UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Patrones geométricos, medida y dimensión

Alexia Yavícoli

Director: Dr. Pablo Sebastián Shmerkin

Fecha de Presentación: 04 de Octubre de 2013

Agradecimientos

A mama, Ene y Flor por estar siempre. A la abu y al resto de la familia que estuvo presente en estos años.

A todos los amigos: Dani, Gaby, Car, Carlos, Guillo, Italiana, Pablo, Martu, Juanete y Tati (que especialmente me ayudo con LaTex).

A todos esos compañeros de cursadas (además de los amigos) que hicieron mas agradable aún el estudiar matemática, entre ellos: Vero M, Paula T, Marcos C, Juan Manuel C, Claudia S, Yanu G, Fran, Lucas B, Fede C, Dani G, Marcelo V, Juampi B, Hernan C...

A Carlos, Ursula y Pablo por enseñarme algunos de los temas más bonitos de la matemática.

A los docentes que le pusieron garra y ayudaron a mi formación.

A los compañeros de trabajo que me hicieron el aguante: Jor, Tere...

A aquellos alumnos que por hacer preguntas interesantes me hicieron crecer, también a los buena onda que hicieron más agradable mi trabajo.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Veamos la motivación matemática y algo de la historia que gira en torno de los temas a tratar en esta tesis:

1.1. Progresiones y tamaño de conjuntos

Durante su juventud, el matemático Erdös fue cautivado por un problema que le planteó Sidon (matemático húngaro) en 1932: ¿Cuán grande puede ser un subconjunto de $\{1, \cdots, N\}$, tal que todas las sumas de a pares de sus elementos sean diferentes?

Definición 1. *Diremos que un conjunto es de Sidon si tiene la propiedad de que todas las sumas de dos elementos del conjunto, son distintas. O bien, por ser $a + b = c + d \Leftrightarrow a - d = c - b$, la definición equivale a que tenga la propiedad de que todas las diferencias de dos elementos del conjunto, sean distintas.*

Construir conjuntos de Sidon no es difícil, pero lo que es realmente de interés es construirlos con el mayor tamaño posible (la generalización de este problema fue resuelta en 2010 [9]).

El interés de Sidon por estos conjuntos, tenía que ver con cuestiones de análisis de Fourier, pero a Erdös le generó interés por su carácter aritmético y combinatorio. Ese problema se convertiría en un tema recurrente en las investigaciones de Erdös.

Más adelante Erdös planteó el siguiente problema estrechamente relacionado: ¿Cuán grande puede ser un $A \subseteq \mathbb{Z}$ tal que todas las diferencias de a pares de sus elementos sean diferentes?

Definición 2. *Una progresión aritmética de longitud* n *es una serie* $(a_1, \cdots, a_n)$ *monótona de números reales distintos, con* $n \geq 3$*, tal que las diferencias sucesivas* $a_{j+1} - a_j$ *son constantes para todo* $j = 2, 3, \ldots, n$*. Una progresión aritmética de longitud infinita es una serie* $(a_j)_j$ *monótona de números reales distintos, indexada en* $\mathbb{N}$ *o* $\mathbb{Z}$ *tal que las diferencias sucesivas* $a_{j+1} - a_j$ *son constantes para todo* j*. O sea que si tomamos tres términos consecutivos, el del medio es el promedio de los otros dos.*

Para un $A \subseteq \mathbb{Z}$ fijado:

$$\begin{aligned} &\text{existen } a < b < c \text{ en } A \text{ tales que } b - a = c - b \\ \Leftrightarrow\ &\text{existen } a < b < c \text{ en } A, \text{ tales que } b = \frac{a+c}{2} \\ \Leftrightarrow\ &A \text{ tiene una progresión aritmética de largo 3.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema planteado es: ¿Cuán grande puede ser un $A \subseteq \mathbb{Z}$ que no contenga progresiones aritméticas de longitud 3? O equivalentemente: **¿Cuán grande puede ser un $A \subseteq \mathbb{Z}$ que no contenga progresiones aritméticas?**

Ambas preguntas son equivalentes, pues: Si no tiene progresiones aritméticas, en particular no tiene progresiones aritméticas de longitud 3. Y si no tiene progresiones aritméticas de longitud 3, no puede tener progresiones aritméticas más largas (pues ésta contendría una de longitud 3).

