UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Órbitas de polinomios en espacios de Fréchet de dimensión infinita

Adrián Soria

Director: Santiago Muro

Diciembre de 2014

Agradecimientos

Bueno, después de mucho esfuerzo llegó este momento tan esperado, conocí mucha gente buena e interesante en el transcurso de esta gran carrera, amigos inolvidables con los que espero que la amistad perdure por siempre. Soy un agradecido de las personas que aportaron su granito de arena para que llegue a terminar la carrera, y no me alcanzarían las páginas para agradecerles a todos, trataré de ser lo mas conciso posible.

Primero que nada, quería agradecer a mi director Santiago Muro, un excelente profesional, y por sobre todas las cosas una excelente persona, nunca me dejó en banda, siempre buena predisposición para las consultas que pudiera hacerle y sus buenos consejos y correcciones me ayudaron muchísimo para hacer de mi tesis un gran trabajo del cual estoy muy orgulloso. No tengo dudas que elegí al mejor director, muchísimas gracias Santiago, habría sido muy difícil lograrlo sin tu ayuda.

A mis viejos y mi hermano, que me bancaron toda la carrera, me dieron siempre su apoyo incondicional e hicieron que no me falte nunca nada y pudiera dedicarme de lleno a la carrera. Siempre soportaron mi mal humor cuando me iba mal en los parciales y me dieron fuerzas para seguir en momentos de debilidad en los que dudé, son todo para mí y les estaré agradecido por siempre.

A docentes excelentes que tuve en la carrera como Daniel Carando, Esteban Andruchow, Malena Becker, Jorge Zilber, Gabriel Minian, Pablo Groisman, Antonio Cafure (un fenómeno con el cual me siento identicado), Mariela Sued, Mariana Prieto, Nico Sirolli, Constanza Sanchez de la Vega y Patricia Quattrini. Sus clases fueron excelentes y motivaron mi interés por la carrera, aprendí mucho de ustedes.

A mis compañeros de trabajo Gastón Freire, Ezequiel Martín, Ezequiel Dratman, Mariela Rajngewerc, María Clara Ferrer y Martín el loco Bataglia. Todos son excelentes personas con muy buena onda y mucho compañerismo que valoro muchísimo. Me ayudaron mucho y da gusto trabajar con ustedes. También a María del Carmen Pérez y Gregorio Glass que me dieron la posibilidad de crecer a nivel laboral e incrementar mi interés por la docencia.

A Santiago Saglietti, Tomás Rodriguez, Nico Sirolli y Marcelo Valdettaro, sin dudas de los que mas aprendí. Especialmente de Santiago Saglietti y Tomás Rodriguez, que me ayudaron muchísimo en la primera mitad de la carrera que fue la que mas me costó.

Santiago Saglietti, sos el mas groso que conocí en esta facultad, un genio, me ayudaste siempre y no me voy a olvidar nunca de la paciencia que me tuviste y de tu buena onda para hacer que siga en momentos de debilidad, si llegué a terminar la carrera, buena parte de eso es gracias a vos.

A grandes amigos como Ale Hayes, Lucio Pantaxis (Rasin club hijo mufa), Roberto Rossetti (R.C.F), Ale Jimenez, Agus Nogueira, Lucas Suarez, Pablo Escobar, Javier De Sa Souza, Mariano Villablanca, Noe Grottesi, Gise Bellisomi, Paulita Escorcielo, Caro Naudeau, Magalí Klinger, Laura Barbagallo, Eequiel Erbaro, Laurita Cuneo, Estefi Louzau, Mariela Bisso (la morocha), Mariu Rossi (la rubia), Lucas Piana, Santiago Saglietti, Tomás Rodriguez, Nico Sirolli, Marcelo Valdettaro, Pablo Colombo, Maru Rajngewerc, Hernán Vignolo, Fede Carrá, Yanu Giménez, Eugenia Rodriguez, Patricia Bechara, Gaby Czycewsky, Carla Baroncini, Gisela Pardo, Paula Albónico, Pablo Vena, Javi García y el inolvidable Loco Dani.

A grandes amigos de la vida (podría escribir mil páginas acá, pero nombraré con los que mas cosas compartí en los últimos tiempos) como Juan Isaias Martinez (el toro), Julian Borgia (el gorrión de flores), Rubén Molina (Maravilla Martínez), Mariano Molina, Andrea Clavijo, Lula Paz, Danielle Enriquez, Araceli aire caribeño, Flavia Farías, Nahuel López, Lucas Solís, Martín Bataglia (gato ninja), Gastón Freire, Vanesa Laporta, Carla Aguirre, Fernando Lastero, Maximiliano Zárate (Palermo), Matías Gazco (el pollo), Emanuel Guerrero (flaki) y Maurito Casella.

Y por último a mis amigos Garyu, Cochi y el Tin, hinchas como yo del glorioso Club Atlético INDEPENDIENTE (rey de copas, capo de avellaneda, papá de rasin club blanca y celeste S.A. y orgullo nacional). Hasta ser vitalicios no

paramos, por muchos años más de gloria.

Índice general

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de esta tesis es estudiar el comportamiento de órbitas de polinomios definidos sobre espacios de Banach y espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. Más precisamente, se estudiarán propiedades de las iteraciones de polinomios, y se mostrará en distintos casos la existencia de polinomios *hipercíclicos*, así como también polinomios *supercíclicos, débil mixing, mixing, caóticos y frecuentemente hipercíclicos*. A su vez se relacionará a las órbitas de polinomios con los sistemas dinámicos inducidos por operadores lineales.

El término *hipercíclico* surge de la noción de operador *cíclico*, en relación al *problema del subespacio invariante*. El problema del subespacio invariante pregunta si cualquier operador en un espacio de Banach (o de Hilbert) tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. Si todo vector no nulo del espacio es cíclico para un operador T, entonces T no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales. De manera análoga, el estudio de los operadores lineales hipercíclicos está ligado a la existencia de subconjuntos cerrados invariantes, esto es, dado un operador lineal $T : X \longrightarrow X$, ¿existe un subconjunto cerrado no trivial $F \subset X$ tal que $T(F) \subset F$?. Un operador tal que todo vector no nulo es hipercíclico no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales.

Dado un espacio de Fréchet X sobre $\mathbb{K}$, un sistema dinámico determinado por una función continua $T : X \longrightarrow X$ y $x \in X$, la órbita de x por T es el conjunto $Orb(T, x) = \{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$, donde $T^n = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\text{n veces}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Decimos que x es un vector :

- *Cíclico* si el subespacio generado por $Orb(T, x)$ es denso en X,
- *Supercíclico* si $\{\lambda T^n(x), \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X,
- *Hipercíclico* si $Orb(T, x)$ es denso en X.

Decimos entonces que T es *cíclico*, (respectivamente *hipercíclico, supercíclico*) si existe $x \in X$ vector cíclico (respectivamente vector hipercíclico, supercíclico) para T. Si T es hipercíclico y tiene un conjunto denso de puntos periódicos entonces decimos que T es caótico (en el sentido de Devaney).

En general, el estudio de sistemas dinámicos caóticos está relacionado con la no linealidad del sistema. De hecho, la existencia de operadores lineales hipercíclicos no es posible en espacios de Fréchet de dimensión finita (ver Corolario 2.1.7). Sin embargo, en dimensión infinita, la dinámica lineal se vuelve no trivial.

El estudio de sistemas dinámicos lineales en espacios de dimensión infinita tuvo su origen en el artículo de Birkhoff [16] en 1929. Dado $a \in \mathbb{C}$, Birkhoff mostró la existencia de funciones enteras hipercíclicas para el operador de traslación $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ definido por

$$T_a(f)(z) = f(z + a),$$

donde $H(\mathbb{C})$ es el espacio de funciones holomorfas sobre $\mathbb{C}$. En otras palabras, Birkhoff probó que existe una función entera cuya órbita bajo el operador T_a es densa en $H(\mathbb{C})$. En 1952, MacLane [34] mostró que el operador de derivación $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ dado por

$$D(f) = f',$$

es hipercíclico. Posteriormente, en 1969, Rolewicz [44] mostró que el operador de desplazamiento hacia atrás $\lambda B : X \longrightarrow X$ es hipercíclico para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$, donde $X = c_0$ o $X = \ell_q$ $(1 \leq q < \infty)$ y $B : X \longrightarrow X$ está dado por

$$B\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = (x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}\,.$$

No es muy difícil ver que estos operadores tienen un conjunto denso de puntos periódicos, por lo que además son caóticos.

En 1969, Rolewicz [44] se preguntó si existen operadores hipercíclicos sobre todo espacio de Banach separable de dimensión infinita. En 1992, Herzog [30] mostró que la respuesta es afirmativa para el caso de los operadores supercíclicos. Unos años más tarde, Ansari [2] y Bernal-González [11] mostraron que sobre todo espacio de Banach separable de dimensión infinita existe un operador hipercíclico, respondiendo de esta forma a la pregunta formulada por Rolewicz. Posteriormente, en 1998, Bonet y Peris [17] pudieron extender este resultado a espacios de Fréchet separables de dimensión infinita.

El estudio de sistemas dinámicos lineales tuvo un gran desarrollo a partir de la década del '90, como puede verificarse en los libros recientes [5, 28]. Sin embargo, los sistemas dinámicos determinados por polinomios no lineales en espacios de dimensión infinita fueron estudiados en mucho menor medida. Más aún, en el caso lineal se conocen distintos criterios para determinar que ciertos operadores son hipercíclicos y caóticos [27, 28], mixing [27, 32] , débil mixing [26] y frecuentemente hipercíclicos [8, 7, 18]. Sin embargo, no se conocen criterios para el caso de los polinomios, con lo cual resulta difícil obtener polinomios hipercíclicos sobre espacios de Banach y de Fréchet.

El estudio de órbitas de polinomios en espacios de dimensión infinita fue iniciado por Bernardes [12]. En ese artículo Bernardes probó que, contrariamente al caso lineal, en ningún espacio de Banach pueden existir polinomios homogéneos hipercíclicos. Sin embargo la dinámica de los polinomios homogéneos dista de ser trivial, de hecho en el mismo artículo Bernardes demostró que en cualquier espacio de Banach existen polinomios homogéneos supercíclicos de cualquier grado. Más aún, el hecho de que no existan polinomios homogéneos hipercíclicos en espacios de Banach proviene de la existencia de una bola centrada en cero, de radio "límite". Más precisamente, si P es un polinomio d-homogéneo y consideramos $r = \text{mín}\left\{1, \dfrac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}\right\}$, entonces una vez que la órbita de P ingresa en $B(0, r)$, no puede volver a salir, más aún, converge a cero. Sin embargo, las órbitas que no ingresan en esta bola sí pueden mostrar un comportamiento complejo, por ejemplo, una órbita puede a su vez ser no acotada y tener puntos de acumulación en el borde de la bola límite. Además, en el caso de espacios de Fréchet no normables (en los que no podemos hablar de bola límite) sí se pueden mostrar ejemplos de polinomios homogéneos hipercíclicos. El primero en notar esto fue Peris en [39], donde mostró que existen polinomios d-homogéneos caóticos (en particular hipercíclicos) sobre el espacio de Fréchet $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ para todo $d \geq 2$. Otros ejemplos de polinomios homogéneos hipercíclicos en espacios de Fréchet fueron dados en [3, 36].

Respecto a iteraciones de polinomios no homogéneos, Peris en [40] mostró ejemplos de polinomios caóticos no homogéneos en los espacios ℓ_q ($1 \leq q < \infty$). En primer instancia, mostró que si $X = \ell_q$ ($1 \leq q < \infty$) o $X = c_0$, el polinomio $P : X \longrightarrow X$ definido por

$$P\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left((x_{i+1} + 1)^m - 1\right)$$

es caótico para todo $m \geq 2$. Mas aún, si definimos $P : X \longrightarrow X$ por

$$P\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left(p(x_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}\right),$$

donde $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $m \geq 2$ tal que $p(0) = 0$, entonces Peris estudió la relación que existe entre el hecho de que P sea caótico con la dinámica inducida por p en $\mathbb{C}$. Más precisamente, probó que si 0 es un punto fijo repulsor de p, es decir, si $p(0) = 0$ y $|p'(0)| > 1$, entonces P es caótico en el sentido de Devaney. Además, probó que si $X = \ell_q$ $(1 \leq q < \infty)$ o $X = c_0$, entonces P es hipercíclico si y sólo si 0 pertenece al conjunto de Julia de p (ver Definición B.1.3). Otros ejemplos de polinomios caóticos fueron presentados en [36].

Respecto al problema de existencia de polinomios hipercíclicos o caóticos en espacios de dimensión infinita, el primer avance es debido a Martínez-Giménez y Peris. En [37] probaron que todo espacio de Fréchet *complejo* separable de dimensión infinita admite polinomios hipercíclicos. Recientemente, en [13] Bernardes y Peris probaron que en todo espacio de Fréchet (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) separable de dimensión infinita existen polinomios mixing (y en particular hipercíclicos) de cualquier grado, y si el espacio tiene base Schauder incondicional, entonces también admite polinomios caóticos y frecuentemente hipercíclicos.

En esta tesis intentaremos presentar, en forma autocontenida, un panorama sobre estos temas y, en particular los resultados que aparecen en los artículos [12, 39, 40, 13].

La tesis, está divida en 4 capítulos y 2 apéndices, cuyos contenidos presentamos a continuación.

En el Capítulo 1 presentamos distintos tipos de sistemas dinámicos discretos sobre espacios métricos. Clasificamos tales sistemas en topológicamente transitivos, hipercíclicos, AY-caóticos, D-caóticos, mixing y débil mixing y damos algunos resultados y propiedades que los caracterizan. Un importante resultado que vemos en este capítulo es el Teorema de transitividad de Birkhoff (Teorema 1.3.3), del cual se deduce que los conceptos de sistemas topológicamente transitivos e hipercíclicos definidos sobre espacios métricos completos sin puntos aislados son equivalentes.

En el Capítulo 2 estudiamos operadores lineales hipercíclicos, caóticos, mixing y débil mixing definidos sobre espacios de Fréchet. El objetivo principal es dar una breve introducción a la teoría, presentar algunos ejemplos importantes de operadores y mostrar algunos resultados que se utilizarán en el Capítulo 4 para probar la existencia de operadores mixing en espacios de Banach de dimensión infinita. Entre estos resultados se destacan el Teorema de Bourdon, el Teorema de Herrero-Bourdon y la caracterización de las propiedades de la dinámica de operadores de desplazamiento con pesos.

En el Capítulo 3 estudiamos órbitas de polinomios homogéneos no lineales definidos sobre espacios de Banach y de Fréchet. Dividimos el capítulo en dos secciones. En la primera sección veremos que no hay polinomios homogéneos hipercíclicos no lineales sobre espacios de Banach, pero sí polinomios supercíclicos homogéneos no lineales de grado arbitrario. En la segunda sección mostramos que en el caso de los espacios de Fréchet existen polinomios d-homogéneos D-caóticos (en particular hipercíclicos) sobre $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ para todo $d \geq 2$.

En el Capítulo 4 estudiamos las órbitas de polinomios no homogéneos. En la primera sección veremos que existen polinomios caóticos no lineales sobre los espacios de Banach c_0 y ℓ_q ($1 \leq q < \infty$), y lo relacionaremos con propiedades de conjuntos de Julia de polinomios de una variable compleja. En la segunda y tercera sección mostraremos teoremas importantes en dinámica lineal que utilizaremos en la última sección del capítulo. En la segunda sección probaremos que existen operadores mixing para todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita, y en la tercera sección demostraremos los Teoremas de Ansari y de León-Müller, que implican, respectivamente, que si T es un operador definido sobre un espacio de Fréchet y $HC(T)$ es el conjunto de vectores hipercíclicos de T, entonces $HC(T^k) = HC(T)$ y $HC(\lambda T) = HC(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$. En la cuarta sección veremos que si X es un espacio de Fréchet (sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) para el cual existen operadores hipercíclicos (respectivamente mixing, débil mixing y frecuentemente hipercíclicos) que admiten algún autovalor λ tal que $|\lambda| \leq 1$, entonces existe un polinomio hipercíclico (respectivamente mixing, débil mixing y frecuentemente hipercíclico) de grado positivo arbitrario sobre X. De los resultados de las secciones anteriores se deduce que en cualquier espacio de Fréchet separable de dimensión infinita existen polinomios mixing de grado arbitrario.

Presentaremos dos apéndices en los que veremos resultados que utilizamos en la tesis.

El Apéndice 1 contiene algunas definiciones y resultados de Análisis Funcional y está dividido en dos secciones. En la primera sección introduciremos algunas generalidades de espacios de Fréchet y de operadores definidos sobre ellos. En la segunda sección mostraremos que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita existe una base de Markushevich. Utilizamos este hecho en el Capítulo 3 para mostrar la existencia de polinomios homogéneos supercíclicos en espacios de Banach separables de dimensión infinita.

El Apéndice 2 contiene algunos resultados de una variable compleja, y en particular de dinámica compleja. En la primera sección definiremos familias normales de funciones holomorfas y enunciaremos el Teorema de Montel. También definiremos los conjuntos de Julia y Fatou de una función holomorfa y veremos algunas propiedades. En la segunda sección veremos algunas caracterizaciones y propiedades de los conjuntos de Julia y Fatou específicas para polinomios definidos sobre $\mathbb{C}$ que utilizamos en el capítulo 4.

Capítulo 1

Sistemas Dinámicos

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos de sistemas dinámicos discretos. Tales sistemas serán inicialmente definidos sobre cualquier espacio métrico, pero posteriormente nos concentraremos en sistemas dinámicos definidos sobre espacios métricos sin puntos aislados. Los conceptos introducidos en este capítulo serán estudiados a lo largo de la tesis para sistemas dinámicos determinados por operadores lineales y polinomios sobre espacios de Fréchet.

Comenzaremos dando la definición de un sistema dinámico y sus iteraciones, y daremos una noción de "igualdad" entre sistemas dinámicos, la cual será una propiedad que caracterizará a los distintos tipos de sistemas dinámicos que estudiaremos a lo largo de este capítulo.

Los contenidos de este capítulo están basados principalmente en [28].

1.1. Introducción

Definición 1.1.1. Diremos que el par (X, T) es un *sistema dinámico* si X es un espacio métrico y $T : X \longrightarrow X$ es una función continua.

Generalmente, cuando se conozca el espacio X subyacente, llamaremos $T : X \longrightarrow X$ o simplemente T al sistema dinámico (X, T). Dado $x \in X$, resultará de gran importancia estudiar el comportamiento de $T^n(x)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$. Entonces a continuación damos la siguiente definición.

Definición 1.1.2. Dado un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ y $n \in \mathbb{N}$, definimos la *n-ésima iteración* de T como el sistema dinámico $T^n : X \longrightarrow X$ dado por

$$T^n = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\text{n veces}}.$$

Por convención, definiremos $T^0 = I_X$, donde I_X es a identidad de X en X.

Además, definimos la *órbita de x respecto de T* como el conjunto $Orb(T, x) = \{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$.

Ahora bien, dados dos sistemas dinámicos $S : Y \longrightarrow Y$ y $T : X \longrightarrow X$, queremos dar una noción que nos permita establecer de alguna manera que en cierta forma los sistemas son "iguales". Para ello, a continuación introduciremos el fundamental concepto de *quasiconjugación* entre dos sistemas dinámicos.

Definición 1.1.3. Sean $S : X \longrightarrow X$ y $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos discretos.

i. Diremos que T es *quasiconjugado* a S si existe $\phi : Y \longrightarrow X$ continua de rango denso tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$, es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{S} & Y \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ X & \xrightarrow[T]{} & X \end{array}$$

conmuta.

ii. Si ϕ se puede elegir de manera tal que sea un homeomorfismo, decimos que S y T son *conjugados*.

Notación. Si T es conjugado a S, notamos $T \sim S$.

Observación 1.1.4. $\sim$ es relación de equivalencia.

Ahora que tenemos nuestra noción de "igualdad" entre dos sistemas dada por la quasiconjugación, la misma nos permitirá en reiteradas ocasiones probar ciertas propiedades sobre un cierto sistema dinámico $S : Y \longrightarrow Y$ sabiendo que tales propiedades son válidas para un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ que es quasiconjugado a S.

Definición 1.1.5. Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ se *preserva bajo quasiconjugación* si para todo sistema dinámico $S : Y \longrightarrow Y$ que verifica la propiedad $\mathcal{P}$, cada sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ que es quasiconjugado para S también la verifica.

Veremos en el transcurso de este capítulo que hay diversos conceptos que tienen la propiedad de ser preservados bajo quasiconjugación.

1.2. Sistemas dinámicos topológicamente transitivos

En esta sección introduciremos el concepto de sistema dinámico *topológicamente transitivo*, el cual es de gran importancia en la teoría. Como veremos, la transitividad es una forma fuerte de irreducibilidad de un sistema dinámico.

Definición 1.2.1. Diremos que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es *topológicamente transitivo* si para todo par de abiertos $U, V \subset X$ no vacíos existe $n \in \mathbb{N}_0$ de manera tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Notemos que en el caso en que U y V son abiertos disjuntos, el n de la definición es no nulo, es decir, $n \in \mathbb{N}$. Utilizaremos esta observación en distintas oportunidades.

A continuación daremos una caracterización de los sistemas dinámicos topológicamente transitivos, pero antes necesitamos la definición de subconjunto T-*invariante* para un sistema dinámico T.

Definición 1.2.2. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Dado $Y \subset X$, decimos que Y es T-*invariante* si $T(Y) \subset Y$.

En particular, si $Y \subset X$ es T-invariante tenemos que $T_{|Y} : Y \longrightarrow Y$ es un sistema dinámico.

Proposición 1.2.3. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. X no puede escribirse en la forma $X = A \cup B$, donde $A, B \subset X$ son subconjuntos disjuntos de interior no vacío y A es T-invariante.

ii. T es topológicamente transitivo.

iii. Para todo $U \subset X$ abierto no vacío, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X.

iv. Para todo $U \subset X$ abierto no vacío, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso en X, donde $T^{-n}(U) = (T^n)^{-1}(U)$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *iii*. Sean $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ y $B = X \setminus A$, entonces es claro que $X = A \cup B$ y A es T-invariante. Además, como $U = T^0(U) \subset A$, entonces A tiene interior no vacío, luego por hipótesis tenemos que B tiene interior vacío. Esto implica que $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X.
iii. $\Rightarrow$ *ii*. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, queremos ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

En efecto, si $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$, por hipótesis tenemos que D es denso en X, con lo cual $D \cap V \neq \emptyset$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto T es topológicamente transitivo.
ii. $\Rightarrow$ *i*. Supongamos que $X = A \cup B$ con A, B disjuntos y A T-invariante, queremos ver que $A^\circ = \emptyset$ o $B^\circ = \emptyset$.

En efecto, observemos que dado $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que A° y B° son abiertos tales que

$$T^n(A^\circ) \cap B^\circ \subset T^n(A) \cap B \subset A \cap B = \emptyset.$$

Luego $T^n(A^\circ) \cap B^\circ = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$, entonces al ser T topológicamente transitivo, debe ser $A^\circ = \emptyset$ o $B^\circ = \emptyset$.

ii. $\Rightarrow$ *iii.* Sea $U \subset X$ abierto no vacío y sea $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$, queremos ver que D es denso en X.

En efecto, si $x \in X$ y $V \subset X$ es abierto tal que $x \in V$, por hipótesis existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Entonces $D \cap V \neq \emptyset$ y concluimos que D es denso en X.

ii. $\Rightarrow$ *iv.* Sea $U \subset X$ abierto no vacío y $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$, veamos que D es denso en X. En efecto, dado $V \subset X$ abierto no vacío tal que $x \in V$, por hipótesis existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(V) \cap U \neq \emptyset$. Sea entonces $v \in V$ tal que $T^n(v) = u \in U$, luego $v \in T^{-n}(U) \cap V \subset D \cap V$ y por lo tanto $D \cap V \neq \emptyset$. Así, $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso es X.

iv. $\Rightarrow$ *ii.* Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, queremos ver que existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

En efecto, por hipótesis tenemos que $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(V)$ es denso en X, por lo tanto $U \cap D \neq \emptyset$.

Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $U \cap T^{-n_0}(V) \neq \emptyset$, con lo cual $T^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

□

Tenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 1.2.4. Sea $T : X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico topológicamente transitivo, entonces :

i. T tiene rango denso, es decir, $R(T) = Im(T) \subset X$ es denso.

ii. $T^{-n}(V)$ es abierto no vacío para todo $V \subset X$ abierto no vacío y todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. *i.* Basta ver que $R(T) \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$ y $\varepsilon > 0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y $\delta \leq \varepsilon$ tal que $\overline{B(x,\delta)} \neq X$, entonces $X \setminus \overline{B(x,\delta)}$ es abierto en X no vacío. Luego como T es topológicamente transitivo y $(X \setminus \overline{B(x,\delta)}) \cap B(x,\delta) = \emptyset$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n\left(X \setminus \overline{B(x,\delta)}\right) \cap B(x,\delta) \neq \emptyset.$$

Así, existe $y \in X$ tal que $T(T^{n-1}(y)) \in B(x,\delta)$, es decir, $R(T) \cap B(x,\delta) \neq \emptyset$ y por lo tanto $R(T) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$.

ii. Sean $V \subset X$ abierto no vacío y $n \in \mathbb{N}$. Como $R(T)$ es denso, tenemos que existe $x \in X$ tal que $T(x) \in V$ y entonces $T^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego, razonando inductivamente concluimos que $T^{-n}(V) = T^{-1}\left(T^{-n+1}(V)\right) \neq \emptyset$.

□

Si $T : X \to X$ es un sistema dinámico y queremos estudiar sus iteraciones, es razonable pensar que si particionamos X como una unión de dos subconjuntos T-invariantes con interior no vacío y estudiamos las iteraciones en cada subconjunto por separado, el estudio podría en diversos casos ser más sencillo. Si tal partición no es posible diremos que X es *irreducible*.

Definición 1.2.5. Diremos que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es *irreducible* si no podemos escribir X en la forma $X = A \cup B$, con $A, B \subset X$ subconjuntos T-invariantes de interior no vacío.

En virtud de la Proposición 1.2.3, tenemos que todo sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ topológicamente transitivo es irreducible. Además, de la equivalencia de *ii.* y *iii.* en la Proposición 1.2.3, podemos deducir el siguiente corolario.

Corolario 1.2.6. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico con inversa continua $T^{-1} : X \longrightarrow X$. Entonces T es topológicamente transitivo si y sólo si T^{-1} es topológicamente transitivo.

Demostración. Por la Proposición 1.2.3 tenemos que T es topológicamente transitivo si y sólo si para todo abierto $U \subset X$ abierto no vacío, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^n(U)$ es denso en X. Por otro lado, T^{-1} es topológicamente transitivo si y sólo si para todo $U \subset X$ abierto no vacío, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U)$ es denso en X.

Así, por la equivalencia de *ii.* y *iii.* en la Proposición 1.2.3, deducimos que T es topológicamente transitivo si y sólo si T^{-1} es topológicamente transitivo.

□

Hemos mencionado al final de la sección anterior que hay diversos conceptos que se preservan bajo quasiconjugación. Para finalizar esta sección veremos que uno de estos conceptos que se preservan bajo quasiconjugación es la propiedad de que un sistema dinámico sea topológicamente transitivo.

Proposición 1.2.7. La propiedad de ser topológicamente transitivo se preserva bajo quasiconjugación.

Demostración. Sea $S : Y \longrightarrow Y$ un sistema dinámico topológicamente transitivo y sea $T : X \longrightarrow X$ una quasiconjugación de S, entonces existe $\phi : Y \longrightarrow X$ continua de rango denso tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$, queremos ver que T es topológicamente transitivo.

Sean entonces $U, V \subset X$ abiertos no vacíos en X, como ϕ es continua, $\phi^{-1}(U)$ y $\phi^{-1}(V)$ son abiertos en Y, veamos que son no vacíos.

En efecto, como $U \subset X$ es abierto no vacío y ϕ tiene rango denso en X, tenemos que $\mathrm{Im}(\phi) \cap U \neq \emptyset$. Luego existe $y \in Y$ tal que $\phi(y) \in U$, es decir, $y \in \phi^{-1}(U)$ y por lo tanto $\phi^{-1}(U) \neq \emptyset$. Análogamente, $\phi^{-1}(V) \neq \emptyset$.

Así, como S es topológicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, entonces existe $z \in \phi^{-1}(U)$ tal que $S^n(z) \in \phi^{-1}(V)$.

Luego $\phi(z) \in U$ y como $T \circ \phi = \phi \circ S$, se deduce que $T^n(\phi(z)) = \phi(S^n(z)) \in V$, con lo cual $T^n(\phi(z)) \in T^n(U) \cap V$ y concluimos que T es topológicamente transitivo.

□

1.3. Sistemas dinámicos hipercíclicos.

En esta sección introduciremos el concepto de sistema dinámico *hipercíclico* y veremos que éstos se preservan bajo quasiconjugación. Mostraremos el Teorema de transitividad de Birkhoff, que establece que en un espacio métrico completo, separable y sin puntos aislados los conceptos de sistema dinámico topológicamente transitivo y sistema dinámico hipercíclico son equivalentes. Este teorema es de gran importancia en la teoría de sistemas dinámicos y nos será de mucha utilidad en los próximos capítulos. Probaremos además que el concepto de ser hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación en cualquier espacio métrico.

Comenzamos con la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico y sea $x \in X$. Diremos que x es un *vector hipercíclico* para T si $Orb(T, x) = \{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. En caso de que exista un vector hipercíclico para T, diremos que T es *hipercíclico*.

Notación. Notaremos por $HC(T)$ al conjunto de vectores hipercíclicos para T.

Antes de dar la equivalencia deseada, previamente demostraremos la siguiente proposición.

Proposición 1.3.2. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, con X un espacio métrico sin puntos aislados. Entonces valen las siguientes afirmaciones :

i. Si $x \in X$ es vector hipercíclico para T, entonces $T^n(x)$ es vector hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $HC(T)$ es T-invariante.

ii. Si T es hipercíclico, entonces T es topológicamente transitivo.

Demostración. i. Sea $n \in \mathbb{N}$, queremos ver que $Orb(T, T^n(x)) = \left\{T^k(T^n(x)), k \in \mathbb{N}_0\right\}$ es denso en X.

En efecto, sea $U \subset X$ abierto no vacío, veamos que $Orb(T, T^n(x)) \cap U \neq \emptyset$. Sea $V = U \setminus \{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$, como X no tiene puntos aislados, $V \subset X$ es abierto no vacío. Luego como $Orb(T, x) \subset X$ es denso, tenemos que $Orb(T, x) \cap V \neq \emptyset$.

Ahora bien, como $T^j(x) \notin V$ para todo $1 \leq j \leq n-1$, existe $k_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{k_0}(T^n(x)) = T^{k_0+n}(x) \in V$, con lo cual $T^{k_0}(T^n(x)) \in U$. Así, $Orb(T, T^n(x)) \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $Orb(T, T^n(x))$ es denso en X, es decir, $T^n(x)$ es vector hipercíclico.

ii. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, queremos ver que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Sea x vector hipercíclico para T, entonces $Orb(T, x)$ es denso en X y por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(x) \in U$. Ahora bien, por i. tenemos que $T^n(x)$ es hipercíclico para T, con lo cual existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^{k+n}(x) = T^k(T^n(x)) \in V$.

Luego, $T^k(T^n(x)) \in T^k(U) \cap V$, entonces $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$ y concluimos que T es topológicamente transitivo.

□

La proposición anterior nos dice que todo sistema dinámico hipercíclico es topológicamente transitivo. La recíproca es cierta para espacios métricos completos y separables, sin puntos aislados. En 1920, G.D.Birkhoff [15] probó este resultado para funciones definidas sobre subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$. Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3. (Teorema de transitividad de Birkhoff) Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico, con X un espacio métrico completo, separable y sin puntos aislados. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i. T es topológicamente transitivo.

ii. T es hipercíclico.

Además, si vale alguna de estas afirmaciones, entonces $HC(T)$ es un conjunto G_δ denso.

Demostración. $i. \Rightarrow ii$. Es por la Proposición 1.3.2.

$i. \Rightarrow ii$. Supongamos que T es topológicamente transitivo.

Como X es separable, existe $D = \{y_j, j \in \mathbb{N}\}$ denso numerable en X, entonces

$$\beta = \left\{B\left(y_j, \frac{1}{m}\right), j \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})\right\} = \{U_k, k \in \mathbb{N}\}$$

es una base para la topología de X. Entonces $x \in HC(T)$ si y sólo si para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(x) \in U_k$.

Así, podemos escribir $HC(T)$ en la forma

$$HC(T) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Ahora bien, al ser T es continua, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $T^{-n}(U_k)$ es abierto en X para todo $n \in \mathbb{N}_0$, luego por la Proposición 1.2.3 tenemos que $D_k = \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ es denso en X para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto, como $HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ con D_k abierto denso en X para todo $k \in \mathbb{N}$, por el teorema de Baire (Teorema A.1.23) tenemos que $HC(T) \subset X$ es un G_δ denso en X.

□

Para finalizar esta sección, como habíamos anticipado al principio de la misma, demostraremos que la propiedad de ser hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación.

Para espacios métricos sin puntos aislados, la equivalencia entre sistema dinámico hipercíclico y topológicamente transitivo nos da el resultado automáticamente ya que ser topológicamente transitivo es una propiedad que se preserva por quasiconjugación. Sin embargo, no es difícil ver que la propiedad de ser hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación para cualquier espacio métrico.

Proposición 1.3.4. La propiedad de ser hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación.

Demostración. Sea $S : Y \longrightarrow Y$ un sistema dinámico hipercíclico y $T : X \longrightarrow X$ una quasiconjugación de S vía $\phi : Y \longrightarrow X$. Es decir, ϕ es continua de rango denso y además $\phi \circ S = T \circ \phi$, queremos ver que T es hipercíclico.

En efecto, sea $y \in Y$ vector hipercíclico para S, veamos que $\phi(y) \in X$ es vector hipercíclico para T. Si $U \subset X$ es abierto tal que $\phi(y) \in U$, entonces $\phi^{-1}(U) \subset Y$ es abierto tal que $y \in \phi^{-1}(U)$. Luego como $Orb(S, y)$ es denso en Y, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $S^n(y) \in \phi^{-1}(U)$.

Así, como $\phi \circ S = T \circ \phi$, tenemos que $T^n(\phi(y)) = \phi(S^n(y)) \in U$ y entonces $T^n(\phi(y)) \in Orb(T, \phi(y)) \cap U$. Por lo tanto $\phi(y)$ es vector hiperciclico para T. □

1.4. Sistemas dinámicos caóticos

En esta sección introduciremos los conceptos de sistemas dinámicos caóticos. Existen varias nociones diferentes de caos. Definiremos y veremos algunas propiedades de dos de ellas, que nos serán de utilidad en los próximos capítulos: las de sistemas dinámicos *AY-caóticos* y *D-caóticos*. Estas nociones deben sus nombres a *Auslander* y *Yorke*, y *Devaney*, respectivamente. Ambos conceptos están relacionados, de hecho veremos que todo sistema D-caótico es AY-caótico.

Según la definición original de Devaney (ver [23]), un sistema caótico debía satisfacer 3 propiedades: ser topológicamente transitivo, tener un conjunto denso de puntos periódicos y tener dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales. Sin embargo, algunos años más tarde Banks *et. al.* [4] probaron que la definición es redundante ya que las dos primeras condiciones automáticamente implican la tercera.

Comenzamos recordando la definición de puntos periódicos y fijando notación.

Definición 1.4.1. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Dados $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$, diremos que x es un punto de *período* n para T si $n = \min\{k \in \mathbb{N}, T^k(x) = x\}$ y diremos que x es un *punto periódico* para T si tiene período n para algún $n \in \mathbb{N}$. En el caso particular en que x sea de período uno, es decir, si $T(x) = x$, diremos que x es *punto fijo* para T.

Notación. Dado un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$, notaremos al conjunto de puntos periódicos de T por

$$\mathcal{P}er(T) = \{x \in X \text{ tales que } x \text{ es punto periódico de } T\}.$$

Ahora sí, estamos en condiciones de dar la definición de sistema dinámico D-caótico.

Definición 1.4.2. Sean (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados y $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Diremos que T es *D-caótico* (caótico en el sentido de Devaney) si verifica las siguientes condiciones :

i. T es topológicamente transitivo.

ii. El conjunto $\mathcal{P}er(T)$ es denso en X.

A continuación, veremos que la propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos se preserva bajo quasiconjugación.

Proposición 1.4.3. La propiedad de tener un conjunto denso de puntos periódicos se preserva bajo quasiconjugación.

Demostración. Sea $S : Y \longrightarrow Y$ un sistema dinámico tal que $\mathcal{P}er(S) \subset Y$ es denso y sea $T : X \longrightarrow X$ una quasiconjugación de S vía $\phi : Y \longrightarrow X$, queremos ver que $\mathcal{P}er(T) \subset X$ es denso. Consideremos entonces $U \subset X$ abierto no vacío y veamos que $\mathcal{P}er(T) \cap U \neq \emptyset$.

En efecto, como ϕ es continua y $R(\phi) \subset X$ es denso, $\phi^{-1}(U) \subset Y$ es abierto no vacío, con lo cual, al ser $\mathcal{P}er(S) \subset X$ denso existe $y_0 \in \phi^{-1}(U) \cap \mathcal{P}er(S)$.

Si n es el período de y_0 respecto de S, entonces $S^n(y_0) = y_0$ y además como $\phi \circ S = T \circ \phi$, tenemos que $\phi \circ S^n = T^n \circ \phi$, de donde

$$T^n(\phi(y_0)) = \phi(S^n(y_0)) = \phi(y_0) \in U.$$

Luego $\phi(y_0) \in \mathcal{P}er(T) \cap U$ y concluimos que $\mathcal{P}er(T) \subset X$ es denso.

□

Recordemos que habíamos visto en la Proposición 1.2.7 que la transitividad topológica se preserva bajo quasiconjugación. Entonces como consecuencia de este hecho y la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.4.4. La propiedad de ser D-caótico se preserva por quasiconjugación.

Seguimos ahora el camino hacia la definición de sistema AY-caótico.

Definición 1.4.5. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados. Diremos que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ tiene *dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales* si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo $\delta > 0$, existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tales que $d(x, y) < \delta$ y $d\left(T^n(x), T^n(y)\right) > \varepsilon$.

Al número $\varepsilon > 0$ de la definición se lo llama *constante de sensibilidad para* T.

Definición 1.4.6. Sea (X, d) un espacio métrico sin puntos aislados y $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Diremos que T es *AY-caótico* (caótico en el sentido de Auslander y Yorke) si se satisfacen las siguientes dos condiciones :

i. T tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

ii. T es topológicamente transitivo.

A continuación veremos un ejemplo que muestra que la propiedad de ser sensible respecto de las condiciones iniciales no se preserva bajo quasiconjugación, ya que tal propiedad depende de la métrica del espacio métrico subyacente del sistema dinámico en cuestión.

Ejemplo 1.4.7. Sea $T : [1, +\infty) \longrightarrow [1, +\infty)$ el sistema dinámico definido por

$$T(x) = 2x$$

para todo $x \in [1, +\infty)$. Es claro que $T^n(x) = 2^n x$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Veamos que si consideramos la métrica usual en $X = [1, +\infty)$, entonces T tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

En efecto, consideremos $\varepsilon = 1$, dados $x \in [1, +\infty)$ y $\delta > 0$, queremos ver que existen $y \in [1, +\infty)$ y $n \in \mathbb{N}_0$ de manera tal que $|x - y| < \delta$ y $|T^n(x) - T^n(y)| > 1$. Observemos que si $y \neq x$, entonces $|T^n(x) - T^n(y)| = 2^n|x - y| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Así, si tomamos por ejemplo $y = x + \dfrac{\delta}{2}$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^{n-1}\delta > 1$ tenemos que

$$|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta \qquad \text{y} \qquad |T^n(x) - T^n(y)| = 2^{n-1}\delta > 1.$$

Luego T tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales si consideramos la métrica usual. Sin embargo, veamos que si consideramos en $X = [1, +\infty)$ la métrica $d : [1, +\infty) \times [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ dada por

$$d(x, y) = |\log(x) - \log(y)|$$

para todo $x, y \in [1, +\infty)$, entonces T no tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

En efecto, dados $x, y \in [1, +\infty)$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$d(T^n(x), T^n(y)) = |\log(T^n(x)) - \log(T^n(y))| = |\log(2^n x) - \log(2^n y)| = \left|\log\left(\frac{x}{y}\right)\right| = d(x, y).$$

Dado $\varepsilon > 0$, si tomamos $x = 1$ y $\delta = \varepsilon$, para todo $y \in [1, +\infty)$ y todo $n \in \mathbb{N}_0$ tales que $d(x, y) < \delta = \varepsilon$, tenemos que

$$d(T^n(x), T^n(y)) = d(x, y) = \varepsilon.$$

Luego T no tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales al considerar $X = [1, +\infty)$ con la métrica d.

Probaremos ahora que todo sistema D-caótico es AY-caótico. Previamente necesitamos la siguiente observación sobre las órbitas de puntos periódicos.

Observación 1.4.8. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Si $x, y \in \mathcal{Per}(T)$ son tales que $Orb(T, x) \cap Orb(T, y) \neq \emptyset$, entonces $Orb(T, x) = Orb(T, y)$.

En efecto, sean N y M los períodos de x e y respectivamente, entonces

$$Orb(T, x) = \left\{x, T(x), \ldots, T^{N-1}(x)\right\} \qquad \text{y} \qquad Orb(T, y) = \left\{y, T(y), \ldots, T^{M-1}(y)\right\}.$$

Como $Orb(T,x) \cap Orb(T,y) \neq \emptyset$, existen $n \leq N$ y $m \leq M$ tales que $T^n(x) = T^m(y)$. Luego tenemos que

$$T^{M-m+n}(x) = T^{M-m}(T^n(x)) = T^{M-m}(T^m(y)) = T^M(y) = y.$$

Por lo tanto $y \in Orb(T,x)$ y tenemos que $Orb(T,y) \subseteq Orb(T,x)$. Análogamente se ve que $T^{N-n+m}(y) = T^N(x) = x$, de donde se deduce que $x \in Orb(T,y)$ y entonces $Orb(T,x) \subseteq Orb(T,y)$. Luego $Orb(T,x) = Orb(T,y)$.

Ahora sí, estamos en condiciones de enunciar el siguiente teorema probado en [4].

Teorema 1.4.9. Sea X un espacio métrico sin puntos aislados y sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Si T es topológicamente transitivo y $\mathcal{P}er(T) \subset X$ es denso, entonces T tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales con respecto a cualquier métrica que defina la topología de X.

Demostración. Sea d una métrica que defina la topología de X, veamos que existe $r > 0$ de manera tal que para cualquier $x \in X$, existe $p \in \mathcal{P}er(T)$ tal que $d(x, T^n(p)) \geq r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, como X no tiene puntos aislados, en particular es un conjunto infinito. Por la Observación 1.4.8, deben existir $p_1 \in \mathcal{P}er(T)$ y $p_2 \in \mathcal{P}er(T)$ tales que $Orb(T,p_1) \cap Orb(T,p_2) = \emptyset$.

Consideremos $r = \inf\limits_{m,n \in \mathbb{N}_0} \dfrac{d(T^n(p_1), T^m(p_2))}{2}$, entonces al ser $Orb(T,p_1) \cap Orb(T,p_2) = \emptyset$, se tiene que $r > 0$. Observemos que si existiera $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $d(T^{n_0}(p_1), x) < r$ y $d(T^{n_0}(p_2), x) < r$, entonces

$$\frac{d(T^{n_0}(p_1), T^{n_0}(p_2))}{2} \leq \frac{d(T^{n_0}(p_1), x)}{2} + \frac{d(x, T^{n_0}(p_2))}{2} < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r.$$

Luego $r > \dfrac{d(T^{n_0}(p_1), T^{n_0}(p_2))}{2}$, lo cual es absurdo por definición de r. Así, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ y todo $x \in X$ se tiene que

$$d(T^n(p_1).x) \geq r \qquad \text{o} \qquad d(T^n(p_2), x) \geq r.$$

Sean $\varepsilon = \dfrac{r}{4}$, $x \in X$ y $\delta > 0$, veamos que existen $z \in X$ y $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $d(x,z) < \delta$ y $d(T^n(x), T^n(z)) > \varepsilon$.

En efecto, sea q un punto periódico de período N tal que

$$d(q,x) < \text{mín}\{\varepsilon, \delta\} \tag{1.1}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}_0$,

$$d(T^n(p_1), x) \geq r = 4\varepsilon \tag{1.2}$$

Como T es continua en p_1, existe V entorno de p_1 de manera tal que para todo $z \in V$ y todo $0 \leq m \leq N$,

$$d(T^m(p_1), T^m(z)) < \varepsilon \tag{1.3}$$

Ahora bien, como T es topológicamente transitivo, si $U = B(x,\delta)$ existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k(U) \cap V \neq \emptyset$, con lo cual existe y tal que $d(x,y) < \delta$ y $T^k(y) \in V$. Sea $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $k \leq jN \leq k + N$, como $T^{iN}(q) = q$ para todo $i \in \mathbb{N}_0$, tenemos que

$$\begin{aligned} d\left(T^{jN}(q), T^{jN}(y)\right) &= d\left(T^{jN}(q), T^{jN-k}\left(T^k(y)\right)\right) = d\left(q, T^{jN-k}\left(T^k(y)\right)\right) \\ &\geq d\left(x, T^{jN-k}(p_1)\right) - d\left(T^{jN-k}(p_1), T^{jN-k}\left(T^k(y)\right)\right) - d(x,q). \end{aligned}$$

Ahora bien, por (1.2) y (1.1), tenemos que $d\left(x, T^{jN-k}(p_1)\right) \geq 4\varepsilon$ y $d(x,q) < \varepsilon$. Además, como $T^k(y) \in V$ y $0 \leq jN-k \leq N$, por (1.3) tenemos que $d\left(T^{jN-k}(p_1), T^{jN-k}\left(T^k(y)\right)\right) < \varepsilon$, luego

$$d\left(T^{jN}(q), T^{jN}(y)\right) \geq d\left(x, T^{jN-k}(p_1)\right) - d\left(T^{jN-k}(p_1), T^{jN-k} \circ T^k(y)\right) - d(x,q) > 4\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = 2\varepsilon,$$

es decir,

$$d\left(T^{jN}(q), T^{jN}(y)\right) > 2\varepsilon \tag{1.4}$$

Supongamos que $d\left(T^{jN}(x), T^{jN}(q)\right) \leq \varepsilon$ y $d\left(T^{jN}(x), T^{jN}(y)\right) \leq \varepsilon$, entonces

$$d\left(T^{jN}(q), T^{jN}(y)\right) \leq d\left(T^{jN}(q), T^{jN}(x)\right) + d\left(T^{jN}(x), T^{jN}(y)\right) \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

lo cual es una contradicción por (1.4).

Luego $d\left(T^{jN}(x), T^{jN}(q)\right) > \varepsilon$ o $d\left(T^{jN}(x), T^{jN}(y)\right) > \varepsilon$. Así, si tomamos $n = jN$ tenemos que

$$d(q, x) < \delta \text{ y } d\left(T^n(x), T^n(q)\right) > \varepsilon,$$

o bien,

$$d(y, x) < \delta \text{ y } d\left(T^n(y), T^n(x)\right) > \varepsilon.$$

□

Corolario 1.4.10. Todo sistema dinámico D-caótico es AY-caótico.

1.5. Sistemas Dinámicos Mixing

En esta sección nuestro objetivo es introducir el concepto de sistema dinámico *mixing*. Este concepto es más fuerte que el de sistema dinámico topológicamente transitivo, es decir, veremos que todo sistema dinámico mixing es topológicamente transitivo. Sin embargo, veremos que no vale la recíproca, para lo cual introduciremos el concepto de sistema dinámico *producto*, el cual además nos permitirá mostrar una característica particular de los sistemas dinámicos mixing y nos introducirá al concepto de sistema dinámico *débil mixing* que desarrollaremos en la siguiente sección.

Volviendo a los sistemas dinámicos topológicamente transitivos, hay diversos ejemplos en los cuales se cumple una propiedad mas fuerte que la de transitividad. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5.1. Sea $T : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido por

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 2-2x & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases},$$

donde consideramos en $[0,1]$ la topología de subespacio de $\mathbb{R}$.

Vamos a probar que para todo $U, V \subset [0,1]$ abiertos no vacíos, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Observemos que $T([0,1]) = [0,1]$ y T es continua, con lo cual T es un sistema dinámico. Veamos que :

i. $T^n\left(\dfrac{2k}{2^n}\right) = 0$ para todo $k = 0, \ldots, 2^{n-1}$.

ii. $T\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = 1$ para todo $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$.

i. Si $n = 1$, dado $0 \leq k \leq 1$ tenemos que

$$T\left(\frac{2k}{2^n}\right) = T(k) = \begin{cases} 2k = 0 & \text{si } k = 0 \\ 2-2k = 0 & \text{si } k = 1 \end{cases},$$

es decir, $T\left(\dfrac{2k}{2}\right) = 0$ para $0 \leq k \leq 1$. Sea $n > 1$ y supongamos que dado $0 \leq j \leq n-1$, se tiene que $T^j\left(\dfrac{2k}{2^j}\right) = 0$ para todo $0 \leq k \leq 2^{j-1}$. Queremos ver que $T^n\left(\dfrac{2k}{2}\right) = 0$ para todo $0 \leq k \leq 2^{n-1}$.

Sea $0 \leq k \leq 2^{n-1}$, entonces :

• Si $0 \leq k \leq 2^{n-2}$, tenemos que $\dfrac{2k}{2^n} = \dfrac{k}{2^{n-1}}$ es tal que $0 \leq \dfrac{k}{2^{n-1}} \leq \dfrac{1}{2}$, luego por hipótesis inductiva tenemos que

$$T^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) = T^{n-1}\left(T\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right) = T^{n-1}\left(2\frac{k}{2^{n-1}}\right) = T^{n-1}\left(\frac{2k}{2^{n-1}}\right) = 0.$$

• Si $2^{n-2}+1 \leq k \leq 2^{n-1}$, tenemos que $\dfrac{2k}{2^n} = \dfrac{k}{2^{n-1}}$ es tal que $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{k}{2^{n-1}} \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} T^n\left(\frac{2k}{2^n}\right) &= T^{n-1}\left(T\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)\right) = T^{n-1}\left(2-2\frac{k}{2^{n-1}}\right) \\ &= T^{n-1}\left(\frac{2^n-2k}{2^{n-1}}\right) = T^{n-1}\left(\frac{2\left(2^{n-1}-k\right)}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $2^{n-2}+1 \leq k \leq 2^{n-1}$, entonces $0 \leq 2^{n-1}-k \leq 2^{n-2}$. Así, por hipótesis inductiva se tiene que $T^{n-1}\left(\dfrac{2\left(2^{n-1}-k\right)}{2^{n-1}}\right) = 0$, de donde $T^n\left(\dfrac{2k}{2^n}\right) = 0$.

Luego $T^n\left(\dfrac{2k}{2^n}\right) = 0$ para todo $0 \leq k \leq 2^{n-1}$.

ii. Si $n = 1$, para $k = 1$ tenemos que $T\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = T\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$.

Sea $n > 1$ y supongamos que dado $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que $T^j\left(\dfrac{2k-1}{2^j}\right) = 1$ para todo $1 \leq k \leq 2^{j-1}$. Debemos ver que $T^n\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = 1$ para todo $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

• Si $1 \leq k \leq 2^{n-2}$, entonces $0 \leq \dfrac{2k-1}{2^n} \leq \dfrac{1}{2}$, luego

$$T^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) = T^{n-1}\left(T\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)\right) = T^{n-1}\left(2\frac{2k-1}{2^n}\right) = T^{n-1}\left(\frac{2k-1}{2^{n-1}}\right)$$

.

Por lo tanto, como $1 \leq k \leq 2^{n-2}$, por hipótesis inductiva tenemos que $T^{n-1}\left(\dfrac{2k-1}{2^{n-1}}\right) = 1$, con lo cual $T^n\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = 1$.

• Si $2^{n-2}+1 \leq k \leq 2^{n-1}$, entonces $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2k-1}{2^n} \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} T^n\left(\frac{2k-1}{2^n}\right) &= T^{n-1}\left(T\left(\frac{2k-1}{2^n}\right)\right) = T^{n-1}\left(2-2\frac{2k-1}{2^n}\right) = T^{n-1}\left(\frac{2^n}{2^{n-1}} - \frac{2k-1}{2^{n-1}}\right) \\ &= T^{n-1}\left(\frac{2^n-2k+2-1}{2^{n-1}}\right) = T^{n-1}\left(\frac{2\left(2^{n-1}-k+1\right)-1}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $2^{n-2}+1 \leq k \leq 2^{n-1}$, se tiene que $2^{n-1}-k+1 \leq 2^{n-1}-\left(2^{n-2}+1\right)+1 = 2^{n-2}$.

Así, como $2^{n-1}-k+1 \leq 2^{n-2}$, por hipótesis inductiva tenemos que $T^{n-1}\left(\dfrac{2\left(2^{n-1}-k+1\right)-1}{2^{n-1}}\right) = 1$, de donde se deduce que $T^n\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = 1$. Por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $T^n\left(\dfrac{2k}{2^n}\right) = 0$ para todo $0 \leq k \leq 2^{n-1}$ y $T^n\left(\dfrac{2k-1}{2^n}\right) = 1$ para todo $1 \leq k \leq 2^{n-1}$.

Sea $U \subset [0,1]$ abierto no vacío, observemos que dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escribir $[0,1] = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{2^n-1}\left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right]$. Observemos que los conjuntos

$$\left\{\frac{2k}{2^n}, 0 \leq k \leq 2^{n-1}\right\} = \left\{0, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n}{2^n}\right\} \qquad \text{y} \qquad \left\{\frac{2k-1}{2^n}, 1 \leq k \leq 2^{n-1}\right\} = \left\{\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}\right\}$$

describen los extremos de los intervalos $J_{n,m} = \left[\dfrac{m}{2^n}, \dfrac{m+1}{2^n}\right]$ para todo $0 \leq m \leq 2^{n-1}$.

Más precisamente, dado $0 \leq m \leq 2^n - 1$, tenemos que :

• Si m es par, existen $0 \leq k_1 \leq 2^{n-1}$ y $1 \leq k_2 \leq 2^{n-1}$ tales que $J_{n,m} = \left[\dfrac{m}{2^n}, \dfrac{m+1}{2^n}\right] = \left[\dfrac{2k_1}{2^n}, \dfrac{2k_2-1}{2^n}\right]$.

• Si m es impar, existen $1 \le k_1 \le 2^{n-1}$ y $0 \le k_2 \le 2^{n-1}$ tales que $J_{n,m} = \left[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n}\right] = \left[\frac{2k_1-1}{2^n}, \frac{2k_2}{2^n}\right]$.

Observemos además que $\left|J_{n,m}\right| = \frac{1}{2^n} \underset{n\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ y dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $T^n\left(J_{n,m}\right) = [0,1]$ para todo $0 \le m \le 2^{n-1}$. Luego como $U \subset [0,1]$ es abierto no vacío, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J_{n_0,m} \subset U$ algún $0 \le m \le 2^{n_0-1}$.

Así, $[0,1] = T^{n_0}\left(J_{n_0,m}\right) \subset T^{n_0}(U)$, es decir, $T^{n_0}(U) = [0,1]$. Por lo tanto, como $T[0,1] = [0,1]$ tenemos que $T^n(U) = [0,1]$ para todo $n \ge n_0$.

Luego, dado $V \subset [0,1]$ abierto no vacío, tenemos que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge n_0$.

De esta forma, hallamos un sistema dinámico que cumple una propiedad más fuerte que la de ser topológicamente transitivo, ya que probamos que dados dos abiertos $U, V \subset [0,1]$ no vacíos, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge n_0$, es decir, las iteraciones de T sobre U intersecan a V para todo $n \ge n_0$.

Estos sistemas son llamados mixing.

Definición 1.5.2. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Diremos que T es *mixing* si dados U y V abiertos no vacíos en X, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge n_0$.

Al igual que la propiedad de ser topológicamente transitivo, la propiedad de ser mixing se preserva bajo quasiconjugación.

Proposición 1.5.3. La propiedad de ser mixing se preserva bajo quasiconjugación.

Demostración. Sea $S : Y \longrightarrow Y$ un sistema dinámico mixing y sea $T : X \longrightarrow X$ una quasiconjugación de S vía $\phi : Y \longrightarrow X$, queremos ver que T es mixing. En efecto, dados U y V abiertos no vacíos en X, como $R(\phi) \subset X$ es denso tenemos que $\phi^{-1}(U)$ y $\phi^{-1}(V)$ son abiertos no vacíos en Y. Luego como S es mixing existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$ para todo $n \ge N$. Entonces para ver que T es mixing basta ver que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge N$. Sea $n \ge N$, como $S^n\left(\phi^{-1}(U)\right) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, existe $z \in \phi^{-1}(U)$ tal que $S^n(z) \in \phi^{-1}(V)$. Luego $\phi(z) \in U$ y como $T \circ \phi = \phi \circ S$, entonces $T^n(\phi(z)) = \phi(S^n(z)) \in V$, es decir, $T^n(\phi(z)) \in T^n(U) \cap V$. Así, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge N$ y T resulta mixing.

□

Ahora bien, es claro a partir de la definición que todo sistema mixing es topológicamente transitivo. Sin embargo, como anticipamos al principio de esta sección, queremos mostrar que la recíproca no es cierta.

Dados dos sistemas dinámicos $S : X \longrightarrow X$ y $T : Y \longrightarrow Y$, podemos considerar el espacio métrico del producto cartesiano $X \times Y$ dotado con la métrica $d : (X \times Y) \times (X \times Y) \longrightarrow X \times Y$ dada por

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2)$$

para todo $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (X \times Y) \times (X \times Y)$, donde d_X y d_Y son las métricas de X e Y respectivamente. Es claro que d es una métrica para el espacio $X \times Y$. Además tenemos que una base para la topología en $X \times Y$ que define la métrica d es

$$\beta = \{U \times V, \text{ con } U \subset X, V \subset Y \text{ abiertos}\}.$$

Entonces a continuación definiremos el sistema dinámico producto sobre un espacio $X \times Y$.

Definición 1.5.4. Sean $S : X \longrightarrow X$ y $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos. Definimos el *sistema dinámico producto* $S \times T : X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por

$$(S \times T)(x, y) = (S(x), T(y))$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Si $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ son las proyecciones canónicas dadas por

$$\pi_X(x, y) = x \qquad \text{y} \qquad \pi_Y(x, y) = y$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$, entonces tenemos que

$$(S \times T) \circ \pi_X = S \qquad \text{y} \qquad (S \times T) \circ \pi_Y = T$$

son continuas. Luego $S \times T$ es continuo y por lo tanto resulta un sistema dinámico. Además, si $n \in \mathbb{N}_0$, la enésima iteración viene dada por $(S \times T)^n = S^n \times T^n$.

Similarmente podemos extender la definición a una cantidad mayor de productos.

Ahora que definimos el producto de dos sistemas dinámicos, veremos que el producto de dos sistemas dinámicos topológicamente transitivos no es topológicamente transitivo necesariamente.

Definición 1.5.5. Dado $\alpha \in [0, 2\pi]$, definimos la *rotación de ángulo* α como el sistema dinámico $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dado por

$$T_\alpha(z) = e^{i\alpha}z, \; z \in \mathbb{S}^1.$$

Si $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, diremos que la rotación de ángulo α es *racional*.
Si $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$, diremos que la rotación de ángulo α es *irracional*.

Tenemos entonces la siguiente proposición.

Proposición 1.5.6. Sea $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la rotación de ángulo α. Entonces T_α es topológicamente transitivo si y sólo si α es un ángulo irracional.

Demostración. Si T_α es racional, entonces $\alpha = 2\pi\frac{p}{q}$ con $\frac{p}{q}$ racional. Luego $T_\alpha^q = I_{\mathbb{S}^1}$, donde $I_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es la identidad y deducimos que T_α no es topológicamente transitivo.

Si T_α es irracional, entonces $\alpha = 2\pi\lambda$ con λ irracional, vamos a ver que $Orb(T_\alpha, 1)$ es densa en $\mathbb{S}^1$ (con lo cual cualquier órbita lo será). Veamos previamente que T_α no tiene puntos periódicos.

Supongamos que $x = e^{2\pi it} \in \mathbb{S}^1$ es punto periódico de T_α, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T_\alpha^k(x) = x$, es decir, $e^{i2\pi(t+k\lambda)} = e^{2\pi it}$. Luego $2\pi(t + k\lambda) = 2\pi t + 2l\pi$ para algún $l \in \mathbb{Z}$, con lo cual $\lambda = \frac{l}{k}$ es racional y llegamos a una contradicción. Así, deducimos que T_α no tiene puntos periódicos.

Supongamos ahora que $Orb(T_\alpha, 1)$ no es densa en $\mathbb{S}^1$, entonces existe un intervalo I de amplitud $\varepsilon > 0$ tal que $Orb(T_\alpha, 1) \cap I = \emptyset$. Sean $m > n$, si β es el ángulo entre $T_\alpha^m(1)$ y $T_\alpha^n(1)$, es decir, el ángulo entre $e^{i2\pi m\lambda}$ y $e^{i2\pi n\lambda}$, entonces β es no nulo, ya que vimos que T_α no tiene puntos periódicos.

Además tenemos que $\beta = 2\pi\lambda(m - n)$ y $T_\alpha^{m-n}(1) = e^{i\beta}$ módulo 2π, con lo cual como $Orb(T_\alpha, 1) \cap I = \emptyset$ se deduce que $\beta \geq \varepsilon$. Por lo tanto, como m y n eran arbitrarios, tenemos que hay infinitos puntos de $Orb(T_\alpha, 1)$ que difieren en un ángulo mayor o igual que ε, lo cual es absurdo ya que la cantidad de puntos de $Orb(T_\alpha, 1)$ que difieren en un ángulo mayor o igual que ε es a lo sumo $\frac{2\pi}{\varepsilon}$.

Luego $Orb(T_\alpha, 1)$ es densa en $\mathbb{S}^1$ y se tiene que T_α es topológicamente transitivo.

□

A continuación veremos que si T_α es una rotación de ángulo α, entonces $T_\alpha \times T_\alpha$ no es topológicamene transitivo.

Proposición 1.5.7. Si $\alpha \in [0, 2\pi]$ y $T_\alpha : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es la rotación de ángulo α, entonces $T_\alpha \times T_\alpha$ no es topológicamente transitivo.

