



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

GRAFOS DE INTERVALOS
Y OTRAS CLASES RELACIONADAS

Fan Zhang

Director: Guillermo Durán
Codirector: Luciano Grippo

Agosto de 2013

Índice

1. Grafos de intervalos	4
1.1. Conceptos básicos	4
1.2. Grafos cordales y vértices simpliciales	5
1.3. Grafos de intervalos	9
1.4. Características de grafos que no son de intervalos	13
2. Subclases y variantes de grafos de intervalos	20
2.1. Grafos de comparabilidad	20
2.2. Grafos de intervalos unitarios y propios	23
2.3. Grafos de intervalos q -propios	26
3. Superclases de los grafos de intervalos	31
3.1. Propiedades básicas de grafos	31
3.2. Grafos perfectos	32
3.3. Subclases de los grafos perfectos	40
3.4. Grafos mínimamente no perfectos	45
3.5. El teorema fuerte de los grafos perfectos	56
3.6. Grafos arco-circulares	57
4. Conclusiones y problemas abiertos	62

Introducción

Gracias a la teoría de grafos se pueden resolver diversos problemas. Por ejemplo: encontrar el camino óptimo de una línea de colectivo a través de las calles de una ciudad, optimizar los tiempos para concretar una serie de trabajos, colorear cualquier mapa con cuatro colores de tal forma que dos países vecinos nunca tengan el mismo color.

Un grafo G consiste de una tripla formada por un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una relación que asigna a cada arista dos vértices no necesariamente distintos llamados extremos. Si vw es una arista, decimos que w es adyacente a v , o w y v son adyacentes. Un bucle es una arista con los dos extremos iguales y aristas múltiples son aristas con los mismos extremos. En esta tesis vamos a trabajar principalmente con grafos simples que son grafos finitos sin bucles y aristas múltiples.

En el año 1957, G Hajös propuso el siguiente problema [18]. Dado un número finito de intervalos en una línea recta, un grafo asociado con este conjunto de intervalos puede ser construido de la siguiente manera: a cada intervalo corresponde un vértice del grafo, y dos vértices están conectados por una arista si y sólo si los intervalos correspondientes se intersecan, dicho grafo se llama *grafo de intervalos* [17]. Uno de los problemas que vamos a considerar es aquel de decidir si un grafo tiene una representación por intervalos.

En el capítulo 1 principalmente vamos a seguir el texto [20], y ver las relaciones que hay entre los grafos de intervalos, los grafos cordales y los grafos asteroidales. Luego vamos a definir el conjunto minimal de grafos que no son de intervalos.

En el capítulo 2 vamos a estudiar algunas subclases y variantes de grafos de intervalos. Comenzamos con los grafos de comparabilidad y su relación con los grafos de intervalos. Luego introducimos el concepto de los grafos de intervalos unitarios y propios, y demostraremos que esas dos subclases son equivalentes [19]. Por último vamos a generalizar el concepto de los grafos de intervalos propio a q -propio, y encontrar los subgrafos prohibidos de esta clase [24].

En el capítulo 3 vamos a ver las equivalencias entre las tres posibles definiciones del grafo perfecto y luego sus subclases [17]. También vamos a ver las características de los grafos minimalmente no perfectos, y el teorema débil de los grafos perfectos. Por último, demostraremos que el teorema fuerte de los grafos perfectos dentro de una superclase de los grafos de intervalos llamada grafos arco-circulares [33]. También estudiaremos algunas características de grafos arco-circulares [1].

1. Grafos de intervalos

En este capítulo vamos a demostrar que un grafo es de intervalos si y sólo si es cordal y no es asteroidal [20]. Para llegar a ese resultado, el concepto de grafos cordales y la relación entre los grafos cordales y vértices simpliciales juegan roles muy importantes. Por lo tanto, comenzamos a ver las características de éstos.

1.1. Conceptos básicos

Definición 1.1.1 *Sea G un grafo, un paseo es una lista de vértices v_0, v_1, \dots, v_k tal que para todos los $i = 1, \dots, k$, v_{i-1} y v_i son adyacentes. Si $v_0 = v_k$ decimos que es un paseo cerrado.*

Definición 1.1.2 *Un camino es un grafo simple del cual sus vértices pueden ser ordenados de tal manera que dos vértices son consecutivos si y sólo si son adyacentes.*

Lema 1.1.1 *Todos los paseos v_1, v_2, \dots, v_k , $v_1 \neq v_k$, contienen un camino con los mismos extremos.*

Demostración: Sea $i_0 = 1$, y definimos los v_{i_j} de la siguiente manera: i_j es el máximo de los i entre i_{j-1} y k tal que $v_{i_{j-1}}$ es adyacente a v_i . Entonces $v_{i_0}, v_{i_1}, v_{i_2}, \dots$ es un camino. \square

Definición 1.1.3 *Un ciclo es un grafo simple con la misma cantidad de vértices y de aristas del cual sus vértices pueden ser puestos alrededor de un círculo tal que los dos vértices son adyacentes si y sólo si aparecen consecutivamente en el círculo.*

Sean G y H dos grafos simples, H es un subgrafo de G si $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$. Entonces podemos escribir $H \subseteq G$, y decimos que G contiene a H . Hay varios tipos de subgrafos grafos, por ejemplo los subgrafos inducidos por un conjunto de vértices. Sea un subconjunto de vértices A , el subgrafo inducido por A , es el grafo cuyo conjunto de vértice es A , y su conjunto de aristas está formado por aristas de G tal que los extremos pertenecen al A , y denotamos con $G[A]$.

Definición 1.1.4 *A un grafo simple se lo llama cordal si no contiene ciclos inducidos de más de 3 vértices.*

Un grafo simple es completo si todos los pares de vértices diferentes son adyacentes entre sí. Anotamos un grafo completo con n vértices con K_n . Un grafo simple es conexo si para todos los pares de vértices existe un camino que los une, las componentes conexas son los subconjuntos de vértices de G de los subgrafos maximales conexos.

Sea v un vértice de un grafo, su vecindario $N_G(v)$ es el conjunto de vértices de G que son adyacentes a v , su vecindario cerrado es $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Cuando el contexto sea claro escribiremos directamente $N(v)$ y $N[v]$.

Definición 1.1.5 *Sea G un grafo simple, $a \in V(G)$ un vértice de G se lo llama simplicial si $N[a]$ induce un subgrafo completo de G .*

1.2. Grafos cordales y vértices simpliciales

En esta sección vamos a ver las características de los vértices simpliciales y los grafos cordales, y sus relaciones. Por ejemplo, una de las propiedades más importantes de los grafos cordales es que contienen al menos un vértice simplicial [17].

Proposición 1.2.1 *Sea G un grafo simple. Si S es un subgrafo conexo de G , y todos los vértices de S son vértices simpliciales de G , entonces S es completo, y todos los vértices de S tienen el mismo vecindario.*

Demostración: Primero vamos a demostrar que S es completo. Sean $a, b \in S$, y como S es conexo, existe un camino que los une. Sea el camino v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_1 = a$ y $v_k = b$. Si $k = 2$ entonces $v_2 = b$, por lo tanto, a es adyacente a b . Si $k > 2$, v_1 es adyacente a v_2 y v_2 es adyacente a v_3 , como v_2 es un vértice simplicial, entonces v_1 y v_3 también son adyacentes. Siguiendo el mismo razonamiento llegamos a la conclusión de que v_1 y v_k son adyacentes, o sea, a y b son adyacentes. Por lo tanto, S es completo

Ahora queremos ver que todos los vértices de S tiene el mismo vecindario. Sea $a, b \in S$, $a \neq b$, como S es completo, a y b son adyacentes, si existe un vértice c diferente a b tal que a y c sean adyacentes, entonces b y c también lo serían, ya que a es un vértice simplicial, por lo tanto, a y b tienen el mismo vecindario. \square

Definición 1.2.1 *Sea G un grafo simple, $a \in V(G)$ y $b \in V(G)$. Sea $S \subseteq V(G) \setminus \{a, b\}$ es un separador de a y b si al eliminar S de G , los vértices a y b quedan en dos componentes conexas diferentes.*

Sea G un grafo simple y X un subgrafo de $V(G)$, podemos formar un grafo nuevo $G - X$ sacando de G todos los vértices de X y aristas que inciden sobre ellos.

Teorema 1.2.1 ([13]). *Sea G un grafo simple, G es cordal si y sólo si cualquier separador de vértices minimal bajo inclusión S induce un subgrafo completo de G .*

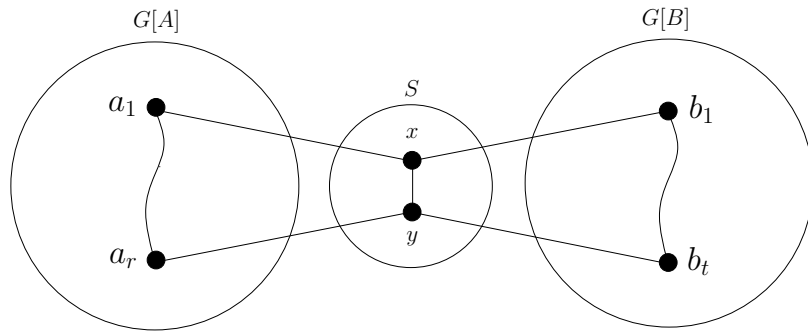
Demostración: Primero vamos a probar la condición necesaria.

Sea $a, x, b, y_1, y_2, \dots, y_k, a$ un ciclo de G y sea S un separador minimal de los vértices a y b . Entonces $x \in S$, ya que x es adyacente a los vértices a y b . Además, existe un $i = 1, \dots, k$ tal que $y_i \in S$, porque sino $b, y_1, y_2, \dots, y_k, a$ es un camino que une a y b . Además, como S es completo por hipótesis, por lo tanto, $xy_i \in E(G)$, entonces x es adyacente a y_i . Por lo tanto G es cordal.

Ahora vamos a probar la condición suficiente. Sean a y b dos vértices en V , sea S un separador minimal de a y b , y sean A y B componentes conexas de $G - S$ tal que $a \in A$ y $b \in B$.

Sea x un vértice de S , como S es un separador minimal de vértices, entonces existe $a' \in A$ y $b' \in B$ tal que a' y x son adyacentes y b' es adyacente a x . Porque si x no fuera adyacente a ningún vértice de A , entonces $S \setminus \{x\}$ sería otro separador de a y b más chico que S contradiciendo la minimalidad de S . Además, como A es conexa,

sean x e y dos vértices de S , entonces existe un camino que une x e y cuyos vértices están en A , sea x, a_1, \dots, a_r, y el camino de menor longitud que une x e y tal que los vértices $a_i \in A$. Con el mismo razonamiento también podemos afirmar que existe un camino de menor longitud x, b_1, \dots, b_t, y que une x e y con $b_i \in B$. Uniendo los dos caminos, queda un ciclo con un mínimo de cuatro vértices $x, a_1, \dots, a_r, y, b_t, \dots, b_1, x$, y como el grafo es cordal, no tiene ciclos inducidos. $a_i b_j \notin E(G)$ porque A y B son componentes conexas en $G - S$, además, los caminos que elegimos son minimales, entonces $a_i a_j \notin E(G)$, $b_i b_j \notin E(G)$, $a_i x \notin E(G)$, $b_i x \notin E(G)$, $a_i y \notin E(G)$, $b_i y \notin E(G)$, por lo tanto, x tiene que ser adyacente a y , entonces S es completo. \square



Definición 1.2.2 Una familia \mathcal{G} de grafos es hereditaria si todos los subgrafos inducidos de un grafo de \mathcal{G} son también grafos de \mathcal{G} .

Proposición 1.2.2 La familia de grafos cordales es hereditaria.

Demostración: Sea G un grafo cordal y H un subgrafo inducido, supongamos que H no es cordal, entonces existe un ciclo inducido de H . Este ciclo también es un ciclo inducido de G , entonces G no es cordal, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, H es cordal. \square

Lema 1.2.1 ([9]). Sea G un grafo cordal, entonces tiene un vértice simplicial. Además, si G no es completo entonces contiene dos vértices simpliciales no adyacentes.

Demostración: Si G es completo, entonces todos los vértices son simpliciales y el teorema queda demostrado. Supongamos que G no es completo, entonces existe $a \in V(G)$ y $b \in V(G)$ no adyacentes. Vamos a demostrar el teorema por inducción en cantidad de vértices.

Caso base: Sea G con dos vértices, si los dos vértices no son adyacentes, los dos vértices son simpliciales. Si los dos vértices son adyacentes, los dos vértices también son simpliciales.

Paso inductivo: Supongamos que para todos los grafos cordales no completos con menor cantidad de vértices que G contienen dos vértices simpliciales no adyacentes.

Sea S un subconjunto de $V(G)$, un separador minimal de vértices a y b , y sean $G[A]$ y $G[B]$ los componentes conexas de $G - S$ que contienen al vértice a y al vértice b respectivamente. Si $G[A \cup S]$ no es completo, por la proposición 1.2.2, $G[A \cup S]$ es cordal, y tiene menor cantidad de vértices que G , entonces por hipótesis inductiva, $G[A \cup S]$ contiene dos vértices simpliciales no adyacentes. Por el teorema 1.2.1 S induce un grafo completo, entonces uno de los vértices simpliciales tiene que estar en A . Si $G[A \cup S]$ es completo, entonces cualquier vértice de A es simplicial. Además, $G[N[A]] \subseteq A \cup S$, entonces los vértices simpliciales de $G[A \cup S]$ en A también son simpliciales en G . Con el mismo razonamiento, el conjunto B también contiene un vértice simplicial de G . Por definición de $G[A]$ y $G[B]$, los vértices en A y B no pueden ser adyacentes, entonces el teorema queda demostrado. \square

Definición 1.2.3 Sea A un subconjunto de vértices de G , al conjunto $N_G[A]$ lo llamamos el vecindario cerrado del conjunto A .

$$N_G[A] = \bigcup_{a \in A} N_G[a]$$

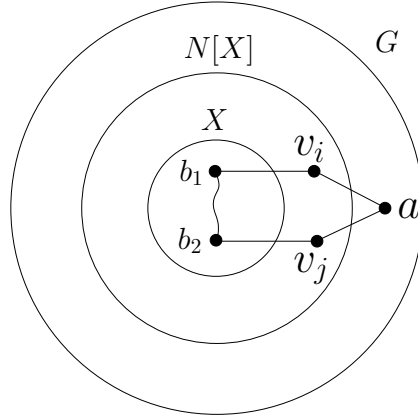
Cuando el contexto sea claro escribiremos directamente $N[A]$

El siguiente teorema es la generalización del lema 1.2.1.

Teorema 1.2.2 Sea G un grafo cordal y sea X un subconjunto de vértices de G tal que es conexo y $G - X \neq \emptyset$, entonces $G - X$ contiene un vértice simplicial de G .

Demostración: : Probamos por inducción en m que es la cantidad de vértices de $G - X$.

Caso base: Si $m = 1$, sea a el vértice en $G - X$. Si $N[a] = \{a\}$, entonces a es simplicial. Si $N[a] = \{a, v\}$, entonces a también es simplicial. Si $N[a] = \{a, v_1, \dots, v_k\}$, $k \geq 2$, vamos a ver que $N[a]$ es completo. Como a es adyacente a todos los v_i , por lo tanto, sólo falta ver que v_i y v_j son adyacentes si i y j son diferentes. Los $v_i \notin X$, porque si $v_i \in X$, como los v_i y a son adyacentes, entonces $a \in N[X]$, y eso contradice la hipótesis. Entonces los $v_i, v_j \in N[X] \setminus X$. Por lo tanto, existe $b_1 \in X$ tal que b_1 es adyacente a v_i y existe $b_2 \in X$ tal que b_2 es adyacente a v_j , como X es conexo, entonces existe un camino c_1, \dots, c_h tal que $c_1 = b_1$ y $c_h = b_2$. Consideramos el ciclo $v_i, a, v_j, b_2, c_{h-1}, \dots, c_2, b_1, v_i$, como a no es adyacente a los vértices del camino $b_1, c_2, \dots, c_{h-1}, b_2$, y G es cordal, no puede tener ningún ciclo inducido, entonces v_i es adyacente a v_j . así, queda demostrado que a es un vértice simplicial de G .



Paso inductivo: Si $m \geq 2$, supongamos que todos los grafos cordales G y los subconjuntos de vértices K conexos del G tal que la cantidad de vértices en $G - K$ es menor que m cumple el teorema. Sea b un vértice arbitrario de $G - X$, $G_1 = G - b$, y $G_1 - X$ tiene $m - 1$ vértices, por hipótesis inductiva, existe un vértice $a \in V(G_1 - X)$ tal que es un vértice simplicial de G_1 . Sea $N_1[a] = N_{G_1}[a]$. Si a no es adyacente con b , entonces $N_1[a] = N[a]$, o sea, a también es vértice simplicial de G . Entonces supongamos que a es adyacente a b . Con esta condición, podemos analizar 3 casos: *Caso 1:* $G - N_1[a] = C_1$ es conexo, y para todos los vértices $c \in N_1[a]$, c es adyacente a C_1 , queremos demostrar que a es un vértice simplicial de G . $N_G[a] = N_1[a] \cup \{b\}$. Todos los vértices en $N_1[a]$ son adyacentes por definición, a es adyacente a b por hipótesis, sólo queda ver que el vértice b es adyacente a los vértices en $N_1[a]$. Sea $c \in N_1[a]$, existe $d_1, \dots, d_k \in C_1$ tal que d_i es adyacente a c . El vértice b también pertenece a C_1 , como C_1 es conexo, entonces para todo d_i hay un camino que los une con b , sea d_j, e_1, \dots, e_k, b el camino más corto, entonces puedo formar un ciclo $b, a, c, d_j, e_1, \dots, e_k, b$. Los vértices d_j, e_1, \dots, e_k, b pertenecen a C_1 , por lo tanto, no son adyacentes a a y tampoco pueden ser iguales que a . Además, G es cordal, entonces no puede tener un ciclo inducido. Por lo tanto, b es adyacente a c . Así, $N_G[a]$ es completo y a es un vértice simplicial de G .

Caso 2: C_1 es conexo y existe un vértice $c \in N_1[a]$ tal que no es adyacente a ningún vértice de C_1 . Entonces $N_G[c] = N_1[a]$ es completo, por lo tanto, c es un vértice simplicial de G .

Caso 3: $G - N_1[a]$ no es conexo. Sea C_1 una componente conexa de $G - N_1[a]$ que contiene algún vértice de X , por hipótesis X es conexo, entonces $X \subset C_1$. Además, $X \setminus N_1[a] \subset C_1$, por lo tanto, $X \subset C_1 \cup N_1[a]$. Sea C_2 otra componente conexa de $G - N_1[a]$ tal que $C_2 \neq \emptyset$ y sea $D = G[C_2 \cup N_1[a]]$. Supongamos que D es completo, como $a \in V(D)$ entonces $V(D) \subset N_1[a]$, por lo tanto $D = N_1[a]$, eso contradice que $C_2 \neq \emptyset$, entonces D no puede ser completo. Además, D es un subgrafo inducido de un grafo cordal, entonces D también es un grafo cordal. Por el lema 1.2.1, D contiene dos vértices simpliciales no adyacentes, entonces no pueden pertenecer los dos a $N_1(2)$. O sea, existe un vértice $s \in C_2$ tal que es vértice simplicial de D . Como $C_2 \cap C_1 = \emptyset$, $C_2 \cap N_1[a] = \emptyset$ y $X \subset C_1 \cup N_1[a]$, entonces $s \notin X$. Además, $N_D[s] = N_G[s]$ porque C_2 es una componente conexa, por lo tanto, s es un vértice

simplicial de G .

En todos los casos encontramos un vértice simplicial de G en $G - X$. \square

1.3. Grafos de intervalos

Ahora vamos a introducir los siguientes conceptos: los vértice simplicial fuerte y débil, intervalo extremal, grafo asteroidal y extremal. Luego, usando estos conceptos y los teoremas demostrados anteriormente vamos a demostrar que un grafo cordal es de intervalos si y sólo si es cordal y no asteroidal[20].

Definición 1.3.1 *Un vértice simplicial a de un grafo simple G es un vértice simplicial fuerte si $G - N[a]$ es conexo, y es débil si $G - N[a]$ no es conexo.*

Definición 1.3.2 *Sea G un grafo simple, $V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. El grafo G es de intervalos si existe un conjunto de intervalos $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tal que a cada vértice a_i le corresponde el intervalo α_i , y $\alpha_i \cap \alpha_j \neq \emptyset$ si y sólo si a_i es adyacente a a_j . A Γ lo llamamos la representación por intervalos del grafo G .*

Definición 1.3.3 *Sea Γ una representación por intervalos del grafo G y α un intervalo de Γ que corresponde al vértice a de $V(G)$. El extremo izquierdo de α lo denotamos $l(\alpha)$ y el extremo derecho lo denotamos $r(\alpha)$.*

- α es un intervalo extremal izquierdo si $r(\beta) > l(\alpha)$ para todos los intervalos $\beta \in \Gamma$. Al vértice a lo llamamos vértice extremal izquierdo.
- α es un intervalo extremal derecho si $l(\beta) < r(\alpha)$ para todos los intervalos $\beta \in \Gamma$. Al vértice a lo llamamos vértice extremal derecho.

Lema 1.3.1 *Sea G un grafo de intervalos y a un vértice simplicial fuerte de G , sea Γ una representación por intervalos de G . Entonces el intervalo α en Γ que corresponde al vértice a es un intervalo extremal.*

Demostración: Sea Γ la representación por intervalos de G , α el intervalo en Γ que corresponde a a . Como a es un vértice simplicial fuerte, por definición $G - N[a]$ es conexo, y los vértices de $V(G - N[a])$ no son adyacentes a a . Por lo tanto, los intervalos que corresponde a los vértices de $G - N[a]$ en Γ no se intersecan con α , sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos esos intervalos están a la derecha de α .

Como a es simplicial, entonces $N[a]$ es completo y todos los vértices de $N[a]$ son adyacentes entre sí. Por lo tanto, todos los intervalos en Γ que corresponden los vértices se intersecan entre sí. Sea γ la intersección de esos intervalos, entonces si β es la representación de un vértice $b \in N[a]$ cumple la siguiente desigualdad:

$$l(\alpha) < r(\gamma) \leq r(\beta)$$

Juntando los resultados anteriores podemos ver que α es un intervalo extremal izquierdo. \square

Definición 1.3.4 Un grafo G es *asteroidal* si contiene tres vértices diferentes a_1, a_2, a_3 y tres caminos W_1, W_2, W_3 tal que para $i = 1, 2, 3$ cumple las dos condiciones siguientes:

1. W_i conecta los otros dos vértices a_j y a_k , $j \neq i$ y $k \neq i$.
2. a_i no es vecino a ningún vértice de W_i .

A esos tres vértices los llamamos *tripla asteroidal*.

Definición 1.3.5 Un grafo cordal G es *extremal* si es conexo y todos sus vértices simpliciales son fuertes.

Definición 1.3.6 Sea G un grafo simple y Γ su representación por intervalos. Si la unión de los intervalos de Γ es un intervalo, decimos que Γ es conexo.

Definición 1.3.7 Sea G un grafo simple, dado un vértice a y $X \subseteq V(G)$, diremos que a es un vecino completo de X si a es adyacente a todos los vértices de X .

Teorema 1.3.1 ([20]). Un grafo G es de intervalos si y sólo si es cordal y no es asteroidal.

Demostración: Primero probamos la condición suficiente.

Supongamos que G no es cordal y sea Γ su representación por intervalos. Como G no es cordal entonces contiene un ciclo inducido con más de 3 vértices, $a_1, a_2, \dots, a_k, a_1$, con $k \geq 4$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ los intervalos en Γ que corresponde los vértices a_1, a_2, \dots, a_k respectivamente. Los intervalos α_1 y α_3 son disjuntos y el intervalo α_2 se interseca con α_1 y α_3 , entonces α_2 une α_1 y α_3 . Además, los α_j con $4 \leq j \leq k$ también conectan α_1 y α_3 , por lo tanto, algún α_j se va a intersecar con α_2 . Pero como supusimos que α_2 no se interseca con ningún α_j con $4 \leq j \leq k$, llegamos a una contradicción, entonces G es cordal.