Existen subconjuntos numerables de $\mathbb{Z}$ que no tienen progresiones aritméticas de longitud 3 (y por lo tanto de ninguna longitud). Por ejemplo:

$A := \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$. Este conjunto no contiene progresiones aritméticas de longitud 3, ya que el promedio de dos puntos distintos de A no puede estar en A. Veamos esto último: si tomamos 2^n y 2^m con $n < m$, el promedio es

$$\frac{2^n + 2^m}{2} = \frac{2^n(1 + 2^{m-n})}{2} = 2^{n-1}(1 + 2^{m-n}),$$

donde $(1 + 2^{m-n})$ es un impar mayor que uno.

Esto nos lleva a preguntarnos el mismo problema en $\mathbb{R}$: ¿Cuán grande puede ser un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no contiene progresiones aritméticas?

O lo que es equivalente:

¿Cuán grande puede ser un subconjunto de $\mathbb{R}$ que no contiene progresiones aritméticas de longitud 3?

Lema 3. *Existen subconjuntos de $\mathbb{R}$, que tienen el mismo cardinal que $\mathbb{R}$ y que no tienen progresiones aritméticas:*

Demostración. Dado $r \in (0, \frac{1}{2})$ construimos en $[0,1]$ un conjunto de tipo Cantor $\mathcal{C}_r$, de la siguiente manera: Tomamos

$$F_0 := [0,1] \text{ es 1 intervalo de longitud 1,}$$

$$F_1 := [0,r] \cup [1-r,1] \text{ es unión de 2 intervalos de longitud } r,$$

$$F_2 := [0,r^2] \cup [r-r^2, r] \cup [1-r, 1-r+r^2] \cup [1-r^2, 1] \text{ es unión de 4 intervalos de longitud } r^2,$$

$$\ldots$$

Y definimos:

$$\mathcal{C}_r := \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} F_k.$$

Vale que para $0 < r < \frac{1}{3}$, $\mathcal{C}_r$ no tiene progresiones aritméticas de longitud 3; por lo que no tiene progresiones aritméticas de ninguna longitud.

Notar que para $r = \frac{1}{3}$ sí las tiene, por ejemplo: $\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$.

Veamos que si $0 < r < \frac{1}{3}$, entonces $\mathcal{C}_r$ no tiene progresiones aritméticas de longitud 3.

O equivalentemente, por contrarrecíproco, si $a < b < c$ en $\mathcal{C}_r$ son tales que $\operatorname{dist}(a,b) = \operatorname{dist}(b,c)$, queremos ver que $r \geq \frac{1}{3}$. Como los intervalos del paso k tienen longitud r^k que tiende a cero cuando $k \to \infty$, existe un $k_0 \geq 2$ mínimo tal que a, b, c están en distintos intervalos del nivel k_0.

Por haberlo elegido mínimo con esa propiedad, en el paso $k_0 - 1$ no pueden estar los tres en el mismo intervalo (pues si no en el paso k_0 habría 2 en el mismo, ya que cada intervalo del paso $k_0 - 1$ contiene exactamente 2 intervalos del paso k).

Entonces en el paso $k_0 - 1$ habría exactamente 2 de ellos en un mismo intervalo, por ser $a < b < c$, deben ser o bien a y b o bien b y c. Supongamos sin pérdida de generalidad que son a y b.

Como a y b están en el mismo intervalo del paso $k_0 - 1$, llamemosle I_{k_0-1}; resulta que $\mathrm{dist}(a, b) \leq \mathcal{L}(I^{k_0-1}) = r^{k_0-1}$. Y como b y c están en distintos intervalos del paso $k_0 - 1$, resulta que $\mathrm{dist}(b, c) \geq$ longitud del hueco más chico de paso $k_0 - 1 = r^{k_0-2}(1 - 2r)$.

