Omega)}\Big)^{p-1} + |\Omega_{m_k}\setminus G| \parallel \underline{u}_{m_k} \parallel^{p-1}_{W^{1,p}(\Omega_{m_k})}\Big]
\end{aligned}$$

Observemos que dado $\varepsilon > 0$, si eligimos G de manera que $|\Omega\setminus G|$ sea lo suficientemente chico y utilizando que $\{\parallel \underline{u}_{m_k} \parallel_{W^{1,p}(\Omega_{m_k})}\}$ está acotada, conseguimos que $T_1^k + T_2^k < \varepsilon/2$.

Utilizando la desigualdad (1.2.8) con $\varepsilon = 0$ y luego la desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
T_3^k &\leqslant C\int_G |\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-1}|\nabla\varphi|\,dx\\
&\leqslant C\Big(\int_G |\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}_{m_k}|^{p}\,dx\Big)^{\frac{p-1}{p}}\Big(\int_G |\nabla\varphi|^p\,dx\Big)^{1/p}\\
&= C \parallel \varphi \parallel_{W^{1,p}(G)} \parallel u - u_{m_k} \parallel^{p-1}_{W^{1,p}(G)}
\end{aligned}$$

Luego, como $\underline{u}_{m_k} \to \underline{u}$ fuerte en $H^1(G)$, entonces exite $k \geqslant max\{K(G), K(\varphi)\}$ tal que $T_3^k < \varepsilon/2$.

Luego tenemos que, $\int_{\Omega_{m_k}} |\nabla \underline{u}_{m_k}|^{p-2}\nabla \underline{u}_{m_k}\nabla\varphi\,dx \to \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla\varphi\,dx$, por lo tanto ya probamos que u es solución de $(\mathbf{P})$.

Nos queda ver que $u \in H^2(\Omega)$. Sea $v_{m,i,j} = \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i\partial x_j}$. Veamos que $\parallel v_{m,i,j} \parallel_{L^2(\Omega)} \leqslant C$ $\forall\ 1 \leqslant i,j \leqslant 2$.

Sea $\varphi \in C_0^\infty(I\!R^2)$ entonces

$$\int_{I\!R^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \, dx \leqslant \int_{\Omega_m} \left| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \right| dx \leqslant \left\| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega_m)} \| \varphi \|_{L^2(I\!R^2)} \leqslant C \| \varphi \|_{L^2(\varphi)} .$$

Luego, $\left| \int_{I\!R^2} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \, dx \right| \leqslant C \| \varphi \|_{L^2(I\!R^2)} \quad \forall \varphi \in L^2(I\!R^2)$, esto implica que $\left\| \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(I\!R^2)} \leqslant C$.

Luego existe una subsucesión $\{v_{m_k,i,j}\}_{k \geqslant 1}$ que converge débil en $L^2(I\!R^2)$ a una $v_{i,j} \in L^2(I\!R^2)$.

Para $k \geqslant K(\varphi)$ tenemos que,

$$\int_\Omega \underline{u}_{m_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx = \int_{\Omega_{m_k}} u_{m_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx = \int_{\Omega_{m_k}} \frac{\partial^2 u_{m_k}}{\partial x_i \partial x_j} \varphi \, dx = \int_\Omega v_{m_k,i,j} \varphi \, dx.$$

Por otro lado, por convergencia débil tenemos que

$$\int_\Omega \underline{u}_{m_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx \to \int_\Omega \underline{u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx \quad \text{y}$$

$$\int_\Omega v_{m_k,i,j} \varphi \, dx \to \int_\Omega v_{i,j} \varphi \, dx$$

luego

$$\int_\Omega \underline{u} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \, dx = \int_\Omega v_{i,j} \varphi \, dx$$

lo que implica que $v_{i,j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ y entonces $u \in H^2(\Omega)$.

□

Como consecuencia de este resultado de regularidad tenemos el siguiente,

Teorema 3.2.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio convexo con $\partial\Omega \in C^2$ y $1 < p \leq 2$, $f \in L^q(\Omega)$ con $q > 2$, $g \in H^2(\Omega)$, u y u^h las únicas soluciones de* (**P**) *y* ($\mathbf{P}^h$) *respectivamente. Entonces*

$$\|u - u^h\|_{W^{1,p}(\Omega_h)} \leq C h^{p/2},$$

donde C depende de p, $\|f\|_{L^q(\Omega)}$ y $\|g\|_{H^2(\Omega)}$.