Ahora supongamos que G contiene una tripla asteroidal, (a_1, a_2, a_3) . Por definición a_1, a_2, a_3 no son adyacentes entre sí, entonces en su representación Γ los intervalos que les corresponde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son disjuntos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que α_2 separa a α_1 y α_3 . Entonces α_2 se interseca con algún intervalo de cualquier camino que conecta a_1 y a_3 , especialmente con W_2 . Pero eso contradice la definición de tripla asteroidal. Entonces G no es asteroidal.

Ahora vamos a probar la condición necesaria, entonces supongamos que G es cordal pero no es asteroidal, y queremos probar que es de intervalos. Si G es completo, podemos presentar a cada vértice por el intervalo unitario, entonces G es de intervalos. Por lo tanto queda por considerarse el caso en que G no es completo. Vamos a separar esta parte de prueba en dos casos.

Caso 1: G es extremal, por el lema 1.2.1. G tiene al menos dos vértices simpliciales no adyacentes, pero G tampoco puede tener tres vértices simpliciales no adyacentes. Suponiendo que G tiene tres vértices a_1, a_2, a_3 simpliciales no adyacentes, como G es

extremal, estos vértices son simpliciales fuertes. Sea (i, j, k) cualquier permutación de $(1, 2, 3)$, por lo tanto, $G - N[a_i]$ es conexo. Como $a_j \in V(G - N[a_i])$ y $a_k \in V(G - N[a_i])$, entonces existe un camino en $G - N[a_i]$ que une a a_j y a_k , además, a_i no es adyacente a ningún vértice de ese camino, o sea, G es asteroidal contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, no pueden existir tres vértices simpliciales no adyacentes. Vamos a usar inducción en la cantidad de vértices. Sea n la cantidad de vértices.

Caso base: $n = 1$, si hay un solo vértice, G es de intervalos.

Paso inductivo: $n > 1$, vamos a suponer que el teorema vale para todos los grafos con menos de n vértices.

Sea a un vértice simplicial de G y sea N_1 el subconjunto de $N[a]$ que contiene los vértices simpliciales de G . $N_2 = N[a] \setminus N_1$, $G_1 = G - N_1$, $G_2 = G - N[a] = G_1 - N_2$, entonces $G_1 = G[V(G_2) \cup N_2]$.

Vamos a ver que G_1 es un subgrafo propio de G que es extremal, de esa manera podemos usar la hipótesis inductiva. Primero vamos a probar que G_1 es cordal y conexo. El grafo G_1 es cordal porque es un subgrafo de un grafo cordal. Entonces queda ver que G_1 es conexo. El grafo G_2 es conexo porque a es un vértice simplicial fuerte. N_2 es conexo porque $N[a]$ que es completo y $N_2 \subseteq N[a]$. sólo falta ver que si $c_1 \in N_2$ y $c_2 \in V(G_2)$ entonces existe un camino que los une. Supongamos que no existe ningún vértice en G_2 que es adyacente a c_1 , entonces $N(c_1) = N[a]$. O sea, c_1 es un vértice simplicial de G , por lo tanto, no puede pertenecer al N_2 y eso contradice lo que supusimos. Entonces tiene que existir un vértice $c_3 \in V(G_2)$ que es adyacente a c_1 . Además, como G es extremal entonces G_2 es conexo. Por lo tanto, existe un camino $c_3, d_1, d_2, \dots, d_k, c_2$ que une c_3 y c_2 y $c_1, c_3, d_1, d_2, \dots, d_k, c_2$ es un camino que une c_1 y c_2 . Así queda probado que G_1 es conexo.

Ahora vamos a investigar sobre sus vértices simpliciales. Sea $b \in V(G_2)$, vértice simplicial de G_1 . Como b no es adyacente a ningún vértice de N_1 , $N_G[b] = N_{G_1}[b]$, entonces b también es un vértice simplicial de G . Sean c_1 y c_2 dos vértices pertenecientes al $V(G_1 - N[b])$, y como G es extremal, entonces existe un camino $W = w_1, w_2, \dots, w_k$ en $G - N[b]$ tal que $w_1 = c_1$ y $w_k = c_2$. Este camino no contiene vértices de N_1 porque si existe $w_i \in V(N_1)$, entonces existe $w_{i-h} \in N_2$ y $w_{i+j} \in N_2$. Como N_2 es completo, w_{i-h} y w_{i+j} son adyacentes, por lo tanto, puedo reemplazar $w_{i-h}, \dots, w_i, \dots, w_{i+j}$ por la arista (w_{i-h}, w_{i+j}) y reducir el camino, y esto contradice la definición del camino. Entonces el camino W está contenido en $G_1 - N[b]$, por lo tanto, b es un vértice simplicial fuerte de G_1 .

Sea $d \in N_2$, un vértice simplicial de G_1 , definimos $N_1[d] = N_{G_1}[d]$. Sean C_1, C_2, \dots, C_k las componentes conexas de $G_1 - N_1[d]$, por definición del vecindario, para todos $i = 1, 2, \dots, k$ el grafo $G[C_i \cup N_1[d]]$ no es completo, por el lema 1.2.1 $G[C_i \cup N_1[d]]$ tiene dos vértices simpliciales no adyacentes. Como d es uno de ellos, entonces hay otro vértice simplicial e_i que no está en $N_1[d]$ y tampoco en N_2 , o sea $e_i \in C_i \setminus N_2$. Además como e_i no es adyacente a ningún vértice en $G - (G[C_i \cup N_1[d]])$, entonces

$$N_{G[C_i \cup N_1[d]]}[e_i] = N_G[e_i]$$

O sea, para todos los $i = 1, 2, \dots, k$, los e_i son vértices simpliciales de G también. Pero por lo que supusimos, G no puede tener tres o más de tres vértices simpliciales

no adyacentes, entonces $k = 1$ o $k = 0$. Si $k = 1$, $C_1 = G_1 - N_1[d]$ y es conexo, entonces d es un vértice simplicial fuerte de G_1 . Si $k = 0$, $N_1[d] = G_1$, entonces d también es un vértice simplicial fuerte de G_1 . Combinando los resultados anteriores probamos que G_1 es extremal. Como la cantidad de vértices de G_1 es menor que n , por hipótesis inductiva G_1 es de intervalos, entonces tiene un modelo Γ_1 que lo representa.

Ahora vamos a encontrar un modelo de intervalos que representa a G basado en el modelo Γ_1 . Si G_1 es completo, entonces todos los vértices son simpliciales, especialmente hay un vértice simplicial d en N_2 . Si G_1 no es completo, existe un vértice simplicial b de G que pertenece a G_2 , y como $N_G[b] = N_{G_1}[b]$, b también es un vértice simplicial de G_1 . Además los vértices simpliciales de G_1 pertenecientes a G_2 forman un subconjunto completo. Porque si hubiera dos vértices simpliciales de G_1 no adyacentes en G_2 , esos dos vértices también serían simpliciales en G . Junto con a , habría tres vértices simpliciales no adyacentes de G , y eso contradice lo que supusimos. Por el lema 1.2.1, G_1 también tiene un vértice simplicial d en N_2 . En los dos casos por el lema 1.3.1 la representación δ de d es un intervalo extremal. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que δ es un intervalo extremal izquierdo. Como $N_2 \subseteq N_1(d)$ y $N_1(d)$ es completo, entonces podemos alargar los extremos izquierdos de los intervalos de N_2 hasta que todos sean menor que los extremos izquierdos de los intervalos de $N_1(d) \setminus N_2$. Luego podemos agregar un intervalo α de tal manera que solamente tengan intersección con los intervalos de N_2 . Representando cada vértice de N_1 por el intervalo α , construimos el modelo Γ que representa a G . Por lo tanto, G es de intervalos.

Caso 2: G no es extremal.

Vamos a demostrar este caso por inducción en la cantidad de vértices de G . Sea n la cantidad de vértices de G .

Caso base, $n = 1$, si hay un solo vértice, G es de intervalos.

Paso inductivo: $n > 1$, y vamos a suponer que la afirmación vale para todos los grafos con menos de n vértices.

Sea a un vértice simplicial débil, y sean C_1, C_2, \dots, C_k las componentes conexas de $G - N[a]$, $k \geq 2$, porque a es un vértice simplicial débil.

Primero vamos a considerar los casos triviales. Por hipótesis inductiva, $G - \{a\}$ es de intervalos, sea Γ_1 el modelo de $G - \{a\}$ y sea δ la intersección de todos los intervalos de $N(a)$. Si ninguna componente C_i contiene algún vecino completo de $N(a)$, entonces δ no se interseca con los intervalos de C_i y podemos formar Γ un modelo de G agregando δ como el intervalo que representa al vértice a . Si existe i tal que para todos los vértices de C_i son vecinos completos de $N(a)$, entonces en Γ_1 esos intervalos se intersecan con δ y forman un modelo conexo. Además, no se intersecan con otros intervalos de $G - N[a]$. Podemos disminuir proporcionalmente la dimensión de los intervalos de C_i en Γ_1 , luego agregar un intervalo α que representa al vértice a de tal manera que α y los intervalos de C_i intersecan con δ , pero α no interseca con los intervalos de C_i . Finalmente obtenemos un modelo Γ de G .

Ahora sólo nos queda el caso que existe un i , tal que algunos vértices de C_i son vecinos completos de $N(a)$ y algunos no. Sea $G_1 = G - \{a\}$ y $G_2 = G[N[a] \cup C_i]$.

Por hipótesis inductiva G_1 y G_2 son de intervalos, entonces existen Γ_1 y Γ_2 modelos que los representan respectivamente.

Veamos algunas características de Γ_2 . Como a es un vértice simplicial fuerte de G_2 , por el lema 1.3.1. el intervalo *alpha* que lo representa es un intervalo extremal. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a es un vértice simplicial extremal derecho. Además, tenemos algunos intervalos en Γ_2 que no se intersecan con δ , porque en C_i hay vértices que no son vecinos completos de $N(a)$. Sea γ el intervalo tal que su extremo derecho sea el menor dentro de esos intervalos. Defino Σ_1 como el conjunto de los intervalos de $N(a)$ que se intersecan con γ (Σ_1 puede ser vacío), y sea $\Sigma(a)$ el conjunto de los intervalos de $N[a]$ en Γ_2 . Como α y γ son intervalos extremales, si alargamos el extremo izquierdo de los intervalos de Σ_1 y también los extremos derechos de $\Sigma(a)$ no crean intersecciones nuevas.

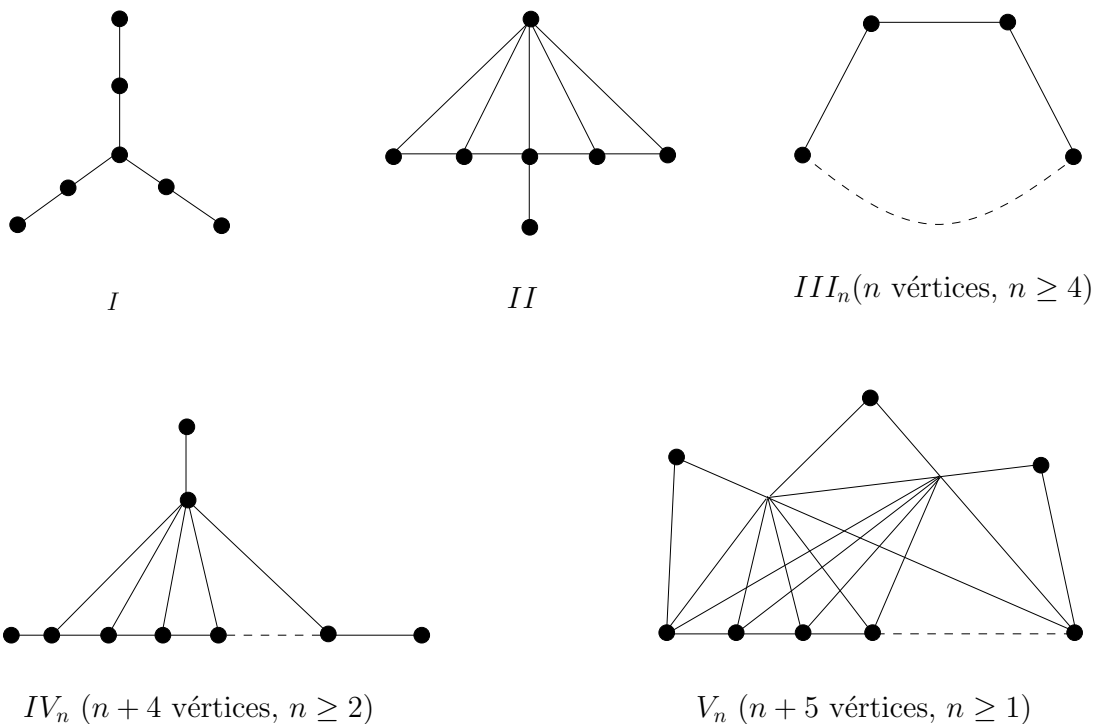
Ahora vamos a ver qué pasa con Γ_1 . Γ_1 contiene algún modelo de $G_2 - \{a\}$. Sean γ' y δ' intervalos en Γ_1 que corresponden los intervalos γ y δ en Γ_2 . Entonces γ' y δ' no se intersecan. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r(\gamma') < l(\delta')$. Sea el intervalo ξ en la recta real, tal que todos los intervalos de C_i estén completamente contenidos en él, pero los intervalos de C_j con $j \neq i$ no pueden intersecar con ξ . Entonces $r(\xi)$ y $l(\xi)$ solamente puede pertenecer a algún intervalo de $N(a)$. Además, como en C_i hay vértices que son vecinos completos de $N(a)$, entonces todos los vértices de $N(a)$ se intersecan con ξ . Sea N_1 el conjunto de intervalos de Γ_1 que corresponde los intervalos de Σ_1 . Vamos a probar que $l(\xi)$ solamente puede pertenecer a algunos intervalos de N_1 . Sea $b \in N[a] \setminus N_1$, y sean β y β' intervalos correspondientes en Γ_2 y Γ_1 . En Γ_2 el intervalo β no se interseca con γ , entonces en Γ_1 , los intervalos β' y γ' tampoco se intersecan. Pero como $\beta' \cap \delta' \neq \emptyset$ entonces $l(\delta') < r(\beta')$, y supusimos que $r(\gamma') < l(\delta')$, entonces $r(\gamma') < r(\beta')$. Además, $b \notin N_1$ entonces γ' y β' no se intersecan, por lo tanto, $r(\gamma') < l(\beta')$, entonces $l(\xi) \notin \beta'$.

Ahora ya podemos construir el modelo de G . Tomamos Γ_1 , sacamos todos los intervalos que se intersecan con ξ , y ponemos el modelo Γ_2 de tal manera que quede totalmente incluido dentro del intervalo ξ disminuyendo proporcionalmente su dimensión, luego alargamos hacia izquierda los intervalos correspondientes al de Γ_1 tal que contenían $l(\xi)$ hasta donde estaban, y también alargamos hacia derecha los intervalos correspondientes al de $\Sigma(a)$ tal que contenían $r(\xi)$ hasta donde estaban. así obtenemos un modelo de G , por lo tanto, G es de intervalos. \square

1.4. Características de grafos que no son de intervalos

Siguiendo la idea de [20], vamos a determinar el conjunto minimal de grafos tal que un grafo es de intervalos si y sólo si no contiene grafos de este conjunto.

Los cinco grafos siguientes forman el conjunto M .



Teorema 1.4.1 *Un grafo es de intervalos si y sólo si no contiene ningún subgrafo del conjunto M .*

Demostración: Primero vamos a demostrar la condición suficiente. El grafo III_n con $n \geq 4$ no es cordal y los grafos I , II , IV_n y V_n son asteroidales. Por el teorema 1.3.1, si G contiene algunos de esos grafos, G no es de intervalos.

Ahora vamos a ver la condición necesaria. O sea, si G no es de intervalos, entonces G contiene algunos grafos del conjunto M . Si G no es de intervalos por el teorema 1.3.1, G no es cordal, entonces G contiene algún subgrafo como III_n . O G es asteroidal. En ese caso alcanza con probar lo siguiente. Si G tiene las siguientes propiedades:

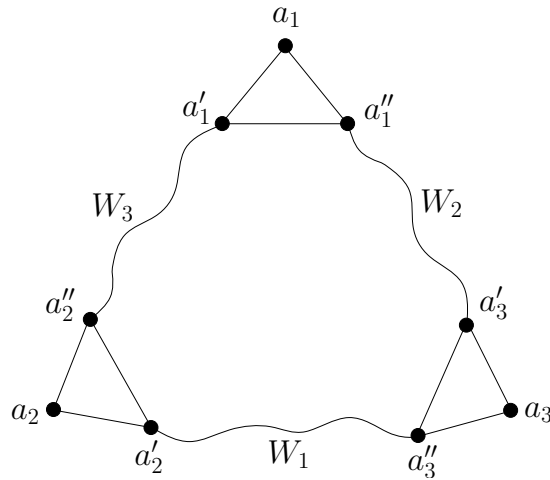
1. G es cordal.
2. G es asteroidal.
3. G es minimal, o sea, ningún subgrafo propio es asteroidal.

Entonces G es uno de los grafos I , II , IV_n , V_n .

Sea (a_1, a_2, a_3) la tripla asteroidal, y W_1, W_2, W_3 los tres caminos tal que para $i = 1, 2, 3$ cumple lo siguiente:

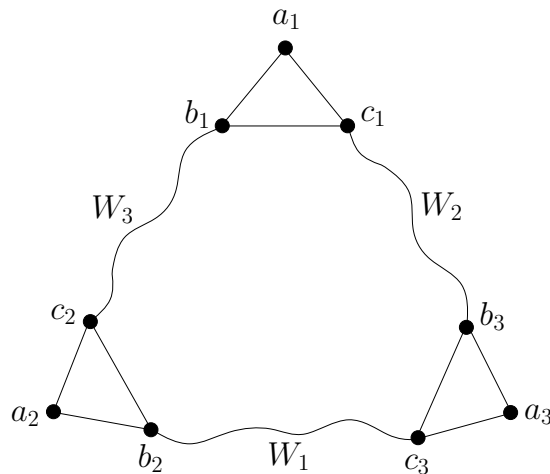
- W_i conecta los otros dos vértices a_j y a_k , $j \neq i$ y $k \neq i$.
- a_i no es vecino con ningún vértice del W_i .

Si $i \neq j$, los W_i contienen solamente un v\u00e9rtice del $N[a_j]$ diferente a a_j . Si tuviera dos v\u00e9rtices del $N[a_j]$ diferente a a_j , podr\u00edamos reducir el camino contradiciendo la definici\u00f3n del camino. Adem\u00e1s, por la propiedad 3 $V(W_1) \cup V(W_2) \cup V(W_3) = V(G)$. Entonces $N[a_j]$ contiene a lo sumo dos v\u00e9rtices diferentes a a_j , los nombramos a'_j y a''_j , y si son diferentes, entonces son adyacentes. Porque los tres caminos W_1, W_2, W_3 unidos forman un ciclo, en el cual los v\u00e9rtices a'_j, a_j, a''_j son consecutivos. Adem\u00e1s, $a'_j \neq a''_j$ y a_j no es adyacente a otros v\u00e9rtices que no sean a'_j y a''_j . Como G es cordal, no tiene ciclos inducidos, entonces a'_j y a''_j son adyacentes.



Para seguir la demostraci\u00f3n, vamos a separar en diferentes casos.

Caso 1: cada a_i con $i = 1, 2, 3$ es adyacente a dos v\u00e9rtices diferentes, los llamamos b_i y c_i . Sean los caminos $W_1 = a_2, b_2, \dots, c_3, a_3$, $W_2 = a_3, b_3, \dots, c_1, a_1$, $W_3 = a_1, b_1, \dots, c_2, a_2$. Puede pasar que $b_2 = c_3$, $b_3 = c_1$ o $b_1 = c_2$. Si esto ocurre, al camino W_i correspondiente lo llamamos camino corto. Adem\u00e1s, los b_i con $i = 1, 2, 3$ son diferentes entre s\u00ed. Supongamos que $b_1 = b_3$, a_3 y b_3 son adyacentes, entonces a_3 es adyacente a b_1 . Eso contradice la condici\u00f3n 2, por lo tanto, los b_i con $i = 1, 2, 3$ son diferentes entre s\u00ed. Adem\u00e1s los c_i con $i = 1, 2, 3$ tambi\u00e9n son diferentes entre s\u00ed por la misma raz\u00f3n. Por lo tanto, tenemos una situaci\u00f3n como el siguiente gr\u00e1fico.



Notar que los vértices interiores pueden ser iguales.

Ahora vamos a probar que al menos dos de los W_i son caminos cortos.

Supongamos que W_2 y W_3 no son cortos y W_1 puede ser corto o no. Consideramos el vértice c_2 y el camino cerrado $c_2, b_2, \dots, c_3, b_3, \dots, c_1, b_1, \dots, c_2$. Si c_2 y c_1 son adyacentes, entonces podemos reemplazar W_3 por $W'_3 = a_1, c_1, c_2, a_2$.

Si c_2 es adyacente a algún vértice interior d de W_2 diferente a c_1 , entonces podemos reemplazar W_1 por $W'_1 = a_2, c_2, d, \dots, a_3$. En el caso que W_1 no sea un camino corto, y Si c_2 es adyacente a algún vértice interior d de W_1 diferente a b_1 , entonces podemos reemplazar W_1 por $W'_1 = a_2, c_2, d, \dots, a_3$.

Entonces en esos tres casos G no es minimal, contradice con lo que supusimos. Pasa lo mismo con el vértice b_2 , si b_2 es adyacente a algún vértice interior de W_2 o W_3 , entonces G no es minimal. Por lo tanto

$$N[c_2] \cap (W_1 \cup W_2) = b_2$$

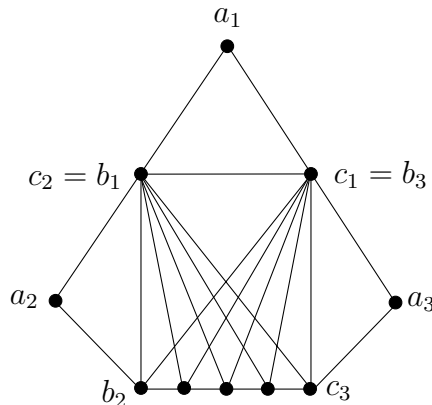
Y

$$N[b_2] \cap (W_2 \cup W_3) = c_2$$

De esta manera, el camino cerrado $c_2, b_2, \dots, c_3, b_3, \dots, c_1, b_1, \dots, c_2$ es un ciclo inducido. Por lo tanto, al menos dos de los caminos W_i con $i = 1, 2, 3$ son caminos cortos.

Supongamos que W_2 y W_3 son cortos y b_1 no es adyacente a c_3 , entonces $c_3 \neq b_2$, por lo tanto, (a_1, a_2, c_3) es una tripla asteroidal en $G - a_3$, y eso contradice la condición 3, entonces b_1 y c_3 son adyacentes.

Sea el ciclo $b_1, c_3, \dots, b_2, b_1$. Como c_3, \dots, b_2 es un camino, entonces b_1 es adyacente a todos los vértices del camino c_3, \dots, b_2 , sino podemos encontrar ciclos inducidos. Con el mismo razonamiento, b_3 también es adyacente a todos los vértices de c_3, \dots, b_2 . Entonces G tiene la forma del grafo V_n , n es igual a la cantidad de vértices en el camino c_3, \dots, b_2 . Si $n = 1$, entonces $b_2 = c_3$.