Por lo tanto, tenemos:

$$r^{k_0-2}(1 - 2r) \leq \mathrm{dist}(b, c) = \mathrm{dist}(a, b) \leq r^{k_0-1}.$$

Con lo cual $1 - 2r \leq r$, y por lo tanto $\frac{1}{3} \leq r$.

Veamos por qué $\mathcal{C}_r$ tiene el cardinal de $\mathbb{R}$. Eso es claro, pues puede biyectarse con $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ vía mandar un $x \in \mathcal{C}_r$ a la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siguiente: $a_1 = 0$ si x está en el intervalo izquierdo de F_1 o $a_1 = 1$ si x está en el intervalo derecho de F_1. Una vez fijado en qué intervalo de F_1 está x, como éste contiene exactamente dos intervalos de F_2, definimos $a_2 = 0$ si x está en el intervalo izquierdo o $a_2 = 1$ si está en el derecho. Y así siguiendo.

$\square$

Así, vimos que la cardinalidad no nos da información de cuan grande puede ser un conjunto sin progresiones aritméticas. Con lo cual (en lo que respecta a la pregunta de Erdös), tiene sentido preguntarse, acerca de cuan grande puede ser la dimensión de Hausdorff de un subconjunto de $\mathbb{R}$ sin progresiones aritméticas.

Veremos en esta tesis el siguiente resultado parcial a la pregunta planteada:

Desarrollaremos un trabajo de Keleti en el que veremos que para cualquier colección contable de conjuntos de 3 puntos, hay un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, con dimensión de Hausdorff 1, que no contiene copia similar de cualquiera de los conjuntos de 3 puntos dados.

En particular, hay un conjunto de dimensión de Hausdorff 1 (*es lo más grande que podría ser en términos de dimensión*), que no contiene progresiones aritméticas.

Un problema sorprendentemente profundo en combinatoria aditiva es la de dar condiciones que garanticen que un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$ contiene progresiones aritméticas de una longitud dada.

Con respecto a ese mismo problema, pero pensado en $\mathbb{R}$; veremos en el desarrollo de la tesis que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue positiva tendrá progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

En realidad veremos algo más general: todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ de medida le Lebesgue positiva, tiene copia homotética de cualquier subconjunto finito de puntos. Por lo que cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ de medida de Lebesgue positiva tendrá copia homotética de cualquier subconjunto finito, y en particular tendrá progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Tal vez incluso se pueda encontrar una condición más débil que tener medida positiva para implicar que contenga copia homotética de todos los conjuntos finitos. Esto último tiene sentido preguntárselo, ya que existe un conjunto con dimensión de Hausdorff 0, verificando esa propiedad (veremos su existencia en el capítulo 4).

Resulta claro que, si partimos $\mathbb{R}$ en n subconjuntos; entonces al menos uno de ellos tendrá progresiones aritméticas arbitrariamente largas (por tener medida positiva).

Un resultado análogo para los enteros fue demostrado en 1926:

Teorema 4 (Teorema de Van der Waerden [16])**.** *Si partimos el conjunto de los enteros en n subconjuntos, entonces alguno de ellos contiene progesiones aritméticas arbitrariamente largas.*

El Teorema de Van der Waerden habla de la existencia de una clase con progresiones aritméticas arbitrariamente largas, pero no nos dice cual de ellas es la que tiene esa propiedad. Intuitivamente la clase que tenga "más números" debería ser la que cumpla con esa propiedad, por lo que resulta natural la siguiente conjetura:

Conjetura de Erdös (1936): Si un subconjunto de números enteros tiene densidad superior positiva, entonces contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Donde definimos la densidad superior de un conjunto $A \subseteq \mathbb{Z}$, como

$$\bar{d}(A) := \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#\left(A \cap [-N, N]\right)}{2N+1}.$$

O analogamente para el caso en que trabajemos con un $A \subseteq \mathbb{N}$,

$$\bar{d}(A) := \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#\left(A \cap [1, N]\right)}{N}.$$

Veamos que la conjetura de Erdös generaliza el Teorema de Van der Waerden:

Si suponemos válida la conjetura de Erdös, y partimos $\mathbb{Z}$ en n subconjuntos $A_1, \cdots, A_n$. Entonces hay un A_{j_0} que tiene densidad positiva (pues $1 = \bar{d}(Z) \leq \sum_{1\leq j\leq n} \bar{d}(A_j)$). Con lo cual A_{j_0} tiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Definición 5 (constante de Erdös)**.** *Sea A un subconjunto de naturales, y sea $k \geq 3$. Definimos $r_k(A)$ como el cardinal más grande de los subconjuntos de A que no contienen ninguna progresión aritmética propia de longitud k.*

Sea $N \in \mathbb{N}$, y sea $k \geq 3$. Notamos $r_k(N) := r_k([1, N])$; es decir, el cardinal más grande de los subconjuntos de $\{1, \cdots, N\}$ que no contienen ninguna progresión aritmética de longitud k.

Observación 6. $r_k(N) \leq N$.

Observación 7. *Fijado N, cuando k crece, $r_k(N)$ crece.*

Erdös demostró que, fijado el k, existe $\lim_{N\to\infty} \frac{r_k(N)}{N}$.

Lema 8. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
1) Para todo $k \geq 3$, se tiene que $\lim_{N\to\infty} \frac{r_k(N)}{N} = 0$.
2) Sea A un subconjunto de los números enteros positivos con densidad superior positiva. Entonces A contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

Demostración. Veamos que 1) implica 2), por contrarrecíproco: Supongamos que no vale 2), entonces existen A con densidad superior positiva y $k \geq 3$ tal que A no tiene progresiones aritméticas de longitud k. Con lo cual

$$\lim_{N\to\infty} \frac{r_k(N)}{N} \geq \overline{\lim_{N\to\infty}} \frac{\#(A \cap [1, N])}{N} =: \bar{d}(A) > 0.$$

Por lo tanto no vale 1).

Veamos que 2) implica 1), por contrarrecíproco: Supongamos que no vale 1), entonces existe $k_0 \geq 3$ con $\overline{\lim}_{N\to\infty} \frac{r_{k_0}(N)}{N} > 0$. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $(N_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $r_{k_0}(N_j) \geq \varepsilon N_j$ para todo j natural.

Queremos armar un A con densidad superior positiva, que no tenga progresiones aritmeticas de longitud k_0.

Por la definición de $r_{k_0}(N_j)$ sabemos que para cada j natural, tenemos un subconjunto B_j del tamaño más grande posible en $\{1, \cdots, N_j\}$ sin progresiones aritméticas de longitud k_0, con $\#B_j \geq \varepsilon N_j$.

Tomemos $A_1 := B_1$ que no tiene progresiones aritméticas de longitud k_0.

Dados $B \subseteq \mathbb{Z}$ y $h \in \mathbb{Z}$ definimos $B + h := \{b + h : b \in B\}$.

Tomemos $A_2 := B_2 + h_1 + N_1$ que no tiene preogresiones aritméticas de longitud k_0 (por ser un corrimiento de B_2), donde h_1 es el tamaño del hueco que se forma entre el $\{1, \cdots, N_1\}$ en el que está A_1 y el $\{N_1 + h_1, \cdots, N_1 + h_1 + N_2\}$ en el que está A_2. Vamos a elegir h_1 de modo que en $A_1 \cup A_2$ no haya progresiones aritméticas de longitud k_0. Como en caso de que hubiera una progresión aritmética de longitud k_0, debería tener al menos un punto en A_1 y otro en A_2, tendríamos una progresión aritmética de longitud 3 con un punto en A_1 y otro en A_2. Para que no haya progresiones aritméticas de longitud 3 con un punto en A_1 y otro en A_2 basta tomar $h_1 =: N_2 + 1$, así la longitud del hueco es más grande que la longitud del intervalo más grande entre $\{1, \cdots, N_1\}$ y $\{1, \cdots, N_2\}$ que contienen a B_1 y a B_2 respectivamente.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $N_3 \geq N_1 + N_2 + h_1$ (si no, se descartan finitos términos de la sucesión). Tenemos $B_3 \subseteq \{1, \cdots, N_3\}$, $\#B_3 \geq \varepsilon N_3$. Tomando $A_3 := B_3 + \sum_{k=1}^{2} h_k + N_k$ y $h_2 := N_3 + 1$ podemos garantizar que en $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ no hay progresiones aritméticas de longitud k_0 (pues no hay progresiones aritméticas de longitud k_0 en $A_1 \cup A_2$ ni en A_3, y la longitud del hueco entre $\{1, \cdots, N_1 + N_2 + h_1\}$ y $\{N_1 + N_2 + h_1 + h_2, \cdots, N_1 + N_2 + h_1 + h_2 + N_3\}$ es mayor que N_3 y que $N_1 + N_2 + h_1$ por la suposición).