Demostración. Sean $U_1 = U_2 = V_1 = \left\{e^{i\theta}, -\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}\right\}$ y $V_2 = \left\{e^{i\theta}, -\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{5}{4}\pi\right\}$ abiertos no vacíos en $\mathbb{S}^1$, veamos que $(T_\alpha \times T_\alpha)^n\,(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. En efecto, supongamos que $n \in \mathbb{N}_0$ es tal que $T_\alpha^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, veamos que $T_\alpha^n(V_1) \cap V_2 = \emptyset$.

Como $T_\alpha^n(U_1)$ es un arco de longitud $\frac{\pi}{2}$, tenemos que $T_\alpha^n(V_1) = T_\alpha^n(U_1) \subset \left\{-\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi\right\}$.

Luego como $\left\{-\frac{3}{4}\pi < \theta < \frac{3}{4}\pi\right\} \cap V_2 = \emptyset$, tenemos que $T^n(V_1) \cap V_2 = \emptyset$, por lo tanto $T_\alpha \times T_\alpha$ no es topológicamente transitivo.

□

Así, deducimos que T topológicamente transitivo no implica que $T \times T$ sea topológicamente transivo. Motivados por este hecho, aparece el concepto de sistema dinámico *débil mixing*, el cual será tratado en detalle en la siguiente sección.

A continuación, introduciremos un concepto que nos permitirá dar una definición equivalente a la de sistemas dinámicos topológicamente transitivos y mixing desde otro punto de vista.

Definición 1.5.8. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Dados $A, B \subset X$, definimos el conjunto *retorno de* A *sobre* B por

$$N_T(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 \text{ tales que } T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Notación. Generalmente, notaremos $N_T(A, B) = N(A, B)$ cuando sea claro el sistema dinámico sobre el cual estamos trabajando.

Observemos que si $T : X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico y $U, V \subset X$ son abiertos no vacíos, tenemos que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset \Leftrightarrow n \in N(U, V).$$

Por otra parte, tenemos que

$$\begin{aligned}\text{existe } N \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } T^n(U) \cap V \neq \emptyset \text{ para todo } n \geq N &\Leftrightarrow \text{existe } N \in \mathbb{N}_0 \text{ tal que } [N, +\infty) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(U, V)\\ &\Leftrightarrow N(U, V) \text{ es cofinito}\\ &\Rightarrow N(U, V) \text{ es infinito.}\end{aligned}$$

Podemos realizar la siguiente observación.

Observación 1.5.9. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces tenemos que :

i. T es topológicamente transitivo $\Leftrightarrow$ Para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacios, $N(U, V) \neq \emptyset$.

ii. T es mixing $\Leftrightarrow$ Para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacios, $N(U, V)$ es cofinito

iii. T es mixing $\Rightarrow$ Para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacios, $N(U, V)$ es infinito.

Ahora veremos una propiedad no tan evidente de los sistemas dinámicos topológicamente transitivos, la cual utilizaremos posteriormente para demostrar la equivalencia para sistemas mixing que mencionamos al principio de esta sección.

Lema 1.5.10. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. T es topológicamente transitivo si y sólo si $N(U, V)$ es infinito para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos.

Demostración. $\Leftarrow$ Si U y V son abiertos en X no vacíos, por hipótesis tenemos que $N(U, V)$ es infinito, entonces en particular $N(U, V) \neq \emptyset$ y T resulta topológicamente transitivo.

$\Rightarrow$ Como T es topológicamente transitivo, existe $m \in N(U, V)$, es decir, $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$.

Sea $G_0 = U \cap T^{-m}(V)$, entonces G_0 es abierto en X no vacío, veamos que $N(G_0, G_0) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

En efecto, como X no tiene puntos aislados y G_0 es abierto, existen $x_1, x_2 \in G_0$ tales que $x_1 \neq x_2$, entonces podemos considerar $G_1, G_2 \subset G_0$ abiertos disjuntos tales que $x_1 \in G_1$ y $x_2 \in G_2$. Como T es topológicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(G_1) \cap G_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto, como $G_1 \subset G_0$ y $G_2 \subset G_0$, tenemos que $T^n(G_1) \cap G_2 \subset T^n(G_0) \cap G_0$, de donde se deduce que $T^n(G_0) \cap G_0 \neq \emptyset$, es decir, $N(G_0, G_0) \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$.

Sea $k_0 \in N(G_0, G_0) \cap \mathbb{N}$, veamos que $m + k_0 \in N(U, V)$. En efecto, como $k_0 \in N(G_0, G_0)$, existe $x \in G_0 \subset U$ tal que $T^{k_0}(x) \in G_0 \subset T^{-m}(V)$, por lo tanto $x \in U$ es tal que $T^m\left(T^{k_0}(x)\right) \in V$. Así, $T^{m+k_0}(x) \in T^{m+k_0}(U) \cap V$ y por lo tanto $m + k_0 \in N(U, V)$.

Razonando de manera análoga con el abierto no vacío $U \cap T^{-(m+k_0)}(V)$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$, tal que $m + k_0 + k_1 \in N(U, V)$.

Iterando el procedimiento tenemos $(k_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{N}$ tal que $\{m + k_0 + \ldots + k_n, n \in \mathbb{N}_0\} \subset N(U, V)$ y concluimos que $N(U, V)$ es infinito.

□

Para finalizar esta sección veremos una importante característica de los sistemas dinámicos mixing. Más precisamente, veremos que dados S y T sistemas dinámicos, $S \times T$ es mixing si y sólo si S y T son mixing. Además, veremos que si bien no hay una equivalencia en el caso de sistemas dinámicos topológicamente transitivos y D-caóticos, tenemos una implicación que es válida en cada caso.

Proposición 1.5.11. Sean $S : X \longrightarrow X$ y $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos. Entonces :

i. Si $S \times T$ tiene órbita densa, entonces S y T tienen órbita densa.

ii. Si $S \times T$ es topológicamente transitivo, entonces S y T son topológicamente transitivos.

iii. Si $S \times T$ es D-caótico, entonces S y T son D-caóticos.

iv. Si S y T son topológicamente transitivos y S o T son mixing, entonces $S \times T$ es topológicamente transitivo.

v. $S \times T$ es mixing si y sólo si S y T son mixing.

Demostración. Para probar *i.*, *ii.* y *iii.*, como tener órbita densa, ser topológicamente transitivo y ser D-caótico se preservan bajo quasiconjugación (ver Proposición 1.2.7 y Corolario 1.4.4), basta ver que $S \times T$ es quasiconjugado a S y T.

Consideremos las proyecciones canónicas $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$ sobre X e Y respectivamente, veamos que $S \times T$ es quasiconjugada a S vía π_X.

En efecto, como $R(\pi_X) = X$, π_X tiene rango denso en X. Además, dado $(x, y) \in X \times Y$ tenemos que

$$(S \circ \pi_X)(x, y) = S(x) = (\pi_X \circ (S \times T))(x, y),$$

de donde

$$S \circ \pi_X = \pi_X \circ (S \times T).$$

Luego $S \times T$ es quasiconjugado a S vía π_X. Análogamente se ve que $S \times T$ es quasiconjugado a T vía π_Y. Así, si $S \times T$ tiene rango denso, es topógicamente transitivo o es D-caótico, entonces S y T también.

Para probar *iv.* y *v.*, observemos previamente que dados $A_1, B_1 \subset X$, $A_2, B_2 \subset Y$ y $n \in \mathbb{N}_0$,

$$(S \times T)^n ((A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)) = (S^n(A_1) \cap B_1) \times (T^n(A_2) \cap B_2).$$

iv. Supongamos que S y T son topológicamente transitivos y que S es mixing, queremos ver que $S \times T$ es topológicamente transitivo.

Sean $W_1, W_2 \subset X \times Y$ abiertos no vacíos, queremos ver que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $((S \times T)^n (W_1)) \cap W_2 \neq \emptyset$.

Como $\beta = \{U \times V, U \subset X, V \subset Y \text{ abiertos}\}$ es una base para la topología producto de $X \times Y$, existen $U_1 \times U_2 \in \beta$ y $V_1 \times V_2 \in \beta$ no vacíos tales que

$$U_1 \times U_2 \subset W_1 \qquad \text{y} \qquad V_1 \times V_2 \subset W_2.$$

Entonces basta ver que existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $S^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

En efecto, como $T : Y \longrightarrow Y$ es topológicamente transitivo, por el Lema 1.5.10 tenemos que $N_T(U_2, V_2)$ es infinito. Por otro lado, al ser S mixing, existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $[N, +\infty) \cap \mathbb{N}_0 \subset N_S(U_1, V_1)$.

Así, como $N_T(U_2, V_2)$ es infinito, existe $n \geq N$ tal que $n \in N_T(U_2, V_2)$. Luego $n \in N_S(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2)$ y concluimos que $S \times T$ es topológicamente transitivo.

v. $\Rightarrow$ Si $S \times T$ es mixing, como ser mixing se preserva bajo quasiconjugación (ver Proposición 1.5.3), tenemos que S y T son mixing.

$\Leftarrow$ Supongamos que S y T son mixing, queremos ver que $S \times T$ es mixing. Como β es base de la topología producto de $X \times Y$, basta ver que si $U_1 \times V_1 \in \beta$ y $U_2 \times V_2 \in \beta$ son no vacíos, entonces existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $(S \times T)^n ((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$.

En efecto, al ser $U_1 \times V_1$ y $U_2 \times V_2$ abiertos no vacíos de $X \times X$, entonces U_1, U_2, V_1 y V_2 son abiertos no vacíos de X, luego como S y T son mixing existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$S^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$$

para todo $n \geq N$. Así, tenemos que

$$(S \times T)^n ((U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2)) = (S^n(U_1) \cap V_1) \times (T^n(U_2) \cap V_2) \neq \emptyset$$

para todo $n \geq N$ y concluimos entonces que $S \times T$ es mixing.

□

1.6. Sistemas Dinámicos Débil Mixing.

En esta sección introduciremos el concepto de sistemas dinámico *débil mixing*. El nombre de débil mixing se debe a que es un concepto mas débil que el de mixing y a su vez más fuerte que el de topológicamente transitivo, es decir,

$$\text{mixing} \Rightarrow \text{ débil mixing} \Rightarrow \text{ topológicamente transitivo.}$$

En la sección anterior definimos el concepto de conjunto retorno y vimos que está vinculado directamente con la definición de ser topológicamente transitivo y ser mixing. Veremos al final de esta sección que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es débil mixing si y sólo si $N(U, V)$ contiene intervalos de cualquier longitud para todo par de abiertos no vacíos U y V en X.

Recordemos que en la sección anterior vimos que el hecho de que T sea topológicamente transitivo no implica que $T \times T$ sea topológicamente transitivo (ver Ejemplo 1.5.7). Este hecho nos conduce a la siguiente definición.

Definición 1.6.1. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Diremos que T es *débil mixing* si el sistema dinámico $T \times T : X \times X \longrightarrow X \times X$ es topológicamente transitivo.

A continuación veremos una primer caracterizacíón de los sistemas dinámicos débil mixing.

Lema 1.6.2. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i. T es débil mixing

ii. $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para todo U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *ii.* Sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X. Como $T : X \longrightarrow X$ es débil mixing, $T \times T : X \times X \longrightarrow X \times X$ es topológicamente transitivo, por lo tanto existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$(T^n(U_1) \cap V_1) \times (T^n(U_2) \cap V_2) = (T \times T)^n (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset.$$

Entonces $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ y concluimos que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Sean $W_1, W_2 \subset X \times X$ abiertos no vacíos, queremos ver que $(T \times T)^n (W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$. Como β es base existen U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos no vacíos en X tales que $U_1 \times V_1 \subset W_1$ y $U_2 \times V_2 \subset W_2$. Entonces, por hipótesis, existe $n \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$, es decir, $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ y $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Así, $(T \times T)^n (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$ y por lo tanto $T \times T$ es topológicamente transitivo. Luego T es débil mixing.

□

Corolario 1.6.3. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces tenemos que :

$$T \text{ mixing} \Rightarrow T \text{ débil mixing} \Rightarrow T \text{ topológicamente transitivo.}$$

Demostración. Si T es mixing, por *v.* de la Proposición 1.5.11 tenemos que $T \times T$ es mixing, en particular $T \times T$ es topológicamente transitivo y por lo tanto T es débil mixing.

Supongamos ahora que T es débil mixing. Sean U, V abiertos en X no vacíos, entonces por el Lema 1.6.2 tenemos que $N(U, V) \neq \emptyset$ y deducimos que T es topológicamente transitivo. □

Recordemos que vimos que una rotación irracional T de ángulo α es topológicamente transitiva (ver Proposición 1.5.6), pero que sin embargo $T \times T$ no lo es, con lo cual ser topológicamente transitivo no implica ser débil mixing. Por otro lado, no es tan fácil encontrar ejemplos de sistemas dinámicos débil mixing que no sean mixing. En el siguiente capítulo veremos un ejemplo en el contexto de sistemas dinámicos determinados por operadores lineales en espacios de Fréchet (Ejemplo 2.5.21).

Veremos a continuación que ser débil mixing se preserva bajo quasiconjugación, y como consecuencia probaremos que si el producto de sistemas dinámicos es débil mixing, entonces cada sistema del producto es débil mixing.

Proposición 1.6.4. La propiedad de ser débil mixing se preserva bajo quasiconjugación.

Demostración. Sea $S : Y \longrightarrow Y$ un sistema dinámico débil mixing y sea $T : X \longrightarrow X$ una quasiconjugación de S vía $\phi : Y \longrightarrow X$, entonces ϕ tiene rango denso y $T \circ \phi = \phi \circ S$. Consideremos $\phi \times \phi : Y \times Y \longrightarrow X \times X$, entonces $\phi \times \phi$ es continua de rango denso tal que

$$(T \times T) \circ (\phi \times \phi) = (T \circ \phi) \times (T \circ \phi) = (\phi \circ S) \times (\phi \circ S) = (\phi \times \phi) \circ (S \times S),$$

es decir, $T \times T$ es una quasiconjugación para $S \times S$ via $\phi \times \phi : Y \times Y \longrightarrow X \times X$.

Por otra parte, como S es débil mixing, entonces por definición $S \times S$ es topológicamente transitivo. Por la Proposición 1.2.7, la propiedad de ser topológicamente transitivo es preservada por quasiconjugación, entonces $T \times T$ es topológicamente transitivo y T es débil mixing.

□

Corolario 1.6.5. Sean $S : X \longrightarrow X$ y $T : Y \longrightarrow Y$ sistemas dinámicos. Si $S \times T$ es débil mixing, entonces S y T son débil mixing.

Demostración. Si procedemos como en la Proposición 1.5.11, tenemos que $S \times T$ es quasiconjugado a S y T vía π_X y π_Y respectivamente. Luego por la Proposición 1.6.4 tenemos que S y T son débil mixing. □

En lo que resta de esta sección veremos algunas caracterizaciones de sistemas dinámicos débil mixing, en términos de conjuntos de retorno y el Teorema de Furstenberg.

Lema 1.6.6. (Truco de los cuatro conjuntos) Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico y sean U_1, U_2, V_1 y V_2 abiertos en X no vacíos.

i. Si existe $S : X \longrightarrow X$ continua que conmuta con T tal que $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, entonces existen abiertos no vacíos $U_1' \subset U_1$ y $V_1' \subset V_1$ tales que $N_T(U_1', V_1') \subset N_T(U_2, V_2)$ y $N_T(V_1', U_1') \subset N_T(V_2, U_2)$.

Si además T es topológicamente transitivo, entonces $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset$

ii. Si T es topológicamente transitivo y $N_T(U_1, U_2) \cap N_T(V_1, V_2) \neq \emptyset$, entonces $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

Demostración. *i.* Como S es continua, existen abiertos no vacíos $U_1' \subset U_1$ y $V_1' \subset V_1$ tales que $S(U_1') \subset U_2$ y $S(V_1') \subset V_2$. Veamos que $N_T(U_1', V_1') \subset N_T(U_2, V_2)$. En efecto, si $n \in N_T(U_1', V_1')$, entonces existe $x \in U_1'$ tal que $T^n(x) \in V_1'$. Además, como $S(U_1') \subset U_2$, $S(V_1') \subset V_2$ y S conmuta con T, tenemos que $T^n(S(x)) = S(T^n(x)) \in V_2$ y $S(x) \in U_2$. Luego $T^n(S(x)) \in T^n(U_2) \cap V_2$ y por lo tanto $n \in N_T(U_2, V_2)$, con lo cual $N_T(U_1', V_1') \subset N_T(U_2, V_2)$.

Análogamente se ve que $N_T(V_1', U_1') \subset N_T(V_2, U_2)$.

Supongamos que T es topológicamente transitivo, entonces $N_T(U_1', V_1') \neq \emptyset$ y además como $U_1' \subset U_1$ y $V_1' \subset V_1$, tenemos que $N_T(U_1', V_1') \subset N_T(U_1, V_1)$. Así, tenemos que $N_T(U_1', V_1') \subset N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2)$, por lo tanto como $N_T(U_1', V_1') \neq \emptyset$ concluimos que $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

ii. Supongamos que T es topológicamente transitivo y tomemos $n \in N_T(U_1, U_2) \cap N_T(V_1, V_2)$. Si $S = T^n$, entonces $S : X \longrightarrow X$ es un sistema dinámico que conmuta con T. Además, como $n \in N_T(U_1, U_2) \cap N_T(V_1, V_2)$ tenemos que $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ y $S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, luego por *i.* tenemos que $N_T(U_1, V_1) \cap N_T(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

□

Teorema 1.6.7. (Furstenberg) Sean $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico débil mixing y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el n-producto $T \times \overset{(n)}{\cdots} \times T$ es débil mixing.

Demostración. Por definición, sabemos que $T \times \overset{(n)}{\cdots} \times T$ es débil mixing si $T \times \overset{(2n)}{\cdots} \times T$ es topológicamente transitivo, por lo tanto basta probar que $T \times \overset{(n)}{\cdots} \times T$ es topológicamente transitivo para todo $n \geq 2$.

Procederemos por inducción en n. Si $n = 2$, es claro ya que al ser T débil mixing , tenemos que $T \times T$ es topológicamente transitivo.

Sea $n > 2$ y supongamos que el n-producto $T \times \overset{(n)}{\cdots} \times T$ es topológicamente transitivo, queremos ver que $T \times \overset{(n+1)}{\cdots} \times T$ es topológicamente transitivo. Por el Lema 1.6.2, debemos ver que si U_k, V_k con $1 \leq k \leq n+1$ son abiertos no vacíos en X, entonces $\bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \neq \emptyset$. En efecto, como T es débil mixing existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ y $T^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$. Luego por el Lema 1.6.6 existen abiertos no vacíos $U_n' \subset U_n$ y $V_n' \subset V_n$ tales que

$$N(U_n', V_n') \subset N(U_n, V_n) \cap N(U_{n+1}, V_{n+1}).$$

Por otro lado, por hipótesis inductiva tenemos que $\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} N(U_k, V_k)\right) \cap N\left(U'_n, V'_n\right) \neq \emptyset$.

Así, como $\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} N(U_k, V_k)\right) \cap N\left(U'_n, V'_n\right) \subset \bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k)$, concluimos que $\bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \neq \emptyset$.

□

El Teorema de Furstenberg junto al Corolario 1.6.5 prueban el siguiente corolario.

Corolario 1.6.8. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Entonces el n-producto $T \times \overset{(n)}{\cdots} \times T$ es débil mixing si y sólo si T es débil mixing.

A continuación, veremos dos resultados que muestran que la definición de débil mixing se puede reducir a intersecciones de conjuntos retorno que involucran tres abiertos, y posteriormente, a intersecciones de conjuntos retorno que involucran dos abiertos.

Proposición 1.6.9. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes :

i. T es débil mixing.

ii. $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ para todo $U, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos en X.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Se deduce del Lema 1.6.2.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Por el Lema 1.6.2, basta ver que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para todo U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos en X. Por hipótesis tenemos que $N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2) \neq \emptyset$. Tomemos $n \in N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2)$, entonces tenemos que $U = U_1 \cap T^{-n}(U_2)$ y $V = T^{-n}(V_2)$ son abiertos no vacíos. Aplicando la hipótesis para U, V_1 y $T^{-n}(V_2)$, existe $m \in N(U, V_1) \cap N\left(U, T^{-n}(V_2)\right)$, es decir, existe $x \in U$ tal que $T^m(x) \in T^{-n}(V_2)$ y por lo tanto $T^m\left(T^n(x)\right) = T^n\left(T^m(x)\right) \in V_2$.

Por otro lado como $x \in U = U_1 \cap T^{-n}(U_2)$, en particular $T^n(x) \in U_2$ y tenemos que $T^m\left(T^n(x)\right) \in T^n(U_2) \cap V_2$.

Luego $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, es decir, $n \in N(U_2, V_2)$. Entonces como $U \subset U_1$, tenemos que $N(U, V_1) \subset N(U_1, V_1)$ y se deduce que $m \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. □

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.6.10. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes :

i. T es débil mixing.

ii. $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$ para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Se deduce del Lema 1.6.2.

$\Leftarrow$ Por la Proposición 1.6.9, basta ver que $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ para todo $U, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos.

En efecto, sean U, V_1, V_2 abiertos en X no vacíos, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $U_1 = U \cap T^{-n}(V_1)$ es abierto no vacío en X. Además, la hipótesis implica que T es topológicamente transitivo, con lo cual en particular por el Corolario 1.2.4, T tiene rango denso y entonces $T^{-1}(V_2)$ es abierto no vacío. Luego por hipótesis existe $m \in N(U_1, U_1) \cap N\left(U_1, T^{-n}(V_2)\right)$, entonces existen $x \in U_1, y \in U_1$ tales que $T^m(x) \in U_1$ y $T^m(y) \in T^{-n}(V_2)$. Así, como $U_1 = U \cap T^{-n}(V_1)$, $x \in U, y \in U$ son tales que

$$T^{n+m}(x) = T^n\left(T^m(x)\right) \in V_1 \qquad \text{y} \qquad T^{n+m}(y) = T^n\left(T^m(y)\right) \in V_2.$$

Luego $n + m \in N(U, V_1) \cap N(U, V_2)$.

□

Proposición 1.6.11. Sea $T : X \longrightarrow X$ un sistema dinámico. Las siguientes condiciones son equivalentes :

i. T es débil mixing.

ii. Para todo par de abiertos $U, V \subset X$ no vacíos, $N(U, V)$ contiene intervalos de cualquier longitud.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos y sea $m \in \mathbb{N}$, por el Corolario 1.2.4 tenemos que $T^{-k}(V)$ es abierto no vacío para todo $1 \leq k \leq m$. Ahora bien, por el Teorema de Furstenberg (Teorema 1.6.7) tenemos que $T \times \overset{(m)}{\cdots} \times T$ es topológicamente transitivo, entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\left(T \times \overset{(m)}{\cdots} \times T\right)^n (U) \cap \left(T^{-1}(V) \times \overset{(m)}{\cdots} \times T^{-m}(V)\right) \neq \emptyset.$$

Luego $T^n(U) \cap T^{-k}(V) \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k \leq m$, con lo cual $T^{n+k}(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $1 \leq k \leq m$. Así, $n + k \in N(U, V)$ para todo $1 \leq k \leq m$, entonces como m era arbitrario tenemos que $[n, +\infty) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(U, V)$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Por la Proposición 1.6.9, basta ver que $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ para todo $U, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos.

Por hipótesis existe $m \in N(V_1, V_2)$, es decir, $T^m(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$. Luego, por continuidad existe $V_3 \subset V_1$ abierto no vacío tal que $T^m(V_3) \subset V_2$. Además, por hipótesis existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $k + j \in N(U, V_3)$ para todo $0 \leq j \leq m$. Entonces como $V_3 \subset V_1$ tenemos que $k + m \in N(U, V_1)$ y además

$$T^{k+m}(U) \cap V_2 \supset T^{k+m}(U) \cap T^m(V_3) \supset T^m\left(T^k(U) \cap V_3\right) \neq \emptyset,$$

pues $k \in N(U, V_3)$. Luego $k + m \in N(U, V_3) \cap N(U, V_2)$ y deducimos que T es débil mixing.

□

Capítulo 2

Sistemas Dinámicos Lineales

En este capítulo estudiaremos sistemas dinámicos lineales hipercíclicos, mixing, débil mixing y caóticos, definidos sobre espacios de Fréchet. Estos son sistemas determinados por operadores lineales y continuos (a los que llamaremos operadores) sobre espacios de Fréchet. Por el Teorema de transitividad de Birkhoff, si X es un espacio de Fréchet, entonces un operador $T : X \longrightarrow X$ es topológicamente transitivo si y sólo si T es hipercíclico, con lo cual los resultados probados en el capítulo anterior para sistemas topológicamente transitivos también valdrán para los operadores hipercíclicos. El objetivo, además de presentar una breve introducción a la dinámica lineal, es mostrar resultados que serán utilizados principalmente en el Capítulo 4.

La mayoría de los resultados presentados en este capítulos pueden hallarse en [28].

2.1. Operadores Hipercíclicos

En esta sección estudiaremos *operadores hipercíclicos*, es decir, operadores lineales y continuos en espacios de Fréchet que poseen un vector con órbita densa. Veremos que no existen operadores hipercíclicos en espacios de dimensión finita (Corolario 2.1.7), por lo que nos ocuparemos de operadores definidos sobre espacios de dimensión infinita.

El término de vector hipercíclico fue introducido en 1986 por Beauzamy ([9]) y un estudio sistemático de *operadores hipercíclicos* comenzó con los trabajos de Bourdon, Godefroy y Shapiro ([19],[27]). Como nos interesará estudiar la existencia de vectores con órbita densa, estudiaremos los operadores definidos sobre espacios de Fréchet separables. Recordemos que el teorema de transitividad de Birkhoff (Teorema 1.3.3) nos dice que para aplicaciones sobre espacios métricos sin puntos aislados, y en particular sobre espacios de Fréchet separables, los conceptos de sistemas dinámicos topológicamente transitivos e hipercíclicos son equivalentes.

Comenzaremos dando las definiciones de vector cíclico e hipercíclico y también de vector supercíclico, que es un concepto intermedio entre los dos anteriores. Describiremos la relación con el problema del subespacio invariante que motiva sus definiciones. Además veremos algunos ejemplos de operadores hipercíclicos sobre espacios de Banach y espacios de Fréchet, y posteriormente enunciaremos algunos resultados análogos a los dados en el Capítulo 1 llevados en este caso al contexto lineal.

El concepto de vector hipercíclico proviene de los llamados vectores *cíclicos*, que son estudiados en álgebra lineal y teoría de operadores. Los vectores cíclicos están estrechamente ligados al problema del subespacio invariante:

Sea X un espacio de Banach. ¿Es cierto que todo operador $T \in \mathcal{L}(X)$ contiene un subespacio M no trivial ($M \neq \{0\}$ y $M \neq H$) cerrado T-invariante?.

Este problema fue resuelto por la negativa en algunos espacios de Banach, pero continúa abierto para espacios de Hilbert o incluso para espacios de Banach reflexivos. Para tratar de resolver el problema se puede observar que si $x \in X$, entonces $\overline{\langle\{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}\rangle}$ es un subespacio cerrado T-invariante. Luego, si $\langle\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}\rangle$ es denso en H, no existen subespacios cerrados no triviales T-invariantes en X que contengan a x.

Esto motivó a tener las siguientes definiciones.

Definición 2.1.1. Sean X un espacio Fréchet, $T : X \longrightarrow X$ un operador y $x \in X$. Diremos que x es un vector :

i. Cíclico si $\langle\{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}\rangle$ es denso en X.

ii. Supercíclico si $\{\lambda T^n(x), \lambda \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X.

iii. Hipercíclico si $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X.

En caso que exista un vector cíclico (respectivamente *supercíclico* e *hipercíclico*) para T, diremos que T es un operador *cíclico* (respectivamente *supercíclico* e *hipercíclico*).

Observemos que a partir de las definiciones, es claro que

$$\text{hipercíclico} \Rightarrow \text{ supercíclico} \Rightarrow \text{ cíclico.}$$

Además, por lo observado antes de la definición, la respuesta al problema del subespacio invariante es negativa en el caso que exista un operador $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que todo $x \neq 0$ es vector cíclico.

Una variante al problema del subespacio invariante, conocida como problema del subconjunto invariante, se puede formular de la siguiente manera :

¿Es cierto que todo operador $T \in \mathcal{L}(X)$ contiene un subconjunto $S \subset X$ cerrado no trivial T-invariante?.

La respuesta a esta nueva pregunta es negativa en el caso que exista $T \in \mathcal{L}(X)$ tal que todo $x \neq 0$ es vector hipercíclico. En el caso $X = \ell_1$, el problema del subconjunto invariante fue resuelto por la negativa por C. Read [41]

Los primeros ejemplos de operadores hipercíclicos fueron debido a G.D. Birkhoff [16] en 1929, G.R. MacLane [34] en 1952 y S. Rolewicz [44] en 1969. Veremos éstos y otros ejemplos en la Sección 2.5.

En el Capítulo 1 vimos que la propiedad de ser sistema dinámico hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación. Además, como consecuencia de este hecho vimos que dados dos sistemas dinámicos S y T, si el sistema dinámico $S \times T$ es topológicamente transitivo, entonces S y T son topológicamente transitivos. Vimos en el Ejemplo 1.5.7 que la recíproca a esta última afirmación no vale para sistemas dinámicos. Veremos que esto también sucede en el caso de los operadores.

Proposición 2.1.2. Sean X un espacio de Banach, $T : X \longrightarrow X$ un operador y $T^* : X^* \longrightarrow X^*$ el adjunto de T. Entonces el operador $T \oplus T^* : X \oplus X^* \longrightarrow X \oplus X^*$ no es hipercíclico.

Demostración. Supongamos que existe $(x, x^*) \in X \oplus X^*$ vector hipercíclico para $T \oplus T^*$, entonces

$$D = \{(T \oplus T^*)^n (x, x^*), n \in \mathbb{N}_0\} = \{(T^n(x), (T^*)^n (x^*)), n \in \mathbb{N}_0\} \subset X \oplus X^*$$

es denso. Consideremos $h : X \oplus X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por

$$h(y, y^*) = x^*(y) - y^*(x)$$

para todo $(y, y^*) \in X \oplus X^*$. Como h es continua y sobreyectiva, al ser $D \subset X \oplus X^*$ denso, tenemos que $h(D) \subset \mathbb{K}$ es denso. Por otro lado, por definición , para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $(T^*)^n (x^*) = x^* (T^n)$, entonces

$$h(T^n(x), (T^*)^n (x^*)) = x^* (T^n(x)) - ((T^*)^n(x^*))(x) = 0.$$

Luego $h(D) = \{0\}$ y llegamos a una contradicción. Por lo tanto $T \oplus T^*$ no es hipercíclico.

□

En lo que sigue, dado un espacio de Fréchet X separable , si $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un polinomio sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ y $T : X \longrightarrow X$ es un operador, nos interesará por un lado dar condiciones para garantizar que $P(T)$ tenga rango denso, y por otro lado caracterizar X a partir de $HC(T)$. Primero demostraremos el Teorema de Bourdon, el cual nos dice que si T es hipercíclico , entonces $P(T)$ tiene rango denso, y posteriormente veremos si $x \in X$ es tal que $D = \left\{\mu T^n(x), n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{S}^1\right\}$ es denso en X, entonces $P(T)$ tiene rango denso. Utilizaremos este hecho en el capítulo 4 para demostrar el Teorema de León-Müller.

Comenzamos dando la siguiente definición.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio de Fréchet real y separable. Definimos la *complexificación de* X como

$$\tilde{X} = \{x + yi, x, y \in X\},$$

la cual se identifica claramente con $X \oplus X$. Si dados $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$ y $z = x + yi \in \tilde{X}$, definimos el producto λz por

$$\lambda z = (a + bi)(x + yi) = (ax - by) + (ay + bx)i,$$

entonces $\tilde{X}$ resulta ser un espacio de Fréchet complejo y además separable, ya que X es separable. Por otro lado, si $T : X \longrightarrow X$ es un operador $\mathbb{R}$-lineal en X, definimos la *complexificación* $\tilde{T} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ como

$$\tilde{T}(x + yi) = T(x) + T(y)i, \ x + iy \in \tilde{X}.$$

Observación 2.1.4. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador $\mathbb{R}$-lineal, entonces $\tilde{T} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ es un operador $\mathbb{C}$-lineal.

Como consecuencia de este hecho y la Proposición 1.5.11, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.5. Sea X un espacio de Fréchet real y separable. Dado un operador T sobre X, si su complexificación $\tilde{T}$ es hipercíclico, entonces T es hipercíclico.

Demostración. En efecto, al ser $\tilde{T}$ hipercíclico, se deduce que $T \oplus T$ es hipercíclico. Luego, por *ii*. de la Proposición 1.5.11 tenemos que T es hipercíclico.

□

Ahora que definimos la complexificación de un operador sobre un espacio de Fréchet separable, estamos casi en condiciones de probar el Teorema de Bourdon, previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.1.6. *i*. Si X es un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico, entonces el operador adjunto $T^* : X^* \longrightarrow X^*$ no tiene autovalores. Equivalentemente, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, el operador $T - \lambda I$ tiene rango denso en X.

ii. Si X es un espacio de Fréchet real y separable y $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico, entonces el operador adjunto de su complexificación $(\tilde{T})^* : (\tilde{X})^* \longrightarrow (\tilde{X})^*$ no tiene autovalores. Equivalentemente, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, el operador $\tilde{T} - \lambda I$ tiene rango denso en $\tilde{X}$.

Demostración. i. Sea $x \in X$ un vector hipercíclico para T. Razonemos por el absurdo, es decir, supongamos que T^* tiene un autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces existe $\varphi \in X^*$ no nulo tal que $T^*(\varphi) = \lambda\varphi$. Observemos que al ser $\varphi \neq 0$, existe $x_0 \in X$ no nulo tal que $\varphi(x_0) \neq 0$, entonces dado $\mu \in \mathbb{K}$, tenemos que

$$\varphi\left(\mu x_0 (\varphi(x_0))^{-1}\right) = \mu\varphi(x_0) (\varphi(x_0))^{-1} = \mu,$$

es decir, φ es sobreyectiva. Por otro lado, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $\varphi(T^n(x)) = ((T^*)^n(\varphi))(x) = \lambda^n\varphi(x)$.

Veamos que $D = \{\varphi(T^n(x)), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{K}$.

En efecto, sea $U \subset \mathbb{K}$ abierto no vacío, al ser φ sobreyectiva y continua, tenemos que $\varphi^{-1}(U)$ es abierto no vacío en X. Luego como x es hipercíclico, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(x) \in \varphi^{-1}(U)$. Así, $\varphi(T^n(x)) \in U \cap D$ y por lo tanto D es denso en $\mathbb{K}$. Ahora bien, como para todo $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $\varphi(T^n(x)) = \lambda^n\varphi(x)$ y D es denso en $\mathbb{K}$, entonces $\{\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0\} = \{\varphi(T^n(x)), n \in \mathbb{N}_0\} = D$ es denso en $\mathbb{K}$.

Si $|\lambda| \leq 1$, tenemos que $\{\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0\} \subset B(0, |\varphi(x)|)$. Si $|\lambda| > 1$, $\{\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0\} \subset (B(0, |\varphi(x)|))^c$.

Luego $\{\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ no puede ser denso en $\mathbb{K}$ y llegamos a una contradicción, con lo cual deducimos que T^* no tiene autovalores.

Así, como $\mathrm{Ker}(T^* - \lambda I) = R(T - \lambda I)^{\perp}$, concluimos que $T - \lambda I$ tiene rango denso.

ii. Sean X espacio de Fréchet real y separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador.

Veamos que el adjunto de su complexificación $(\tilde{T})^* : (\tilde{X})^* \longrightarrow (\tilde{X})^*$ no tiene autovalores. Sea x un vector hipercíclico para T y supongamos que λ es un autovalor de $(\tilde{T})^*$ con autovector asociado $\tilde{\varphi} \in (\tilde{X})^*$. Entonces para todo $n \in \mathbb{N}_0$, como $\tilde{T}_{|X} = T$ tenemos que

$$|\tilde{\varphi}(T^n(x))| = \left|\tilde{\varphi}\left((\tilde{T})^n(x)\right)\right| = \left|\left(\tilde{\varphi} \circ (\tilde{T})^n\right)(x)\right| = \left|\left((\tilde{T})^*(\tilde{\varphi})\right)^n(x)\right| = |\lambda|^n |\tilde{\varphi}(x)|.$$

Además, como $\tilde{\varphi} \neq 0$ y $\tilde{\varphi}(x_1 + x_2 i) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)i$ para todo $x_1, x_2 \in X$, existe $y \in X$ tal que $|\tilde{\varphi}(y)| > 0$. Luego como $\tilde{\varphi}$ es lineal, $\mathrm{Im}(|\tilde{\varphi}|) = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Así, procediendo como en *i.* tenemos por un lado que $\{|\tilde{\varphi}(T^n(x))|, n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en $\mathbb{R}_{\geq 0}$ y por otro lado que $\{|\lambda|^n |\tilde{\varphi}(x)|, n \in \mathbb{N}_0\}$ no es denso en $\mathbb{R}_{\geq 0}$, lo cual es absurdo ya que $\{|\tilde{\varphi}(T^n(x))|, n \in \mathbb{N}_0\} = \{|\lambda|^n |\tilde{\varphi}(x)|, n \in \mathbb{N}_0\}$. Luego $(\tilde{T})^*$ no tiene autovalores.

Análogamente a lo hecho en *i.*, se prueba que $R(\tilde{T} - \lambda I)$ es denso en $\tilde{X}$. □

Corolario 2.1.7. No existen operadores hipercíclicos sobre espacios de Fréchet de dimensión finita.

Demostración. Supongamos que $T : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ es un operador. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T^*, por lo que *i.* del lema anterior implica que T no es hipercíclico. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces el adjunto de la complexificación, $(\tilde{T})^* : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ tiene autovalores, y por *ii.* del lema anterior, el operador T no es hipercíclico.

□

Teorema 2.1.8. **(Bourdon)** Sea X un espacio de Fréchet separable sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico y $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es un polinomio no nulo, entonces $P(T) : X \longrightarrow X$ tiene rango denso.

Demostración. *i.* Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, supongamos que $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es de grado $N \in \mathbb{N}$ y escribamos P en la forma

$$P(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, con $a_n \in \mathbb{C}$ para todo $1 \leq n \leq N$ y $a_N \neq 0$. Como $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, sabemos que tiene N raíces distintas $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ en $\mathbb{C}$. Podemos escribir entonces

$$P(z) = a_N(z - \lambda_1) \ldots (z - \lambda_N)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, con lo cual $P(T) : X \longrightarrow X$ viene dado por

$$P(T) = a_N(T - \lambda_1 I) \ldots (T - \lambda_N I).$$

Entonces por *i.* del Lema 2.1.6 tenemos que $T - \lambda_k I$ tiene rango denso en X para todo $1 \leq k \leq N$, de donde se deduce que $P(T)$ tiene rango denso en X.

ii. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, consideremos la complexificación $\tilde{T}$ de T. Razonando de manera análoga a lo realizado en el caso complejo, tenemos que $P(\tilde{T})$ tiene rango denso en $\tilde{X}$. Ahora bien, como $P(\tilde{T})$ viene dado por

$$P(\tilde{T})(x + yi) = P(T)(x) + P(T)(y)i$$

para todo $x + yi \in \tilde{X}$, deducimos que $P(T)$ tiene rango denso en X.

□

Veremos ahora una variante del resultado anterior que nos será de utilidad en el capítulo 4.

Proposición 2.1.9. Sea X un espacio de Fréchet separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si $x \in X$ es tal que $D = \left\{\mu T^n(x), n \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{S}^1\right\}$ es denso en X, entonces :

i. $T - \lambda I$ tiene rango denso para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

ii. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio no nulo, entonces $P(T)$ tiene rango denso.

Demostración. *i.* Veamos que $T^* : X^* \longrightarrow X^*$ no tiene autovalores. En efecto, supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalor de T^*, entonces existe $\varphi \in X^*$ autovector de T^*, es decir, $\varphi \neq 0$ tal que $T^*(\varphi) = \lambda\varphi$.

Al ser $\varphi \neq 0$, tenemos que φ es sobreyectiva, con lo cual procediendo como en el lema anterior deducimos que $\varphi(D) = \left\{\varphi(\mu T^n(x)), n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{S}^1\right\}$ es denso en $\mathbb{K}$.

Ahora bien, dados $\mu \in \mathbb{S}^1$ y $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\varphi(\mu T^n(x)) = \mu((\varphi \circ T^n)(x)) = \mu\lambda^n\varphi(x)$, por lo tanto como $\mu \in \mathbb{S}^1$ se tiene que

$$|\varphi(\mu T^n(x))| = |\mu| |\lambda|^n |\varphi(x)| = |\lambda|^n |\varphi(x)|.$$

Luego procediendo como en *i.* del lema anterior tenemos que

$$\left\{\mu\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{S}^1\right\} \subset B\left(0, |\varphi(x)|\right) \qquad \text{ó} \qquad \left\{\mu\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{S}^1\right\} \subset \left(B(0, |\varphi(x)|)\right)^c,$$

de donde se deduce que $\varphi(D) = \left\{\mu\lambda^n\varphi(x), n \in \mathbb{N}_0, \mu \in \mathbb{S}^1\right\}$ no es denso en $\mathbb{K}$ y llegamos a una contradicción. Así, T^* no tiene autovalores y concluimos que $T - \lambda I$ tiene rango denso para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

ii. Por *i.* tenemos que $T - \lambda I$ tiene rango denso para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$, luego procediendo de manera análoga al Teorema de Bourdon en el caso complejo deducimos que $P(T)$ tiene rango denso.

□

Como segunda consecuencia del Teorema de Bourdon, probaremos a continuación que todo operador hipercíclico sobre un espacio de Fréchet separable admite un subespacio denso de vectores hipercíclicos.

Teorema 2.1.10. (Herrero-Bourdon) Sea X un $\mathbb{K}$-espacio de Fréchet separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador hipercíclico. Si $x \in X$ es un vector hipercíclico, entonces $\{P(T)(x), P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ polinomio }\} \setminus \{0\}$ es un conjunto de vectores hipercíclicos para T denso en X.

En particular, todo operador hipercíclico admite un subespacio denso invariante formado por vectores hipercíclicos (salvo el cero).

Demostración. Sean x vector hipercíclico para T y $M = \{P(T)(x), P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ polinomio}\} = \langle Orb(T, x)\rangle$. Entonces M es un subespacio denso en X. Además, si $T^n(x) \in Orb(T, x)$, entonces $T\left(T^n(x)\right) = T^{n+1}(x) \in Orb(T, x)$, luego como T es lineal se deduce que $M = \langle Orb(T, x)\rangle$ es T-invariante.

Resta ver que todo elemento no nulo de M es vector hipercíclico. Sea entonces $y \in M \setminus \{0\}$, entonces escribimos $y = P(T)(x)$ con $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ no nulo dado por

$$P(z) = \sum_{k=0}^{m} a_k z^k$$

para todo $z \in \mathbb{K}$, con $a_k \in \mathbb{K}$ para $0 \leq k \leq m$ y $a_m \neq 0$. Entonces $y = P(T)(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^k(x)$ y

$$T^n(y) = \sum_{k=0}^{m} a_k T^{n+k}(x) = P(T)\left(T^n(x)\right)$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Así, como x es hipercíclico, por el Teorema de Bourdon tenemos que $P(T)$ tiene rango denso y se deduce que $Orb(T, y) = \{T^n(y), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X, es decir, y es hipercíclico.

□

Para terminar esta sección, dado T un operador hipercíclico sobre un espacio X de Fréchet separable, como corolario del Teorema de Herrero-Bourdon, deduciremos que $HC(T) \subset X$ es conexo y además veremos que $X = HC(T) + HC(T)$.

Corolario 2.1.11. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico sobre un espacio de Fréchet separable X, entonces $HC(T) \subset X$ es conexo.

Demostración. Recordemos que si Y es un espacio topológico y A, B son subespacios en Y tales que $A \subset B \subset \overline{A}$, con A conexo, entonces B es conexo.

Sean entonces $x \neq 0$ un vector hipercíclico para T y $M = \{P(T)(x),\ P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \text{ polinomio}\}$. Consideremos $A = M \setminus \{0\}$ y $B = HC(T)$, entonces por el Teorema de Herrero-Bourdon, M es denso en X, con lo cual $A \subset B \subset X = \overline{A}$. Veamos que M es arcoconexo (en particular, conexo). Sean $y \neq z$ en M, consideremos $\varphi : [0, 1] \longrightarrow M$ definida por

$$\varphi(t) = tz + (1 - t)y$$

para todo $t \in [0, 1]$. Vimos en el Teorema de Herrero-Bourdon que $M = \langle Orb(T, x)\rangle$, entonces al ser $y, z \in M$ tenemos que $ty + (1 - t)z \in M$ para todo $t \in [0, 1]$, por lo que φ está bien definida. Además, al ser M un subespacio de X, en particular es un espacio vectorial topológico y por lo tanto φ es continua y verifica que $\varphi(0) = y$ y $\varphi(1) = z$.

Luego M es arcoconexo y en consecuencia M resulta conexo. Además, como $Orb(T, x)$ es denso en X, $M = \langle Orb(T, x)\rangle$ es un subespacio de dimensión infinita. Veamos que $A = M \setminus \{0\}$ es arcoconexo. En efecto, sean $x_0, y_0 \in M \setminus \{0\}$ tales que $x_0 \neq y_0$.

Si $\{x_0, y_0\}$ es linealmente independiente, entonces el segmento $[x_0, y_0] = \{(1 - t)x_0 + ty_0, 0 \leq t \leq 1\} \subset A$.

Si $\{x_0, y_0\}$ es linalmente dependiente, como $\dim(M) > 1$, existe $z_0 \in A = M \setminus \{0\}$ tal que $\{x_0, z_0\}$ y $\{z_0, y_0\}$ son linealmente independientes, por lo tanto $[x_0, z_0] \subset A$ y $[z_0, y_0] \subset A$. Luego existe un camino en A entre x_0 e y_0, por lo tanto $A = M \setminus \{0\}$ es arcoconexo y en particular conexo. De esta manera, como $A \subset HC(T) \subset \overline{A}$ con $A \subset X$ conexo, concluimos que $HC(T)$ es conexo.

□

Teorema 2.1.12. Sea X un espacio de Fréchet separable. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico, entonces $X = HC(T) + HC(T)$.

Demostración. Sea $x \in X$, por el Teorema 1.3.3 tenemos que $HC(T)$ es un conjunto G_δ denso. Además como T es hipercíclico, dado $y \in X$ hipercíclico , por el Teorema de Herrero-Bourdon sabemos que $M = \langle Orb(T, y)\rangle$ es denso en X y $M \setminus \{0\} \subset HC(T)$, con lo cual $HC(T)$ es denso en X. Además, al ser $HC(T)$ un conjunto G_δ denso en X, se deduce que $x - HC(T)$ es denso y G_δ, ya que por el Lema A.1.3 las traslaciones y multiplicaciones por escalares son homeomorfismos. Entonces, como X es un espacio métrico completo, por el Teorema de Baire (Teorema A.1.23), tenemos que $HC(T) \cap (x - HC(T))$ es denso y G_δ, en particular no vacío.

Luego existe $z \in HC(T)$ tal que $x - z \in HC(T)$ y $x = z + (x - z) \in HC(T) + HC(T)$.

□

2.2. Operadores D-Caóticos y AY-Caóticos

En el capítulo 1 definimos los sistemas dinámicos D-caóticos como aquellos sistemas topológicamente transitivos para los cuales el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio subyacente. Además definimos sistemas dinámicos AY-caóticos y vimos que todo sistema dinámico D-caótico es AY-caótico. En esta sección veremos que en el caso lineal la hiperciclicidad implicará la sensibilidad respecto de las condiciones iniciales, por lo tanto los conceptos de operador AY-caótico y operador hipercíclico serán equivalentes. Además, nuestro objetivo será caracterizar el conjunto de puntos periódicos de los operadores definidos sobre un $\mathbb{C}$-espacio vectorial para luego mostrar que el conjunto de puntos periódicos de los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkhoff son densos.

Proposición 2.2.1. Sea X un espacio de Fréchet separable. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico, entonces T tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

Demostración. Como la topología de un espacio de Fréchet está dada por una métrica invariante por traslaciones (ver Ejemplo A.1.7), es suficiente probar que dado $y \in X$ y U un entorno de y, existe $z \in U$ de manera tal que $\{T^n(y) - T^n(z),\ n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. Notemos que $y + HC(T)$ es un conjunto denso en X, por lo tanto existe $z \in U \cap (y + HC(T))$. Esto implica que $z - y \in HC(T)$, lo que demuestra la proposición.

□

Corolario 2.2.2. Si X es un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita y $T : X \longrightarrow X$ es un operador sobre X, entonces son equivalentes :

i. T es hipercíclico.

ii. T es AY-caótico.

Como mencionamos anteriormente, hay operadores para los cuales podremos describir con precisión el conjunto de sus puntos periódicos, en la siguiente observación describiremos el conjunto de puntos periódicos de los operadores de Rolewicz para todo λ tal que $|\lambda| > 1$.

Observación 2.2.3. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$. Consideremos el operador de desplazamiento $\lambda B : X \longrightarrow X$ definido sobre $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$.

Veamos que $\mathcal{P}er(\lambda B) = \left\{x = (x_1, \ldots, x_N, \lambda^{-N}x_1, \ldots, x_N\lambda^{-N}, \lambda^{-2N}x_1, \ldots, x_N\lambda^{-2N}, \ldots), N \in \mathbb{N}\right\}$. En efecto, sean $x \in X$ y $N \in \mathbb{N}$, entonces

$$(\lambda B)^N(x) = \left(\lambda^N x_{N+1}, \lambda^N x_{N+2}, \ldots\right).$$

Luego tenemos que $(\lambda B)^N(x) = x \Leftrightarrow x_{N+k} = \lambda^N x_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Lema 2.2.4. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| > 1$ y $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$, entonces $\mathcal{P}er(\lambda B)$ es denso en X.

Demostración. Sea $c_{00} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, 0, 0, \ldots), n \in \mathbb{N}\}$, entonces como c_{00} es denso en X, para ver que $\mathcal{P}er(\lambda B)$ es denso en X basta ver que $c_{00} \subset \overline{\mathcal{P}er(\lambda B)}$. En efecto, sea $x = (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \in c_{00}$, debemos ver que $x \in \overline{\mathcal{P}er(\lambda B)}$. Dado $N \geq n$, consideramos $x^N = \left(x_1, \ldots, x_N, \lambda^{-N}x_1, \ldots, \lambda^{-N}x_N, \lambda^{-2N}x_1, \ldots, \lambda^{-2N}x_N, \ldots\right)$, entonces por la Observación 2.2.3 tenemos que $x^N \in \mathcal{P}er(\lambda B)$.

Si $X = \ell_p$, entonces $\left\|x^N - x\right\|_{\ell_p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda|^{-iN} \|x\|_{\ell_p}$.

Si $X = c_0$, como $\left|\lambda^{-jN}x_j\right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-iN} \|x\|_{c_0}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces $\left\|x^N - x\right\|_{c_0} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-iN} \|x\|_{c_0}$.

Luego tenemos que

$$\left\|x^N - x\right\|_X \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-iN} \|x\|_X = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|\lambda|^N}\right)^i \|x\|_X = \frac{1}{|\lambda|^N - 1}\|x\|_X \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

Por lo tanto $x^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} x$ y entonces $x \in \overline{\mathcal{P}er(\lambda B)}$. Así, tenemos que $c_{00} \subset \overline{\mathcal{P}er(\lambda B)}$ y se deduce que $\mathcal{P}er(\lambda B)$ es denso en X.

□

Para terminar esta sección, veremos que el conjunto de puntos periódicos de un operador T es un subespacio, que se puede caracterizar en términos de autovectores y autovalores de módulo 1 de T. Esta caracterización será de utilidad en la Sección 2.5.1 para probar el criterio de Godefroy-Shapiro sobre operadores D-caóticos.

Observación 2.2.5. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $T : X \longrightarrow X$ un operador, veamos que $\mathcal{P}er(T)$ es un subespacio. En efecto, dados $x, y \in \mathcal{P}er(T)$ y $a, b \in \mathbb{K}$, queremos ver que $ax + by \in \mathcal{P}er(T)$. Sean $n, m \in \mathbb{N}_0$ tales que $T^n(x) = x$ y $T^m(y) = y$, entonces $(T^n)^m(x) = x$ y $(T^m)^n(y) = y$. Luego,

$$T^{nm}(ax + by) = a\,(T^n)^m(x) + b\,(T^m)^n(y) = ax + by,$$

entonces $ax + by \in \mathcal{P}er(T)$ y por lo tanto $\mathcal{P}er(T)$ es un subespacio.

Proposición 2.2.6. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ y sea T un operador sobre X. Entonces el conjunto de puntos periódicos de T es el subespacio $\mathcal{P}er(T) = \left\langle\left\{x \in X \text{ tales que } T(x) = e^{\alpha\pi i}x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\right\}\right\rangle$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $T(x) = e^{\alpha\pi i}x$ con $\alpha \in \mathbb{Q}$, digamos $\alpha = \dfrac{k}{n}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $T^{2n}(x) = x$. Por lo tanto $x \in \mathcal{P}er(T)$ y deducimos que $\mathcal{P}er(T) \supseteq \left\langle\left\{x \in X \text{ tales que } T(x) = e^{\alpha\pi i}x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q}\right\}\right\rangle$.

Para ver la otra inclusión tomemos $x_0 \in \mathcal{P}er(T)$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x_0) = x_0$ y consideremos el polinomio $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$P(z) = z^n - 1$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Factorizando P en $\mathbb{C}$, podemos escribir P en la forma

$$P(z) = (z - \lambda_1)\ldots(z - \lambda_n)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\lambda_j = e^{i\frac{j}{n}2\pi}$ para todo $1 \leq j \leq n$. Para cada $1 \leq k \leq n$, definimos

$$P_k(z) = \prod_{i\neq k}(z - \lambda_i)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, veamos que $\{P_1, \ldots, P_n\}$ es base de $\{Q \in \mathbb{C}[z], gr(Q) < n\}$.

Observemos que $\dim(\{Q \in \mathbb{C}[z], gr(Q) < n\}) = n$, por lo tanto basta ver que $\{P_1, \ldots, P_n\}$ es linealmente independiente. En efecto, sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k = 0$. Dado $1 \leq k_0 \leq n$, por definición tenemos que $P_k(\lambda_k) = 0$ para todo $k \neq k_0$ y $P_{k_0}(\lambda_{k_0}) \neq 0$, luego

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k\right)(\lambda_{k_0}) = \alpha_{k_0} P_{k_0}(\lambda_{k_0}) = 0,$$

y entonces $\alpha_{k_0} = 0$. Por lo tanto $\{P_1, \ldots, P_n\}$ es linealmente independiente y resulta una base de $\{Q \in \mathbb{C}[z], gr(Q) < n\}$.

En particular, $1 \in \langle\{P_1, \ldots, P_n\}\rangle$, entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ tales que $1 = \sum_{k=1}^{n} a_k P_k(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de donde $I = \sum_{k=1}^{n} a_k P_k(T)$ (ver *ii*. del Teorema A.1.24). Así, podemos escribir $x_0 = \sum_{k=1}^{n} a_k y_k$, donde $y_k = P_k(T)(x_0)$ para todo $1 \leq k \leq n$, con lo cual tenemos que $x_0 \in \langle y_1, \ldots, y_n\rangle$. Queremos ver que para todo $1 \leq k \leq n$, $T(y_k) = e^{\alpha_k \pi i} y_k$ para algún $\alpha_k \in \mathbb{Q}$. Por un lado, como

$$P(z) = z^n - 1 = \prod_{i=1}^{n} (z - \lambda_i)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, por *ii*. del Teorema A.1.24 tenemos que

$$P(T) = T^n - I = \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i I).$$

Por otro lado, dado $1 \leq i \leq n$, si definimos $f_i : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$f_i(z) = z - \lambda_i$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f_i(T) = T - \lambda_i I$. Luego como $P = \prod_{i=1}^{n} f_i$, tenemos que $T^n - I = P(T) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(T)$. Así, dado $1 \leq k \leq n$, al ser $P_k = \prod_{i \neq k} f_i$, por *iii*. del Teorema A.1.24 tenemos que

$$\begin{aligned} f_k(T) \circ P_k(T) &= f_k(T) \circ f_1(T) \circ \ldots \circ f_{k-1}(T) \circ f_{k+1}(T) \circ \ldots \circ f_n(T) = (f_k f_1 \ldots f_{k-1} f_{k+1} \ldots f_n)(T) \\ &= (f_1 \ldots f_{k-1} f_k f_{k+1} \ldots f_n)(T) = \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)(T) = T^n - I. \end{aligned}$$

Entonces como $T^n(x_0) = x_0$, deducimos que

$$(T - \lambda_k I)(y_k) = f_k(T)(P_k(T)(x_0)) = (f_k(T) \circ P_k(T))(x_0) = (T^n - I)(x_0) = 0,$$

de donde $T(y_k) = \lambda_k y_k$ para todo $1 \leq k \leq n$. Ahora bien, dado $1 \leq k \leq n$, como $\lambda_k = e^{\frac{2k}{n}\pi i}$, si tomamos $\alpha_k = \frac{2k}{n} \in \mathbb{Q}$ tenemos que $T(y_k) = e^{\alpha_k \pi i} y_k$.

Así, para cada $1 \leq k \leq n$ se tiene $x_0 \in \left\langle \left\{ x \in X \text{ tales que } T(x) = e^{\alpha \pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle$.

□

A continuación, demostraremos una proposición que nos permitirá demostrar que el conjunto de puntos periódicos de los operadores de MacLane y Birkhoff son densos en $H(\mathbb{C})$. Previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.2.7. Sean $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ y $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ tales que tal que $\lambda_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, con $\lambda_n \neq \lambda_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $e^{\lambda_n z} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} e^{\lambda_0 z}$ y $\dfrac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda_n - \lambda_0} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} z e^{\lambda_0 z}$ uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{C}$.

Mas aún, si para cada λ y cada $n \in \mathbb{C}$ consideramos $e_\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas por

$$e_\lambda(z) = e^{\lambda z} \qquad \text{y} \qquad g_n(z) = z^n e^{\lambda_0 z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $g_n \in \overline{\langle\{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}\rangle}$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos la serie de Taylor centrada en 0 dada por

$$e^{(\lambda_n-\lambda_0)z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^k z^k}{k!}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos que

$$e^{\lambda_n z} = e^{\lambda_0 z} e^{(\lambda_n-\lambda_0)z} = e^{\lambda_0 z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^k z^k}{k!} = e^{\lambda_0 z} + e^{\lambda_0 z}(\lambda_n-\lambda_0)z + e^{\lambda_0 z}\frac{(\lambda_n-\lambda_0)^2 z^2}{2!} + \ldots,$$

por lo tanto

$$e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z} = e^{\lambda_0 z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^k z^k}{k!} \qquad \text{y} \qquad \frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda_n - \lambda_0} - z e^{\lambda_0 z} = e^{\lambda_0 z} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^{k-1} z^k}{k!}$$

para todo $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$. Si $K \subset \mathbb{C}$ es compacto, entonces existe $M > 0$ tal que $|z| \leq M$ para todo $z \in K$. Además, como $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda_n - \lambda_0| < \text{mín}\left\{1, \frac{\varepsilon}{e^{(|\lambda_0|+1)M}}\right\}$ para todo $n \geq n_0$.

Así, como $e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}$ y $|\lambda_n - \lambda_0|^k < \frac{\varepsilon}{e^{(|\lambda_0|+1)M}}$ para todo $n \geq n_0, k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\left|e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z}\right| < e^{|\lambda_0|M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n-\lambda_0|^k\, |z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{e^M} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M^k}{k!} \leq \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0, z \in K$. Luego $e^{\lambda_n z} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{\lambda_0 z}$ uniformemente sobre K.

Análogamente, $\left|\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda_n - \lambda_0} - z e^{\lambda_0 z}\right| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0, z \in K$ y se deduce que $\frac{e^{\lambda_n z} - e^{\lambda_0 z}}{\lambda_n - \lambda_0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} z e^{\lambda_0 z}$ uniformemente sobre K. Por lo tanto $g_1 \in \overline{\langle\{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}\rangle}$.

Razonando análogamente deducimos que $g_k \in \overline{\langle\{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}\rangle}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

□

Proposición 2.2.8. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un conjunto con un punto de acumulación y para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ consideremos $e_\lambda : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces $D = \langle\{e_\lambda, \lambda \in \Gamma\}\rangle$ es denso en $H(\mathbb{C})$.

Demostración. Sea $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ punto de acumulación de D, entonces existe $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_0$ con $\lambda_n \neq \lambda_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si para cada $k \in \mathbb{N}_0$ definimos $g_k : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g_k(z) = z^k e^{\lambda_0 z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, por el Lema 2.2.7 tenemos que $g_k \in \overline{\langle\{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\}\rangle}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$. Sea $f \in H(\mathbb{C})$, entonces si definimos $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = e^{-\lambda_0 z} f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, g es holomorfa en $\mathbb{C}$ y su serie de Taylor centrada en 0 viene dada por

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Así, podemos escribir f en la forma

$$f(z) = e^{\lambda_0 z} g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k e^{\lambda_0 z} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Veamos que la convergencia es en $H(\mathbb{C})$, es decir, si para cada $N \in \mathbb{N}$ definimos $S_N : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k g_k(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, queremos ver que $S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $H(\mathbb{C})$, para lo cual basta ver que $\rho_m(S_N - f) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto, observemos que al ser $g \in H(\mathbb{C})$, tenemos que $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego, si definimos $\tilde{g} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, z^k$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces como $|a_n|^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tenemos que $\tilde{g} \in H(\mathbb{C})$.

Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces $\tilde{g}(m) = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\, m^k$. Luego si $|z| \leq m$, tenemos que

$$|S_N(z) - f(z)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|\, m^k e^{|\lambda_0| m} = e^{|\lambda_0| m} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|\, m^k,$$

de donde se deduce que $\rho_m(S_N - f) = \sup_{|z|\leq m} |S_N(z) - f(z)| \leq e^{|\lambda_0| m} \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|\, m^k \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Por lo tanto $S_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $H(\mathbb{C})$, entonces como $S_N \in \langle \{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\} \rangle$ para todo $N \in \mathbb{N}$ deducimos que $f \in \overline{\langle \{e_{\lambda_n}, n \in \mathbb{N}\} \rangle} \subseteq \overline{D}$ y D resulta denso en $H(\mathbb{C})$.