Caso 2: Uno de los vértices a_i con $i = 1, 2, 3$ es adyacente a un solo vértice. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a_1 tiene un solo vecino b . Entonces $E(W_2)$ y $E(W_3)$ necesariamente contiene a b . Si b no es adyacente a ningún vértice de $E(W_1)$, entonces (b, a_2, a_3) es una tripla asteroidal de $G - \{a_1\}$. Eso contradice la

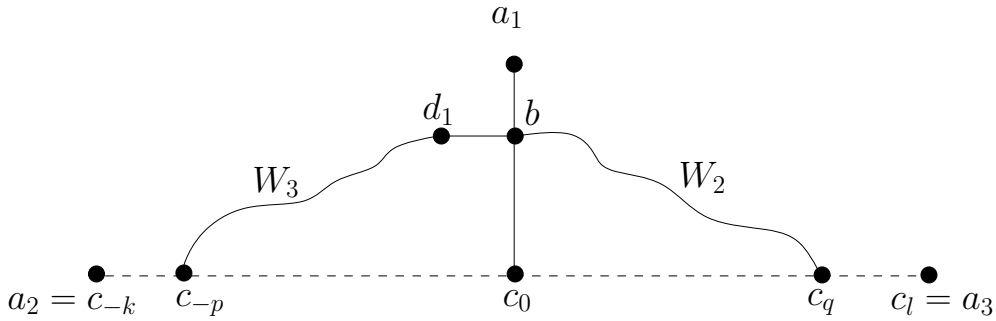
condición 3, por lo tanto, b es adyacente a algún vértice de $E(W_1)$. Pero b no puede ser adyacente a a_2 tampoco a a_3 , porque si eso pasa, a_2 es adyacente a algún vértice de $E(W_2)$ o a_3 es adyacente a algún vértice de $E(W_3)$, y eso contradice la condición 2. Vamos a separar en tres subcasos.

Caso 2.1. b es adyacente a más de dos vértices de $E(W_1)$. Sea c y c' el primero y el último vértice adyacente a b en W_1 , b, c, \dots, c', b forma un ciclo, y como c, \dots, c' es parte de W_1 , por eso también es un camino. Entonces b es adyacente a todos los vértices entre c y c' , porque sino b, c, \dots, c', b es un ciclo inducido. Por lo tanto, G tiene forma del grafo IV_n .

Caso 2.2. b es adyacente a un solo vértice $c \neq a_1$. Entonces $c \in E(W_1)$, además, necesariamente $c \in E(W_2)$ y $c \in E(W_3)$, y c no es adyacente a a_2 y a_3 , por lo tanto, G tiene la forma del grafo I .

Caso 2.3. b es adyacente a exactamente un vértice $c_0 \in E(W_1)$ y por lo menos un vértice $d_1 \notin E(W_1 \cup \{a_1\})$. Sea $W_1 = c_{-k}, \dots, c_0, \dots, c_l$, donde $c_{-k} = a_2$ y $c_l = a_3$, $k \geq 1, l \geq 1$, y podemos suponer que $d_1 \in E(W_3)$.

Sea $W_3 = a_1, b, d_1, \dots, c_{-p}, c_{-p-1}, \dots, c_{-k}$, donde el vértice anterior al c_{-p} es el último vértice de W_3 que no pertenece al $E(W_1)$. Vamos a probar que $p > 0$. Si $c_0 \in E(W_3)$, podemos reemplazar el tramo a_1, b, d_1, \dots, c_0 por a_1, b, c_0 , y eso contradice que W_3 sea un camino.



Ahora vamos a probar que W_3 tampoco puede contener ningún vértice que sea adyacente a c_i tal que $i > 0$, o sea, $E(W_3)$ no contiene vértice c_i con $i > 0$. Supongamos que existe un tal i , entonces $d \neq b$, porque b es adyacente con c_0 . Entonces $W_3 = a_1, b, d_1, \dots, d, c_i, \dots, c_{-p}, \dots, c_{-k}$, y $c_0 \notin E(W_3)$. Podemos reemplazar W_1 y W_2 por:

$$\begin{aligned} W'_1 &= c_{-k}, \dots, c_{-p}, \dots, c_i, c_{i+1}, \dots, c_l \\ W'_2 &= a_1, b, \dots, d, c_i, c_{i+1}, \dots, c_l \end{aligned}$$

De esa manera los caminos W'_1, W'_2, W_3 ninguno contiene a c_0 , entonces (a_1, a_2, a_3) es una tripla asteroidal en $G - \{c_0\}$, eso contradice la condición 3.

Ahora vamos a considerar el caso que los vértices de la parte c_1, \dots, c_l del camino W_1 son adyacentes solamente a los vértices en $E(W_1)$. Si $l = 1$, sea el ciclo $c_0, b, d_1, \dots, c_{-p}, \dots, c_0$. Como $c_0 \neq d_1$, además, $b \neq c_{-j}$ y tampoco es adyacente a ningún vértice c_{-j} con $j > 0$, entonces c_0 es adyacente a d_1 , porque sino

$c_0, b, d_1, \dots, c_{-p}, \dots, c_0$ es un ciclo inducido, entonces c_0 es adyacente a dos vértices. Reemplazando a_3 por a_1 , tenemos el caso 2.1. Si $l \geq 2$, reemplazando a_3 por a_1 , tenemos el caso 2.2.

Queda el último caso, existe un $q > 0$ tal que c_q es adyacente a algún vértice $e \notin E(W_1)$. Por lo demostrado anteriormente $e \notin E(W_3)$, por lo tanto, $e \in (W_2)$. Además, $c_0 \notin E(W_2)$, sino $G - \{e\}$ es asteroidal. Sea $W_2 = a_1, b, e_1, \dots, c_q, c_{q+1}, \dots, c_l$, este camino no contiene vértices c_i con $i < 0$, tampoco contiene ningún vértice adyacente a esos vértices. Sea $d' \in E(W_3)$, $e' \in E(W_2)$, $d' \neq a_1$, $e' \neq a_1$, entonces $d' \neq e'$ y d' no es adyacente a e' , porque sino $G - \{c_0\}$ es asteroidal. Para que $c_0, b, d_1, \dots, c_{-p}, \dots, c_0$ y $c_0, b, e_1, \dots, c_q, \dots, c_0$ no sean ciclos inducidos, c_0 y d_1 son adyacentes y c_0 y e_1 también. Por la condición 3, G tiene que tener forma del grafo II. \square

Ahora vamos ver la relación que hay entre los vértices extremales y los grafos de intervalos, siguiendo el artículo [16] de Gimbel.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que todos los intervalos en cualquier representación por intervalos de un grafo son cerrados, con longitud positiva, y ningún extremo de los intervalos coinciden.

Teorema 1.4.2 *Sea G un grafo de intervalos, sea $v \in V(G)$ un vértice, v es un vértice extremal si y sólo si G no contiene ninguno de los siguientes subgrafos inducidos donde v es el vértice designado.*

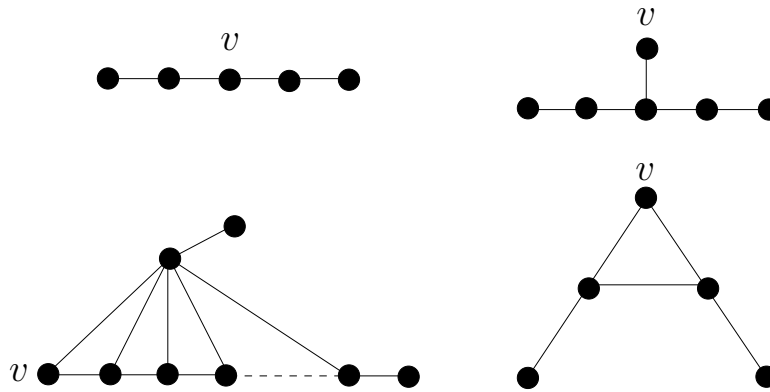


Figura 1

Demostración: Vamos a probar la condición suficiente. Si a es un vértice designado de alguno de los grafos de la figura 1, es claro que a no puede ser un vértice extremal. Ahora vamos a probar la condición necesaria. Supongamos que G no contiene ninguno de los grafos de la figura 1. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que G es conexo. Formamos un nuevo grafo H agregando a G un nuevo vértice b_1 y la arista b_1a . H es un grafo de intervalos, si no es de intervalos, por el teorema 1.4.1,

H contiene algún subgrafo inducido del conjunto M , b_1 puede ser cualquier vértice de grado uno. Pero cuando sacamos cualquier vértice de grado uno de esos grafos, el grafo que queda siempre contiene uno de los grafos de la figura 1 donde a es el vértice asignado, y eso contradice la hipótesis.

Sea Γ la representación por intervalos del H , y sea α y β_1 los intervalos correspondientes a los vértices a y b_1 respectivamente.

Ahora supongamos que α no es un intervalo extremal en Γ , entonces α no es un intervalo extremal derecho. Por lo tanto, existe un intervalo β_2 tal que $r(\alpha) < l(\beta_2)$, y como G es conexo, existe un intervalo β_3 que interseca con α y β_2 . Además, α tampoco es un intervalo extremal izquierdo, por lo tanto, existe un intervalo β_4 tal que $l(\alpha) > r(\beta_4)$, con el mismo argumento, existe un intervalo β_5 que interseca con α y β_4 . Además, β_1 solamente interseca con α , por lo tanto, está entre los intervalos β_5 y β_3 , entonces estos no se intersecan. De esa manera a los vértices que corresponden $\beta_4, \beta_5, \alpha, \beta_3, \beta_2$ forma el primer grafo de la figura 1, y eso contradice la hipótesis. Por lo tanto, α es un intervalo extremal en Γ , eliminamos el intervalo β_1 de Γ y obtenemos Γ' , α sigue siendo un intervalo extremal en Γ' que es una representación por intervalos de G , o sea, a es un vértice extremal de G . \square

2. Subclases y variantes de grafos de intervalos

2.1. Grafos de comparabilidad

Definición 2.1.1 Sea G un grafo simple, $V(G)$ su conjunto de vértices, y $E(G)$ su conjunto de aristas. Su complemento \overline{G} es el grafo simple tal que

$$V(\overline{G}) = V(G)$$

$$E(\overline{G}) = \{ab \in V \times V / ab \notin E(G)\}$$

Definición 2.1.2 G un grafo simple, $A \subseteq V(G)$ es un clique si induce un subgrafo completo. Un clique es maximal si no existe ningún otro clique de G que contenga a A propiamente. Un clique es máximo si no existe ningún otro clique de mayor cardinal.

En esta sección necesitamos usar el concepto del grafo dirigido. Un grafo dirigido G consiste de una tripla formada por un conjunto de vértices $V(G)$, un conjunto de aristas $E(G)$ y una función que asigna a cada arista un par ordenado de vértices, el primer vértice del par ordenado es la cola de la arista, el segundo es la cabeza, y los dos son extremos del vértice, y decimos que la arista va de la cola a la cabeza. En un grafo dirigido, un bucle es una arista con los dos extremos iguales, aristas múltiples son aristas que corresponden el mismo par ordenado de vértices.

Un grafo dirigido es simple si a cada par ordenado de vértices le corresponde a lo sumo una arista, y cada vértice puede tener un bucle.

Representamos un grafo dirigido simple G con su conjunto de vértice $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y su conjunto de arista $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, tal que a cada arista le asignamos un par ordenado de vértices. Por ejemplo si la cola de la arista de e_1 es v_1 y la cabeza es v_2 , entonces $e_1 = v_1v_2$. Podemos decir que v_2 es el sucesor de v_1 , y v_1 es el predecesor de v_2 .

Los grafos dirigidos simples pueden tener bucles, pero a veces queremos evitar eso.

Definición 2.1.3 Sea G un grafo simple, una orientación del grafo G es un grafo dirigido D formado por todos los vértices de G y asignando una orientación uv o vu para cada arista $uv \in E(G)$. Un grafo orientado es una orientación de un grafo simple. Un torneo es una orientación de un grafo completo.

Podemos ver que un grafo orientado es un grafo dirigido sin bucle.

Definición 2.1.4 Sea G un grafo simple, una orientación transitiva de G es una orientación F tal que si uv y vw son aristas de F , entonces uw también. Un grafo simple es de comparabilidad si tiene una orientación transitiva.

Lema 2.1.1 Sea G un grafo simple que no contiene ciclos inducidos de 4 vértices, y su complemento \overline{G} es de comparabilidad. Sean A_1 y A_2 dos cliques maximales de G , y sea F una orientación transitiva de \overline{G} , entonces existe una arista $ab \in E(F)$, tal que $a \in A_1$ y $b \in A_2$, y todas las aristas de $E(F)$ que conecta A_1 y A_2 tienen la misma orientación.

Demostración: Primero vamos a ver la existencia. Supongamos que no existe ninguna arista en $E(F)$ que conecta A_1 y A_2 , si es así todos los vértices de A_1 y A_2 en G están conectados entre sí, entonces $A_1 \cup A_2$ también es un clique, y contiene a A_1 y a A_2 , eso contradice la hipótesis. Por lo tanto, existe una arista en $E(F)$ que conecta A_1 y A_2 .

Ahora vamos a probar que todas las aristas de $E(F)$ que conecta A_1 y A_2 tienen la misma orientación. Sean $a, c \in A_1$ y $b, d \in A_2$, pero $ab \in E(F)$ y $dc \in E(F)$, o sea, las dos aristas tienen orientaciones diferentes.

- Si $a = c$, como F es transitiva, $db \in E(F)$, entonces $db \notin A_2$, eso contradice que A_2 es un clique, por lo tanto, las aristas en $E(F)$ tienen que tener la misma orientación.
- Si $b = d$, como F es transitiva, $ca \in E(F)$, entonces $ca \notin A_1$, eso contradice que A_1 es un clique, por lo tanto, las aristas en $E(F)$ tienen que tener la misma orientación.
- Queda el caso en que los cuatro vértices son diferentes. Afirmamos que ad o bc pertenece al $E(\overline{G})$. Porque si ninguna de las dos aristas pertenece al $E(\overline{G})$, entonces ad, db, bc, ca forman un ciclo inducido de 4 vértices contradiciendo la hipótesis. Por lo tanto, una de las dos aristas tiene que pertenecer al $E(\overline{G})$, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $ad \in E(\overline{G})$. Si $ad \in E(F)$, por la transitividad $ac \in E(F)$, entonces $ac \notin A_1$, eso contradice que A_1 es un clique. Si $da \in E(F)$, por la transitividad $db \in E(F)$, entonces $db \notin A_2$, eso contradice que A_2 es un clique. Por lo tanto, las aristas en $E(F)$ que une A_1 y A_2 tienen que tener la misma orientación. \square

Teorema 2.1.1 ([15]). *Sea G un grafo simple, son equivalentes:*

1. G es un grafo de intervalos.
2. G no contiene ciclos inducidos de 4 vértices, y su complemento \overline{G} es un grafo de comparabilidad.
3. Los cliques maximales de G pueden ser ordenados de tal forma que para todos los vértices a de $V(G)$ los cliques maximales que contienen a a sean consecutivos.

Demostración: (1) \Rightarrow (2) Sea G un grafo de intervalos, por el teorema 1.3.1, G no puede contener ciclos inducidos de 4 vértices.

Queda demostrar que el complemento de G es de comparabilidad. Sea $a_i, a_j \in V(G)$ pero no son adyacentes, entonces sus intervalos correspondientes α_i y α_j no se intersecan. Decimos que $\alpha_i < \alpha_j$ si y sólo si $r(\alpha_i) < l(\alpha_j)$, o sea, α_i queda el lado izquierdo del intervalo α_j . Definimos la orientación transitiva F del \overline{G} de la siguiente manera:

$$a_i a_j \in E(F) \Leftrightarrow \alpha_i < \alpha_j \quad \forall a_i a_j \in E(\overline{G})$$

Vamos a probar que F es una relación transitiva. Sea $a_i a_j \in E(F)$ y $a_j a_k \in E(F)$, entonces α_i queda el lado izquierdo del α_j , y α_j queda el lado izquierdo del α_k , por lo tanto, α_i queda el lado izquierdo del α_k , entonces $\alpha_i \alpha_k \in E(F)$, o sea, F es una relación transitiva.

(2) \Rightarrow (3) Primero vamos a ordenar los cliques maximales. Sea \mathcal{C} el conjunto de los cliques maximales de G , sean $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$, decimos que $A < B$ si y sólo si existe una arista $ab \in E(F)$ tal que $a \in A$ y $b \in B$. Por lema 2.1.1 esta desigualdad tiene sentido. Ahora queremos ver que $(\mathcal{C}, <)$ es una relación transitiva. Sean C_i, C_j, C_k elementos de \mathcal{C} , con $C_i < C_j$ y $C_j < C_k$, entonces existen aristas $ab \in E(F)$ y $cd \in E(F)$ con $a \in C_i, b, c \in C_j$ y $d \in C_k$.

- Si $bd \notin E(G)$, entonces $bd \in E(\overline{G})$, y por lema 1.4.1 $bd \in E(F)$, además, por la transitividad $ad \in E(F)$, por lo tanto, $C_i < C_k$.
- Si $ac \notin E(G)$, entonces $ac \in E(\overline{G})$, y por lema 1.4.1 $ac \in E(F)$, además, por la transitividad $ad \in E(F)$, por lo tanto, $C_i < C_k$.
- Ahora supongamos que $ac \in E(G)$ y $bd \in E(G)$. $bc \in E(G)$, porque C_j es un clique. Entonces $ad \notin E(G)$, porque sino a, d, b, c, a forma un ciclo de 4 vértices no cordales. Por lo tanto, $ad \in E(F)$, o sea, $C_i < C_k$.

Queda probado que la relación $(\mathcal{C}, <)$ es transitiva. Entonces podemos ordenar los elementos de \mathcal{C} linealmente, $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$, tal que $i < j$ si y sólo si $C_i < C_j$. Sea $a \in V(G)$, ahora vamos a probar que los cliques maximales que contienen a a son consecutivos. Supongamos que existen cliques maximales $C_i < C_j < C_k$ tal que $a \in C_i, a \notin C_j, a \in C_k$. Como C_j es un clique y $a \notin C_j$, entonces existe $b \in C_j$ tal que $ab \notin E(G)$, entonces $ab \in E(\overline{G})$, y como $C_i < C_j$, entonces $ab \in E(F)$, pero $a \in C_k$ y $C_j < C_k$, entonces $ba \in E(F)$, llegamos a una contradicción. Con eso probamos la segunda parte.

(3) \Rightarrow (1) Vamos a construir los intervalos que corresponden a cada vértice. Sea $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ el conjunto de los cliques maximales, sea a un vértice de G , y sea $A(a)$ el conjunto de cliques maximales que contiene a a . Le asignamos a cada C_i el intervalo $(i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}]$, $i = 1, 2, \dots, k$. Por hipótesis, $A(a)$ contiene cliques maximales consecutivos, o sea, $A(a) = \{C_j, C_{j+1}, \dots, C_h\}$. Sea $I(a)$ la unión de los intervalos que corresponden los conjuntos maximales de $A(a)$, entonces $I(a) = (j - \frac{1}{2}, h + \frac{1}{2}]$. Como dos vértices son adyacentes si y sólo si pertenecen a algún clique maximal en común, entonces podemos afirmar que:

$$ab \in E(G) \Leftrightarrow I(a) \cap I(b) \neq \emptyset \quad \forall a, b \in V(G)$$

Por lo tanto, G es un grafo de intervalos. \square

2.2. Grafos de intervalos unitarios y propios

Sea G un grafo de intervalos, es de intervalos unitarios cuando existe una representación por intervalos que son de longitud uno y es de intervalos propios cuando existe una representación por intervalos que ningún intervalo contenga propiamente al otro, o sea, si $\alpha \subseteq \beta$ entonces $\alpha = \beta$. Como ningún intervalo puede contener propiamente a otro intervalo de la misma longitud, los grafos de intervalos unitarios son propios. Kenneth P. Bogart y Douglas B. West probaron en [19] que las dos subclases son iguales. Además, en esta sección siguiendo el libro [17] vamos a introducir el concepto de las relaciones de semiorden y sus relaciones con los grafos de intervalos unitarios y propios.

Sea V un conjunto, $a \in V$ y $b \in V$, tenemos que decidir la preferencia entre a y b o si los dos elementos son indiferentes.

Construimos dos grafos, H y G tal que $V(H) = V$ y $V(G) = V$

$$\begin{aligned} ab \in E(H) = P &\Leftrightarrow a \text{ es mejor que } b \\ ab \in E(G) = E &\Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son indiferentes} \end{aligned}$$

Por definición H es un grafo dirigido, G es un grafo no dirigido. Sea P^{-1} es el conjunto de aristas tal que si $vw \in P^{-1}$ si y sólo si $wu \in P$.

Vamos a ver la estructura del H . Es razonable pedir que H no tenga ciclos, no sea reflexivo, y sea transitiva. O sea, que P sea un orden parcial.

Según Luce [23], también podemos asignar un número real $u(a)$ a cada vértice a de V , tal que a es mejor que b si $u(a)$ es suficientemente grande que $u(b)$, formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición 2.2.1 *Sea H un grafo dirigido, y sea $u : V(H) \rightarrow \mathfrak{R}$ una función de números reales, la llamamos función de utilidad de semiorden de H , si existe un número real δ tal que:*

$$ab \in E(H) \Leftrightarrow u(a) \geq u(b) + \delta \quad \forall a, b \in V$$

Axioma 2.2.1 *Sea H un grafo dirigido, $E(H) = P$ es una relación de semiorden si $\forall a_1, a_2, b_1, b_2 \in V(H)$ cumple los siguientes axiomas:*

1. P no es reflexivo.
2. $a_1a_2 \in P$ y $b_1b_2 \in P \Rightarrow a_1b_2 \in P$ o $b_1a_2 \in P$.
3. $a_1a_2 \in P$ y $a_2b_1 \in P \Rightarrow a_1b_2 \in P$ o $b_2b_1 \in P$.

Teorema 2.2.1 *Sea H un grafo dirigido y P el conjunto de las arista de H . Existe una función de utilidad de semiorden de H si y sólo si P es una relación de semiorden.*

Demostración: La demostración de ese teorema pueden encontrar en [27].

Definición 2.2.2 *Un grafo simple G es bipartito si $V(G)$ es unión de dos conjuntos independientes disjuntos A_1 y A_2 . Es completo si dos vértices de G son adyacentes si y sólo si uno está en A_1 y el otro en A_2 . Si el tamaño de A_1 es r y del A_2 es de s , el grafo bipartito completo lo denotamos $K_{r,s}$.*

Teorema 2.2.2 ([25]). *Sea G un grafo no dirigido. Las condiciones siguientes son equivalentes.*

1. *Existe una función $u : V(G) \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que si $a \in V(G)$ y $b \in V(G)$, además, $a \neq b$,*

$$a \text{ y } b \text{ son adyacentes} \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| < 1$$

2. *Existe un semiorden de \overline{G} .*
3. *\overline{G} es un grafo de comparabilidad y todas las orientaciones transitivas de \overline{G} es un semiorden.*
4. *G es un grafo de intervalos que no contiene ningún subgrafo $K_{1,3}$.*
5. *G es un grafo de intervalos propios.*
6. *G es un grafo de intervalos unitarios.*

Demostración: (1) \Rightarrow (6) Sea $u : V(G) \rightarrow \mathfrak{R}$, la función tal que si $a \in V(G)$ y $b \in V(G)$, además, $a \neq b$,

$$a \text{ y } b \text{ son adyacentes} \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| < 1$$

Vamos a construir un modelo de intervalos unitarios de G .

Le asignamos a a el intervalo abierto $\alpha = (u(a) - \frac{1}{2}, u(a) + \frac{1}{2})$.

Le asignamos a b el intervalo abierto $\beta = (u(b) - \frac{1}{2}, u(b) + \frac{1}{2})$.

Si $u(a) < u(b)$, $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Leftrightarrow u(b) - \frac{1}{2} < u(a) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow u(b) - u(a) < 1$.