En general, construidos $A_1, \cdots, A_{k-1}$ y $h_1, \cdots, h_{k-2}$, como antes podemos suponer que $N_k \geq N_1 + \cdots + N_{k-1} + h_1 + \cdots + h_{k-2}$; tomando $h_k := N_{k+1} + 1$ y $A_j := B_j + \sum_{k=1}^{j-1} h_k + N_k$ resulta que $\bigcup_{j=1}^{k+1} A_j$ no tiene progresiones aritméticas de longitud k_0.

Con lo cual, $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ no tiene progresiones aritméticas de longitud k_0.

Veamos que A tiene densidad superior positiva:

$$\begin{aligned}
\bar{d}(A) &\geq \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\#(A\cap[1,h_1+\cdots+h_{j-1}+N_1+\cdots+N_j])}{h_1+\cdots+h_{j-1}+N_1+\cdots+N_j}\\
&= \overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{j}\#B_i}{h_1+\cdots+h_{j-1}+N_1+\cdots+N_j}\\
&\geq \varepsilon\,\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{j}N_i}{h_1+\cdots+h_{j-1}+N_1+\cdots+N_j}\\
&= \varepsilon\,\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{j}N_i}{N_2+\cdots+N_j+(j-1)+N_1+\cdots+N_j}\\
&\geq \varepsilon\,\overline{\lim_{j\to\infty}} \frac{\sum_{i=1}^{j}N_i}{3.(\sum_{i=1}^{j}N_i)}\\
&= \varepsilon\frac{1}{3} > 0.
\end{aligned}$$

□

Por el lema anterior, la **Conjetura de Erdös** dice que dicho límite es cero.

Resolver esa conjetura resultó ser extremadamente difícil. En 1954, Roth fue el primero en poder conseguir un resultado cuando demostró el caso $k = 3$, utilizando métodos de análisis de Fourier.

Teorema 9 (Teorema de Roth)**.** $\lim_{N\to\infty} \frac{r_3(N)}{N} = 0.$

Quince años más tarde Szemerédi demostró el caso $k = 4$. Para que finalmente la conjetura de Erdös pudiera ser resuelta por el mismo Szemerédi, en 1975. El resultado es ahora conocido como el

Teorema 10 (Teorema de Szemerédi)**.** *Sea* $k \geq 3$*, se tiene que* $\lim_{N\to\infty} \frac{r_k(N)}{N} = 0.$

La demostración de Szemerédi está basada en su lema de regularidad y la teoría de grafos; utiliza un argumento sofisticado de combinatoria y es sumamente enredada (el mismo Szemerédi incluyó un diagrama con las implicaciones lógicas de las proposiciones, lemas y teoremas en que está dividida su demostración).

Unos años después, Furstenberg dio una demostración más simple del teorema de Szemerédi, basada en teoría ergódica.

En el 2001, Gowers publicó una tercera demostración (de más de 100 hojas) del teorema de Szemerédi basada solo en teoría de números aditiva, con técnicas clásicas de análisis de Fourier y combinatoria.

Son pocos los teoremas en matemáticas cuyas demostraciones han motivado el desarrollo de tantas áreas distintas en matemáticas, como lo hizo el Teorema de Szemerédi.