□

A continuación, dado $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ veremos que si D y T_a son los operadores de MacLane y Birkhoff, entonces $\mathcal{P}er(D)$ y $\mathcal{P}er(T_a)$ son densos en $H(\mathbb{C})$.

Lema 2.2.9. Sea $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y consideremos los operadores de MacLane y Birkhoff $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ y $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$. Entonces $\mathcal{P}er(D)$ y $\mathcal{P}er(T_a)$ son densos en $H(\mathbb{C})$.

Demostración. Veamos que $\mathcal{P}er(D)$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Observemos que dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $D(e_\lambda) = \lambda e_\lambda$, es decir, la función e_λ es un autovector de D con λ como autovalor asociado.

Ahora bien, por las Proposiciones 2.2.8 y 2.2.6 tenemos que $\left\langle \left\{ e_\lambda, \lambda = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle$ es denso en $H(\mathbb{C})$ y $\mathcal{P}er(D) = \left\langle \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \text{ tales que } D(f) = e^{\alpha\pi i} f \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle$, por lo tanto

$$\left\langle \left\{ e_\lambda, \lambda = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle \subseteq \mathcal{P}er(D)$$

y deducimos que $\mathcal{P}er(D)$ es denso en $H(\mathbb{C})$. Por otro lado, observemos que dado $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$T_a(e_\lambda)(z) = e_\lambda(z + a) = e^{\lambda(z+a)} = e^{\lambda a} e^{\lambda z} = e^{\lambda a} e_\lambda(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $T_a(e_\lambda) = e^{\lambda a} e_\lambda$ y por lo tanto la función e_λ es autovector de T_a con $e^{\lambda a}$ como autovalor asociado. Luego por la Proposición 2.2.8 tenemos que

$$\left\langle \left\{ e_\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } e^{\lambda a} = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ e_\lambda, \lambda = \frac{\alpha}{a}\pi i, \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle$$

es denso en $H(\mathbb{C})$. Análogamente, por la Proposición 2.2.6 tenemos que

$$\mathcal{P}er(T_a) = \left\langle \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \text{ tales que } T_a(f) = e^{\alpha\pi i} f \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle.$$

Así, tenemos que $\left\langle \left\{ e_\lambda, \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } e^{\lambda a} = e^{\alpha\pi i} \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{C} \right\} \right\rangle \subseteq \mathcal{P}er(T_a)$ y deducimos que $\mathcal{P}er(T_a)$ es denso en $H(\mathbb{C})$.

□

Como consecuencia de los Lemas 2.2.6 y 2.2.9 veremos en la sección 2.5.1 que los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkhoff son D-caóticos.

2.3. Operadores Mixing

En el Capítulo 1 definimos los sistemas dinámicos mixing como funciones continuas sobre espacios métricos que verifican la condición de ser topológicamente transitivos, pero de manera más fuerte, ya que un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$ es topológicamente transitivo si dados $U, V \subset X$ abiertos no vacíos se tiene que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para un cierto $n \in \mathbb{N}_0$, mientras que en la definición de mixing se verifica tal condición a partir de un cierto $n_0 \in \mathbb{N}_0$. Equivalentemente, T es mixing si el conjunto retorno $N_T(U, V) = \{n \in \mathbb{N}_0$ tales que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset\}$ es cofinito para todo U, V abiertos no vacíos.

En esta sección estudiaremos operadores mixing definidos en espacios de Fréchet. Comenzaremos con una caracterización de los operadores mixing respecto a los conjuntos retorno entre un abierto no vacío y un entorno del 0.

Proposición 2.3.1. Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Entonces son equivalentes :

i. $T : X \longrightarrow X$ es mixing.

ii. Para todo $U \subset X$ abierto no vacío y W entorno de 0, se tiene que $N(U, W)$ y $N(W, U)$ son cofinitos.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Si T es mixing, es claro por definición que $N(U, W)$ y $N(W, U)$ son cofinitos.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, por el Lema A.1.2 existen $U_1, V_1 \subset X$ abiertos no vacíos y $W \subset X$ entorno de 0 tales que $U_1 + W \subset U$ y $V_1 + W \subset V$. Ahora bien, por hipótesis, $N(U_1, W)$ y $N(W, V_1)$ son cofinitos. Entonces existe $N \in \mathbb{N}_0$ tal que $[N, +\infty) \cap \mathbb{N}_0 \subset N(U_1, W) \cap N(W, V_1)$. Sea $n \geq N$, entonces $n \in N(U_1, W) \cap N(W, V_1)$, por lo tanto existen $u_1 \in U_1$ y $w \in W$ tales que $T^n(u_1) \in W$ y $T^n(w) \in V_1$. Así, como $U_1 + W \subset U$ y T^n es lineal tenemos que

$$u_1 + w \in U \qquad \text{y} \qquad T^n(u_1 + w) = T^n(u_1) + T^n(w) \in W + V_1 = V_1 + W \subset V.$$

Entonces $T^n(u_1 + w) \in T^n(U) \cap V$, es decir, $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$ y por lo tanto T es mixing.

□

A continuación veremos una propiedad de suma directa para operadores mixing que utilizaremos en el capítulo 4.

Definición 2.3.2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un espacio de Banach separable y sea $T_n : X_n \longrightarrow X_n$ un operador. Dado $1 \leq p < \infty$, definimos el espacio ℓ_p-*suma directa* por

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tales que } x_n \in X_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p < \infty\right\}.$$

Si consideramos sobre $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ la norma dada por

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_{X_n}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$, entonces $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{\ell_p}$ resulta un espacio de Banach separable.

Similarmente, definimos el espacio c_0-*suma directa* por

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0} = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ tales que } x_n \in X_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y } \|x_n\|_{X_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right\}$$

Análogamente, si dotamos a $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0}$ con la norma dada por

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_0 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_{X_n}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0}$, entonces $\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n\right)_{c_0}$ resulta un espacio de Banach separable.

Por último, si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ y $X = \ell_p$ o c_0, definimos el operador $\left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X : \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X \longrightarrow \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X$ por

$$\left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X ((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X$.

Proposición 2.3.3. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un espacio de Banach separable y $T_n : X_n \longrightarrow X_n$ un operador. Supongamos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$, entonces para $X = \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$ o $X = c_0$, son equivalentes :

i. $\left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X : \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X \longrightarrow \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X$ es mixing.

ii $T_n : X_n \longrightarrow X_n$ es mixing para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *ii.* Sea $m \in \mathbb{N}$, queremos ver que T_m es mixing, para lo cual veremos que $\left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X$ y T_m son quasiconjugados. En efecto, sea $\phi_m : \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X \longrightarrow X_m$ definida por

$$\phi_m\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x_m$$

para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X$. Entonces ϕ_m es lineal, continua y sobreyectiva.

Veamos que $\phi_m \circ \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X = T_m \circ \phi_m$. En efecto, dado $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} X_n\right)_X$, tenemos que

$$\left(\phi_m \circ \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X\right)((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \phi_m\left((T_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}}\right) = T_m(x_m) = (T_m \circ \phi_m)\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Luego $\left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X$ y T_m son quasiconjugados vía ϕ_m. Así, como por hipótesis $\left(\bigoplus\limits_{n=1}^{\infty} T_n\right)_X$ es mixing, se tiene que T_m es mixing.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Supongamos que T_n es mixing para cada $n \in \mathbb{N}$ y sean $U, V \subset \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} X_k\right)_X$ abiertos no vacíos.

Como U y V son abiertos, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U$ e $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U$ y $B(y,\varepsilon) \subset V$. Además, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_k)_{k\ge m}\|_X < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|(y_k)_{k\ge m}\|_X < \varepsilon.$$

Sean $x_0 = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots)$ e $y_0 = (y_1, \ldots, y_m, 0, 0, 0, \ldots)$, entonces

$$\|x - x_0\|_X = \|(x_k)_{k\ge m}\|_X < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \|y - y_0\|_X = \|(y_k)_{k\ge m}\|_X < \varepsilon,$$

con lo cual $x_0 \in B(x,\varepsilon) \subset U$ e $y_0 \in B(y,\varepsilon) \subset V$. Para cada $1 \le k \le m$, como $T_k : X_k \longrightarrow X_k$ es mixing, existe $N_k \in \mathbb{N}_0$ tal que $(T_k)^n\left(B_{X_k}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{m}\right)\right) \cap B_{X_k}\left(y_k, \frac{\varepsilon}{m}\right) \neq \emptyset$ para todo $n \ge N_k$.

Luego, si $N_0 = \max\limits_{1\le k\le m} N_k$ tenemos que

$$(T_k)^n\left(B_{X_k}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{m}\right)\right) \cap B_{X_k}\left(y_k, \frac{\varepsilon}{m}\right) \neq \emptyset$$

para todo $1 \le k \le m, n \ge N_0$. Sea $n \ge N_0$, entonces para cada $1 \le k \le m$ existe $x_k^n \in B_{X_k}\left(x_k, \frac{\varepsilon}{m}\right)$ tal que $(T_k)^n(x_k^n) \in B_{X_k}\left(y_k, \frac{\varepsilon}{m}\right)$. Consideremos $x^n = \left(x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n, 0, 0, 0, \ldots\right) \in \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} X_k\right)_X$ y veamos que $\left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X (x^n) \in \left(\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X^n (U) \cap V$.

• Si $X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} X_k\right)_{\ell_p}$, entonces

$$\|x^n - x_0\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} \left\|x_k^n - x_k\right\|_{X_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

es decir, $x^n \in B(x_0, \varepsilon) \subset U$. Además, análogamente tenemos que

$$\left\|\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_{\ell_p} (x^n) - y_0\right\|_p = \left\|T_k\left(\left(x_k^n\right)_{k\in\mathbb{N}}\right) - y_0\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{m} \left\|T_k\left(x_k^n\right) - x_k\right\|_{X_k}^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon,$$

es decir, $\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_{\ell_p} (x^n) \in B(y_0, \varepsilon) \subset V$.

• Si $X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} X_k\right)_{c_0}$,

$$\|x^n - x_0\|_0 = \sup_{1\le k\le m} \left\|x_k^n - x_k\right\|_{X_k} < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \left\|\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_{c_0} (x^n) - y_0\right\|_0 = \sup_{1\le k\le m} \left\|T_k\left(x_k^n\right) - x_k\right\|_{X_k} < \varepsilon,$$

es decir, $x^n \in B(x_0, \varepsilon) \subset U$ y $\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_{c_0} (x^n) \in B(y_0, \varepsilon) \subset V$. Así, ya sea para $X = \ell_p$ con $1 \le p < \infty$ o $X = c_0$, tenemos que $\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X (x^n) \in \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X (U) \cap V$ para todo $n \ge N_0$. Luego $\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X (U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \ge N_0$ y deducimos que $\left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} T_k\right)_X$ es mixing.

□

2.4. Operadores débil Mixing

En el Capítulo 1 estudiamos los sistemas dinámicos débil mixing y vimos algunas propiedades que los caracterizan. Dado un sistema dinámico $T : X \longrightarrow X$, decíamos que es débil mixing siempre que el sistema $T \times T$ sea topológicamente transitivo y vimos que esta definición es equivalente a decir que dados $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos, $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

Además vimos que T mixing $\Rightarrow$ T débil mixing $\Rightarrow$ T topológicamente transitivo. No es muy sencillo probar que hay operadores débil mixing que no son mixing. Veremos un ejemplo de esto en la próxima sección (Ejemplo 2.5.21). Mucho más complicado aún es hallar operadores hipercíclicos que no son débil mixing. Este problema fue planteado por D.Herrero en 1992 y resuelto recientemente por De La Rosa y Read [21], Bayart y Matheron [6], donde se muestra que existen operadores hipercíclicos que no son débil mixing en cualquier espacio ℓ_p $(1 \le p < \infty)$ y en c_0, con lo cual en particular el resultado es válido en espacios de Hilbert. Para responder a la pregunta de Herrero, es natural preguntarse qué condiciones debería satisfacer un operador hipercíclico para ser débil mixing. Nos concentraremos en este tema en la siguiente sección cuando hablemos de criterios de hiperciclicidad.

Comenzaremos demostrando una propiedad útil sobre operadores hipercíclicos que nos ayudará posteriormente a dar una caracterización de los operadores débil mixing respecto de la intersección de los conjuntos retorno de dos abiertos no vacíos arbitrarios y los entornos de 0.

Lema 2.4.1. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador hipercíclico. Entonces para todo par de abiertos $U, V \subset X$ no vacíos y todo $W \subset X$ entorno de 0, existen $U_1 \subset U$ abierto no vacío y $W_1 \subset W$ entorno de 0 tales que $N(U_1, W_1) \subset N(V, W)$ y $N(W_1, U_1) \subset N(W, V)$.

Demostración. Sabemos que al ser T hipercíclico, T es topológicamente transitivo, por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Sea entonces $z \in U$ tal que $T^m(z) \in V$, como T^m es continua y $T^m(0) = 0 \in W$, existen $U_1 \subset U$

abierto no vacío y $W_1 \subset W$ entorno de 0 tales que $T^m(U_1) \subset V$ y $T^m(W_1) \subset W$. Veamos que $N(U_1, W_1) \subset N(V, W)$ y $N(W_1, U_1) \subset N(W, V)$. En efecto, sea $n \in N(U_1, W_1)$, entonces existe $x \in U_1$ tal que $T^n(x) \in W_1$, luego

$$T^n\left(T^m(x)\right) = T^m\left(T^n(x)\right) \in T^m(W_1) \subset W.$$

Además, como $T^m(x) \in T^m(U_1) \subset V$, tenemos que $T^n\left(T^m(x)\right) \in T^n(V) \cap W$, de donde $n \in N(V, W)$ y deducimos que $N(U_1, W_1) \subset N(V, W)$. Sea ahora $k \in N(W_1, U_1)$, entonces existe $y \in W_1$ tal que $T^k(y) \in U_1$, por lo tanto

$$T^m(y) \in T^m(W_1) \subset W \qquad \text{y} \qquad T^k\left(T^m(y)\right) = T^m(T^k(y)) \in T^m(U_1) \subset V.$$

Así, $T^k\left(T^m(y)\right) \in T^k(W) \cap V$, es decir, $k \in N(W, V)$ y se deduce que $N(W_1, U_1) \subset N(W, V)$.

□

Como consecuencia del Lema 2.4.1 tenemos el siguiente teorema, el cual nos ayudará a demostrar la caracterización mencionada anteriormente.

Teorema 2.4.2. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador hipercíclico. Si para todo $U \subset X$ abierto no vacío y todo W entorno de 0 existe $S : X \longrightarrow X$ continua tal que S conmuta con T, $S(U) \cap W \neq \emptyset$ y $S(W) \cap U \neq \emptyset$, entonces T es débil mixing.

Demostración. Por el Truco de los 4 conjuntos (Lema 1.6.6) aplicado a $U_1 = V_2 = U$ y $V_1 = U_2 = W$, tenemos que

$$N_T(U, W) \cap N_T(W, U) \neq \emptyset\,, \tag{2.1}$$

para todo $U \subset X$ abierto no vacío, W entorno de 0. Para ver que T es débil mixing, por el Corolario 1.6.10 basta ver que $N_T(U, U) \cap N_T(U, V) \neq \emptyset$ para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos.

En efecto, sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, por el Lema A.1.2 existen $U_1 \subset U, V_1 \subset V$ abiertos no vacíos y W_1 entorno de 0 tales que $U_1 + W_1 \subset U$ y $V_1 + W_1 \subset V$. Entonces, por el Lema 2.4.1 existen $U_2 \subset U_1$ abierto no vacío y $W_2 \subset W_1$ entorno de 0 tales que

$$N_T(U_2, W_2) \subset N_T(V_1, W_1) \qquad \text{y} \qquad N_T(W_2, U_2) \subset N_T(W_1, V_1).$$

Luego, por (2.1) tenemos que $N_T(U_2, W_2) \cap N_T(W_2, U_2) \neq \emptyset$. Sea $n \in N_T(U_2, W_2) \cap N_T(W_2, U_2)$, entonces existen $u_2 \in U_2$ y $w_2 \in W_2$ tales que $T^n(u_2) \in W_2$ y $T^n(w_2) \in U_2$. Por otro lado, como $n \in N_T(W_2, U_2) \subset N_T(W_1, V_1)$, existe $w_1 \in W_1$ tal que $T^n(w_1) \in V_1$. Sean

$$u_3 = u_2 + w_2 \in U_2 + W_2 \subset U_1 + W_1 \subset U \qquad \text{y} \qquad u_4 = u_2 + w_1 \in U_2 + W_1 \subset U_1 + W_1 \subset U,$$

es decir, $u_3 \in U$ y $u_4 \in U$. Entonces tenemos que

$$T^n(u_3) = T^n(u_2) + T^n(w_2) \in W_2 + U_2 \subset U \qquad \text{y} \qquad T^n(u_4) = T^n(u_2) + T^n(w_1) \in W_2 + V_1 \subset V_1 + W_1 \subset V,$$

es decir, $T^n(u_3) \in U$ y $T^n(u_4) \in V$. Así, $T^n(u_3) \in T^n(U) \cap U$ y $T^n(u_4) \in T^n(U) \cap V$, de donde se deduce que $n \in N_T(U, U) \cap N_T(U, V)$.

□

Ahora sí, estamos en condiciones de dar la caracterización de los operadores débil mixing respecto a los conjuntos retorno de abiertos no vacíos arbitrarios y los entornos de 0.

Teorema 2.4.3. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador, entonces son equivalentes :

i. T es débil mixing.

ii. $N(U, W) \cap N(W, V) \neq \emptyset$ para todo $U, V \subset X$ abiertos no vacíos y todo $W \subset X$ entorno de 0.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii*. Se deduce de la definición.

ii. $\Rightarrow$ *i*. Veamos primero que la hipótesis implica que T es topológicamente transitivo.

En efecto, sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, queremos ver que $N(U, V) \neq \emptyset$. Por el Lema A.1.2 existen $U_1, V_1 \subset X$ abiertos no vacíos y W entorno de 0 tales que $U_1 + W \subset U$ y $V_1 + W \subset V$.

Por hipótesis, sabemos que existe $n \in N(U_1, W) \cap N(W, V_1)$, luego existen $u_1 \in U_1$ y $w \in W$ tales que $T^n(u_1) \in W$ y $T^n(w) \in V_1$. Por lo tanto $u_1 + w \in U_1 + W \subset U$ y $T^n(u_1 + w) = T^n(u_1) + T^n(w) \in V_1 + W \subset V$.

Así, $n \in N(U, V)$ y T resulta topológicamente transitivo, con lo cual, tenemos que T es hipercíclico y que $N(U, W) \cap N(W, U) \neq \emptyset$ para todo $U \subset X$ abierto no vacío y W entorno de 0. Entonces, procediendo de manera análoga a la demostración del Teorema 2.4.2 tenemos que T es débil mixing.

□

El siguiente teorema nos permitirá probar que los operadores definidos sobre un espacio de Fréchet con ciertas características tales como ser D-caótico o ser hipercíclicos con un conjunto denso cuyas órbitas convergen, son operadores débil mixing.

Teorema 2.4.4. Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador hipercíclico. Si existe $D \subset X$ denso de manera tal que $Orb(T, x)$ es acotada para todo $x \in D$, entonces T es débil mixing.

Demostración. Sean $U \subset X$ abierto no vacío y $W \subset X$ entorno de 0, por el Teorema 2.4.2 basta ver que existe $S : X \longrightarrow X$ continua que conmuta con T tal que $S(U) \cap W \neq \emptyset$ y $S(W) \cap U \neq \emptyset$.

En efecto, si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y separante de seminormas que define la topología de X, al ser W entorno de 0, por el Lema A.1.9 existen $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $\{x \in X \text{ tales que } \rho_k(x) < \varepsilon\} \subset W$. Como D es denso en X, existe $x_0 \in D \cap U$, luego por hipótesis, $Orb(T, x_0) \subset X$ es acotada y entonces existe $M > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \rho_k\left(T^n(x_0)\right) \leq M$. Ahora bien, dado $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\rho_k\left(\frac{\varepsilon}{2M} T^n(x_0)\right) = \frac{\varepsilon}{2M} \rho_k\left(T^n(x_0)\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

por lo tanto $\frac{\varepsilon}{2M} T^n(x_0) \in W$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Por otro lado, como T es topológicamente transitivo, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{2M} T^{n_0}(W) \cap U = T^{n_0}\left(\frac{\varepsilon}{2M} W\right) \cap U \neq \emptyset.$$

Consideremos entonces $S : X \longrightarrow X$ definida por

$$S(x) = \frac{\varepsilon}{2M} T^{n_0}(x)$$

para todo $x \in X$. Entonces S es continua y conmuta con T.

Observemos que al ser $x_0 \in U$ y $S(x_0) = \frac{\varepsilon}{2M} T^{n_0}(x_0) \in W$, tenemos que $S(U) \cap W \neq \emptyset$. Además, $S(W) \cap U = \left(\frac{\varepsilon}{2M} T^{n_0}\right)(W) \cap U \neq \emptyset$, luego por el Teorema 2.4.2, T es débil mixing.

□

Corolario 2.4.5. Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si T es D-caótico o hipercíclico con un conjunto denso cuyas órbitas convergen, entonces T es débil mixing.

Demostración. Observemos que por el Teorema 2.4.4, en cada caso basta con ver que existe $D \subset X$ denso tal que $Orb(T, x)$ es acotada para todo $x \in D$.

Si T es D-caótico, en particular es hipercíclico. Además, $D = \mathcal{P}er(T) \subset X$ es denso y si $x \in D$ es de período $n \in \mathbb{N}_0$, se tiene que $Orb(T, x) = \left\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\right\}$, con lo cual en particular es acotada.

Supongamos que T es hipercíclico con $D \subset X$ denso tal que $(T^n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $x \in D$, veamos que $Orb(T, x)$ es acotada para todo $x \in D$.

En efecto, sea $x \in D$, entonces $T^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ para algún x_0 en X. Luego si $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y separante de seminormas que define la topología de X, se tiene que $\rho_k\left(T^n(x) - x_0\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_k\left(T^n(x)\right) < \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, como $\rho_k\left(T^n(x) - x_0\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\left(\rho_k\left(T^n(x) - x_0\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es acotada y se deduce que $\left(\rho_k\left(T^n(x)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es acotada, por lo tanto $\sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_k\left(T^n(x)\right) < \infty$.

□

2.5. Criterios de hiperciclicidad

Vimos que para los espacios de Fréchet los conceptos de operador transitivo e hipercíclico son equivalentes, por lo que en general para probar que un operador es hipercíclico optamos por ver que tal operador es topológicamente transitivo ya que en cierta forma la transitividad suele ser una propiedad mas manejable que la existencia de vectores hipercíclicos. Sin embargo, en muchos casos la transitividad de un operador no es fácil de verificar. En este capítulo veremos los criterios de Godefroy-Shapiro [27], Kitai [32], Gethner-Shapiro [26] y el que llamaremos criterio de hiperciclicidad. Estos criterios nos permitirán verificar que ciertos operadores son mixing, D-caóticos o débil mixing. Con lo cual en particular resultarán hipercíclicos. Si bien algunos criterios parecerán relativamente difíciles de aplicar para algunos casos, son de gran utilidad para ciertos casos de operadores particulares tales como los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkhoff.

En lo que sigue, salvo en casos excepcionales, X es un espacio de Fréchet.

2.5.1. Criterios para operadores D-caóticos y mixing

Veremos primero el criterio de Godefroy-Shapiro, que establece que si un operador tiene suficientes autovectores asociados a autovalores de módulo mayor y menor que 1, entonces es un operador mixing.

Teorema 2.5.1. (Criterio de Godefroy-Shapiro [27]) Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador y supongamos que los subespacios definidos por

$$X_0 = \langle \{x \in X,\ T(x) = \lambda x \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\lambda| < 1\} \rangle,$$

$$Y_0 = \langle \{x \in X,\ T(x) = \mu x \text{ para algún } \mu \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\mu| > 1\} \rangle,$$

son densos. Entonces T es mixing (en particular hipercíclico).

Además, si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ tal que $Z_0 = \left\langle \left\{ x \in X,\ T(x) = e^{\alpha\pi i} x \text{ para algún } \alpha \in \mathbb{Q} \right\} \right\rangle$ es denso, entonces T es D-caótico(en particular hipercíclico).

Demostración. Sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos, veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

En efecto, como X_0 e Y_0 son densos, existen $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Al ser $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, podemos escribir x e y en la forma

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \qquad \text{e} \qquad y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k,$$

con $T(x_k) = \lambda_k x_k$ y $T(y_k) = \mu_k y_k$ para todo $1 \leq k \leq m$, donde $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k$ son ciertos escalares en $\mathbb{C}$ tales que $|\lambda_k| < 1$ y $|\mu_k| > 1$ para todo $1 \leq k \leq m$. Entonces se tiene que

$$T^n(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{y} \qquad u_n = \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{\mu_k^n} y_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Además, dado $n \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $T^n(y_k) = \mu_k^n y_k$ para todo $1 \leq k \leq m$, luego $T^n(u_n) = y$. Por lo tanto, como $x + u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $T^n(x + u_n) = T^n(x) + y \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $x + u_n \in U$ y $T^n(x + u_n) \in V$ para todo $n \geq n_0$. Luego T resulta mixing (en particular hipercíclico).

Por otro lado, si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, por la Proposición 2.2.6 tenemos que $Z_0 = \mathcal{P}er(T)$, por lo tanto si Z_0 es denso en X tenemos que $\mathcal{P}er(T)$ es denso en X. Luego, como T es hipercíclico y $\mathcal{P}er(T) \subset X$ es denso tenemos que T es D-caótico.

□

De manera análoga, probaremos el criterio de Kitai, el cual nos permitirá probar que el operador de desplazamiento B es mixing, hecho que utilizaremos en el capítulo 4.

Teorema 2.5.2. (Criterio de Kitai [32]) Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si existen $X_0, Y_0 \subset X$ subconjuntos densos y una función $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ tales que para todo $x \in X_0, y \in Y_0$ se verifican :

i. $T^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, *ii.* $S^n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

iii. $T(S(y)) = y,$

entonces T es mixing (en particular hipercíclico).

Demostración. Razonando como en la demostración del criterio de Godefroy-Shapiro, al ser X_0 e Y_0 densos en X, basta ver que dados $x \in X_0$ e $y \in Y_0$, existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $T^n(u_n) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, sean $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $u_n = S^n(y)$. Por *i.* y *ii.* tenemos que $T^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Además, por *iii.*, tenemos que $T^n(u_n) = T^n(S^n(y)) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Así, por lo mencionado previamente, T resulta mixing (en particular hipercíclico).

□

Observación 2.5.3. Vale la pena destacar el hecho que la función S del criterio de Kitai no es necesariamente lineal ni continua.

Como consecuencia del criterio de Kitai veremos que los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkoff son mixing, con lo cual en particular resultarán débil mixing e hipercíclicos. Además, vamos a ver también que son D-caóticos.

Ejemplo 2.5.4. Si $|\lambda| > 1$ y $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$, entonces el operador de Rolewicz $\lambda B : X \longrightarrow X$ es mixing.

En efecto, veamos que λB satisface las condiciones del criterio de Kitai. Sea $F : X \longrightarrow X$ definida por

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots)$$

para toda $(x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$, y sean $X_0 = Y_0 = \{(x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots), N \in \mathbb{N}\}$ densos en X. Consideremos $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ dada por $S = \dfrac{1}{\lambda} F_{|Y_0}$. Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_N, 0, 0, \dots) \in X_0$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_N, 0, 0, \dots) \in Y_0$, veamos que :

i. $(\lambda B)^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

ii. $S^n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

iii. $(\lambda B)(S(y)) = y.$

Si para cada $j \in \mathbb{N}$ denotamos por e_j al j-ésimo vector canónico, podemos escribir

$$x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \qquad \text{e} \qquad y = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j.$$

i. Si $n > N$, entonces $(\lambda B)^n(x) = 0$, y en particular $(\lambda B)^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

ii. Si $1 \le j \le N$, como $F^n(e_j) = e_{j+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $|\lambda| > 1$, tenemos que

$$\left\| S^n(e_j) \right\|_X = \frac{1}{|\lambda|^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

por lo tanto $S^n(e_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y se deduce que $S^n(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

iii. Por último, como $B(F(y)) = y$, es claro que $(\lambda B)(S(y)) = y$. Así, por el criterio de Kitai tenemos que λB es mixing.

Ejemplo 2.5.5. El operador de MacLane $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ es mixing.

Sean $X_0 = Y_0 = \{P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, P \text{ polinomio}\}$ densos en $H(\mathbb{C})$ y consideremos el operador $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ definido por

$$S(f)(z) = \int_0^z f(w)dw$$

para toda $f \in Y_0$ y $z \in \mathbb{C}$. Queremos ver que se satisfacen las condiciones del criterio de Kitai.

Sean entonces $P, Q \in X_0$ dados por $P(w) = \sum_{k=0}^{N} a_k w^k$ y $Q(w) = \sum_{k=0}^{N} b_k w^k$ para todo $w \in \mathbb{C}$.

i. Observemos que $D^n(P) = 0$ para todo $n > N$, con lo cual es claro que $D^n(P) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

ii. Por linealidad, basta probar la condición *ii*. para monomios. Consideremos para cada $0 \le k \le N$ el monomio $Q_k : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ dado por

$$Q_k(w) = w^k$$

para todo $w \in \mathbb{C}$. Veamos que $S^n(Q_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $0 \le k \le N$. Dado $0 \le k \le N$, tenemos que $S^n(Q_k)(z) = \frac{k!}{(k+n)!} z^{k+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}$. Entonces se tiene que $S^n(Q_k)(z) = \frac{k!}{(k+n)!} z^{k+n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ uniformemente sobre todo compacto de $\mathbb{C}$, y deducimos $S^n(Q_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en $H(\mathbb{C})$ para todo $0 \le k \le N$ y deducimos que $S^n(Q) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en $H(\mathbb{C})$.

iii. Es suficiente verlo para monomios : Dado $0 \le k \le N$, $S(Q_k)(z) = \frac{1}{k+1} z^{k+1}$, por lo que

$$D(S(Q_k))(z) = S(Q_k)'(z) = z^k = Q_k(z),$$

de donde se deduce que $D \circ S = I_{Y_0}$ (con I_{Y_0} la identidad en Y_0).

Luego, por el criterio de Kitai, D resulta mixing.

Ejemplo 2.5.6. Dado $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, el operador de Birkhoff $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ es mixing.

Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $e_\lambda : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ definido por

$$e_\lambda(z) = e^{\lambda z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Consideremos $\Gamma_1 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tales que} \left| e^{\lambda a}\right| < 1\right\}$ y $\Gamma_2 = \left\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tales que} \left| e^{\lambda a}\right| > 1\right\}$, entonces como Γ_1 y Γ_2 tienen a 1 como punto de acumulación, por el Teorema 2.2.8 tenemos que

$$X_0 = \langle\{e_\lambda, \lambda \in \Gamma_1\}\rangle \qquad \text{e} \qquad Y_0 = \langle\{e_\lambda, \lambda \in \Gamma_2\}\rangle$$

son densos en $H(\mathbb{C})$. Además, observemos que $T_a(e_\lambda) = e^{\lambda a} e_\lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, por lo tanto

$$X_0 = \left\langle\left\{e_\lambda, \text{ con } T_a(e_\lambda) = e^{\lambda a} e_\lambda \text{ y } \left|e^{\lambda a}\right| < 1\right\}\right\rangle \qquad \text{e} \qquad Y_0 = \left\langle\left\{e_\lambda, \text{ con } T_a(e_\lambda) = e^{\lambda a} e_\lambda \text{ y } \left|e^{\lambda a}\right| > 1\right\}\right\rangle$$

son densos en $H(\mathbb{C})$, luego por el criterio de Godefoy-Shapiro tenemos que T es mixing.

En los Lemas 2.2.4 y 2.2.9 habíamos probado que los puntos periódicos de los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkhoff son densos. Tenemos entonces el siguiente corolario.

Corolario 2.5.7. Sean $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > 1$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \le p < \infty)$. Entonces los operadores de Rolewicz, McLane y Birkhoff $\lambda B : X \longrightarrow X$, $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ y $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ son D-caóticos.

Como los operadores de Rolewicz, MacLane y Birkoff además de ser mixing son D-caóticos, es natural preguntarse si todo operador mixing es D-caótico. Sin embargo, a continuación veremos un ejemplo de un operador mixing que no es D-caótico.

Ejemplo 2.5.8. **(Mixing $\nRightarrow$ D-caótico)** Consideremos el operador $T : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$T((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \left(\left(\frac{k+1}{k}\right) x_{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \dots\right)$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Veamos que T satisface las condiciones del criterio de Kitai.

Sean $X_0 = Y_0 = c_{00}$ densos en ℓ_1 y sea $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$ definida por

$$S((x_k)_{k\in\mathbb{N}}) = \left(\left(\frac{k-1}{k}\right) x_{k-1}\right)_{k\ge 2}$$

para todo $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Si $x = \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \in c_{00}$, entonces :

i. Dado $n > N$, tenemos que $T^n(x) = 0$, en particular $T^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

ii. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $S^n(x) = \sum_{k=n+1}^{n+N} \left(\frac{k-n}{k-n+1}\right)\left(\frac{k-n+1}{k-n+2}\right)\dots\left(\frac{k-1}{k}\right) a_{k-n} e_k$. Luego

$$\|S^n(x)\|_{\ell_1} = \sum_{k=n+1}^{n+N} \left(\frac{k-n}{k}\right)|a_{k-n}| \leq \frac{N}{n+N}\|x\|_{\ell_1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

iii. Es claro que $T(S(x)) = x$.

Luego, por el criterio de Kitai, T es mixing. Para ver que T no es D-caótico, veremos que $\mathcal{P}er(T) = \{0\}$. En efecto, supongamos que existe $x \neq 0$ tal que $x \in \mathcal{P}er(T)$, si n es el período de x respecto de T, entonces $T^{jn}(x) = x$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $T^{jn}(x) = \left(\frac{k+jn}{k} x_{k+jn}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, tenemos que $\frac{k+jn}{k} x_{k+jn} = x_k$ para todo $k, j \in \mathbb{N}$.

Ahora bien, como $x \neq 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{k_0} \neq 0$, luego

$$\|x\| \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{jn+k_0}\right| = \left|x_{k_0}\right| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{k_0}{jn+k_0} = +\infty,$$

lo cual es absurdo. Así, $\mathcal{P}er(T) = \{0\}$ y por lo tanto T no es D-caótico.

Notemos que el ejemplo anterior también es un ejemplo de un operador que satisface el criterio de Kitai, pero no el criterio de Godefroy-Shapiro. No es difícil ver que el criterio de Kitai es más fuerte que el criterio de Godefroy-Shapiro.

2.5.2. Criterios para operadores hipercíclicos y débil mixing

En esta sección veremos criterios que nos permitirán determinar condiciones suficientes para asegurar que un operador es débil mixing o hipercíclico. Naturalmente, como el concepto de débil mixing es más fuerte que el de hipercíclico, el criterio que utilicemos para débil mixing también servirá para la hiperciclicidad.

Además, como mixing implica débil mixing, los criterios de la sección anterior sirven para probar que ciertos operadores son débil mixing e hipercíclicos. Sin embargo, al ser ambos conceptos más débiles que el de mixing, sería razonable intentar debilitar las hipótesis. Entonces la idea será modificar ligeramente las hipótesis del criterio de Kitai y reemplazarlas por otras menos rigurosas que todavía impliquen que el operador es débil mixing.

Teorema 2.5.9. (criterio de Gethner-Shapiro [26]) Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si existen subconjuntos $X_0, Y_0 \subset X$ densos en X, una función $S : X_0 \longrightarrow Y_0$ y una sucesión $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tales que para todo $x \in X_0, y \in Y_0$ se verifica que :

i. $T^{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

ii. $S^{n_k}(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$,

iii. $T(S(y)) = y$,

entonces T es débil mixing (en particular hipercíclico).

Para terminar esta sección, debilitaremos un poco las hipótesis del criterio de Gethner-Shapiro para obtener el que llamaremos Criterio de hiperciclicidad. En el criterio de Gethner-Shapiro teníamos una inversa a derecha $S : Y_0 \longrightarrow Y_0$, por lo que S^n es inversa a derecha de T^n para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora no le exigiremos a S que su imagen esté contenida en Y_0, y reemplazaremos $(S^n)_{n\in\mathbb{N}}$ por una sucesión $(S_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, donde S_{n_k} es inversa a derecha de T^{n_k} en Y_0, para cada $k \in \mathbb{N}$. Se puede ver (por ejemplo en [28, Theorem 3.22]) que en realidad los criterios de hiperciclicidad y de Gethner-Shapiro son equivalentes. Es claro que las hipótesis del criterio de Gethner-Shapiro son mas débiles que las del criterio de Kitai. Veremos al final del capítulo un ejemplo de un operador que satisface las hipótesis del criterio de Gethner-Shapiro, con lo cual será débil mixing, y no las del criterio de Kitai. Mas aún, veremos que tal operador no es mixing.

Teorema 2.5.10. (Criterio de hiperciclicidad [14]) Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si existen subconjuntos $X_0, Y_0 \subset X$ densos, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente y funciones $S_{n_k} : Y_0 \longrightarrow X$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que para todo $x \in X_0, y \in Y_0$ se verifica que :

i. $T^{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

ii. $S_{n_k}(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$

iii. $T^{n_k}(S_{n_k}(y)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y,$

entonces T es débil mixing (en particular es hipercíclico).

Demostración. Por el Lema 1.6.2 basta ver que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ para todo $U_1, U_2, V_1, V_2 \subset X$ abiertos no vacíos en X. En efecto, dados U_1, U_2, V_1, V_2 abiertos no vacíos en X, como X_0 e $Y_0 \subset X$ son densos, existen $x_j \in X_0 \cap U_j, y_j \in Y_0 \cap V_j$ para $1 \leq j \leq 2$. Veremos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{k_0}}\left(x_j + S_{n_{k_0}}(y_j)\right) \in T^{n_{k_0}}(U_j) \cap V_j$ para $1 \leq j \leq 2$.

Sea $1 \leq j \leq 2$, por *i.* y *iii.* , para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $T^{n_k}(x_j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $T^{n_k}\left(S_{n_k}(y_j)\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_j$, con lo cual

$$T^{n_k}\left(x_j + S_{n_k}(y_j)\right) = T^{n_k}(x_j) + T^{n_k}\left(S_{n_k}(y_j)\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y_j.$$

Además, por *ii.* se tiene que $x_j + S_{n_k}(y_j) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_j$, luego existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_j + S_{n_{k_0}}(y_j) \in U_j$ y $T^{n_{k_0}}\left(x_j + S_{n_k}(y_j)\right) \in V_j$.

Por lo tanto $T^{n_{k_0}}(x_1 + S_{n_k}(y_1)) \in T^{n_{k_0}}(U_1) \cap V_1$ y $T^{n_{k_0}}(x_2 + S_{n_k}(y_2)) \in T^{n_{k_0}}(U_2) \cap V_2$, de donde se deduce que $n_{k_0} \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$. Luego T es débil mixing (en particular hipercíclico).

□

2.5.3. Operadores de desplazamiento con pesos

En esta sección estudiaremos los operadores de desplazamiento con pesos, los cuales serán definidos sobre espacios que llamaremos *espacio de Fréchet* (o de *Banach*) *de sucesiones* y utilizaremos en el capítulo 4 para probar la existencia de operadores mixing en espacios de Banach separables de dimensión infinita. Nuestro objetivo será dar condiciones necesarias, y/o suficientes para determinar cuándo el operador de desplazamiento $B : X \longrightarrow X$ es mixing para todo X espacio de Fréchet (respectivamente Banach) de sucesiones.

Además , dada $w = (w_n) \subset \mathbb{R}_{>0}$ y X un espacio de Fréchet (respectivamente de Banach) de sucesiones, definiremos el operador de desplazamiento con pesos $B_w : X \longrightarrow X$ y un espacio de manera tal que al considerar el operador B definido sobre tal espacio, B y B_w serán quasiconjugados. De esta manera todas las propiedades que se preserven por quasiconjugación para B, tales como ser hipercíclico, débil mixing, mixing o D-caótico, también serán válidas para B_w.

Comenzaremos con algunas definiciones.

Definición 2.5.11. Sea $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), diremos que $X \subset \omega$ es un *espacio de Fréchet* (respectivamente *de Banach*) *de sucesiones* si X es un espacio de Fréchet (respectivamente de Banach) de manera tal que la inclusión $i : X \hookrightarrow \omega$ es continua.

Observemos que si para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos la k-ésima proyección $\pi_k : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\pi_k\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = x_k$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \omega$, por el Ejemplo A.1.18 sabemos que $\pi_k : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua. Luego como $i : X \hookrightarrow \omega$ es continua, entonces $e_k^* = \pi_k \circ i$ es continua por ser composición de continuas. Así, $e_k^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 2.5.12. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones y $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Si $(w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \in X$ para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, definimos el *desplazamiento con pesos* $B_w : X \longrightarrow X$ por

$$B_w\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (w_{n+1}x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$

A la sucesión $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se la llama *sucesión de pesos* y como podemos observar, el valor de w_1 es irrelevante en la definición de B_w.

A continuación, veremos que $B_w : X \longrightarrow X$ es un operador para toda $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de pesos.

Proposición 2.5.13. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones y $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, entonces $B_w : X \longrightarrow X$ es un operador. Es decir, si B_w está bien definida, entonces es continua.

Demostración. Veamos que $\mathrm{Graf}(B_w) = \{(x, B_w(x)), \ x \in X\} \subset X \times X$ es cerrado.

Sea $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ y $B_w\left(x^{(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ en X, queremos ver que $y = B_w(x)$, es decir, queremos ver que $y_k = w_{k+1}x_{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, como $e_k^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ y $e_{k+1}^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ son continuas, tenemos que $e_k^*\left(x^{(n)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e_k^*(x)$ y $e_k^*\left(B_w(x^{(n)})\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e_k^*(y)$ en $\mathbb{K}$, es decir, $x_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_k$ y $w_{k+1}x_{k+1}^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_k$ en $\mathbb{K}$. Además, $x_{k+1}^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_{k+1}$ y por unicidad del límite se deduce que $y_k = w_{k+1}x_{k+1}$.

Luego por el Teorema del gráfico cerrado (ver Teorema A.1.27) tenemos que $B_w : X \longrightarrow X$ es un operador.

□

Recordemos que nuestro objetivo es dar condiciones para garantizar que B sea mixing (en particular hipercíclico). Por lo tanto daremos inicialmente condiciones que nos permitan garantizar la hiperciclicidad de B.

Previamente daremos la definición de *base* en un espacio de Fréchet y probaremos un lema.

Definición 2.5.14. Sea X un espacio de Fréchet, diremos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una *base* si cada $x \in X$ se puede escribir de manera única en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

con $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.5.15. Sean X un espacio métrico, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $v \in X$. Si $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ es una sucesión estrictamente creciente tal que $v_{n_k-j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces existe una sucesión $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $v_{m_k+j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea d la métrica de X. Dado $k \in \mathbb{N}$, por hipótesis existe $N_k \geq k+2$ tal que $d\left(v_{N_k-j}, v\right) < \dfrac{1}{k}$ para todo $1 \leq j \leq k$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos $m_k = N_k - k - 1$, entonces tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente.

Luego dados $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq j \leq k$, como $m_k + k + 1 = N_k$, tenemos que $d\left(v_{m_k+k+1-j}, v\right) < \dfrac{1}{k}$, de donde $d\left(v_{m_k+j}, v\right) < \dfrac{1}{k}$ y se deduce que $v_{m_k+j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$.

□

En lo que sigue, para cada $n \in \mathbb{N}$ notaremos por e_n al n-ésimo vector canónico.

Teorema 2.5.16. Sea X un espacio Fréchet de sucesiones en el que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una base y $B : X \longrightarrow X$ el operador de desplazamiento, entonces son equivalentes :

i. B es hipercíclico.

ii. B es débil mixing.

iii. Existe una subsucesión $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $e_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *iii.* Supongamos que B es hipercíclico y sea $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de seminormas que inducen la topología de X. Consideremos $\|\cdot\|$ la F-norma dada por

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, \rho_n(x)\}, \ x \in X.$$

Dados $N \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, basta ver que existe $n \geq N$ tal que $\|e_n\| < \varepsilon$.

En efecto, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, como $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es base podemos escribir x de manera única en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $T_n : X \longrightarrow X$ definido por

$$T_n(x) = x_n e_n.$$

Como el funcional coordenada e_n^* es continuo, entonces T_n es un operador. Sea $x \in X$, entonces $\{T_n(x), n \in \mathbb{N}\} = \{x_n e_n, n \in \mathbb{N}\}$ es acotado, ya que $x_n e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

De esta manera, tenemos operadores $T_n : X \longrightarrow X$ tales que $\{T_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ es acotado para cada $x \in X$, luego por el Teorema de Banach-Steinhaus (ver Teorema A.1.28) tenemos que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinuo. En particular, si tomamos $W = B\left(0, \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ entorno de 0, existe $\delta > 0$ tal que

$$T_n\left(B_X(0,\delta)\right) \subset B_X\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, como $e_1^* : X \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua, existe $\eta > 0$ tal que

$$e_1^*\left(B_X(0,\eta)\right) \subset \overline{B_{\mathbb{K}}\left(0, \frac{1}{2}\right)}. \tag{2.3}$$

Veamos que existen $x \in B_X(0,\delta)$ y $n \geq N$ tales que $B^{n-1}(x) \in B_X(e_1, \eta)$.

Como B es hipercíclico, si $x_0 \in X$ es vector hipercíclico para B, existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $B^k(x_0) \in B^{-1}\left(B_X(0,\delta)\right)$. Sean $x_1 = B^k(x_0)$ y $V = B_X(e_1,\eta) \setminus \left\{x_1, B(x_1), \ldots, B^{N-1}(x_1)\right\}$ abierto en X no vacío, entonces como x_1 es hipercíclico, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $B^n(x_1) \in V$. Luego como $B^i(x_1) \notin V$ para todo $0 \leq i \leq N-1$, entonces $n \geq N$ es tal que $B^n(x_1) \in B_X(e_1,\eta)$. Así, si tomamos $x = B(x_1)$, entonces $x \in B_X(0,\delta)$ y $B^{n-1}(x) = B^n(x_1) \in B_X(e_1,\eta)$.

Como $B^{n-1}(x) - e_1 = (x_n - 1, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$, por (2.2) y (2.3)

$$\|T_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left|e_1^*\left(B^{n-1}(x) - e_1\right)\right| \leq \frac{1}{2},$$

es decir,

$$\|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad |x_n - 1| \leq \frac{1}{2}.$$

Luego, $|1 - x_n| \leq \dfrac{1}{2} \leq |x_n|$, es decir, $\left|x_n^{-1} - 1\right| = \left|\dfrac{1-x_n}{x_n}\right| \leq 1$.

Así, de la Proposición A.1.13 se tiene que $\left\|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n\right\| \leq \|x_n e_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, y se deduce que

$$\|e_n\| = \left\|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n + x_n e_n\right\| \leq \left\|(x_n^{-1} - 1)x_n e_n\right\| + \|x_n e_n\| < \varepsilon.$$

iii. $\Rightarrow$ *ii.* Para ver que B es débil mixing utilizaremos el Criterio de hiperciclicidad.

Consideremos $X_0 = Y_0 = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots), N \in \mathbb{N}\}$ densos en X. Sea $F : X \longrightarrow X$ definida por

$$F(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots) \in X$, y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $S_n = (F_{|Y_0})^n : Y_0 \longrightarrow X$. Sean $x = (x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots) \in X_0$ e $y = (y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots) \in Y_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$B^n(x) = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots) \qquad \text{y} \qquad S_n(y) = F^n(y) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, y_1, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots).$$

Entonces $B^n(x) = 0$ y $B^n\left(S_n(y)\right) = y$ para todo $n \geq N$, con lo cual se deduce que $B^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $B^n\left(S^n(y)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

Por otro lado, por hipótesis sabemos que existe una subsucesión $(e_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $e_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces dado $j \in \mathbb{N}$, como $B^j(e_n) = e_{n-j}$ para todo $n > j$ y B es continua tenemos que $e_{n_k - j} = B^j(e_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Además, como $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión estrictamente creciente, por el Lema 2.5.15 existe $(m_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estríctamente creciente tal que $e_{m_k + j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Luego, como $S_n(e_j) = F^n(e_j) = e_{n+j}$ para todo $j, n \in \mathbb{N}$, entonces $S_{m_k}(e_j) = e_{m_k+j}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$.

Así, como $y = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j$, tenemos que

$$S_{m_k}(y) = \sum_{j=1}^{N} y_j S_{m_k}(e_j) = \sum_{j=1}^{N} y_j e_{m_k+j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

entonces por el Criterio de hiperciclicidad, B es débil mixing.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Vale por definición.

□

A continuación , utilizando un argumento similar al del teorema anterior, pero esta vez con el criterio de Kitai, daremos una condición para determinar los casos en que B resulta un operador mixing.

Teorema 2.5.17. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones tal que $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es una base y $B : X \longrightarrow X$ el operador de desplazamiento. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i. B es mixing.

ii. $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *ii.* Sea $\|\cdot\|$ una F-norma que induce la topología de X. Dado $\varepsilon > 0$, utilizando un razonamiento análogo a la demostración de *i.* $\Rightarrow$ *iii.* del Teorema 2.5.16, existen $\delta > 0$ y $\eta > 0$ tales que :

• $\|x_n e_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in B(0,\delta), n \in \mathbb{N}$.

• $|x_1| \leq \frac{1}{2}$ para todo $x \in B(0,\eta)$.

Entonces, como B es mixing existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $B^{n-1}(B(0,\delta)) \cap B(0,\eta) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Luego, procediendo análogamente a *iii.* $\Rightarrow$ *i.* del Teorema 2.5.16, tenemos que $\|e_n\| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, con lo cual $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Razonando de manera análoga a la demostración de *iii.* $\Rightarrow$ *ii.* del teorema anterior, consideremos $X_0 = Y_0 = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots), N \in \mathbb{N}\}$ y $S : X \longrightarrow X$ definido por

$$S(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots) \in X$. Entonces dados $x = \sum_{j=1}^{N} x_j e_j \in X_0$ e $y = \sum_{j=1}^{N} y_j e_j \in Y_0$, se tiene $B^n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $B(S(y)) = y$. Además, por hipótesis se tiene que $S^n(e_l) = e_{n+l} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$, con lo cual en particular $S^n(e_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $1 \leq j \leq N$. Luego $S^n(y) = \sum_{j=1}^{N} y_j S^n(e_j) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y por el criterio de Kitai concluimos que B es mixing.

□

Ejemplo 2.5.18. Consideremos $B : \omega \longrightarrow \omega$, veamos que es un operador mixing.

Observemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge para toda $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$, ya que $\rho_k\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e_n\right) = 0$ para todo $k \leq N$. En particular, tenemos que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ converge y entonces $e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego por el Teorema 2.5.17, B resulta mixing.

A continuación, dada $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, definiremos una sucesión $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y un espacio X_v de manera tal que B y B_w sean quasiconjugados.

Proposición 2.5.19. Sea X un espacio de Fréchet de sucesiones con base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y sea $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Entonces existen $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y un espacio Fréchet de sucesiones X_v tales que $B : X_v \longrightarrow X_v$ y $B_w : X \longrightarrow X$ son quasiconjugados.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $v_n = \left(\prod_{k=1}^{n} w_k\right)^{-1}$. Consideremos $X_v = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(x_n v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X\}$ y $\phi_v : X_v \longrightarrow X$ definida por

$$\phi_v\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_v$. Por definición de X_v, es claro que ϕ está bien definida. Además, ϕ_v es un isomorfismo de espacios vectoriales con inversa $\phi_v^{-1} : X \longrightarrow X_v$ dada por

$$\phi_v^{-1}\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (y_n v_n^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Dotamos a X_v con la topología inducida por ϕ_v, es decir, la topología dada por

$$\tau_v = \{U \subset X_v \text{ tales que } \phi_v(U) \subset X \text{ es abierto}\}.$$

De esta manera, es claro que al ser X un espacio Fréchet de sucesiones, X_v también lo es. Más aún, como $\phi_v(e_j) = v_j e_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ también es base de X_v.

Veamos que

$$\begin{array}{ccc} X_v & \stackrel{B}{\longrightarrow} & X_v \\ \phi_v \downarrow & & \downarrow \phi_v \\ X & \underset{B_w}{\longrightarrow} & X \end{array}$$

conmuta, es decir, $\phi_v \circ B = B_w \circ \phi_v$. En efecto, por un lado, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_v$, entonces

$$\phi_v\left(B(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \phi_v\left((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_{n+1} v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Por otro lado, como $w_{n+1} v_{n+1} = v_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$B_w\left(\phi_v(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = B_w\left((x_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (w_{n+1} x_{n+1} v_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1} v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Luego tenemos que $\phi_v \circ B = B_w \circ \phi_v$.

Además, por la forma en que definimos la topología en X_v, es claro que ϕ_v es un homeomorfismo entre X y X_v. Así, B y B_w son conjugados vía ϕ_v y en particular son quasiconjugados vía ϕ_v.

□

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 2.5.20. Sea X un espacio Fréchet de sucesiones y $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$, con base $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Si $B_w : X \longrightarrow X$ es el operador de desplazamiento con pesos, entonces :

a. Las siguientes afrirmacones son equivalentes :

i. B_w es hipercíclico.

ii. B_w es débil mixing.

iii. Existe $(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\left(\prod_{j=1}^{n_k} w_j\right)^{-1} e_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X.

b. Las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i. B_w es mixing.

ii. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es tal que $\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en X.

Para finalizar este capítulo, como corolario del teorema anterior, veremos un ejemplo de un operador débil mixing que no es mixing.

Ejemplo 2.5.21. (débil mixing $\not\Rightarrow$ mixing) Sea $w = \left(1, 2, \frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots\right)$, es decir, $w = (w_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que si $k \geq 1$, entonces

$$w_j = \begin{cases} 2 & \text{si } 2^k \leq j < 2^k + 2^{k-1} \\ \frac{1}{2} & \text{si } 2^k + 2^{k-1} \leq j < 2^{k+1} \end{cases}.$$

Entonces, dado $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $\prod_{j=1}^{2^k-1} w_j = 1$ y $\prod_{j=1}^{2^k+2^{k-1}-1} w_j = 2^{2^{k-1}}$.

Consideremos $B_w : c_0 \longrightarrow c_0$ y $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definida por $n_k = 2^k + 2^{k-1} - 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \underset{n\to\infty}{\not\rightarrow} 0 \qquad \text{y} \qquad \left(\prod_{j=1}^{n_k} w_j\right)^{-1} e_{n_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Luego por el teorema anterior tenemos que B_w es débil mixing, pero no es mixing. Además, B_w satisface las hipótesis del criterio de Gethner-Shapiro, y al no ser mixing, no satisface las del criterio de Kitai.

Capítulo 3

Órbitas de polinomios homogéneos

En los capítulos anteriores hemos estudiado, entre otras cosas, órbitas de funciones definidas sobre espacios métricos y en particular sobre espacios de Banach y de Fréchet. En este capítulo estudiaremos órbitas de polinomios *homogéneos*, los cuales serán definidos sobre espacios de Banach y de Fréchet. Dividiremos el capítulo en dos secciones. En la primera sección nos concentraremos en el caso de polinomios definidos en espacios de Banach. Normalmente el concepto de caos está relacionado con sistemas dinámicos no lineales. Como vimos en el capítulo anterior, en espacios de Banach de dimensión infinita sí puede haber operadores lineales D-caóticos. Sorprendentemente, al pasar al caso de polinomos homogéneos de grado mayor o igual que 2 esto no sucede. De hecho veremos que no existen polinomios hipercíclicos homogéneos en espacios de Banach. Sin embargo, veremos que siempre existen polinomios homogéneos supercíclicos. En la segunda sección veremos que no sucede lo mismo sobre espacios de Fréchet que no son de Banach, ya que mostraremos un ejemplo de un polinomio d-homogéneo D-caótico (en particular hipercíclico) sobre $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ para todo $d \geq 2$.

3.1. Órbitas de polinomios homogéneos sobre espacios de Banach

En 1969, Rolewicz [44] se preguntó si dado un espacio de Banach X de dimensión infinita existe un operador lineal $T : X \longrightarrow X$ hipercíclico. En 1992, Herzog [30] demostró que dado un espacio de Banach X separable de dimensión infinita, existe un operador $T : X \longrightarrow X$ supercíclico. Algunos años más tarde Ansari [2] y Bernal-González [11] respondieron a la pregunta de Rolewicz en forma afirmativa. Luego Bonet y Peris [17] extendieron este resultado a espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. En esta sección veremos que no existen polinomios homogéneos hipercíclicos de grado $d \geq 2$ en espacios de Banach (Proposición 3.1.3), pero sí polinomios supercíclicos (Teorema 3.1.4). Finalizaremos la sección con algunos ejemplos, mostrando comportamientos de órbitas de polinomios homogéneos. Todos los resultados son debidos a Bernardes [12]. Comenzaremos dando la definición de un polinomio sobre un espacio de Fréchet.

Definición 3.1.1. Sean X e Y espacios de Fréchet, $d \in \mathbb{N}_0$ y $Q : X \longrightarrow Y$ una función. Si $d \in \mathbb{N}$, diremos que $Q : X \longrightarrow Y$ es un polinomio *d-homogéneo* si existe $A : X \times \overset{(d)}{\cdots} \times X \longrightarrow Y$ multilineal y continua tal que

$$Q(x) = A(x, \dots, x)$$

para todo $x \in X$. Si $d = 0$, diremos que Q es un polinomio 0-*homogéneo* si existe $y_0 \in Y$ tal que $Q(x) = y_0$ para todo $x \in X$. Notaremos al conjunto de polinomios continuos d-homogéneos por $\mathcal{P}(^d X, Y)$.

Por último, dado $d \in \mathbb{N}_0$, diremos que $P : X \longrightarrow Y$ es un polinomio continuo de grado d si podemos escribir P en la forma

$$P(x) = \sum_{m=0}^{d} Q_m,$$

donde $Q_m : X \longrightarrow Y$ es un polinomio m-homogéneo para cada $0 \leq m \leq d$.

Definición 3.1.2. Sean X e Y espacios de Banach. Dado $P \in \mathcal{P}(^d X, Y)$, definimos la norma de P en la forma

$$\|P\|_{\mathcal{P}(^d X,Y)} = \sup\left\{\|P(x)\|_Y \,,\ x \in \overline{B(0,1)}\right\} = \sup\left\{\|P(x)\|_Y \,,\ x \in \partial B(0,1)\right\}.$$

Por definición de $\|\cdot\|_{\mathcal{P}(^dX,X)}$, es fácil probar que $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$ si y sólo si P es acotado (ver por ejemplo [24]). Además, observemos que por definición, un polinomio 1-homogéneo es un operador. Como nos interesará estudiar las órbitas de los polinomios homogéneos, en lo que sigue trabajaremos con polinomios $P : X \longrightarrow X$, donde X es un espacio de Banach separable sobre $\mathbb{C}$ de dimensión infinita. En el caso en el que sea claro el espacio subyacente X en cuestión, notaremos por $\|P\| = \|P\|_{\mathcal{P}(^dX,X)}$.

Veremos a continuación que no existen polinomios d-homogéneos hipercíclicos para todo $d \geq 2$.

Proposición 3.1.3. Sean X un espacio de Banach, $d \geq 2$ y $P : X \longrightarrow X$ es un polinomio d-homogéneo. Entonces P no es hipercíclico.

Demostración. Supongamos que P es hipercíclico, entonces existe $x \in X$ vector hipercíclico para P. Además, observemos que $P(0) = 0$, con lo cual 0 no es vector hipercíclico y tenemos que $x \neq 0$.

Al ser P un polinomio d-homogéneo, existe $A : X \times \overset{(d)}{\cdots} \times X \longrightarrow X$ multilineal continua tal que $P(y) = A(y, \ldots, y)$ para todo $y \in X$. Veamos que $\left\|P^i(x)\right\| \leq \|P\|^{1+d+\ldots+d^{i-1}} \|x\|^{d^i}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Observemos que dado $\lambda \in \mathbb{C}$, tenemos que

$$P(\lambda x) = A(\lambda x, \ldots, \lambda x) = \lambda^d A(x, \ldots, x) = \lambda^d P(x).$$

Si $i = 1$ y $\lambda = \dfrac{1}{\|x\|}$, tenemos que $\left(\dfrac{1}{\|x\|}\right)^d \|P(x)\| = \left\|P\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|P\|$, con lo cual $\|P(x)\| \leq \|P\| \, \|x\|^d$.

Sea $i > 1$ y supongamos que $\left\|P^l(x)\right\| \leq \|P\|^{1+d+\ldots+d^{l-1}} \|x\|^{d^l}$ para todo $1 \leq l \leq i-1$, entonces

$$\left\|P^i(x)\right\| = \left\|P\left(P^{i-1}(x)\right)\right\| \leq \|P\| \left\|P^{i-1}(x)\right\|^d \leq \|P\| \left(\|P\|^{1+d+\ldots+d^{i-2}}\right)^d \|x\|^{d^{i-1}d} \leq \|P\|^{1+d+\ldots+d^{i-1}} \|x\|^d.$$

Observemos que dado $i \in \mathbb{N}$ tenemos que $1 + d + \ldots + d^{i-1} = \dfrac{d^i - 1}{d-1}$, luego

$$\left\|P^i(x)\right\| \leq \|P\|^{\frac{d^i-1}{d-1}} \|x\|^{d^i}. \tag{3.1}$$

Como $Orb(P, x) \subset X$ es densa, si $r = \text{mín}\left\{1, \dfrac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}\right\}$, entonces $Orb(P, x) \cap B(0, r) \neq \emptyset$.

Sea entonces $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $P^k(x) \in B(0, r)$, veamos que $P^{j+k}(x) \in B(0, r)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$.

Si $\|P\| \leq 1$, entonces $1 \leq \dfrac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}$ y por lo tanto $r = 1$, luego por (3.1), dado $j \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\left\|P^{j+k}(x)\right\| = \left\|P^j\left(P^k(x)\right)\right\| \leq \|P\|^{\frac{d^j-1}{d-1}} \left\|P^k(x)\right\|^{d^j} < r,$$

con lo cual $P^{j+k}(x) \in B(0, r)$.

Si $\|P\| > 1$, entonces $\dfrac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}} < 1$ y $r = \dfrac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}$. Luego por (3.1), dado $j \in \mathbb{N}_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|P^{j+k}(x)\right\| &= \left\|P^j\left(P^k(x)\right)\right\| \leq \left\|P^j\right\| \left\|P^k(x)\right\|^{d^j} \\ &< \|P\|^{\frac{d^j-1}{d-1} - \frac{d^j}{d-1}} = \frac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}} = r.\end{aligned}$$

Así, $P^{j+k}(x) \in B(0, r)$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$, de donde deducimos que existe $R > 0$ tal que $Orb(P, x) \subset B(0, R)$. Por lo tanto $\overline{Orb(P, x)} \subset \overline{B(0, R)} \subsetneq X$, lo cual es absurdo ya que x era vector hipercíclico de P. Luego P no es hipercíclico.