Si $u(b) < u(a)$, $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Leftrightarrow u(a) - \frac{1}{2} < u(b) + \frac{1}{2} \Leftrightarrow u(a) - u(b) < 1$.

Entonces $\alpha \cap \beta \neq \emptyset \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| < 1$.

Asignamos a todos los vértices de G de la misma manera que el vértice a , entonces obtenemos un modelo de intervalos unitarios de G .

(6) \Rightarrow (5) Como ningún intervalo unitario puede contener propiamente a otro intervalo unitario, entonces G es un grafo de intervalos propios.

(5) \Rightarrow (4) G un grafo de intervalos propios, sea Γ su representación. Supongamos que G contiene un subgrafo $K_{1,3} = \{a, b_1, b_2, b_3\}$, donde b_1, b_2, b_3 son adyacentes al vértice a , pero no son adyacentes entre sí. Sean $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ representaciones de b_1, b_2, b_3 respectivamente, α representación de a . Podemos suponer que β_2 es el intervalo que está en el medio de β_1 y β_3 , como $\beta_1 \cap \alpha \neq \emptyset$ y $\beta_3 \cap \alpha \neq \emptyset$, entonces $l(\alpha) < r(\beta_1)$ y $l(\beta_3) < r(\alpha)$, además, $r(\beta_1) < l(\beta_2) < r(\beta_2) < l(\beta_3)$. Por lo tanto, $l(\alpha) < l(\beta_2) <$

$r(\beta_2) < r(\alpha)$, o sea, α contiene propiamente a β_2 , y eso contradice al condición (5), entonces G no puede contener ningún subgrafo $K_{1,3}$.

(4) \Rightarrow (3) Como G es un grafo de intervalos, su complemento \overline{G} es de comparabilidad. Sea $F(\overline{G})$, una orientación transitiva de \overline{G} . Vamos a probar que $F(\overline{G}) = F$ cumple los tres axiomas de semiorden.

- Por la definición del grafo, F no es reflexivo.
- Sean a_1, a_2, b_1, b_2 vértices de $V(G)$. Vamos a suponer que no cumple el axioma 2. O sea, $a_1a_2 \in F$, $b_1b_2 \in F$, pero supongamos que $a_1b_2 \notin F$ y $b_1a_2 \notin F$.

Si $a_1b_1 \in F$, por transitividad $a_1b_2 \in F$, eso contradice lo que supusimos, entonces $a_1b_1 \notin F$.

Si $b_1a_1 \in F$, por transitividad $b_1a_2 \in F$, eso contradice lo que supusimos, entonces $b_1a_1 \notin F$.

Con el mismo razonamiento podemos probar que $a_2b_2 \notin F$, $b_2a_2 \notin F$, $b_2a_1 \notin F$, $a_2b_1 \notin F$.

Entonces $b_1a_1, a_1b_2, b_2a_2, a_2b_1$ no son aristas de $E(\overline{G})$, por lo tanto, son aristas de $E(G)$, y como a_1a_2, b_1b_2 no son aristas de $E(G)$, a_1, a_2, b_1, b_2 forman un ciclo inducido de 4 vértices, por el teorema 1.3.1, G no es de intervalos, eso contradice la condición (4), por lo tanto, $a_1b_2 \in F$ o $b_1a_2 \in F$.

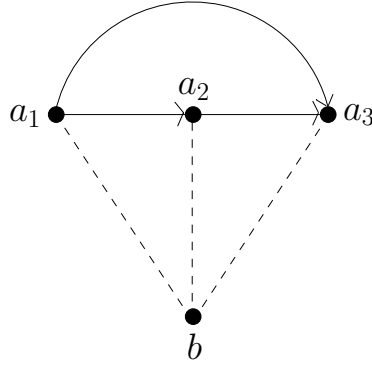
- Sean a_1, a_2, a_3, b vértices de $V(G)$. Vamos a suponer que no cumple el axioma 3. O sea, $a_1a_2 \in F$, $a_2a_3 \in F$, pero supongamos que $a_1b \notin F$ y $ba_3 \notin F$. Por transitividad $a_1a_3 \in F$.

Si $ba_1 \in F$, por transitividad $ba_3 \in F$, eso contradice lo que supusimos, entonces $ba_1 \notin F$.

Si $a_3b \in F$, por transitividad $a_1b \in F$, eso contradice lo que supusimos, entonces $a_3b \notin F$.

Con el mismo razonamiento podemos probar que $ba_2 \notin F$, $a_2b \notin F$.

Entonces ba_1, ba_2, ba_3 no son aristas de $E(\overline{G})$, por lo tanto, son aristas de $E(G)$, y como a_1a_2, a_2a_3, a_1a_3 no son aristas de $E(G)$, a_1, a_2, a_3, b forman un $K_{1,3}$, y eso contradice la condición (4). Por lo tanto, $a_1b \in F$ o $ba_3 \in F$.



Las aristas sólidas son de la orientación transitiva F de \overline{G} , y las aristas punteadas son del G .

(3) \Rightarrow (2) Sea $F(\overline{G})$ una orientación transitiva de \overline{G} , por la condición (3), $F(\overline{G})$ es un semiorden de \overline{G} .

(2) \Rightarrow (1) Si P es un semiorden de \overline{G} , por el teorema 2.2.1 existe una función de números reales $u' : V \rightarrow \mathfrak{R}$ y un número real $\delta > 0$ tal que

$$ab \in P \Leftrightarrow u'(a) - u'(b) \geq \delta$$

Definimos $u(a) = u'(a)/\delta$.

Y como $E(\overline{G}) = P + P^{-1}$, entonces $ab \in E \Leftrightarrow ab \notin E(\overline{G}) \Leftrightarrow ab \notin P$ y $ab \notin P^{-1} \Leftrightarrow$

$$-\delta \leq u'(a) - u'(b) \leq \delta \Leftrightarrow -1 \leq \frac{u'(a) - u'(b)}{\delta} \leq 1 \Leftrightarrow |u(a) - u(b)| \leq 1 \square$$

2.3. Grafos de intervalos q-propios

En esta sección vamos a generalizar algunas características de los grafos propios [24].

Definición 2.3.1 Sea G un grafo simple, es de intervalos q -propios si tiene una representación por intervalos tal que ningún intervalo está propiamente contenido en más de q intervalos.

Observación 2.3.1 Grafos de intervalos 0-propios son grafos de intervalos propios.

En general un intervalo $[a_1, b_1]$ está contenido propiamente en otro intervalo $[a_2, b_2]$ si $a_1 > a_2$ y $b_1 \leq b_2$ o $a_1 \geq a_2$ y $b_1 < b_2$. Pero vamos a ver que es suficiente pedir que las dos desigualdades sean estrictas.

Definición 2.3.2 El intervalo $[a_1, b_1]$ está contenido propiamente por ambos lados en el intervalo $[a_2, b_2]$ si $a_1 > a_2$ y $b_1 < b_2$.

Teorema 2.3.1 G un grafo de intervalos, sea $\Gamma = \{\alpha, \beta, \dots\}$ una representación por intervalos de G , entonces existe un modelo $\Gamma' = \{\alpha', \beta', \dots\}$ tal que solamente si α' está contenido propiamente en β' en el modelo Γ' , entonces α está contenido propiamente por ambos lados en β en el modelo Γ , donde α y β son intervalos correspondientes a α' y β' respectivamente.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos suponer que todos los extremos de los intervalos de Γ son enteros mayores que 1. Para todos los intervalos α en Γ definimos

$$\epsilon(\delta) = \frac{1}{r(\delta) - l(\delta) + 2}$$

Observamos que $\epsilon(\delta) < 1/2$ ya que $r(\delta) > l(\delta)$.

Ahora construimos un nuevo modelo de intervalos Γ' de G de la siguiente manera, sea $\delta \in \Gamma$, lo reemplazamos por

$$[l(\delta) - \epsilon(\delta), r(\delta) + \epsilon(\delta)]$$

Primero vamos a probar que si α' está contenido propiamente en β' en Γ' , entonces $\epsilon(\alpha) > \epsilon(\beta)$. Supongamos que no, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(\alpha) - l(\alpha) + 2} &< \frac{1}{r(\beta) - l(\beta) + 2} \\ r(\alpha) - l(\alpha) + 2 &> r(\beta) - l(\beta) + 2 \\ r(\alpha) - l(\alpha) &> r(\beta) - l(\beta) \end{aligned}$$

Como los extremos de los intervalos en Γ son enteros, la longitud de los intervalos es entero positivo, por lo tanto,

$$r(\alpha) - l(\alpha) \geq r(\beta) - l(\beta) + 1$$

Además, como $\epsilon(\beta) < 1/2$ entonces

$$r(\alpha) - l(\alpha) + 2\epsilon(\alpha) > r(\alpha) - l(\alpha) \geq r(\beta) - l(\beta) + 1 > r(\beta) - l(\beta) + 2\epsilon(\beta)$$

Llegamos a que la longitud del intervalo α' es mayor que la de β' , pero eso contradice que α' está contenido propiamente en β' . Por lo tanto, $\epsilon(\alpha) > \epsilon(\beta)$.

Ahora vamos a ver que si α' está contenido propiamente en β' en Γ' , entonces α está contenido propiamente en β en Γ .

Por definición $l(\alpha') > l(\beta')$ y $r(\beta') \geq r(\alpha')$ o $l(\alpha') \geq l(\beta')$ y $r(\beta') > r(\alpha')$. Para el primer caso

$$\begin{aligned} l(\alpha) - \epsilon(\alpha) &> l(\beta) - \epsilon(\beta) \\ l(\alpha) &> l(\beta) - \epsilon(\beta) + \epsilon(\alpha) \end{aligned}$$

Como $\epsilon(\alpha) > \epsilon(\beta)$

$$l(\alpha) > l(\beta)$$

Y además

$$\begin{aligned} r(\beta) + \epsilon(\beta) &\geq r(\alpha) + \epsilon(\alpha) \\ r(\beta) &\geq r(\alpha) + \epsilon(\alpha) - \epsilon(\beta) \end{aligned}$$

Como $\epsilon(\alpha) > \epsilon(\beta)$

$$r(\beta) > r(\alpha)$$

Entonces α está contenido propiamente en β en Γ .

Para el segundo caso, se demuestra con el mismo razonamiento.

Y también vamos a probar que si $\alpha' \cap \beta' \neq \emptyset$, entonces $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $l(\beta') < r(\alpha')$, entonces

$$l(\beta) - \epsilon(\beta) < r(\alpha) + \epsilon(\alpha)$$

$$l(\beta) < r(\alpha) + \epsilon(\alpha) + \epsilon(\beta)$$

Y como $\epsilon(\alpha) < 1/2$

$$l(\beta) < r(\alpha) + 1$$

Podemos afirmar que $l(\beta) < r(\alpha)$, porque $l(\beta) \neq r(\alpha)$, ya que los extremos de los intervalos de Γ son diferentes. Tampoco puede pasar que $l(\beta) > r(\alpha)$, sino como $l(\beta)$ y $r(\alpha)$ son enteros, $l(\beta) = r(\alpha) + k$ donde k es un entero positivo y $k > 1$, entonces

$$r(\alpha) + k < r(\alpha) + 1$$

$$k < 1$$

Llegamos a una contradicción. Entonces $l(\beta) < r(\alpha)$, o sea, $\alpha \cap \beta \neq \emptyset$.

Por último vamos a probar que si α no está contenido propiamente por ambos lados en β en Γ , entonces α' no está contenido propiamente en β' en Γ' . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $r(\alpha) \leq r(\beta)$ y $l(\alpha) \leq l(\beta)$.

El caso trivial es cuando $r(\alpha) = r(\beta)$ y $l(\alpha) = l(\beta)$, o sea, $\alpha = \beta$, entonces $\alpha' = \beta'$, entonces α' no está contenido propiamente en β' .

Ahora vamos a ver los otros casos. Primero vamos a ver qué pasa con los extremos derechos cuando construimos Γ' .

- Si $r(\alpha) < r(\beta)$, como los extremos son enteros positivos, entonces $r(\beta) = r(\alpha) + k$ donde k es un entero positivo y $k > 1$. Además, sabemos que $\epsilon(\alpha) < 1/2$, entonces

$$r(\alpha) + \epsilon(\alpha) < r(\alpha) + 1 < r(\alpha) + k = r(\beta) < r(\beta) + \epsilon(\beta)$$

Entonces llegamos a que $r(\alpha') < r(\beta')$

- Si $r(\alpha) = r(\beta)$ y $l(\alpha) < l(\beta)$, entonces la longitud de α es mayor que la de β . Entonces $\epsilon(\alpha) < \epsilon(\beta)$, por lo tanto, $r(\alpha') < r(\beta')$

Nos queda ver qué pasa con los extremos izquierdos cuando construimos Γ' .

- Si $l(\alpha) < l(\beta)$, como los extremos son enteros positivos, entonces $r(\alpha) = r(\beta) - k$ donde k es un entero positivo y $k > 1$. Además, sabemos que $\epsilon(\beta) < 1/2$, entonces

$$l(\alpha) - \epsilon(\alpha) < l(\alpha) = l(\beta) - k < l(\beta) - 1 < r(\beta) - \epsilon(\beta)$$

Entonces llegamos a que $l(\alpha') < l(\beta')$

- Si $l(\alpha) = l(\beta)$ y $r(\alpha) < r(\beta)$, entonces la longitud de α es menor que la de β . Entonces $\epsilon(\alpha) > \epsilon(\beta)$, por lo tanto, $l(\alpha') < l(\beta')$

Uniendo los resultados anteriores obtenemos $r(\alpha') < r(\beta')$ y $l(\alpha') < l(\beta')$, entonces α' no está contenido propiamente en β' en Γ' \square

Colorario 2.3.1 *G un grafo de intervalos, si no es q -propios entonces en cualquier modelo de intervalos de G podemos encontrar un intervalo tal que esté contenido propiamente por ambos lados en al menos $q + 1$ intervalos.*

Demostración: Sea Γ un modelo de intervalos de G . Supongamos que ningún intervalo de Γ está contenido propiamente por ambos lados en $q + 1$ intervalos. Por el teorema 2.3.1, existe un modelo de intervalos Γ' de G tal que ningún intervalo de Γ' está contenido propiamente en $q + 1$ intervalos. Entonces G es de intervalos q -propios contradiciendo la hipótesis. \square

Definición 2.3.3 *G y H grafos simples, decimos que G es un grafo H -libre si G no contiene a H como subgrafo.*

Definición 2.3.4 *Denotamos con T_q el grafo que consiste en unión de K_q y tres vértices v_1, v_2, v_3 no adyacentes entre sí tal que v_i con $i = 1, 2, 3$ es adyacente a todos los vértices de K_q . Podemos observar que $T_1 = K_{1,3}$.*

Teorema 2.3.2 *G un grafo simple, es un grafo de intervalos q -propios si y sólo si es un grafo de intervalos T_{q+1} -libre.*

Demostración: Vamos a probar la condición suficiente. Supongamos que G contiene a T_{q+1} como un subgrafo inducido. T_{q+1} es la unión de $K_{q+1} = \{b_1, \dots, b_{q+1}\}$ y 3 vértices a_1, a_2, a_3 no adyacentes entre sí tal que a_i con $i = 1, 2, 3$ es adyacente a todos los vértices de K_q . Sea Γ una representación por intervalos de G , sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ los intervalos correspondientes a los vértices a_1, a_2, a_3 . Sean $\beta_1, \dots, \beta_{q+1}$ los intervalos correspondientes a los vértices b_1, \dots, b_{q+1} e I es la intersección de todos los β_i . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que α_2 está entre α_1 y α_3 . Como α_1, α_2 y α_3 tienen que intersecar con todos los intervalos β_i con $i = 1, 2, \dots, q + 1$, entonces intersecan con I , y además, α_2 no se interseca con α_1 , tampoco con α_3 , por lo tanto, α_2 está contenido propiamente en I , entonces está contenido propiamente en todos los intervalos β_i con $i = 1, 2, \dots, q + 1$. Por lo tanto, G no es un grafo de intervalos q -propios y eso contradice la hipótesis.

Ahora vamos a probar la condición necesaria. Vamos a suponer que G es de intervalos pero no es q -propios, y sea Γ un modelo de intervalos de G tal que los extremos de los intervalos son enteros. Extendemos los extremos de los intervalos hacia izquierda y derecha lo más lejos posible con extremos enteros formando un nuevo modelo de intervalos de G , y lo llamamos Γ' . Por el colorario 2.3.1, existe un intervalo α y un conjunto de intervalos K tal que K tiene por lo menos $q + 1$ elementos, y α está contenido propiamente por ambos lados en todos los intervalos de K . Sea β_1 tal que $r(\beta_1)$ es el mayor de todos los intervalos en K , por nuestra construcción de Γ' , si extendemos el extremo derecho de α a $r(\beta_1)$, el modelo resultante ya no representa el grafo G , o sea, de esa manera α interseca con un intervalo β_2 en Γ' tal que $r(\alpha) < l(\beta_2) \leq r(\beta_1)$. Entonces β_2 se interseca con todos los intervalos de K , pero no se interseca con α . De la misma manera tampoco podemos extender el extremo izquierdo de α y podemos encontrar otro intervalo β_3 de Γ' tal que esté a la izquierda de α , se interseca con todos los intervalos de K , pero no con α . Además, podemos ver que β_2 y β_3 no se intersecan ya que β_1 está entre ellos dos. Por lo tanto, a los vértices que corresponden los intervalos de K , β_1 , β_2 y β_3 inducen un subgrafo T_{q+1} , y eso contradice la hipótesis, por lo tanto, G tiene que ser q -propios. \square

3. Superclases de los grafos de intervalos

3.1. Propiedades básicas de grafos

Definición 3.1.1 $\omega(G)$ es la cantidad de vértices del máximo clique del G , y lo llamamos número del clique del G .

Definición 3.1.2 Sea G un grafo simple, un k -coloreo del grafo G es una función $f : V(G) \rightarrow S$, donde $|S| = k$, por ejemplo $S = \{1, 2, \dots, k\}$, cada elemento de S representa un color. Un k -coloreo es propio si $uv \in E(G)$ entonces $f(u) \neq f(v)$.

Definición 3.1.3 $\chi(G)$ es el número c más chico de los c -coloreos propios de G , se llama el número cromático de G .

Proposición 3.1.1 Sea G un grafo simple, entonces $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Demostración: Sea $A \subseteq V(G)$, el máximo clique, entonces $|A| = \omega(G)$, como A es un clique, para todos los vértices $v \in A$ y $w \in A$, v y w son adyacentes, por lo tanto, tienen que ser pintados con dos colores diferentes, entonces tenemos que pintar con colores diferentes todos los vértices de A , por lo que necesitamos $\omega(G)$ colores. Por lo tanto, $\omega(G) \leq \chi(G)$. \square

Definición 3.1.4 Un cubrimiento de cliques de tamaño k es una partición de vértices A_1, A_2, \dots, A_k tal que $V = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ y cada A_i es un clique de G .

Definición 3.1.5 $\theta(G)$ es el tamaño del cubrimiento de cliques más chico del G , y lo llamamos el número de cubrimiento de cliques de G .

Definición 3.1.6 Sea G un grafo simple, un conjunto independiente es un subconjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ tal que ningún par de vértices de X son adyacentes.

Definición 3.1.7 $\alpha(G)$ es la cantidad de vértices de un conjunto independiente de mayor cardinal, se llama número de estabilidad.

Proposición 3.1.2 Sea G un grafo simple, entonces $\alpha(G) \leq \theta(G)$.

Demostración: Sea $X \subseteq V(G)$, el máximo conjunto independiente, entonces $|X| = \alpha(G)$, como X es un conjunto independiente, para todos los vértices $v \in X$ y $w \in X$, v y w no son adyacentes, por lo tanto, pertenecen a dos cliques diferentes, entonces al menos hay $\alpha(G)$ cliques, o sea, $\alpha(G) \leq \theta(G)$. \square

Proposición 3.1.3 Sea G un grafo simple, entonces $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$.

Demostración: Sea H el máximo clique de G , y S el máximo conjunto independiente de \overline{G} .

- Primero vamos a probar que $\omega(G) \leq \alpha(\overline{G})$. Como H es un clique de G , entonces todos los vértices de H son adyacentes entre sí en G . Por lo tanto, en \overline{G} no son adyacentes, o sea, H en \overline{G} es un conjunto independiente, entonces $|H| \leq |S|$, o sea, $\omega(G) \leq \alpha(\overline{G})$.
- Ahora vamos a probar que $\omega(G) \geq \alpha(\overline{G})$. Como S es un conjunto independiente de \overline{G} , entonces ningún par de los vértices son adyacentes entre sí en \overline{G} , por lo tanto, son adyacentes en G , o sea, S en G es un clique, entonces $|S| \leq |H|$, o sea, $\omega(G) \geq \alpha(\overline{G})$. \square

Proposición 3.1.4 *Sea G un grafo simple, entonces $\chi(G) = \theta(\overline{G})$.*

Demostración: Vamos a separar la demostración en dos partes.

- Primero vamos a probar que $\chi(G) \geq \theta(\overline{G})$. Sea la partición mínima de vértices $V(G) = X_1 + X_2 + \dots + X_c$ de conjuntos independientes en G . Entonces para cada X_i con $i = 1, 2, \dots, c$, ningún par de los vértices en X_i son adyacentes en G , por lo tanto, son adyacentes en \overline{G} , o sea, los X_i son cliques en \overline{G} , entonces $c = \chi(G) \geq \theta(\overline{G})$.
- Ahora vamos a probar que $\chi(G) \leq \theta(\overline{G})$. Sea la partición mínima de vértices $V(\overline{G}) = A_1 + A_2 + \dots + A_j$ de cliques en \overline{G} . Entonces para cada A_i con $i = 1, 2, \dots, j$, todos los vértices en A_i son adyacentes en \overline{G} , por lo tanto, no son adyacentes en G , o sea, los A_i son conjuntos independientes en G , entonces $\chi(G) \leq \theta(\overline{G}) = j$. \square

3.2. Grafos perfectos

Definición 3.2.1 *Sea G un grafo simple es perfecto si cumple las siguientes propiedades.*

$$(1) \quad \omega(G[A]) = \chi(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

$$(2) \quad \alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

En el año 1961, Berge conjeturó que la propiedad (1) y la propiedad (2) son equivalentes [3], luego en el año 1969 y año 1971 Fulkerson [11] y [12] y en el año 1972 Lovász [21] demostraron parte del teorema débil de los grafos perfectos, y finalmente en el año 1972 Lovász [22] completó la demostración del teorema, que consiste en la equivalencia de la propiedad (1), la propiedad (2) y agregando una tercera condición de equivalencia de propiedad (3).

$$(3) \quad \omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A| \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Para demostrar las tres equivalencias, necesitamos introducir algunos conceptos nuevos como multiplicación del vértice, y también demostrar algunos lemas previos.

Definición 3.2.2 Sea G un grafo simple, sea $a \in V(G)$, entonces la duplicación del vértice a produce un nuevo grafo $G \circ a$ agregando a G un vértice nuevo a' , tal que $N(a') = N(a)$.

En el caso más general, tenemos a_1, a_2, \dots, a_n vértices de G , y un vector de enteros no negativos $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, y construimos un nuevo grafo $H = G \circ h$ sustituyendo cada a_i por un conjunto independiente de h_i vértices $a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{h_i}$, tal que a_i^s y a_j^t son adyacentes si y sólo si a_i y a_j son adyacentes en G . Decimos que H se obtiene de G por la multiplicación de vértices.

Observación 3.2.1 Por la definición h_i puede ser cero, en ese caso H no contiene a ninguna copia de a_i y tampoco contiene a a_i . Entonces todos los subgrafos inducidos de G se pueden obtener por la multiplicación de vértices de un vector formado por unos y ceros.