Tanto el Teorema de Roth como el Teorema de Szemerédi tienen una amplia diversidad de demostraciones, utilizando técnicas muy variadas. Sin embargo, todas ellas giran en torno a una dicotomía fundamental, a saber, la dicotomía entre los conjuntos aritméticamente estructurados (como por ejemplo las progresiones aritméticas) y conjuntos aritméticamente no estructurados (por ejemplo conjuntos aleatorios). El punto es que uno necesita muy diferentes argumentos para hacer frente a cualquiera de los dos casos, por lo que en cualquier prueba de los teoremas anteriores se debe primero descomponer un conjunto general de alguna manera en una componente estructurada y una no estructurada. Para hacer tal descomposición, uno necesita algunas herramientas de gran alcance (como análisis armónico, teoría ergódica, o la teoría de grafos).

Una famosa conjetura adicional de Erdös que permanece abierta: Sea $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = +\infty$. Entonces, A contiene progresiones aritmeticas arbitrariamente largas.

Esta conjetura sigue sin resolverse incluso para progresiones de longitud 3.

Es bien sabido que la serie de los inversos de los números primos da infinito; y que el conjunto de números primos tiene densidad superior cero.

Sin embargo, como caso especial de esta conjetura, restringido a los números primos $P = \{2, 3, 5, \cdots\}$, recientemente se ha demostrado por Green y Tao:

Teorema 11 (Teorema de Green y Tao (2008))**.** *Sea $k \geq 1$. Entonces*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{r_k(P \cap [1, N])}{\#(P \cap [1, N])} = 0.$$

En particular, como consecuencia de Szemerédi (pero en lugar de sobre $\mathbb{N}$ pensado sobre el conjunto de números primos), el conjunto de números primos contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas.

El conjunto de números primos P, es un conjunto con $\bar{d}(P) = 0$, que contiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas. Por lo que en particular se tiene que: **No vale la vuelta de la conjetura de Erdös (de 1936).**

En realidad ya se sabía que no valía la vuelta. Hay ejemplos más sencillos de conjuntos con densidad superior igual a cero y que contienen progresiones aritméticas arbitrariamente largas, como:

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n^3, n^3 + 1, \cdots, n^3 + n\}.$$

El conjunto A tiene progresiones aritméticas arbitrariamente largas pues para cada natural n tenemos que $\{n^3, n^3 + 1, \cdots, n^3 + n\}$ es progresión aritmética de longitud $n + 1$.

Además, A tiene densidad superior nula, pues para cada $N \in \mathbb{N}$ hay un único $n \in \mathbb{N}$ tal que $(n-1)^3 \leq N < n^3$, tenemos que por ser:

$$0 \leq \frac{\#(A \cap [1, N])}{N} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(i+1)}{(n-1)^3} = \frac{n^2 + 2n}{(n-1)^3} \to_{n \to +\infty} 0,$$

resulta $\bar{d}(A) = 0$.

La demostración del Teorema de Green-Tao usa ideas de algunas demostraciones del caso general del Teorema de Szemerédi y otras ideas novedosas.

Un problema que se está estudiando mucho en los últimos años es extender este tipo de problemas de subconjuntos de $\mathbb{Z}$ a subconjuntos de $\mathbb{R}$. En 2009, Izabella Laba y Malabika Pramanik [12], dieron una condición muy técnica para un subconjunto de $\mathbb{R}$ dado, que implica que el conjunto tiene progresiones aritméticas de longitud 3. Recientemente (3 de Julio de 2013) Vincent Chan, Izabella Laba y Malabika Pramanik [1]; generalizaron el resultado anterior.

1.2. Otra conjetura de Erdös

Erdös también conjeturó: Para cualquier conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$ existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue positiva que no contiene ninguna copia similar de A.

La conjetura está abierta incluso para el conjunto $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Veremos en el capítulo de patrones infinitos que: en caso de ser $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito, cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue positiva tiene copia homotética de A. Con lo cual, por contrarrecíproco: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que existe un $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue positiva que no tiene copia homotética de A, entonces A es infinito. La conjetura de Erdös antes mencionada, es que vale el recíproco de este último resultado para el caso $n = 1$.