□

Sin embargo, a continuación veremos que existe $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$ supercíclico para todo $d \geq 2$.

Teorema 3.1.4. Sea X un espacio de Banach separable de dimensión infinita y $d \geq 2$, entonces existe $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$ supercíclico.

Demostración. Por el Teorema de Markushevich (ver Teorema A.2.6), existe $\{(b_n, b_n^*)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times X^*$ una M-base numerable para X, es decir, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\{b_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ tales que $X = \overline{\left\langle \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|}$, $X^* = \overline{\left\langle \{b_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*}$ y $b_n^*(b_m) = \delta_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$ (ver Definición A.2.3). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\|b_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $Y = \left\langle \{b_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle \subset X$ denso, la idea será definir primero P en Y y luego extenderlo a X usando la densidad de Y en X. Sea entonces $P : Y \longrightarrow Y$ definido por

$$P(x) = \frac{x_1 \dots x_d}{2c_1} b_1 + \frac{x_{d+1} \dots x_{2d}}{2^2 c_2} b_2 + \frac{x_{2d+1} \dots x_{3d}}{2^3 c_3} b_3 + \dots$$

para $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_i b_i \in Y$, donde $x_i = 0$ salvo finitos i y c_n está definido por

$$c_n = \left\|b_{(n-1)d+1}^*\right\| \left\|b_{(n-1)d+2}^*\right\| \dots \left\|b_{nd}^*\right\| = \prod_{j=1}^{d} \left\|b_{(n-1)d+j}^*\right\|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observemos que al ser $b_n^*(b_m) = \delta_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$, podemos escribir

$$P(x) = \frac{b_1^*(x) \dots b_d^*(x)}{2c_1} b_1 + \frac{b_{d+1}^*(x) \dots b_{2d}^*(x)}{2^2 c_2} b_2 + \frac{b_{2d+1}^*(x) \dots b_{3d}^*(x)}{2^3 c_3} b_3 + \dots$$

para todo $x \in X$, con lo cual utilizaremos una escritura u otra según nos convenga. Es claro que $P : Y \longrightarrow Y$ está bien definido, veamos que P es un polinomio de grado d tal que $P \in \mathcal{P}(^d Y, Y)$ y $\|P\| \leq 1$. En efecto, sea $A : Y \times \overset{(d)}{\dots} \times Y \longrightarrow Y$ definida por

$$A(z_1, \dots, z_d) = \frac{b_1^*(z_1) \dots b_d^*(z_d)}{2c_1} b_1 + \frac{b_{d+1}^*(z_1) \dots b_{2d}^*(z_d)}{2^2 c_2} b_2 + \frac{b_{2d+1}^*(z_1) \dots b_{3d}^*(z_d)}{2^3 c_3} b_3 + \dots$$

para todo $(z_1, \dots, z_d) \in Y \times \overset{(d)}{\dots} \times Y$. Entonces como b_n^* es lineal para todo $n \in \mathbb{N}$ se deduce que A es multilineal. Además, $A(x, \dots, x) = P(x)$ para todo $x \in Y$. Veamos ahora que $\|P\| \leq 1$.

Sea $x \in Y$ tal que $\|x\| \leq 1$, queremos ver que $\|P(x)\| \leq 1$. Recordando que $\|b_n\| = 1$ y la definición de c_n para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|P(x)\| &\leq \frac{\left\|b_1^*(x)\right\| \dots \left\|b_d^*(x)\right\|}{2c_1} \|b_1\| + \frac{\left\|b_{d+1}^*(x)\right\| \dots \left\|b_{2d}^*(x)\right\|}{2^2 c_2} \|b_2\| + \frac{\left\|b_{2d+1}^*(x)\right\| \dots \left\|b_{3d}^*(x)\right\|}{2^3 c_3} \|b_3\| + \dots \\
&\leq \frac{\overbrace{\left\|b_1^*\right\| \dots \left\|b_d^*\right\|}^{c_1} \|x\|^d}{2c_1} + \frac{\overbrace{\left\|b_{d+1}^*\right\| \dots \left\|b_{2d}^*\right\|}^{c_2} \|x\|^d}{2^2 c_2} + \frac{\overbrace{\left\|b_{2d+1}^*\right\| \dots \left\|b_{3d}^*\right\|}^{c_3} \|x\|^d}{2^3 c_3} + \dots \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 1,
\end{aligned}$$

luego $\|P(x)\| \leq 1$ y por lo tanto P es un polinomio d-homogéneo y $\|P\| \leq 1$. Al ser Y denso en X, podemos extender P de manera única a un polinomio de X en X, el cual también llamaremos P, de manera tal que $P \in \mathcal{P}(^d X, X)$ y $\|P\| \leq 1$. Como queremos hallar un vector supercíclico para P, debemos hallar la expresión de P^n para todo $n \in \mathbb{N}$, para lo cual la idea será utilizar una notación adecuada para las constantes que aparecerán en los denominadores de cada sumando de P^n para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, dado $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_i b_i \in Y$, si para cada $i \in \mathbb{N}$ denotamos por $c_{1,i}$ al denominador que aparece en el i-ésimo sumando de P^1, podemos escribir $P^1(x)$ en la forma

$$P^1(x) = \frac{x_1 \dots x_d}{c_{1,1}} b_1 + \frac{x_{d+1} \dots x_{2d}}{c_{1,2}} b_2 + \frac{x_{2d+1} \dots x_{3d}}{c_{1,3}} b_3 + \dots$$

Análogamente si para cada $i \in \mathbb{N}$ denotamos por $c_{2,i}$ al denominador que aparece en el i-ésimo sumando en la expresión de P^2, tenemos que

$$\begin{aligned}
P^2(x) = P(P(x)) &= P\left(\frac{x_1 \dots x_d}{c_{1,1}} b_1 + \frac{x_{d+1} \dots x_{2d}}{c_{1,2}} b_2 + \frac{x_{2d+1} \dots x_{3d}}{c_{1,3}} b_3 + \dots\right) \\
&= \frac{x_1 \dots x_{d^2}}{c_{2,1}} b_1 + \frac{x_{d^2+1} \dots x_{2d^2}}{c_{2,2}} b_2 + \frac{x_{2d^2+1} \dots x_{3d^2}}{c_{2,3}} b_3 + \dots
\end{aligned}$$

En general, dado $l \in \mathbb{N}$, si para cada $i \in \mathbb{N}$ denotamos por $c_{l,i}$ al denominador que aparece en el i-ésimo sumando en la expresión de P^l, razonando inductivamente tenemos que

$$P^l(x) = P^l\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i b_i\right) = \frac{x_1 \dots x_{d^l}}{c_{l,1}} b_1 + \frac{x_{d^l+1} \dots x_{2d^l}}{c_{l,2}} b_2 + \frac{x_{2d^l+1} \dots x_{3d^l}}{c_{l,3}} b_3 + \dots \tag{3.2}$$

Ahora bien, como $Y \subset X$ y X es separable , existe $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ denso numerable, es decir, podemos escribir $Y = \overline{\{r_n, n \in \mathbb{N}\}}$ (donde consideramos la clausura con la topología de subespacio). Observemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in Y = \left\langle \{b_i\}_{i=1}^{\infty} \right\rangle$, entonces podemos escribir $r_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n,i} b_i$, donde $a_{n,i} = 0$ salvo finitos i. Podemos suponer entonces que para cada $n \in \mathbb{N}$, r_n es de la forma

$$r_n = a_{n,1} b_1 + \dots + a_{n,d^{m_n}} b_{d^{m_n}} = \sum_{i=1}^{d^{m_n}} a_{n,i} b_i,$$

con $a_{n,i} \neq 0$ para todo $1 \leq i \leq d^{m_n}$. La idea para hallar el vector supercíclico será construir una sucesión $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ convergente con ciertas características, las cuales nos permitirán demostrar que su límite $y \in X$ es el vector supercíclico buscado. Más precisamente, construiremos sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tales que :

i. $\|z_n\| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. Si $n \in \mathbb{N}$, $\left\|P^{m_1+\dots+m_{j-1}+j}(z_n)\right\| \leq \frac{\lambda_j}{2^n}$ para todo $1 \leq j < n$.

iii. $P^{m_1+\dots+m_{n-1}+n}(z_1 + \dots + z_n) = \lambda_n r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que al ser $\|P\| \leq 1$, para todo $x \in X$ y todo $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $\left\|P^j(x)\right\| \leq \|x\|^{d^j}$.

Por otro lado, sabemos que si $x = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b_i$, dados $i \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$, el i-ésimo sumando de $P^n(x)$ es

$$\frac{y_{(i-1)d^n+1} \dots y_{id^n}}{c_{n,i}} b_i = \prod_{j=1}^{d^n} \frac{y_{(i-1)d^n+j}}{c_{n,i}} b_i.$$

Luego si definimos $z_1 = y_1 b_1 + \dots + y_{d^{m_1+1}} b_{d^{m_1+1}}$, podemos escribir $z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} y_i b_i$ con $y_i = 0$ para todo $i > d^{m_1+1}$ y entonces

$$P(z_1) = P(y_1 b_1 + \dots + y_{d^{m_1+1}} b_{d^{m_1+1}}) = \frac{y_1 \dots y_d}{c_{1,1}} b_1 + \frac{y_{d+1} \dots y_{2d}}{c_{1,2}} b_2 + \dots + \frac{y_{(d^{m_1}-1)d+1} \dots y_{d^{m_1}d}}{c_{1,d^{m_1}}} b_{d^{m_1}}.$$

Sean $y_1, \dots, y_{d^{m_1+1}} \in \mathbb{K}$ y $\lambda_1 > 0$ tales que $\|z_1\| \leq \frac{1}{2}$ y $\frac{y_{(i-1)d+1} \dots y_{id}}{c_{1,i}} = \lambda_1 a_{1,i}$ para todo $1 \leq i \leq d^{m_1+1}$, entonces

$$\begin{aligned} P(z_1) &= \frac{y_1 \dots y_d}{c_{1,1}} b_1 + \frac{y_{d+1} \dots y_{2d}}{c_{1,2}} b_2 + \dots + \frac{y_{(d^{m_1}-1)d+1} \dots y_{d^{m_1}d}}{c_{1,d^{m_1}}} b_{d^{m_1}} \\ &= \lambda_1 a_{1,1} b_1 + \lambda_1 a_{1,2} b_2 + \dots + \lambda_1 a_{1,d^{m_1}} b_{d^{m_1}} \\ &= \lambda_1 (\underbrace{a_{1,1} b_1 + \dots + a_{1,d^{m_1}} b_{d^{m_1}}}_{r_1}) = \lambda_1 r_1. \end{aligned}$$

Luego $z_1 = y_1 b_1 + \dots + y_{d^{m_1+1}} b_{d^{m_1+1}}$ es tal que $\|z_1\| \leq \frac{1}{2}$ y $P(z_1) = \lambda_1 r_1$.

Sea $z_2 = y_{d^{m_1+1}+1} b_{d^{m_1+1}+1} + \dots + y_{d^{m_1+m_2+2}} b_{d^{m_1+m_2+2}}$, entonces

$$P^{m_1+2}(z_1 + z_2) = P^{m_1+2}(y_1 b_1 + \dots + y_{d^{m_1+1}} b_{d^{m_1+1}} + y_{d^{m_1+1}+1} b_{d^{m_1+1}+1} + \dots + y_{d^{m_1+m_2+2}} b_{d^{m_1+m_2+2}}).$$

Escribamos $P^{m_1+2}(z_1 + z_2) = e_1 b_1 + \dots + e_{d^{m_2}} b_{d^{m_2}}$ con $e_i = \frac{y_{(i-1)d^{m_1+2}+1} \cdots y_{id^{m_1+2}}}{c_{m_1+2,i}}$ para todo $1 \leq i \leq d^{m_2}$ y consideremos $y_{d^{m_1}+1}, \dots, y_{d^{m_2}} \in \mathbb{K}$ y $\lambda_2 > 0$ tales que

$$\|z_2\| \leq \text{mín}\left\{\frac{1}{2^2}, \left(\frac{\lambda_1}{2^2}\right)^{\frac{1}{d}}\right\} \qquad \text{y} \qquad e_i = \lambda_2 a_{2,i}$$

para todo $1 \leq i \leq d^{m_2}$. Luego tenemos que

$$\|z_2\| \leq \frac{1}{2^2} \quad \text{y} \quad P^{m_1+2}(z_1+z_2) = e_1 b_1 + \ldots + e_{d^{m_2}} b_{d^{m_2}} = \lambda_2 \underbrace{(a_{2,1} b_1 + \ldots + a_{2,d^{m_2}} b_{d^{m_2}})}_{r_2} = \lambda_2 r_2.$$

Así, construimos $z_2 = y_{d^{m_1}+1} b_{d^{m_1}+1} + \ldots + y_{d^{m_1+m_2+2}} b_{d^{m_1+m_2+2}}$ tal que

$$\|z_2\| \leq \frac{1}{2^2}, \quad \|P(z_2)\| \leq \frac{\lambda_1}{2^2} \quad \text{y} \quad P^{m_1+2}(z_1+z_2) = \lambda_2 r_2.$$

En general , dado $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$z_n = y_{d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n-1}+1} b_{d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n-1}+1} + \ldots + y_{d^{m_1+\ldots+m_n+n}} b_{d^{m_1+\ldots+m_n+n}},$$

donde para todo $d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n-1} + 1 \leq i \leq d^{m_1+\ldots+m_n+n}$ elegimos $\lambda_i > 0$ e $y_i \in \mathbb{K}$ tales que

$$\|z_n\| \leq \min_{1 \leq j < n} \left\{ \frac{1}{2^n}, \left(\frac{\lambda_j}{2^n}\right)^{d^{\frac{1}{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}}} \right\} \quad \text{y} \quad P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) = \lambda_n r_n.$$

Entonces si $1 \leq j < n$, tenemos que

$$\left\|P^{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}(z_n)\right\| \leq \|z_n\|^{d^{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}} \leq \left(\left(\frac{\lambda_j}{2^n}\right)^{d^{\frac{1}{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}}}\right)^{d^{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}} = \frac{\lambda_j}{2^n}.$$

De esta manera, construimos sucesiones $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tales que :

i. $\|z_n\| \leq \dfrac{1}{2^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. Si $n \in \mathbb{N}$, $\left\|P^{m_1+\ldots+m_{j-1}+j}(z_n)\right\| \leq \dfrac{\lambda_j}{2^n}$ para todo $1 \leq j < n$.

iii. $P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) = \lambda_n r_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos que de *i.* se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. Sea entonces $y = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$, queremos ver que y es supercíclico. Vamos a ver que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y) = P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j) \tag{3.3}$$

Si vale (3.3), para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{\lambda_n} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y) - r_n\right\| &= \left\|\frac{1}{\lambda_n}\left(\overbrace{P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n)}^{\lambda_n r_n} + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j)\right) - r_n\right\| \\
&= \left\|\frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j)\right\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\sum_{j=n+1}^{\infty}\left\|P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j)\right\| \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{1}{\lambda_n} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y) - r_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Luego como $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en X, deducimos que y es supercíclico.

Entonces para terminar la demostración del teorema, veamos que vale (3.3). Sea $n \in \mathbb{N}$, para probar (3.3) hallaremos las expresiones de $P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n)$, $\sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j)$ y $P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y)$ por separado y luego veremos que se satisface la igualdad. Si tomamos $l = m_1+\ldots+m_{n-1}+n$, de (3.2) se deduce que

$$P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i \qquad \text{y} \qquad P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) = \sum_{i=1}^{d^{m_n}}\alpha_i b_i,$$

donde

$$\alpha_i = \frac{y_{(i-1)d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}+1}\cdots y_{id^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}}}{c_{m_1+\ldots+m_{n-1}+n,i}}$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $j \in \mathbb{N}$, para hallar $P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j)$ consideremos k_j definido por $k_j = d^{m_1+\ldots+m_j+j}$. Entonces si $j \geq n+1$, podemos escribir $k_j = d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}d^{m_n+\ldots+m_j+j-n}$, o equivalentemente

$$k_j = k_{n-1}d^{m_n+\ldots+m_j+j-n+1} \tag{3.4}$$

Además, podemos escribir $z_j = \sum_{s=k_{j-1}+1}^{k_j} y_s b_s = \sum_{s=1}^{\infty} x_s^j b_s$, donde

$$x_s^j = \begin{cases} y_s & \text{si } k_{j-1}+1 \leq s \leq k_j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Entonces de (3.2) resulta que

$$P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j) = P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}\left(\sum_{s=1}^{\infty} x_s^j b_s\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i^j b_i,$$

donde para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\gamma_i^j = \frac{x^j_{(i-1)d^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}+1}\cdots x^j_{id^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}}}{c_{m_1+\ldots+m_{n-1}+n,i}} = \prod_{t=(i-1)dk_{n-1}+1}^{idk_{n-1}} \frac{x_t^j}{c_{m_1+\ldots+m_{n-1}+n,i}}.$$

Por otro lado, como $x_s^j = 0$ si $s < k_{j-1}+1$ o $s > k_j$, tenemos que $\gamma_i^j = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ tal que

$$(i-1)dk_{n-1}+1 < k_{j-1}+1 \qquad \text{o} \qquad idk_{n-1} > k_j,$$

es decir,

$$i < \frac{k_{j-1}}{dk_{n-1}}+1 = d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+j-1-n}+1 \qquad \text{o} \qquad i > \frac{k_j}{dk_{n-1}} = d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+m_j+j-n}.$$

Luego si $i < d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+j-1-n}+1$ o $i > d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+m_j+j-n}$, entonces $\gamma_i^j = 0$. Por lo tanto, si $j \geq n+1$ tenemos que

$$P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j) = \sum_{i=d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+j-1-n}+1}^{d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+m_j+j-n}} \gamma_i^j b_i.$$

Pero observemos que si $j \geq n+1$, $\alpha_i = \gamma_i^j$ para todo $d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+j-1-n}+1 \leq i \leq d^{m_n+\ldots+m_{j-1}+m_j+j-n}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y) &= P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}\left(\sum_{i=1}^{\infty} z_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i b_i = \sum_{i=1}^{d^{m_n}}\alpha_i b_i + \sum_{i=d^{m_n}+1}^{d^{m_n+m_{n+1}+1}}\alpha_i b_i + \sum_{i=d^{m_n+m_{n+1}+1}+1}^{d^{m_n+m_{n+1}+m_{n+2}+2}}\alpha_i b_i + \ldots \\ &= P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) + P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_{n+1}) + P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_{n+2}) + \ldots \\ &= P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1+\ldots+z_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j). \end{aligned}$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(y) = P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_1 + \ldots + z_n) + \sum_{j=n+1}^{\infty} P^{m_1+\ldots+m_{n-1}+n}(z_j).$$

□

Para finalizar esta sección veremos algunos ejemplos que muestran en cierta forma la diferencia entre el comportamiento de las órbitas de los polinomios homogéneos y los operadores lineales. Bernardes [12], generalizando un resultado de Beauzamy [10, Capítulo 3] probó que si $T \in \mathcal{L}(X)$ tiene radio espectral $\rho(T) > 1$, entonces existe un conjunto $D \subset X$ denso tal que $\|T^n(y)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ para todo $y \in D$. Ahora bien, sería natural preguntarse si este tipo de resultado será válido para un polinomio $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$ si $d \geq 2$, es decir, si tenemos un polinomio $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$ tal que $\|P^n\|$ tiene un crecimiento suficientemente rápido, ¿existirá un subconjunto $D \subset X$ grande en algún sentido tal que $\|P^n(y)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ para todo $y \in D$?. A continuación, mostraremos un ejemplo de un polinomio $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2, \ell_2)$ de manera tal que $\|P^n\| = r^{2^n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\|P^n(y)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in \ell_2$. Por lo tanto tendremos un polinomio de manera tal $\|P^n\|$ tiene un crecimiento más que exponencial, pero sin embargo no existirá $y \in \ell_2$ tal que $\|P^n(y)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ejemplo 3.1.5. Consideremos $r > 1$ y sea $P : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ dado por

$$P(x) = \left(r x_{i+1}^2\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

para toda $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. Veremos que $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2, \ell_2)$ es tal que $\|P\| = r^{2^n-1}$ y que no existe $y \in \ell_2$ tal que $\|P^n(y)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Veamos ahora que P es acotado. En efecto, sea $x \in \ell_2$ tal que $\|x\|_{\ell_2} \leq 1$, entonces $|x_i| \leq 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, con lo cual $|x_i|^4 < |x_i|^2$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y tenemos que

$$\|P(x)\|_{\ell_2}^2 = \sum_{i=2}^{\infty} \left|r x_i^2\right|^2 < r^2 \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 = r^2 \|x\|_{\ell_2}^2 \leq r^2.$$

Luego P es acotado y $\|P\| \leq r$. Mas aún, si tomamos $x = e_2 = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ tenemos que $\|P(e_2)\| = r$. Así deducimos que $\|P\| = r$. Luego si consideramos $A : \ell_2 \times \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ dada por

$$A(x, y) = (r x_{i+1} y_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, es claro que A es bilineal y que $A(x, x) = P(x)$ para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, con lo cual deducimos que $P \in \mathcal{P}(^dX, X)$. Veamos ahora que $\|P^n\| = r^{2^n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces $P^n(x) = (r^{2^n-1} x_{n+i}^{2^n})_{i\in\mathbb{N}}$ para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. Como $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2, \ell_2)$ es tal que $\|P\| = r$, de la ecuación (3.1) de la Proposición 3.1.3 se deduce que $\|P^n\| \leq r^{2^n-1}$. Para ver que vale la igualdad, observemos que si tomamos $x = e_{n+1} \in S_{\ell_2}$, entonces $\|P^n(e_{n+1})\| = r^{2^n-1}$. Sin embargo, vamos a ver que no existe $y \in \ell_2$ tal que $\|P^n(y)\|_{\ell_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, mas aún, veremos que $\|P^n(y)\|_{\ell_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in \ell_2$. En efecto, sea $y \in \ell_2$, entonces $\left|y_j\right| \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y podemos considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|y_j\right| < \frac{1}{r}$ para todo $j \geq n_0$. Entonces si $n \geq n_0$, como $y \in \ell_2$ tenemos que

$$\begin{aligned} \|P^n(y)\|_{\ell_2}^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|r^{2^n-1} y_{n+j}^{2^n}\right|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|r y_{n+j}\right|^{2^n-1} \left|y_{n+j}\right|\right)^2 \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \left(\left|r y_j\right|^{2^n-1} \left|y_j\right|\right)^2 < \sum_{j=n+1}^{\infty} \left|y_j\right|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Luego $\|P^n(y)\|_{\ell_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, en particular no existe $y \in \ell_2$ tal que $\|P^n(y)\|_{\ell_2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Observación 3.1.6. Dado un espacio de Banach X de dimensión infinita, observemos que si $T \in \mathcal{L}(X)$ es un operador hipercíclico, entonces

$$\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \|T^n(y)\| = 0 \qquad \text{y} \qquad \overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}} \|T^n(y)\| = +\infty$$

para todo vector hipercíclico y. Sin embargo, las órbitas de un polinomio d-homogéneo P, con $d \geq 2$, no pueden oscilar entre 0 y $+\infty$ como las de un operador hipercíclico, ya que como vimos en la demostración de la Proposición 3.1.3, las órbitas que ingresan a $B(0,r)$, no vuelven a salir, donde $r = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}\right\}$. Más aún, $\lim_{n\to\infty} \|P^n(y)\| = 0$ para todo $y \in X$ tal que $Orb(P,y) \cap B(0,r) \neq \emptyset$. En efecto, si $y \in X$ es tal que $Orb(P,y) \cap B(0,r) \neq \emptyset$, entonces existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $P^k(y) \in B(0,r)$. Dado $j \in \mathbb{N}_0$, tenemos que $\left\|P^{j+k}(y)\right\| \leq \|P\|^{\frac{d^j-1}{d-1}} \left\|P^k(y)\right\|^{d^j}$ (ver Proposición 3.1.3), luego si escribimos $\left\|P^k(y)\right\|^{d^j} = r - \varepsilon$, entonces

$$\left\|P^{j+k}(y)\right\| \leq \|P\|^{\frac{d^j-1}{d-1}} (r-\varepsilon)^{d^j} = \|P\|^{\frac{d^j}{d-1}} \|P\|^{-\frac{1}{d-1}} (r-\varepsilon)^{d^j} \leq \|P\|^{-\frac{1}{d-1}} \left(\frac{r-\varepsilon}{r}\right)^{d^j} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \|P^n(y)\| = 0$. En particular, si $\underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \|P^n(y)\| = 0$, entonces se deduce que $\overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \|P^n(y)\| = 0$.

A continuación veremos un ejemplo de un polinomio $P \in \mathcal{P}(^d\ell_2, \ell_2)$ que muestra que si una órbita no ingresa a la bola $B(0,r)$, $r = \text{mín}\left\{1, \frac{1}{\|P\|^{\frac{1}{d-1}}}\right\}$, entonces sí puede oscilar, entre el borde de $B(0,r)$ y $+\infty$.

Proposición 3.1.7. Sean $r > 1$ y $d \geq 2$, entonces existen $P \in P(^d\ell_2, \ell_2)$ e $y \in S_{\ell_2}$ tales que

$$\|P\| = r, \qquad \underline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \|P^n(y)\|_{\ell_2} = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{d-1}} \qquad \text{y} \qquad \overline{\lim}_{n\in\mathbb{N}} \|P^n(y)\|_{\ell_2} = +\infty.$$

Demostración. Sea $t = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{d-1}}$, veamos que

$$r^{1+d+\ldots+d^{m-1}} \beta^{d^m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \tag{3.5}$$

para todo $\beta > t$. En efecto, sea $\beta > t$, podemos escribir entonces $\beta = t + \varepsilon$ para algún $\varepsilon > 0$, luego tenemos que

$$\begin{aligned} r^{1+d+\ldots+d^{m-1}} \beta^{d^m} &= r^{\frac{d^m-1}{d-1}} (t+\varepsilon)^{d^m} = r^{\frac{d^m-1}{d-1}} \left(\frac{1}{r^{\frac{1}{d-1}}} + \varepsilon\right)^{d^m} = r^{\frac{d^m-1}{d-1}} \left(\frac{1 + r^{\frac{1}{d-1}}\varepsilon}{r^{\frac{1}{d-1}}}\right)^{d^m} \\ &= r^{\frac{d^m-1}{d-1} - \frac{d^m}{d-1}} (1 + r^{\frac{1}{d-1}}\varepsilon)^{d^m} = r^{-\frac{1}{d-1}} (1 + r^{\frac{1}{d-1}}\varepsilon)^{d^m} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} +\infty. \end{aligned}$$

Para definir el polinomio P construiremos sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,r]$ y $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que :
i. $P(x) = \left(0, \alpha_1 x_1^d, \alpha_2 x_2^d, \alpha_3 x_3^d, \ldots\right)$ para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$.
ii. $\|P^{n+m_1+\ldots+m_n}(e_1)\|_{\ell_2} \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
iii. $t < \left\|P^{n+1+m_1+\ldots+m_n}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos primero que en el caso que tengamos definida tal $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0,r]$, análogamente a lo hecho en el Ejemplo 3.1.5 tenemos efectivamente que $P \in \mathcal{P}(^d\ell_2, \ell_2)$ y $\|P\| = r$. Sean entonces $y = e_1 \in S_{\ell_2}$ y $P : \ell_2 \longrightarrow \ell_2$ dado por

$$P(x) = (0, \alpha_1 x_1^d, \alpha_2 x_2^d, \alpha_3 x_{3,}^d \ldots)$$

para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$, donde los α_n se eligen de la siguiente manera :

Elegimos $\alpha_1 \in (0,r]$ tal que $t < \alpha_1 < t+1$, entonces como $P(e_1) = (0, \alpha_1, 0, 0, \ldots) = \alpha_1 e_2$, se tiene que $\|P(e_1)\|_{\ell_2} = \alpha_1$, con lo cual $\alpha_1 \in (0,r]$ es tal que $t < \|P(e_1)\|_{\ell_2} < t+1$. Sea $x \in \ell_2$, entonces si tuviéramos definidos α_n para todo $n \in \mathbb{N}$, tendríamos que

$$\begin{aligned} P^2(x) = P(P(x)) &= P\left(0, \alpha_1 x_1^d, \alpha_2 x_2^d, \alpha_3 x_{3,}^d \ldots\right) \\ &= \left(0, 0, \alpha_2(\alpha_1 x_1^d)^d, \alpha_3(\alpha_2 x_2^d)^d, \ldots\right) = \left(0, 0, \alpha_2 \alpha_1^d x_1^{d^2}, \alpha_3 \alpha_2^d x_2^{d^2}, \ldots\right). \end{aligned}$$

Así siguiendo, dado $n \geq 2$ deducimos que P^n está definida por

$$P^n(x) = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, \alpha_n \alpha_{n-1}^d \ldots \alpha_1^{d^{n-1}} x_1^{d^n}, \alpha_{n+1} \alpha_n^d \ldots \alpha_2^{d^{n-1}} x_2^{d^n}, \ldots)$$

Entonces dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $P^n(e_1) = \alpha_n \alpha_{n-1}^d \ldots \alpha_1^{d^{n-1}} e_{n+1}$, de donde se deduce que

$$\|P^n(e_1)\|_{\ell_2} = \alpha_n \alpha_{n-1}^d \ldots \alpha_1^{d^{n-1}}.$$

Observemos que dado $m \geq 2$, si tomamos $\alpha_i = r$ para todo $2 \leq i \leq m$, entonces

$$\left\|P^{1+m}(e_1)\right\|_{\ell_2} = r^{1+d+\ldots+d^{m-1}} \alpha_1^{d^m}.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|P^{2+m}(e_1)\right\|_{\ell_2} &= \alpha_{2+m} r^{d+\ldots+d^m} \alpha_1^{d^{1+m}} = \frac{1}{r}\, \alpha_{2+m} r r^{d+\ldots+d^m} \alpha_1^{d^{1+m}} \\ &= \frac{1}{r}\, \alpha_{2+m} r^{1+d+\ldots+d^m} \alpha_1^{d^{1+m}}\ .\end{aligned}$$

Queremos definir $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|P^{1+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \geq 1$ y $t < \left\|P^{2+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \dfrac{1}{2}$.

Tomemos en principio $m_1 \geq 2$ y $\alpha_i = r$ para todo $2 \leq i \leq m_1$, y veamos qué deberíamos considerar para que se cumplan ambas condiciones. Sea $\beta_{1+m_1} = r^{1+d+\ldots+d^{m_1}} \alpha_1^{d^{1+m_1}}$, entonces $\left\|P^{2+m_1}(e_1)\right\| = \dfrac{\alpha_{2+m_1}}{r} \beta_{1+m_1}$, luego

$$\begin{aligned} t < \left\|P^{2+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \frac{1}{2} &\Leftrightarrow t < \frac{\alpha_{2+m_1}}{r} \beta_{1+m_1} \leq t + \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{t}{\beta_{1+m_1}} < \frac{\alpha_{2+m_1}}{r} \leq \frac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_1}} \\ &\Leftrightarrow r\frac{t}{\beta_{1+m_1}} < \alpha_{2+m_1} \leq r\frac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_1}}.\end{aligned}$$

Ahora bien, como $\alpha_1 > t$, por (3.5) tenemos que $\beta_{1+m_1} \underset{m_1\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Por lo tanto, $\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_1}} \underset{m_1\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\dfrac{t}{\beta_{1+m_1}} \underset{m_1\to\infty}{\longrightarrow} 0$, con lo cual podemos tomar $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_1}} < 1$. Sea $\alpha_{2m+1} = r\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_2}}$, entonces $\alpha_{2m+1} \in (0, r]$ es tal que

$$0 < r\frac{t}{\beta_{1+m_1}} < \alpha_{2+m_1} \leq r\frac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_1}},$$

luego $t < \left\|P^{2+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \dfrac{1}{2}$. Además por (3.5) tenemos que $\left\|P^{1+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \underset{m_1\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, luego podemos suponer que $m_1 \in \mathbb{N}$ es tal que $\left\|P^{1+m_1}(e_1)\right\| \geq 1$.

De esta manera definimos $\alpha_2 = \ldots = \alpha_{1+m_1} = r, \alpha_{2+m_1} = r\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_2}} \in (0, r]$ y $m_1 \in \mathbb{N}$ tales que

$$\left\|P^{1+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \geq 1 \qquad \text{y} \qquad t < \left\|P^{2+m_1}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \frac{1}{2}.$$

A continuación, queremos definir $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \geq 2 \qquad \text{y} \qquad t < \left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \leq t + \frac{1}{3}.$$

Similarmente al caso anterior, tomemos $m_2 \geq 2$ y $\alpha_i = r$ para todo $3 + m_1 \leq i \leq 2 + m_1 + m_2$.

Veamos la expresión de $\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2}$ y $\left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2}$ para deducir qué condiciones debemos imponer. Sean $\beta_{1+m_1+m_2} = r^{1+d+\ldots+d^{m_1+m_2}} \alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}$ y $\beta_{2+m_1+m_2} = r^{1+d+\ldots+d^{1+m_1+m_2}} \alpha_1^{d^{2+m_1+m_2}}$, por un lado tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} &= \alpha_{2+m_1+m_2}\alpha_{1+m_1+m_2}^{d}\dots\alpha_{3+m_1}^{d^{m_2-1}}\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}\dots\alpha_2^{d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}\\ &= r^{1+d+\dots+d^{m_2-1}}\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}r^{d^{m_2+1}+\dots+d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}\\ &= \frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}}{r^{d^{m_2}}}\,r^{1+d+\dots+d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}} = \frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}}{r^{d^{m_2}}}\,\beta_{1+m_1+m_2},\end{aligned}$$

y análogamente

$$\left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} = \frac{\alpha_{3+m_1+m_2}}{r}\,\frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{1+m_2}}}{r^{d^{1+m_2}}}\,\beta_{2+m_1+m_2}\ .$$

Luego se tiene que

$$\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} = \frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}}{r^{d^{m_2}}}\,\beta_{1+m_1+m_2} \qquad \text{y} \qquad \left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} = \frac{\alpha_{3+m_1+m_2}}{r}\,\frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{1+m_2}}}{r^{d^{1+m_2}}}\,\beta_{2+m_1+m_2}\ .$$

Como $\alpha_2 = r\dfrac{t+\frac{1}{2}}{\beta_{1+m_2}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} &= \frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{m_2}}}{r^{d^{m_2}}}\,\beta_{1+m_1+m_2} = \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}}{\beta_{1+m_1}^{d^{m_2}}}\beta_{1+m_1+m_2}\\ &= \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}r^{1+d+\dots+d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}}{\left(r^{1+d+\dots+d^{m_1}}\right)^{d^{m_2}}\left(\alpha_1^{d^{1+m_1}}\right)^{d^{m_2}}}\\ &= \frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}r^{1+d+\dots+d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}}{r^{d^{m_2}+d^{m_2+1}+\dots+d^{m_1+m_2}}\alpha_1^{d^{1+m_1+m_2}}}\\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}r^{1+d+\dots+d^{m_2-1}}\\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}r^{\frac{d^{m_2}-1}{d-1}} = \left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}r^{(-1)\frac{1-d^{m_2}}{d-1}}\\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{m_2}}t^{1-d^{m_2}} = t\left(\frac{t+\frac{1}{2}}{t}\right)^{d^{m_2}}\underset{m_2\to\infty}{\longrightarrow}+\infty,\end{aligned}$$

es decir, $\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2}\underset{m_2\to\infty}{\longrightarrow}+\infty$. Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}t<\left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2}\le t+\frac{1}{3} &\Leftrightarrow t<\frac{\alpha_{3+m_1+m_2}}{r}\,\frac{\alpha_{2+m_1}^{d^{1+m_2}}}{r^{d^{1+m_2}}}\beta_{3+m_1+m_2}\le t+\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow t<\frac{\alpha_{3+m_1+m_2}}{r}\,\frac{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}\beta_{3+m_1+m_2}\le t+\frac{1}{3}\\ &\Leftrightarrow r\frac{t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}}<\alpha_{3+m_1+m_2}\le r\frac{t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}}.\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}} &= \frac{\left(r^{1+d+\ldots+d^{m_1}}\right)^{d^{1+m_2}}\left(\alpha_1^{d^{1+m_1}}\right)^{d^{1+m_2}}}{r^{1+d+\ldots+d^{2+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{d^{3+m_1+m_2}}} \\
&= \frac{r^{d^{1+m_2}+d^{2+m_2}+\ldots+d^{1+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{d^{2+m_1+m_2}}}{r^{1+d+\ldots+d^{m_2}}\,r^{d^{1+m_2}+\ldots+d^{1+m_1+m_2}}\,r^{d^{2+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{d^{3+m_1+m_2}}} \\
&= \frac{1}{r^{1+d+\ldots+d^{m_2}}\,r^{d^{2+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{(d-1)d^{2+m_1+m_2}}} \\
&= \frac{1}{r^{\frac{d^{m_2+1}-1}{d-1}}\,r^{d^{2+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{(d-1)d^{2+m_1+m_2}}}.
\end{aligned}$$

Luego, como $\alpha_1 > t$ y $t = \left(\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{d-1}}$, se tiene que $\alpha_1^{(d-1)d^{2+m_1+m_2}} > t^{(d-1)d^{2+m_1+m_2}} = \frac{1}{r^{d^{2+m_1+m_2}}}$ y entonces

$$\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}} = \frac{1}{r^{\frac{d^{m_2+1}-1}{d-1}}\,r^{d^{2+m_1+m_2}}\,\alpha_1^{(d-1)d^{2+m_1+m_2}}} < \frac{1}{r^{\frac{d^{m_2+1}-1}{d-1}}} = t^{d^{m_2+1}-1}.$$

Así, se deduce que

$$\frac{t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}} < \frac{1}{t}\left(\frac{t}{t+\frac{1}{2}}\right)^{d^{1+m_2}} \underset{m_2\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

con lo cual podemos tomar $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}} < 1$.

Sea $\alpha_{3+m_1+m_2} = \frac{t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}}$, entonces $\alpha_{3+m_1+m_2} \in (0, r]$ es tal que

$$0 < r\frac{t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}} < \alpha_{3+m_1+m_2} \le r\frac{t+\frac{1}{3}}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^{d^{1+m_2}}}\,\frac{\beta_{1+m_1}^{d^{1+m_2}}}{\beta_{3+m_1+m_2}},$$

luego $t < \left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \le t + \frac{1}{3}$. Además, como $\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \underset{m_2\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, podemos suponer que $m_2 \in \mathbb{N}$ es tal que $\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \ge 2$. Por lo tanto $m_2 \in \mathbb{N}$ es tal que

$$\left\|P^{2+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \ge 2 \qquad \text{y} \qquad t < \left\|P^{3+m_1+m_2}(e_1)\right\|_{\ell_2} \le t + \frac{1}{3}.$$

Así, razonando inductivamente construimos sucesiones $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, r]$ y $(m_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tales que :

i. $P(x) = \left(0, \alpha_1 x_1^d, \alpha_2 x_2^d, \alpha_3 x_3^d, \ldots\right)$ para todo $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_2$.

ii. $\|P^{n+m_1+\ldots+m_n}(e_1)\|_{\ell_2} \ge n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii. $t < \left\|P^{n+1+m_1+\ldots+m_n}(e_1)\right\|_{\ell_2} \le t + \frac{1}{n}$.

Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ definidas por $a_n = n + m_1 + \ldots + m_n$ y $b_n = n + 1 + m_1 + \ldots + m_n$ respectivamente para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces tenemos que

$$\|P^{a_n}(e_1)\|_{\ell_2} \ge n \qquad \text{y} \qquad t < \left\|P^{b_n}(e_1)\right\|_{\ell_2} \le t + \frac{1}{n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que

$$\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,\|P^n(e_1)\|_{\ell_2} = +\infty \qquad \text{y} \qquad \underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,\|P^n(e_1)\|_{\ell_2} \le t.$$

Por último, al ser $\overline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,\|P^n(e_1)\|_{\ell_2} = +\infty$, por la Observación 3.1.6 no puede existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|P^k(x)\right\|_{\ell_2} < t$, por lo tanto deducimos que $\underline{\lim_{n\in\mathbb{N}}}\,\|P^n(e_1)\|_{\ell_2} = t$.

$\square$

3.2. Existencia de polinomios homogéneos D-caóticos sobre $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

En la sección anterior vimos que no existen polinomios m-homogéneos hipercíclicos definidos sobre espacios de Banach para todo $m \geq 2$. En esta sección, veremos que al considerar el espacio de Fréchet $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, existirán polinomios m-homogéneos D-caóticos (en particular hipercíclicos) para todo $m \geq 2$.

El siguiente resultado fue probado por Peris [39].

Teorema 3.2.1. Sean $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $m \geq 2$, entonces existe un polinomio $P \in \mathcal{P}(^m\omega, \omega)$ D-caótico (en particular hipercíclico).

Demostración. Sea $P : \omega \longrightarrow \omega$ definido por

$$P\left((x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = \left(x_{j+1}^m\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \omega$. Veamos que $P \in \mathcal{P}(^m\omega, \omega)$.

En efecto, sea $A : \omega \times \overset{(m)}{\ldots} \times \omega \longrightarrow \omega$ definida por

$$A\left((x_j^{(1)})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_j^{(m)})_{j\in\mathbb{N}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{m} x_{j+1}^{i}\right)_{j\in\mathbb{N}}$$

para todo $\left((x_j^{(1)})_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_j^{(m)})_{j\in\mathbb{N}}\right) \in \omega \times \overset{(m)}{\ldots} \times \omega$. Es claro que A es m-lineal y continua, y además

$$A\left((x_j)_{j\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = \left(x_{j+1}^m\right)_{j\in\mathbb{N}} = P\left((x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right)$$

para todo $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \omega$, con lo cual P es un polinomio m-homogéneo. Resta ver que es continuo.

Sean $(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}} \subset \omega$ y $x \in \omega$ tales que $x^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$, queremos ver que $P(x^{(j)}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} P(x)$.

Sea $(\rho_l)_{l\in\mathbb{N}}$ la sucesión de seminormas definidas en el Ejemplo A.1.11 que define la topología de ω, basta ver que $\rho_l\left(P(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}} - P(x)\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. En efecto, dado $l \in \mathbb{N}$, como $x^{(j)} \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|\left(x_{k+1}^{(j)}\right)^m - x_{k+1}^m\right| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$ y todo $1 \leq k \leq l$, entonces tenemos que

$$\rho_l\left(P\left((x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}\right) - P(x)\right) = \sup_{1\leq k\leq l}\left|\left(x_{k+1}^{(j)}\right)^m - x_{k+1}^m\right| < \varepsilon$$

para todo $j \geq j_0$. Entonces $\rho_l\left(P(x^{(j)})_{j\in\mathbb{N}} - P(x)\right) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y deducimos que $P(x^{(j)}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} P(x)$. Así, P resulta continuo y se tiene que $P \in \mathcal{P}(^m\omega, \omega)$. Veamos ahora que es D-caótico, es decir, que es hipercíclico y que $\mathcal{P}er(T) \subset \omega$ es denso. Para ver que P es hipercíclico, consideremos $c_{00} = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, 0, \ldots), N \in \mathbb{N}\}$, entonces como c_{00} es separable existe $D = \{x(n), n \in \mathbb{N}\} \subset c_{00}$ denso numerable, de donde se deduce que $D \subset \omega$ es denso numerable. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $x(n) = \left(x(n)_1, \ldots, x(n)_{j(n)}, 0, 0, 0, \ldots\right)$, donde $j(n) < j(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos construir un vector hipercíclico x para P.

Sea $k(0) = 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ consideremos $k(n) = \sum_{i=1}^{n} j(i)$. Para definir x, dado $n \in \mathbb{N}_0$, si suponemos definidos $x_1, \ldots, x_{k(n)}$, por definición tenemos que $k(n+1) - k(n) = j(n+1)$, entonces definimos $x_{k(n)+1}, \ldots, x_{k(n)+j(n+1)}$ de manera tal que

$$x_{k(n)+i}^{m^{k(n)}} = x(n+1)_i$$

para todo $1 \leq i \leq j(n+1)$. Observemos que dado $n \in \mathbb{N}$, por definición de P tenemos que $\left(P^{k(n)}(x)\right)_i = x_{k(n)+i}^{m^{k(n)}}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, con lo cual

$$\left(P^{k(n)}(x)\right)_i = x(n+1)_i \tag{3.6}$$

para todo $1 \leq i \leq j(n+1)$. Veamos que $Orb(P, x) \subset \omega$ es denso.

En efecto, dados $y \in \omega$ y $\varepsilon > 0$, vamos a ver que $Orb(P, y) \cap B_d(y, \varepsilon) \neq \emptyset$, donde d es la métrica definida en la Proposición A.1.6 inducida por $(\rho_l)_{l\in\mathbb{N}}$. Sea $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{l=l_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$, como $D \subset \omega$ es denso y $(j(n))_{n\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x(n+1) \in B_d\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $j(n+1) \geq l_0$.

Vamos a ver que $P^{k(n)} \in B_d(y,\varepsilon)$. Sea $1 \le l \le l_0 \le j(n+1)$, por (3.6) tenemos que $x_{k(n)+i}^{m^{k(n)}} = x(n+1)_i$ para todo $1 \le i \le l$, de donde se deduce que

$$\rho_l\left(P^{k(n)}(x) - y\right) = \sup_{1\le i\le l}\left|\left(P^{k(n)}(x)\right)_i - y_i\right| = \sup_{1\le i\le l}|x(n+1)_i - y_i| = \rho_l\left(x(n+1) - y\right).$$

Luego tenemos que $\rho_l\left(P^{k(n)}(x) - y\right) = \rho_l\left(x(n+1) - y\right)$ para todo $1 \le l \le l_0$ y $\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(P^{k(n)}(x), y\right) &= \sum_{l=1}^{l_0}\frac{1}{2^l}\ \text{mín}\left(1, \rho_l\left(x(n+1) - y\right)\right) + \sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l}\ \text{mín}\left(1, \rho_l\left(P^{k(n)}(x) - y\right)\right) \\ &\le d\left(x(n+1), y\right) + \sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Por lo tanto $P^{k(n)} \in B_d(y,\varepsilon)$ y deducimos que x es hipercíclico para P. Resta ver que $\mathcal{P}er(P) \subset \omega$ es denso.

Dado $n \in \mathbb{N}$, definimos $y(n) \in \omega$ de la siguiente forma. Para cada $k \ge 0$, definimos $y_{kj(n)+1}, \ldots, y_{(k+1)j(n)}$ de manera tal que

$$y(n)_{kj(n)+i}^{m^{kj(n)}} = x(n)_i \tag{3.7}$$

para todo $1 \le i \le j(n)$. Por lo tanto si para cada $k \ge 0$ notamos $y_{kj(n)+i} = (x(n)_i)^{\frac{1}{m^{kj(n)}}}$ para todo $1 \le i \le j(n)$, entonces

$$y(n) = \left(x(n)_1, \ldots, x(n)_{j(n)}, (x(n)_1)^{\frac{1}{m^{j(n)}}}, \ldots, \left(x(n)_{j(n)}\right)^{\frac{1}{m^{j(n)}}}, (x(n)_1)^{\frac{1}{m^{2j(n)}}}, \ldots, \left(x(n)_{j(n)}\right)^{\frac{1}{m^{2j(n)}}}, \ldots\right).$$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$P^{j(n)}\left(y(n)\right) = \left(y(n)_{j(n)+i}^{m^{j(n)}}\right)_{i\in\mathbb{N}} = y(n).$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $y(n)$ es un punto $j(n)$-periódico de P, por lo tanto se deduce que $\{y(n), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}er(P)$. Veamos que $\{y(n), n \in \mathbb{N}\}$ es denso en ω. En efecto, dados $\varepsilon > 0$ y $z \in \omega$, veremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y(n) \in B_d(z,\varepsilon)$.

Sea l_0 tal que $\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$, como $D \subset \omega$ es denso existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) \in B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y $j(n) \ge l_0$. Observemos que si consideramos $k = 0$ en (3.7) se deduce que $y(n)_i = x(n)_i$ para todo $1 \le i \le j(n)$, con lo cual para todo $1 \le l \le l_0 \le j(n)$ se tiene que

$$\rho_l\left(y(n) - z\right) = \sup_{1\le i\le l}|y(n)_i - z_i| = \sup_{1\le i\le l}|x(n)_i - z_i| = \rho_l\left(x(n) - z\right).$$

Luego tenemos que $\rho_l\left(y(n) - z\right) = \rho_l\left(x(n) - z\right) < \varepsilon$ para todo $1 \le l \le l_0$ y $\sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} d\left(y(n), z\right) &= \sum_{l=1}^{l_0}\frac{1}{2^l}\ \text{mín}\left(1, \rho_l\left(x(n) - z\right)\right) + \sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l}\ \text{mín}\left(1, \rho_l\left(y(n) - z\right)\right) \\ &\le d\left(x(n), z\right) + \sum_{l=l_0+1}^{\infty}\frac{1}{2^l} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Así tenemos que $y(n) \in B\left(z, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ y se deduce que $\{y(n), n \in \mathbb{N}\} \subset \omega$ es denso. Luego como $\{y(n), n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{P}er(P) \subset \omega$ tenemos que $\mathcal{P}er(P) \subset \omega$ es denso y P resulta D-caótico.

□

Luego del ejemplo de Peris en ω, se encontraron otros ejemplos de polinomios homogéneos D-caóticos en espacios de Fréchet no normables. Aron y Miralles [3] hallaron polinomios homogéneos D-caóticos en ciertos espacios de funciones diferenciables sobre $\mathbb{R}$ y Martínez-Giménez y Peris [36] en espacios de sucesiones de Köthe.

Capítulo 4

Órbitas de polinomios no homogéneos

En este capítulo estudiaremos iteraciones de polinomios hipercíclicos no homogéneos sobre espacios de Fréchet. Además de estudiar ejemplos concretos, nuestro objetivo será demostrar la existencia de polinomios sobre espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. Para tal fin dividiremos el capítulo en 4 secciones.

En la primera sección mostraremos ejemplos de polinomios no homogéneos D-caóticos (por lo tanto hipercíclicos) de grado mayor o igual que 2 sobre $X = c_0$ y $X = \ell_q$, para $1 \leq q < \infty$. Además utilizaremos el conjunto de Julia de polinomios de una variable compleja para determinar cuándo ciertos tipos de polinomios de grado mayor o igual que 2 definidos sobre ℓ_q o c_0 ($1 \leq q < \infty$) son tanto AY-caóticos como hipercíclicos.

En las siguientes 2 secciones presentaremos teoremas importantes de dinámica lineal, que nos ayudarán en la última sección a probar teoremas de existencia. En la segunda sección nos ocuparemos de estudiar la existencia de operadores mixing (por lo tanto hipercíclicos) definidos sobre espacios de Banach y de Fréchet separables de dimensión infinita. En la tercera sección demostraremos los teoremas de Ansari y León-Müller, los cuales nos dicen (respectivamente) que si T es un operador hipercíclico, entonces T^k y λT son hipercíclicos para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Por último en la cuarta sección veremos que en cualquier espacio de Fréchet separable de dimensión infinita existen polinomios hipercíclicos y mixing de grado positivo arbitrario.

4.1. Existencia de polinomios D-caóticos sobre c_0 y ℓ_q

En el Capítulo 2 vimos distintos tipos de ejemplos de operadores hipercíclicos (polinomios 1-homogéneos) sobre espacios de Banach y de Fréchet. Sin embargo, vimos en el Capítulo 3 que Bernardes [12] probó que no existen polinomios d-homogéneos hipercíclicos de grado $d \geq 2$ sobre espacios de Banach separables de dimensión infinita. Entonces Aron se pregunta si existen polinomios no homogéneos hipercíclicos de grado $d \geq 2$ en espacios de Banach.

En esta sección presentaremos algunos resultados probados en [39] que responden la pregunta de Aron en forma afirmativa, mostrando que para todo $d \geq 2$ existen polinomios D-caóticos (por lo tanto hipercíclicos) de grado d, sobre c_0 y ℓ_q para $1 \leq q < \infty$.

Vimos en el Corolario 2.5.7 que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda| > 1$, el operador de Rolewicz λB definido sobre $X = c_0$ o ℓ_q con $1 \leq q < \infty$ es D-caótico. Entonces, dado $m \geq 2$, lo que haremos será dar un ejemplo de un polinomio definido sobre $X = c_0$ o ℓ_q, con $1 \leq q < \infty$, que será quasiconjugado con mB y por lo tanto D-caótico. Previamente veamos que la función exponencial definida sobre $\mathbb{C}$ es localmente Lipschitz.

Lema 4.1.1. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(z) = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces f es localmente Lipschitz. Mas aún, si $R > 0$ y $x, y \in B(0, R)$, entonces $|e^x - e^y| \leq 3e^R\,|x - y|$.

Demostración. Sean $x, y \in B(0, R)$. Si $x = a_1 + ib_1$ e $y = a_2 + ib_2$ con $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ para $1 \leq i \leq 2$, entonces

$$\begin{aligned} |e^x - e^y| &= \left|e^{a_1+ib_1} - e^{a_2+ib_2}\right| = \left|e^{ib_1}\left(e^{a_1} - e^{a_2}e^{i(b_2-b_1)}\right)\right| \\ &= \left|e^{a_1} - e^{a_2} + e^{a_2} - e^{a_2}e^{i(b_2-b_1)}\right| \leq |e^{a_1} - e^{a_2}| + \left|e^{a_2}\left(1 - e^{i(b_2-b_1)}\right)\right|. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Lagrange, tenemos que $|e^{a_1} - e^{a_2}| \leq e^R |a_1 - a_2|$ para $|a_1| < R$ y $|a_2| < R$. Por otro lado, observemos que

$$\begin{aligned}\left|1 - e^{i(b_2-b_1)}\right|^2 &= |1 - cos(b_1 - b_2) - isen(b_1 - b_2)|^2 \leq |1 - cos(b_1 - b_2)|^2 + |sen(b_1 - b_2)|^2 \\ &= |cos(0) - cos(b_1 - b_2)|^2 + |sen(0) - sen(b_1 - b_2)|^2 .\end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de Lagrange tenemos que

$$|cos(0) - cos(b_1 - b_2)|^2 \leq |b_1 - b_2|^2 \qquad \text{y} \qquad |sen(0) - sen(b_1 - b_2)|^2 \leq |b_1 - b_2|^2 ,$$

con lo cual, $\left|1 - e^{i(b_2-b_1)}\right| \leq \sqrt{2}\,|b_1 - b_2|$. Luego, deducimos que

$$|e^x - e^y| \leq e^R |a_1 - a_2| + \sqrt{2}\, e^{a_2} |b_1 - b_2| \leq e^R |x - y| + 2e^R |x - y| = 3e^R |x - y| .$$

□

Proposición 4.1.2. Sean $m \geq 2$, $X = c_0$ o $X = \ell_q$ $(1 \leq q < \infty)$ y $P : X \longrightarrow X$ definido por

$$P((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = ((x_{i+1} + 1)^m - 1)_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$. Entonces P es un polinomio D-caótico no homogéneo de grado m.

Demostración. Para cada $1 \leq k \leq m$, sea $Q_k : X \longrightarrow X$ definido por

$$Q_k((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \left(\binom{m}{k} x_{i+1}^k\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$. Entonces para cada $1 \leq k \leq m$, Q_k es un polinomio k-homogéneo, $\|Q_k\| = \binom{m}{k}$ y además $P = \sum_{k=1}^{m} Q_k$. Por lo tanto P es un polinomio no homogéneo continuo de grado m.

Sea $\varphi : X \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (e^{x_i} - 1)_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$. Veremos que P y mB son quasiconjugados vía φ. Previamente veamos que $\varphi : X \longrightarrow X$ es continua y de rango denso.

Buena definición de φ :

- Si $X = c_0$, dado $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0$ tenemos que $\lim_{i\to\infty} e^{x_i} - 1 = 0$, con lo cual $\varphi((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) \in c_0$.
- Si $X = \ell_q$, dado $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell_q$, existe $M > 1$ tal que $|x_i| < M$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces por el lema anterior,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |e^{x_i} - 1|^q \leq 3^q e^{Mq} \|x\|^q < \infty.$$

Luego $\varphi(x) \in \ell_q$ y por lo tanto φ está bien definida. Veamos ahora que φ es localmente Lipschitz. Sean $x, y \in B(0, M)$. Utilizando el lema anterior tenemos que :

- Si $X = c_0$, entonces

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{c_0} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |e^{x_i} - e^{y_i}| \leq 3e^M \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i| = 3e^M \|x - y\|_{c_0} .$$

- Si $X = \ell_q$, entonces

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\|_{\ell_q}^q = \sum_{i=1}^{\infty} |e^{x_i} - e^{y_i}|^q \leq 3^q e^{Mq} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^q = 3^q e^{Mq} \|x - y\|_{\ell_q}^q ,$$

con lo cual φ es localmente Lipschitz y en particular es continua.

Veamos que φ tiene rango denso en X. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = e^z - 1$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, tenemos que $D = \left\{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots), x_j \neq -1 \text{ para } 1 \leq j \leq N\right\}$ está contenido en $R(\varphi)$, entonces como D es denso en $X = c_0$ o ℓ_q, concluimos que $R(\varphi)$ es denso. Luego para ver que P y mB son quasiconjugados vía φ, resta ver que $\varphi \circ mB = P \circ \varphi$.

Sea $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$, entonces

$$(\varphi \circ mB)(x) = \varphi\left((mx_{i+1})_{i\in\mathbb{N}}\right) = (e^{mx_{i+1}} - 1)_{i\in\mathbb{N}}\,.$$

Por otro lado tenemos que

$$(P \circ \varphi)(x) = P\left((e^{x_i} - 1)_{i\in\mathbb{N}}\right) = ((e^{x_{i+1}})^m - 1)_{i\in\mathbb{N}} = (e^{mx_{i+1}} - 1)_{i\in\mathbb{N}}\,.$$

Luego $\varphi \circ mB = P \circ \varphi$, con lo cual P y mB son quasiconjugados vía φ y P resulta D-caótico.

□

Motivados por la proposición anterior, para $X = c_0$ o ℓ_q $(1 \leq q < \infty)$, vamos a considerar $P : X \longrightarrow X$ definido por

$$P\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = (p(x_{i+1}))_{i\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$, donde $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $d \geq 2$ tal que $p(0) = 0$. Mostraremos que ver si P es AY-caótico o hipercíclico es equivalente a ver que $0 \in \mathcal{J}(p)$, donde $\mathcal{J}(p)$ es el conjunto de Julia de p (ver Definición B.1.3). Observemos que la condición de que $p(0) = 0$ es necesaria para la buena definición de P, ya que si $p(0) = c \neq 0$, tenemos que $P(0) = (p(0))_{i\in\mathbb{N}} = (c)_{i\in\mathbb{N}} \notin X$ y por lo tanto P no estaría bien definido. Previamente probaremos el siguiente lema.

Lema 4.1.3. Sean $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in \mathcal{J}(p)$ y $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $d \geq 2$. Entonces dados U entorno de x_0, $\varepsilon > 0$ y $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset U$ tales que $|p^n(x_i) - z_i| < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq m$.

Demostración. Sea u un punto repulsor de p de período k, es decir, $p^k(u) = u$ y $\left|\left(p^k\right)'(u)\right| > 1$, entonces por el Lema B.0.10 existe un disco $U_0 \subset U$ centrado en u tal que $U_0 \subset p^k(U_0)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, consideremos $U_j = p^{jk}(U_0)$, luego $U_0 \subset p^k(U_0)$ y tenemos que $U_j = p^{jk}(U_0) \subseteq p^{(j+1)k}(U_0) = U_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Ahora bien, como $x_0 \in \mathcal{J}(p)$, tenemos por la Proposición B.1.16 que $x_0 \in \mathcal{J}(p^k)$, por lo que $\mathcal{F} = \left\{p^{jk} : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}, j \in \mathbb{N}\right\}$ no es normal. Entonces por el Teorema de Montel-Caratheodory (ver Teorema B.1.5), $\mathcal{F}$ omite a lo sumo dos puntos de $\mathbb{C}$.

Luego, existen $m \in \mathbb{N}$ e $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \mathbb{C}$ tales que para todo $1 \leq i \leq m$, y_i no se omite por $\mathcal{F}$ y $|y_i - z_i| < \varepsilon$, por lo tanto

$$\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \bigcup_{j\in\mathbb{N}} p^{jk}(U_0) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j.$$

Entonces como $(U_j)_{j\in\mathbb{N}}$ es creciente, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset U_{j_0} = p^{j_0 k}(U_0)$.

Luego si tomamos $n = j_0 k$ y $x_i \in U_0$ tal que $y_i = p^n(x_i)$ para cada $1 \leq i \leq m$, entonces $|p^n(x_i) - z_i| < \varepsilon$ para todo $1 \leq i \leq m$.