Observación 3.2.2 Sea G un grafo simple, $V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ el conjunto de los vértices, y un vector de enteros no negativos $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$, entonces $H = G \circ h$ puede ser construido por una secuencia de duplicaciones de vértices de la siguiente manera: Comenzando por a_1 , si $h_1 = 0$, entonces eliminamos el vértice a_1 y las aristas que inciden sobre él, sino duplicamos h_1 veces el vértice a_1 , agregando los vértices $a_1^1, a_1^2, \dots, a_1^{h_1}$ tal que $N(a_1^k) = N(a_1)$, y luego eliminamos a_1 y las aristas que inciden sobre él. así sucesivamente con todos los vértices a_i , con $i = 1, \dots, n$.

Propiedad 3.2.1 Sea G un grafo simple y $a, b \in V(G)$ con $a \neq b$, entonces

$$(G \circ a) - b = (G - b) \circ a$$

Demostración: $H_1 = (G \circ a) - b$ y $H_2 = (G - b) \circ a$.

Primero veamos que el conjunto de los vértices de H_1 es igual que el de H_2 . $V(H_1) = (V(G) \cup \{a'\}) - b$ y $V(H_2) = (V(G) - b) \cup \{a'\}$, o sea, son iguales.

Ahora vamos a ver que el conjunto de las aristas de H_1 es igual que el de H_2 . Sean $N(a) = \{u_1, u_2, \dots, u_i\}$ y $N(b) = \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$.

Si a y b no son adyacentes, entonces $\{a'u_1, \dots, a'u_i\} \cap \{bv_1, \dots, bv_j\} = \emptyset$, además

$$E(H_1) = E(G) \cup \{a'u_1, \dots, a'u_i\} - \{bv_1, \dots, bv_j\}$$

$$E(H_2) = [E(G) - \{bv_1, \dots, bv_j\}] \cup \{a'u_1, \dots, a'u_i\}$$

Por lo tanto, $E(H_1) = E(H_2)$.

Si a y b son adyacentes, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $u_1 = b$ y $v_1 = a$, entonces

$$E(H_1) = [E(G) \cup \{a'b, a'u_2, \dots, a'u_i\}] - [\{ba, bv_2, \dots, bv_j\} \cup \{ba'\}]$$

$$\Rightarrow E(H_1) = [E(G) \cup \{a'u_2, \dots, a'u_i\}] - \{ba, bv_2, \dots, bv_j\}$$

$$\text{y además, } E(H_2) = [E(G) - \{ba, bv_2, \dots, bv_j\}] \cup \{a'u_2, \dots, a'u_i\}$$

Por lo tanto, $E(H_1) = E(H_2)$. \square

Lema 3.2.1 ([3]). *Sea G un grafo simple y H un grafo obtenido de G por la multiplicación de vértices, entonces*

1. Si $\omega(G[A]) = \chi(G[A]) \forall A \subseteq V(G)$, entonces $\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \forall A \subseteq V(H)$.
2. Si $\alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \forall A \subseteq V(G)$, entonces $\alpha(H[A]) = \theta(H[A]) \forall A \subseteq V(H)$.

Demostración: Vamos a probar por inducción en cantidad de vértices.

Caso base: Sea G un grafo con un solo vértice a . Sea $h = i$, $H = G \circ h$ va a ser un grafo con i vértices no adyacentes entre sí. Entonces $\omega(H[A]) = \chi(H[A]) = 1$ y $\alpha(H[A]) = \theta(H[A]) = |A|$ para todos los subconjuntos $A \subseteq V(H)$.

Paso inductivo: Sea K un grafo simple tal que $|V(K)| < n$, y h un vector de enteros no negativos, supongamos que para K cumple las dos condiciones siguientes:

1. Si $\omega(K[A]) = \chi(K[A])$ para todos los subconjuntos $A \subseteq V(K)$, entonces $\omega((K \circ h)[A]) = \chi((K \circ h)[A])$ para todos los subconjuntos $A \subseteq V(K \circ h)$.
2. Si $\alpha(K[A]) = \theta(K[A])$ para todos los subconjuntos $A \subseteq K(G)$, entonces $\alpha((K \circ h)[A]) = \theta((K \circ h)[A])$ para todos los subconjuntos $A \subseteq V(K \circ h)$.

Sea G un grafo simple tal que $V(G) = \{a_1, \dots, a_n\}$, y $h = (h_1, \dots, h_n)$, $H = G \circ h$. Queremos ver que también cumple las condiciones. Vamos a separar en dos casos.

Caso 1: Si existe algún h_j tal que $h_j = 0$, sea $h' = (h_1, \dots, h_{j-1}, h_{j+1}, \dots, h_n)$, entonces $H = G \circ h = (G - \{a_i\}) \circ h'$. Los subgrafos inducidos de $G - \{a_i\}$ también son subgrafos inducidos de G , por lo tanto,

$$\text{si } \omega(G[A]) = \chi(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

entonces

$$\omega((G - \{a_i\})[A]) = \chi((G - \{a_i\})[A]) \quad \forall A \subseteq V(G - \{a_i\})$$

y por hipótesis inductiva

$$\omega(((G - \{a_i\}) \circ h')[A]) = \chi(((G - \{a_i\}) \circ h')[A]) \quad \forall A \subseteq V((G - \{a_i\}) \circ h')$$

o sea

$$\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \quad \forall A \subseteq V(H).$$

Con el mismo razonamiento podemos probar que G cumple la segunda condición.

Caso 2: $h_j \geq 1$ para todos los $j = 1, 2, \dots, n$. Sea $a \in V(G)$, por la observación 3.2.2 es suficiente probar el resultado para $H = G \circ a$. Sea a' la copia del vértice a . Sea $A \subseteq V(H)$:

- Si $a' \notin A$, por lo tanto, $H[A] = G[A]$, entonces si $\omega(G[A]) = \chi(G[A])$, $\omega(H[A]) = \chi(H[A])$.
- Si $a \notin A$ y $a' \in A$, como a y a' tienen los mismos vecinos, entonces puedo intercambiar los nombres de ellos, y quedaría como el caso anterior.
- Y si $a \in A$ y $a' \in A$, sea $C \subseteq A$ el clique maximal que contiene al vértice a , como a y a' no son adyacentes, $a' \notin C$, y en $H[A]$ el clique maximal que contiene a a' es $(C \setminus \{a\}) \cup \{a'\}$, entonces $\omega(G[A \setminus \{a'\}]) = \omega(H[A])$. Además, podemos pintar a a' con el mismo color que a por lo tanto, $\chi(G[A \setminus \{a'\}]) = \chi(H[A])$. Entonces si $\omega(G[A \setminus \{a'\}]) = \chi(G[A \setminus \{a'\}])$, podemos concluir que $\omega(H[A]) = \chi(H[A])$.

Juntando los tres resultados anteriores, probamos que si $\omega(G[A]) = \chi(G[A]) \forall A \subseteq V(G)$, entonces $\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \forall A \subseteq V(H)$.

Sea $A \subseteq V(H)$, \mathcal{K} un cubrimiento de clique más chico de $G[A \setminus \{a'\}]$, y sea K_a el clique de \mathcal{K} que contiene a a .

- Si $a' \notin A$, entonces $H[A] = G[A]$, entonces si $\alpha(G[A]) = \theta(G[A])$, $\alpha(H[A]) = \theta(H[A])$.
- Si $a \notin A$ y $a' \in A$, como a y a' tienen los mismos vecinos, entonces puedo intercambiar los nombres de ellos, y quedaría como el caso anterior.
- Si $a \in A$, $a' \in A$, y además, existe un máximo conjunto independiente S de $G[A \setminus \{a'\}]$ tal que $a \in S$. Entonces $S \cup \{a'\}$ es el máximo conjunto independiente de $H[A]$, por lo tanto,

$$\alpha(G[A \setminus \{a'\}]) + 1 \leq \alpha(H[A])$$

Y $\mathcal{K} \cup \{\{a'\}\}$ es un cubrimiento de clique de $H[A]$, entonces

$$\theta(H[A]) \leq \theta(G[A \setminus \{a'\}]) + 1$$

Entonces si

$$\theta(G[A]) = \alpha(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Especialmente

$$\theta(G[A \setminus \{a'\}]) = \alpha(G[A \setminus \{a'\}])$$

Juntanto todos los resultados

$$\theta(H[A]) \leq \theta(G[A \setminus \{a'\}]) + 1 = \alpha(G[A \setminus \{a'\}]) + 1 \leq \alpha(H[A]) \leq \theta(H[A])$$

Por lo tanto,

$$\alpha(H[A]) = \theta(H[A])$$

- Si $a \in A$, $a' \in A$, y a no pertenece a ningún máximo conjunto independiente de $G[A \setminus \{a'\}]$. Sea S_a el conjunto independiente de $G[A \setminus \{a'\}]$ que contiene a a , entonces $S_a \cup \{a'\}$ es un conjunto independiente en $H[A]$, por lo tanto,

$$\alpha(H[A]) = \alpha(G[A \setminus \{a'\}])$$

Como $|\mathcal{K}| = \alpha(G[A \setminus \{a'\}])$, y dos vértices que pertenecen a un conjunto independiente no son adyacentes, por lo tanto, tiene que pertenecer en dos cliques diferentes. Por lo tanto, cada clique de \mathcal{K} interseca a un conjunto independiente de $G[A \setminus \{a'\}]$ exactamente una vez, particularmente para K_a el clique de \mathcal{K} que contiene a a . Sea $D = K_a \setminus \{a\}$, y como a no pertenece a ningún máximo conjunto independiente, entonces D interseca a cada máximo conjunto independiente de $G[A \setminus \{a'\}]$ exactamente una vez, entonces

$$\alpha(G[A \setminus (\{a'\} \cup D)]) = \alpha(G[A \setminus \{a'\}]) - 1$$

Entonces si

$$\theta(G[A]) = \alpha(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Entonces cumple la siguiente igualdad

$$\theta(G[A \setminus (\{a'\} \cup D)]) = \alpha(G[A \setminus (\{a'\} \cup D)]) = \alpha(G[A \setminus \{a'\}]) - 1 = \alpha(H[A]) - 1$$

Entonces podemos encontrar un cubrimiento de clique de $G[A \setminus (\{a'\} \cup D)]$ del tamaño $\alpha(H[A]) - 1$, y ese cubrimiento agregando otro clique $D \cup \{a'\}$ obtenemos un cubrimiento de clique de $H[A]$, entonces

$$\theta(H[A]) = \alpha(H[A])$$

Juntando los cuatro resultados anteriores, probamos que $\alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \forall A \subseteq V(G)$, entonces $\alpha(H[A]) = \theta(H[A]) \forall A \subseteq V(H)$. \square

Lema 3.2.2 ([12] y [22]). *Sea G un grafo simple, si para cualquier subgrafo inducido propio K de G cumple que $\alpha(K[A]) = \theta(K[A]) \forall A \subseteq V(K)$, y sea $h = (h_1, \dots, h_n)$ un vector de enteros no negativos, $H = G \circ h$, si $\omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A| \forall A \subseteq V(G)$, entonces $\omega(H[A])\alpha(H[A]) \geq |A| \forall A \subseteq V(H)$.*

Demostración: Supongamos que $\omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A| \forall A \subseteq V(G)$ y existe algunos grafos obtenidos por multiplicación de los vértices de G que no satisface esta desigualdad, y dentro de esos grafos podemos elegir el grafo H que tiene menor cantidad de vértices, sea $X = V(H)$, entonces

$$\omega(H)\alpha(H) < |X|$$

Y

$$\omega(H[A])\alpha(H[A]) \geq |A| \quad \forall A \subset V(H)$$

Igual que la demostración del lema anterior, podemos suponer que h_i con $i = 1, 2, \dots, n$ son mayor o igual que 1. Sea u un vértice de G , y $U = \{u^1, u^2, \dots, u^h\}$

el conjunto de vértices de H que corresponde el vértice u . Como $H - \{u^1\}$ es un subgrafo de H , entonces

$$\begin{aligned} |X| - 1 = |X - \{u^1\}| &\leq \omega(H - \{u^1\})\alpha(H - \{u^1\}) \\ &\leq \omega(H)\alpha(H) \\ &\leq |X| - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, vale la igualdad, además, $\omega(H - \{u^1\}) \leq \omega(H)$ y $\alpha(H - \{u^1\}) \leq \alpha(H)$, entonces podemos definir lo siguiente

$$\begin{aligned} p &= \omega(H - \{u^1\}) = \omega(H) \\ q &= \alpha(H - \{u^1\}) = \alpha(H) \end{aligned}$$

Y

$$pq = |X| - 1$$

$H[X - U]$ se obtiene por multiplicación de vértices de $G - \{u\}$ que es un subgrafo inducido propio de G . Por hipótesis $\alpha((G - \{u\})[A]) = \theta((G - \{u\})[A]) \forall A \subseteq V(G - \{u\})$, y por el lema 3.2.1

$$\theta(H[X - U]) = \alpha(H[X - U]) \leq \alpha(H) = q$$

Por lo tanto, existe un cubrimiento de cliques de $H[X - U]$ de tamaño q , sean los cliques K_1, K_2, \dots, K_q , podemos suponer que los K_i son disjuntos de a dos, y $|K_1| \geq |K_2| \geq \dots \geq |K_q|$. Además

$$\sum_{i=1}^q |K_i| = |X - U| = |X| - h = pq - (h - 1)$$

Como $H[X - U] \subseteq H$, entonces $\omega(H[X - U]) \leq \omega(H) = p$, o sea, $|K_i| \leq p$, por lo tanto, al menos hay $h - 1$ de los K_i tiene p vértices, o sea

$$|K_1| = |K_2| = \dots = |K_{q-h+1}| = p$$

Sea H' el subgrafo inducido por $X' = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_{q-h+1} \cup \{u^1\}$, entonces

$$|X'| = p(q - h + 1) + 1 < pq + 1 = |X|$$

Como H' es un subgrafo inducido propio de H y $p = \omega(H) \geq \omega(H')$, por lo tanto,

$$|X'| \leq \omega(H')\alpha(H') \leq p\alpha(H')$$

además

$$p(q - h + 1) < |X'|$$

Juntando las dos últimas desigualdades y dividiendo por p , queda

$$\alpha(H') > q - h + 1$$

Entonces existe un conjunto independiente de H' del tamaño $q-h+2$, lo llamamos S' tal que $u^1 \in S'$, sino S' contiene dos vértices de un clique de H' por cómo definimos H' . Entonces $S = S' \cup U$ es un conjunto independiente con $q + 1$ vértices, y eso contradice la definición de q . Por lo tanto,

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |X| \square$$

Ahora vamos demostrar el teorema débil de los grafos perfectos que consiste en la equivalencia de las tres propiedades.

Teorema 3.2.1 *El teorema débil de los grafos perfectos ([22]). Para un grafo simple G , las siguientes propiedades son equivalentes.*

$$\begin{array}{lll} (1) & \omega(G[A]) = \chi(G[A]) & (\forall A \subseteq V(G)) \\ (2) & \alpha(G[A]) = \theta(G[A]) & (\forall A \subseteq V(G)) \\ (3) & \omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A| & (\forall A \subseteq V(G)) \end{array}$$

Demostración: Vamos a demostrar el teorema por inducción en la cantidad de vértices.

Caso base: Si el grafo tiene un sólo vértice, $\omega(G[A]) = \chi(G[A]) = \alpha(G[A]) = \theta(G[A]) = 1 \forall A \subseteq V(G)$, por lo tanto, siempre cumple las tres propiedades.

Paso inductivo: Supongamos que el teorema vale para todos los grafos que tienen menor cantidad de vértices que G . Ahora queremos ver que vale para G .

(1) \Rightarrow (3) Sea A un subconjunto de $V(G)$, como G cumple la primera propiedad, entonces podemos colorear $G[A]$ con $\omega(G[A])$ colores, y de cada color hay como máximo $\alpha(G[A])$ vértices, entonces $\omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A|$.

(3) \Rightarrow (1) Por hipótesis inductiva, para todos los grafos simples H que tiene menor cantidad de vértices que G , si $\omega(H[A])\alpha(H[A]) \geq |A| \forall A \subseteq V(H)$, entonces $\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \forall A \subseteq V(H)$, entonces cumple especialmente para todos los subgrafos inducidos propios de G , por lo tanto, sólo nos queda demostrar que $\omega(G) = \chi(G)$.

Si existe un conjunto independiente S tal que $\omega(G[V(G) \setminus S]) < \omega(G)$, entonces podemos pintar $\omega(G[V(G) \setminus S])$ con $\omega(G) - 1$ colores, y pintamos los vértices de S con un color diferente, por lo tanto, $\omega(G) = \chi(G)$.

Ahora supongamos que no existe ningún conjunto independiente S tal que $\omega(G[V(G) \setminus S]) < \omega(G)$, entonces si S es un conjunto independiente, existe un clique K_S de $\omega(G)$ vértices en $G[V(G) \setminus S]$, y sea \mathcal{S} la colección de todos los conjuntos independientes de G . Además, para cada $a_i \in V(G)$ con $i = 1, 2, \dots, k$, definimos h_i como la cantidad

de cliques K_S de los cuales contiene a a_i , sea $h = (h_1, h_2, \dots, h_k)$ y sea $H = G \circ h$. Por un lado por hipótesis inductiva, $\alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \forall A \subseteq V(G)$, entonces especialmente todos los subgrafos inducidos propios de G cumple esta propiedad y por el lema 3.2.2

$$\omega(H)\alpha(H) \geq |V(H)|$$

Por otro lado por cómo definimos H y los h_i

$$|V(H)| = \sum_{a_i \in V(H)} h_i = \sum_{S \in \mathcal{S}} |K_S| = \omega(G)|\mathcal{S}|$$

Además

$$\alpha(H) = \max_{T \in \mathcal{S}} \left\{ \sum_{a_i \in T} h_i \right\} = \max_{T \in \mathcal{S}} \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K_S| \right\}$$

Como T es un conjunto independiente y K_S es un clique, por lo tanto, $|T \cap K_S| \leq 1$, y $T \cap K_T = \emptyset$, entonces

$$\max_{T \in \mathcal{S}} \left\{ \sum_{S \in \mathcal{S}} |T \cap K_S| \right\} \leq |\mathcal{S}| - 1$$

Además, en el mismo clique de H no se puede contener a dos copias del mismo vértice de G , entonces

$$\omega(H) \leq \omega(G)$$

Multiplicando ambos lados por $\alpha(H)$, y juntando las desigualdades anteriores, tenemos

$$\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)\alpha(H) \leq \omega(G)(|\mathcal{S}| - 1) < \omega(G)|\mathcal{S}| = |V(H)|$$

Llegamos a una contradicción. Por lo tanto, existe un conjunto independiente S tal que $\omega(G[V(G) \setminus S]) < \omega(G)$, y por lo probado anteriormente $\omega(G) = \chi(G)$.

(2) \Leftrightarrow (3) Sea G un grafo simple que cumple la segunda propiedad

$$\alpha(G[A]) = \theta(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Por la proposición 3.1.3 y la proposición 3.1.4 si y sólo si \overline{G} satisface la primera propiedad

$$\omega(\overline{G}[A]) = \chi(\overline{G}[A]) \quad \forall A \subseteq V(\overline{G})$$

Por lo demostrado anteriormente, si y sólo si \overline{G} satisface la tercera propiedad

$$\omega(\overline{G}[A])\alpha(\overline{G}[A]) \geq |A| \quad \forall A \subseteq V(\overline{G})$$

Por la preposición 3.1.3 si y sólo si G satisface la tercera propiedad

$$\omega(G[A])\alpha(G[A]) \geq |A| \quad \forall A \subseteq V(G) \square$$

Colorario 3.2.1 *Sea G un grafo simple, es perfecto si y sólo si su complemento \overline{G} es perfecto.*

Demostración: Si un grafo simple G es perfecto, por el teorema débil de los grafos perfectos G cumple la primera propiedad

$$\omega(G[A]) = \chi(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Por la proposición 3.1.3 y la proposición 3.1.4 si y sólo si \overline{G} satisface la segunda propiedad

$$\alpha(\overline{G}[A]) = \theta(\overline{G}[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Por lo tanto, \overline{G} también es perfecto. \square

Colorario 3.2.2 *Sea G un grafo simple, es perfecto si y sólo si todos los grafos H obtenidos por multiplicación de vértices de G son perfectos.*

Demostración: Primero vamos a demostrar la condición suficiente. Si G es perfecto, por el teorema débil de los grafos perfectos G satisface la primera propiedad

$$\omega(G[A]) = \chi(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Por el lema 3.2.1, H también satisface la primera propiedad

$$\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \quad \forall A \subseteq V(H)$$

Entonces H también es perfecto.

Ahora vamos a demostrar la condición necesaria. Sea $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ tal que $h_i \geq 1$, y $H = G \circ h$. Si H satisface la primera propiedad

$$\omega(H[A]) = \chi(H[A]) \quad \forall A \subseteq V(H)$$

Como G es un subgrafo inducido propio de H , entonces G también satisface la primera propiedad

$$\omega(G[A]) = \chi(G[A]) \quad \forall A \subseteq V(G)$$

Entonces G es perfecto. \square

3.3. Subclases de los grafos perfectos

En esta sección vamos a ver algunas subclases de los grafos perfectos basado en el libro [33], como los grafos cordales, los grafos de intervalos y los grafos de comparabilidad.

Primero vamos a ver que los grafos cordales son grafos perfectos. En el capítulo uno ya vimos algunas características de ellos. Por ejemplo, la familia de los grafos cordales es hereditaria. En los grafos cordales siempre existe un vértice simplicial, y si el grafo cordal no es completo, entonces contiene dos vértices simpliciales no adyacentes. Ahora vamos a profundizar sobre el tema y a hablar sobre su relación con los grafos perfectos. Luego como colorario vamos a probar que los grafos de intervalos también son una subclase de los grafos perfectos.

Definición 3.3.1 Sea G un grafo simple, y un orden de eliminación simplicial es un conjunto de vértices ordenados a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 tal que cada vértice a_i es un vértice simplicial de $G[\{a_i, \dots, a_1\}]$.

Teorema 3.3.1 Sea G un grafo simple, G es cordal si y sólo si G tiene un orden de eliminación simplicial. Además, el primer vértice del orden puede ser cualquier vértice simplicial.

Demostración: Primero vamos a demostrar la condición suficiente. Vamos a probar por inducción en cantidad de vértices.

Caso base: Sea G un grafo simple con un solo vértice a , entonces $\{a\}$ es el orden de eliminación simplicial.

Paso inductivo: Supongamos que para todos los grafos cordales con menor cantidad de vértices que G tienen un orden de eliminación simplicial. Como G es cordal, y por el lema 1.2.1, G tiene un vértice simplicial a y $G - \{a\}$ es un subgrafo inducido de G , por la proposición 1.2.2, $G - \{a\}$ también es cordal, y tiene menor cantidad de vértices que G , por hipótesis inductiva, $G - \{a\}$ tiene un orden de eliminación simplicial $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$. Entonces $a, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1$ es un orden de eliminación simplicial de G .

Ahora vamos a probar la condición necesaria. Sea a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 un orden de eliminación simplicial de G , y sea C un ciclo de G con más de tres vértices. Sea a_h el vértice de C con el mayor índice en el orden de eliminación simplicial, y además, como a_h es un vértice del ciclo C , entonces $|N(a_h) \cap V(C)| \geq 2$. Además, a_h es un vértice simplicial de $G[a_h, a_{h-1}, \dots, a_1]$, y $C \subseteq G[a_h, a_{h-1}, \dots, a_1]$, entonces los vértices de $N(a_h) \cap V(C)$ son adyacentes entre sí, por lo tanto, C no es un ciclo inducido de G , podemos concluir que G es cordal. \square

Definición 3.3.2 Un coloreo greedy relacionado con un orden de vértices a_1, a_2, \dots, a_n de $V(G)$ se obtiene coloreando los vértices en ese orden, y asignando a cada vértice el color con índice más chico que no hayan usado todavía sus vecinos del menor índice.

Observación 3.3.1 Para probar que cada grafo de una familia hereditaria \mathbf{G} es perfecto, es suficiente probar que $\chi(G) = \omega(G)$ para todos los $G \in \mathbf{G}$.