Capítulo 4

Método de Descomposición Coordinada y ejemplos numéricos

4.1. Método de Descomposición–Coordinada

En esta sección describiremos el método de Descomposición–Coordinada, las demostraciones de los resultados que enunciaremos se pueden encontrar en [**8**].

Sean V, H espacios topológicos vectoriales, $B \in \mathcal{L}(V, H)$ y $F\colon H \to \overline{\mathbb{R}}, G\colon V \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones convexas, semicontínuas inferiormente. En esta sección describiremos un método para aproximar la solución de problemas variacionales del siguiente tipo

$$\text{(P)} \qquad \min_{v \in V}(F(Bv) + G(v)).$$

El método de descomposición coordinada se basa en el siguiente resultado.

Teorema 4.1.1. *El problema* (P) *es equivalente a*

$$\text{(P2)} \qquad \min_{\{v,q\} \in W}(F(q) + G(v)).$$

donde $W = \{\{v, q\} \in V \times H : Bv - q = 0\}$.

Supongamos que V y H son espacios de Hilbert, se define el funcional Lagrangiano aumentado $\mathcal{L}_r$ asociado a (P2), como

$$\mathcal{L}_r(v, q, \mu) = F(q) + G(v) + \langle \mu, Bv - q\rangle_H + \frac{r}{2}\|Bv - q\|_H^2.$$

Definición 4.1.2. *Se dice que* $\{u, p, \lambda\} \in V \times H \times H$ *es un punto silla de* $\mathcal{L}_r$ *si*

$$\mathcal{L}_r(u, p, \mu) \leq \mathcal{L}_r(u, p, \lambda)\ \forall \{v, q, \lambda\} \in V \times H \times H$$

.

Se tiene el siguiente

Teorema 4.1.3. *Sea* $r > 0$ *y* $\{u, p, \lambda\} \in V \times H \times H$ *un punto silla de* $\mathcal{L}_r$ *luego* u *es una solución de* (P) *y* $p = Bu$.

Luego para aproximar las soluciones de (P) usaremos un algoritmo que aproxima los puntos sillas de $\mathcal{L}_r$.

Algoritmo

Dado $r > 0, \rho > 0$ y

$$\{\eta_0, \lambda_1\} \in H \times H;$$

luego, sabiendo $\{\eta_{n-1}, \lambda_n\}$, definimos $\{u_n, \eta_n, \lambda_{n+1}\} \in V \times H \times H$ como

$$\begin{aligned} G(v) - G(u_n) + \langle \lambda_n, B(v-u_n)\rangle_H + r\langle Bu_n - \eta_{n-1}, B(v-u_n)\rangle_H \geq 0 \quad \forall v \in V; \\ F(\eta) - F(\eta_n) - \langle \lambda_n, \eta - \eta_n\rangle_H + r\langle \eta_n - Bu_n, \eta - \eta_n\rangle_H \geq 0 \quad \forall \eta \in H \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho(Bu_n - \eta_n). \end{aligned}$$

La ventaja del algoritmo es que el problema se reduce ahora a resolver, en cada paso, dos ecuaciones donde las dos variables están desacopladas.

Finalmente tenemos la convergencia del algoritmo.

Teorema 4.1.4. *Asumiendo que V y H tienen dimensión finita y que* (P) *tiene solución u. Si*

- *B es inyectiva;*
- *G función convexa, propia y semicontínua inferiormente ;*
- *$F = F_0 + F_1$ con F_1 función convexa, propia y semicontínua inferiormente en H y F_0 estrictamente convexa y C^1 en H;*
- $0 < \rho < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} r$,

entonces

$$\begin{aligned} u_n &\to u && \textit{fuerte en } V, \\ \eta_n &\to Bu && \textit{fuerte en } H, \\ \lambda_{n+1} - \lambda_n &\to 0 && \textit{fuerte en } H, \end{aligned}$$

y λ_n está acotada en H.

4.2. Ejemplos numéricos

En esta sección, para cada $h \geq 0$ vamos a aproximar la solución u^h de $(\mathbf{P}^h)$ por la sucesión u_n^h dada por el algoritmo descripto en la Sección 4.1. Para simplificar vamos a notar aquí $u_n^h = u_n$.