□

Teorema 4.1.4. Sea $X = c_0$ o ℓ_q, con $1 \leq q < \infty$, y $P : X \longrightarrow X$ el polinomio continuo definido por

$$P\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = (p(x_{i+1}))_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$, donde $p : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $d \geq 2$ tal que $p(0) = 0$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

i. P es AY-caótico.

ii. P es hipercíclico.

iii. P tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

iv. $0 \in \mathcal{J}(p)$.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii*. Por definición de AY-caótico.

ii. $\Rightarrow$ *iii*. Sea $\varepsilon = 1$, dados $x \in X$ y $\delta > 0$, veamos que existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\|x - y\| < \delta \qquad \text{y} \qquad \|P^n(y) - P^n(x)\| > \varepsilon = 1.$$

Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - (x_1, \dots, x_k, 0, 0, 0 \dots)\| < \delta$ y z vector hipercíclico para P tal que $\|z - x\| < \delta$. Observemos que dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$P^n\left((x_i)_{i\in\mathbb{N}}\right) = \left(p^n(x_{n+i})\right)_{i\in\mathbb{N}} \tag{4.1}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in X$. Entonces si $\overline{x} = (x_1 \dots, x_k, 0, 0, 0, \dots)$ y tomamos $n \geq k$, tenemos que $n + i > k$ para todo $i \in \mathbb{N}$, luego $x_{n+i} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y entonces

$$P^n(\overline{x}) = (p^n(0))_{i\in\mathbb{N}} = (0, 0, 0, \dots).$$

Así, $Orb(P, \overline{x}) = \left\{\overline{x}, P(\overline{x}), \dots, P^{k-1}(\overline{x}), 0\right\}$. Observemos que al ser z hipercíclico, $(P^n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ no es acotada, entonces $\|P^n(z)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $\|P^n(z)\| < 2 + \|P^n(x)\|$ para todo $n \geq k$, entonces $\|P^n(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, por lo tanto existe $n \geq k$ tal que $\|P^n(x)\| > 1$. Luego como $n \geq k$, $P^n(\overline{x}) = 0$ y entonces

$$\|P^n(\overline{x}) - P^n(x)\| = \|P^n(x)\| > \varepsilon = 1, \text{ con } \|\overline{x} - x\| < \delta.$$

En caso contrario, existe $n \geq k$ tal que $\|P^n(z)\| \geq 2 + \|P^n(x)\|$, entonces

$$\|P^n(z) - P^n(x)\| \geq \|P^n(z)\| - \|P^n(x)\| \geq 2 > \varepsilon = 1, \text{ con } \|z - x\| < \delta.$$

Luego, considerando $y = \overline{x}$ o $y = z$, concluimos que existen $n \in \mathbb{N}$ e $y \in X$ tales que $\|y - x\| < \delta$ y $\|P^n(y) - P^n(x)\| > \varepsilon = 1$. Por lo tanto P tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

iii. $\Rightarrow$ *iv*. Supongamos que $0 \notin \mathcal{J}(p)$, entonces existe U entorno de 0 tal que $\{p^n, n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U. Veamos que $\{(p^n)', n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U. En efecto, como $\{(p^n), n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U, existe $(p^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a una función holomorfa sobre todo $K \subset U$ compacto, o bien converge a infinito. Sin embargo, observemos que al ser 0 punto fijo de p tenemos que $p^{n_k}(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo cual en particular $(p^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a infinito. Luego $(p^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función holomorfa f sobre todo $K \subset U$ compacto. Entonces por el Teorema B.0.7, $(p^{n_k})' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ uniformemente sobre todo $K \subset U$ compacto, de donde se deduce que $\{(p^n)', n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U.

Veamos ahora que $\{(p^n)', n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente acotada sobre todo $K \subset U$ compacto. En efecto, supongamos que existe $K \subset U$ compacto tal que $\{(p^n)', n \in \mathbb{N}\}$ no es uniformemente acotado sobre K, entonces existe $(p^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $(p^{n_k})' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ uniformemente sobre K. Luego como $\{p^n, n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U y $p(0) = 0$, existe $\left(p^{n_{k_j}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente sobre K a una función holomorfa f, entonces por el Teorema B.0.7 tenemos que $\left(p^{n_{k_j}}\right)' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ sobre K, lo cual contradice que $(p^{n_k})' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Por lo tanto tenemos que $\{(p^n)', n \in \mathbb{N}\}$ es uniformemente acotado sobre todo $K \subset U$ compacto. Sean entonces $\delta_0 > 0$ y $M > 0$ tales que $\left|(p^n)'(w)\right| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}, w \in B(0, \delta_0)$. Luego si $n \in \mathbb{N}$ y $|z| < \delta_0$, entonces

$$\left|\frac{p^n(z)}{z}\right| = \left|\frac{p^n(z) - p^n(0)}{z - 0}\right| = \left|(p^n)'(c)\right| \leq M,$$

con c tal que $0 < |c| < |z|$. Deducimos entonces que

$$|p^n(z)| \leq M\,|z| \tag{4.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}, z \in B(0, \delta_0)$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B(0, \delta_0)$, veamos que $\|P^n(x)\| \leq M\,\|x\|$.

En efecto, como $\|x\| < \delta_0$, en particular tenemos que $\left|x_j\right| < \delta_0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, luego por (4.2) se tiene que $\left|p^n(x_j)\right| \leq M\left|x_j\right|$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y entonces deducimos que $\|P^n(x)\| \leq M\,\|x\|$.

Sea $\varepsilon > 0$, si $n \in \mathbb{N}$ e $y \in X$ es tal que $\|y\| < \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \delta_0\right\}$, entonces

$$\|P^n(y) - P^n(0)\| = \|P^n(y)\| \leq M\,\|y\| < \varepsilon.$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{M}, \delta_0\right\}$ tal que $\|P^n(y) - P^n(0)\| \leq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in B(0, \delta)$, lo cual contradice la dependencia sensible de las condiciones iniciales de P.

iv. $\Rightarrow$ *i.* Como P es AY-caótico si P es hipercíclico y tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales, al saber que *ii.* $\Rightarrow$ *iii.*, basta demostrar *iv.* $\Rightarrow$ *ii.* Por el Lema 4.1.3, dado un conjunto finito $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{C}$ y $\delta > 0$, si consideramos $\varepsilon = \delta$ y $U = B(0, \delta)$, como $0 \in \mathcal{J}(p)$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset B(0, \delta)$ tales que $|p^n(z_i) - x_i| < \delta$ para todo $1 \leq i \leq m$. Al ser X un espacio métrico sin puntos aislados, ver que P es hipercíclico es equivalente a ver que P es topológicamente transitivo. Basta ver que dados $x, y \in X$ y $\varepsilon > 0$, existen $n \in \mathbb{N}$ e $\overline{y} \in X$ tales que $\|y - \overline{y}\|_X < \varepsilon$ y $\|P^n(\overline{y}) - x\| < \varepsilon$. En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|x - (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $\|y - (y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{2m}$, $n > m$ y $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset B(0, \delta)$ (en la demostración del Lema 4.1.3 se ve que podemos tomar n arbitrariamente grande) tales que $|p^n(z_i) - x_i| < \delta$ para todo $1 \leq i \leq m$. Consideremos $\overline{y} \in X$ dado por

$$\overline{y_j} = \begin{cases} y_j & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ z_{j-n} & \text{si } n+1 \leq j \leq n+m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

es decir,

$$\overline{y} = (\underbrace{y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots, 0}_{n}, z_1, \ldots, z_m, 0, 0, \ldots).$$

Entonces para cada $j \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$(y - \overline{y})_j = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq j \leq m \\ y_j & \text{si } m+1 \leq j \leq n \text{ o } \; j \geq n+m+1 \\ y_j - z_{j-n} & \text{si } n+1 \leq j \leq n+m \end{cases}.$$

Veamos que $\|y - \overline{y}\| < \varepsilon$ y $\|P^n(\overline{y}) - x\| < \varepsilon$.

• Si $X = c_0$, dado $j \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\left|(y - \overline{y})_j\right| \leq \sup_{i \geq m+1} |y_i| + \max_{1 \leq i \leq m} |z_i| < \|y - (y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots)\|_{c_0} + \delta < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m},$$

por lo tanto

$$\|y - \overline{y}\|_{c_0} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2m} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por otro lado, por (4.1) tenemos que

$$P^n(\overline{y}) = \left(p^n(\overline{y_{n+j}})\right)_{j \in \mathbb{N}} = (p^n(\overline{y_{n+1}}), p^n(\overline{y_{n+2}}), \ldots, p^n(\overline{y_{n+m}}), 0, 0, 0, \ldots) = (p^n(z_1), p^n(z_2), \ldots, p^n(z_m), 0, 0, 0, \ldots),$$

es decir,

$$P^n(\overline{y}) = (p^n(z_1), p^n(z_2), \ldots, p^n(z_m), 0, 0, 0, \ldots).$$

Luego dado $j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\left|(P^n(\overline{y}) - x)_j\right| \leq \max_{1 \leq i \leq m} |p^n(z_i) - x_i| + \sup_{j \geq m+1} \left|x_j\right| < \delta + \|x - (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)\|_{c_0} < \frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2},$$

de donde se deduce que

$$\|P^n(\overline{y}) - x\|_{c_0} \leq \frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

• Si $X = \ell_q$, entonces

$$\begin{aligned} \|y - \overline{y}\|_{\ell_q} &= \left(\sum_{j=m+1}^{n} \left|y_j\right|^q + \sum_{j=n+1}^{n+m} \left|y_j - z_{j-n}\right|^q + \sum_{j=n+m+1}^{\infty} \left|y_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{m} \left|z_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{j=m+1}^{\infty} \left|y_j\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \left(\sum_{j=1}^{m} \delta^q\right)^{\frac{1}{q}} + \|y - (y_1, \ldots, y_m, 0, 0, \ldots)\|_{\ell_q} < m^{\frac{1}{q}} \frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

con lo cual resulta que $\|y-\overline{y}\|_{\ell_q} < \varepsilon$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}\|P^n(\overline{y})-x\|_{\ell_q}^q &= \sum_{j=1}^{m}\left|p^n(z_j)-x_j\right|^q + \sum_{j=m+1}^{\infty}\left|x_j\right|^q < \sum_{j=1}^{m}\delta^q + \|x-(x_1,\ldots,x_m,0,0,\ldots)\|_{\ell_q}^q \\ &< m\left(\frac{\varepsilon}{2m}\right)^q + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q < \varepsilon^q,\end{aligned}$$

es decir, $\|P^n(\overline{y})-x\|_{\ell_q} < \varepsilon$. Así, como $\|y-\overline{y}\| < \varepsilon$ y $\|P^n(\overline{y})-x\| < \varepsilon$, entonces P es topológicamente transitivo y por lo tanto hipercíclico.

□

En la Proposición 4.1.2 vimos que si $X=\ell_q$ $(1\le q<\infty)$, el polinomio $P:\ell_q\longrightarrow\ell_q$ definido por

$$(P(x_i))_{i\in\mathbb{N}} = ((x_{i+1}+1)^m-1)_{i\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, es D-caótico. Observemos que dado $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in\ell_q$, tenemos que

$$P((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = \left(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{i+1}^k - 1\right)_{i\in\mathbb{N}},$$

con lo cual la parte lineal de $P((x_i)_{i\in\mathbb{N}})$ es el operador de Rolewicz mB, el cual por el Corolario 2.5.7 es D-caótico. Entonces P es un polinomio D-caótico cuya parte lineal es D-caótica.

Veremos en el siguiente ejemplo un polinomio AY-caótico cuya parte lineal no es hipercíclica ni tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales.

Ejemplo 4.1.5. Sea $p:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ el polinomio dado por

$$p(z)=z+z^2$$

para todo $z\in\mathbb{C}$ y consideremos el polinomio $P:X\longrightarrow X$ dado por

$$P((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (p(x_{i+1}))_{i\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in X$, donde $X=c_0$ o ℓ_q , con $1\le q<\infty$. Veamos que P es AY-caótico.

En efecto, para ver que P es AY-caótico, por el Teorema 4.1.4 basta ver que $0\in\mathcal{J}(p)$. Al ser p un polinomio sobre $\mathbb{C}$, por el Teorema B.2.5 tenemos que conjunto de Julia de p es la clausura de los puntos periódicos repulsores de p (ver Definición B.1.8), es decir,

$$\mathcal{J}(p) = \overline{\{z\in\mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } p\}}.$$

Observemos que $p(0)=0$ y $p'(0)=1$, es decir, 0 es un punto racionamente indiferente de p, entonces por el Teorema B.2.4, $0\in\overline{\{z\in\mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } p\}}=\mathcal{J}(p)$ y por el Teorema 4.1.4 concluimos que P es AY-caótico. Por otro lado, para toda $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in X$ tenemos que

$$P((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (p(x_{i+1}))_{i\in\mathbb{N}} = \left(x_{i+1}+x_{i+1}^2\right)_{i\in\mathbb{N}} = B((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) + (x_{i+1}^2)_{i\in\mathbb{N}},$$

donde B es el operador de desplazamiento hacia atrás sobre X. Como $\|B\|\le 1$, es fácil ver que B no es hipercíclico y no tiene dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales, con lo cual en particular no es AY-caótico.

Proposición 4.1.6. Sean $X=\ell_q$ $(1\le q<\infty)$ y $P:X\longrightarrow X$ el polinomio definido por

$$P((x_i)_{i\in\mathbb{N}}) = (p(x_{i+1}))_{i\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}\in X$, donde $p:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ es un polinomio de grado $d\ge 2$ tal que $p(0)=0$. Si 0 es punto repulsor de p, entonces P es D-caótico.

Demostración. Por el Teorema B.2.5 sabemos que $\mathcal{J}(p) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \text{ tales que } z \text{ es punto periódico repulsor de } p\}}$, con lo cual por hipótesis tenemos que $0 \in \mathcal{J}(p)$. Luego, por el Teorema 4.1.4 se tiene que P es hipercíclico.

Resta ver que $\mathcal{P}er(P)$ es denso en X. Sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$, queremos ver que existe $z \in \mathcal{P}er(P) \cap B(0, \varepsilon)$. Como 0 es punto fijo repulsor de p, tenemos que $|p'(0)| > 1$, entonces podemos considerar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $|p'(0)| > \lambda > 1$. Por otro lado, como $x \in \ell_q$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x - (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, 0, \ldots)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3}$$

con lo cual al ser $|p'(0)| > \lambda > 1$, por el Lema B.0.10 existe $\delta < \dfrac{\varepsilon}{6m}$ tal que

$$\lambda D(0, r) \subset p\,(D(0, r)) \tag{4.4}$$

para todo $r \leq \delta$. Mas aún, para todo $r \leq \lambda^{-k}\delta$ y todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$p^k\,(D\,(0, r)) = p^{k-1}\,(p\,(D(0, r))) \supset p^{k-1}(D(0, \lambda r)) \supset p^{k-2}(D(0, \lambda^2 r)) \supset \ldots \supset p(D(0, \lambda^{k-1} r)) \supset D(0, \lambda^k r),$$

es decir,

$$D(0, \lambda^k r) \subset p^k\,(D(0, r))\,. \tag{4.5}$$

Por el Lema 4.1.3 existen $n > m$ y $\{z_{1,1}, \ldots, z_{1,m}\} \subset D(0, \delta)$ tales que $\left|p^n(z_{1,i}) - x_i\right| < \delta$ para todo $1 \leq i \leq m$. Además, en la demostración del lema se ve que podemos tomar n arbitrariamente grande, por lo tanto como $\lambda > 1$ podemos suponer que además n es tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-kn} < \dfrac{1}{m}$. Por (4.5), tenemos que $D\left(0, \dfrac{\delta}{\lambda^{(j-1)n}}\right) \subset p^n\left(D\left(0, \dfrac{\delta}{\lambda^{jn}}\right)\right)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Luego si $1 \leq i \leq m$, como $z_{1,i} \in D(0, \delta) \subset p^n\left(D\left(0, \dfrac{\delta}{\lambda^n}\right)\right)$, entonces existe $z_{2,i} \in D\left(0, \dfrac{\delta}{\lambda^n}\right)$ tal que $p^n(z_{2,i}) = z_{1,i}$. Continuando de ese modo, tenemos que para todo $j \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq m$, existen $z_{j,i}$ tales que $\left|z_{j+1,i}\right| < \dfrac{\delta}{\lambda^{jn}}$ y $p^n(z_{j+1,i}) = z_{j,i}$. Consideremos entonces

$$z = \Bigg(\underbrace{z_{0,1}, \ldots, z_{0,m}, 0, 0, \ldots 0}_{n}, \underbrace{z_{1,1}, \ldots, z_{1,m}, 0, 0, \ldots, 0}_{n}, z_{2,1}, \ldots\Bigg),$$

donde $z_{0,i} = p^n(z_{1,i})$ para todo $1 \leq i \leq m$ y $z_{jn+1} = z_{j,1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\begin{aligned} P^n(z) &= \Bigg(\underbrace{p^n(z_{1,1}), \ldots, p^n(z_{1,m}), 0, 0, \ldots, 0}_{n}, \underbrace{p^n(z_{2,1}), \ldots, p^n(z_{2,m}), 0, 0, \ldots, 0}_{n}, \ldots\Bigg) \\ &= (z_{0,1}, \ldots, z_{0,m}, 0, 0, \ldots 0, z_{1,1}, \ldots, z_{1,m}, 0, 0, \ldots, 0, z_{2,1}, \ldots) = z, \end{aligned}$$

Luego $z \in \mathcal{P}er(P)$ y si definimos $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$, entonces por (4.3) tenemos que

$$\|x - z\|_{\ell_q} < \|x - \overline{x}\|_{\ell_q} + \|\overline{x} - z\|_{\ell_q} < \frac{\varepsilon}{2} + \|\overline{x} - z\|_{\ell_q}\,.$$

Por otro lado, como $\sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{1}{\lambda^{jn}} < \dfrac{1}{m}$ y $\left|z_{j+1,i}\right| < \dfrac{\delta}{\lambda^{jn}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} \|\overline{x} - z\|_{\ell_q}^q &= \sum_{i=1}^{m} \left|x_i - z_{0,i}\right|^q + \sum_{i=1}^{m} \left|z_{1,i}\right|^q + \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \left|z_{j,i}\right|^q < \sum_{i=1}^{m} \left|x_i - p^n(z_{1,i})\right|^q + m\delta^q + \delta^q \sum_{j=2}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} \left|\frac{1}{\lambda^{(j-1)n}}\right|^q \\ &< m\delta^q + m\delta^q + m\delta^q \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda^{jn}}\right)^q \leq 2m\delta^q + m\delta^q \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{jn}} < 2m\delta^q + \delta^q = \delta^q(2m+1), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\|\overline{x} - z\|_{\ell_q} < \delta(2m+1)^{\frac{1}{q}} < \frac{\varepsilon}{6m}(2m+1) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego $\|x - z\|_{\ell_q} < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, de donde $z \in \mathcal{P}er(P) \cap B(x, \varepsilon)$ y concluimos que $\mathcal{P}er(P)$ es denso en X.

□

4.2. Existencia de operadores mixing en espacios separables de dimensión infinita

En esta sección veremos que existen operadores mixing para cualquier espacio de Fréchet separable de dimensión infinita. Esto fue probado por Ansari [2] y Bernal-González [11] para espacios de Banach separables de dimensión infinita y extendido por Bonet y Peris [17] a espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. Dada $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$, definiremos los *espacios con peso* $X = \ell_p(v)$ $(1 \leq p < \infty)$ y $X = c_0(v)$, y veremos que el operador de desplazamiento $B : X \to X$ es continuo si y sólo si $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$.

Además , dada $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_{>0}$, definiremos los operadores e^B y B_w y veremos que son mixing sobre X. Luego mostraremos que los operadores $I + B$ e $I + B_w$ son mixing, ya que resultarán ser quasiconjugados con los operadores ya mencionados.

Así, dado un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita, veremos que si X no es isomorfo a ω podremos construir un operador T sobre X, que será quasiconjugado a un operador mixing sobre ℓ_1. De esta manera veremos que T es un operador mixing, con la particularidad de que X contendrá un subespacio cerrado cuyos elementos serán puntos fijos del operador T, lo que será de utilidad en la sección 4.4.

Definición 4.2.1. Dada $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y $1 \leq p < \infty$, definimos los *espacios con pesos* $\ell_p(v)$ y $c_0(v)$ por

$$\ell_p(v) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tales que } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\, v_n < \infty\right\} \qquad \text{y} \qquad c_0(v) = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \text{ tales que } \lim_{n\to\infty} |x_n|\, v_n = 0\right\}.$$

Luego si consideramos $\|\cdot\|_{\ell_p(v)}$ y $\|\cdot\|_{c_0(v)}$ definidas por

$$\|x\|_{\ell_p(v)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\, v_n\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{y} \qquad \|x\|_{c_0(v)} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\, v_n$$

para todo $x \in X = \ell_p(v)$ o $c_0(v)$ respectivamente, entonces $\ell_p(v)$ y $c_0(v)$ son espacios normados separables.

Observación 4.2.2. Sea $X = c_0(v)$ o $X = \ell_p(v)$ con $1 \leq p < \infty$. Entonces $B : X \longrightarrow X$ es continuo $\Leftrightarrow S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$. Además $\|B\| \leq S^{\frac{1}{p}}$ si $X = \ell_p(v)$ y $\|B\| \leq S$ si $X = c_0(v)$.

$\Rightarrow$ Como B es continuo, existe $M > 0$ tal que $\|B(x)\|_X \leq M\,\|x\|_X$ para todo $x \in X$. Sea $n \in \mathbb{N}$, si $x = e_{n+1}$, al ser $B(e_{n+1}) = e_n$ tenemos que :

- Si $X = \ell_p(v)$, entonces $\|B(e_{n+1})\|_{\ell_p(v)} \leq M\,\|e_{n+1}\|_{\ell_p(v)}$, de donde $v_n^{\frac{1}{p}} \leq M v_{n+1}^{\frac{1}{p}}$ y por lo tanto $\frac{v_n}{v_{n+1}} \leq M^p$.
- Si $X = c_0(v)$, entonces $\|B(e_{n+1})\|_{c_0(v)} \leq M\,\|e_{n+1}\|_{c_0(v)}$ y se deduce que $\frac{v_n}{v_{n+1}} \leq M$.

Así, concluimos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$.

$\Leftarrow$ Supongamos que $S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, queremos ver que existe $M > 0$ tal que $\|B(x)\|_X \leq M\,\|x\|_X$ para todo $x \in X$. En efecto, sea $x \in X$, como $S < \infty$ tenemos que $v_n \leq S\, v_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $X = \ell_p(v)$, entonces

$$\|B(x)\|^p_{\ell_p(v)} = \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p\, v_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_{n+1}|^p\, S\, v_{n+1} \leq S \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\, v_n = S\, \|x\|^p_{\ell_p(v)},$$

es decir,

$$\|B(x)\|_{\ell_p(v)} \leq S^{\frac{1}{p}}\, \|x\|_{\ell_p(v)}.$$

- Si $X = c_0(v)$, entonces $|x_{n+1}|\, v_n \leq S\, |x_{n+1}|\, v_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y deducimos que

$$\|B(x)\|_{c_0(v)} \leq S\, \|x\|_{c_0(v)}.$$

Dada $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$, ahora que tenemos una condición sobre v para que B resulte continuo sobre $X = \ell_p(v)$ o $c_0(v)$, definiremos sobre X el operador e^B y probaremos que es mixing.

Definición 4.2.3. Sea $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, entonces por la observación anterior B es continuo sobre $X = c_0(v)$ o $X = \ell_p(v)$, con $1 \leq p < \infty$.

Además, si $r = \text{máx}\left\{S^{\frac{1}{p}}, S\right\} > 0$, tenemos que $\|B\| \leq r$, con lo cual si consideramos $f : D(0, r_0) \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, f resulta holomorfa en $\mathbb{C}$.

Luego por el Teorema A.1.24 podemos definir el operador $e^B : X \longrightarrow X$ dado por

$$e^B = f(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k.$$

Además, dado $n \in \mathbb{N}$, si consideramos $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = (f(z))^n = e^{nz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces por *ii*. del Teorema A.1.24 se tiene que

$$\left(e^B\right)^n = (f(B))^n = g(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (nB)^k.$$

Para probar que el operador e^B es mixing, utilizaremos el principio de comparación para operadores sobre espacios de Fréchet dado en la Proposición A.1.19. Previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.2.4. Sea $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $m \geq n$ y consideremos la matríz $A_{m,n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$A_{m,n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \cdots & \frac{1}{(m+n)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} & \cdots & \frac{1}{(m+n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(m-n)!} & \frac{1}{(m-n+1)!} & \cdots & \frac{1}{m!} \end{pmatrix}.$$

Entonces $\left|A_{m,n+1}\right| = \det(A_{m,n+1}) = \prod_{l=0}^{n} \frac{(n-l)!}{(m+l)!} = \frac{n!(n-1)!\ldots 1!0!}{m!(m+1)!\ldots(m+n)!}$ y por lo tanto $A_{m,n+1}$ es inversible.

Demostración. Razonamos por inducción en n.

Si $n = 1$, entonces $\left|A_{m,2}\right| = \det\begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} \end{pmatrix} = \frac{1}{m!}\frac{1}{m!} - \frac{1}{(m-1)!}\frac{1}{(m+1)!} = \frac{1}{m!(m+1)!}$.

Por otro lado, $\prod_{l=0}^{1} \frac{(1-l)!}{(m+l)!} = \frac{1!0!}{m!(m+1)!} = \frac{1}{m!(m+1)!}$, por lo tanto $\left|A_{m,2}\right| = \prod_{l=0}^{1} \frac{(1-l)!}{(m+l)!}$.

Sea $n > 1$ y supongamos que $\left|A_{m,N}\right| = \prod_{l=0}^{N-1} \frac{(N-1-l)!}{(m+l)!}$ para todo $N \leq n$, queremos ver que

$$\left|A_{m,n+1}\right| = \prod_{l=0}^{n} \frac{(n-l)!}{(m+l)!} = \frac{n!(n-1)!\ldots 1!0!}{m!(m+1)!\ldots(m+n)!}.$$

En efecto, obervemos que al ser

$$A_{m,n+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \dots & \frac{1}{(m+n)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} & \dots & \frac{1}{(m+n-1)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{(m-n)!} & \frac{1}{(m-n+1)!} & \dots & \frac{1}{m!} \end{pmatrix} = \left(a_{k,j}\right)_{1\leq k,j\leq n+1},$$

entonces tenemos que $a_{kj} = \dfrac{1}{(m-k+j)!}$ para todo $1 \leq k, j \leq n+1$. Luego si $1 \leq j \leq n$, tenemos que

$$a_{k,j+1} = \frac{1}{(m-k+j+1)!} = \frac{1}{(m-k+j+1)}\frac{1}{(m-k+j)!} = \frac{1}{(m-k+j+1)}a_{k,j} \tag{4.6}$$

para todo $1 \leq k \leq n+1, 1 \leq j \leq n$. Aprovechando la relación entre los coeficientes de las columnas de la matriz, para cada $1 \leq j \leq n$, realizaremos operaciones entre las columnas de manera tal que haya un cero en los primeros n coeficientes de la última fila de la matriz resultante y además su determinante coincida con el de $A_{m,n+1}$. Para cada $1 \leq j \leq n$, denotemos por C_j a la j-ésima columna de $A_{m,n+1}$. Realizando para cada $1 \leq j \leq n$ la operación $C_j - (m-(n+1)+j+1)\,C_{j+1}$ y ubicando el resultado de tal operación en la columna C_j, obtenemos una matriz $B = \left(b_{k,j}\right)_{1\leq k,j\leq n+1}$ de manera tal que $\left|A_{m,n+1}\right| = |B|$. Además, si $1 \leq k \leq n+1$ y $1 \leq j \leq n$, por (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned} b_{k,j} &= a_{k,j} - (m-(n+1)+j+1)\,a_{k,j+1} = \frac{1}{(m-k+j)!} - \frac{m-n+j}{(m-k+j+1)!} \\ &= \frac{m-k+j+1-(m-n+j)}{(m-k+j+1)!} = \frac{n+1-k}{(m-k+j+1)!} = (n+1-k)a_{k,j+1} \end{aligned}$$

para todo $1 \leq k \leq n+1, 1 \leq j \leq n$. Así,tenemos que

$$b_{k,j} = \begin{cases} (n+1-k)a_{k,j+1} & \text{si } 1 \leq k \leq n+1, 1 \leq j \leq n \\ a_{k,n+1} & \text{si } 1 \leq k \leq n+1,\ j = n+1 \end{cases}$$

y en particular, $b_{n+1,j} = 0$ para todo $1 \leq j \leq n$. Luego, si desarrollamos el determinante de la matriz B por la fila $n+1$, tenemos que

$$\left|A_{m,n+1}\right| = |B| = a_{n+1,n+1}\left|\left(b_{k,j}\right)_{1\leq k,j\leq n}\right| = a_{n+1,n+1}\left|\left((n+1-k)a_{k,j+1}\right)_{1\leq k,j\leq n}\right|.$$

Ahora bien, observemos que

$$a_{n+1,n+1} = \frac{1}{m!} \qquad \text{y} \qquad A_{m+1,n} = \left((n+1-k)a_{k,j+1}\right)_{1\leq k,j\leq n},$$

por lo tanto, como $n+1-k$ aparece en todos los coeficientes de la fila k para todo $1 \leq k \leq n$, por propiedad del determinante se deduce que

$$\left|A_{m,n+1}\right| = a_{n+1,n+1}\left|\left((n+1-k)a_{k,j+1}\right)_{1\leq k,j\leq n}\right| = \frac{1}{m!}\prod_{l=1}^{n}(n+1-l)\left|A_{m+1,n}\right|.$$

Observemos que $\dfrac{1}{m!}\displaystyle\prod_{l=1}^{n}(n+1-l) = \dfrac{1}{m!}n(n-1)\dots 1 = \dfrac{n!}{m!}$, entonces como por hipótesis inductiva tenemos que $\left|A_{m+1,n}\right| = \displaystyle\prod_{l=0}^{n-1}\dfrac{(n-1-l)!}{(m+1+l)!}$, resulta que

$$\left|A_{m,n+1}\right| = \frac{1}{m!}\prod_{l=1}^{n}(n+1-l)\left|A_{m+1,n}\right| = \frac{n!}{m!}\prod_{l=0}^{n-1}\frac{(n-1-l)!}{(m+1+l)!} = \frac{n!(n-1)!\dots 1!0!}{m!(m+1)!\dots(m+n)!}.$$

□

Teorema 4.2.5. Sean $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y $X = c_0(v)$ o $\ell_p(v)$ con $1 \leq p < \infty$. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, entonces el operador $T = e^B$ es mixing en X.

Demostración. Como primer observación veremos que por la Proposición A.1.19, basta probar el teorema para el caso en que $X = \ell_1(v)$. En efecto, si consideramos $c_{00} = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots), N \in \mathbb{N}\}$, como c_{00} es denso en $c_0(v)$ tenemos que $\ell_1(v)$ es denso en $c_0(v)$. Además, si consideramos $v^p = (v_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$, entonces $c_{00} \subset \ell_1(v) \subset \ell_p(v^p)$ y deducimos que $\ell_1(v)$ es denso en $\ell_p(v^p)$. Por otro lado, si $i_{c_0(v)} : \ell_1(v) \hookrightarrow c_0(v)$ e $i_{\ell_p(v^p)} : \ell_1(v) \hookrightarrow \ell_p(v^p)$ son las inclusiones de $\ell_1(v)$ en $c_0(v)$ y $\ell_1(v)$ en $\ell_p(v^p)$ respectivamente, ambas resultan continuas (se deduce análogamente a cuando se prueba que las inclusiones $i_{c_0} : \ell_p \hookrightarrow c_0$ e $i_{\ell_1} : \ell_p \hookrightarrow \ell_1$ son continuas), por lo tanto, si consideramos $Y = \ell_1(v)$ y vemos que $(e^B)_{|Y} : Y \longrightarrow Y$ es mixing, entonces por la Proposición A.1.19 tendremos que $e^B : \ell_p(v^p) \longrightarrow \ell_p(v^p)$ y $e^B : c_0(v) \longrightarrow c_0(v)$ son mixing. Así, como $\ell_p(v) = \ell_p(w^p)$ con $w = (v_n^{\frac{1}{p}})_{n\in\mathbb{N}}$, tendríamos que $e^B : \ell_p(v) \longrightarrow \ell_p(v)$ y $e^B : c_0(v) \longrightarrow c_0(v)$ son mixing. Consideremos entonces $X = \ell_1(v)$ y veamos que $e^B : \ell_1(v) \longrightarrow \ell_1(v)$ es mixing.

En efecto, fijemos $\varepsilon > 0, x, y \in c_{00}$ y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_k = y_k = 0$ para todo $k > m$, entonces por el Lema 4.2.4 sabemos que la matriz

$$A_{m,m} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)!} \\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{m!} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

es inversible. Sea $T_{A_{m,m}} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1)$ definida por

$$T_{A_{m,m}}(w_1, \ldots, w_m) = A_{m,m}(w_1, \ldots, w_m)^t$$

para todo $(w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{K}^m$, entonces $T_{A_{m,m}}$ es un operador con inversa $T^{-1}_{A_{n,m}} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ dada por $T^{-1}_{A_{m,m}} = T_{A^{-1}_{m,m}}$. Sea $C = \left\|T_{A^{-1}_{m,m}}\right\| \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|\right)$ y sea $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de forma tal que

$$\sum_{k=m+1}^{2m} N^{m-k} v_k < \frac{\varepsilon}{eC} \tag{4.7}$$

Sea $n \geq N$, veremos que existen $z \in \ell_1(v)$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\|x - z\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon$ y $\left\|y - (e^B)^n(z)\right\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon$.

Mas aún, veremos que existe $z \in c_{00}$ que satisface esto, con $z_k = \begin{cases} x_k & \text{si } 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{si } k \geq 2m+1 \end{cases}$ y $\left((e^B)^n(z)\right)_k = y_k$ si $1 \leq k \leq m$.

En efecto, por definición, dado $1 \leq k \leq m$ tenemos que

$$\left((e^B)^n(z)\right)_k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l}{l!} \left(B^l(z)\right)_k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{n^l}{l!} z_{l+k} = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j.$$

Luego como $z_j = 0$ para todo $j \geq 2m+1$, tenemos que

$$\left((e^B)^n(z)\right)_k = \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j = y_k.$$

Por lo tanto, debemos tomar $z = (x_1, \ldots, x_m, z_{m+1}, \ldots, z_{2m}, 0, 0, \ldots)$, con $z_{m+1}, \ldots, z_{2m} \in \mathbb{K}$ tales que $y_k = \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j$

para todo $1 \le k \le m$. Consideremos las matrices A y V dadas por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{1!} & \cdots & \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \cdots & \frac{1}{(m+n-1)!} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m} \qquad \text{y} \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{n^m}{m!} & \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} & \cdots & \frac{n^{2m-1}}{(2m-1)!} \\ \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{n^m}{m!} & \cdots & \frac{n^{2m-2}}{(2m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n}{1!} & \frac{n^2}{2!} & \cdots & \frac{n^m}{m!} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

entonces

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r=0}^{m-1} \frac{n^r}{r!} x_{1+r} \\ \sum_{r=0}^{m-2} \frac{n^r}{r!} x_{2+r} \\ \vdots \\ \sum_{r=0}^{1} \frac{n^r}{r!} x_{m-1+r} \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad V\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r=m}^{2m-1} \frac{n^r}{r!} z_{1+r} \\ \sum_{r=m-1}^{2m-2} \frac{n^r}{r!} z_{2+r} \\ \vdots \\ \sum_{r=2}^{m+1} \frac{n^r}{r!} z_{m-1+r} \\ \sum_{r=1}^{m} \frac{n^r}{r!} z_{m+r} \end{pmatrix}.$$

Consideremos el sistema

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

entonces

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_k = \sum_{r=0}^{m-k} \frac{n^r}{r!} x_{k+r} + \sum_{r=m+1-k}^{2m-k} \frac{n^r}{r!} z_{k+r}$$

para todo $1 \le k \le m$. Al ser $x_j = z_j$ para todo $1 \le j \le m$, tenemos que

$$y_k = \sum_{r=0}^{m-k} \frac{n^r}{r!} x_{k+r} + \sum_{r=m+1-k}^{2m-k} \frac{n^r}{r!} z_{k+r} = \sum_{j=k}^{m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} x_j + \sum_{j=m+1}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j = \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j.$$

Luego, tenemos que

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} + V\begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_k = \sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j \Leftrightarrow \left(\left(e^B\right)^n (z)\right)_k = y_k$$

para todo $1 \le k \le m$. Así, $\left(\left(e^B\right)^n (z)\right)_k = y_k$ para todo $1 \le k \le m \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_{m+1} \\ \vdots \\ z_{2m} \end{pmatrix}$ es solución de (4.8).

Sean $D_1 = \begin{pmatrix} n^{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^{m-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ y $D_2 = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, entonces D_1 y D_2 son inversibles con

$$D_1^{-1}=\begin{pmatrix} n^{-m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n^{-m+2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D_2^{-1}=\begin{pmatrix} n^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n^{-2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^{-m}\end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$A_{m,m}D_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{m!} & \frac{1}{(m+1)!} & \cdots & \frac{1}{(2m-1)!}\\ \frac{1}{(m-1)!} & \frac{1}{m!} & \cdots & \frac{1}{(2m-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{1}{1!} & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{m!}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^m\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{n}{m!} & \frac{n^2}{(m+1)!} & \cdots & \frac{n^m}{(2m-1)!}\\ \frac{n}{(m-1)!} & \frac{n^2}{m!} & \cdots & \frac{n^m}{(2m-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{n}{1!} & \frac{n^2}{2!} & \cdots & \frac{n^m}{m!}\end{pmatrix},$$

entonces

$$D_1A_{m,m}D_2=\begin{pmatrix} n^{m-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n^{m-2} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{n}{m!} & \frac{n^2}{(m+1)!} & \cdots & \frac{n^m}{(2m-1)!}\\ \frac{n}{(m-1)!} & \frac{n^2}{m!} & \cdots & \frac{n^m}{(2m-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{n}{1!} & \frac{n^2}{2!} & \cdots & \frac{n^m}{m!}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \frac{n^m}{m!} & \frac{n^{m+1}}{(m+1)!} & \cdots & \frac{n^{2m-1}}{(2m-1)!}\\ \frac{n^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{n^m}{m!} & \cdots & \frac{n^{2m-2}}{(2m-2)!}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{n}{1!} & \frac{n^2}{2!} & \cdots & \frac{n^m}{m!}\end{pmatrix}=V,$$

es decir, $D_1A_{m,m}D_2 = V$ y por lo tanto V es inversible. Entonces, la solución de (4.8) está dada por

$$\begin{pmatrix} z_{m+1}\\ \vdots\\ z_{2m}\end{pmatrix}=V^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\right)=D_2^{-1}A_{m,m}^{-1}D_1^{-1}\left(\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\right),$$

por lo tanto podemos elegir $z_{m+1},\dots,z_{2m}\in\mathbb{K}$ tales que $\left((e^B)^n(z)\right)_k = y_k$ para todo $1\le k\le m$.

Consideremos $T_{D_1} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$ y $T_{D_2} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty)$. Entonces tenemos que $T_{D_1}^{-1} = T_{D_1^{-1}} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1)$ y $T_{D_2}^{-1} = T_{D_2^{-1}} : (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_1)$ y además

$$\begin{pmatrix} z_{m+1}\\ \vdots\\ z_{2m}\end{pmatrix}=T_{D_2^{-1}}\circ T_{A_{m,m}^{-1}}\circ T_{D_1^{-1}}\left(\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}-A\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_m\end{pmatrix}\right).$$

Sea $1 \leq i \leq m$, si escribimos

$$(w_1, \ldots, w_m)^t = T_{A^{-1}_{m,m}} \left(T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t - A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) \right),$$

entonces $|z_{m+i}| = \left| \left(T_{D_2^{-1}} \left((w_1, \ldots, w_m)^t \right) \right)_i \right|$. Ahora bien, como

$$T_{D_2^{-1}} \left((w_1, \ldots, w_m)^t \right) = \begin{pmatrix} n^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^{-2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & n^{-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{-1} w_1 \\ \vdots \\ n^{-m} w_m \end{pmatrix},$$

entonces $\left| \left(T_{D_2^{-1}} \left((w_1, \ldots, w_m)^t \right) \right)_i \right| = n^{-i} w_i \leq n^{-i} \left\| (w_1, \ldots, w_m)^t \right\|_\infty$ y se deduce que

$$|z_{m+i}| \leq n^{-i} \left\| (w_1, \ldots, w_m)^t \right\|_\infty . \tag{4.9}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned} \left\| (w_1, \ldots, w_m)^t \right\|_\infty &= \left\| T_{A^{-1}_{m,m}} \left(T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t - A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) \right) \right\|_\infty \\ &\leq \left\| T_{A^{-1}_{m,m}} \right\| \left\| T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t - A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) \right\|_1 . \end{aligned}$$

Veamos que $\left\| T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t - A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|$. Observemos que

$$T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t \right) = D_1^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{-m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^{-m+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n^{-m+1} y_1 \\ n^{-m+1} y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix},$$

entonces $\left\| T_{D_1^{-1}} \left((y_1, \ldots, y_m)^t \right) \right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{m} |y_k|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} T_{D_1^{-1}} \left(A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) &= D_1^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x_k, \sum_{k=2}^{m} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} x_k, \ldots, 1 \right)^t \\ &= \begin{pmatrix} n^{-m+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n^{-m+2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x_k, \sum_{k=2}^{m} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} x_k, \ldots, 1 \right)^t, \end{aligned}$$

entonces

$$T_{D_1^{-1}} \left(A(x_1, \ldots, x_m)^t \right) = \begin{pmatrix} n^{-m+1} \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} x_k \\ n^{-m+2} \sum_{k=2}^{m} \frac{n^{k-2}}{(k-2)!} x_k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} \frac{n^{k-m}}{(k-1)!} x_k \\ \sum_{k=2}^{m} \frac{n^{k-m}}{(k-2)!} x_k \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Luego, como $\left|T_{D_1^{-1}}\left(A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right|_j = \left|\sum_{k=j}^{m} \frac{n^{k-m}}{(k-1)!} x_k\right| \leq \sum_{k=j}^{m} |x_k| \leq \sum_{k=1}^{m} |x_k|$ para todo $1 \leq j \leq m$, entonces

$$\left\|T_{D_1^{-1}}\left(A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right\|_1 = \sum_{j=1}^{m} \left|\left(T_{D_1^{-1}}\left(A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right)_j\right| \leq m \sum_{k=1}^{m} |x_k|.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left\|T_{D_1^{-1}}\left((y_1,\ldots,y_m)^t - A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right\|_1 &\leq \left\|T_{D_1^{-1}}\left((y_1,\ldots,y_m)^t\right)\right\|_1 + \left\|T_{D_1^{-1}}\left(A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right\|_1 \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|,\end{aligned}$$

es decir,

$$\left\|T_{D_1^{-1}}\left((y_1,\ldots,y_m)^t - A(x_1,\ldots,x_m)^t\right)\right\|_1 \leq \sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|. \tag{4.10}$$

Así, como $C = \left\|T_{A_{m,m}^{-1}}\right\| \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|\right)$, por (4.10) tenemos que

$$\left\|(w_1,\ldots,w_m)^t\right\|_\infty \leq \left\|T_{A_{m,m}^{-1}}\right\| \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k| + m \sum_{k=1}^{m} |x_k|\right) = C.$$

Por lo tanto por (4.9) tenemos que $|z_{m+i}| \leq n^{-i} \left\|(w_1,\ldots,w_m)^t\right\|_\infty \leq n^{-i} C$ para todo $1 \leq i \leq m$, o equivalentemente,

$$|z_i| \leq n^{m-i} C \tag{4.11}$$

para todo $m+1 \leq i \leq 2m$. Por un lado, por construcción tenemos que $|x_k - z_k| = \begin{cases} |z_k| & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, entonces como $n \leq N$, de (4.7) y (4.11) se deduce que

$$\|x - z\|_{\ell_1(v)} = \sum_{k=m+1}^{2m} |z_k|\, v_k \leq C \sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} v_k \leq C \sum_{k=m+1}^{2m} N^{m-k} v_k < \frac{\varepsilon}{e} < \varepsilon.$$

Por otro lado, como por construcción tenemos que

$$\left|y_k - ((e^B)^n(z))_k\right| = \begin{cases} \left|((e^B)^n(z))_k\right| & \text{si } m+1 \leq k \leq 2m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

entonces por (4.11) se tiene que

$$\left\|y - (e^B)^n(z)\right\|_{\ell_1(v)} = \sum_{k=m+1}^{2m} \left(\left|\sum_{j=k}^{2m} \frac{n^{j-k}}{(j-k)!} z_j\right|\right) v_k \leq C \sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} \left(\sum_{j=k}^{2m} \frac{1}{(j-k)!}\right) v_k < eC \sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} v_k.$$

Luego, por (4.7) tenemos que

$$\left\|y - (e^B)^n(z)\right\|_{\ell_1(v)} < eC \sum_{k=m+1}^{2m} n^{m-k} v_k \leq eC \sum_{k=m+1}^{2m} N^{m-k} v_k < \varepsilon.$$

Entonces, dados $\varepsilon > 0$, $x, y \in c_{00}$, probamos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, existe $z \in \ell_1(v)$ tal que

$$\|x - z\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad \left\|y - (e^B)^n(z)\right\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon.$$

Veamos que esto implica que e^B es mixing. En efecto, sean $U, V \subset \ell_1(v)$ abiertos no vacíos, entonces como $c_{00} \subset \ell_1(v)$ es denso existen $\varepsilon > 0$, $x, y \in c_{00}$ tales que $x \in B(x,\varepsilon) \subset U$ e $y \in B(y,\varepsilon) \subset V$. Luego, para cada $n \geq N$ podemos tomar $z^n \in \ell_1(v)$ tal que $\|x - z^n\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon$ y $\left\|y - (e^B)^n(z^n)\right\|_{\ell_1(v)} < \varepsilon$, es decir, $z^n \in B(x,\varepsilon) \subset U$ tal que $(e^B)^n(z^n) \in B(y,\varepsilon) \subset V$.

Así, para cada $n \geq N$ se tiene que $(e^B)^n(z^n) \in (e^B)^n(U) \cap V$, por lo tanto $(e^B)^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$ y concluimos que e^B es mixing.

$\square$

Como primer aplicación veremos que si $X = c_0(v)$ o $X = \ell_p(v)$ con $1 \leq p < \infty$, el operador $I + B$ es mixing.

Teorema 4.2.6. Sea $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y $X = \ell_p(v)$ $(1 \leq p < \infty)$ o $X = c_0(v)$. Si $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, entonces la perturbación de la identidad dada por $T = I + B$ es mixing.

Demostración. Observemos que análogamente al teorema anterior, basta probar el teorema para $X = \ell_1(v)$. Veremos que existe $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y un operador $\phi : \ell_1(w) \longrightarrow \ell_1(v)$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell_1(w) & \xrightarrow{e^B} & \ell_1(w) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \ell_1(v) & \xrightarrow[I+B]{} & \ell_1(v) \end{array}$$

conmuta. Además veremos que ϕ tiene rango denso y e^B e $I + B$ serán quasiconjugados vía ϕ, por lo tanto, por el teorema anterior, $I + B$ resultaría mixing. Lo que haremos es considerar una matriz triangular inferior infinita $A = (a_{n,k})_{n\in\mathbb{N},k\leq n}$, en principio con $a_{n,n} \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y veremos cómo definir la sucesión $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ y el operador ϕ mediante los coeficientes de la matriz de manera tal que $\phi \circ e^B = (I + B) \circ \phi$.

Entonces definiremos primero $\phi : \ell_1(w) \longrightarrow \ell_1(v)$ en la base canónica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell_1(w)$ y luego extenderemos la definición a $\ell_1(w)$ por linealidad. Consideremos ϕ definida por

$$\phi(e_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} e_k$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, queremos elegir A de manera tal que $\left(\phi \circ e^B\right)(e_n) = ((I + B) \circ \phi)(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, por un lado tenemos que

$$\left(\phi \circ e^B\right)(e_n) = \phi\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k(e_n)\right).$$

Ahora bien, dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $B^k\left((x_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = (x_{k+j})_{j\in\mathbb{N}}$ para toda $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1(v)$, entonces

$$B^k(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq n \\ e_{n-k} & \text{si } k < n \end{cases}.$$

Luego tenemos que

$$\left(\phi \circ e^B\right)(e_n) = \phi\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} B^k(e_n)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \phi(e_{n-k}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \phi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(n-j)!} \left(\sum_{k=1}^{j} a_{j,k} e_k\right),$$

y entonces

$$\left(\phi \circ e^B\right)(e_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\, a_{j,k}\right) e_k.$$

Por otro lado, como $B(e_1) = 0$ y $B(e_k) = e_{k-1}$ para todo $k \geq 2$, entonces

$$\begin{aligned} ((I + B) \circ \phi)(e_n) &= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(I + B)(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} e_k + \sum_{k=2}^{n} a_{n,k} e_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} e_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k+1} e_k = a_{n,n} e_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,k} + a_{n,k+1}) e_k. \end{aligned}$$

Así, dado $n \geq 2$ tenemos que

$$\left(\phi \circ e^B\right)(e_n) = ((I + B) \circ \phi)(e_n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=k}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\, a_{j,k}\right) e_k = a_{n,n} e_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{n,k} + a_{n,k+1}) e_k.$$

Igualando los coeficientes que multiplican a cada e_k, tenemos que :

• Si $k = n$, entonces $a_{n,n}e_n = a_{n,n}e_n$.
• Si $k = n-1$, entonces

$$a_{n-1,n-1} + a_{n,n-1} = a_{n,n-1} + a_{n,n},$$

de donde se deduce que $a_{n,n} = a_{n-1,n-1}$.
• Si $n \geq 3$ y $1 \leq k \leq n-2$, entonces

$$a_{n,k} + a_{n,k+1} = \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\, a_{j,k} = a_{n,k} + \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!}\, a_{j,k},$$

es decir,

$$a_{n,k+1} = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{1}{(n-j)!}\, a_{j,k}.$$

Por lo tanto si tenemos definidos $a_{j,l}$ con $j \leq n-q$ y $l \leq k$, podemos definir $a_{n,k+1}$ para todo $n \geq 3$, $1 \leq k \leq n-2$. Observemos que no tenemos restricciones sobre $a_{n,1}$ y la única restricción para $a_{n,n}$ es que sea no nulo, por lo tanto podemos tomar $a_{n,1} = 0$ y $a_{n,n} = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notemos que entonces $a_{n,k} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$.

Vamos ahora a establecer condiciones necesarias sobre w para que $\phi : \ell_1(w) \longrightarrow \ell_1(v)$ sea un operador bien definido tal que $(I+B)\circ\phi = \phi\circ e^B$. Como $c_{00} = \{(b_1,\ldots,b_N,0,0,0,\ldots), N \in \mathbb{N}\} \subset \ell_1(w)$ es denso, basta definir ϕ en c_{00}.

Sea $x = \sum_{j=1}^{N} b_j e_j \in c_{00}$, queremos hallar $C > 0$ y w tal que $\|\phi(x)\|_{\ell_1(w)} \leq C\,\|x\|_{\ell_1(v)}$. Entonces, como

$$\begin{aligned}\left\|\phi\left(\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\right)\right\|_{\ell_1(v)} &= \left\|\sum_{j=1}^{N} b_j \phi(e_j)\right\|_{\ell_1(v)} = \left\|\sum_{j=1}^{N} b_j \sum_{k=1}^{j} a_{j,k} e_k\right\|_{\ell_1(v)} \\ &= \left\|\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=k}^{N} b_j a_{j,k}\right) e_k\right\|_{\ell_1(v)} = \sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{j=k}^{N} b_j a_{j,k}\right| v_k.\end{aligned}$$

Ahora bien, sabemos que $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, entonces $v_n \leq S\, v_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y dado $1 \leq j \leq N$ se tiene que

$$v_k \leq S^{\,j-k} v_j \tag{4.12}$$

para todo $1 \leq k \leq j$. Luego como $a_{n,k} \geq 0$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\phi\left(\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\right)\right\|_{\ell_1(v)} &= \sum_{k=1}^{N}\left|\sum_{j=k}^{N} b_j a_{j,k}\right| v_k \leq \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=k}^{N} \left|b_j\right| a_{j,k} v_k \\ &= \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{j} \left|b_j\right| a_{j,k} v_k = \sum_{j=1}^{N} \left|b_j\right| \sum_{k=1}^{j} a_{j,k} v_k \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \left|b_j\right| \sum_{k=1}^{j} a_{j,k} S^{\,j-k} v_j \leq \sum_{j=1}^{N} \left|b_j\right| \max_{1\leq k\leq j}\left\{S^{\,j-k}\right\} \sum_{k=1}^{j} a_{j,k} v_j.\end{aligned}$$

Sea $\alpha = 1$ si $S < 1$ o $\alpha = S^{-1}$ si $S \geq 1$ y definamos $w_j = \alpha^j \sum_{k=1}^{j} a_{j,k} v_j$, entonces

$$\left\|\phi\left(\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\right)\right\|_{\ell_1(v)} \leq \sum_{k=1}^{N} \left|b_j\right| w_j.$$

Por lo tanto, $\|\phi(x)\|_{\ell_1(v)} = \left\|\phi\left(\sum_{j=1}^{N} b_j e_j\right)\right\|_{\ell_1(v)} \leq \sum_{k=1}^{N} \left|b_j\right| w_j = \|x\|_{\ell_1(w)}$ y luego $\phi : \ell_1(v) \longrightarrow \ell_1(w)$ es un operador bien definido tal que $(I+B)\circ\phi = \phi\circ e^B$.

Veamos que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{w_n}{w_{n+1}} < \infty$. Dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{\alpha^n v_n}{\alpha^{n+1} v_{n+1}} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k}}{\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}} \leq \frac{S}{\alpha} \frac{a_{n,1} + a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}}{a_{n+1,1} + a_{n+1,2} + \ldots + a_{n+1,n+1}}.$$

Recordemos que dado $n \geq 2$, tenemos que $a_{n,1} = 0, a_{n+1,k+1} = \sum\limits_{j=k}^{n} \dfrac{1}{(n+j-k)!} a_{j,k} \geq a_{n,k}$ para todo $1 \leq k \leq n-1$ y $a_{n,n} = 1$, con lo cual

$$\frac{w_n}{w_{n+1}} \leq \frac{S}{\alpha} \frac{a_{n,1} + a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}}{a_{n+1,1} + a_{n+1,2} + \ldots + a_{n+1,n+1}} \leq \frac{S}{\alpha} \frac{a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}}{a_{n,2} + \ldots + a_{n,n}} = \frac{S}{\alpha},$$

es decir, $\dfrac{w_n}{w_{n+1}} \leq \dfrac{S}{\alpha}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{w_n}{w_{n+1}} \leq \dfrac{S}{\alpha} < \infty$. Luego por el teorema anterior, $e^B : \ell_1(v) \longrightarrow \ell_1(w)$ es mixing.

Para terminar, sólo resta ver que ϕ tiene rango denso. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, $\phi(e_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{n,k} e_k$ para todo $1 \leq j \leq n$, entonces como $a_{k,k} = 1$ para todo $k \geq 1$, tenemos que $e_n \in \phi(\langle e_1, \ldots, e_n \rangle) \subset R(\phi)$.

Luego $c_{00} \subset R(\phi) \subset \ell_1(v)$, por lo tanto como c_{00} es denso en $\ell_1(v)$ concluimos que ϕ tiene rango denso en $\ell_1(v)$.

□

Veamos como se traducen los resultados anteriores a operadores de desplazamiento con peso sobre ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o c_0.

Proposición 4.2.7. Sea $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares no nulos y consideremos $B_w : X \longrightarrow X$ definido por

$$B_w((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (w_{n+1} x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, donde $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$. Entonces son equivalentes :

i. B_w es un operador bien definido sobre X.

ii. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n < \infty$.

Además, en tal caso, $\|B_w\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *ii.* Si B_w es un operador, entonces existe $M > 0$ tal que $\|B_w(x)\|_X \leq M\|x\|_X$ para todo $x \in X$. En particular si $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\|B_w(e_n)\|_X \leq M\|e_n\|_X$. Luego como $B_w(e_1) = 0$ y $B_w(e_n) = w_n e_{n-1}$ para todo $n \geq 2$, tenemos que $w_n \leq M$ para todo $n \geq 2$ y se deduce que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n \leq \text{máx}\{w_1, M\} < \infty$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Supongamos que $S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n < \infty$. Sea $x \in X$, veamos que existe $M > 0$ tal que $\|B_w(x)\|_X \leq M\|x\|_X$.

• Si $X = \ell_p$, entonces $\|B_w(x)\|_{\ell_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_{n+1} w_{n+1}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq S \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = S\|x\|_{\ell_p}$.

• Si $X = c_0$, entonces $\|B_w(x)\|_{c_0} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |w_{n+1} x_{n+1}| \leq S \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = S\|x\|_{c_0}$.

Luego, al ser $w_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $S > 0$, con lo cual tomando $M = S$ resulta que $\|B_w(x)\|_X \leq M\|x\|_X$. Por lo tanto B_w resulta un operador bien definido tal $\|B_w\| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$.

□

Teorema 4.2.8. Sea $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$, y sea $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares no nulos tal que $S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < \infty$. Entonces los operadores $I + B_w$ y e^{B_w} son mixing sobre X.

Demostración. La idea es ver que en cada caso existe $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que los operadores $I + B_w$ y e^{B_w} son quasiconjugados a $I + B : Y \longrightarrow Y$ y $e^B : Y \longrightarrow Y$ respectivamente, con $Y = \ell_p(v)$ o $Y = c_0(v)$.

• Si $X = \ell_p$, para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $u_n = \left(\prod_{k=1}^{n} w_k\right)^{-1}$ y $v_n = |u_n|^p$, entonces

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right|^p = |w_{n+1}|^p \leq S^p$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq S^p < \infty$. Consideremos $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$, entonces por los Teoremas 4.2.5 y 4.2.6 tenemos que e^B e $I + B$ son mixing sobre $\ell_p(v)$. Sea $\phi : \ell_p(v) \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$\phi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, veamos que ϕ está bien definido y que los operadores $I+B_w : \ell_p(v) \longrightarrow \ell_p(v)$ y $e^{B_w} : \ell_p(v) \longrightarrow \ell_p(v)$ son quasiconjugados a $I + B$ y B respectivamente vía ϕ.

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(v)$, entonces $\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\, v_n\right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_{\ell_p(v)} < \infty$, de donde se deduce que $\phi(x) \in \ell_p$ y por lo tanto ϕ está bien definido. Además, ϕ es una isometría y en particular resulta un operador. Por otro lado, como $c_{00} \subset R(\phi)$, ϕ tiene rango denso.

Veamos que $\phi \circ B = B_w \circ \phi$. En efecto, dado $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(v)$, por un lado tenemos que

$$(\phi \circ B)(x) = \phi\left((x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_{n+1} u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Por otro lado, como $u_n = u_{n+1} w_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$(B_w \circ \phi)(x) = B_w\left((x_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (w_{n+1} x_{n+1} u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = (x_{n+1} u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Luego $\phi \circ B = B_w \circ \phi$. Ahora si, veamos que $\phi \circ e^B = e^{B_w} \circ \phi$ y $\phi \circ (I + B) = (I + B_w) \circ \phi$.

Por un lado, como $\phi \circ B = B_w \circ \phi$, tenemos que $\phi \circ B^k = B_w^k \circ \phi$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y entonces

$$\phi \circ e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \phi \circ B^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B_w^k \circ \phi = e^{B_w} \circ \phi.$$

Por otro lado,

$$\phi \circ (I + B) = \phi + \phi \circ B = \phi + B_w \circ \phi = (I + B_w) \circ \phi.$$

Luego e^{B_w} e $I + B_w$ son quasiconjugaciones de e^B e $I + B$ respectivamente vía ϕ, con lo cual e^{B_w} e $I + B_w$ resultan mixing.

• Si $X = c_0$, consideramos $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ definida por $v_n = |u_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\frac{v_n}{v_{n+1}} = \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = |w_{n+1}| \leq S$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} \leq S < \infty$. Análogamente, si consideramos $B : c_0(v) \longrightarrow c_0(v)$ y $\phi : c_0(v) \longrightarrow c_0$ definidos como en el caso de $X = \ell_p$, entonces como $\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{v_n}{v_{n+1}} < \infty$, tenemos que B es un operador y los operadores e^B e $I + B$ son mixing. Además, si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0(v)$, tenemos que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n u_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|\, v_n = \|x\|_{c_0(v)} < \infty$, entonces $\phi(x) \in c_0$ y ϕ está bien definido.

Así, procediendo de manera análoga al caso anterior, tenemos que ϕ es continuo y los operadores e^{B_w} e $I + B_w$ son quasiconjugados a e^B e $I + B$ respectivamente vía ϕ. Luego, e^{B_w} e $I + B_w$ son mixing.

□

A continuación, veremos una variante del teorema anterior que utilizaremos al final de esta sección.

Proposición 4.2.9. Sean $X = c_0$ o $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ y $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de pesos tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < \infty$. Si definimos $D_w : X \longrightarrow X$ por

$$D_w\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (w_{2n}x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$$

para todo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, entonces el operador $I + D_w$ es mixing.

Demostración. Utilizando el mismo argumento de los teoremas anteriores, basta probar el teorema para $X = \ell_1$. Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces existen $k \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ impar tales que $n = m2^{k-1}$, veamos que

$$D_w(e_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1 \\ w_{m2^{k-1}} e_{m2^{k-2}} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}.$$

• Si $k = 1$, tenemos que $n = m$ es impar, entonces dado $j \in \mathbb{N}$ tenemos que $n \neq 2j$ y la j-ésima coordenada de $D_w(e_n)$ es $(D_w(e_n))_j = w_{2j}\,(e_n)_{2j} = 0$. Luego $(D_w(e_n))_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $D_w(e_n) = 0$.

• Si $k \geq 2$, entonces $n = m2^{k-1}$ es par, luego dado $j \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$(D_w(e_n))_j = w_{2j}\,(e_{m2^{k-1}})_{2j} = \begin{cases} w_{2j} & \text{si } 2j = m2^{k-1} \\ 0 & \text{si } 2j \neq m2^{k-1} \end{cases}.$$

Entonces $(D_w(e_n))_j = \begin{cases} w_{2j} & \text{si } j = m2^{k-2} \\ 0 & \text{si } j \neq m2^{k-2} \end{cases}$ y se deduce que $D_w(e_n) = w_{m2^{k-1}} e_{m2^{k-2}}$.

Consideremos para cada m impar, $w^{(m)} = (w_{m2^{k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$ y $\phi : \left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1} \longrightarrow \ell_1$ dada por

$$\phi\left((x_k^{(m)})_{m\, impar, k\in\mathbb{N}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

con $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n = x_k^{(m)}$ si $n = m2^{k-1}$, m impar. Veamos que ϕ es un isomorfismo isométrico.

• Buena definición : Sea $\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar} \in \left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1}$, queremos ver que $\phi\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right) \in \ell_1$.

Por definición tenemos que $x^{(m)} \in \ell_1$ para todo m impar, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(\phi\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right)\right)_k\right| = \sum_{m\, impar} \sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(m)}\right| = \sum_{m\, impar} \|x^{(m)}\|_{\ell_1} = \left\|\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right\|_{\left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1}}.$$

Luego $\left\|\phi\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right\|_{\ell_1} = \left\|\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right\|_{\left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1}}$, por lo tanto ϕ está bien definida y es isometría, con lo cual resulta inyectiva.

• ϕ es sobreyectiva : Sea $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribamos $n = m2^{k-1}$ con m impar, $k \in \mathbb{N}$. Dado m impar, definimos $\left(x_k^{(m)}\right)_{k\in\mathbb{N}} = (y_{m2^{k-1}})_{k\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|x_k^{(m)}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_{m2^{k-1}}| \leq \|y\|_{\ell_1} < \infty,$$

es decir, $x^{(m)} \in \ell_1$. Así, $\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar} \in \left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1}$ y $\phi\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar}\right) = y$, por lo tanto ϕ es isomorfismo isométrico.