Teorema 3.3.2 ([2]). Todos los grafos cordales son perfectos.

Demostración: Sea G un grafo cordal. Por la proposición 1.2.2, la familia de grafos cordales es hereditaria, y por la observación 3.3.1, es suficiente probar que $\omega(G) = \chi(G)$. Además, por la proposición 3.1.1 ya sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G)$ por lo tanto, sólo nos queda probar que $\omega(G) \geq \chi(G)$.

Por el teorema 3.3.1 G tiene un orden de eliminación simplicial, a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 . Vamos a aplicar el coloreo greedy, comenzando a colorear por el vértice a_1 . Sea

$\chi(G) = k$, seguramente existe un i tal que el v3rtice a_i es pintado con el color k , los vecinos de a_i en $\{a_{i-1}, \dots, a_1\}$ est3n pintados con los colores $1, 2, \dots, k-1$, agregando el v3rtice a_i , forman un clique de k v3rtices pintados con k colores diferentes. Entonces $\omega(G) \geq k = \chi(G)$.

Colorario 3.3.1 *Todos los grafos de intervalos son perfectos.*

Demostraci3n: Por el teorema 1.3.1, los grafos de intervalos son cordales, y por el teorema 3.3.2, los grafos cordales son perfectos. \square

En el cap3tulo uno ya vimos que la familia de los grafos de intervalos es un subconjunto de la familia de los grafos cordales y los grafos de intervalos son grafos de intersecci3n de conjunto de intervalos. Ahora queremos demostrar que los grafos cordales son grafos de intersecci3n de sub3rboles de un 3rbol [33]. Un 3rbol es un grafo conexo sin ciclos inducidos, y una hoja es un v3rtice del 3rbol que le incide una sola arista.

Lema 3.3.1 *Sea T un 3rbol y T_1, T_2, \dots, T_k sub3rboles de T . Adem3s, para todos los $i, j = 1, 2, \dots, k$, $T_i \cap T_j \neq \emptyset$. Entonces existe un v3rtice x que pertenece a todos los subgrafos T_1, T_2, \dots, T_k .*

Demostraci3n: Sean a, b, c tres v3rtices del 3rbol T . Sea S el conjunto de 3ndices s tal que T_s contiene al menos dos de estos tres v3rtices. Como T es conexo, entonces existen caminos P_1, P_2, P_3 en T tal que unen a con b , b con c , c con a respectivamente. Adem3s, $P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$, sino uniendo los tres caminos forman un ciclo, eso contradice que T es un 3rbol. Adem3s todos los sub3rboles T_s con $s \in S$ contiene uno de los tres caminos. Entonces

$$\bigcap_{s \in S} T_s \supseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$$

Ahora vamos a terminar la demostraci3n del teorema por inducci3n en cantidad de sub3rbol.

Caso base: Si son dos 3rboles, cumple el lema.

Paso inductivo: Supongamos que para cualquier conjunto de 3rboles tal que la cantidad de los 3rboles es menor que k cumple el lema. Entonces por hip3tesis inductiva existe tres v3rtices de T , tal que

$$a \in \bigcap_{j=1}^{k-1} T_j \quad b \in \bigcap_{j=2}^k T_j \quad b \in T_1 \cap T_k$$

Entonces todos los sub3rboles contiene dos de los v3rtices a, b, c . Por lo probado anteriormente $\bigcap_{j=1}^k T_j \neq \emptyset$. \square

Teorema 3.3.3 *Sea G un grafo simple, es cordal si y s3lo si tiene una representaci3n por sub3rboles de un 3rbol.*

Demostración: Por el teorema 3.1.1 alcanza probar que G tiene un orden de eliminación simplicial si y sólo si tiene una presentación de subárboles de un árbol. Vamos a probar por inducción en cantidades de vértices.

Caso base: Si G tiene un solo vértice, cumple el teorema.

Paso inductivo: Sea G un grafo simple, supongamos que si $|V(G)|$ es menor que k , entonces cumple el teorema.

Primero probamos la condición suficiente. Sea v_k, v_{k-1}, \dots, v_1 un orden de eliminación simplicial de G , entonces $v_{k-1}, v_{k-2}, \dots, v_1$ es un orden de eliminación simplicial de $G - \{v_k\}$, por hipótesis inductiva para $G - \{v_k\}$ existe una representación por subárboles de un árbol. Sea Además, v_k es un vértice simplicial en G , entonces $N(v_k)$ induce un clique en $G - v_k$, por lo tanto, la intersección de dos subárboles que corresponden a los vértices de $N(v_k)$ no es vacía. Por el lema 3.3.1, existe un vértice del árbol que está en todos estos subárboles. Vamos a agregar un vértice y y la arista xy al T , lo llamamos T' . A los subárboles que corresponden a los vértices de $N(v_k)$ le agregamos la arista xy , y sea $\{y\}$ el subárbol que corresponde a v_k . De esa manera encontramos para G una representación por subárboles del árbol T' .

Ahora vamos a probar la condición necesaria. Sea T el árbol más chico para la representación por subárboles para G y T_v el subárbol que corresponde al vértice $v \in V(G)$. Si $xy \in E(T)$, entonces existe un vértice u tal que Tu contiene a x pero no a y , sino reemplazamos xy por x y obtenemos un árbol más chico que T , y esto contradice la hipótesis. Sea x una hoja del árbol T , y sea $u \in V(G)$ tal que T_u contiene a x , pero no contiene a los subárboles que corresponden a los vecinos de u , y éstos contiene a x . Por lo tanto, estos subárboles junto con T_u se intersecan entre sí, entonces u es simplicial en G . Borrarnos el subárbol T_u , y obtenemos una representación por subárboles para $G - \{u\}$, por hipótesis inductiva, existe un orden de eliminación simplicial de $G - \{u\}$, juntando u y el orden de eliminación simplicial de $G - \{u\}$ obtenemos un orden de eliminación simplicial de G . \square

En el capítulo dos ya vimos algunas características de los grafos de comparabilidad, y su relación con los grafos de intervalos. Ahora vamos a probar que los grafos de comparabilidad son perfectos [2]. Para llegar a ese resultado, necesitamos algunos resultados previos.

Definición 3.3.3 *Sea G un grafo dirigido, es un camino si es un grafo dirigido simple, y podemos ordenar linealmente sus vértices de tal manera que $uv \in E(G)$ si y sólo si v sigue inmediatamente a u . Un ciclo se define de manera similar ordenando los vértices en forma circular.*

Teorema 3.3.4 *Teorema de Gallai-Roy-Vitaver ([14] [26] [32]). Sea D una orientación de G , y su camino más largo tiene longitud $l(D)$, entonces $\chi(G) \leq 1 + l(D)$. Además, existen algunas orientaciones que cumplen la igualdad.*

Demostración: Sea D una orientación de G . Sacando algunas aristas formamos $D' \subseteq D$ un subgrafo maximal de D que no contiene ciclos, notar que D' contiene todos los vértices de G . Coloreamos los vértices de la siguiente manera, sea f la

función del coloreo de D' , $f(v)$ es igual que 1 más la longitud del camino más largo en D' que termina en v .

Sea P un camino en D' , sea u el primer vértice en P , sea P' otro camino que termina en u , como D' no contiene ciclos, entonces P' no puede contener vértices de P salvo u . O sea, todos los caminos que terminan en u (incluyendo el camino más largo) podemos alargarlo uniendolo con P . Esto implica que f es estrictamente creciente en los caminos de D' .

El coloreo f usa el color número 1 hasta número $1+l(D')$ para pintar los vértices de $V(D')$ que es igual que $V(G)$, donde $l(D')$ es la longitud del camino más largo en D' . Queremos ver que f es un coloreo propio en G . Sea $uv \in E(G)$, queremos ver que $f(u) \neq f(v)$.

- Si $uv \in E(D')$ o $vu \in E(D')$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $uv \in E(D')$, entonces $f(u) < f(u) + 1 \leq f(v)$, por lo tanto, $f(u) \neq f(v)$.
- Si $uv \notin E(D')$ y $vu \notin E(D')$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $uv \notin E(D')$. Entonces por definición de D' sabemos que agregando la arista uv crea un ciclo en D' , por lo tanto, hay un camino de v a u , entonces $f(v) < f(v) + 2 \leq f(u)$, por lo tanto, $f(v) \neq f(u)$.

Además, los caminos en D' también son caminos en D por lo tanto, $\chi(G) \leq 1 + l(D') \leq 1 + l(D)$

Ahora vamos a probar la segunda parte del teorema. Queremos encontrar una orientación D^* tal que $\chi(G) = 1 + l(D^*)$. Por lo demostrado anteriormente alcanza probar que $\chi(G) \geq 1 + l(D^*)$. Sea f un coloreo óptimo de G , definimos la orientación D^* de la siguiente manera. $uv \in E(D^*)$ si y sólo si $f(u) < f(v)$, como f es un coloreo propio, está bien definida la orientación. Además, f es óptimo entonces $f(a) \leq \chi(G)$, y por como está definida la D^* , la longitud del camino más largo de en D^* no puede superar $\chi(G) - 1$, o sea, $l(D^*) \leq \chi(G) - 1$. \square

Proposición 3.3.1 *La familia de los grafos de comparabilidad es hereditaria.*

Demostración: Sea G un grafo de comparabilidad, $A \subset V(G)$, y $H = G[A]$ el subgrafo inducido por A . Como G es de comparabilidad entonces existe una orientación transitiva F y definimos la orientación de H como $F[A]$. Queremos ver que $F[A]$ es transitiva. Sean $u, v, w \in A$ tal que $uv \in E(F[A])$ y $vw \in E(F[A])$, por definición del subgrafo inducido $uv \in E(F)$ y $vw \in E(F)$, además F es transitiva por lo tanto, $uw \in E(F)$, entonces $uw \in E(F[A])$. Ya probamos que $F[A]$ es transitiva, por lo tanto, H es de comparabilidad. \square

Teorema 3.3.5 ([2]). *Todos los grafos de comparabilidad son perfectos.*

Demostración: Sea G un grafo de comparabilidad. Por la proposición 3.3.1, la familia de grafos de comparabilidad es hereditaria, y por la observación 3.3.1, es suficiente probar que $\omega(G) = \chi(G)$. Además, por la proposición 3.1.1 ya sabemos que $\omega(G) \leq \chi(G)$, por lo tanto, sólo nos queda probar que $\omega(G) \geq \chi(G)$.

Sea F la orientación transitiva del G , primero vamos a probar por inducción que F no puede contener ciclos inducidos.

Caso base: Queremos ver que F no puede contener ciclos inducidos de 3 vértices. Supongamos que existe un ciclo inducido v_1, v_2, v_3 en F , entonces $v_1v_2 \in E(F)$ y $v_2v_3 \in E(F)$ y por la propiedad transitiva, $v_1v_3 \in E(F)$, pero $v_3v_1 \in E(F)$, por la definición de una orientación, no pueden estar dos aristas con mismos extremos pero diferentes sentidos en $E(F)$.

Paso inductivo: Supongamos que F no contiene ciclos inducidos con menos de n vértices. Queremos ver que F no puede contener ciclos inducidos de n vértices, y supongamos que F no contiene ciclos inducidos de k vértices con $k < n$.

Supongamos que F tiene un ciclo inducido de n vértices $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n, v_1$, como F es una orientación transitiva entonces $v_1v_3 \in E(F)$, por lo tanto, $v_1, v_3, \dots, v_n, v_1$ forma un ciclo inducido de $n - 1$ vértices, y eso contradice la hipótesis inductiva. Por lo tanto, F no puede contener ciclos inducidos de n vértices.

Por el teorema 3.3.3, $\chi(G) \leq 1 + l(F)$, donde $l(F)$ es la longitud del camino más largo en F . Además, los vértices de los caminos en F forman un clique en G . Sea u_1, u_2, \dots, u_m un camino en F , sea u_i y u_j donde $i, j = 1, 2, \dots, m$ dos vértices del camino, queremos ver que $u_iu_j \in E(F)$. Como $u_iu_{i+1} \in E(F)$ y $u_{i+1}u_{i+2} \in E(F)$ por transitividad $u_iu_{i+2} \in E(F)$. $u_{i+2}u_{i+3} \in E(F)$ por transitividad $u_iu_{i+3} \in E(F)$, y así sucesivamente podemos ver que $u_iu_j \in E(F)$, entonces $u_iu_j \in E(G)$. Por lo tanto, $1 + l(F) \leq \omega(G)$, entonces $\chi(G) \leq \omega(G)$. \square

3.4. Grafos mínimamente no perfectos

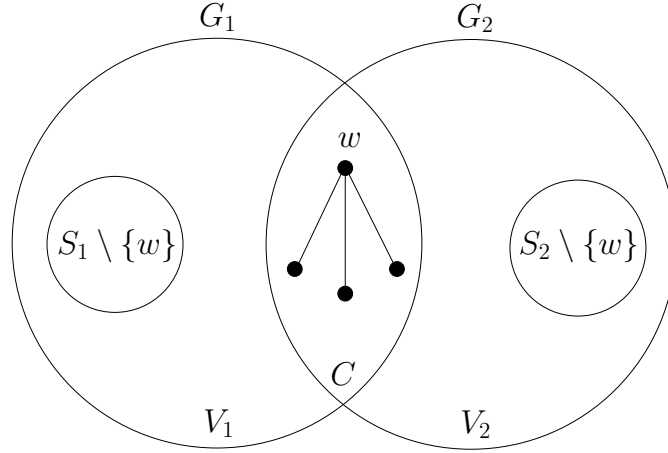
Definición 3.4.1 Sea G un grafo simple conexo, un conjunto de corte de vértices es un subconjunto $S \subseteq V(G)$ tal que $G - S$ tiene más de una componente conexa.

Definición 3.4.2 Un conjunto de corte de estrella es un conjunto de corte de vértices S tal que contiene un vértice x que es adyacente a todos los vértices de $S \setminus \{x\}$.

Lema 3.4.1 Sea G un grafo simple, si G no contiene ningún conjunto independiente que interseca con todos los cliques maximales, y todos los subgrafos inducidos propios de G tiene un $\omega(G)$ -coloreo propio, entonces G no contiene ningún conjunto de corte de estrella.

Demostración: Supongamos que G contiene un conjunto de corte de estrella C , y sea $w \in C$ tal que w es adyacente a todos los vértices de $C \setminus \{w\}$. Como $G - C$ no es conexo, podemos partir sus vértices en dos conjuntos disjuntos V_1 y V_2 tal que no existe aristas que los conecta. Sean $G_i = G[V_i \cup C]$, con $i=1,2$. Los G_i es un subconjunto inducido propio de G , por hipótesis para cada G_i existe un f_i el $\omega(G)$ -coloreo. Sean S_i el conjunto de los vértices de G_i que tiene el mismo color que w . Como w es adyacente a todos los vértices de $C \setminus \{w\}$, por lo tanto, los otros vértices de C no pueden pertenecer a S_i , además, V_1 y V_2 no están conectados, por lo tanto, $S = S_1 \cup S_2$ es un conjunto independiente.

Sea Q un clique en $G - S$, entonces $Q \subseteq G_1 - S_1$ o $Q \subseteq G_2 - S_2$, porque V_1 y V_2 no están conectados. Usando el mismo coloreo propio f_i , podemos usar $\omega(G) - 1$ colores para pintar $G_i - S_i$. Entonces $|Q| \leq \omega(G) - 1$ para todos los cliques $Q \in G - S$, por lo tanto, todos los cliques de tamaño $\omega(G)$ se interseca con el conjunto independiente S y eso contradice la hipótesis, entonces G no contiene ningún conjunto de corte de estrella. \square



Definición 3.4.3 A un grafo simple G se lo llama mínimamente no perfecto si G no es perfecto, pero todos los subgrafos inducidos propios son perfectos.

Teorema 3.4.1 ([8]). Sea G un grafo mínimamente no perfecto, S un conjunto independiente de G y A un clique de G , entonces $\omega(G) = \omega(G - S)$ y $\alpha(G) = \alpha(G - A)$, además, no contiene conjunto de corte de estrella.

Demostración: Como G no es un grafo perfecto, entonces $\omega(G) < \chi(G)$, o sea

$$\omega(G) + 1 \leq \chi(G)$$

Y sea S un conjunto independiente, entonces

$$\chi(G) \leq \chi(G - S) + 1$$

Además, $G - S$ es un subgrafo inducido propio de G , por lo tanto, es perfecto, entonces

$$\chi(G - S) = \omega(G - S)$$

Por último como $G - S \subseteq G$ entonces

$$\omega(G - S) \leq \omega(G)$$

De esa manera juntando todas las desigualdades

$$1 + \omega(G) \leq \chi(G) \leq 1 + \chi(G - S) = 1 + \omega(G - S) \leq 1 + \omega(G)$$

Por lo tanto, para todos los conjuntos independientes S

$$\omega(G) = \omega(G - S)$$

Esto quiere decir que ningún conjunto independiente se interseca con todos los cliques maximales.

Además, todos los subgrafos inducidos propios H de G son perfectos entonces

$$\chi(H) = \omega(H) \leq \omega(G)$$

entonces existe un $\omega(G)$ coloreo propio para H . Por el lema 3.4.1, G no contiene ningún conjunto de corte de estrella.

Falta ver que $\alpha(G) = \alpha(G - A)$ para todos los cliques A . Como G no es un grafo perfecto, entonces $\alpha(G) < \theta(G)$, o sea

$$\alpha(G) + 1 \leq \theta(G)$$

Y sea A un clique, entonces

$$\theta(G) \leq \theta(G - S) + 1$$

Además, $G - A$ es un subgrafo inducido propio de G , por lo tanto, es perfecto, entonces

$$\theta(G - S) = \alpha(G - S)$$

Por último como $G - A \subseteq G$ entonces

$$\alpha(G - S) \leq \alpha(G)$$

De esa manera juntando todas las desigualdades

$$1 + \alpha(G) \leq \theta(G) \leq 1 + \theta(G - S) = 1 + \alpha(G - S) \leq 1 + \alpha(G)$$

Por lo tanto, para todos los cliques A

$$\alpha(G) = \alpha(G - S)$$

□

Lema 3.4.2 *Sea G un grafo simple, si G es mínimamente no perfecto entonces G es conexo, \overline{G} es mínimamente no perfecto, $\omega(G) \geq 2$ y $\alpha(G) \geq 2$. Además, para todos los vértices $x \in V(G)$, $\chi(G - \{x\}) = \omega(G)$ y $\theta(G - \{x\}) = \alpha(G)$.*

Demostración: Primero vamos a probar que G es conexo. Supongamos que G no es conexo, entonces existe A_1, A_2, \dots, A_k componentes conexas no vacías de G . Como G es mínimamente no perfecto, todos los A_i con $i = 1, 2, \dots, k$ son perfectos, entonces $\chi(A_i) = \omega(A_i)$, además, todos los A_i son disjuntos, entonces

$$\chi(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\chi(A_i)\}$$

$$\omega(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{\omega(A_i)\}$$

Por lo tanto, $\chi(G) = \omega(G)$, y eso contradice la hipótesis, entonces G es conexo. Ahora queremos probar que \overline{G} es mínimamente no perfecto. Sea A un subconjunto propio de vértices de $V(\overline{G})$, queremos ver que $\overline{G}[A]$ es perfecto. Como $V(\overline{G}) = V(G)$, entonces A también es un subconjunto propio de $V(G)$, por hipótesis $G[A]$ es perfecto. Como el complemento de $G[A]$ es $\overline{G}[A]$, y por colorario 3.2.1, $\overline{G}[A]$ es perfecto.

Falta ver que $\omega(G) \geq 2$ y $\alpha(G) \geq 2$. Supongamos que $\omega(G) = 1$, entonces todos los cliques tiene tamaño 1, o sea, G no tiene aristas, por lo tanto, G es perfecto, y eso contradice la hipótesis, entonces $\omega(G) \geq 2$. Supongamos que $\alpha(G) = 1$, entonces todos los conjuntos independientes tiene tamaño 1, o sea, G es completo por lo tanto, G es perfecto, y eso contradice la hipótesis, entonces $\alpha(G) \geq 2$.

Por último queremos ver que $\chi(G - \{x\}) = \omega(G)$ y $\theta(G - \{x\}) = \alpha(G)$ para todos los $x \in V(G)$. Como G es mínimamente no perfecto y por teo 3.4.1,

$$\chi(G - \{x\}) = \omega(G - \{x\}) = \omega(G)$$

$$\theta(G - \{x\}) = \alpha(G - \{x\}) = \alpha(G) \square$$

Teorema 3.4.2 *Sea G un grafo simple. Si G es mínimamente no perfecto y $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, entonces $n = \alpha(G)\omega(G) + 1$, además, para todos los vértices $x \in V(G)$, $G - \{x\}$ tiene una partición de $\omega(G)$ conjuntos independientes de tamaño $\alpha(G)$, y una partición de $\alpha(G)$ cliques de tamaño $\omega(G)$.*

Demostración: Como G es mínimamente no perfecto, entonces para todos los vértices $x \in V(G)$, $G - \{x\}$ es perfecto

$$|V(G - \{x\})| = n - 1 \leq \omega(G - \{x\})\alpha(G - \{x\})$$

Por el teorema 3.4.1

$$\omega(G - \{x\})\alpha(G - \{x\}) = \omega(G)\alpha(G)$$

Y como G no es perfecto

$$\omega(G)\alpha(G) < |V(G)| = n \Rightarrow \omega(G)\alpha(G) \leq n - 1$$

Juntando todas las desigualdades

$$n - 1 \leq \omega(G - \{x\})\alpha(G - \{x\}) = \omega(G)\alpha(G) \leq n - 1$$

Por lo tanto,

$$n = \alpha(G)\omega(G) + 1$$

Ahora vamos a probar la segunda parte del teorema.

- Como $\chi(G - \{x\}) = \omega(G - \{x\}) = \omega(G)$, podemos colorear $G - \{x\}$ con $\omega(G)$ colores, los vértices del mismo color forman un conjunto independiente, por lo tanto, hay $\omega(G)$ conjuntos independientes. Además $\alpha(G - \{x\}) = \alpha(G)$, entonces todos los conjuntos independientes tienen a lo sumo $\alpha(G)$ vértices. Además, ya probamos que $n - 1 = \alpha(G)\omega(G)$ por lo tanto, todos los conjuntos independientes tiene $\alpha(G)$ vértices.
- Por hipótesis $G - \{x\}$ es perfecto, y por el colorario 3.2.1, $\overline{G - \{x\}}$ también es perfecto. Por lo tanto, $\chi(\overline{G - \{x\}}) = \omega(\overline{G - \{x\}}) = \alpha(\overline{G - \{x\}}) = \alpha(G)$, entonces puedo partir los vértices de $\overline{G - \{x\}}$ en $\alpha(G)$ conjuntos independientes. Los conjuntos independientes en $\overline{G - \{x\}}$ son cliques en $G - \{x\}$, entonces $\alpha(\overline{G - \{x\}}) = \omega(G - \{x\}) = \omega(G)$, eso quiere decir que los conjuntos independientes tiene a lo sumo $\omega(G)$ vértices. Entonces $\overline{G - \{x\}}$ tiene una partición de $\alpha(G)$ conjuntos independientes de tamaño $\omega(G)$, o sea, $G - \{x\}$ tiene una partición de $\alpha(G)$ cliques de tamaño $\omega(G)$. \square

Definición 3.4.4 Sean a y w dos enteros mayor que uno, un grafo simple G es a, w -particionable si G tiene $aw + 1$ vértices y para todos los vértices $x \in V(G)$, el subgrafo inducido $G - \{x\}$ tiene una partición de a cliques de tamaño w , y una partición de w conjuntos independientes de tamaño a .

Observación 3.4.1 Por el teorema 3.4.2 todos los grafos mínimamente no perfectos es particionable.

Observación 3.4.2 Sea G un grafo simple, es a, w -particionable si y sólo si \overline{G} es w, a -particionable.