Sea $V = S_g^h$,

$$H = \left\{\eta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \eta|_\kappa = \text{ constante } \right\},$$

$$F(\eta) = \int_\Omega \frac{|\eta|^p}{p}\, dx, \quad G(v) = \int_\Omega fv\, dx,$$

y $B : V \to H$ definida por $B(v) = \nabla v$. Entonces

$$J_{\Omega^h}(v) = F(B(v)) + G(v).$$

V y H están dotadas con la norma L^2- y con la norma $L^2 \times L^2$, respectivamente y $r = \rho = 1$.

El algoritmo en este caso es:

Dado

$$\{\eta_0, \lambda_1\} \in H \times H,$$

luego, sabiendo $\{\eta_{n-1}, \lambda_n\}$, definimos $\{u_n, \eta_n, \lambda_{n+1}\} \in V \times H \times H$ como

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Omega (\eta_{n-1} - \lambda_n) \nabla v \, dx, \qquad \forall v \in V_0, \tag{4.2.1}$$

$$\int_\Omega (|\eta_n|^{p-2}\eta_n + \eta_n)\eta \, dx = \int_\Omega (\lambda_n + \nabla u_n)\eta \, dx \qquad \forall \eta \in H_0, \tag{4.2.2}$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + (\nabla u_n - \eta_n).$$

Observación 4.2.3. *Como V, H, F, G, B, ρ y r satisfacen las condiciones del Teorema 4.1.4 luego $u_n \to u^h$ y $\nabla u_n \to \nabla u^h$.*

Observemos que (4.2.1) se puede reemplazar por,

$$MU_n = F_n,$$

donde

$$M_{ij} = \int_\Omega \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx,$$
$$F_{n,j} = \int_\Omega \varphi_j f \, dx + \int_\Omega (\eta_{n-1} - \lambda_n) \nabla \varphi_j \, dx,$$

$\{\varphi_j\}_{j \le N}$ es una base de V con $m = \dim(V)$ y

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} U_{n,j} \varphi_j.$$

Por otro lado, definimos $\eta_{n,\kappa} = \eta_n|_\kappa$, y análogamente definimos $\lambda_{n,\kappa}$ y $\nabla_\kappa u_n$.

Luego (4.2.2) se puede reemplazar por,

$$(|\eta_{n,\kappa}|^{p-2} + 1)\eta_{n,\kappa} = \lambda_{n,\kappa} + \nabla_\kappa u_n,$$

tomando módulo tenemos que $|\eta_{n,\kappa}|$ resuelve

$$|\eta_{n,\kappa}|^{p-1} + |\eta_{n,\kappa}| = |\lambda_{n,\kappa} + \nabla_\kappa u_n|,$$

y además

$$\eta_{n,\kappa} = \frac{\lambda_{n,\kappa} + \nabla_\kappa u_n}{|\eta_{n,\kappa}|^{p-2} + 1}.$$

Resumiendo, cada iteración del algoritmo se puede reducir a lo siguiente:

Encontrar $\{u_n, \eta_n, \lambda_{n+1}\} \in V \times H \times H$ tal que

$$u_n = \sum_{j=1}^{m} U_{n,j} \varphi_j,$$

donde U_n resuelve,

$$MU_n = F_n, \tag{4.2.4}$$

$$\eta_{n,\kappa} = \frac{\lambda_{n,\kappa} + \nabla_\kappa u_n}{b^{p-2} + 1}$$

donde $b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es solución de

$$b^{p-1} + b = |\lambda_{n,\kappa} + \nabla_\kappa u_n| \tag{4.2.5}$$

y finalmente

$$\lambda^{n+1} = \lambda_n + (\nabla u_n - \eta_n).$$

Observar que cada paso del algoritmo consiste en resolver el sistema lineal (4.2.4) y luego, para cada elemento κ la ecuación no–lineal en una dimensión (4.2.5).

Ahora vamos a aplicar el algoritmo para algunos ejemplos. Para cada h, usaremos el algoritmo y aproximaremos u^h por u_n^h, y finalmente calculamos $\|u_n^h - u\|_{W^{1,q}(\Omega)}$ para distintos q. Notamos $e = u_n^h - u$.