Observemos que dado m impar,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left|w_k^{(m)}\right| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_{m2^{k-1}}| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |w_k| < \infty,$$

entonces por el Teorema 4.2.8 tenemos que $I + B_{w^{(m)}}$ es mixing.

Además, $\sup_{m\, impar} \|I + B_{w^{(m)}}\|_{\ell_1} \leq 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < \infty$. Entonces $\bigoplus_{m\, impar} B_{w^{(m)}} : \left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1} \longrightarrow \left(\bigoplus_{m\, impar} \ell_1\right)_{\ell_1}$ definido por

$$\left(\bigoplus_{m\, impar} B_{w^{(m)}}\right)\left(x^{(m)}\right)_{m\, impar} = \left(B_{w^{(m)}}\left(x^{(m)}\right)\right)_{m\, impar}$$

para toda $\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar} \in \left(\bigoplus_{m\,impar} \ell_1\right)_{\ell_1}$, es un operador. Por otro lado, como $I + B_{w^{(m)}}$ es mixing para todo m impar y $\sup_{m\,impar} \|I + B_{w^{(m)}}\|_{\ell_1} < \infty$, por la Proposición 2.3.3 el operador $I + \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}} = \bigoplus_{m\,impar} I + B_{w^{(m)}}$ es mixing.

Veamos que $\phi \circ \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}} = D_w \circ \phi$. Sea $\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar} \in \left(\bigoplus_{m\,impar} \ell_1\right)_{\ell_1}$, por un lado, como

$$\left(\bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}\right)\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar}\right) = \left(B_{w^{(m)}}\left(x^{(m)}\right)\right)_{m\,impar} = \left(w_{m2^k} x^{(m)}_{k+1}\right)_{m\,impar, k\in\mathbb{N}},$$

entonces

$$\left(\phi \circ \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}\right)\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar}\right) = \phi\left(\left(w_{m2^k} x^{(m)}_{k+1}\right)_{m\,impar, k\in\mathbb{N}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

con $y_n = w_{m2^k} x^{(m)}_{k+1}$ si $n = m2^{k-1}$, m es impar y $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, como $\phi\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar}\right) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $z_n = x^{(m)}_k$ si $n = m2^{k-1}$, m es impar y $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$(D_w \circ \phi)\left(\left(x^{(m)}\right)_{m\,impar}\right) = D_w\left((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (w_{2n} z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Ahora bien, si $n = m2^{k-1}$ con m impar y $k \in \mathbb{N}$, entonces $2n = m2^k = m2^{(k+1)-1}$. Así, tenemos que $w_{2n} = w_{m2^k}$ y $z_{2n} = x^{(m)}_{k+1}$, de donde concluimos que $y_n = w_{2n} z_{2n}$. Luego tenemos que $\phi \circ \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}} = D_w \circ \phi$.

Veamos que $I + \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}$ e $I + D_w$ son quasiconjugados vía ϕ. En efecto,

$$\phi \circ \left(I + \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}\right) = \phi + \phi \circ \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}} = \phi + D_w \circ \phi = (I + D_w) \circ \phi,$$

Además, como ϕ es isomorfismo isométrico, en particular es continua y tiene rango denso. Así, $I + \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}$ e $I + D_w$ son quasiconjugados vía ϕ. Luego, al ser $I + \bigoplus_{m\,impar} B_{w^{(m)}}$ mixing tenemos que $I + D_w$ es mixing.

□

Ahora probaremos que para todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita existe un operador mixing, para lo cual previamente necesitaremos dos lemas, de los cuales aceptaremos el primero.

Lema 4.2.10. *[38]* Todo espacio de Fréchet no isomorfo a $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ contiene un subespacio denso que admite una norma continua.

Como consecuencia de este lema veremos que para un espacio de Fréchet X separable de dimensión infinita no isomorfo a ω existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ con ciertas características que nos permitirán construir un operador mixing sobre X.

Lema 4.2.11. Sea X un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita no isomorfo a ω. Entonces existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \in X^*$ tales que :

i. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\langle x_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en X.

ii. $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.

iii. $x_n^*(x_k) = 0$ si $k \neq n$ y $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Como X no es isomorfo a ω, por el Lema 4.2.10 existe $M \subset X$ subespacio denso y una norma $\|\cdot\| : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua. Sea $\{m_k, k \in \mathbb{N}\} \subset M$ denso numerable, con $m_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, veamos que existe una sucesión linealmente independiente $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\langle\{z_n, n \in \mathbb{N}\}\rangle$ es denso en M y por lo tanto denso en X, ya que $M \subset X$ es denso. Sea $z_1 = m_1 \neq 0$ y sea $z_2 = m_{k_2}$, con k_2 el primer natural tal que $\{z_1, m_{k_2}\}$ es linealmente independiente, en particular $m_2 > 1$. Dado $n > 2$, si tenemos definidos $z_j = m_{k_j}$ para todo $1 \leq j \leq n-1$, con k_j el primer natural tal que $\left\{z_1, \ldots, z_{j-1}, m_{k_j}\right\}$ es linealmente independiente, definimos $z_n = m_{k_n}$, con k_n el primer natural tal que $A_{k_n} = \{z_1, \ldots, z_{n-1}, m_{k_n}\}$ es linealmente independiente, entonces tenemos que $k_n > k_{n-1}$. Es claro por como elegimos los z_n que $\langle\{z_n, n \in \mathbb{N}\}\rangle$ es denso en M, luego en X, y que $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ es linealmente independiente.

Por Hahn-Banach, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n^* \in M^*$ tal que $y_n^*(z_n) = 1$ e $y_n^*(z_k) = 0$ para todo $k < n$. Definimos

$$y_1 = z_1 \qquad \text{e} \qquad y_n = z_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^*(z_n) y_k$$

para todo $n > 1$, veamos que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es tal que $y_j^*(y_n) = \delta_{nj}$ para todo $j, n \in \mathbb{N}$. Fijemos $j \in \mathbb{N}$, queremos ver que $y_j^*(y_n) = \delta_{nj}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = j = 1$, entonces $y_1^*(y_1) = y_1^*(z_1) = 1$.

Si $n = j > 1$, observemos que dado $1 \leq k \leq n-1$, tenemos que $y_k \in \left\langle\left\{z_1, \ldots, z_j\right\}\right\rangle$, por lo tanto $y_j^*(y_k) = 0$ y entonces

$$y_j^*(y_j) = y_j^*(z_j) - \sum_{k=1}^{j-1} y_k^*(z_j) y_j^*(y_k) = 1.$$

Si $n < j$, entonces $y_j^*(y_n) = 0$ por definición.

Sea $l > j$ y supongamos que $y_j^*(y_k) = 0$ para todo $j+1 \leq k \leq l-1$, veamos que $y_j^*(y_l) = 0$.

En efecto, observemos que si $1 \leq k \leq j-1$, entonces $y_j^*(y_k) = 0$ por definición. Si $j+1 \leq k \leq l-1$, entonces $y_j^*(y_k) = 0$ por hipótesis inductiva. Luego como $y_j^*(y_j) = 1$, tenemos que

$$y_j^*(y_l) = y_j^*(z_l) + \sum_{k=1}^{l-1} y_k^*(z_l) y_j^*(y_k) = y_j^*(z_l) - y_j^*(z_l) = 0.$$

Veamos ahora que $\langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle = \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle$. Observemos que $z_1 = y_1 \in \langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle$. Además, si $m > 1$, entonces $z_m = y_m + \sum_{k=1}^{m-1} y_k^*(z_m) y_k \in \langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle$.

Luego $\langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle$. Por otro lado, como $y_1 = z_1 \in \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle$, dado $m > 1$, si $y_1, \ldots, y_{m-1} \in \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ tenemos que

$$y_m = z_m - \sum_{k=1}^{m-1} y_k^*(z_m) y_k \in \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle.$$

Así, $\langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle \subseteq \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ y deducimos que $\langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle = \langle z_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en X. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $y_n^* \in (M, \|\cdot\|_M)^*$, existe $K_n > 0$ tal que $\left|y_n^*(x)\right| \leq K_n \|x\|_M$ para todo $x \in M$. Mas aún, como $y_n^*(y_n) = 1$, tenemos que $K_n \geq 1$. Al ser M denso en X, por el Corolario A.1.22 existe una seminorma continua $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que define la topología de X tal que $\rho_{|M} = \|\cdot\|_M$. Además, para cada $n \in \mathbb{N}$, como $y_n^* \in M^*$ existe una única extensión de y_n^* a X^*, que también llamaremos y_n^*. Observemos que si $x \in X$, al ser $M \subset X$ denso, existe $(m_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $m_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} x$, entonces como $\rho(m_j) = \left\|m_j\right\|_M$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y ρ es continua, tenemos que

$$\left|y_n^*(x)\right| = \left|\lim_{j\to\infty} y_n^*(m_j)\right| \leq K_n \lim_{j\to\infty} \left\|m_j\right\|_M = K_n \lim_{j\to\infty} \rho(m_j) = K_n \rho(x).$$

Luego $\left|y_n^*(x)\right| \leq K_n \rho(x)$ para todo $x \in X, n \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $\left(K_n^{-1} y_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.

Para definir las sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$, tomemos $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ tal que $\alpha_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (basta tomar para cada $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = \text{mín}\left\{1, \dfrac{1}{n\rho_n(y_n)}\right\}$, donde $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas creciente y separante que definen la topología de X).

Así, como $\rho_k(\alpha_n y_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $\alpha_n y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sean $x_n = \alpha_n y_n$ y $x_n^* = K_n^{-1} y_n^*$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $\left(x_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ son tales que :

i. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\langle x_n, n \in \mathbb{N}\rangle = \langle y_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en X.

ii. $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} = \left(K_n^{-1} y_n^*\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.
iii. $x_n^*(x_k) = K_n^{-1} y_n^*(x_k) = 0$ si $k \neq n$, y como $x_n^*(x_n) = K_n^{-1} y_n^*(y_n) = K_n^{-1}$, entonces $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$.

□

Teorema 4.2.12. Sea X un espacio de Fréchet sobre $\mathbb{K}$ separable de dimensión infinita. Entonces existe un operador mixing (por lo tanto hipercíclico) sobre X.

Demostración. Si $X = \omega$, entonces por el Ejemplo 2.5.18 tenemos que $B : \omega \longrightarrow \omega$ es mixing. Supongamos que X no es isomorfo a ω, entonces por el lema anterior existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tales que :
i. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\langle x_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en X.
ii. $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.
iii. $x_n^*(x_k) = 0$ si $k \neq n$ y $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Consideremos $T : X \longrightarrow X$ definido por

$$T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n,$$

para todo $x \in X$. Veamos que es un operador bien definido. Por la proposición A.1.17, basta ver que dado $m \in \mathbb{N}$, existen $N \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $\rho_m(T(x)) \leq M\rho_N(x)$ para todo $x \in X$.

En efecto, sea $m \in \mathbb{N}$, como $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua existen $N \geq m$ y $M_1 > 0$ tales que $\left|x_{n+1}^*(x)\right| \leq M_1\rho_N(x)$ para todo $x \in X$. Además como $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, en particular $\rho_m(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y por lo tanto es acotada, entonces existe $M_2 > 0$ tal que $\rho_m(x_n) \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego para todo $x \in X$ tenemos que

$$\rho_m(T(x)) \leq \rho_m(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left|x_{n+1}^*(x)\right| \rho_m(x_n) \leq \rho_m(x) + M_1 M_2 \rho_N(x).$$

Al ser $m \leq N$, se tiene que $\rho_m(x) \leq \rho_N(x)$, entonces $\rho_m(T(x)) \leq (1 + M_1M_2)\rho_N(x)$ para todo $x \in X$, y por lo tanto T es un operador bien definido. Sea $S : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$S\left((z_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(z_n + \frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n} z_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Veamos que $S = I + B_w$, con $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K} \smallsetminus \{0\}$ una sucesión de pesos.

Definamos $w_n = \dfrac{x_n^*(x_n)}{2^{n-1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces dado $n \in \mathbb{N}$, como $x_n^*(x_n) \leq 1$, tenemos que $w_n = \dfrac{x_n^*(x_n)}{2^{n-1}} \leq 1$. Luego $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| \leq 1$ y por lo tanto $B_w : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ es un operador. Dada $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, tenemos que

$$(I + B_w)\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\alpha_n + w_{n+1}\alpha_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \left(\alpha_n + \frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}\alpha_{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = S\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

con lo cual $I + B_w = S$ y por el Teorema 4.2.8 concluimos que S es mixing. Sea $\phi : \ell_1 \longrightarrow X$ definido por

$$\phi\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, veamos que S y T son quasiconjugados vía ϕ.

• ϕ está bien definido : dado $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, debemos ver que $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge en X. Basta ver que $\rho_k\left(\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n x_n\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, dado $k \in \mathbb{N}$, como $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tenemos que $\rho_k(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces en particular es acotada. Luego podemos considerar $M > 0$ tal que $|\rho_k(x_n)| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por lo tanto tenemos que

$$\rho_k\left(\sum_{n=N}^{\infty} \alpha_n x_n\right) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_k(x_n) \sum_{n=N}^{\infty} |\alpha_n| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4.13}$$

• ϕ es continuo : Por la Proposición A.1.17, basta ver que dado $k \in \mathbb{N}$ existe $M > 0$ de manera tal que $\rho_k(\phi(\alpha)) \leq M \|\alpha\|_{\ell_1}$ para toda $\alpha \in \ell_1$. De 4.13 vemos que esto vale con $M > \sup_{n\in\mathbb{N}} \rho_k(x_n)$.

Entonces $\rho_m(\phi(\alpha)) \leq M \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = M \|\alpha\|_{\ell_1}$.

• $R(\phi) \subset X$ es denso : Dado $m \in \mathbb{N}$, como $\phi(e_m) = x_m$ tenemos que $x_m \in R(\phi)$, de donde se deduce que $D = \langle x_m, m \in \mathbb{N}\rangle \subset R(\phi)$. Por lo tanto, como $D \subset X$ es denso, $R(\phi) \subset X$ es denso.

• $T \circ \phi = \phi \circ S$: Sea $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$, por un lado tenemos que

$$T\left(\phi\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}x_{k+1}^*\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right)x_k,$$

con lo cual, dado $k \in \mathbb{N}$, como $x_{k+1}^*(x_n) = \begin{cases} x_{k+1}^*(x_{k+1}) & \text{si } n = k+1 \\ 0 & \text{si } n \neq k+1 \end{cases}$ se tiene que

$$T\left(\phi\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n+1}x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}x_n.$$

Por otro lado, tenemos que

$$\begin{aligned}\phi\left(S\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)\right) &= \phi\left(\left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n+1}x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}\right)x_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_{n+1}x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}x_n.\end{aligned}$$

Así, $\phi \circ S = T \circ \phi$ y deducimos que S y T son quasiconjugados vía ϕ, por lo tanto como S es mixing, se deduce que T es mixing.

□

Para finalizar esta sección, procediendo de manera análoga al teorema anterior, veremos que en todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita existe un operador mixing (por lo tanto hipercíclico) que contiene un subespacio cerrado de dimensión infinita cuyos elementos son puntos fijos del operador.

Teorema 4.2.13. Sea X un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita. Entonces existe un operador $T : X \longrightarrow X$ mixing (por lo tanto hipercíclico) y un subespacio cerrado de dimensión infinita en X cuyos elementos son puntos fijos de T.

Demostración. Analizaremos por separado los casos en los que $X = \omega$ y X no es isomorfo a ω.

• Si X no es isomorfo a ω, por el Lema 4.2.11 existen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tales que :

i. $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\langle x_n, n \in \mathbb{N}\rangle$ es denso en X.

ii. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es equicontinua.

iii. $x_n^*(x_k) = 0$ si $k \neq n$ y $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sean $T : X \longrightarrow X$ y $S : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definidos por

$$T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x_{2n}^*(x)x_n \qquad \text{y} \qquad S\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\alpha_n + \frac{x_{2n}^*(x_{2n})}{2^n}\alpha_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

para todo $x \in X$ y $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Procediendo de manera análoga al teorema anterior, tenemos que S y T son quasiconjugados. Ahora bien, observemos que si definimos $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $w_n = \dfrac{x_{2n}^*(x_{2n})}{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| \leq 1$ y además $S = I + D_w$, donde $D_w : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ está dado por

$$D_w\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\frac{x_{2n}^*(x_{2n})}{2^n}\alpha_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Entonces, por la Proposición 4.2.9, $S = I + D_w$ es mixing. Por lo tanto, como S y T son quasiconjugados, T es mixing. Además, si $k \in \mathbb{N}$ es impar, $x_{2n}^*(x_k) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$T(x_k) = x_k + \sum_{n=1}^{\infty} x_{2n}^*(x_k)x_n = x_k,$$

luego por la linealidad y continuidad de T se deduce que si $x \in \overline{\langle x_k, k \,\text{impar}\, \rangle}$, entonces $T(x) = x$.

Así, si $M = \overline{\langle x_k, k \,\text{impar}\, \rangle}$, entonces M es un subespacio cerrado de dimensión infinita tal que x es punto fijo de T para todo $x \in M$.

• Si $X = \omega$, consideramos el operador $S : \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$S\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\alpha_n + \alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Entonces $S = I + D_w$, con $w = (w_n)_{n\in N}$ dada por $w_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por la Proposición 4.2.9 tenemos que S es mixing en ℓ_1. Es claro que $i : \ell_1 \hookrightarrow \omega$ es continua de rango denso.

Sea $\tilde{S} : \omega \longrightarrow \omega$ dado por

$$\tilde{S}\left((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\alpha_n + \alpha_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$$

para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \omega$. Entonces $\tilde{S} \circ i = i \circ S$. Luego, $\tilde{S}$ es mixing. Además, $\tilde{S}(e_{2k+1}) = e_{2k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por lo que $\overline{\langle e_{2k+1}, k \in \mathbb{N}\rangle}$ es un subespacio cerrado de dimensión finita de puntos fijos de $\tilde{S}$.

□

Para terminar esta sección enunciaremos un resultado análogo para operadores frecuentemente hipercíclicos (ver Definición 4.3.9) y D-caóticos, que fue probado recientemente en [22].

Teorema 4.2.14. Si X es un espacio de Banach con una base de Schauder incondicional, entonces existe un operador $T : X \longrightarrow X$ frecuentemente hipercíclico y D-caótico con un punto fijo no nulo.

4.3. Teoremas de Ansari y León-Müller

En esta sección demostraremos los Teoremas de Ansari y León-Müller, que son teoremas importantes en la teoría de operadores hipercíclicos y que utilizaremos en la siguiente sección. Primero probaremos el Teorema de Ansari, que dice que $HC(T^k) = HC(T)$ para todo operador T definido sobre un espacio de Fréchet. Posteriormente, estudiaremos acciones del semigrupo aditivo $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ en X. Como consecuencia probaremos el Teorema de León-Müller, el cual nos dice que si T es un operador definido sobre un espacio de Fréchet, entonces $HC(T) = HC(\lambda T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Además, extenderemos este resultado a operadores mixing y débil mixing. Para terminar la sección, definiremos vectores y operadores *frecuentemente hipercíclicos* y enunciaremos algunos resultados que los caracterizan.

Para probar el Teorema de Ansari, previamente necesitamos el siguiente lema.

Lema 4.3.1. Sea X un espacio métrico sin puntos aislados y sea $T : X \longrightarrow X$ una función continua. Si $x, y \in X$, entonces $\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ \bigcap \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ = \emptyset$ o $\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ = \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ$.

Demostración. Supongamos que $\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ \bigcap \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ \neq \emptyset$, entonces existe $k \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^k(x) \in \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ$. Veamos que $\overline{\{T^n(x), n \geq k\}} \subset \overline{Orb(T,y)}$. Sea $n > k$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n = k + k_0$. Como $T^k(x) \in \overline{Orb(T,y)}$, existe $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $T^{m_j}(y) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T^k(x)$, entonces

$$T^{m_j+k_0}(y) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} T^{k+k_0}(x) = T^n(x),$$

por lo tanto $T^n(x) \in \overline{Orb(T,y)}$ y entonces $\overline{\{T^k(x), k \geq n\}} \subset \overline{Orb(T,y)}$. Como X no tiene puntos aislados, $\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ \subset \left(\overline{\{T^k(x), k \geq n\}}\right)^\circ$ y luego

$$\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ \subset \left(\overline{\{T^k(x), k \geq n\}}\right)^\circ \subset \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ.$$

Por lo tanto, por simetría tenemos que $\left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ \subset \left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ$ y concluimos que $\left(\overline{Orb(T,x)}\right)^\circ = \left(\overline{Orb(T,y)}\right)^\circ$.

□

Teorema 4.3.2. (Ansari [1]) Sean $k \in \mathbb{N}$ y X un espacio de Fréchet. Si $T : X \longrightarrow X$ es un operador, entonces $HC(T^k) = HC(T)$. En particular, si T es hipercíclico, entonces T^k es hipercíclico.

Demostración. Sea $x \in HC(T^k)$. Luego como $Orb(T^k, x) \subset Orb(T, x) \subset X$, entonces $Orb(T, x) \subset X$ es denso y deducimos que $x \in HC(T)$, es decir, $HC(T^k) \subseteq HC(T)$.

Recíprocamente, tomemos $x \in HC(T)$ y veamos que $x \in HC(T^k)$. Sea $D = HC(T)$, entonces por la Proposición 1.3.2 y el Corolario 2.1.11 tenemos que $D \subset X$ es denso, T-invariante y conexo, por lo que en particular D no tiene puntos aislados. Como D es T-invariante, podemos considerar $T_{|D} : D \longrightarrow D$, queremos ver que $Orb(T^k, x)$ es denso en X, para lo cual, como $D \subset X$ es denso, basta ver que $\overline{Orb\,(T^k, x)} = D$, donde la clausura la pensamos en la topología subespacio. En el resto de la demostración consideraremos la topología subespacio inducida por D, por lo que $D = \overline{Orb(T, x)}$.

Para cada $0 \le j \le k-1$, consideremos $D_j = \overline{Orb(T^k, T^j(x))}$, queremos ver entonces que $D_0 = D$. Vamos a ver que :

i. $D = \overline{Orb(T, x)} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{Orb(T^k, T^j(x))} = \bigcup_{j=0}^{k-1} D_j$.

ii. $T(D_j) \subset D_{j+1}$ para todo $0 \le j < k-1$ y $T\,(D_{k-1}) \subset D_0$.

i. Es claro que $\bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{Orb\,(T^k, T^j(x))} \subseteq \overline{Orb(T, x)}$, veamos que $T^n(x) \in \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{Orb\,(T^k, T^j(x))}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, si dividimos n por k, podemos escribir n en la forma $n = km + r$, con $0 \le m \le k$ y $0 \le r \le k-1$. Entonces tenemos que

$$T^n(x) = T^{km+r}(x) = (T^k)^m(T^r(x)) \in Orb(T^k, T^r(x)) \subset D_r.$$

Así, tenemos que $T^n(x) \in D_r$ con $0 \le r \le k-1$, luego $Orb(T, x) \subseteq \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{Orb(T^k, T^j(x))}$ y concluimos que

$$D = \overline{Orb(T, x)} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \overline{Orb(T^k, T^j(x))} = \bigcup_{j=0}^{k-1} D_j.$$

ii. Sea $0 \le j < k-1$, veamos que $T(D_j) \subset D_{j+1}$. Como $T(Orb(T^k, T^j(x))) = Orb(T^k, T^{j+1})$, entonces

$$T(D_j) = T(\overline{Orb\,(T^k, T^j(x))}) \subset \overline{T(Orb\,(T^k, T^j(x)))} = \overline{Orb(T^k, T^{j+1}(x))} = D_{j+1}.$$

Veamos ahora que $T\,(D_{k-1}) \subset D_0$. En efecto,

$$T(D_{k-1}) = T(\overline{Orb\,(T^k, T^{k-1}(x))}) \subset \overline{Orb(T^k, T^k(x))} = \overline{T^k(Orb(T^k, x))} \subset \overline{Orb(T^k, x)} = D_0.$$

Sea $F \subset \{0, 1, \ldots, k-1\}$ el conjunto de menor cardinal tal que $D = \bigcup_{j \in F} D_j$, veamos que $\operatorname{card}(F) = 1$.

En efecto, supongamos que $\operatorname{card}(F) \ge 2$, veamos que $D_i^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$ para todo $i, j \in F$, $i \ne j$. Si $i, j \in F$, $i \ne j$ son tales que $D_i^\circ \cap D_j^\circ \ne \emptyset$, entonces por el Lema 4.3.1 tenemos que $D_i^\circ = D_j^\circ$. Luego, por la minimalidad de F tenemos que $\bigcup_{l \in F \setminus \{i\}} D_l \subsetneq D$, con lo cual $D \setminus \left(\bigcup_{l \in F \setminus \{i\}} D_l \right) \ne \emptyset$. Además, $D \setminus \left(\bigcup_{l \in F \setminus \{i\}} D_l \right) \subset D_i$ es abierto, entonces $D \setminus \left(\bigcup_{l \in F \setminus \{i\}} D_l \right) \subset D_i^\circ = D_j^\circ$, lo cual es absurdo ya que $j \in F \setminus \{i\}$. Luego $D_i^\circ \cap D_j^\circ = \emptyset$ para todo $i, j \in F$ tal que $i \ne j$. Entonces, como $\left(D_i \cap D_j\right)^\circ \subset D_i^\circ \cap D_j^\circ$ tenemos que $\left(D_i \cap D_j\right)^\circ = \emptyset$ para todo $i, j \in F$ tal que $i \ne j$. Consideremos $F_0 = \bigcup_{i,j \in F, i \ne j} \left(D_i \cap D_j\right)$. Observemos que $D_i \cap D_j$ es cerrado, nunca denso y T-invariante para todo $i, j \in F$ tal que $i \ne j$, con lo cual F_0 resulta cerrado, nunca denso y T-invariante. Veamos que $F_0 = \emptyset$. En efecto, supongamos que $F_0 \ne \emptyset$ y tomemos $y \in F_0 \subset D$. Como $y \in D$, al ser F_0 T-invariante y cerrado tenemos que $D = \overline{Orb(T, y)} \subset \overline{F_0} = F_0$, de donde se deduce que $D = F_0$. Luego como F_0 es nunca denso , tendríamos que D es nunca denso, es decir, tendríamos que $D = (\overline{D})^\circ = \emptyset$, lo cual es absurdo. Entonces $F_0 = \emptyset$ y se deduce que $D_i \cap D_j = \emptyset$ para todo $i, j \in F$ tal que $i \ne j$. Así, tenemos que $D = \bigcup_{j \in F} D_j$ es una unión de cerrados no vacíos disjuntos, lo que contradice el hecho de que D sea conexo. Luego $\operatorname{card}(F) = 1$, es decir, $F = \{j\}$ para algún $0 \le j \le k-1$ y entonces $D = D_j = \overline{T^{k-j}(D_j)}$. Ahora bien, por *ii.* tenemos que $T(D_j) \subset D_{j+1}$ para todo $0 \le j < k-1$ y $T(D_{k-1}) \subset D_0$, por lo tanto :

Si $j = k-1$, entonces $D = D_{k-1} = \overline{T(D_{k-1})} \subset \overline{D_0} = D_0$.

Si $0 \le j < k-1$, entonces $T^m(D_j) \subset D_{j+m}$ para todo $0 \le m \le k-j-1$, en particular se tiene que $T^{k-j-1}(D_j) \subset D_{k-1}$ y entonces $T^{k-j}(D_j) \subset T(D_{k-1}) \subset D_0$. Luego como D_0 es cerrado tenemos que $D = \overline{T^{k-j}(D_j)} \subset D_0$.

Así, tenemos que $D \subset D_0$ y concluimos que $D = D_0$, con lo cual $x \in HC(T)$.

□

Comenzaremos ahora el camino hacia la demostración del Teorema de León-Müller (Teorema 4.3.6). Primero necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.3.3. Sean $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ y X un espacio de Fréchet. Observemos que $(G, +)$ es un semigrupo, entonces decimos que $\psi : G \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ lineal y continua es una *acción* del semigrupo G en X si verifica las siguientes condiciones :

i. $\psi(0,0) = I_X$.

ii. $\psi(g_1 + g_2) = \psi(g_1) \circ \psi(g_2)$.

iii. La función $\varphi_\psi : G \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi_\psi(g, x) = \psi(g)(x)$$

para todo $(g, x) \in G \times X$ es continua, donde $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $G \times X$ se consideran con la topología producto.

Diremos ψ es *hipercíclica* si existe $x \in X$ tal que $Orb(\psi, x) = \{\psi(g)(x), g \in G\}$ es denso en X. En tal caso el vector x se llama *vector hipercíclico* para ψ.

Notación. Notamos por $HC(\psi)$ al conjunto de vectores hipercíclicos para ψ.

Teorema 4.3.4. Sea X un espacio de Fréchet de dimensión infinita y $\psi : G \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ una acción del semigrupo G en X que satisface las siguientes condiciones :

a. $\psi(1,0) = I_X$ o $\psi(0,1) = I_X$.

b. Si ψ es hipercíclica, entonces cada combinación convexa de $\psi(0,s)$ y $\psi(1,t)$ tiene rango denso para todo $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Si $x \in X$ es un vector hipercíclico para ψ, entonces x es vector hipercíclico de $\psi(1,t) \in \mathcal{L}(X)$ para cada $t \in \mathbb{R}_{>0}$.

Demostración. Veamos primero que basta probar el teorema para el caso en que $t = 1$.

En efecto, sea $t \in \mathbb{R}_{>0}$ arbitrario y supongamos que $\psi(1,1) \in \mathcal{L}(X)$ es hipercíclico para toda acción de G en X que satisface *a.* y *b.*

• Si $\psi(1,0) = I_X$, consideremos la acción de G en X, $\tilde{\psi} : G \longrightarrow X$ dada por

$$\tilde{\psi}(n, s) = \psi(n, st)$$

para todo $(n, s) \in G$. Veamos que $\tilde{\psi}$ satisface las condiciones *a.* y *b.*

En efecto, por un lado tenemos que $\tilde{\psi}(1,0) = \psi(1,0) = I_X$, con lo cual $\tilde{\psi}$ verifica la condición *a.*

Por otro lado, dados $r, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, si $\alpha_1\tilde{\psi}(0,r) + \alpha_2\tilde{\psi}(1,s)$ es una combinación convexa de $\tilde{\psi}(0,r)$ y $\tilde{\psi}(1,s)$, queremos ver que tiene rango denso. Observemos que

$$\alpha_1\tilde{\psi}(0,r) + \alpha_2\tilde{\psi}(1,s) = \alpha_1\psi(0,rt) + \alpha_2\psi(1,st),$$

con lo cual $\alpha_1\tilde{\psi}(0,r) + \alpha_2\tilde{\psi}(1,s)$ es una combinación convexa de $\psi(0,rt)$ y $\psi(1,st)$. Luego, como por hipótesis $\alpha_1\psi(0,rt) + \alpha_2\psi(1,st)$ tiene rango denso, deducimos que $\alpha_1\tilde{\psi}(0,r) + \alpha_2\tilde{\psi}(1,s)$ tiene rango denso, por lo tanto $\tilde{\psi}$ verifica la condición *b.* Entonces $\psi(1,t) = \tilde{\psi}(1,1)$ es hipercíclico.

• Si $\psi(0,1) = I_X$, consideramos $\tilde{\psi} : G \longrightarrow X$ definida por

$$\tilde{\psi}(n, s) = \psi(n, nt + s)$$

para todo $(n, s) \in G$. Luego, como ψ es una acción y $\psi(0,1) = I_X$, entonces

$$\tilde{\psi}(1,1) = \psi(1, t+1) = \psi((0,1) + (1,t)) = \psi(0,1) \circ \psi(1,t) = I_X \circ \psi(1,t) = \psi(1,t).$$

Procediendo de manera análoga al caso anterior se prueba que $\tilde{\psi}(1,1)$ es hipercíclico y entonces $\psi(1,t)$ es hipercíclico.

Consideremos el círculo unitario $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$ y $\rho : \mathbb{R}_{>0} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$\rho(t) = e^{2\pi i t}$$

para todo $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Dados $u, v \in X$ definimos

$$F_{u,v} = \left\{\lambda \in \mathbb{S}^1 \text{ tales que existe } ((n_k, t_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset G \text{ con } \psi(n_k, t_k)(u) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v \text{ y } \rho(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda\right\}.$$

Para el resto de la demostración, probaremos algunos hechos que nos llevarán a concluir que si $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$, entonces $x \in HC(\psi(1,1))$, y veremos que si $x \in HC(\psi)$ y $F_{x,x} \neq \mathbb{S}^1$ llegamos a una contradicción.

i. Si $u \in HC(\psi)$, entonces $F_{u,v} \neq \emptyset$ para todo $v \in X$.

En efecto, dado $v \in X$, como $u \in HC(\psi)$ tenemos que $Orb(\psi, u) = \{\psi(g)(u), g \in G\}$ es denso en X, luego existe $((n_k, t_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ de manera tal que $\psi(n_k, t_k)(u) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} v$. Ahora bien, como $\mathbb{S}^1$ es compacto y $(\rho(t_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}^1$, existe una subsucesión convergente de $(\rho(t_k))_{k\in\mathbb{N}}$. Podemos suponer entonces sin pérdida de generalidad que existe $\lambda \in \mathbb{S}^1$ tal que $\rho(t_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, de donde deducimos que $\lambda \in F_{u,v}$.

ii. Sean $u, v \in X$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Si $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}^1$ son tales que $\lambda_k \in F_{u,v_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ y $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, entonces $\lambda \in F_{u,v}$. En particular $F_{u,v} \subset \mathbb{S}^1$ es cerrado para todo $u, v \in X$.

En efecto, sean W entorno de 0 y $\varepsilon > 0$, entonces por el Lema A.1.2 existe W_1 entorno de 0 tal que $W_1 + W_1 \subset W$. Además, como $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ y $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v - v_k \in W_1$ y $|\lambda - \lambda_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \geq k_0$. Ahora bien, por definición, como $\lambda_{k_0} \in F_{u,v_{k_0}}$, existe $((n_j, t_j))_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que

$$\psi(n_j, t_j)(u) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} v_{k_0} \qquad \text{y} \qquad \rho(t_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \lambda_{k_0},$$

luego existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $v_{k_0} - \psi(n_j, t_j)(u) \in W_1$ y $\left|\lambda_{k_0} - \rho(t_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $j \geq j_0$. Sea $j \geq j_0$, entonces

$$v - v_{k_0} \in W_1, \qquad v_{k_0} - \psi(n_j, t_j)(u) \in W_1, \qquad \left|\lambda - \lambda_{k_0}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{y} \qquad \left|\lambda_{k_0} - \rho(t_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

por lo tanto

$$v - \psi(n_j, t_j)(u) = v - v_{k_0} + v_{k_0} - \psi(n_j, v_j)(u) \in W_1 + W_1 \subset W.$$

Además tenemos que

$$\left|\lambda - \rho(t_j)\right| < \left|\lambda - \lambda_{k_0}\right| + \left|\lambda_{k_0} - \rho(t_j)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

con lo cual $v - \psi(n_j, v_j)(u) \in W$ y $\left|\lambda - \rho(t_j)\right| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$. Así, tenemos que $((n_j, t_j))_{j\in\mathbb{N}} \subset G$ es tal que $\psi(n_j, t_j)(u) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} v$ y $\rho(t_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$, de donde se deduce que $\lambda \in F_{u,v}$.

Ahora sí, veamos que $F_{u,v}$ es cerrado. Sea $\lambda \in \overline{F_{u,v}}$, entonces existe $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset F_{u,v}$ tal que $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, consideramos $v_k = v$, entonces $\lambda_k \in F_{u,v_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $v_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$, con lo cual, por lo visto anteriormente resulta que $\lambda \in F_{u,v}$.

iii. Si $u, v, w \in X$, $\lambda \in F_{u,v}$ y $\mu \in F_{v,w}$, entonces $\lambda\mu \in F_{u,w}$.

En efecto, sea W entorno de 0 y consideremos W_1 entorno de 0 de manera tal que $W_1 + W_1 \subset W$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\mu \in F_{v,w}$, existe $(n_1, t_1) \in G$ tal que $w - \psi(n_1, t_1)(v) \in W_1$ y $|\mu - \rho(t_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Por otro lado, como $\psi(n_1, t_1) \in \mathcal{L}(X)$, en particular $\psi(n_1, t_1)$ es continua tal que $\psi(n_1, t_1)(0) = 0 \in W_1$. Luego como $\psi(n_1, t_1)(0) = 0 \in W_1$ y $\lambda \in F_{u,v}$, existen V entorno de 0 y $(n_2, t_2) \in G$ tales que

$$\psi(n_1, t_1)(V) \subset W_1, \qquad v - \psi(n_2, t_2)(u) \in V \qquad \text{y} \qquad |\lambda - \rho(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces si consideramos $n_3 = n_1 + n_2$ y $t_3 = t_1 + t_2$, como ψ es una acción de G en X tenemos que

$$w - \psi(n_3, t_3)(u) = w - \psi(n_1, t_1)(v) + \psi(n_1, t_1)\left(v - \psi(n_2, t_2)(u)\right) \in W_1 + W_1 \subset W,$$

y además como $\rho(t_3) = \rho(t_1 + t_2) = \rho(t_1)\rho(t_2)$, $\lambda \in \mathbb{S}^1$ y $\rho(t_1) \in \mathbb{S}^1$ se tiene que

$$\begin{aligned} |\lambda\mu - \rho(t_3)| &= |\lambda\mu - \rho(t_1)\rho(t_2)| = |\lambda\mu - \lambda\rho(t_1) + \lambda\rho(t_1) - \rho(t_1)\rho(t_2)| \\ &\leq |\lambda|\,|\mu - \rho(t_1)| + |\rho(t_1)|\,|\lambda - \rho(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, concluimos que $\lambda\mu \in F_{u,w}$. Sea $x \in HC(\psi)$, nuestro próximo objetivo será probar que $x \in HC\left(\psi(1,1)\right)$.

Observemos que al ser $x \in HC(\psi)$, por *i.*, *ii.* y *iii.* se deduce que $F_{x,x}$ es un subsemigrupo cerrado no vacío del grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$.

iv. Si $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$, entonces $x \in HC\left(\psi(1,1)\right)$.

Supongamos que $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$, veamos que $F_{x,y} = \mathbb{S}^1$ para todo $y \in X$. En efecto, sean $y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{S}^1$, entonces $\lambda \in F_{x,x}$. Además, como $x \in HC(\psi)$, por *i.* tenemos que $F_{x,y} \neq \emptyset$. Sea $\mu \in F_{x,y}$, entonces como $\lambda \in F_{x,x}$ y $\mu \in F_{x,y}$, por *ii.* tenemos que $\lambda\mu \in F_{x,y}$. Así, como $\lambda\mu \in F_{x,y}$ y $\mu^{-1} \in F_{x,x} = \mathbb{S}^1$, deducimos que $\mu^{-1}(\lambda\mu) = \lambda \in F_{x,y}$, con lo cual $F_{x,y} = \mathbb{S}^1$. En particular, tenemos que $1 \in F_{x,y}$, con lo cual existe $((n_k,t_k))_{k\in\mathbb{N}} \subset G$ tal que $\psi(n_k,t_k)(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ y $\rho(t_k) = e^{2\pi t_k i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$. Veamos que cada $k \in \mathbb{N}$, podemos escribir t_k en la forma $t_k = j_k - 1 + \varepsilon_k$, con $j_k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon_k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tal que $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. En efecto, para cada $k \in \mathbb{N}$ consideramos

$$j_k = \begin{cases} [t_k] + 1 & \text{si } \ t_k - [t_k] \leq \dfrac{1}{2} \\ \\ [t_k] + 2 & \text{si } \ t_k - [t_k] > \dfrac{1}{2} \end{cases},$$

entonces existe $\varepsilon_k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tal que $t_k = j_k - 1 + \varepsilon_k$. Además, para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$e^{2\pi i t_k} = e^{2\pi i(j_k - 1 + \varepsilon_k)} = e^{2\pi i(j_k-1)} e^{2\pi i\varepsilon_k} = e^{2\pi i\varepsilon_k},$$

luego como $e^{2\pi t_k i} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$, tenemos que $e^{2\pi\varepsilon_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$ con $\varepsilon_k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ahora bien, como $\psi : G \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ es una acción, entonces la función $\varphi_\psi : G \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi_\psi(g,x) = \psi(g)(x)$$

para todo $(g,x) \in G \times X$, es continua (ver *iii.* de la Definición 4.3.3). Sean W y W_1 entornos de 0 tales que $W_1 + W_1 \subset W$, veamos que existe V entorno de 0 tal que $\psi(0,t)(V) \subset W_1$ para todo $0 \leq t \leq 2$.

En efecto, sea $0 \leq t \leq 2$, como φ_ψ es continua en $((0,t),0)$, existen $\varepsilon_t > 0$ y V_t entorno de 0 tales que $\psi(0,s)(z) \in W_1$ para todo $s \in (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$ y todo $z \in V_t$. En particular tenemos que $\psi(0,s)(V_t) \subset W_1$ para todo $s \in (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$. Así, si para cada $t \in [0,2]$ consideramos $I_t = (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$, entonces I_t es abierto para cada t y se tiene que $[0,2] \subset \bigcup_{t\in[0,2]} I_t$. Entonces como $[0,2]$ es compacto, existen $t_1,\ldots,t_N \in [0,2]$ tales que $[0,2] \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_{t_j}$. Luego si tomamos $V = \bigcap_{j=1}^{N} V_{t_j}$, tenemos que V es un entorno de 0 tal que $\psi(0,t)(V) \subset W_1$ para todo $0 \leq t \leq 2$. Observemos que $\psi(n_k,t_k)(x) - y \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $\psi(0,1-\varepsilon_k)(y) - \psi(0,1)(y) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, con lo cual existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\psi(n_k,t_k)(x) - y \in V \qquad \text{y} \qquad \psi(0,1-\varepsilon_k)(y) - \psi(0,1)(y) \in W_1$$

para todo $k \geq k_0$. Sea $k \geq k_0$, al ser ψ una acción, $\psi(0,1-\varepsilon_k)$ y $\psi(0,1)$ son lineales, entonces

$$\begin{aligned} \psi(0,1-\varepsilon_k)\left(\psi(n_k,t_k)(x) - y\right) + \left(\psi(0,1-\varepsilon_k) - \psi(0,1)\right)(y) &= \left(\psi(0,1-\varepsilon_k) \circ \psi(n_k, j_k - 1 + \varepsilon_k)\right)(x) - \psi(0,1)(y) \\ &= \psi\left((0,1-\varepsilon_k) + (n_k, j_k - 1 + \varepsilon_k)\right)(x) - \psi(0,1)(y) \\ &= \psi(n_k,j_k)(x) - \psi(0,1)(y). \end{aligned}$$

Así, como $0 \leq 1 - \varepsilon_k \leq 2$, $\psi(n_k,t_k)(x) - y \in V$ y $\left(\psi(0,1-\varepsilon_k) - \psi(0,1)\right)(y) \in W_1$, resulta que

$$\psi(n_k,j_k)(x) - \psi(0,1)(y) \in \psi(0,1-\varepsilon_k)(V) + W_1 \subset W_1 + W_1 \subset W,$$

con lo cual $\psi(n_k,j_k)(x) - \psi(0,1)(y) \in W$ y deducimos que

$$\psi(n_k,j_k)(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi(0,1)(y). \tag{4.14}$$

Veamos que $\psi(n_k,j_k)(x) \in Orb\left(\psi(1,1),x\right)$. En efecto, observemos que

$$\psi(n_k,j_k) = \psi\left(n_k(1,0) + j_k(0,1)\right) = \psi\left(n_k(1,0)\right) \circ \psi\left(j_k(0,1)\right).$$

Ahora bien, si notamos por $(\psi(1,0))^{n_k} = \underbrace{\psi(1,0)\circ\ldots\circ\psi(1,0)}_{n_k\ veces}$ y $(\psi(0,1))^{j_k} = \underbrace{\psi(0,1)\circ\ldots\circ\psi(0,1)}_{j_k\ veces}$, entonces como ψ es acción tenemos que

$$\psi\left(n_k(1,0)\right) = \psi\left(\underbrace{(1,0)+\ldots+(1,0)}_{n_k\ veces}\right) = (\psi(1,0))^{n_k} \qquad \text{y} \qquad \psi\left(j_k(0,1)\right) = \psi\left(\underbrace{(0,1)+\ldots+(0,1)}_{j_k\ veces}\right) = (\psi(0,1))^{j_k},$$

luego deducimos que $\psi(n_k, j_k) = (\psi(1,0))^{n_k}\circ(\psi(0,1))^{j_k}$. Ahora bien, por a. tenemos que $\psi(1,0) = I_X$ o bien $\psi(0,1) = I_X$ y $\psi(1,1) = \psi((1,0)+(0,1)) = \psi(1,0)\circ\psi(0,1)$, entonces

$$\psi(1,1) = \psi(0,1) \qquad \text{o} \qquad \psi(1,1) = \psi(1,0).$$

Por lo tanto, dado $k\in\mathbb{N}$ se tiene que

$$\psi(n_k, j_k) = (\psi(0,1))^{j_k} = (\psi(1,1))^{j_k} \qquad \text{o} \qquad \psi(n_k, j_k) = (\psi(1,0))^{n_k} = (\psi(1,1))^{n_k},$$

con lo cual $\psi(n_k, j_k)(x)\in Orb\,(\psi(1,1),x)$. Luego, como por (4.14) tenemos que $\psi(n_k, j_k)(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \psi(0,1)(y)$, resulta que $\psi(0,1)(y)\in\overline{Orb\,(\psi(1,1),x)}$. Entonces, como y era arbitrario deducimos que $R\,(\psi(1,1))\subset\overline{Orb\,(\psi(1,1),x)}$. Así, como por hipótesis sabemos que $R\,(\psi(1,1))\subset X$ es denso, deducimos que $Orb\,(\psi(1,1),x)\subset X$ es denso y entonces $x\in HC\,(\psi(1,1))$.

Para el resto de la demostración vamos a suponer que $x\in HC(\psi)$ y que $F_{x,x}\neq\mathbb{S}^1$, lo cual veremos que nos conduce a una contradicción.

v. Existe $m\in\mathbb{N}$ de manera tal que para cada $y\in HC(\psi)$, $F_{x,y} = \{\lambda z,\ z^m = 1\}$ para algún $\lambda\in\mathbb{S}^1$.

Previamente veremos que $F_{x,x} = \left\{z\in\mathbb{S}^1,\ z^m = 1\right\}$ para algún $m\in\mathbb{N}$.

Supongamos que existe $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_{>0}$ de manera tal que $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $e^{2\pi i t_k}\in F_{x,x}$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces como $F_{x,x}$ es un subsemigrupo de $\mathbb{S}^1$ tenemos que $e^{2\pi i t_k n}\in F_{x,x}$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $k\in\mathbb{N}$. Veamos que esto implica que $F_{x,x}\subset\mathbb{S}^1$ es denso. En efecto, sea $z = e^{2\pi i t}\in\mathbb{S}^1$ con $t\in[0,1]$, queremos ver que $z\in\overline{F_{x,x}}$. Dado $k\in\mathbb{N}$, sea n_k el primer natural tal que $t_k n_k\geq t$, entonces tenemos que $t_k\,(n_k-1) < t\leq t_k n_k$. Luego $t_k n_k - t\leq t_k n_k - t_k\,(n_k-1) = t_k$ para todo $k\in\mathbb{N}$, entonces como $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tenemos que $t_k n_k - t \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y deducimos que $e^{2\pi i t_k n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} z$. Por lo tanto como $e^{2\pi i t_k n_k}\in F_{x,x}$ para todo $k\in\mathbb{N}$ tenemos que $z\in\overline{F_{x,x}}$ y concluimos que $F_{x,x}\subset\mathbb{S}^1$ es denso. Luego $F_{x,x}\subset\mathbb{S}^1$ es denso y cerrado, con lo cual $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$ y llegamos a una contradicción. Entonces no existe $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}_{>0}$ de manera tal que $t_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $e^{2\pi i t_k}\in F_{x,x}$ para todo $k\in\mathbb{N}$.

Sea t_0=inf$\left\{t\in(0,1] \text{ tal que } e^{2\pi i t}\in F_{x,x}\right\}$, entonces como $F_{x,x}$ es cerrado, $t_0\in(0,1]$ es el mínimo tal que $z_0 = e^{2\pi t_0 i}\in F_{x,x}$. Además, como por la Proposición 1.5.6 las órbitas de rotaciones irracionales son densas, t_0 debe ser racional. Sea m=mín$\left\{n\in\mathbb{N},\ z_0^n = 1\right\}$, entonces $e^{2\pi i t_0 m} = 1$ y tenemos que $t_0 m = 1$, es decir, $t_0 = \dfrac{1}{m}$.

Veamos que la minimalidad de m implica que $F_{x,x} = \left\{z\in\mathbb{S}^1,\ z^m = 1\right\}$. Sea $z\in\mathbb{S}^1$ tal que $z^m = 1$, entonces z es una raíz m-ésima de la unidad. Ahora bien, por definición de m tenemos que $z_0^m = 1$ y $z_0^k\neq 1$ para todo $1\leq k < m$, por lo tanto z_0 es una raíz m-ésima primitiva de la unidad y entonces $\left\{z_0, z_0^2,\ldots,z_0^m\right\}$ son todas las raíces m-ésimas de la unidad. Luego existe $0 < k\leq m$ tal que $z = z_0^k$. Por otro lado, como $z_0\in F_{x,x}$ y $F_{x,x}$ es un subsemigrupo de $\mathbb{S}^1$ se tiene que $\left\{z_0, z_0^2,\ldots,z_0^m\right\}\subseteq F_{x,x}$, con lo cual $z = z_0^k\in F_{x,x}$ y se deduce que $\left\{z\in\mathbb{S}^1, z^m = 1\right\}\subseteq F_{x,x}$. Recíprocamente, supongamos que existe $w = e^{2\pi i s}\in F_{x,x}$ con $s\in[0,1]$ tal que $w^m\neq 1$, entonces existe $0\leq k\leq m-1$ tal que

$$\begin{aligned} kt_0 < s < (k+1)t_0 &\Leftrightarrow kt_0 + (m-k)t_0 < s + (m-k)t_0 < ((k+1)+(m-k))\,t_0 \\ &\Leftrightarrow mt_0 < s + (m-k)t_0 < mt_0 + t_0 \\ &\Leftrightarrow 1 < s + (m-k)t_0 < 1 + t_0 \end{aligned}$$

luego $wz_0^{m-k}\in F_{x,x}$ y su ángulo es menor que t_0, lo cual es absurdo por definición de t_0. Luego $F_{x,x} = \left\{z\in\mathbb{S}^1, z^m = 1\right\}$. Mas aún, como z_0 es raíz m-ésima primitiva de la unidad tenemos que $F_{x,x} = \left\{z_0, z_0^2,\ldots,z_0^m\right\}$. Dado $y\in HC(\psi)$, por i. existen $\lambda\in F_{x,y}$ y $\mu\in F_{y,x}$. Además, por iii. tenemos que $\lambda F_{x,x}\subset F_{x,y}$ y $\mu F_{x,y}\subset F_{x,x}$, de donde se deduce que card$(F_{x,x})$=card$(F_{x,y}) = m$, donde denotamos por card$(F_{x,x})$ y card$(F_{x,x})$ al cardinal de $F_{x,x}$ y $F_{x,y}$ respectivamente. Concluimos entonces que, dado $\lambda\in F_{x,y}$,

$$F_{x,y} = \lambda F_{x,x} = \left\{\lambda z_0,\ z_0^m = 1\right\} = \left\{\lambda z_0, \lambda z_0^2,\ldots,\lambda z_0^m\right\}. \tag{4.15}$$

vi. Existe una función continua $f : HC(\psi) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ tal que

$$f\,(\psi(0,t)(x)) = e^{2\pi mti}$$

para todo $t \geq 0$, donde $m \in \mathbb{N}$ es el obtenido en *v*.

En efecto, dado $y \in HC(\psi)$, por (4.15), si $\lambda \in F_{x,y}$, tenemos que $F_{x,y} = \lambda F_{x,x}$. Definimos $f : HC(\psi) \longrightarrow \mathbb{S}^1$ por $f(y) = \lambda^m$ para todo $y \in HC(\psi)$.

Buena definición de f : Sea $y \in HC(\psi)$ y sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{S}^1$ tales que $F_{x,y} = \lambda_1 F_{x,x} = \lambda_2 F_{x,x}$, debemos ver que $\lambda_1^m = \lambda_2^m$. Al ser $F_{x,x} = \left\{z_0, z_0^2, \ldots, z_0^m\right\}$, tenemos que

$$F_{x,x} = \left\{\lambda_1 z_0, \lambda_1 z_0^2 \ldots, \lambda_1 z_0^m\right\} = \left\{\lambda_2 z_0, \lambda_2 z_0^2 \ldots, \lambda_2 z_0^m\right\},$$

por lo tanto existe $1 \leq k \leq m$ tal que $\lambda_1 = \lambda_1 z_0^m = \lambda_2 z_0^k$ y entonces $\lambda_1^m = \left(\lambda_2 z_0^k\right)^m = \lambda_2^m$, lo que nos da la buena defición de f.

Veamos ahora que f es continua. En efecto, si f no es continua, entonces existen $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset HC(\psi)$ e $y \in HC(\psi)$ tales que $y_k \to y$ y $f(y_k) \nrightarrow f(y)$. Para cada $y_k \in HC(\psi)$ tenemos que $F_{x,y_k} \neq \emptyset$, entonces podemos elegir $\lambda_k \in F_{x,y_k}$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Considerando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer que existen $\eta, \mu \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(y_k) \to \mu \neq f(y)$ y $\lambda_k \to \eta$. Luego, como $\lambda_k \in F_{x,y_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $y_k \to y$ y $\lambda_k \to \eta$, por *ii*. se tiene que $\eta \in F_{x,y}$. Entonces, como $\eta \in F_{x,y}$, tenemos que $f(y) = \eta^m$ y $f(y_k) = \lambda_k^m \to \eta^m = f(y)$, lo cual contradice el hecho de que $f(y_k) \to \mu \neq f(y)$. Así, f resulta continua.

Sea $t \geq 0$, queremos ver que $\psi(0,t)(x) \in HC(\psi)$ y $f\,(\psi\,(0,t)\,(x)) = e^{2\pi mti}$. Para ver que $\psi(0,t)(x) \in HC(\psi)$, debemos ver que $\mathcal{O}rb\,(\psi, \psi(0,t)(x)) = \{(\psi(n,s)\,(\psi(0,t)(x))\,, n \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ es denso en X. En efecto, al ser $x \in HC(\psi)$ tenemos que $D = \{\psi(n,s)(x), n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \subset X$ es denso, entonces como por hipótesis *b*. se tiene que $\psi(0,t)$ tiene rango denso, se deduce que $\psi(0,t)(D) = \{(\psi(0,t) \circ \psi(n,s))\,(x), n \in \mathbb{N}_0, s \in \mathbb{R}_{\geq 0}\}$ es denso en X. Ahora bien, dados $n \in \mathbb{N}_0$ y $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, como ψ es una acción tenemos que

$$\psi(0,t) \circ \psi(n,s) = \psi(0+n, s+t) = \psi(n+0, t+s) = \psi(n,s) \circ \psi(0,t),$$

luego $\mathcal{O}rb\,(\psi, \psi(0,t)(x)) = \psi(0,t)(D) = \{(\psi(n,s) \circ \psi(0,t))\,(x), n \geq 0, s \geq 0\} \subset X$ es denso. Luego $(\psi(0,t))\,(x) \in HC(\psi)$, es decir, $(\psi(0,t))\,(x) \in \mathrm{Dom}(f)$. Además, es claro que por definición, $\rho(t) = e^{2\pi it} \in F_{x,(\psi(0,t))(x)}$, con lo cual se tiene que $f((\psi(0,t))(x)) = (e^{2\pi ti})^m = e^{2\pi mti}$.

vii. Si $\overline{D}$ es el disco unitario cerrado, entonces existe $h : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ continua de manera tal que $h_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ no es homotópicamente nula. Esto es una contradicción ya que toda función $\sigma : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ que se extiende continuamente a $\overline{D}$ es homotópicamente nula, considerando la homotopía $H : \mathbb{S}^1 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$H\left(e^{2\pi ti}, r\right) = \sigma\left(re^{2\pi ti}\right)$$

para todo $\left(e^{2\pi ti}, r\right) \in \mathbb{S}^1 \times [0,1]$.

Para definir la función h, consideraremos por separado los casos en que $\psi(0,1) = I_X$ y $\psi(1,0) = I_X$.

Caso 1 : Supongamos que $\psi(0,1) = I_X$, consideramos entonces $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow HC(\psi)$ dada por

$$g(e^{2\pi ti}) = \psi(0,t)(x)$$

para todo $0 \leq t < 1$. Observemos que razonando como en *vi*., por *b*. sabemos que $R(\psi(0,t)) \subset X$ es denso y tenemos que $(\psi(0,t))(x) \in HC(\psi)$ para todo $0 \leq t < 1$, lo que nos da la buena definición de g. Veamos que g es continua. Al ser $g(0) = \psi(0,0)(x) = x$, como $\psi(0,t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $0 \leq t < 1$, para ver que g es continua basta ver que $\lim\limits_{t\to 1^-} g(e^{2\pi it}) = x$. En efecto, como $\psi(0,1)(x) = x$, entonces

$$\lim_{t\to 1^-} g(e^{2\pi it}) = \lim_{t\to 1^-} \psi(0,t)(x) = \psi(0,1)(x) = x,$$

luego g es continua. Por otro lado, por *vi*. tenemos que $f \circ g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ verifica que

$$(f \circ g)(e^{2\pi ti}) = f(g(e^{2\pi ti})) = f(\psi(0,t)(x)) = e^{2\pi mti}$$

para todo $0 \leq t < 1$, con lo cual $f \circ g$ tiene índice $m \geq 1$ y por lo tanto no es homotópicamente nula (ver[43, Capítulo 10]). Para extender g a $\overline{D}$, consideramos $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$g(z) = ((1-r)\psi(1,0) + r\psi(0,t))(x)$$

para todo $z = re^{2\pi ti} \in \overline{D}$. Es claro que $g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es continua. Además, por hipótesis b. tenemos que $g(z) \in HC(\psi)$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$. Si consideramos $h = f \circ g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, entonces $f \circ g$ se extiende continuamente a $\overline{D}$, lo cual contradice el hecho de que $f \circ g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ no es homotópicamente nula.

Caso 2 : Supongamos que $\psi(1,0) = I_X$. En primer lugar, como f es continua y $f(x) = 1$, existe W entorno de 0 tal que

$$|f(y) - 1| < 1 \tag{4.16}$$

si $y - x \in W$ e $y \in HC(\psi)$. Por *iii*. del Lema A.1.9, si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y separante de seminormas que definen la topología de X, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y) < \varepsilon\} \subset W$. Luego, si $y \in X$ y $\mu \in \mathbb{K}$ son tales que $\rho_n(y) < \varepsilon$ y $|\mu| \leq 1$, entonces $\rho_n(\mu y) = |\mu|\rho_n(y) < \varepsilon$ y se deduce que $\mu y \in W$. Así, podemos suponer que $\mu W \subset W$ para todo $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu| \leq 1$, es decir, que W es equilibrado. Dado que en un espacio de Fréchet de dimensión infinita todo compacto tiene interior vacío (ver [43, Capítulo 1]) tenemos que el compacto $\{x - \psi(0,t)(x),\ 0 \leq t \leq 1\}$ tiene interior vacío y entonces

$$U = W \setminus \{x - \psi(0,t)(x),\ 0 \leq t \leq 1\}$$

es abierto no vacío en X. Entonces como x es hipercíclico para ψ, existe $(n_0, t_0) \in G$ tal que $x - \psi(n_0, t_0)(x) \in U$. Ahora bien, como $\psi(1,0) = I_X$ se tiene que

$$\psi(n_0, t_0) = \psi\,(n_0(1,0)) \circ \psi(0, t_0) = (\psi(1,0))^{n_0} \circ \psi(0, t_0) = \psi(0, t_0),$$

por lo tanto $x - \psi(0, t_0)(x) \in U$. Luego, por definición de U tenemos que $t_0 > 1$ y $x - \psi(0, t_0)(x) \in W$. Sea entonces $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow HC(\psi)$ definida por

$$g(e^{2\pi ti}) = \begin{cases} \psi(0, 2tt_0)(x) & \text{si } 0 \leq t < \dfrac{1}{2} \\ (2t-1)x + (2-2t)\psi(0,t_0)(x) & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}.$$

Veamos que g está bien definida. Si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, entonces por hipótesis b. tenemos que $g(e^{2\pi it}) = \psi(0, 2tt_0)(x) \in HC(\psi)$. Por otro lado, si $\frac{1}{2} \leq t < 1$, como $\psi(1,0) = I_X$ tenemos que $\psi(1,0)(x) = x$ y entonces

$$g(e^{2\pi it}) = (2t-1)x + (2-2t)\psi(0,t_0)(x) = (2t-1)\psi(1,0)(x) + (2-2t)\psi(0,t_0)(x)$$

es una combinación lineal convexa de $\psi(1,0)(x)$ y $\psi(0,t_0)(x)$, con lo cual

$$g(e^{2\pi it}) = (2t-1)x + (2-2t)\psi(0,t_0)(x) \in HC(\psi).$$

Así, g está bien definida y además como $g_{|[0,\frac{1}{2}]}$ y $g_{|[\frac{1}{2},1]}$ son continuas, tenemos que g es continua.

Consideremos $f \circ g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Observemos que si $0 \leq t < \frac{1}{2}$, entonces

$$(f \circ g)(e^{2\pi ti}) = f(g(e^{2\pi ti})) = f(\psi(0, 2tt_0)(x)) = e^{4\pi mtt_0 i}.$$

Por otro lado, si $\frac{1}{2} \leq t < 1$, como $x - \psi(0,t_0)(x) \in W$ y W es equilibrado, tenemos que

$$g(e^{2\pi ti}) - x = (2t-2)(x - \psi(0,t_0)(x)) \in W.$$

Luego, $g(e^{2\pi ti}) \in HC(\psi)$ y $g(e^{2\pi ti}) - x \in W$, entonces por (4.16) tenemos que $\left|f(g(e^{2\pi ti})) - 1\right| < 1$. Por lo tanto, si $0 \leq t < 1$, como $\psi(0,0) = I_X$, $f \circ g$ empieza en

$$(f \circ g)(e^{2\pi 0i}) = f(g(0)) = f(\psi(0,0)(x)) = f(x) = 1.$$

Para $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$, $f \circ g$ se mueve a lo largo de $\mathbb{S}^1$ en sentido antihorario y da $[mt_0]$ vueltas (donde $[mt_0]$ es la parte entera de mt_0), finalizando en el disco de centro 1 y radio 1.