También desarrollaremos en el capítulo de patrones infinitos dos soluciones parciales a esta conjetura, debidos a Falconer y a Kolountzakis. Falconer demostró que la conjetura es válida para el caso de que A está dado por una sucesión de números reales que no decae muy rápidamente. Kolountzakis muestra que para cada conjunto infinito A, hay un conjunto E de medida de Lebesgue positiva tal que $x + tA$ no está incluido en E para casi todo par (x, t) (en lugar de todo par como dice la conjetura).

Capítulo 2

Preliminares

En este capítulo se describiran los elementos necesarios para comprender la tesis.

2.1. Medida y dimensión de Hausdorff

Definición 12. *Dado $U \subseteq \mathbb{R}^n$ no vacío se define el diámetro de U como,*

$$|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$$

Definición 13. *Si $E \subseteq \bigcup_i U_i$ con $i \in \mathbb{N}$ o un conjunto finito de índices, y $0 < |U_i| \leq \delta$ para cada i, decimos que $\{U_i\}_i$ es un δ-cubrimiento de E.*

Aclaración: En ésta tesis diremos que un conjunto es numerable si tiene el mismo cardinal que $\mathbb{N}$. Y diremos que un conjunto es contable, si es finito o numerable.

Definición 14. *Una medida exterior en un conjunto X es una función*

$$\mu : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ (monotonía)*
- $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$ *(σ subaditividad)*

Definición 15. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ y $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Para $\delta > 0$ se define,*

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) = \text{ínf} \sum_i |U_i|^s$$

donde el infimo se toma sobre todos los δ-cubrimientos $\{U_i\}$ de E. Se puede comprobar facilmente que $\mathcal{H}^s_\delta$ es una medida exterior en $\mathbb{R}^n$.

Definición 16. *La medida exterior de Hausdorff s-dimensional de E se define como*

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Observación 17. *El límite existe y vale la igualdad en la definición anterior, pues $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ decreciente como función de $\delta > 0$, ya que si $\delta_1 < \delta_2$ resulta que $\{\delta_1$ cubrimientos de $E\} \subseteq \{\delta_2$ cubrimientos de $E\}$, y por lo tanto $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(E) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(E)$.*

Observación 18. *Para cada conjunto E, es claro de la definición que $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$ cualquiera sea $\delta > 0$.*

Proposición 19. *Veamos que $\mathcal{H}^s$ es efectivamente una medida exterior:*

Demostración.

- En el caso $s = 0$, resulta que $\mathcal{H}^s_\delta(E)$ cuenta cuantos conjuntos de diámentro menor que delta son necesarios para cubrir al conjunto E; con lo cual, haciendo $\delta \to 0$ se sigue que $\mathcal{H}^s(E)$ es la medida de contar, y no hay nada que probar.

- En el caso $s > 0$, es claro que $\mathcal{H}^s \geq 0$ y que $\mathcal{H}^s(\emptyset) = 0$. Veamos que $\mathcal{H}^s$ es monótona: Si $E_1 \subseteq E_2$, por ser todo δ-cubrimiento de E_2 un δ-cubrimiento de E_1, tenemos que

  $$\mathcal{H}^s_\delta(E_1) \leq \mathcal{H}^s_\delta(E_2).$$

  Por lo cual, haciendo δ tender a cero,

  $$\mathcal{H}^s(E_1) \leq \mathcal{H}^s(E_2).$$

  Veamos que $\mathcal{H}^s$ es sigma subaditiva: Sea $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$. Para cada δ fijo, dado para cada $k \in \mathbb{N}$ un δ-cubrimiento de E_k, resulta que la union de esos δ-cubrimientos es un δ-cubrimiento para E. Con lo cual, tenemos que

  $$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^s_\delta(E_k).$$

Que por ser $\mathcal{H}^s_\delta(E_k) \leq \mathcal{H}^s(E_k)$, resulta

$$\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_k).$$

Por lo cual, haciendo δ tender a cero,

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^s(E_k).$$

□

Observación 20. *Notar que en la definicion de la medida de Haussdorff s-dimensional en lugar de δ-cubrimientos se pueden considerar δ-cubrimientos formados por bolas (que en $\mathbb{R}$ son intervalos). Eso vale pues para cada δ fijo, las bolas de diámetro δ son los conjuntos más grandes posibles (en el sentido de la inclusión) cuyo diámetro es menor o igual que δ.*

Recordemos algunas definiciones: Notamos $\mathcal{G}$ al conjunto de abiertos; y $\mathcal{F}$ al conjunto de cerrados.