Demostración: Sea $x \in V(G)$, por definición el subgrafo inducido $G - \{x\}$ tiene una partición de a cliques de tamaño w , y una partición de w conjuntos independientes de tamaño a , si y sólo si el subgrafo inducido $\overline{G} - \{x\}$ tiene una partición de a conjuntos independientes de tamaño w , y una partición de w cliques de tamaño a , o sea, \overline{G} es w, a -particionable. \square

Teorema 3.4.3 ([5]). Sea G un grafo simple con $aw + 1$ vértices es a, w -particionable si y sólo si $\chi(G - \{x\}) = w$ y $\theta(G - \{x\}) = a$ para todos los vértices $x \in V(G)$, y $\omega(G) = w$ y $\alpha(G) = a$. Además, el teorema también cumple si $\chi(G - \{x\}) \leq w$ y $\theta(G - \{x\}) \leq a$.

Demostración: Primero vamos a probar la condición suficiente. Supongamos que G es a, w -particionable, por definición $G - \{x\}$ tiene una partición de vértices de w conjuntos independientes, o sea, G es w -colorable, y también tiene una partición de vértices de cliques de tamaño w , entonces

$$w \geq \chi(G - \{x\}) \geq \omega(G - \{x\}) \geq w$$

Y podemos concluir que

$$\chi(G - \{x\}) = w = \omega(G - \{x\})$$

Sabemos que $\omega(G) \geq \omega(G - \{x\}) = w$ para todos los vértices $x \in V(G)$, queremos ver que cumple la igualdad.

Supongamos que $k = \omega(G) > \omega(G - \{x\}) = w$, y sea A un clique de tamaño k de G . Como w es mayor que uno, G no es completo, por lo tanto, existe un vértice x que no pertenece a A , de esta manera A sigue siendo un clique en $G - \{x\}$. Entonces $\omega(G - \{x\}) = w \geq k$, y eso contradice lo que supusimos. Entonces $\omega(G) = \omega(G - \{x\}) = w$

Por definición $G - \{x\}$ tiene una partición de w cliques, y una partición de conjuntos independientes de tamaño w , entonces

$$w \leq \alpha(G - \{x\}) \leq \theta(G - \{x\}) \leq w$$

Y podemos concluir que

$$\alpha(G - \{x\}) = w = \theta(G - \{x\})$$

Sabemos que $\alpha(G) \geq \alpha(G - \{x\})$ para todos los vértices $x \in V(G)$, queremos ver que cumple la igualdad.

Supongamos que $k = \alpha(G) > \alpha(G - \{x\}) = w$ y sea A un conjunto independiente de tamaño k de G . Como w es mayor que uno, el conjunto de aristas de G es distinto que vacío, por lo tanto, existe un vértice x que no pertenece a A , de esta manera A sigue siendo un conjunto independiente en $G - \{x\}$. Entonces $\theta(G - \{x\}) = w \geq k$, y eso contradice lo que supusimos. Entonces $\alpha(G) = \alpha(G - \{x\}) = w$.

Ahora vamos a probar la condición necesaria. Supongamos que $\chi(G - \{x\}) \leq w$ y $\theta(G - \{x\}) \leq w$ para todos los vértices $x \in V(G)$.

Primero vamos a ver que existe una partición de w conjuntos independientes de tamaño w . Como $\alpha(G - \{x\}) \leq \theta(G - \{x\})$, entonces $\alpha(G - \{x\}) \leq w$. Por lo tanto, los conjuntos independientes de $G - \{x\}$ tienen a lo sumo w vértices.

Supongamos que $\chi(G - \{x\}) = w' < w$, entonces existe un coloreo que usa solamente w' colores, sean $S_1, S_2, \dots, S_{w'}$ los conjuntos independientes formado por vértices por mismo color, además, $G - \{x\}$ tiene w vértices entonces

$$w = |S_1| + |S_2| + \dots + |S_{w'}| \leq w'w < w$$

Llegamos a una contradicción, por lo tanto, $\chi(G - \{x\}) = w$. Entonces $G - \{x\}$ tiene un coloreo que usa w colores, como cada conjunto independiente tiene a lo sumo w vértices y $G - \{x\}$ tiene w vértices, por lo tanto, cada conjunto independiente tiene que tener sí o sí w vértices.

Por último vamos a ver que existe una partición de w cliques de tamaño w . Como $\omega(G - \{x\}) \leq \chi(G - \{x\})$, entonces $\omega(G - \{x\}) \leq w$, por lo tanto, los cliques de $G - \{x\}$ tienen a lo sumo w vértices.

Supongamos que $\theta(G - \{x\}) = a' < a$, entonces existe un cubrimiento de cliques $Q_1, Q_2, \dots, Q_{a'}$, además, $G - \{x\}$ tiene wa vértices, entonces

$$wa = |Q_1| + |Q_2| + \dots + |Q_{a'}| \leq wa' < wa$$

Llegamos a una contradicción, por lo tanto, $\theta(G - \{x\}) = a$. Entonces $G - \{x\}$ tiene un cubrimiento de a cliques, como cada clique tiene a lo sumo w vértices y $G - \{x\}$ tiene wa vértices, por lo tanto, cada clique tiene que tener sí o sí w vértices. \square

Colorario 3.4.1 *Todos los grafos particionables son imperfectos.*

Demostración: Sea G un grafo a, w -particionable, por definición G tiene $aw + 1$ vértices, y por el teorema 3.4.3 $\omega(G) = w$ y $\alpha(G) = a$, y $w = \omega(G) \leq \chi(G)$. Supongamos que $\chi(G) = w$, entonces G tiene una partición de w conjuntos independientes, pero cada conjunto independiente tiene a lo sumo a vértices, entonces en total G tiene a lo sumo aw vértices, eso contradice la hipótesis. Por lo tanto, $\omega(G) < \chi(G)$, en conclusión G no es perfecto. \square

Teorema 3.4.4 *Sea G un grafo simple con $aw+1 = n$ vértices, es a, w -particionable si y sólo si cumple las siguientes dos condiciones.*

1. $\alpha(G) = a$ y $\omega(G) = w$. Además cada vértice de G pertenece a exactamente w cliques de tamaño w y a conjuntos independientes de tamaño a .
2. G tiene exactamente n cliques maximales Q_1, \dots, Q_n y exactamente n conjuntos independientes maximales S_1, \dots, S_n tal que $Q_i \cap S_j = \emptyset$ si y sólo si $i = j$, decimos que Q_i y S_i son compañeros.

Demostración: Primero vamos a probar la condición necesaria.

Como G es a, w -particionable, por el teorema 3.4.3, $\alpha(G) = a = \theta(G - \{x\})$ y $\omega(G) = w = \chi(G - \{x\})$, para todos los vértices $x \in V(G)$. Entonces G tiene un clique Q de tamaño w , y para todos los vértices $x \in Q$, $G - \{x\}$ tiene una partición de a cliques de tamaño w . Juntando Q y estos cliques tenemos en total $n = aw + 1$ cliques de tamaño w , y los llamamos Q_1, Q_2, \dots, Q_n .

Sea $y \in V(G)$.

- Si $y \notin Q$, entonces para cualquier partición de clique de vértices de $G - \{x\}$ con $x \in Q$, existe un único clique de esa partición tal que y pertenece a éste, por lo tanto, y pertenece a w cliques del conjunto $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$.
- Si $y \in Q$, entonces para cualquier partición de clique de vértices de $G - \{x\}$ con $x \in Q \setminus \{y\}$, existe un único clique de esa partición tal que y pertenece a éste, por lo tanto, y también pertenece a w cliques del conjunto $\{Q_1, Q_2, \dots, Q_n\}$.

Ahora vamos a buscar para cada Q_i un conjunto independiente S_i disjuntos con él. Sea x un vértice de Q_i , podemos particionar $G - \{x\}$ en w conjuntos independientes, y los vértices de Q_i excepto x todos se intersecan con algún conjunto independiente,

además, la intersección de un conjunto independiente y un clique a lo sumo tiene tamaño uno, por lo tanto, Q_i se interseca con $w - 1$ conjuntos independientes de la partición, y el conjunto independiente que no se interseca con Q_i lo llamamos S_i .

Sea A la matriz de incidencia tal que $a_{ij} = 1$ si y sólo si $x_j \in Q_i$, sino $a_{ij} = 0$.

Sea B la matriz de incidencia tal que $b_{ij} = 1$ si y sólo si $x_j \in S_i$, sino $b_{ij} = 0$.

Sea $AB^T = C$, entonces c_{ij} es el producto entre la fila i de A y la fila j de B que es igual a la cantidad de vértices en $Q_i \cap S_j$.

Si probamos que $C = J - I$ donde J es la matriz con todos unos, e I es la matriz de identidad, obtenemos que $Q_i \cap S_j \neq \emptyset$ si y sólo si $i \neq j$.

Como $J - I$ no es singular, podemos suponer que A y B tampoco lo son, entonces todas las filas de A son diferentes, y todas las filas de B también. Por lo tanto, los cliques Q_1, Q_2, \dots, Q_n son diferentes, y todos los conjuntos independientes C_1, C_2, \dots, C_n también son diferentes. Por construcción el módulo de $Q_i \cap S_i$ es igual a cero. Además, la intersección de un clique y un conjunto independiente tiene a lo sumo un vértice. Entonces alcanza con probar que cada columna de C suma $n - 1$. Para lograr eso multiplicamos el vector fila de n unos I_n^T el lado izquierdo de C . Además, como cada vértice aparece en w cliques, entonces cada columna de A tiene w unos, y cada conjunto independiente tiene tamaño a , entonces cada fila de B tiene a unos. Entonces

$$I_n^T(AB^T) = (I_n^T A)B^T = wI_n^T B^T = waI_n^T = (n - 1)I_n^T$$

Ahora queremos ver que para todos los vértices x de G , x pertenece a a de los conjuntos independientes S_1, S_2, \dots, S_n . Para eso tenemos que demostrar que $B^T I_n = aI_n$. Primero calculamos A^{-1}

$$A^{-1}AI_n = I_n$$

$$A^{-1}wI_n = I_n$$

$$A^{-1}I_n = \frac{1}{w}I_n$$

Entonces

$$B^T I_n = A^{-1}AB^T I_n = A^{-1}(J - I)I_n = A^{-1}(n - 1)I_n = \left(\frac{n - 1}{w}\right)I_n = aI_n$$

Sólo nos queda probar que G no tiene otros cliques maximales que no sean Q_1, Q_2, \dots, Q_n , y G no tiene otros conjuntos independientes maximales que no sean S_1, S_2, \dots, S_n .

Sea q un vector de incidencia de un clique maximal Q , vamos a demostrar que q tiene que ser una fila de la matriz A . Como A no es singular, sus filas genera el espacio \mathcal{R}^n , por lo tanto, q es una combinación lineal de las filas de A , o sea, un vector fila t tal que $q = tA$. Para encontrar t necesitamos A^{-1} . Como cada fila de A suma w , entonces

$$A(w^{-1}J - B^T) = Aw^{-1}J - AB^T = w^{-1}wJ - AB^T = J - (J - I) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = w^{-1}J - B^T$$

$$\Rightarrow t = qA^{-1} = q(w^{-1}J - B^T) = qw^{-1}J - qB^T = w^{-1}wI_n^T - qB^T = I_n^T - qB^T$$

La columna i de B^T es el vector de incidencia de S_i . Entonces la coordenada i de qB^T es la cantidad de vértices del $Q \cap S_i$, y es cero o uno. Por lo tanto, t es un vector de uno o cero. Además, q es combinación lineal de filas de A y sumando las coordenadas de q es w , por lo tanto, q es una fila de A . En conclusión Q_1, Q_2, \dots, Q_n , son los únicos clique maximales.

Análogamente podemos probar que un vector de incidencia de un conjunto independiente S es una fila de la matriz B .

Vamos a probar la condición necesaria. Por el teorema 3.4.3, sólo necesitamos probar que $\chi(G - \{x\}) \leq w$ y $\theta(G - \{x\}) \leq a$ para todos los vértices de G .

Dados los cliques y los conjuntos independientes que cumplen la condición 2, y sean A y B las matrices como habíamos definido anteriormente. Por la condición 1 cada columna y fila de B tienen a unos, entonces

$$JB = aJ = BJ$$

Además, por la condición 2

$$AB^T = J - I$$

Como $J - I$ no es singular, por lo tanto, B tampoco, entonces existe B^{-1} , de esa manera tenemos la siguiente igualdad

$$D = A^T B = B^{-1} B A^T B = B^{-1} (J - I) B = B^{-1} J B - B^{-1} I B = B^{-1} B J - I = J - I$$

d_{ij} de la matriz D es la multiplicación de la fila i de A^T con la columna j de la matriz B . Si $d_{ij} = 1$ quiere decir que el vértice v_j pertenece a algún compañero de los w cliques maximales que contiene a x_i , o el vértice x_i pertenece a algún compañero de los a conjuntos independientes que contiene a x_j . Como $D = J - I$, si miramos la fila i de la matriz D , podemos ver que los conjuntos independientes que son compañeros de los w cliques maximales que contiene a x_i es un cubrimiento de $G - \{x_i\}$, por lo tanto, $\chi(G - \{x_i\}) \leq w$ para todos los $i = 1, 2, \dots, n$. Si miramos la columna j de la matriz D , podemos ver que los cliques que son compañeros de los a conjuntos independientes maximales que contiene a x_j es un cubrimiento de $G - \{x_j\}$, por lo tanto, $\theta(G - \{x_j\}) \leq a$ para todos los $j = 1, 2, \dots, n$. \square

Colorario 3.4.2 *Sea G un grafo a, w -particionable y $w = 2$, entonces G es un ciclo con $2a + 1$ vértices, y si $a = 2$, entonces G es el complemento de un ciclo con $2w + 1$ vértices.*

Demostración: Si $w = 2$, por el teorema 3.4.4 cada vértice x de $V(G)$ pertenece a exactamente dos cliques de tamaño dos, por lo tanto, tiene por lo menos dos vecinos, y no puede tener tres o más vecinos, porque sino pertenecería a más de dos cliques de tamaño dos. Entonces se descompone en ciclos, queremos ver que es exactamente un ciclo. Supongamos que G se descompone en más de un ciclo, como G tiene $2a + 1$ vértices, al menos un ciclo C es de longitud impar, sea x un vértices que

no pertenece a C , como G es $a, 2$ -particionable, entonces $G - \{x\}$ particiona en dos conjuntos independientes, o sea, los vértices de C se particionará en dos conjuntos independientes, y esto contradice que la cantidad de vértices de C sea impar. En conclusión G es un ciclo con $2a + 1$ vértices.

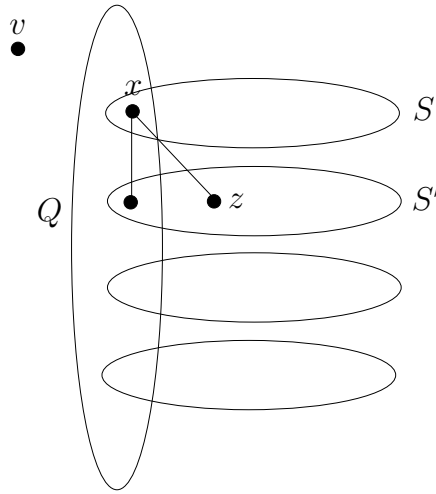
Si $a = 2$, entonces cada vértice x de G pertenece a exactamente dos conjuntos independientes de tamaño dos, como los conjuntos independientes de G son cliques de \overline{G} , x pertenece a dos cliques de tamaño dos de \overline{G} , con el mismo razonamiento, podemos concluir que \overline{G} es un ciclo impar. Por lo tanto, G es el complemento de un ciclo con $2w + 1$ vértices. \square

Teorema 3.4.5 ([31]). *Sea G un grafo a, w -particioanable, $n = aw + 1$, y $x \in V(G)$. El subgrafo $G - \{x\}$ tiene un único coloreo minimal $X(G - \{x\})$ que consiste en los compañeros de los cliques maximales que contiene a x . Además, $G - \{x\}$ también tiene un único cubrimiento minimal de cliques $\Theta(G - \{x\})$ que consiste en los compañeros de los conjuntos independientes maximales que contienen a x .*

Demostración: Como G es a, w -particionable, por definición es w -colorable con w conjuntos independientes maximales de tamaño a . Además, por el teorema 3.4.4 G tiene exactamente n cliques maximales Q_i con $i = 1, \dots, n$, y exactamente n conjuntos independientes maximales S_j con $j = 1, \dots, n$, tal que $Q_i \cap S_j$ si y sólo si $i = j$. Además, x pertenece a exactamente w cliques maximales entonces sus compañeros forman un único cubrimiento de conjuntos independientes de $G - \{x\}$. La segunda parte del teorema se demuestra de manera análoga con el completemento de G .

Teorema 3.4.6 ([5]). *Sea G un grafo a, w -particionable, x es vértices de G , entonces $2w - 2 \leq d(x)$.*

Demostración: Sea v un vértice de G que no es adyacente a x . Por el teorema 3.4.5, $G - \{v\}$ tiene un coloreo minimal $X(G - \{v\})$, sea S el conjunto independiente en $X(G - \{v\})$ tal que contiene a x , y sea S' cualquier otro conjunto independiente de $X(G - \{v\})$. Entonces existe un vértice $z \in S'$ tal que es adyacente a x . Si x no es adyacente a ningún vértice de S' , puedo pintar a x con el mismo color que los vértices del conjunto S' , entonces encontré otro coloreo minimal, y eso contradice que $X(G - \{v\})$ es el único. Además $G - \{z\}$ también tiene un único cubrimiento minimal de cliques $\Theta(G - \{z\})$, por lo tanto, existe un clique Q del cubrimiento que contiene a x . Además, como v no es adyacente a x , entonces $v \notin Q$ y Q se interseca una vez con cada conjunto independiente, incluyendo a S' . Pero $z \notin Q$, ya que $Q \in \Theta(G - \{z\})$. De esa manera x tiene por lo menos dos vecinos en S' , como S' es arbitraria, entonces x tiene por lo menos dos vecinos en cada uno de los $w - 1$ conjuntos independientes de $X(G - \{v\})$, por lo tanto, $2w - 2 \leq d(x)$. \square



Definición 3.4.5 Sea G un grafo simple, una arista del $E(G)$ es crítica si sacándola incrementa el tamaño del conjunto independiente maximal. Un par de vértices no adyacentes son co-críticos si agregando la arista que los une aumenta el tamaño del clique maximal.

Teorema 3.4.7 Sea G un grafo a, w -particionable, sea xy una arista de $E(G)$, son equivalentes:

1. xy es una arista crítica
2. Existe un conjunto de vértices S tal que

$$S \cup \{x\} \in X(G - \{y\})$$

Y

$$S \cup \{y\} \in X(G - \{x\})$$

3. los vértices x e y pertenece a $w - 1$ cliques maximales.

Demostración: (2) \Rightarrow (1) Como G es a, w -particionable, y $S \cup \{x\} \in X(G - \{y\})$, entonces $S \cup \{x\}$ es un conjunto independiente del tamaño a de $G - \{y\}$, o sea, x no es adyacente a ningún vértice de S . Además, $S \cup \{y\} \in X(G - \{x\})$ entonces, $S \cup \{y\}$ es un conjunto independiente del tamaño a de $G - \{x\}$, o sea, y tampoco es adyacente a ningún vértice de S . Por lo tanto, $S \cup \{x, y\}$ es un conjunto independiente de tamaño $a + 1$ en $G - \{xy\}$. Por el teorema 3.4.3, $\alpha(G) = a$, por lo tanto, sacando la arista xy aumenta el tamaño del conjunto independiente maximal.

(1) \Rightarrow (3) Como xy es una arista crítica, entonces en $G - \{xy\}$ hay un conjunto independiente maximal S' que contiene a x e y . Sea $S = S' \setminus \{x, y\}$, entonces $S \cup \{x\}$ y $S \cup \{y\}$ son conjuntos independientes maximales en G . Todos los cliques maximales

de G que contienen a x pero no a y son disjuntos con el conjunto independiente $S \cup \{y\}$. Por el teorema 3.4.4, existe w cliques maximales que contiene a x , y solamente uno de ellos es disjunto con $S \cup \{y\}$, por lo tanto, en los otros $w - 1$ cliques maximales que contienen a x también contienen a y .

(3) \Rightarrow (2) Por el teorema 3.4.5, los conjuntos independientes en el único coloreo $X(G - \{x\})$ son compañeros de los cliques maximales que contiene a x . Por hipótesis existe $w - 1$ cliques maximales que contienen a x e y . Los compañeros de esos $w - 1$ cliques son conjuntos independientes que pertenece a $X(G - \{x\})$ y a $X(G - \{y\})$, además, no contienen a x y tampoco a y . De esa manera queda $a + 1$ vértices que consiste en x , y , y el conjunto S , tal que $S \cup \{x\} \in X(G - \{y\})$ y $S \cup \{y\} \in X(G - \{x\})$. \square

Colorario 3.4.3 G un grafo particionable, sean $x \in V(G)$ e $y \in V(G)$, entonces cumple las siguientes condiciones.

1. Si x e y no pertenecen a ningún clique maximal, entonces $G - \{xy\}$ es particionable.
2. Si x e y no son adyacentes y no pertenecen a ningún conjunto independiente maximal, entonces $G \cup \{xy\}$ es particionable.

Demostración: Primero vamos a demostrar la condición uno. Por el teorema 3.1.7, xy no es una arista crítica, entonces al borrarla $\alpha(G - \{xy\}) = \alpha(G)$. Además, x e y no pertenecen a ningún clique maximal, entonces $\omega(G - \{xy\}) = \omega(G)$. Sea $u \in V(G)$, como G es un grafo particionable, por el teorema 3.4.3, $\chi(G - \{u\}) = w$ y $\theta(G - \{u\}) = a$. Entonces podemos concluir que $\chi([G - \{u\}] - \{xy\}) \leq w$ y $\theta([G - \{u\}] - \{xy\}) \leq a$, por lo tanto, $G - \{xy\}$ también es particionable.

Ahora vamos a demostrar la condición dos. Si x e y no son adyacentes y no pertenecen a ningún conjunto independiente maximal, entonces x e y son adyacentes en \overline{G} , y no pertenecen a ningún clique maximal de \overline{G} , por lo que demostramos anteriormente $\overline{G} - \{xy\}$ es particionable. Por la observación 3.4.2, el complemento de $\overline{G} - \{xy\} = G \cup \{xy\}$ también es particionable. \square

3.5. El teorema fuerte de los grafos perfectos

El teorema fuerte de los grafos perfectos dice que un grafo G es perfecto si y sólo si G y \overline{G} no contiene ningún ciclo impar inducido de longitud mayor o igual que cinco. Permaneció como un problema abierto durante más de 40 años hasta que fue probado en [6]. En estas dos subsecciones siguientes sólo demostraremos la validez para la clase de ciclo de poder y grafos arco-circulares [33].

Definición 3.5.1 Un ciclo de poder es un grafo simple C_n^d que se construye poniendo n vértices en un círculo y cada vértice es adyacente a d vértices más cercanos a ambas direcciones del círculo. Cuando $d = 1$, C_n^d es un ciclo de n vértices.

Proposición 3.5.1 C_{aw+1}^{w-1} es a, w -particionable.

Demostración: Sea $x \in V(G)$, a los vértices de $G - x$ puedo particionarlos en a conjuntos de w vértices consecutivos, y por definición, esos conjuntos son cliques. También puedo particionarlos en w conjuntos de a vértices tal que todos los vértices están espaciados por w vértices y esos conjuntos son independientes. \square

Teorema 3.5.1 ([7]). *Los ciclos de poder satisface el teorema fuerte de los grafos perfectos. En particular C_{aw+1}^{w-1} es mínimamente no perfecto si y sólo si $w = 2$ o $a = 2$, en estos casos el ciclo es un ciclo impar o el complemento de un ciclo impar.*

Demostración: Es suficiente considerar los grafos particionables $G = C_{aw+1}^{w-1}$. Primero vamos a ver la condición necesaria.