Para $\dfrac{1}{2} \leq t \leq 1$, como $\left|f(g(e^{2\pi ti})) - 1\right| < 1$, tenemos que $f \circ g$ se mantiene en el disco de centro 1 y radio 1. Luego, $f \circ g$ tiene índice $[mt_0]$ o bien $[mt_0] + 1$, y en particular, como $t_0 > 1$, $f \circ g$ tiene índice distinto de 0 y deducimos que no es homotópicamente nula. Extendemos g a $\overline{D}$ en la forma

$$g(z) = g(re^{2\pi ti}) = (1 - r)x + rg(e^{2\pi ti})$$

para todo $z = re^{2\pi ti} \in \overline{D}$. Observemos que dado $z = re^{2\pi ti} \in \overline{D}$, $g(z)$ es una combinación lineal convexa entre $\psi(1, 0)$ y $\psi(0, s)$, para algún $s \geq 0$, evaluada en x. Así, por hipótesis $b.$ tenemos que $g(z) \in HC(\psi)$. Por lo tanto, si definimos $h = f \circ g : \overline{D} \longrightarrow \mathbb{S}^1$, h es continua y homotópicamente nula, entonces $h_{|\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ es homotópicamente nula y llegamos a una contradicción.

Luego, probamos por un lado que si $x \in HC(\psi)$ entonces $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$ y por otro que si $F_{x,x} = \mathbb{S}^1$ entonces $x \in HC\left(\psi(1, 1)\right)$. Por lo tanto, $HC(\psi) = HC\left(\psi(1, 1)\right)$.

□

Como consecuencia del Teorema de Ansari y el teorema anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.3.5. Sea ψ una acción del semigrupo sobre un espacio de Fréchet X que satisface las propiedades $a.$ y $b.$ del Teorema 4.3.4. Si x es hipercíclico para ψ, entonces $\psi(n, t)$ es hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}, t > 0$.

Demostración. Sea x hipercíclico para ψ y sean $n \in \mathbb{N}, t > 0$, entonces $\psi(n, t) = \psi\left(n\left(1, \dfrac{t}{n}\right)\right) = \left(\psi\left(1, \dfrac{t}{n}\right)\right)^n$.

Ahora bien, por el Teorema 4.3.4 tenemos que $\psi\left(1, \dfrac{t}{n}\right)$ es hipercíclico, entonces por Teorema de Ansari deducimos que $\psi(n, t) = \left(\psi\left(1, \dfrac{t}{n}\right)\right)^n$ es hipercíclico.

□

Como consecuencia del corolario anterior, veremos que si X es un espacio de Fréchet sobre $\mathbb{C}$ y $T : X \longrightarrow X$ es un operador, entonces $HC(T) = HC(\lambda T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Teorema 4.3.6. (León-Müller[33]) Sea X un espacio de Fréchet sobre $\mathbb{C}$ y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si $x \in X$ es tal que $\left\{\lambda T^n(x),\ \lambda \in \mathbb{S}^1,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es denso en X, entonces $Orb(\lambda T, x)$ es denso en X para cada $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

En particular, para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$, los operadores T y λT tienen el mismo conjunto de vectores hipercíclicos, es decir, $HC(T) = HC(\lambda T)$.

Demostración. Sea $\psi : G \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ definida por

$$\psi(n, t) = e^{2\pi ti}T^n$$

para todo $(n, t) \in G$. Veamos que ψ es una acción de G en X.

i. $\psi(0, 0) = e^{2\pi 0 i}T^0 = I_X$.

ii. Si $(n_1, t_1), (n_2, t_2) \in G$, entonces

$$\begin{aligned}\psi((n_1, t_1) + (n_2, t_2)) &= \psi(n_1 + n_2, t_1 + t_2) = e^{2\pi(t_1+t_2)i}T^{n_1+n_2} \\ &= e^{2\pi t_1 i}e^{2\pi t_2 i}T^{n_1} \circ T^{n_2} = e^{2\pi t_1 i}T^{n_1} \circ e^{2\pi t_2 i}T^{n_2} = \psi(n_1, t_1) \circ \psi(n_2, t_2).\end{aligned}$$

iii. Sea $\varphi_\psi : G \times X \longrightarrow X$ definida por

$$\varphi_\psi\left((n, t), y\right) = \left(\psi(n, t)\right)(y) = e^{2\pi ti}T^n(y)$$

para todo $((n, t), y) \in G \times X$. Al ser X un espacio vectorial topológico y T continuo, es claro que φ_ψ es continua.

Veamos que ψ satisface las propiedades $a.$ y $b.$ del Teorema 4.3.4.

a. En este caso, tenemos que $\psi(1, 0) = I_X$ y $\psi(0, 1) = I_X$.

b. Sean $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ y $r \in [0,1]$, veamos que la combinación convexa dada por $r\psi(0,s) + (1-r)\psi(1,t)$ tiene rango denso en X. En efecto, observemos que

$$r\psi(0,s) + (1-r)\psi(1,t) = re^{2\pi si} I_X + (1-r)e^{2\pi ti} T.$$

Si consideramos el polinomio $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por

$$P(z) = re^{2\pi si} + (1-r)e^{2\pi ti} z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$r\psi(0,s) + (1-r)\psi(1,t) = re^{2\pi si} I_X + (1-r)e^{2\pi ti} T = P(T).$$

Luego por *ii*. de la Proposición 2.1.9 tenemos que $r\psi(0,s) + (1-r)\psi(1,t)$ tiene rango denso.

Así, para cada $t \in [0,1]$, por el Teorema 4.3.4 tenemos que x es vector hipercíclico para $\psi(1,t) = e^{2\pi it}T$. Luego, $Orb(\lambda T, x)$ es denso para cada $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

□

A continuación, veremos un resultado análogo al anterior, pero para los operadores mixing y débil mixing. Mas precisamente, veremos que si X es un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ es un operador mixing (respectivamente débil mixing), entonces λT es un operador mixing (respectivamente débil mixing) para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$. Previamente, necesitamos el siguiente teorema.

Teorema 4.3.7. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador definido sobre un espacio de Fréchet X y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ con $|\lambda_1| \leq |\lambda_2|$. Si el operador $R = \lambda_1 T \times \lambda_2 T : X \times X \longrightarrow X$ es hipercíclico (respectivamente mixing), entonces λT es débil mixing (respectivamente mixing) para todo $|\lambda_1| \leq |\lambda| \leq |\lambda_2|$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda_1| \leq |\lambda| \leq |\lambda_2|$ y supongamos que R es hipercíclico. Por el Teorema 2.4.3, para ver que λT es débil mixing, basta ver que dados $U, V \subset X$ abiertos no vacíos y W un entorno de 0 equilibrado (podemos suponer que W es equilibrado ya que al ser X un espacio de Fréchet, en particular es localmente convexo), $N_{\lambda T}(W, V) \cap N_{\lambda T}(U, W) \neq \emptyset$. En efecto, como R es hipercíclico, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $R^n(W \times U) \cap (V \times W) \neq \emptyset$, luego como $R^n(W \times U) \cap (V \times W) = \left(\lambda_1^n T^n(W) \cap V\right) \times \left(\lambda_2^n T^n(U) \cap W\right)$, tenemos que

$$\lambda_1^n T^n(W) \cap V \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \lambda_2^n T^n(U) \cap W \neq \emptyset.$$

Si $x \in W$ es tal que $\lambda_1^n T^n(x) \in V$, como $\dfrac{|\lambda_1|^n}{|\lambda|^n} \leq 1$ y W es equilibrado, tenemos que

$$\frac{\lambda_1^n}{\lambda^n} x \in W \qquad \text{y} \qquad \lambda^n T^n\left(\frac{\lambda_1^n}{\lambda^n} x\right) = \lambda_1^n T^n(x) \in V.$$

Luego $(\lambda T)^n \left(\dfrac{\lambda_1^n}{\lambda^n} x\right) \in (\lambda T)^n (W) \cap V$ y por lo tanto $(\lambda T)^n (W) \cap V \neq \emptyset$.

Análogamente se ve que $(\lambda T)^n (U) \cap W \neq \emptyset$. Así, $n \in N_{\lambda T}(W, V) \cap N_{\lambda T}(U, W)$ y entonces por el Teorema 2.4.3 concluimos que λT es débil mixing.

Supongamos ahora que R es mixing, entonces por la Proposición 2.3.1, para ver que λT es mixing basta ver que $N_{\lambda T}(U, W)$ y $N_{\lambda T}(W, U)$ son cofinitos. En efecto, al ser R mixing, sabemos que $N_R(U \times U, W \times W)$ y $N_R(W \times W, U \times U)$ son cofinitos. Veamos que $N_R(U \times U, W \times W) \subset N_{\lambda T}(U, W)$ y $N_R(W \times W, U \times U) \subset N_{\lambda T}(W, U)$. Sea $n \in N_R(U \times U, W \times W)$, entonces $R^n(U \times U) \cap (W \times W) \neq \emptyset$, con lo cual

$$\lambda_1^n T^n(U) \cap (W) \neq \emptyset \qquad \text{y} \qquad \lambda_2^n T^n(U) \cap (W) \neq \emptyset.$$

Así, procediendo análogamente al caso anterior, se tiene que $(\lambda T)^n (U) \cap W \neq \emptyset$, entonces $n \in N_{\lambda T}(U, W)$ y se deduce que $N_R(U \times U, W \times W) \subset N_{\lambda T}(U, W)$. Análogamente se ve que $N_R(W \times W, U \times U) \subset N_{\lambda T}(W, U)$.

Luego, $N_{\lambda T}(W, U)$ y $N_{\lambda T}(U, W)$ son cofinitos y por lo tanto λT resulta mixing.

□

Corolario 4.3.8. Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si $T : X \longrightarrow X$ es débil mixing (respectivamente mixing), entonces $\lambda T : X \longrightarrow X$ es débil mixing (respectivamente mixing) para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

Demostración. Sea $\lambda \in \mathbb{S}^1$, entonces como T es débil mixing (respectivamente mixing), en particular $R = T \times T$ es hipercíclico (respectivamente mixing). Luego por el Teorema 4.3.7, si tomamos $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ se deduce que λT es débil mixing (respectivamente mixing).

□

Algunos resultados de operadores frecuentemente hipercíclicos

Para terminar esta sección, daremos las definiciones de vectores y operadores frecuentemente hipercíclicos y enunciaremos algunos resultados análogos a los vistos para operadores hipercíclicos. Las demostraciones se pueden ver en [28, Capítulo 9].

Definición 4.3.9. Dado $A \subset \mathbb{N}_0$, se define la *densidad interior de A* como

$$\underline{\text{dens}}(A) = \underline{\text{lím}}_{N \in \mathbb{N}} \frac{\text{card}(\{0 \leq n \leq N,\, n \in A\}}{N+1}).$$

Si X es un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ es un operador, decimos que $x \in X$ es un *vector frecuentemente hipercíclico* para T si para todo $U \subset X$ abierto no vacío,

$$\underline{\text{dens}}\,\{n \in \mathbb{N}_0,\; T^n(x) \in U\} > 0.$$

Diremos que T es *frecuentemente hipercíclico* si existe $x \in X$ vector frecuentemente hipercíclico para T.

Notación. Notamos al conjunto de vectores frecuentemente hipercíclicos de T por $FCH(T)$.

Proposición 4.3.10. La propiedad de ser frecuentemente hipercíclico se preserva bajo quasiconjugación.

A partir de la definición, es claro que todo vector frecuentemente hipercíclico es hipercíclico, mas aún, se puede probar que todo vector frecuentemente hipercíclico es débil mixing. Sin embargo, la recíproca no es cierta.

Teorema 4.3.11. Todo operador frecuentemente hipercíclico es débil mixing.

Por otro lado, así como existen criterios para construir operadores hipercíclicos, tenemos también un criterio para probar que ciertos operadores son frecuentemente hipercíclicos.

Definición 4.3.12. Sean X un espacio de Fréchet y $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$. Decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ *converge incondicionalmente* si $\sum_{n=1}^{\infty} e_{\pi(n)}$ converge para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base para X, decimos que es *incondicional* si para todo $x \in X$, su representación en la forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ converge incondicionalmente.

Teorema 4.3.13. **(Criterio para operadores frecuentemente hipercíclicos)** Sea X un espacio de Fréchet separable y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si existe $X_0 \subset X$ denso y $S : X_0 \longrightarrow X_0$ tal que para todo $x \in X$ se verifica que :

i. $\sum_{n=0}^{\infty} T^n(x)$ converge incondicionalmente.

ii. $\sum_{n=0}^{\infty} S^n(x)$ converge incondicionalmente.

iii. $T(S(x)) = x$.

Entonces T es frecuentemente hipercíclico.

Vimos en los capítulos anteriores que los operadores de Birkhoff, MacLane y Rolewicz son hipercíclicos. Se puede probar que tales operadores son además frecuentemente hipercíclicos. Además, se puede probar que dada $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de pesos, si X es un espacio de Fréchet en el cual la base canónica $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es incondicional y B_w es D-caótico, B_w resulta frecuentemente hipercíclico.

Por otro lado, recordemos que dado un operador $T : X \longrightarrow X$ definido sobre un espacio de Fréchet, probamos que $X = HC(T) + HC(T)$. Sin embargo, tal propiedad no vale para operadores frecuentemente hipercíclicos necesariamente, de hecho se puede mostrar que si $T = 2B : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $\ell_p \neq FHC(T) + FHC(T)$.

El Teorema de Ansari que nos dice que $HC(T^k) = HC(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Un resultado análogo vale para operadores frecuentemente hipercíclicos, sin embargo, la demostración se basa en argumentos muy diferentes a los utilizados en el Teorema de Ansari para operadores hipercíclicos.

Teorema 4.3.14. Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador, entonces $FCH(T^k) = FCH(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En particular, si T es frecuentemente hipercíclico, entonces T^k es frecuentemente hipercíclico para todo $k \in \mathbb{N}$.

Además, si X es un espacio de Fréchet y consideramos el grupo $G = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, análogamente al caso de operadores hipercíclicos se define cuándo una acción del semigrupo G sobre X es frecuentemente hipercíclica.

Vale además un resultado análogo al Teorema 4.3.4, que junto al Teorema 4.3.14 implican el siguiente teorema.

Teorema 4.3.15. Sean X un espacio de Fréchet sobre $\mathbb{C}$ y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Entonces $FCH(\lambda T) = FCH(T)$ para todo $\lambda \in \mathbb{S}^1$.

4.4. Existencia de polinomios mixing sobre espacios de Fréchet separables de dimensión infinita

En esta sección veremos que si X es un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita para el cual existen operadores hipercíclicos (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclicos) que admiten autovalores de módulo 1, entonces existen polinomios hipercíclicos (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclicos) de grado positivo arbitrario. Para tal fin, necesitaremos previamente demostrar (Teorema 4.4.1) que si $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor tal que $|\lambda| \leq 1$ y $T : X \longrightarrow X$ es un operador hipercíclico (repectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclico), entonces el operador λT es hipercíclico (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclico). Esto implica que cualquier espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite polinomios mixing (en particular hipercíclicos) de grado positivo arbitrario.

Además, veremos que si X es un espacio de Banach separable de dimensión infinita con base de Schauder incondicional, entonces existen polinomios D-caóticos y frecuentemente hipercíclicos definidos sobre X, de grado positivo arbitrario. Estos resultados fueron probados en [13].

Tenemos entonces el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. Sea X un espacio de Fréchet separable sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita. Si existe un operador $T : X \longrightarrow X$ hipercíclico (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercílico) con un autovalor λ tal que $|\lambda| \leq 1$, entonces existe un polinomio hipercíclico (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclico) definido sobre X de grado positivo arbitrario.

Demostración. Sea $T : X \longrightarrow X$ un operador hipercíclico (respectivamente mixing, débil mixing o frecuentemente hipercíclico) y sea $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalor de T tal que $|\lambda| \leq 1$. Sea $u \neq 0$ un autovector de T asociado a λ y sea $Y = \langle u \rangle$. Entonces como X es de dimensión infinita elegimos $v \in X \setminus Y$ y definimos $Z = \langle u, v \rangle$. Fijemos $m \geq 2$ y consideremos $Q : Z \longrightarrow Y \subset X$ definido por

$$Q(\alpha x + \beta v) = \beta^m u \tag{4.17}$$

para todo $z = \alpha x + \beta v \in Z$. Entonces Q es un polinomio m-homogéneo. Por Hahn-Banach existe una proyección lineal continua $F : X \longrightarrow Z$, con lo cual, $R(F) = Z$ y $F^2 = F$. Si definimos $P = Q \circ F$, entonces $P : X \longrightarrow Y \subset X$ es un polinomio m-homogéneo no nulo.

Veamos que $P(x+y) = P(x)$ para todo $x \in X, y \in Y$. En efecto, sean $x \in X$, $y \in Y$, observemos que al ser $F^2 = F$ tenemos que $F_{|R(F)=}I_{|R(F)}$, luego como $F(y) = y$, tenemos que

$$P(x+y) = Q\left(F(x+y)\right) = Q\left(F(x)+y\right).$$

Ahora bien, si escribimos $F(x) = \alpha u + \beta v$ e $y = \alpha' u$, con $\alpha, \beta, \alpha' \in \mathbb{K}$, entonces

$$Q\left(F(x)+y\right) = Q\left(\alpha u + \beta v + \alpha' u\right) = Q\left((\alpha + \alpha')u + \beta v\right) = \beta^m u.$$

Por otro lado, $P(x) = Q\left(F(x)\right) = Q\left(\alpha u + \beta v\right) = \beta^m u$, luego para todo $x \in X, y \in Y$ tenemos que

$$P(x+y) = P(x) \tag{4.18}$$

Por otro lado si $x \in X$ y $F(x) = \alpha u + \beta v$, como $T(u) = \lambda u$, por (4.17) tenemos que

$$(T \circ P)(x) = T(Q(F(x))) = T(Q(\alpha u + \beta v)) = T(\beta^m u) = \beta^m T(u) = \beta^m \lambda u = \lambda P(x),$$

es decir, $T \circ P = \lambda P$. Veamos que $(I_X - P) \circ (I_X + P) = I_X = (I_X + P) \circ (I_X - P)$.

En efecto, si $x \in X$, entonces $(I_X - P) \circ (I_X + P)(x) = (I_X - P)(x + P(x)) = x + P(x) - P(x + P(x))$. Ahora bien, por (4.18) se tiene que $P(x + P(x)) = P(x)$, con lo cual se tiene que

$$(I_X - P) \circ (I_X + P)(x) = x + P(x) - P(x + P(x)) = x + P(x) - P(x) = x = I_X(x).$$

Análogamente resulta que $(I_X + P) \circ (I_X - P) = I_X$. Así, tenemos que

$$(I_X - P) \circ (I_X + P) = I_X = (I_X + P) \circ (I_X - P) \tag{4.19}$$

Luego, $I_X + P$ es un homeomorfismo de X en X con inversa $I_X - P$.

Veamos por inducción que $(T + P \circ T - \lambda P)^n = (I_X + P) \circ T^n - \lambda P$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $n = 1$, es claro que $T + P \circ T - \lambda P = (I_X + P) \circ T - \lambda P$.

Sea $n > 1$ y supongamos ahora que $(T + P \circ T - \lambda P)^n = (I_X + P) \circ T^n - \lambda^n P$, entonces dado $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}(T + P \circ T - \lambda P)^{n+1}(x) &= ((I_X + P) \circ T^n - \lambda^n P)((T + P \circ T - \lambda P)(x)) \\ &= (I_X + P)\left[T^{n+1}(x) + T^n(P(T(x))) - \lambda T^n(P(x))\right] - \lambda^n P\left[T(x) + P(T(x)) - \lambda P(x)\right].\end{aligned}$$

Ahora bien, como $T \circ P = \lambda P$, entonces $T^n \circ P = \lambda^n P$. Además , como $P(T(x)) - \lambda P(x) \in Y$, por (4.18) tenemos que $P\left[T(x) + P\left(T(x)\right) - \lambda P(x)\right] = P\left(T(x)\right)$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}(T + P \circ T - \lambda P)^{n+1}(x) &= (I_X + P)\left[T^{n+1}(x) + \lambda^n P(T(x)) - \lambda^{n+1} P(x)\right] - \lambda^n P(T(x)) \\ &= T^{n+1}(x) - \lambda^{n+1} P(x) + P\left[T^{n+1}(x) + \lambda^n P(T(x)) - \lambda^{n+1} P(x)\right]\end{aligned}$$

Análogamente, por (4.18) tenemos que $P\left[T^{n+1}(x) + \lambda^n P(T(x)) - \lambda^{n+1} P(x)\right] = P(T^{n+1}(x))$, luego

$$\begin{aligned}(T + P \circ T - \lambda P)^{n+1}(x) &= T^{n+1}(x) - \lambda^{n+1} P(x) + P(T^{n+1}(x)) \\ &= (I_X + P)(T^{n+1}(x)) - \lambda^{n+1} P(x).\end{aligned}$$

Entonces para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(T + P \circ T - \lambda P)^n = (I_X + P) \circ T^n - \lambda^n P \tag{4.20}$$

Veamos ahora que $P \circ T \neq \lambda P$. En efecto, supongamos que $P \circ T = \lambda P$, entonces $P \circ T^n = \lambda^n P$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Sean W y U abiertos disjuntos, entornos de 0 y u respectivamente, entonces al ser X un espacio de Fréchet, en particular es localmente convexo y podemos suponer que W es equilibrado. Como T es hipercíclico, en particular es topológicamente transitivo, entonces como $P^{-1}(U)$ y $P^{-1}(W)$ son abiertos no vacíos existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(P^{-1}(W)) \cap P^{-1}(U) \neq \emptyset$, por lo tanto existe $y \in P^{-1}(W)$ tal que $T^n(y) \in P^{-1}(U)$. Ahora bien, como W es equilibrado, $|\lambda| \leq 1$ y $P(y) \in W$, entonces $\lambda^n P(y) \in W$. Luego $P(T^n(y)) \in U$ y $P(T^n(y)) = \lambda^n P(y) \in W$, lo cual es absurdo ya que U y W eran disjuntos. Así, tenemos que $P \circ T \neq \lambda P$ y por lo tanto tenemos que $R = T + P \circ T - \lambda P$ es un polinomio de grado m. Además, por (4.20) tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$R^n = (I_X + P) \circ T^n - \lambda^n P \tag{4.21}$$

Analizaremos por separado los casos en que $|\lambda| = 1$ y $|\lambda| < 1$.

Caso 1: Si $|\lambda| = 1$, entonces por el Teorema de León-Müller (respectivamente el Corolario 4.3.8 y el Teorema 4.3.15, el operador $\lambda^{-1}T$ es hipercíclico (respectivamente débil mixing, mixing y frecuentemente hipercíclico).

Como $(\lambda^{-1}T)(u) = u$, entonces u es un punto fijo de $\lambda^{-1}T$, con lo cual remplazando eventualmente el operador T por el operador $\lambda^{-1}T$ podemos suponer que $\lambda = 1$. Luego por (4.21) tenemos que

$$R^n = (I_X + P) \circ T^n - P$$

para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

• Si T es hipercíclico, entonces existe $x \in X$ tal que $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X.

Entonces, por (4.21), como $\lambda = 1$, es claro que $\{R^n(x), n \in \mathbb{N}_0\} = \{(I_X + P) \circ T^n(x) - P(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X y por lo tanto R es un polinomio hipercíclico.

• Si T es frecuentemente hipercíclico, entonces sea $a \in X$ vector frecuentemente hipercíclico para T y fijemos $U \subset X$ abierto no vacío. Como $U + P(a)$ es abierto no vacío en X e $I_X + P$ es un homeomorfismo de X en X, existe V abierto no vacío tal que $(I_X + P)(V) \subset U + P(a)$. Observemos que si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $T^n(a) \in V$, entonces $(I_X + P)(T^n(a)) \in U + P(a)$. Así, tenemos que si $R^n(a) = (I_X + P)(T^n(a)) - P(a) \in U$.

Luego $\{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } T^n(a) \in V\} \subset \{n \in \mathbb{N} \text{ tales que } R^n(a) \in U\}$ y además como a es vector frecuentemente hipercíclico para T, tenemos que

$$\underline{\text{lím}}_{N \in \mathbb{N}} \frac{\text{card}\,\{n \leq N \text{ tales que } T^n(a) \in V\}}{N} > 0.$$

Así, resulta que

$$\underline{\text{lím}}_{N \in \mathbb{N}} \frac{\text{card}\,\{n \leq N \text{ tales que } R^n(a) \in U\}}{N} \geq \underline{\text{lím}}_{N \in \mathbb{N}} \frac{\text{card}\,\{n \leq N \text{ tales que } T^n(a) \in V\}}{N} > 0$$

y por lo tanto a resulta un vector frecuentemente hipercíclico para R.

• Si T es mixing, sean U, V abiertos en X no vacíos. Tomemos $y \in U, z \in V$ y consideremos $w = z + P(y)$.

Como $w - P(y) = z \in V$, existen U' entorno de y y V' entorno de w tales que $U' \subset U$ y $V' - P(U') \subset V$. Por otro lado como V' es abierto no vacío e $I_X + P$ es homeomorfismo de X en X, tenemos que U' e $(I_X + P)^{-1}(V')$ son abiertos no vacíos de X. Entonces, como T es mixing, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^n(U') \cap (I_X + P)^{-1}(V') \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Sea $n \geq n_0$, entonces existe $x \in U'$ tal que $T^n(x) \in (I_X + P)^{-1}(V')$. Luego $x \in U' \subset U$ y $(I_X + P)(T^n(x)) \in V'$. Por lo tanto $R^n(x) = (I_X + P)(T^n(x)) - P(x) \in R^n(U) \cap V$. Así, tenemos que $R^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$ y deducimos que que R es mixing.

• Si T es débil mixing, queremos ver que R es débil mixing, es decir, que $R \times R$ es topológicamente transitivo. Dados $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ abiertos básicos de $X \times X$ no vacíos, si tomamos $(y_1, y_2) \in U_1 \times U_2, (z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$ y definimos $(w_1, w_2) = (z_1, z_2) - (y_1, y_2)$, existen $U_1' \times U_2'$ y $V_1' \times V_2'$ abiertos tales que $U_1' \times U_2' \subset U_1 \times U_2$ y $V_1' \times V_2' - (P \times P)(U_1' \times U_2') \subset V_1 \times V_2$. Como $U_1' \times U_2'$ e $((I_X \times I_X) + (P \times P))^{-1}(V_1' \times V_2')$ son abiertos no vacíos de $X \times X$, al ser $T \times T$ topológicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$(T \times T)^n(U_1' \times U_2') \cap ((I_X \times I_X) + (P \times P))^{-1}(V_1' \times V_2') \neq \emptyset.$$

Sea $(x_1, x_2) \in U_1' \times U_2' \subset U_1 \times U_2$ tal que $(T \times T)^n(x_1, x_2) \in ((I_X \times I_X) + (P \times P))^{-1}(V_1' \times V_2')$, entonces

$$(I_X + P) \times (I_X + P)(T^n(x_1), T^n(x_2)) = ((I_X \times I_X) + (P \times P))(T^n(x_1), T^n(x_2)) \in V_1' \times V_2',$$

es decir, $(I_X + P)(T^n(x_1)) \in V_1'$ e $(I_X + P)(T^n(x_2)) \in V_2'$. Así, como

$$(R^n \times R^n)(x_1, x_2) = ((I_X + P)(T^n(x_1)) - P(x_1)) \times ((I_X + P)(T^n(x_2)) - P(x_2)),$$

entonces $(R \times R)^n(x_1, x_2) \in V_1' \times V_2' - (P \times P)(U_1' \times U_2') \subset V_1 \times V_2$.

Luego $(R \times R)^n(x_1, x_2) \in R^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2)$ y por lo tanto $R \times R$ es topológicamente transitivo, es decir, R es débil mixing.

Caso 2: Si $|\lambda| < 1$, entonces $(\lambda^n P)(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in X$. Luego para todo $x \in X$, en caso de existir $\lim_{n\to\infty} R^n(x)$, tendremos que $\lim_{n\to\infty} R^n(x) = \lim_{n\to\infty} (I_X + P)(T^n(x))$.

• Si T es hipercíclico, existe $x \in X$ tal que $\{T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X, luego como $I_X + P$ es homeomorfismo de X en X tenemos que $\{(I_X + P) \circ T^n(x), n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. Así, como $|\lambda| < 1$, tenemos que

$$\{R^n(x), n \in \mathbb{N}_0\} = \{(I_X + P) \circ T^n(x) - (\lambda^n P)(x), n \in \mathbb{N}_0\}$$

es denso en X y R resulta hipercíclico.

• Supongamos que T es frecuentemente hipercíclico, entonces existe $a \in X$ vector frecuentemente hipercíclico para T. Sea $U \subset X$ abierto no vacío, veamos que existen $V \subset X$ abierto no vacío y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $(I_X + P)(V) \subset U + \lambda^n P(a)$ para todo $n \geq n_0$. Como U es abierto no vacío y X es un espacio de Fréchet, existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $B(x_0, r) \subset U$ (donde en $B(0, r)$ la pensamos respecto de una F-norma de X). Ahora bien, como $-\lambda^n P(a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $-\lambda^n P(a) \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$.

Consideremos $V = (I_X + P)^{-1}\left(B\left(x_0, \frac{r}{2}\right)\right)$, entonces $(I_X + P)(V) = B\left(x_0, \frac{r}{2}\right)$. Así, tenemos que

$$(I_X + P)(V) + B\left(0, \frac{r}{2}\right) = B\left(x_0, \frac{r}{2}\right) + B\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset B(x_0, r) \subset U.$$

Observemos que dado $n \geq n_0$, como $-\lambda^n P(a) \in B\left(0, \frac{r}{2}\right)$, entonces $(I_X + P)(V) - \lambda^n P(a) \subset U$, de donde se deduce que $(I_X + P)(V) \subset U + \lambda^n P(a)$.

Ahora bien, si $n \geq n_0$ es tal que $T^n(a) \in V$, entonces $R^n(a) = (I_X + P) \circ T^n(a) - \lambda^n P(a) \in U$ y por lo tanto $\{n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, T^n(a) \in V\} \subset \{n \in \mathbb{N}_{\geq n_0}, R^n(a) \in U\}$. Luego como a es frecuentemente hipercíclico para T, concluimos que $\underline{\lim}_{N\in\mathbb{N}} \frac{\operatorname{card}(\{n \leq N \text{ tales que } R^n(a) \in U\})}{N} > 0$ y deducimos que R es frecuentemente hipercíclico.

• Supongamos que T es mixing y sean $U, V \subset X$ abiertos no vacíos.

Si $z \in V$, entonces $z = z + 0 \in V$, con lo cual existen $V' \subset X$ abierto no vacío y W entorno equilibrado de 0 tales que $V' + W \subset V$. Entonces como $P : X \longrightarrow Y = \langle u \rangle$ es continua y W es equilibrado existen $U' \subset X$ abierto no vacío, $C > 0$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U' \subset U, \qquad P(U') \subset \{\alpha u, |\alpha| < C\} \qquad \text{y} \qquad \{\alpha u, |\alpha| < \varepsilon\} \subset W.$$

Como $|\lambda|^n C \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y T es mixing, existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ tal que $|\lambda|^n C < \varepsilon$ y $T^n(U') \cap (I_X + P)^{-1}(V') \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Dado $n \geq n_0$, consideremos $x \in U'$ tal que $(I_X + P)(T^n(x)) \in V'$. Como $x \in U'$, podemos escribir $P(x) = \alpha u$, con $|\alpha| < C$, luego $\lambda^n P(x) = \lambda^n \alpha u$, con $|\lambda^n \alpha| < |\lambda|^n C < \varepsilon$. Así, tenemos que $\lambda^n P(x) \in W$, entonces

$$x \in U \qquad \text{y} \qquad R^n(x) = (I_X + P)(T^n(x)) - \lambda^n P(x) \in V' + W \subset V.$$

Luego $R^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$, de donde se deduce que R es mixing.

• Por último supongamos que T es débil mixing, entonces $T \times T$ es topológicamente transitivo, queremos ver que $R \times R$ es topológicamente transitivo.

Sean $U_1 \times U_2$ y $V_1 \times V_2$ abiertos básicos no vacíos en $X \times X$, entonces si $(z_1, z_2) \in V_1 \times V_2$, se tiene que $(z_1, z_2) = (z_1, z_2) + (0, 0) \in V_1 \times V_2$. Luego existen $V_1' \times V_2'$ abierto no vacío en $X \times X$ y $W_1 \times W_2$ entorno de $(0, 0)$ equilibrado tal que $(V_1' \times V_2') + (W_1 \times W_2) \subset V_1 \times V_2$. Si procedemos de manera análoga al caso anterior para W_1 y W_2, podemos considerar $C > 0$, $U_1' \times U_2'$ abierto no vacío de $X \times X$ y $\varepsilon > 0$ tales que :

i. $U_1' \times U_2' \subset U_1 \times U_2$.

ii. $(P \times P)(U_1' \times U_2') \subset \{(\alpha_1 u, \alpha_2 u), |\alpha_1| < C, |\alpha_2| < C\}$.

iii. $\{(\alpha_1 u, \alpha_2 u), |\alpha_1| < \varepsilon, |\alpha_2| < \varepsilon\} \subset W_1 \times W_2$.

Como $|\lambda|^n C \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ y $T \times T$ es topológicamente transitivo, por el Lema 1.5.10 existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que

$$|\lambda|^n C < \varepsilon \qquad \text{y} \qquad (T\times T)^n(U_1' \times U_2') \cap ((I_X + P)\times(I_X+P))^{-1}(V_1' \times V_2') \neq \emptyset.$$

Sea $(x_1, x_2) \in U_1' \times U_2'$ tal que $((I_X + P)\times(I_X+P))(T^n(x_1)\times T^n(x_2)) \in V_1' \times V_2'$, entonces $(I_X+P)(T^n(x_i)) \in V_i'$ para $1 \le i \le 2$. Como $(x_1,x_2) \in U_1' \times U_2'$, por *ii.* podemos escribir $(P\times P)(x_1,x_2) = (\alpha_1 u, \alpha_2 u)$, donde $|\alpha_1| < C$ y $|\alpha_2| < C$. Luego $|\lambda|^n P(x_i) = \lambda^n \alpha_i u$ con $|\lambda^n \alpha_i| < |\lambda|^n C < \varepsilon$ para $1 \le i \le 2$, entonces por *iii.* se deduce que

$$\lambda^n (P\times P)(x_1,x_2) = (\lambda^n P(x_1), \lambda^n P(x_2)) \in W_1 \times W_2.$$

Dado $1 \le i \le 2$, como $(I_X+P)(T^n(x_i)) \in V_i'$ y $\lambda^n P(x_i) \in W_i$, tenemos que

$$R^n(x_i) = (I_X+P)(T^n(x_i)) - \lambda^n P(x_i) \in V_i' + W_i.$$

Luego como $(V_1' + W_1)\times(V_2'+W_2) = (V_1' \times V_2') + (W_1 \times W_2) \subset V_1 \times V_2$, tenemos que

$$(x_1,x_2) \in U_1 \times U_2 \qquad \text{y} \qquad (R\times R)^n(x_1,x_2) = (R^n(x_1), R^n(x_2)) \in V_1 \times V_2.$$

Así, se tiene que $(R\times R)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$ y deducimos que $R \times R$ es topológicamente transitivo.

□

Teorema 4.4.2. Todo espacio de Fréchet separable sobre $\mathbb{K}$ de dimensión infinita admite polinomios mixing (por lo tanto hipercíclicos) de grado positivo arbitrario.

Demostración. Por el Teorema 4.2.13 existe un operador $T : X \longrightarrow X$ mixing con un punto fijo no nulo. En particular, tenemos que $\lambda = 1$ es autovalor de T, con lo cual por el Teorema 4.4.1 existe un polinomio mixing sobre X de grado positivo arbitrario.

□

Teorema 4.4.3. Si X es un espacio de Banach complejo con una base incondicional, entonces existen polinomios D-caóticos y frecuentemente hipercíclicos definidos sobre X de grado positivo arbitrario.

Demostración. Por el Teorema 4.2.14 existe un operador D-caótico y frecuentemente hipercíclico $T : X \longrightarrow X$ con un punto fijo distinto de cero. Entonces tenemos que $\lambda = 1$ es autovalor de T, por lo tanto por el Teorema 4.4.1, para todo $m \geq 2$, existe un polinomio m-homogéneo P de manera tal que $R = T + P \circ T - P$ es un polinomio frecuentemente hipercíclico de grado m en X y además $R^n = (I_X + P)\circ T^n - P$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si x tiene período k respecto a T, entonces

$$R^k(x) = (I_X + P)\circ T^k(x) - P(x) = x + P(x) - P(x) = x,$$

de donde se deduce que x tiene período k respecto de de R. Así, $\mathcal{P}er(T) \subseteq \mathcal{P}er(R)$, entonces $\overline{\mathcal{P}er(R)} = X$ y como T es topológicamente transitivo, R también. Luego R es D-caótico. □

Apéndice A

Resultados de Análisis Funcional

A.1. Espacios de Fréchet

En esta sección presentaremos algunos resultados y ejemplos de *espacios de Fréchet*. Un espacio de Fréchet X es un espacio vectorial topológico definido sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, dotado por una métrica d que está dada por una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definidas sobre X que lo hacen un espacio métrico completo. Definiremos una función $\|\cdot\| : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ inducida por $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la cual llamaremos *F-norma* y verificará que $\|x - y\| = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$. A diferencia de una norma en un espacio de Banach, la F-norma no será homogénea, es decir, no se verificará necesariamente que $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$.

Comenzamos entonces recordando la definición de un espacio vectorial topológico y alguna de sus propiedades. En lo que sigue supondremos que X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición A.1.1. Sea (X, τ) un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con τ una topología sobre X. Decimos que (X, τ) es un *espacio vectorial topológico* si las funciones $s : X \times X \longrightarrow X$ y $m : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ definidas por

$$s(x, y) = x + y \qquad \text{y} \qquad m(\lambda, x) = \lambda x$$

para todo $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$, son continuas.

Lema A.1.2. Sea X un espacio de Fréchet y $U \subset X$ un abierto no vacío. Entonces existen $U_1 \subset U$ abierto no vacío y W entorno de 0 tal que $U_1 + W \subset U$. Además, si W_0 es entorno de 0, existe W_1 entorno de 0 tal que $W_1 + W_1 \subset W_0$.

Demostración. Como s es continua, $s^{-1}(U)$ es abierto en $X \times X$. Si $x \in U$, entonces $(x, 0) \in s^{-1}(U)$, por lo tanto existen U_1 entorno de x y W entorno de 0 tales que $(x, 0) \in U_1 \times W \subset s^{-1}(U)$, es decir, $U_1 + W \subset U$. Análogamente, como $(0, 0) \in s^{-1}(W_0)$, existe W_1 entorno de 0 tal que $(0, 0) \in W_1 \times W_1 \subset s^{-1}(W_0)$ y entonces $W_1 + W_1 \subset W_0$.

□

Lema A.1.3. Sea (X, τ) un espacio vectorial topológico. Dados $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, las funciones $s_a : X \longrightarrow X$ y $m_\lambda : X \longrightarrow X$ definidas por

$$s_a(x) = x + a \qquad \text{y} \qquad m_\lambda(x) = \lambda x$$

para todo $x \in X$, son homeomorfismos.

Demostración. Veamos que s_a es un homemomorfismo. Sean $f_a : X \longrightarrow X \times X$ y $C_a : X \longrightarrow X$ definidas por

$$f_a(x) = (x, a) \qquad \text{y} \qquad C_a(x) = a$$

para todo $x \in X$. Observemos que si $\pi_1 : X \times X \longrightarrow X$ y $\pi_2 : X \times X \longrightarrow X$ son las proyecciones en la primer y segunda coordenada respectivamente, entonces

$$\pi_1 \circ f_a = I_X \qquad \text{y} \qquad \pi_2 \circ f_a = C_a,$$

donde $I_X : X \longrightarrow X$ es la identidad. Entonces $\pi_1 \circ f_a$ y $\pi_2 \circ f_a$ son continuas y se deduce que f_a es continua.

Por otro lado, observemos que $s_a(x) = x + a = s(x, a) = (s \circ f_a)(x)$ para todo $x \in X$, es decir, $s_a = s \circ f_a$.

Así, s_a resulta continua por ser composición de continuas. Ahora bien, como la inversa $s_a^{-1} : X \longrightarrow X$ está dada por

$$s_a^{-1}(y) = y - a = s_{-a}(y)$$

para todo $y \in X$, entonces s_a^{-1} es continua y concluimos que s_a es homeomorfismo.

Resta ver que m_λ es un homeomorfismo. Sean $g_\lambda : X \longrightarrow \mathbb{K} \times X$ y $C_\lambda : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ definidas por

$$g_\lambda(x) = (\lambda, x) \qquad \text{y} \qquad C_\lambda(\mu) = \lambda$$

para todo $x \in X, \mu \in \mathbb{K}$. Entonces, como $\pi_1 \circ g_\lambda = C_\lambda$ y $\pi_2 \circ g_\lambda = I_X$, se tiene que $\pi_1 \circ g_\lambda$ y $\pi_2 \circ g_\lambda$ son continuas y por lo tanto g_λ resulta continua. Así, observando que $m_\lambda = m \circ g_\lambda$, tenemos que m_λ es continua por ser composición de continuas. Además, su inversa $m_\lambda^{-1} : X \longrightarrow X$ está dada por $m_\lambda^{-1} = m_{\lambda^{-1}}$, por lo tanto m_λ^{-1} es continua y deducimos que m_λ es un homeomorfismo.

□

Para dar la definición de espacio de Fréchet, previamente recordemos las siguientes definiciones.

Definición A.1.4. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $C \subset X$ un subconjunto de X. Decimos que C es :

i. *Convexo* si para todo $x, y \in C$, el segmento $[x, y] = \{tx + (1 - t)y, t \in [0, 1]\} \subset C$.

ii. *Redondeado* si para todo $x \in C, \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| = 1$, se tiene que $\lambda x \in C$.

iii. *Equilibrado* si para todo $x \in C, \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$, se tiene que $\lambda x \in C$.

iv. *Absorvente* si para todo $x \in X$ existe $t > 0$ tal que $tx \in C$, es decir, $X = \bigcup_{t>0} tC$.

v. *Absolutamente convexo* si es equilibrado y convexo.

X es *localmente convexo* si el origen tiene una base local de conjuntos absolutamente convexos y absorventes.

Definición A.1.5. Un funcional $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ se dice *seminorma* para X si para todo $x, y \in X, \lambda \in \mathbb{K}$ se verifican :

i. $\rho(x + y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

ii. $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$.

Dada una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, diremos que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *separante* si para todo $x \in X$ tal que $\rho_n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $x = 0$.

Proposición A.1.6. Sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de seminormas creciente y separante en X.

Si definimos $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x - y))$$

para todo $(x, y) \in X \times X$, entonces (X, d) es un espacio métrico.

Demostración. Previamente, observemos que dados $x, y \in X$, se tiene que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x - y)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1,$$

por lo tanto la serie converge para todo $x, y \in X$ y d está bien definida. Veamos que d es una métrica sobre X.

i. Es claro que $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$, ya que $\frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x - y)) \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. Dados $x, y \in X$, se tiene que $\rho_n(x-y) = \rho_n((-1)(y-x)) = |-1|\rho_n(y-x) = \rho_n(y-x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo cual $d(x,y) = d(y,x)$.

iii. Sean $x, y \in X$, queremos ver que $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

Si $d(x,y) = 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-y)) = 0$. Luego dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\text{mín}\,(1, \rho_n(x-y)) = 0$, de donde $\rho_n(x-y) = 0$. Así, $\rho_n(x-y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces como $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es separante tenemos que $x - y = 0$, es decir, $x = y$.

Si $x = y$, entonces por *ii*. de la definición de seminorma tenemos que $\rho_n(x-y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\text{mín}\,(1, \rho_n(x-y)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y se deduce que $d(x,y) = 0$.

iv. Dados $x, y, z \in X$, por *i*. de la definición de seminorma tenemos que $\rho_n(x-z) \leq \rho_n(x-y) + \rho_n(y-z)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$d(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-z)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-y) + \rho_n(y-z))\,.$$

Ahora bien, observemos que si $a, b \geq 0$, entonces $\text{mín}\,(1, a+b) \leq \text{mín}\,(1, a) + \text{mín}\,(1, b)$. Así, deducimos que

$$\begin{aligned} d(x,z) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-y) + \rho_n(y-z)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-y)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(y-z)) \\ &= d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Luego (X, d) es un espacio métrico.

□

Observación A.1.7. *i*. Una característica importante de esta métrica es ser *invariante por traslaciones*, esto es, $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ para todo $x, y, z \in X$.

En efecto, dados $x, y, z \in X$, tenemos que

$$d(x+z, y+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n((x+z)-(y+z))) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \text{mín}\,(1, \rho_n(x-y)) = d(x,y).$$

ii. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos $\overline{\rho_n} = \max_{1\leq k\leq n} \rho_k$, tenemos que $\overline{\rho}_n \leq \overline{\rho_{n+1}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir, $(\overline{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Por lo tanto, si reemplazamos eventualmente $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $(\overline{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$, podemos suponer que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente. Entonces tenemos la siguiente definición.

Definición A.1.8. Un espacio vectorial X se dice *espacio de Fréchet* si existe una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente y separante tal que (X, d) es completo, donde d es la métrica definida en la Proposición A.1.6.

Sabemos que en un espacio métrico, tanto las nociones de límite de una sucesión convergente y de Cauchy, así como también la noción de entorno de un punto están vinculadas a la métrica del espacio en cuestión. En un espacio de Fréchet X, al ser su métrica inducida por una sucesión de seminormas creciente y separante, podremos establecer una relación entre estas nociones y la sucesión de seminormas que definen la métrica del espacio X. El siguiente lema establece tales relaciones, y lo utilizamos en la tesis en varias oportunidades.

Lema A.1.9. Sea X un espacio de Fréchet definido por una sucesión de seminormas $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente y separante. Si $x \in X$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ y $U \subset X$, entonces se verifican:

i. $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$ si y sólo si $\rho_n(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

ii. $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si y sólo si $\rho_n(x_k - x_l) \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii. U es entorno de x si y sólo si existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y-x) < \varepsilon\} \subset U$.

Demostración. *i*. Supongamos que $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, queremos ver que $\rho_n(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, podemos suponer $0 < \varepsilon < 1$. Como $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ para todo $k \geq k_0$, entonces

$$d(x_k, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{mín}(1, \rho_m(x_k - x)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

para todo $k \geq k_0$. En particular, $\dfrac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x)) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ y por lo tanto $\operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x)) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$. Ahora bien, como $\varepsilon < 1$, entonces $\operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x)) = \rho_n(x_k - x)$ para todo $k \geq k_0$. Luego, $\rho_n(x_k - x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$ y por lo tanto $\rho_n(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\rho_n(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, veamos que $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis sabemos que $\rho_{n_0}(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, con lo cual existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_{n_0}(x_k - x) < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ para todo $k \geq k_0$. Además como $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, entonces $\rho_n(x_k - x) \leq \rho_{n_0}(x_k - x) < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ para todo $n \leq n_0, k \geq k_0$. Luego para todo $k \geq k_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} d(x_k, x) &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x)) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x)) \\ &< \sum_{n=1}^{n_0} \rho_n(x_k - x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d(x_k, x) < \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$ y entonces $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$.

ii. Supongamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, queremos ver que $\rho_n(x_k - x_l) \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $0 < \varepsilon < 1$, como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_k, x_l) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ para todo $k, l \geq k_0$. Entonces $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} \operatorname{mín}(1, \rho_m(x_k - x_l)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ para todo $k, l \geq k_0$. En particular como $\varepsilon < 1$, procediendo como en *i*. deducimos que $\rho_n(x_k - x_l) < \varepsilon$ para todo $k, l \geq k_0$ y por lo tanto $\rho_n(x_k - x_l) \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Recíprocamente, supongamos ahora que $\rho_n(x_k - x_l) \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y veamos que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por hipótesis $\rho_{n_0}(x_k - x_l) \underset{k,l\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_{n_0}(x_k - x_l) < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ para todo $k, l \geq k_0$. Luego como $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente tenemos que $\rho_n(x_k - x_l) \leq \rho_{n_0}(x_k - x_l) < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}$ para todo $k, l \geq k_0, n \leq n_0$. Entonces para todo $k, l \geq k_0$ tenemos que

$$\begin{aligned} d(x_k, x_l) &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x_l)) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{mín}(1, \rho_n(x_k - x_l)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \rho_n(x_k - x_l) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Así, $d(x_k, x_l) < \varepsilon$ para todo $k, l \geq k_0$ y se deduce que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

iii. Si U es entorno de x, existe $\delta > 0$ tal que $B_d(x, \delta) \subset U$. Sean $\varepsilon = \dfrac{\delta}{2n_0}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2}$, veamos que $\{y \in X \text{ tales que } \rho_{n_0}(y - x) < \varepsilon\} \subset U$. En efecto, si $y \in X$ es tal que $\rho_{n_0}(y - x) < \varepsilon = \dfrac{\delta}{2n_0}$, entonces como $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente tenemos que $\rho_n(y-x) \leq \rho_{n_0}(y-x) < \varepsilon = \dfrac{\delta}{2n_0}$ para todo $n \leq n_0$, luego

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \sum_{n=1}^{n_0} \frac{1}{2^n} \min(1, \rho_n(y-x)) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min(1, \rho_n(y-x)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{n_0} \rho_n(y-x) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \end{aligned}$$

Así, $y \in B_d(x,\delta) \subset U$ y se deduce que $\{y \in X \text{ tales que } \rho_{n_0}(y-x) < \varepsilon\} \subset U$.

Recíprocamente, sean $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y-x) < \varepsilon\} \subset U$, veamos que U es entorno de x. Observemos que

$$\{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y-x) < \min\{1,\varepsilon\}\} \subset \{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y-x) < \varepsilon\},$$

entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varepsilon < 1$. Veamos que $B_d\left(x, \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right) \subset U$.

Sea $z \in B_d\left(x, \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right)$, entonces $d(z,x) < \dfrac{\varepsilon}{2^n}$, es decir, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \min(1, \rho_k(z-x)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. y se tiene que $\rho_n(z-x) < \varepsilon$. Luego $z \in \{y \in X \text{ tales que } \rho_n(y-x) < \varepsilon\} \subset U$ y entonces $x \in B_d\left(x, \dfrac{\varepsilon}{2^n}\right) \subset U$.

□

Ejemplo A.1.10. Si X es un espacio de Banach, entonces X es un espacio de Fréchet, tomando para cada $n \in \mathbb{N}$ la seminorma dada por $\rho_n(x) = \|x\|_X$ para todo $x \in X$.

A continuación veremos algunos ejemplos clásicos de espacios de Fréchet.

Ejemplo A.1.11. *i*. Sea $H(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f \text{ holomorfa}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\rho_n : H(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$\rho_n(f) = \sup_{|z| \leq n} |f(z)|$$

para toda $f \in H(\mathbb{C})$. Es claro que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas creciente y separante. Además, dada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H(\mathbb{C})$, tenemos que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ en $H(\mathbb{C})$ si y sólo si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente sobre todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Ahora bien, observemos que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente sobre todo $K \subset \mathbb{C}$ compacto si y sólo si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en $\overline{B(0,m)}$ para todo $m \in \mathbb{N}$, si y sólo si $\rho_m(f_n - f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Así, como $H(\mathbb{C})$ es un espacio completo con la topología inducida por la convergencia uniforme sobre compactos, entonces $H(\mathbb{C})$ resulta completo con la métrica d inducida por $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto $H(\mathbb{C})$ es un espacio de Fréchet. Además, si consideramos $D = \{P \in [\mathbb{Q} + \mathbb{Q}i][z]\}$, se puede ver que D es denso numerable en $H(\mathbb{C})$. Luego $H(\mathbb{C})$ es un espacio de Fréchet separable.

ii. Sea $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos $\rho_n : \omega \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por

$$\rho_n(x) = \sup_{1\leq k\leq n} |x_k|$$

para todo $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \omega$. Entonces $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas creciente y separante.

Veamos que ω es completo. En efecto, sea $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \omega$ una sucesión de Cauchy, queremos ver que existe $y \in \omega$ tal que $x^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$. Por el Lema A.1.9, tenemos que $\rho_l\left(x^{(n)} - x^{(m)}\right) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. En particular, dado $l \in \mathbb{N}$, $\left(x_l^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy, entonces como $\mathbb{K}$ es completo, existe $y_l \in \mathbb{K}$ tal que $x_l^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_l$. Consideremos $y = (y_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \omega$, veamos que $x^{(n)} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} y$ en ω.

En efecto, por el Lema A.1.9, basta ver que $\rho_l\left(x^{(n)} - y\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Sean $l \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$. Como $x_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_k$ para todo $1 \leq k \leq l$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left|x_k^{(n)} - y_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$ y todo $1 \leq k \leq l$.

Entonces tenemos que

$$\rho_l\left(x^{(n)} - y\right) = \sup_{1\leq k\leq l} \left|x_k^{(n)} - y_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$, por lo tanto $\rho_l\left(x^{(n)} - y\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego ω es un espacio de Fréchet.

Además, es claro que $D = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, 0, \ldots), x_k \in \mathbb{Q}$ para todo $1 \leq k \leq N, N \in \mathbb{N}\} \subset \omega$ es denso numerable. Luego ω es un espacio de Fréchet separable.

iii. Si X es un espacio de Fréchet separable, entonces $X^{\mathbb{N}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_n \in X, n \in \mathbb{N}\}$ es un espacio de Fréchet separable.

En efecto, sea $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y separante que define la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $q_n : X^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$q_n\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sup_{1\leq k\leq n} \rho_n(x_k)$$

para todo $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$. Al ser $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ creciente y separante, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas creciente y separante, que hacen de $X^{\mathbb{N}}$ un espacio métrico completo. Sea $D^{\mathbb{N}} = \{(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, 0, \ldots), x_k \in D$ para todo $1 \leq k \leq N, N \in \mathbb{N}\} \subset X^{\mathbb{N}}$, con $D \subset X$ denso numerable. Entonces $D^{\mathbb{N}}$ es denso numerable y por lo tanto $X^{\mathbb{N}}$ es separable. Luego $X^{\mathbb{N}}$ es un espacio de Fréchet separable.

Definición A.1.12. Sea X un espacio de Fréchet, con $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de seminormas creciente y separante y d su métrica asociada. Definimos el funcional $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\left(1, \rho_n(x)\right)$$

para todo $x \in X$. Entonces se verifica que $d(x, y) = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$.

Proposición A.1.13. Sea $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ el funcional de la definición anterior, entonces para todo $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$, se verifica que :

i. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

ii. $\|\lambda x\| \leq \|x\|$ si $|\lambda| \leq 1$.

iii. $\lim_{\lambda\to 0} \|\lambda x\| = 0$.

iv. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Demostración. *i*. y *iv*. ya fueron probadas en el Lema A.1.9.

ii. Sean $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$, entonces

$$\|\lambda x\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\left(1, |\lambda| \rho_n(x)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\left(1, \rho_n(x)\right) = \|x\|.$$

iii. Como $\|\lambda x\| = d(\lambda x, 0)$ y la multiplicación por escalares es continua en X, tenemos que $\|\lambda x\| \underset{|\lambda|\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

Definición A.1.14. Si X es un espacio vectorial, un funcional $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface las condiciones *i*. a *iv*. de la Proposición A.1.13 se llama F-norma.

Vale la pena destacar que una F-norma $\|\cdot\|$ no es homogénea como sí sucede con una norma en un espacio de Banach, es decir, no se verifica necesariamente que $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in X$. A continuación veremos una propiedad para una F-norma, que sustituirá la carencia de homogeneidad.

Proposición A.1.15. Si $\|\cdot\|$ es una F-norma en un espacio vectorial X, entonces $\|\lambda x\| \leq (|\lambda| + 1) \|x\|$ para todo $x \in X, \lambda \in \mathbb{K}$.

Demostración. Procedemos por inducción en $|\lambda|$. Si $|\lambda| \leq 1$, por la propiedad *ii*. de la Proposición A.1.13 tenemos que $\|\lambda x\| \leq \|x\| \leq (|\lambda| + 1) \|x\|$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n < |\lambda| \leq n + 1$ y supongamos que $\|\mu x\| \leq (|\mu| + 1) \|x\|$ para todo $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $|\mu| \leq n$. Escribamos $\lambda = \lambda - \dfrac{\lambda}{|\lambda|} + \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$. Observemos que

$$\left|\lambda - \frac{\lambda}{|\lambda|}\right| = |\lambda| \left|1 - \frac{1}{|\lambda|}\right| = \left||\lambda| - 1\right| = |\lambda| - 1 \leq n,$$

entonces por hipótesis inductiva tenemos que $\left\|\left(\lambda - \frac{\lambda}{|\lambda|}\right)x\right\| \leq \left(\left|\lambda - \frac{\lambda}{|\lambda|}\right| + 1\right)\|x\| = |\lambda|\,\|x\|$. Luego por *i.* de la Proposición A.1.13 tenemos que

$$\|\lambda x\| \leq \left\|\left(\lambda - \frac{\lambda}{|\lambda|}\right)x\right\| + \left\|\frac{\lambda}{|\lambda|}x\right\| \leq |\lambda|\,\|x\| + \|x\| = (|\lambda| + 1)\,\|x\|\,.$$

□

Operadores en espacios de Fréchet

Definición A.1.16. Sean X e Y espacios de Fréchet. Decimos que $T : X \longrightarrow Y$ es un *operador* si T es lineal y continua.
Notación. Notamos por $\mathcal{L}(X, Y)$ a los operadores de X en Y.

En la siguiente proposición, dada una función lineal $T : X \longrightarrow Y$ con X e Y espacios de Fréchet, describimos la continuidad de T en función de las seminormas que definen las topologías de X e Y.

Proposición A.1.17. Sean X e Y espacios de Fréchet y sean $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de seminormas crecientes y separantes que definen las topologías de X e Y respectivamente. Si $T : X \longrightarrow Y$ es lineal, entonces son equivalentes :

i. T es un operador.

ii. Para todo $m \in \mathbb{N}$, existen $n \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $q_m(T(x)) \leq M\rho_n(x)$ para todo $x \in X$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ *ii.* Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces por *iii.* del Lema A.1.9 tenemos que $W = \{y \in Y \text{ tales que } q_m(y) < 1\}$ es un entorno de 0 en Y. Luego como T es continua, existe W' entorno de 0 en X tal que $T(W') \subset W$. Por otro lado, al ser W' entorno de 0 en X, nuevamente por *iii.* del Lema A.1.9 existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $\{z \in X \text{ tales que } \rho_n(z) < \varepsilon\} \subset W'$.

Sea $x \in X$, veamos que existe $M > 0$ tal que $q_m(T(x)) \leq M\rho_n(x)$. En efecto, observemos que para todo $\delta > 0$ tenemos que $\rho_n\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x\right) = \frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}\rho_n(x) < \varepsilon$, luego $\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x \in W'$ y entonces

$$\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}T(x) = T\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x\right) \in W.$$

Así, se tiene que $\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}q_m(T(x)) = q_m\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}T(x)\right) < 1$, es decir, $q_m(T(x)) < \frac{\rho_n(x)+\delta}{\varepsilon}$.

Por lo tanto, si tomamos $M = \frac{1}{\varepsilon}$ y hacemos tender δ a cero concluimos que $q_m(T(x)) \leq M\rho_n(x)$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, queremos ver que $T(x_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} T(x)$.

Por *i.* del Lema A.1.9, basta ver que $q_m(T(x_k) - T(x)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. En efecto, dado $m \in \mathbb{N}$, como $x_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, por *ii.* del Lema A.1.9 tenemos que $\rho_n(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, como por hipótesis existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que

$$q_m(T(x_k) - T(x)) = q_m(T(x_k - x)) \leq M\rho_{n_0}(x_k - x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

se deduce que $q_m(T(x_k) - T(x)) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

□

A continuación, veremos algunos ejemplos clásicos de operadores sobre espacios de Fréchet.

Ejemplo A.1.18. *i.* Sea $D : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ dado por

$$D(f) = f'$$

para toda $f \in H(\mathbb{C})$. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f \in H(\mathbb{C})$, dado $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $|z_0| \leq n$, por la desigualdad de Cauchy (ver Teorema B.0.9) tenemos que

$$\left|f'(z_0)\right| \leq \sup_{|z-z_0|\leq 1} |f(z)| \leq \sup_{|z|\leq n+1} |f(z)|\,,$$

entonces

$$\rho_n(D(f)) = \sup_{|z|\leq n} \left|f'(z)\right| \leq \sup_{|z|\leq n+1} \left|f'(z)\right| = \rho_{n+1}(f).$$

Por lo tanto por la Proposición A.1.17 tenemos que D es un operador sobre $H(\mathbb{C})$. Al operador D lo llamaremos *operador de MacLane*.

ii. Dado $a \in \mathbb{C}$, definimos $T_a : H(\mathbb{C}) \longrightarrow H(\mathbb{C})$ por

$$T_a(f)(z) = f(z+a)$$

para toda $f \in H(\mathbb{C})$ y todo $z \in \mathbb{C}$. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $f \in H(\mathbb{C})$, si $|z| \leq n$ tenemos que $|z+a| \leq n + |a|$. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $|a| \leq m$, entonces $|f(z+a)| \leq \max\limits_{|w|\leq n+m} |f(w)| = \rho_{n+m}(f)$. Luego

$$\rho_n(T_a(f)) = \max_{|z|\leq n} |f(z+a)| \leq \max_{|z|\leq n+m} |f(z)| = \rho_{n+m}(f),$$

con lo cual por la Proposición A.1.17 tenemos que T_a es un operador sobre $H(\mathbb{C})$. Al operador T_a lo llamaremos *operador de Birkhoff*.

iii. Sea $X = \ell_p$ $(1 \leq p < \infty)$ o $X = c_0$, definimos el *desplazamiento hacia atrás* $B : X \longrightarrow X$ por

$$B\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Mas en general, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $\lambda B : X \longrightarrow X$ por

$$\lambda B\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = (\lambda x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. En este caso, como X es un espacio de Banach, es claro que λB es un operador para todo $\lambda \in \mathbb{C}$. Al operador λB lo llamaremos *operador de Rolewicz*.

iv. Si $X = \omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, consideremos para cada $k \in \mathbb{K}$ la k-ésima proyección $\pi_k : \omega \longrightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$\pi_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_k$$

para toda $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$. Entonces, dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \omega$, como $\rho_k\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sup\limits_{1\leq i\leq k} |x_i|$ (ver *ii*. del Ejemplo A.1.11) tenemos que

$$|\pi_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}})| = |x_k| \leq \sup_{1\leq i\leq k} |x_i| = \rho_k((x_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Luego por la Proposición A.1.17, π_k es un operador sobre $X = \omega$.