Nuestro problema test será resolver en el dominio $\Omega = [-1\ 1] \times [-1\ 1]$ el siguiente problema radial. Los datos son

$$f = F(r) = r^\sigma,$$

con dato de borde y solución exacta

$$u = U(r) = (p-1)[1/(\sigma+2)]^{1/(p-1)}[1 - r^{(\sigma+p)/(p-1)}]/(\sigma+p).$$

Vamos a tomar distintos valores de p y σ y veremos como se aplican los teoremas demostrados y que conclusiones nuevas encontramos.

Para el esquema numérico utilizamos la siguiente malla regular: partimos cada lado del cuadrado en N y a su vez cada cuadrado lo dividimos en dos triangulos. De esta forma cada triangulo τ de la triangulación cumple $\mathrm{diam}(\tau) = h = \sqrt{2}/N$.

Ejemplo 4.2.6 (Caso $p = 4$ y $\sigma = 0$). *Se puede ver que en este caso $u \in W^{2,s}(\Omega)$ para todo $s < 3$. Entonces por el Teorema 2.3.38 tenemos que*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,q}(\Omega)} \leqslant Ch \quad \forall\, q < 3/2.$$

Por otro lado, calculamos los errores $\| u - u_n^h \|_{W^{1,1}(\Omega)}$ y $\| u - u_n^h \|_{H^1(\Omega)}$ para distintos valores de N. Obteniendo la siguiente tabla.

$p = 4 \quad \sigma = 0$		
N	$\| u - u_n^h \|_{W^{1,1}(\Omega)}$	$\| u - u_n^h \|_{H^1(\Omega)}$
10	*0.2413*	*0.1515*
20	*0.1206*	*0.0777*
30	*0.0803*	*0.0523*
40	*0.0602*	*0.0395*
50	*0.0482*	*0.0317*
60	*0.0401*	*0.0265*
70	*0.0344*	*0.0227*
80	*0.0301*	*0.0199*

Cuadro 1. Errores para $p = 4$ y $\sigma = 0$

Haciendo un ajuste de la forma $\| e \|_{W^{1,1}(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_1}$ *y* $\| e \|_{H^1(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_2}$ *podemos ver que el orden numérico de* $\| u - u_n^h \|_{H^1(\Omega)}$ *también es uno.*

$p = 4 \quad \sigma = 0$	
α_1	α_2
1.0006	*0.9633*
1.0031	*0.9763*
1.0014	*0.9757*
0.9963	*0.9858*
1.0091	*0.9827*
0.9946	*1.0041*
1.0000	*0.9859*

Cuadro 2. Orden numérico para $p = 4$ y $\sigma = 0$

Ejemplo 4.2.7 (Caso $p = 3/2$ y $\sigma = 0$). *Se puede ver que* $u \in W^{3,1}(\Omega) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega})$, *luego podemos aplicar el Teorema 2.2.14, lo cual tenemos que*

$$\| u - u^h \|_{W^{1,3/2}(\Omega)} \leqslant Ch.$$

Calculamos los errores $\| u - u_n^h \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *y* $\| u - u_n^h \|_{H^1(\Omega)}$ *para distintos valores de* N *obteniendo la siguiente tabla.*

$p = 3/2 \quad \sigma = 0$		
N	$\| u - u_n^h \|_{W^{1,p}(\Omega)}$	$\| u - u_n^h \|_{H^1(\Omega)}$
10	*0.0627*	*0.0542*
20	*0.0314*	*0.0272*
30	*0.0209*	*0.0181*
40	*0.0157*	*0.0136*
50	*0.0126*	*0.0109*
60	*0.0105*	*0.0091*
70	*0.009*	*0.0078*
80	*0.0078*	*0.0068*

Cuadro 3. Errores para $p = 3/2$ y $\sigma = 0$

Ajustamos los errores de la forma $\| e \|_{W^{1,p}(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_1}$ *y* $\| e \|_{H^1(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_2}$. *Podemos observar numericamente que también tenemos orden* h *para la cota del error en* $H^1(\Omega)$.

$p = 3/2 \quad \sigma = 0$	
α_1	α_2
0.9977	*0.9947*
1.0039	*1.0045*
0.9945	*0.9936*
0.9858	*0.9918*
1.0000	*0.9899*
1.0000	*1.0000*
1.0717	*1.0275*

CUADRO 4. Orden numérico para $p = 3/2$ y $\sigma = 0$

EJEMPLO 4.2.8 (Caso $p = 3/2$ y $\sigma = -19/20$). *Se puede ver que* $u \in W^{2,s}(\Omega)$ *si y solo si* $s < \frac{20}{9} = 2+\frac{2}{9}$. *Luego por el Teorema 2.2.1 tendremos que* $\| u-u^h \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leqslant Ch^{3/4}$.