- Si $w = 2$, G es un ciclo impar con $2a+1$ vértices. Sea $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2a+1}\}$, y sea A un subconjunto propio de $V(G)$, A induce un subgrafo cordal, entonces es perfecto, es decir que todos los subgrafos inducidos propios de G son perfectos. Pero $\chi(G) = 3$ y $\omega(G) = 2$, entonces G no es perfecto. Podemos concluir que G es mínimamente no perfecto.
- Si $a = 2$, por el colorario 3.4.2 $G = \overline{C}_{2w+1}$, por lo tanto, $\overline{G} = C_{2w+1}$, por lo que demostramos anteriormente \overline{G} es mínimamente no perfecto. Además, por el lema 3.4.2 G es mínimamente no perfecto.

Ahora vamos a demostrar la condición suficiente.

Supongamos que $a > 2$ y $w > 2$. Sea $V(G) = \{v_0, v_1, \dots, v_{aw}\}$, definimos el siguiente subconjunto de vértices

$$S = \{v_{iw+1}, v_{(i+1)w} \mid 0 \leq i \leq a-1\}$$

El subgrafo inducido por S es un ciclo con $2a$ vértices, ahora vamos a construir un ciclo con $2a-1$ vértices. Del conjunto S sacamos los vértices $v_{(a-1)w+1}, v_{aw}, v_1, v_w$, como $w > 2$ los podemos reemplazar por $v_{(a-1)w+2}, v_0, v_{w-1}$, de esa manera formamos un nuevo subconjunto de vértices S' que induce un ciclo impar C_{2a-1} , además, $a > 2$ entonces $2a-1 \geq 5$. Encontramos un subgrafo propio de G que no es perfecto, por lo tanto, G no es mínimamente no perfecto. \square

3.6. Grafos arco-circulares

Definición 3.6.1 *Sea G un grafo simple y $V(G) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. G es un grafo arco-circular si es un grafo de intersección de familia de arcos en un círculo. O sea, existe un conjunto de arcos en un círculo $\Gamma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tal que a cada vértice a_i le corresponde el arco α_i , y $\alpha_i \cap \alpha_j \neq \emptyset$ si y sólo si a_i es adyacente a a_j . A Γ le llamamos la representación arco-circular del grafo G .*

Observación 3.6.1 *Sea G un grafo arco-circular y Γ una representación arco-circular de G , si existe un punto en el círculo que no esté cubierta por arcos de Γ , entonces podemos cortar el círculo en ese punto, y estirarlo hasta que se convierta en una línea recta, entonces los arcos se convirtieron en intervalos. Entonces G también es un grafo de intervalos. De la manera viceversa podemos ver que todos los grafos de intervalos son arco-circulares.*

Teorema 3.6.1 ([30]). *Los grafos arco-circulares cumple el teorema fuerte de los grafos perfectos.*

Demostración: Sea G un grafo a, w -particionable y x e y dos vértices diferentes de $V(G)$, queremos ver que $N(x)$ no está contenido en $N(y)$.

Supongamos que $N[x] \subseteq N[y]$. Por el teorema 3.4.5, $G - \{y\}$ tiene un único cubrimiento minimal de cliques $\Theta(G - \{y\})$ tal que el tamaño de los cliques es w , y sea Q el clique contenido en $\Theta(G - \{y\})$ que contiene a x , entonces $Q \subseteq N[x]$, y además, $N[x] \subseteq N[y]$ por lo tanto, $Q \cup \{y\}$ es un clique en G que tiene tamaño $w + 1$. Pero por el teorema 3.4.3 $\omega(G) = w$, llegamos a una contradicción. Por lo tanto, $N[x]$ no está contenido en $N[y]$.

Como los ciclos de poder cumple la conjetura de grafos perfectos fuertes, si G es un grafo arco-circular particionable es suficiente demostrar que $G = C_n^{w-1}$. Sea α el arco que representa a x y β el arco que representa a y , como $N[x]$ no está contenido en $N[y]$, entonces α no puede estar contenido totalmente dentro del β . Por lo tanto, cada arco que interseca con α contiene uno de los extremos de éste. Como los vértices que corresponden los arcos que contiene uno de los extremos de α junto con x forman un clique, hay a lo sumo $w - 1$ arcos que contienen a cada uno de los extremos de α , por lo tanto, $d(x) \leq 2w - 2$. Por el teorema 3.4.6 cumple la igualdad $d(x) = 2w - 2$. Sea p un punto arbitrario sobre el círculo, y comenzamos a mover en sentido de reloj enumerando los arcos a medida que chocamos contra uno de los extremos de éstos y al vértice v_i corresponde el i -ésimo arco. Como cada arco interseca con $w - 1$ arcos diferentes en cada extremo, entonces cada vértice es adyacente a $w - 1$ vértices cada dirección. Por lo tanto, $G = C_n^{w-1}$. \square

Ahora basándonos en el artículo [1], vamos a probar algunas otras propiedades importantes de los grafos arco-circulares.

Teorema 3.6.2 ([28] y [29]). *Sea G un grafo simple, es arco-circular si y sólo si sus vértices pueden ser ordenados circularmente v_1, v_2, \dots, v_n tal que para todos los i y j con $i < j$, si $v_i v_j \in E(G)$ si y sólo si pasa alguna de las siguientes condiciones:*

- $v_{i+1}, \dots, v_j \in N[v_i]$
- $v_{j+1}, \dots, v_i \in N[v_j]$, donde v_{j+1}, \dots, v_i significa $v_{j+1}, \dots, v_n, v_1, \dots, v_i$.

Demostración: Primero vamos a probar la condición suficiente. Sea G un grafo arco-circular, entonces tiene una representación arco-circular. Por el lema anterior, podemos suponer que los arcos son abiertos y ningún extremo de los arcos coinciden. Vamos a enumerar los arcos. Comenzando desde un punto arbitrario del círculo yendo en sentido del reloj, enumeramos los arcos a medida que chocamos contra el extremo que es a contrarreloj, y notamos los arcos A_1, A_2, \dots, A_n , y sus vértices correspondientes v_1, v_2, \dots, v_n

Sea $i < j$, v_i y v_j son adyacentes si y sólo si el extremo que es a contrarreloj de A_j pertenece al arco A_i , o el extremo que es a contrarreloj de A_i pertenece al arco A_j .

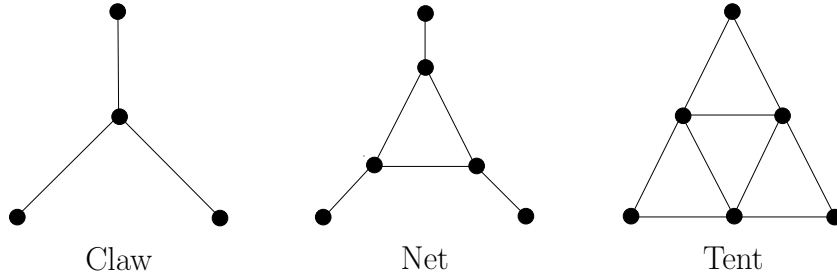
En el primer caso, por la forma como numeramos los extremos que son a contrarreloj de los arcos $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{j-1}$ están entre los extremos que son a contrarreloj de A_j y A_i , entonces también pertenecen al arco A_i , por lo tanto, $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{j-1}, A_j$ se intersecan con A_i , entonces $v_{i+1}, \dots, v_j \in N[v_i]$.

En el segundo caso, por la forma como numeramos los extremos que son a contrarreloj de los arcos $A_{j+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_{i-1}$ están entre los extremos que son a contrarreloj de A_j y A_i , entonces también pertenecen al arco A_j , por lo tanto, $A_{j+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_i$ se intersecan con A_j , entonces $v_{j+1}, \dots, v_i \in N[v_j]$.

Ahora vamos a probar la condición necesaria. Ya tenemos los vértices de G ordenados, vamos a construir una representación arco-circular de G .

Ponemos los n puntos p_1, p_2, \dots, p_n en el círculo equidistanciados. Para cada v_i sea m_i el menor índice tal que v_i no es adyacente a v_{m_i} . Además, A_i es el arco que va desde el punto p_i hasta p_{m_i} en sentido del reloj y abierto. Sea $i < j$, por construcción, A_i interseca con A_j si y sólo si p_j pertenece al arco de A_i o p_i pertenece al arco de A_j . Además, si p_j pertenece al arco de A_i si y sólo si A_{i+1}, \dots, A_j se intersecan con A_i , si y sólo si $v_{i+1}, \dots, v_j \in N[v_i]$. Si p_i pertenece al arco de A_j si y sólo si $A_{j+1}, \dots, A_n, A_1, \dots, A_i$ se intersecan con A_j si y sólo si $v_{j+1}, \dots, v_i \in N[v_j]$. Por hipótesis $v_i v_j \in E(G)$ si y sólo si A_i interseca con A_j . Por lo tanto, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ es una representación arco-circular de G . \square

Definición 3.6.2 Sean G y H dos grafos simples, decimos que G es un múltiplo de H si G se obtiene reemplazando cada vértice x de H por un grafo completo K_x , y los vértices de K_x y K_y son adyacentes si y sólo si x e y son adyacentes en H .

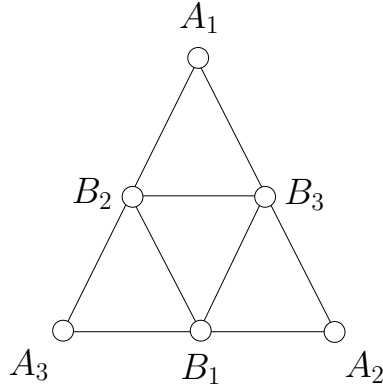


Teorema 3.6.3 Sea G un grafo simple que no contiene a claw, net, ciclo de 4 vértices o de 5 vértices como subgrafos inducidos. Si G contiene tent como subgrafo inducido, entonces G es un múltiplo de tent.

Demostración: Vamos a probar por inducción en cantidad de vértices.

Caso base: Si G tiene 6 vértices, entonces G es tent.

Paso inductivo: Supongamos que G tiene más de 6 vértices. Entonces existe un vértice $v \in V(G)$ tal que $G - \{v\}$ es conexo. Si contiene tent como subgrafo inducido, por hipótesis inductiva $G - \{v\}$ es múltiplo de tent. Sean A_1, A_2, A_3 y B_1, B_2, B_3 los subgrafos completos que corresponden los seis vértices del tent, y etiquetado de la siguiente manera.



Como G es conexo, v tiene un vecino en $G - \{v\}$, y v no puede tener vecinos en A_1, A_2, A_3 . Supongamos que existe $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3$ tal que son adyacentes a v , entonces forman un subconjunto inducido que es un claw, contradice a la hipótesis.

Y v tiene que tener algún vecino en B_1, B_2, B_3 . Supongamos que no, tenemos dos casos.

- Caso 1: v es adyacente a algún vértice de solo uno de los conjuntos A_1, A_2, A_3 , sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $a_1 \in A_1$ que es adyacente a v , y sean $b_2 \in B_2$, $b_3 \in B_3$, $a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3$, entonces $a_1, a_2, a_3, b_2, b_3, v$ forman un subgrafo inducido que es net.
- Caso 2: v es adyacente a algún vértice de solo dos de los conjuntos A_1, A_2, A_3 , sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe un $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$ que son adyacentes a v , y sean $b_3 \in B_3$, entonces v, a_1, b_3, a_2, v forman un subgrafo inducido que es un ciclo de 4 vértices.

Por lo tanto, v tiene algún vecino en B_1, B_2, B_3 . Sin pérdida de generalidad, supongamos que existe $b_2 \in B_2$ tal que es adyacente a v . Entonces v tiene que ser adyacente a todos los vértices de A_1 o de A_3 . Supongo que existe $a_1 \in A_1$ y $a_3 \in A_3$ tal que no son adyacentes a v , entonces b_2, v, a_1, a_3 forman un subgrafo inducido que es un claw. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que v es adyacente a todos los vértices de A_1 . tenemos dos casos.

- v no es adyacente a ningún vértice de $A_2 \cup A_3$. Entonces v tiene que ser adyacente a todos los vértices de B_2 y de B_3 . Si existe $b_2 \in B_2$ adyacente a v y $b_3 \in B_3$ no adyacente a v , sea $a_3 \in A_3$, entonces b_2, v, b_3, a_3 forman un subgrafo inducido que es claw. Si existe $b_2 \in B_2$ no adyacente a v y $b_3 \in B_3$ adyacente a v , sea $a_2 \in A_2$, entonces b_3, v, b_2, a_2 forman un subgrafo inducido que es claw. Si existe $b_2 \in B_2$ y $b_3 \in B_3$ que no son adyacentes a v , y sean $a_2 \in A_2$ y $a_3 \in A_3$ entonces $v, a_2, a_3, a_1, b_2, b_3$ forman un subgrafo inducido que es net. Por último v no puede tener ningún vecino en B_1 , si existe $b_1 \in B_1$, entonces b_1, v, a_3, a_2 forman un subgrafo inducido que es un claw. De esa manera podemos poner v en el conjunto A_1 , y G sigue siendo múltiplo del tent.

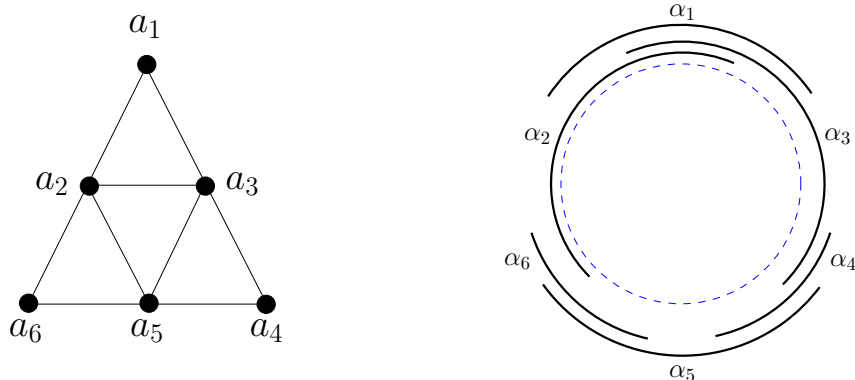
- Además, de A_1 , v también es adyacente a algún vértice de A_2 . Entonces v es adyacente a todos los vértices de B_1, B_2, B_3 . Si existe $b_2 \in B_2$ que no es adyacente a v , y sea $a_1 \in A_1$ y $b_1 \in B_1$, entonces v, a_1, b_2, b_1, v forman un subgrafo inducido que es un ciclo de 4 vértices. Si existe $b_1 \in B_1$ o existe $b_3 \in B_3$ que no es adyacente a v , de la manera análoga podemos encontrar un subgrafo inducido que es un ciclo de 4 vértices. Si existe $b_2 \in B_2$ y $b_1 \in B_1$ que no son adyacentes a v , y sean $a_1 \in A_1$ y $a_2 \in A_2$, entonces v, a_1, b_2, b_1, a_2, v forman un subgrafo inducido que es un ciclo de 5 vértices. Por último v es adyacente a todos los vértices de A_2 . Si existe $a_2 \in A_2$ que no es adyacente a v , sean $a_3 \in A_3$ y $b_1 \in B_1$, entonces b_1, v, a_3, a_2 forman un subgrafo inducido que es un claw. Como v no es adyacente a ningún vértice de A_3 , podemos poner v al conjunto B_3 , y G sigue siendo múltiplo del tent. \square

Definición 3.6.3 Sea G un grafo arco-circular, es propio si existe una representación arco-circular tal que ningún arco contiene propiamente al otro.

Colorario 3.6.1 Sea G un grafo cordal, es un grafo arco-circular propio si y sólo si no tiene ningún subgrafo inducido que es claw o net.

Demostración: Como claw y net no son grafos arco-circulares propios, entonces cumple la condición suficiente.

Ahora veamos la condición necesaria. Como G es cordal, entonces no contiene ningún subgrafo inducido que es ciclo de 4 o 5 vértices. Por hipótesis tampoco contiene subgrafo inducido que es claw o net. Por lo tanto, por el teorema 3.6.3, es suficiente probar que cualquier múltiplo de tent es un grafo arco-circular propio. Primero buscamos una representación arco-circular propio de un tent, como el gráfico de abajo. Luego a cada vértice de los grafos completos que corresponden los vértices de tent le asignamos el mismo arco que el de tent, de esa manera construimos la representación arco-circular propio del múltiplo de tent. \square



4. Conclusiones y problemas abiertos

A lo largo de esta tesis hemos estudiado diferentes aspectos de los grafos de intervalos, sus variantes y su relación con grafos perfectos.

El grafo G es de intervalos si existe un conjunto de intervalos Γ tal que a cada vértice de G le corresponde un intervalo de Γ , y los dos vértices son adyacentes si y sólo si sus intervalos correspondientes se intersecan.

El capítulo 1 nos basamos principalmente en [20], vimos que un grafo G es de intervalo si y sólo si es cordal y no es asteroidal, luego encontramos el conjunto minimal de grafos inducidos prohibidos para los grafos de intervalos.

En el capítulo 2 vimos que un grafo G es de intervalos si y sólo si no contiene ciclos inducidos de 4 vértices y su complemento es un grafo de comparabilidad [15]. También estudiamos la equivalencia entre los grafos de intervalos propios, los grafos de intervalos unitarios y los grafos de intervalos que no contienen ningún subgrafo $K_{1,3}$ [25]. Y al final del capítulo generalizamos el concepto de los grafos de intervalos propios. Luego demostramos que un grafo G es de intervalos q -propios si y sólo si es un grafo de intervalos T_{q+1} -libre.

En el capítulo 3 vimos el teorema débil de los grafos perfectos [22]. Usando ese teorema probamos que todos los grafos cordales y de comparabilidad son perfectos [2], como su colorario todos los grafos de intervalos también son perfectos. Luego vimos que la clase de los grafos arco-circulares es una generalización de los grafos de intervalo, además cumple el teorema fuerte de los grafos perfectos [30]. Por último vimos que si G es un grafo cordal, es un grafo arco-circular propio si y sólo si no tiene ningún subgrafo inducido que es claw o net [1].

Los problemas abiertos principales relacionados con la clase de grafos arco-circulares son cómo caracterizarlos con subgrafos inducidos prohibidos. Avances parciales sobre este problema fueron publicados en [4]. Algunos problemas interesantes sobre grafos arco-circulares son los siguientes [10]:

Problema 1: Encontrar subgrafos inducidos prohibidos para los grafos arco-circulares dentro de la clase de los grafos cordales.

Problema 2: Encontrar subgrafos inducidos prohibidos para los grafos arco-circulares dentro de la clase de los grafos que no contengan K_4 .

Problema 3: Caracterizar los grafos arco-circulares dentro de la clase de los grafos que no contengan claw encontrando subgrafos inducidos prohibidos. Se puede comenzar a caracterizar los grafos arco-circulares dentro de los grafos con número de estabilidad menor o igual que dos.

Problema 4: Encontrar subgrafos inducidos prohibidos para los grafos arco-circulares q -propios que se define análogamente a los grafos de intervalos q -propios.

Referencias

- [1] Bang-Jensen J. y Hell P., *On chordal proper circular arc graphs*. Discrete mathematics 128, North-Holland (1994), 395-398
- [2] Berge C., *Les problèmes de coloration en théorie des graphes*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 9 (1960), 123-160.
- [3] Berge C., *Farbung von Graphen*. deren samtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind, Wiss.Z. Martin-Luther-Univ., Halle-Wittenberg Math.-Natur, Reihe, (1961), 114-115.
- [4] Bonomo F., Durán G., Grippo L. N. y Safe M. D., *Partial characterizations of circular-arc graphs*. Journal of graph theory, 61(4) (2009), 289-306.
- [5] Buckingham M. A. y Golumbic M. C., *Partitionable graphs, circle graphs, and the Berge strong perfect graph conjecture*. Discr. Math. 44 (1983), 45-54.
- [6] Chudnovsky M., Robertson N., Seymour P. y Thomas R., *Annals of Mathematics*. (2006), Volume 164, 51-229.
- [7] Chvátal V., *On the strong perfect graph conjecture*. J. Comb. Th. 20 (1976), 139-141.
- [8] Chvátal V., *Star-cutsets and perfect graphs*. J. Comb. Th. (B) 39 (1985), 138-154.
- [9] Dirac G. A., *On rigid circuit graphs*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 25 (1961), 71-76. MR24 Num57.
- [10] Durán G, Grippo L. N., Safe M. D. *Structural results on circular-arc graphs and circle graphs: A survey and the main open problems*. Discrete Applied Mathematics (2013), doi:10.1016/j.dam.2012.12.021.
- [11] Fulkerson D. R., *The perfect graph conjecture and pluperfect graph theorem*. 2nd Chapel Hill Conf. on Combin. Math, and its Appl.(1969), 171-175.
- [12] Fulkerson D. R., *Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra*. Math. Programming 1 (1971), 168-194. MR45 Num3222.
- [13] Fulkerson D. R. y Gross O. A., *Incidence matrices and interval graphs*. Pacific J. Math. 15 (1965), 835-855. MR32 Num3881.
- [14] Gallai T., *On directed paths and circuits*. In Theory of Graphs. Proc. Tihany 1966 (ed. P. Erdős and G. Katona) Academic Press (1968), 115-118.
- [15] Gilmore P. C. y Hoffman A. J., *A characterization of comparability graphs and of interval graphs*. Canad. J. Math. 16 (1964), 539-548; abstract in Int. Congr. Math. (Stockholm) (1962), 29 (A) MR31 Num87.

- [16] Gimbel J., *End vertices in interval graphs*. Discrete Applied Mathematics 21, North-Holland (1988), 257-259.
- [17] Golumbic M. C. y Israel H., *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. The Annals edition, (2004).
- [18] Hajös G., *Über eine Art von Graphen*. Internat. Math. Nachr. 11 (1957), Problem 65.
- [19] Kenneth P. B. y West D. B., *A short proof that proper=unit*. Discrete Mathematics 201, (1999), 21-23
- [20] Lekkerkerker C. G. y Boland J. Ch., *Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line*. Recu par la Rédaction le 9.6., Amsterdam (1961), 46-64
- [21] Lovász L., *Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture*. Discrete Math. 2 (1972), 253-267. MR46 Num1624.
- [22] Lovász L., *A characterization of perfect graphs*. J. Combin. Theory B 13 (1972), 95-98. MR46 Num8885.
- [23] Luce R. D., *Semiororders and a theory of utility discrimination*. Econometrica 24 (1956), 178-191. MR17 Num1222.
- [24] Proskurowski A. y Telle J. A., *Classes of graphs with restricted interval models*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 4 (1999), 135-144.
- [25] Roberts F. S., *Indifference graphs*, in "Proof Techniques in Graph Theory". F. Harary, ed.(1969), 139-146. Academic Press, New York. MR40 Num5488.
- [26] Roy B., *Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe*. Rev. Francaise Automat. Informat. Recherche Opérationelle sér. Rouge 1 (1967), 127-132.
- [27] Scott D. S. y Suppes P., *Foundation aspects of theories of measurement*. J. Symbolic Logic 23 (1958), 113-128. MR22 Num6716.
- [28] Tucker A. C., *Characterizing circular-arc graphs*. Bull. Amer. Math. Soc. 76 (1970b), 1257-1260. MR43 Num1877.
- [29] Tucker A. C., *Matrix characterizations of circular-arc graphs*. Pacific J. Math. 39 (1971), 535-545. MR46 Num8915.
- [30] Tucker A. C., *Coloring a family of circular arcs*. SIAM J. Appl. Math. 3 (1975), 493-502.
- [31] Tucker A. C., *Critical perfect graphs and perfect 3-chromatic graphs*. J. Comb. Th. (B) 23 (1977). 143-149.

- [32] Vitaver L. M., *Determination of minimal coloring of vertices of a graph by means of Boolean powers of the incidence matrix.* (Russian). Dokl. Akad. Nauk. SSSR 147 (1962), 758-759.
- [33] West D. B., *Introduction to Graph Theory.* Second Edition, India (2001).