Si X e Y son espacios de Fréchet y $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son las sucesiones de seminormas crecientes y separantes asociadas a X e Y respectivamente, entonces notamos por $X \oplus Y$ al espacio $X \times Y$ dado por la sucesión de seminormas $(\rho_n + q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $\rho_n + q_n : X \oplus Y \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$(\rho_n + q_n)(x, y) = (\rho_n(x) + q_n(y)),$$

para todo $(x, y) \in X \oplus Y$. Entonces el espacio $X \oplus Y$ resulta un espacio de Fréchet, el cual es separable si X e Y son separables. Además, notamos por $S \oplus T$ al operador $S \oplus T : X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y$ dado por

$$(S \oplus T)(x, y) = (S(x), T(y))$$

para todo $(x, y) \in X \oplus Y$.

A continuación probaremos que dado un espacio de Fréchet X y un operador $T : X \longrightarrow X$, si $Y \subset X$ es un subespacio de Fréchet, bajo ciertas condiciones tenemos que $T_{|Y}$ y T son quasiconjugados. Por lo tanto, $T_{|Y}$ heredará todas las propiedades de T que se preserven bajo quasiconjugación.

Proposición A.1.19. (Principio de comparación para operadores sobre espacios de Fréchet)

Sea X un espacio de Fréchet y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Si $Y \subset X$ es un subespacio de Fréchet denso y T-invariante ($\overline{Y} = X$ y $T(Y) \subset Y$) tal que la inclusión $i : Y \hookrightarrow X$ y $T_{|Y} : Y \longrightarrow Y$ son continuas, entonces $T_{|Y}$ y T son quasiconjugados.

Demostración. Veamos que $T_{|Y}$ y T son quasiconjugados vía la inclusión i. Observemos que para todo $y \in Y$ se tiene que

$$(i \circ T_{|Y})(y) = i(T(y)) = T(y) = (T \circ i)(y),$$

con lo cual

$$i \circ T_{|Y} = T \circ i.$$

Además, i es continua tal que $i(Y) = Y \subset X$ es denso. Luego $i : Y \longrightarrow X$ es continua de rango denso tal que $i \circ T_{|Y} = T \circ i$, de donde se deduce que $T_{|Y}$ y T son quasiconjugados vía i.

□

Definición A.1.20. Sean X e Y espacios de Fréchet, $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones crecientes y separantes de seminormas que definen la topología de X e Y respectivamente y $(T_j)_{j\in J} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dado un subconjunto $A \subset X$, decimos que A es *acotado* si $\sup\limits_{x\in A} \rho_n(x) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decimos que la familia $(T_j)_{j\in J}$ es *equicontinua* si para todo $W \subset Y$ entorno de 0 existe un entorno $V \subset X$ entorno de 0 en X tal que $T_j(V) \subset W$ para todo $j \in J$. Equivalentemente, dicho en términos de seminormas, $(T_j)_{j\in J}$ es *equicontinua* si para todo $m \in \mathbb{N}$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $M > 0$ tales que $q_m(T_j(x)) \leq M\rho_n(x)$ para todo $x \in X$, $j \in J$.

Proposición A.1.21. Sean X un espacio de Fréchet sobre $\mathbb{C}$, $M \subset X$ un subespacio y $T : M \longrightarrow \mathbb{C}$ continua tal que $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y todo $x \in M$. Entonces existen $C > 0$ y una seminorma $\rho : X \longrightarrow \mathbb{C}$ asociada a la topología de X tales que $|T(x)| \leq C\rho(x)$ para todo $x \in M$.

Demostración. Consideremos $W = D(0,1) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, entonces como T es continua y W es entorno de 0 en $\mathbb{C}$, existe $W' \subset M$ entorno de 0 en X tal que $T(W') \subset W$. Si $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas que definen la topología de X, entonces $(\rho_{n|M})_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de seminormas que definen una métrica en M, aunque M no resulte un espacio de Fréchet necesariamente, ya que M en principio no tiene por que ser completo. Sin embargo, procediendo como en la demostración del ítem *iii*. del Lema A.1.9, existen $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$ tales que

$$\{x \in M, \rho_n(x) < \varepsilon\} \subset W'.$$

Luego, dado $\delta > 0$ tenemos que $\rho_n\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x\right) = \frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}\rho_n(x) < \varepsilon$ para todo $x \in X$. En particular, dado $x \in M$, tenemos que $\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x \in W'$ y $\left|T\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x\right)\right| < 1$. Ahora bien, por hipótesis , como $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, se tiene que

$$\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}|T(x)| = \left|T\left(\frac{\varepsilon}{\rho_n(x)+\delta}x\right)\right| < 1.$$

Así, tenemos que $|T(x)| < \frac{\rho_n(x)+\delta}{\varepsilon}$ para todo $\delta > 0$, entonces haciendo tender δ a cero tenemos que $|T(x)| \leq C\rho_n(x)$ para todo $x \in M$, donde $C = \frac{1}{\varepsilon}$.

□

Corolario A.1.22. Sea X es un espacio de Fréchet, $M \subset X$ un subespacio denso y $\|\cdot\| : M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una seminorma continua. Entonces existe una única seminorma $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ continua tal que $\rho_{|M} = \|\cdot\|$.

Demostración. Observemos que por la Proposición A.1.21, existen $C > 0$ y una seminorma $q : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ asociada a la topología de X tales que $\|x\| \leq Cq(x)$ para todo $x \in M$. Además, como $M \subset X$ es denso, para cada $x \in X$ existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Definimos entonces $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ por

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|$$

para todo $x \in X$, con $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Veamos que ρ está bien definida.

En efecto, sean $x \in X$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, debemos ver que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ converge. Como $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, por *ii*. del Lema A.1.9 tenemos que $q(x_n - x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, luego

$$|\|x_n\| - \|x_m\|| \leq \|x_n - x_m\| \leq Cq(x_n - x_m) \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Así, tenemos que $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ es de Cauchy, luego como $\mathbb{R}_{\geq 0}$ es completo, existe $\rho(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.
Por otro lado, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ es tal que $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, debemos ver que $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|$.
Sean $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ e $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\|$, entonces tenemos que

$$|\|x_n\| - \|y_n\|| \leq \|x_n - y_n\| \leq Cq(x_n - y_m) \leq C\,(q(x_n - x) + q(x - y_n)) = C\,(q(x_n - x) + q(y_n - x)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Luego ρ está bien definida. Además, como $\|\cdot\|$ es seminorma, es claro que ρ es seminorma y $\rho_{|M} = \|\cdot\|$. Como M es denso, puede existir una única seminorma continua que extienda $\|\cdot\|$ a todo X. Veamos que ρ que es continua.

Sea $x \in X$, veamos que ρ es continua en x. En efecto, dado $\delta > 0$ e $y \in X$ tal que $q\,(x - y) < \delta$, consideremos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tales que $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ e $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$, entonces existe n_0 tal que $q\,(x_n - x) < \frac{\delta}{2}$ y $q\,(y_n - y) < \frac{\delta}{2}$ para todo $n \geq n_0$. Luego, para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$q\,(x_n - y_n) \leq q\,(x_n - x) + q\,(x - y) + q\,(y - y_n) < \frac{\delta}{2} + \delta + \frac{\delta}{2} = 2\delta,$$

de donde se deduce que $\lim\limits_{n\to\infty} q\,(x_n - y_n) \leq \delta$. Por lo tanto tenemos que

$$\rho(x - y) = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq C \lim_{n\to\infty} q\,(x_n - y_n) \leq 2C\delta$$

y entonces ρ resulta continua.

□

Algunos resultados de análisis funcional

Para finalizar esta sección enunciaremos algunos resultados clásicos de análisis funcional, que se pueden encontrar en [43].

Teorema A.1.23. (Teorema de categoría de Baire) Sea X un espacio métrico completo. Si $D \subset X$ es intersección numerables de abiertos densos en X, entonces D es denso en X.

Teorema A.1.24. Sea X un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$ y $T : X \longrightarrow X$ un operador. Entonces el espectro de T dado por $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\lambda I - T$ es inversible$\}$ es compacto y $\sigma(T) \subseteq \overline{D(0, \|T\|)}$.

Además, si f y g son funciones holomorfas sobre un entorno de $\sigma(T)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $f(T)$ y $g(T)$ son operadores en X y se cumple que :

i. $(\lambda f)(T) = \lambda f(T)$.

ii. $(f + g)(T) = f(T) + g(T)$.

iii. $(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$.

iv. $f(T)^* = f\,(T^*)$.

vi. Si $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \sigma(T)$, entonces $f(T)$ es inversible y $f(T)^{-1} = \left(\frac{1}{f}\right)(T)$.

vii. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es el polinomio dado por $P(z) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n z^n$, entonces $P(T) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n T^n$.

viii. Si f dada por $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es holomorfa en $D(0, r)$ para algún $r > \|T\|$, entonces $f(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n$.

Teorema A.1.25. (Hahn-Banach) Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $M \subset X$ un subespacio y $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ una seminorma continua. Si $u : M \longrightarrow \mathbb{K}$ es lineal y continua tal que $|u(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in M$, entonces existe $\tilde{u} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $\left|\tilde{u}(x)\right| \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$.

Corolario A.1.26. Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Entonces valen los siguientes hechos :

i. Si $\rho : X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una seminorma y $x_0 \in X$, entonces existe $U : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal y continua tal que $u(x_0) = \rho(x_0)$ y $|u(x)| \leq \rho(x)$ para todo $x \in X$.

ii. Si X es un espacio de Fréchet y $M \subset X$ es un subespacio, entonces dado un funcional $u : M \longrightarrow \mathbb{K}$, existe un funcional $\widetilde{u} : X \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\widetilde{u}_{|M} = u$.

iii. Si $M \subset X$ es un subespacio cerrado y $x \in X \setminus M$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*_{|M} = 0$ y $x^*(x) \neq 0$.

iv. Sea X un espacio de Fréchet y $M \subset X$ un subsepacio denso. Si $y^* \in M^*$, entonces existe una única $\varphi \in X^*$ tal que $\varphi_{|M} = y^*$.

Teorema A.1.27. (Gráfico cerrado) Si X, Y son espacios de Fréchet y $T : X \longrightarrow Y$ es lineal tal que el gráfico de T dado por $\text{graf}(T) = \{(x, T(x)), x \in X\} \subset X \times X$ es cerrado, entonces T es un operador.

Teorema A.1.28. (Banach-Steinhaus) Sean X e Y espacios de Fréchet y $T_j : X \longrightarrow Y$ operadores.

Si $\sup\limits_{j \in J} \left\|T_j(x)\right\| < \infty$ para todo $x \in X$, entonces $\sup\limits_{j \in J} \left\|T_j\right\| < \infty$.

A.2. Bases de Markushevich

En esta sección nuestro objetivo será demostrar que en todo espacio de Banach X separable de dimensión infinita existe una *base de Markushevich*, esto es, sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ y $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ tales que $X = \overline{\langle\{x_n, n \in \mathbb{N}\}\rangle}$, $X^* = \overline{\langle\{x_n^*, n \in \mathbb{N}\}\rangle}^{\omega^*}$ y $x_n^*(x_m) = \delta_{nm}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$. Los contenidos de esta sección están basados en [29].

Comenzaremos con la definición de un *sistema biortogonal* en $X \times X^*$ y posteriormente diremos cuándo un sistema biortogonal es *total*.

Definición A.2.1. Sea X un espacio de Banach y sea Γ un conjunto no vacío. Una familia $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ es un *sistema biortogonal* en $X \times X^*$ si $x_\beta^*(x_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ para todo $\alpha, \beta \in \Gamma$.

Además, diremos que la familia $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ es un *sistema mínimo* si existe una familia $\left\{x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X^*$ tal que $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ es un sistema biortogonal en $X \times X^*$.

Definición A.2.2. Una familia $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ se dice *fundamental* si $X = \overline{\left\langle\left\{x_\gamma, \gamma \in \Gamma\right\}\right\rangle}$.

En el caso que el sistema fundamental $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ sea mínimo, existe una única familia $\left\{x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X^*$ tal que $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ es un sistema biortogonal. Tal familia se conoce como el sistema de *coeficientes funcionales* de $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ y el sistema biortogonal $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ se llama *sistema fundamental*.

Utilizaremos la notación $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ en el caso que $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ sea un sistema biortogonal fundamental.

Definición A.2.3. Sea $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X \times X^*$ un sistema biortogonal. Diremos que:

i. $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ es *total* si $X^* = \overline{\left\langle\left\{x_\gamma^*, \gamma \in \Gamma\right\}\right\rangle}^{\omega *}$.

ii. $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una *base de Markushevich* para X si $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ es fundamental y total, es decir, si $X = \overline{\left\langle\left\{x_\gamma, \gamma \in \Gamma\right\}\right\rangle}$ y $X^* = \overline{\left\langle\left\{x_\gamma^*, \gamma \in \Gamma\right\}\right\rangle}^{\omega *}$.

iii. $\left\{x_\gamma, x_\gamma^*\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ es *reducido* si $X^* = \overline{\left\langle\left\{x_\gamma^*, \gamma \in \Gamma\right\}\right\rangle}^{\|\cdot\|}$.

En lo que sigue, llamaremos *M-base* a una base de Markushevich para X y cuando sea conveniente utilizaremos la notación $\left\{x_\gamma\right\}_{\gamma\in\Gamma}$ para la M-base en cuestión.

Ahora que dimos la definición de una M-base, queremos demostrar un teorema que nos permita garantizar la existencia de una M-base para cualquier espacio de Banach separable de dimensión infinita.

Definición A.2.4. Sea X un espacio de Banach. Entonces dados $A \subset X$ y $B \subset X^*$, decimos que :

i. A separa puntos de B si dados $\varphi_1, \varphi_2 \in B$ tales que $\varphi_1 \neq \varphi_2$, existe $x \in A$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$.

ii. B separa puntos de A si dados $x, y \in A$ tales que $x \neq y$, existe $\varphi \in B$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Lema A.2.5. ***(Markushevich [35])*** Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita . Sean $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ y $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ tales que $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ y $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tienen dimensión infinita y además se verifica que:

(M_1) $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

(M_2) $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

Entonces existe un sistema biortogonal $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^\infty$ tal que $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ y $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $z_n \neq 0$ y $z_n^* \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

En las construcciones de $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ y $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty$ utilizaremos fuertemente las propiedades (M_1) y (M_2) y el hecho de que los subespacios $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ y $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tienen dimensión infinita. Comenzamos considerando $x_1 = z_1$, entonces $x_1 \neq 0$ y por (M_2) existe $z_{m_1}^*$ tal que $z_{m_1}^*(x_1) \neq 0$.

Sea $x_1^* = \dfrac{z_{m_1}^*}{z_{m_1}^*(x_1)}$, entonces $x_1^*(x_1) = 1$ y además como $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tiene dimensión infinita tenemos que $\left\langle \left\{x_1^*\right\} \right\rangle \subsetneq \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, por lo tanto existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $z_m^* \notin \left\langle \left\{x_1^*\right\} \right\rangle$. Tomemos m_2 el menor natural tal que $z_{m_2}^* \notin \left\langle \left\{x_1^*\right\} \right\rangle$ y consideremos $x_2^* = z_{m_2}^* - z_{m_2}^*(x_1)x_1^*$, entonces como $x_1^*(x_1) = 1$ tenemos que $x_2^*(x_1) = 0$.

Por otro lado, observemos también que $x_2^* \neq 0$, ya que si $x_2^* = 0$ tendríamos que $z_{m_2}^* = z_{m_2}^*(x_1)x_1^* \in \left\langle \left\{x_1^*\right\} \right\rangle$, lo cual es absurdo por la definición de m_2. Luego $x_2^* \neq 0$, entonces por (M_1) existe z_{n_2} tal que $x_2^*(z_{n_2}) \neq 0$.

Sea $x_2 = \dfrac{z_{n_2} - x_1^*(z_{n_2})x_1}{x_2^*(z_{n_2})}$, entonces $x_1^*(x_2) = 0$ y $x_2^*(x_2) = 1$. Análogamente, como $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tiene dimensión infinita tenemos que $\langle \{x_1, x_2\} \rangle \subsetneq \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$. Entonces si consideramos n_3 el menor natural tal que $z_{n_3} \notin \langle \{x_1, x_2\} \rangle$ y definimos $x_3 = z_{n_3} - x_1^*(z_{n_3})x_1 - x_2^*(z_{n_3})x_2$, tenemos que $x_1^*(x_3) = x_2^*(x_3) = 0$.

Además como $z_{n_3} \notin \langle \{x_1, x_2\} \rangle$ tenemos que $x_3 \neq 0$, por lo tanto por (M_2) existe $z_{m_3}^*$ tal que $z_{m_3}^*(x_3) \neq 0$.

Luego si definimos $x_3^* = \dfrac{z_{m_3}^* - z_{m_3}^*(x_1)x_1^* - z_{m_3}^*(x_2)x_2^*}{z_{m_3}^*(x_3)}$, tenemos que $x_3^*(x_1) = x_3^*(x_2) = 0$ y $x_3^*(x_3) = 1$.

Así siguiendo, construimos un sistema biortogonal $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X \times X^*$, donde para cada para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos por un lado

$$x_{2k}^* = z_{m_{2k}}^* - \sum_{i=1}^{2k-1} z_{m_{2k}}^*(x_i)x_i^* \qquad \text{y} \qquad x_{2k+1}^* = \frac{z_{m_{2k+1}}^* - \sum_{i=1}^{2k} z_{m_{2k+1}}^*(x_i)x_i^*}{z_{m_{2k+1}}^*(x_{2k+1})},$$

con m_{2k} el menor natural tal que $z_{m_{2k}}^* \notin \left\langle \left\{x_1^*, \ldots, x_{2k-1}^*\right\} \right\rangle$ y $z_{m_{2k+1}}^*$ tal que $z_{m_{2k+1}}^*(x_{2k+1}) \neq 0$, y por otro lado

$$x_{2k} = \frac{z_{n_{2k}} - \sum_{i=1}^{2k-1} x_i^*(z_{n_{2k}})x_i}{x_{2k}^*(z_{n_{2k}})} \qquad \text{y} \qquad x_{2k+1} = z_{n_{2k+1}} - \sum_{i=1}^{2k} x_i^*(z_{n_{2k+1}})x_i,$$

con $z_{n_{2k}}$ tal que $x_{2k}^*(z_{n_{2k}}) \neq 0$ y n_{2k+1} el menor natural tal que $z_{n_{2k+1}} \notin \langle \{x_1, \ldots, x_{2k}\} \rangle$.

Resta ver que $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ y $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

Veamos primero que $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$. En efecto, por construcción tenemos que $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle \subseteq \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, veamos que vale la igualdad. Supongamos que $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle \subsetneq \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, entonces sea $n_0 > 1$ el mínimo natural tal que $z_{n_0} \notin \left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, en particular $z_{n_0} \notin \langle \{x_1, \ldots, x_k\} \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por definición de n_0, para cada $1 \leq j \leq n_0 - 1$ tenemos que $z_j \in \left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, luego existe $k_j \in \mathbb{N}$ par tal que $z_j \in \left\langle \left\{x_1, \ldots, x_{k_j}\right\} \right\rangle$.

Sea $j_0 = \max\limits_{1 \leq j \leq n_0 - 1} \left\{k_j\right\}$, entonces j_0 es par y $z_j \in \left\langle \left\{x_1, \ldots, x_{j_0}\right\} \right\rangle$ para todo $1 \leq j \leq n_0 - 1$.

Sabemos que $z_{n_0} \notin \left\langle \left\{ x_1, \ldots, x_{j_0} \right\} \right\rangle$, entonces como $z_j \in \left\langle \left\{ x_1, \ldots, x_{j_0} \right\} \right\rangle$ para todo $1 \leq j \leq n_0 - 1$ y n_0 es el primer natural tal que $z_{n_0} \notin \left\langle \left\{ x_1, \ldots, x_{j_0} \right\} \right\rangle$, por definición tenemos que

$$x_{j_0+1} = z_{n_0} - \sum_{i=1}^{j_0} x_i^*(z_{n_0}) x_i$$

y por lo tanto

$$z_{n_0} = x_{j_0+1} + \sum_{i=1}^{j_0} x_i^*(z_{n_0}) x_i.$$

Luego $z_{n_0} \in \left\langle \left\{ x_1, \ldots, x_{j_0+1} \right\} \right\rangle$, lo cual es una contradicción ya que habíamos observado que $z_{n_0} \notin \langle \{x_1, \ldots, x_k\} \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego $\left\langle \{x_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

Para probar que $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, observemos que por construcción $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle \subseteq \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, luego si suponemos que $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle \subsetneq \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, realizando un razonamiento análogo al hecho en el caso anterior tenemos que $\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$. □

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema.

Teorema A.2.6. ***(Markushevich [35])***

i. Todo espacio de Banach X separable de dimensión infinita tiene una M-base numerable.

ii. Si X^* es separable, la M-base numerable puede tomarse reducida.

iii. Si X es un espacio de Banach tal que (X^*, ω^*) es separable , entonces existe un sistema biortogonal numerable y total para X.

Demostración. La idea será utilizar la separabilidad de X y su dimensión infinita para hallar subconjuntos de X y X^* que cumplan las hipótesis del lema anterior y de esta manera construir el sistema biortogonal buscado.

i. Supongamos que X es un espacio de Banach separable, entonces existe $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ denso numerable en $(X, \|\cdot\|)$. Por otro lado, por el Teorema de Banach-Alaoglu sabemos que (B_{X^*}, ω^*) es compacto, con lo cual al ser X separable tenemos que (B_{X^*}, ω^*) es metrizable. Luego al ser (B_{X^*}, ω^*) compacto y metrizable, resulta separable.

Consideremos entonces $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty \subset (B_{X^*}, \omega^*)$ denso numerable y veamos que :

a. $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

b. $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

c. $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ y $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tienen dimensión infinita.

a. Sean $\varphi_1 \neq \varphi_2 \in \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$, queremos ver que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_1(z_j) \neq \varphi_2(z_j)$.

En efecto, como $\varphi_1 \neq \varphi_2$, existe $x \in X$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$. Además, al ser $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ denso en X existe una subsucesión $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $z_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x$, luego como φ_1 y φ_2 son continuas tenemos que $\varphi_1(z_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_1(x)$ y $\varphi_2(z_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi_2(x)$. Si $\varphi_1(z_{n_k}) = \varphi_2(z_{n_k})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces haciendo tender k a infinito tenemos que $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi_1(z_{n_{k_0}}) \neq \varphi_2(z_{n_{k_0}})$, entonces tomando $j = n_{k_0}$ concluimos que $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

b. Sean $x_1, x_2 \in \left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tales que $x_1 \neq x_2$, queremos ver que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $z_j^*(x_1) \neq z_j^*(x_2)$.

En efecto, como $x_1 \neq x_2$, tenemos que

$$\|x_1 - x_2\| = \text{máx}\,\{\varphi(x_1 - x_2), \varphi \in S_{X^*}\} \neq 0,$$

entonces existe $\varphi \in S_{X^*} \subset B_{X^*}$ tal que $\varphi(x_1 - x_2) \neq 0$. Ahora bien, como $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ es ω^*-denso en (B_{X^*}, ω^*) y (B_{X^*}, ω^*) es metrizable, existe $(z_{n_k}^*)_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_{n_k}^* \xrightarrow{\omega^*} \varphi$, por lo tanto $z_{n_k}^*(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x)$ para todo $x \in X$. En particular, $z_{n_k}^*(x_1 - x_2) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(x_1 - x_2)$, entonces como $\varphi(x_1 - x_2) \neq 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z_{n_{k_0}}^*(x_1 - x_2) \neq 0$. Así, $z_{n_{k_0}}^*(x_1) \neq z_{n_{k_0}}^*(x_2)$ y concluimos que $\{z_n^*\}_{n=1}^\infty$ separa puntos de $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$.

c. Supongamos que $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^\infty \right\rangle$ tiene dimensión finita, entonces es $\|\cdot\|$-cerrado y

$$X = \overline{\{z_n\}_{n=1}^{\infty}}^{\|\cdot\|} \subset \overline{\left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle,$$

lo cual es absurdo ya que X tiene dimensión infinita. Análogamente, si $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle$ tuviera dimensión finita, en particular sería ω^*-cerrado. Luego $B_{X^*} = \overline{\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}}^{\omega^*} \subset \overline{\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*} = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle$, lo cual es absurdo ya que B_{X^*} tiene dimensión infinita.

Por lo tanto $\left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle$ y $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle$ tienen dimensión infinita. Entonces, por el Lema A.2.5 existe un sistema biortgonal $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times X^*$ de manera tal que

$$\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad \left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle,$$

luego

$$\overline{\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} = \overline{\left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} \qquad \text{y} \qquad \overline{\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*} = \overline{\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*}.$$

Por lo tanto como $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ y $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset B_{X^*}$ son densos, deducimos que $\overline{\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} = X$ y $\overline{\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*} = X^*$. Luego $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una M-base numerable para X.

ii. Supongamos ahora que $(X^*, \|\cdot\|)$ es separable y consideremos $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ denso numerable. Al ser X^* separable, X también lo es, consideremos entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ denso numerable. Razonando como en *i*., existe un sistema biortogonal $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times X^*$ tal que

$$\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad \left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle.$$

En este caso, al ser $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ $\|\cdot\|$-densos en X y X^* respectivamente, deducimos que

$$\overline{\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} = X \qquad \text{y} \qquad \overline{\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|} = X^*.$$

Por lo tanto en este caso, la M-base numerable $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ para X es una base reducida.

iii. Supongamos que (X^*, ω^*) es separable y consideremos $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ denso numerable en (X^*, ω^*).

Si $Y = \overline{\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\|\cdot\|}$, al ser $\left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle$ denso numerable en Y, se deduce que $(Y, \|\cdot\|)$ es separable. Por lo tanto $(B_Y, \|\cdot\|)$ es separable y podemos considerar $\{d_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ denso numerable en $(B_Y, \|\cdot\|)$. Sea $(x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \subset B_X$ tal que $d_n^*(x_k^n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \|d_n^*\|$. Dado $n \in \mathbb{N}$, si llamamos $M_n = \left\{x_k^n, k \in \mathbb{N}\right\}$ tenemos que $M_n \subset B_X$ es tal que $\|d_n^*\| = \sup\left\{\left|d_n^*(x)\right|, x \in M_n\right\}$. Consideremos $Z = \overline{\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right\rangle}^{\|\cdot\|}$, entonces como $\left\langle \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \right\rangle$ es denso numerable en Z, éste resulta separable. Sea entonces $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ denso numerable en Z, análogamente a lo hecho en *i*. y *ii*., por el Lema A.2.5 existe un sistema biortogonal $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times X^*$ tal que

$$\left\langle \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle \qquad \text{y} \qquad \left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle = \left\langle \{z_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle.$$

Así, utilizando el hecho de que $\{z_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es denso en (X^*, ω^*) concluimos que $\overline{\left\langle \{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \right\rangle}^{\omega^*} = X^*$, por lo tanto $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times X^*$ es un sistema biortogonal numerable y total.

□

Apéndice B

Resultados de Análisis Complejo

A continuación enunciamos algunos resultados clásicos de análisis complejo que utilizamos en la tesis. Se pueden encontrar por ejemplo en [25, 42].

Teorema B.0.7. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ con $U \subset \mathbb{C}$ abierto no vacío. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones holomorfas en U tal que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ converge uniformemente sobre todo $K \subset U$ compacto, entonces f es holomorfa.

Mas aún, en tal caso tenemos que $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f'$ converge puntualmente en U y uniformemente sobre todo $K \subset U$ compacto.

Teorema B.0.8. **(de la función abierta)** Si $f : U \longrightarrow U$ es holomorfa no constante con $U \subset \mathbb{C}$ abierto, entonces f es abierta.

Teorema B.0.9. **(Desigualdad de Cauchy)** Sea f una función holomorfa en $B(z_0, R)$ y para cada $0 < r < R$ definimos $M(z) = \sup\{|f(z)|, |z - z_0| = r\}$, entonces $\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq n!\dfrac{M(r)}{r^n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema B.0.10. Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ punto fijo de f. Si f es derivable en z_0 y $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $|f'(z_0)| > \lambda > 1$, entonces existe $R > 0$ tal que $D(z_0, \lambda r) \subset f(D(z_0, r))$ para todo $r < R$.

Demostración. Como $|f'(z_0)| > \lambda > 1$, existe $R > 0$ tal que f es inyectiva en $D(z_0, 2R)$ y

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right| = \left|\frac{f(z) - z_0}{z - z_0}\right| > \lambda > 1$$

para todo $z \in D(z_0, 2R)$. Al ser f inyectiva en $D(z_0, 2R)$, tenemos que $f : D(z_0, 2R) \longrightarrow f(D(z_0, 2R))$ es un homeomorfismo, por lo tanto $f(F) \subset \mathbb{C}$ es cerrado para todo $F \subset D(z_0, 2R)$ cerrado.

En particular, $f(\partial D(z_0, R)) \subset \mathbb{C}$ es una curva cerrada simple. Sea $r < R$ y supongamos que existe $z \in D(z_0, \lambda r)$ de manera tal que $z \notin f(D(z_0, r))$, entonces por el Teorema de la curva de Jordan (ver [25, Chapter VIII]), si notamos por $[z, z_0]$ al segmento que une z con z_0, existe $w \in \partial D(z_0, r)$ tal que $f(w) \in f(\partial D(z_0, r)) \cap [z, z_0]$.

Luego, como $\left|\dfrac{f(w) - f(z_0)}{w - z_0}\right| > \lambda > 1$ y $|w - z_0| = r$, entonces

$$|z - z_0| > |f(w) - z_0| > \lambda |w - z_0| = \lambda r,$$

lo cual es una contradicción ya que $z \in D(z_0, \lambda r)$. Por lo tanto $D(z_0, \lambda r) \subset f(D(z_0, r))$.

□

B.1. Conjuntos de Julia y Fatou de funciones holomorfas

En esta sección nuestro objetivo es introducir los conceptos de conjuntos de *Julia* y *Fatou* de funciones holomorfas y demostrar algunas propiedades importantes que los caracterizan. Trabajaremos con funciones holomorfas definidas sobre abiertos de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}^*$, donde $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^* \cup \{\infty\}$ es el plano ampliado dotado de la *métrica de cordal*.

Definición B.1.1. Entenderemos por ∞ a un número complejo sin signo ni argumento cuyo módulo es mayor que cualquier número real. Definimos el *plano complejo ampliado* por $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, y lo dotamos con la *métrica de cordal* dada por

$$d(z,w) = \frac{2\,|z-w|}{\sqrt{\left(1+|z|^2\right)\left(1+|w|^2\right)}} \quad \text{si } w \neq \infty \qquad \text{y} \qquad d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}\,.$$

Definición B.1.2. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas definidas en un abierto $U \subset \mathbb{C}$. Decimos que $\mathcal{F}$ es *normal* en U si para cada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ uniformemente convergente sobre todo $K \subset U$ compacto a una función f o a infinito. Además, dada $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H(U)$, diremos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en U si $\mathcal{F} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es normal en U.

Definición B.1.3. Sea $U \subset \mathbb{C}$ y sea $f : U \longrightarrow U$ una función holomorfa. Dado $z \in U$, decimos que f es *normal* en z si existe V entorno de z de manera tal que la familia $\left\{f^n = f \circ \overset{(n)}{\cdots} \circ f,\ n \in \mathbb{N}_0\right\}$ es normal en V. Definimos los conjuntos de *Fatou* y *Julia* de f por $\mathcal{F}(f) = \{z \in U \text{ tales que } f \text{ es normal en } z\}$ y $\mathcal{J}(f) = (\mathcal{F}(f))^c$ respectivamente.

Definición B.1.4. Sean $U \subset \mathbb{C}$ (o $\mathbb{C}^*$) abierto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones holomorfas definidas sobre U. Diremos que $w \in \mathbb{C}$ (o $\mathbb{C}^*$) es un valor omitido por $\mathcal{F}$ si $w \notin \mathrm{Im}(f)$ para toda $f \in \mathcal{F}$, o equivalentemente si $w \notin \bigcup_{f\in\mathcal{F}} f(U)$.

La demostración del siguiente resultado puede verse por ejemplo en [25, XII].

Teorema B.1.5. (Montel-Caratheodory) Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $\mathcal{F} = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C}\}$ una familia de funciones holomorfas. Si $\mathcal{F}$ omite dos puntos, entonces $\mathcal{F}$ es normal en U.

Corolario B.1.6. Sea $U \subset \mathbb{C}$ abierto y $\mathcal{F} = \{f : U \longrightarrow \mathbb{C}^*\}$ una familia de funciones holomorfas. Si $\mathcal{F}$ omite tres puntos, entonces $\mathcal{F}$ es normal en U.

Como primer aplicación del Teorema de Montel-Caratheodory tenemos el siguiente teorema.

Teorema B.1.7. Sean $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, $z_0 \in \mathcal{J}(f)$ y V entorno de z_0. Entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V) = \mathbb{C}$ o $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ para algún $w \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V)$ omitiera mas de un punto, por el Teorema de Montel-Caratheodory tenemos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sería normal en V, lo cual es absurdo ya que $z_0 \in \mathcal{J}(f)$. Luego $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V) = \mathbb{C}$ o $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(V) = \mathbb{C} \setminus \{w\}$ para algún $w \in \mathbb{C}$.

□

A continuación daremos una clasificación de los puntos periódicos de una función holomorfa con respecto a su derivada. Utilizaremos esta clasificación para dar ciertas características de los conjuntos de Fatou y Julia de distintos tipos de funciones holomorfas.

Definición B.1.8. Sea $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ una función holomorfa. Si $z_0 \in \mathcal{P}er(f)$ tiene período n, decimos que $\mathcal{O}rb(f, z_0) = \left\{z_0, f(z_0), \ldots, f^{n-1}(z_0)\right\}$ es un *n-ciclo* para f y definimos el *multiplicador* o *autovalor* de z_0 como

$$\lambda(z_0) = (f^n)'(z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} f'\left(f^j(z_0)\right).$$

Además diremos que z_0 es:
i. Superatractor si $|\lambda(z_0)| = 0$.
ii. Atractor si $0 < |\lambda(z_0)| < 1$.
iii. Repulsor si $|\lambda(z_0)| > 1$.
iv. Indiferente si $|\lambda(z_0)| = 1$.
Clasificamos a $\lambda(z_0)$ en *racionalmente indiferente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\lambda(z_0))^m = 1$ e *irracionalmente indiferente* en otro caso.

Teorema B.1.9. Si $f : U \longrightarrow U$ es holomorfa y z_0 es punto fijo repulsor de f, entonces la familia $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en z_0.

Demostración. Supongamos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en z_0, entonces existe V entorno de z_0 tal que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V, luego existe $(f^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión que converge uniformemente sobre todo $K \subset V$ compacto a una función holomorfa g o a infinito. Como z_0 es punto fijo de f, tenemos que $f^n(z_0) = z_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge a infinito en V. Luego $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente a una función holomorfa g en V, entonces por el Teorema B.0.7 tenemos que $\left|(f^{n_k})'(z_0)\right| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |g'(z_0)|$.

Ahora bien, como z_0 es punto fijo de f, se tiene que $(f^m)'(z_0) = (f'(z_0))^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Entonces como z_0 es punto fijo repulsor, $|\lambda(z_0)| = |f'(z_0)| > 1$ y por lo tanto

$$\left|(f^{n_k})'(z_0)\right| = \left|f'(z_0)\right|^{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

lo cual es absurdo ya que $(f^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es subsucesión de $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Luego $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en z_0

□

Corolario B.1.10. Si $f : U \longrightarrow U$ es holomorfa y z_0 es punto periódico repulsor de f, entonces $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en z_0.

Demostración. Sea m el período de z respecto a f y consideremos $g = f^m$, entonces z_0 es punto fijo repulsor de g.

Luego por el teorema anterior tenemos que $\{g^n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f^{mn}\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en z_0, entonces $(f^{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ que no converge uniformemente en compactos de U y deducimos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en U.

□

Teorema B.1.11. Si $f : U \longrightarrow U$ es holomorfa, con U abierto de $\mathbb{C}$, entonces $\mathcal{J}(f) \subseteq U$ es cerrado y $\mathcal{F}(f) = U \setminus \mathcal{J}(f)$ es abierto.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{J}(f) \subset U$ no es cerrado, entonces existe $z_0 \in \overline{\mathcal{J}(f)}$ tal que $z_0 \notin \mathcal{J}(f)$, con lo cual $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ y entonces $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en z_0. Sea entonces V entorno de z_0 tal que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V, como $z_0 \in \overline{\mathcal{J}(f)}$ tenemos que $\mathcal{J}(f) \cap V \neq \emptyset$, es decir , existe $w_0 \in \mathcal{J}(f)$ tal que $w_0 \in V$.

Así, como $w_0 \in \mathcal{J}(f)$ y V es entorno de w_0 tenemos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es normal en V y llegamos a una contradicción. Luego $\mathcal{J}(f)$ es cerrado y entonces $\mathcal{F}(f) = U \setminus \mathcal{J}(f)$ es abierto.

□

Definición B.1.12. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función y sea $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Diremos que A es:

i. *Invariante hacia adelante bajo f* si $f(A) \subseteq A$.

ii. *Invariante hacia atrás bajo f* si $f^{-1}(A) \subseteq A$.

iii. *Fuertemente invariante hacia adelante bajo f* si $f(A) = A$.

iv. *Fuertemente invariante hacia atrás bajo f* si $f^{-1}(A) = A$.

v. *Completamente invariante bajo f* si $f(A) \subseteq A$ y $f^{-1}(A) \subseteq A$.

Proposición B.1.13. Sea $f : X \longrightarrow X$ una función y sea $A \subseteq X$ un subconjunto de X. Entonces son equivalentes :

i. A es completamente invariante bajo f.

ii. Para todo $z \in X$ se verifica que : $z \in A \Leftrightarrow f(z) \in A$.

Demostración. *i.* $\Rightarrow$ *ii.* Si $z \in A$, entonces $f(z) \in f(A) \subseteq A$, con lo cual $z \in f(A)$. Por otra parte, si $f(z) \in A$, entonces $z \in f^{-1}(A) \subseteq A$, es decir, $z \in A$.

ii. $\Rightarrow$ *i.* Si $y \in f(A)$, existe $z \in A$ tal que $y = f(z)$, con lo cual, por *ii.* tenemos que $f(z) \in A$. Luego $y = f(z) \in A$ y por lo tanto $f(A) \subseteq A$.

Por otra parte, si $z \in f^{-1}(A)$, entonces $f(z) \in A$. Luego, por *ii.* tenemos que $z \in A$ y se tiene que $f^{-1}(A) \subseteq A$.

□

Corolario B.1.14. Sean $f : X \longrightarrow X$ una función, $A \subseteq X$ un subconjunto de X y $n \in \mathbb{N}$, entonces :

i. A es completamente invariante bajo $f \Leftrightarrow A^c = X \setminus A$ es completamente invariante bajo f.

ii. Si A es completamente invariante bajo f, entonces $f^n(A) \subseteq A$ y $f^{-n}(A) = A$.

Demostración. *i.* Supongamos que A es completamente invariante bajo f, entonces por *ii.* de la Proposición B.1.13 tenemos que para todo $z \in X$ se verifica que $z \in A \Leftrightarrow f(z) \in A$. Esto equivale a decir que $z \notin A \Leftrightarrow f(z) \notin A$, es decir, $z \in A^c \Leftrightarrow f(z) \in A^c$. Entonces aplicando nuevamente *ii.* de la Proposición B.1.13 tenemos que A^c es completamente invariante bajo f.

Si $z \in f^{-n}(A)$, entonces $f^n(z) = f(f^{n-1}(z)) \in A$, luego por *ii.* de la Proposición B.1.13 tenemos que $f^{n-1}(z) \in A$. Así siguiendo, concluimos que $z \in A$ y entonces $f^{-n}(A) \subseteq A$.

Por otra parte, si $z \in A$, entonces $f^n(z) \in f^n(A) \subseteq A$. Luego $z \in f^{-n}(A)$ y entonces $A \subseteq f^{-n}(A)$, por lo tanto $f^{-n}(A) = A$. □

Teorema B.1.15. Sea $f : U \longrightarrow U$ holomorfa. Entonces $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f)$ son completamente invariantes bajo f.

Demostración. Observemos previamente que al ser $\mathcal{J}(f) = (\mathcal{F}(f))^c$, por el Corolario B.1.14, si vemos que $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante bajo f, entonces $\mathcal{J}(f)$ también lo será. Para ver que $\mathcal{F}(f)$ es completamente invariante bajo f, por *ii.* de la Proposición B.1.13 basta ver que para todo $z_0 \in U$ se verifica que $z_0 \in \mathcal{F}(f) \Leftrightarrow f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$. Sea entonces $z_0 \in U$ y supongamos que $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, queremos ver que $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$.

Si f es constante, entonces $\mathcal{F}(f) = U$ y por lo tanto $f(z_0) \in U$. Supongamos entonces que f no es constante, por el Teorema B.0.8 tenemos que f es abierta. Por otro lado, como $z_0 \in \mathcal{F}(f)$, existe V abierto tal que $z_0 \in V$ y $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V. Entonces como f es abierta tenemos que $f(V)$ es abierto tal que $f(z_0) \in f(V)$, veamos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en $f(V)$. Sea $K \subset f(V)$ compacto. Entonces $(f_{|V})^{-1}(K)$ es compacto, ya que si $(f_{|V})^{-1}(K) \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, con $U_i \subset V$ abierto para todo $i \in I$, entonces $K \subset \bigcup_{i\in I} f(U_i)$, luego como f es abierta y K es compacto, existe $i_1, \dots i_N \in I$ tales que $K \subset \bigcup_{j=1}^{N} f(U_{i_j})$. Entonces

$$(f_{|V})^{-1}(K) \subset \bigcup_{j=1}^{N} (f_{|V})^{-1}\left(f(U_{i_j})\right) = \bigcup_{i=1}^{N} U_{i_j}.$$

Como $\{f^n, n \in \mathbb{N}\}$ es normal en V, existe una subsucesión $(f^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente en K. Por lo tanto $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$.

Supongamos ahora que $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$, queremos ver que $z_0 \in \mathcal{F}(f)$. Como $f(z_0) \in \mathcal{F}(f)$, existe V abierto tal que $f(z_0) \in V$ y $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V. Sea $W = f^{-1}(V)$, entonces como f es continua tenemos que W es abierto y además $z_0 \in W$, veamos que $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en W.

En efecto, sea $C \subset W$ compacto, entonces como f es continua tenemos que $f(C) \subset V$ es compacto. Luego como $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en V, existe $(f^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión uniformemente convergente en $f(C)$, con lo cual $(f^{n_k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ es uniformemente convergente en C.

Así, $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es normal en W y por lo tanto $z_0 \in \mathcal{F}(f)$. □

Proposición B.1.16. Si f es holomorfa y $n \in \mathbb{N}$, entonces $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{J}(f^n) = \mathcal{J}(f)$.

Demostración. Sea $z_0 \in \mathcal{F}(f^n)$, entonces $(f^{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ es normal en algún entorno V de z_0. Por lo tanto,

$$\{f^m, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{j=1}^{n} \left\{f^{nk+j}, k \in \mathbb{N}_0\right\}$$

es normal en V y se deduce que $z_0 \in \mathcal{F}(f)$.

Recíprocamente, si $z_0 \in \mathcal{F}(f)$ y $(f^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es normal en un entorno V de z_0, $(f^{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ es normal en V.

Luego $\mathcal{F}(f^n) = \mathcal{F}(f)$. Además, como $(\mathcal{F}(f^n))^c = \mathcal{J}(f^n)$ y $(\mathcal{F}(f))^c = \mathcal{J}(f)$, tenemos que $\mathcal{J}(f) = \mathcal{J}(f^n)$. □

B.2. Propiedades del conjunto de Julia para polinomios

Por el Teorema de Montel-Caratheodory, sabemos que si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es holomorfa y $z_0 \in \mathcal{J}(f)$, entonces $\bigcup_{n=0}^{\infty} f^n(U)$ omite a lo sumo un punto de $\mathbb{C}$ para todo U entorno de z_0. Veremos a continuación que si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio y U es un abierto no vacío en $\mathbb{C}$ tal que $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U)$ omite un punto de $\mathbb{C}$, entonces P queda determinado por ese valor omitido.

Teorema B.2.1. Sea $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio y $U \subset \mathbb{C}$ abierto no vacío. Si $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, entonces existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}_0$ tales que $P(z) = a + \lambda\,(z-a)^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si $a \notin \mathrm{Im}(P)$, entonces el polinomio $Q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$Q(z) = P(z) - a$$

para todo $z \in \mathbb{C}$ no tiene raíces, con lo cual Q es no nulo de grado cero. Si escribimos $Q(z) = \lambda$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces podemos escribir $P(z) = a + \lambda(z-a)^0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Si $a \in \mathrm{Im}(P)$, sea $b \in \mathbb{C}$ tal que $P(b) = a$, veamos que b es un punto omitido por $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U)$.

Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}_0$ y $w \in U$ tal que $P^{n_0}(w) = b$, entonces $P^{n_0+1}(w) = a$, lo cual es absurdo ya que $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$. Entonces b es omitido por $\bigcup_{n=0}^{\infty} P^n(U) = \mathbb{C} \setminus \{a\}$, por lo tanto $b = a$.

Sea $Q : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$Q(z) = P(z) - a$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces Q tiene como única raíz a $z = a$. Así, existen $\lambda \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $Q(z) = \lambda\,(z-a)^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$, de donde se deduce que $P(z) = a + \lambda\,(z-a)^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

A continuación, veremos un lema que nos permitirá demostrar que todo polinomio $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ de grado $n \geq 2$, tiene o bien un punto fijo racionalmente indiferente, o bien un punto fijo repulsor.

Lema B.2.2. Si R es un polinomio de grado $n \geq 2$ y $w_1, \ldots, w_n$ son sus n ceros distintos, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R'(w_i)} = 0$.

Demostración. Si $n = 2$, podemos escribir R en la forma

$$R(z) = \lambda(z - w_1)(z - w_2)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, con $\lambda \neq 0$, entonces $R'(z) = \lambda\,((z - w_2) + (z - w_1))$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Luego $R'(w_1) = \lambda(w_1 - w_2)$ y $R'(w_2) = \lambda(w_2 - w_1)$, entonces

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{R'(w_i)} = \frac{1}{R'(w_1)} + \frac{1}{R'(w_2)} = \frac{1}{\lambda(w_1 - w_2)} + \frac{1}{\lambda(w_2 - w_1)} = \frac{1}{\lambda(w_1 - w_2)} - \frac{1}{\lambda(w_1 - w_2)} = 0.$$

Para $n > 2$, procedemos por inducción. Dado $z \in \mathbb{C}$ escribimos

$$R(z) = (z - w_n)Q(z),$$

con $Q(z) = \lambda \prod_{j=1}^{n-1} (z - w_j)$, $\lambda \neq 0$ y $w_i \neq w_j$, si $i \neq j$. Entonces como $gr(Q) = n - 1 \geq 2$ y $w_1, \ldots, w_{n-1}$ son sus $n-1$ ceros distintos, por hipótesis inductiva tenemos que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{Q'(w_i)} = 0$. Sea S el polinomio definido por

$$S(z) = \prod_{j=1}^{n-1} (z - w_j)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces tenemos que $S'(w_i) = \prod_{j \neq i}(w_i - w_j)$ y $Q'(w_i) = \lambda S'(w_i)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Ahora bien , dado $z \in \mathbb{C}$, si escribimos $\dfrac{1}{S(z)} = \dfrac{1}{(z-w_1)\ldots(z-w_{n-1})} = \dfrac{A_1}{z-w_1} + \ldots + \dfrac{A_{n-1}}{z-w_{n-1}}$, entonces

$$1 = A_1 \prod_{j \neq 1}(z-w_j) + A_2 \prod_{j \neq 2}(z-w_j) + \ldots + A_{n-1} \prod_{j \neq n-1}(z-w_j).$$

Luego, dado $1 \leq i \leq n-1$, evaluando en w_i ambos miembros de la igualdad obtenemos que

$$1 = A_i \prod_{j \neq i}(w_i - w_j) = A_i S'(w_i),$$

por lo tanto $A_i = \dfrac{1}{S'(w_i)}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Así, deducimos que $\dfrac{1}{S(z)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{1}{S'(w_i)(z-w_i)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$\frac{1}{Q(z)} = \frac{1}{\lambda S(z)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda S'(w_i)(z-w_i)} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{Q'(w_i)(z-w_i)}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Ahora bien, como $R'(z) = Q(z) + (z-w_n)Q'(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, tenemos que $R'(w_n) = Q(w_n)$ y $R'(w_i) = (w_i - w_n)Q'(w_i)$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Así, tenemos que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R'(w_i)} = \frac{1}{R'(w_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{R'(w_i)} = \frac{1}{Q(w_n)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{(w_i - w_n)Q'(w_i)} = 0.$$

□

Corolario B.2.3. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces existe un punto fijo q tal que $P'(q) = 1$ o $|P'(q)| > 1$.

Demostración. Sea $R : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$R(z) = P(z) - z$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces las raíces de R son precisamente los puntos fijos de P.

Si R tiene alguna raíz múltiple, digamos $w \in \mathbb{C}$ tal que $R(w) = R'(w) = 0$, entonces $P(w) = w$ y $P'(w) = 1$. Luego, podemos suponer que todas las raíces de R son simples. Sean $n = gr(R)$ y $w_1, \ldots, w_n$ sus n raíces, entonces $w_j \neq w_k$ para todo $j \neq k$ y $P'(w_j) \neq 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por el Lema B.2.2 tenemos que

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(w_j) - 1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R'(w_j)} = 0.$$

Veamos que existe $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $\left|P'(w_{j_0})\right| > 1$. En efecto, supongamos que $\left|P'(w_j)\right| \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Luego, si $1 \leq j \leq n$, como $P'(w_j) \neq 1$, entonces $R'(w_j) \in D \setminus \{0\}$, con $D = \{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z+1| \leq 1\}$.

Además, observemos que si $z = a + bi \in D \setminus \{0\}$, entonces $|z+1|^2 = (a+1)^2 + b^2 \leq 1$.

Si a=Re$(z) > 0$, entonces $(a+1)^2 + b^2 > 1$, lo cual es absurdo.

Entonces a=Re$(z) \leq 0$, pero como $z \neq 0$, concluimos que Re$(z) < 0$. Por lo tanto, $\mathrm{Re}\Big(P'(w_j) - 1\Big) < 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ y se deduce que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{P'(w_j) - 1}\right) < 0$ para todo $1 \leq j \leq n$.

Pero como $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{P'(w_j) - 1} = 0$, debe existir $1 \leq j \leq n$ tal que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{P'(w_j) - 1}\right) \geq 0$ y llegamos entonces a una contradicción. Así, deducimos que existe $1 \leq j_0 \leq n$ tal que $P(w_{j_0}) = w_{j_0}$ y $\left|P'(w_{j_0})\right| > 1$.

□

Por lo tanto, si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $n \geq 2$, tenemos que o bien P tiene un punto fijo repulsor o bien P tiene un punto racionalmente indiferente. En el caso que P tenga un punto fijo racionalmente indiferente z_0, se puede mostrar que $z_0 \in \overline{\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } P\}}$. Tenemos entonces el siguiente teorema. La demostración de este y el próximo teorema pueden encontrarse por ejemplo en el libro de Devaney [23].

Teorema B.2.4. Si $P : \mathbb{C} :\longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $n \geq 2$ y z_0 es un punto fijo racionalmente indiferente para P, es decir, si $P(z_0) = z_0$ y $P'(z_0) = 1$, entonces $z_0 \in \overline{\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } P\}}$.

Para terminar esta sección, enunciaremos una importante caracterización de $\mathcal{J}(P)$ para todo P polinomio de grado $n \geq 2$ y veremos algunas propiedades que resultan como consecuencia.

Teorema B.2.5. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado ≥ 2, entonces

$$\mathcal{J}(P) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } P\}}.$$

Tenemos entonces los siguientes corolarios.

Corolario B.2.6. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces $\mathcal{J}(P) \neq \emptyset$.

Demostración. Por el Corolario B.2.3 sabemos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ punto fijo repulsor o bien punto fijo racionalmente indiferente. Luego, de los Teoremas B.2.5 y B.2.4 se deduce que $z_0 \in \mathcal{J}(P)$.

□

Corolario B.2.7. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces $\mathcal{J}(P)$ es perfecto, es decir, $\mathcal{J}(P)$ no tiene puntos aislados.

Demostración. Sea $a \in \mathcal{J}(P)$. Si a no es periódico, por el Teorema B.2.5 tenemos que a no es aislado en $\mathcal{J}(P)$. Si a es un punto periódico repulsor de período k, entonces existe $b \neq P^{k-1}(a)$ tal que $P(b) = a$, de lo contrario, $P(z) - a$ tendría a $P^{k-1}(a)$ como raíz de multiplicidad $n \geq 2$, y entonces $P'(P^{k-1}(a)) = 0$ (esto que no es posible, ya que a es repulsor). Luego, b no es punto periódico y por el Teorema B.1.15, $b \in \mathcal{J}(P)$, por lo que existe $(z_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{J}(P)$ tal que $z_l \neq b$ para todo $l \in \mathbb{N}$ y $z_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} b$. Por lo tanto, $P(z_l) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} a$, $P(z_l) \in \mathcal{J}(P)$ y $P(z_l) \neq a$ salvo finitos l, ya que $\operatorname{card}(P^{-1}(a)) \leq n$.

□

Teorema B.2.8. Si $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es un polinomio de grado $n \geq 2$, entonces $P_{|\mathcal{J}(P)} : \mathcal{J}(P) \longrightarrow \mathcal{J}(P)$ es D-caótico.

Demostración. Por el corolario anterior, $\mathcal{J}(P)$ es perfecto, y además $\mathcal{J}(P)$ es cerrado, entonces basta ver que P es topológicamente transitivo y que $\mathcal{P}er(P)$ es denso en $\mathcal{J}(P)$.

En efecto, como el Teorema B.2.5 nos dice que que $\mathcal{J}(P) = \overline{\{z \in \mathbb{C} \text{ tal que } z \text{ es punto periódico repulsor de } P\}}$, en particular $\mathcal{P}er(P) \subset \mathcal{J}(P)$ es denso. Veamos ahora que $P_{|\mathcal{J}(P)} : \mathcal{J}(P) \longrightarrow \mathcal{J}(P)$ es topológicamente transitivo. Sean U y V abiertos no vacíos de $\mathcal{J}(P)$, entonces existen U' y V' abiertos en $\mathbb{C}$ no vacíos tales que $U = \mathcal{J}(P) \cap U'$ y $V = \mathcal{J}(P) \cap V'$. Veamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$.

Sea $z_0 \in U \subset U'$, entonces como $z_0 \in \mathcal{J}(P)$ y U' es entorno de z_0, por el Teorema de Montel-Caratheodory (Teorema B.1.7) tenemos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^n(U')$ omite a lo sumo un punto. Sea $v_0 \in V = \mathcal{J}(P) \cap V'$, como $\mathcal{J}(P)$ es perfecto, v_0 no es aislado y por lo tanto $V = \mathcal{J}(P) \cap V' \neq \{v_0\}$. Así, V contiene más de un punto y como $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^n(U')$ omite a lo sumo un punto, tenemos que $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P^n(U')\right) \cap V \neq \emptyset$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $P^{n_0}(U') \cap V \neq \emptyset$. Sea $u' \in U'$ tal que $P^{n_0}(u') \in V = \mathcal{J}(P) \cap V'$, en particular $P^{n_0}(u') \in \mathcal{J}(P)$. Luego, como por el Teorema B.1.15 sabemos que $\mathcal{J}(P)$ completamente invariante, tenemos que $u' \in \mathcal{J}(P)$ y entonces

$$P^{n_0}(u') \in (P^{n_0}(\mathcal{J}(P) \cap U')) \cap V = P^{n_0}(U) \cap V.$$

Así, $P^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ y por lo tanto $P_{|\mathcal{J}(P)} : \mathcal{J}(P) \longrightarrow \mathcal{J}(P)$ es topológicamente transitivo, de donde se deduce que $P_{|\mathcal{J}(P)} : \mathcal{J}(P) \longrightarrow \mathcal{J}(P)$ es D-caótico.

□

Bibliografía

[1] S.I. Ansari, Hypercyclic and cyclic vectors, J. Funct. Anal. 128 (1995), 374-383. 89

[2] S.I. Ansari, Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces, J. Funct. Anal. 148 (1997), 384-390. 3, 51, 72

[3] R.M. Aron, A. Miralles, Chaotic polynomials in spaces of continuous and differentiable functions, Glasg. Math. J. 50 (2) (2008) 319-323. 4, 63

[4] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, On Devaney's definition of chaos, Amer. Math. Monthly 99 (1992), 332-334. 12, 14

[5] F. Bayart, E. Matheron, Dynamics of linear operators. Cambridge Tracts in Mathematics, 179. Cambridge University Press, Cambridge, 2009. 4

[6] F. Bayart, É. Matheron, Hypercyclic operators failing the hypercyclicity criterion on classical Banach spaces, J. Funct. Anal. 250 (2007), 426-4 37

[7] F. Bayart, S. Grivaux, Hypercyclicité: le rôle du spectre ponctuel unimodulaire, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 338 (2004), 703-708. 4

[8] F. Bayart, S. Grivaux, Frequently hypercyclic operators, Trans. Amer. Math. Soc. 358 (2006), 50835117. 4

[9] B. Beauzamy, Un opérateur, subespace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 303 (1986), 923-925. 25

[10] B. Beauzamy, Introduction to Operator Theory and Invariant Subspaces, North-Holland, 1988. 57

[11] L. Bernal-González, On hypercyclic operators on Banach spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1003-1010. 3, 51, 72

[12] N. Bernardes, On Orbits of polynomial maps in Banach spaces, Quaestiones Mathematicae, 21:3-4 (1998), 311-318. 4, 51, 57, 65

[13] N. Bernardes, A. Peris, On the existence of polynomials with chaotic behaviour. J. Funct. Spaces Appl. 2013. 4, 100

[14] J. Bès, A. Peris. Hereditarily hypercyclic operators. J. Funct. Anal., 167 (1999), 94-112. 44

[15] G.D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, Acta Math. 43 (1920), 1-119. 11

[16] G.D. Birkhoff, Démonstration d'un théorème élèmentaire sur les fonctions entières, C. R. Acad. Sci. Paris 189 (1929), 473-475. 3, 26

[17] J. Bonet, A. Peris, Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces, J. Funct. Anal. 159 (1998), 587-595. 4, 51, 72

[18] A. Bonilla, K.-G. Grosse-Erdmann, Frequently hypercyclic operators and vectors, Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), 383-404. Erratum: Ergodic Theory Dynam. Systems 29 (2009), 1993-1994. 4

[19] P.S. Bourdon, J.H. Shapiro, Cyclic composition operators on H^2, Operator Theory: Operator Algebras and Applications, Part 2 (Proc. Summer Res. Inst., Durham, NH, 1988), 43-53, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990. 25

[20] J.B. Conway, Functions of one complex variable. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 11. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978.

[21] M. De la Rosa, C. Read, A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic, J. Operator Th. 61 (2009), 369-380. 37

[22] M. De la Rosa, L. Frerick, S. Grivaux, A. Peris, Frequent hypercyclicity, chaos, and unconditional Schauder decompositions, Israel Journal of Mathematics, 190 (2012) 389-399. 89

[23] L.R. Devaney, An introduction to chaotic dynamical systems, Benjamin/Cummings, Menlo Park, CA, 1986; second edition, Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1989. 12, 124

[24] S. Dineen, Complex analysis on infinite-dimensional spaces. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. 52

[25] T. Gamelin, Complex analysis. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001. 119, 120

[26] R.M. Gethner, J.H. Shapiro, Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281-288. 4, 40, 43

[27] G. Godefroy, J.H. Shapiro, Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds, J. Funct. Anal. 98 (1991), 229-269. 4, 25, 40

[28] K.-G. Grosse-Erdmann, A. Peris, Linear chaos. Universitext. Springer, London, 2011. 4, 7, 25, 43, 99

[29] P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Vanderwerff, V. Zizler, Biorthogonal systems in Banach spaces. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 26. Springer, New York, 2008. 115

[30] G. Herzogg On linear operators having supercyclic vectors, Studia Math., 103 (1992), 295-298. 3, 51

[31] H.M. Hilden, L.J. Wallen, Some cyclic and non-cyclic vectors of certain operators, Indiana Univ. Math. J. 23 (1973/74), 557-565.

[32] C. Kitai, Invariant closed sets for linear operators, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982. 4, 40

[33] F. León-Saavedra, V. Müller, Rotations of hypercyclic and supercyclic operators, Integral Equations Operator Theory 50 (2004), 385-391. 97

[34] G.R. MacLane, Sequences of derivatives and normal families, J. Analyse Math. 2 (1952/53), 72-87. 3, 26

[35] A.I. Markushevich, On a basis in the wide sense for linear spaces, Dokl. Akad. Nauk. 41 (1943), 241-244. 116, 117

[36] F. Martínez-Giménez, A. Peris, Chaotic polynomials on sequence and function spaces. Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 20 (2010), no. 9, 2861-2867. 4, 63

[37] F. Martínez-Giménez, A. Peris, Existence of hypercyclic polynomials on complex Fréchet spaces, Topology Appl. 156 (2009), no. 18, 3007-3010. 4

[38] G. Metafune, V.B.Moscatelli, Dense subspaces with continuous norm in Fréchet spaces, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 37 (1989), 477-479. 85

[39] A. Peris, Erratum to: "Chaotic polynomials on Fréchet spaces" [Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), no. 12, 3601–3603; Proc. Amer. Math. Soc. 129 (12) (2001), 3759-3760. 4, 62, 65

[40] A. Peris, Chaotic polynomials on Banach spaces, J. Math. Anal. Appl. 287 (2003), 487-493. 4

[41] C. J. Read, The invariant subspace problem for a class of Banach spaces, 2: hypercyclic operators, Israel Journal of Mathematics 63 (1988), no. 1, 1-40. 26

[42] W. Rudin, Real and complex analysis, third edition, McGraw-Hill, New York, 1987. 119

[43] W. Rudin, Functional analysis, second edition, McGraw-Hill, New York, 1991. 96, 114

[44] S. Rolewicz, On orbits of elements. Studia Math. 32 (1969) 17-22. 3, 26, 51