En este caso no podemos aplicar el Teorema 2.2.14 Sin embargo podemos ver que numericamente el orden del error $\| u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega)}$ *es* h*, es más también obtenemos orden* 1 *para el error en norma* $H^1(\Omega)$ *(ver Cuadro 5 y Cuadro 6).*

$p = 3/2 \quad \sigma = -19/20$		
N	$\| \pi_h u - u^h \|_{W^{1,p}(\Omega)}$	$\| \pi_h u - u^h \|_{H^1(\Omega)}$
10	*0,3758*	*0.3359*
20	*0.1916*	*0.1798*
30	*0.1281*	*0.1235*
40	*0.0960*	*0.0943*
50	*0.0767*	*0.0763*
60	*0.0638*	*0.0642*
70	*0.0546*	*0.0554*
80	*0.0477*	*0.0488*

CUADRO 5. Errores para $p = 3/2$ y $\sigma = -19/20$

$p = 3/2$	$\sigma = -19/20$
α_1	α_2
0.9719	*0.9016*
0.9929	*0.9264*
1.0027	*0.9377*
1.0058	*0.9492*
1.0100	*0.9471*
1.0102	*0.9564*
1.0118	*0.9500*

CUADRO 6. Orden Numérico para $p = 3/2$ y $\sigma = -19/20$

Acá estamos ajustando $\| e \|_{W^{1,p}(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_1}$ *y* $\| e \|_{H^1(\Omega)} \sim Ch^{\alpha_2}$.

Conclusiones sobre los resultados numéricos:

Observamos que en los ejemplos numéricos el orden resulta ser mejor que el esperado por los resultados teóricos. El hecho de que lleguemos a probar orden óptimo para la norma $W^{1,p}(\Omega)$ asumiendo mucha regularidad sobre las soluciones tiene que ver con un problema técnico. De hecho, en el trabajo [**5**] los autores prueban orden óptimo para esta norma y para $1 < p \leq 2$ asumiendo solamente que las soluciones cumplen $\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|D^2u|^2 \; dx < \infty$. De todas formas en los ejemplos pudimos ver que teníamos también ese orden para la norma $H^1(\Omega)$.

Bibliografía

[1] Jacques Baranger and Khalid Najib, *Analyse numérique des écoulements quasi-newtoniens dont la viscosité obéit à la loi puissance ou la loi de carreau*, Numer. Math. **58** (1990), no. 1, 35–49.

[2] John W. Barrett and W. B. Liu, *Finite element approximation of the p-Laplacian*, Math. Comp. **61** (1993), no. 204, 523–537.

[3] Denise Chenais, *On the existence of a solution in a domain identification problem*, J. Math. Anal. Appl. **52** (1975), no. 2, 189–219.

[4] Ph. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*, vol. 68, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[5] Carsten Ebmeyer and WB. Liu, *Quasi-norm interpolation error estimates for the piecewise linear finite element approximation of p-Laplacian problems*, Numer. Math. **100** (2005), no. 2, 233–258.

[6] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[7] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[8] Roland Glowinski, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Scientific Computation, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Reprint of the 1984 original.

[9] P. Grisvard, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Monographs and Studies in Mathematics, vol. 24, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.

[10] Gary M. Lieberman, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Anal. **12** (1988), no. 11, 1203–1219. MR 969499 (90a:35098)

[11] W. B. Liu and John W. Barrett, *A remark on the regularity of the solutions of the p-Laplacian and its application to their finite element approximation*, J. Math. Anal. Appl. **178** (1993), no. 2, 470–487. MR 1238889 (95a:35016)

[12] Carlo Miranda, *Partial differential equations of elliptic type*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 2, Springer-Verlag, New York, 1970, Second revised edition. Translated from the Italian by Zane C. Motteler.

[13] Luboš Pick, Alois Kufner, Oldřich John, and Svatopluk Fučík, *Function spaces. Vol. 1*, extended ed., De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, vol. 14, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2013.

[14] Peter Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations **51** (1984), no. 1, 126–150.