Definición 21. *Decimos que el conjunto B es un conjunto $\mathcal{G}_\delta$, si B es intersección contable de conjuntos abiertos.*

Definición 22. *Diremos que un conjunto es una σ-álgebra en el espacio X; si es una familia no vacía de subconjuntos de X, cerrada bajo complementos, uniones contables e intersecciones contables.*

Definición 23. *Dada una clase de conjuntos $\mathcal{C}$, definimos $\sigma(\mathcal{C})$ (la sigma álgebra generada por $\mathcal{C}$) como la más pequeña σ-álgebra que contiene a $\mathcal{C}$.*

Definición 24. *Decimos que el conjunto B es un boreliano, si pertenece a $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{G}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Definición 25. *Dada una clase de conjuntos $\mathcal{C}$, diremos que una medida exterior μ es $\mathcal{C}$-regular si para cada conjunto A, existe un $C \in \mathcal{C}$ tal que $A \subseteq C$ y $\mu(A) = \mu(C)$.*

El siguiente Teorema nos dice que $\mathcal{H}^s$ es $\mathcal{G}_\delta$-regular; y en particular Borel-regular.

Teorema 26. *Si E es un conjunto en $\mathbb{R}^n$, y $s > 0$, entonces existe un $B \in \mathcal{G}_\delta$ tal que $E \subseteq B$ y $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(B)$.*

Demostración. Para cada $\delta \in (0,1)$ tomemos un $\frac{\delta}{2}$-cubrimiento $(E_k)_k$ de E tal que

$$\sum_k |E_k|^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{2}} + \delta.$$

Sea A_k abierto tal que

$$E_k \subseteq A_k \text{ y } |A_k| \leq (1+\delta)|E_k| \tag{2.1}$$

Esto último se puede hacer, por ejemplo, tomando $A_k = \left\{x : \operatorname{dist}(x, E_k) < \frac{\delta}{2}|E_k|\right\}$ (el engordado del conjunto E_k en $\frac{\delta}{2}|E_k|$). Si tomamos $A = \bigcup_k A_k$ es un abierto que contiene a E, con $|A_k| \leq (1+\delta)\frac{\delta}{2} < 2\frac{\delta}{2} = \delta$, pues era $\delta \in (0,1)$. Así $(A_k)_k$ es un δ- cubrimiento de E, que por (2.1) cumple:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s(A) &\leq \sum_k |A_k|^s \\
&\leq (1+\delta)^s \sum_k |E_k|^s \\
&\leq (1+\delta)^s \left(\mathcal{H}^s_{\frac{\delta}{2}}(E) + \delta\right) \\
&\leq (1+\delta)^s \left(\mathcal{H}^s(E) + \delta\right)
\end{aligned}$$

Así vimos que para cada $\delta \in (0,1)$ hay un $A(\delta)$ abierto que contiene a E tal que

$$\mathcal{H}(A(\delta)) \leq (1+\delta)^s \left(\mathcal{H}^s(E) + \delta\right).$$

En particular, tomando por ejemplo $\delta_n = \frac{1}{2^n}$, tenemos un A_n abierto tal que contiene a E tal que

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2^n}}(A_n) \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^s \left(\mathcal{H}^s(E) + \frac{1}{2^n}\right). \tag{2.2}$$

Consideremos $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. B es un $\mathcal{G}_\delta$ que contiene a E. Además, por ser $B \subseteq A_n$, tenemos por (2.2) que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}^s_{\frac{1}{2^n}}(B) \leq \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^s \left(\mathcal{H}^s(E) + \frac{1}{2^n}\right).$$

Haciendo $n \to \infty$ obtenemos que

$$\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(E).$$

Como $E \subseteq B$ y $\mathcal{H}^s$ es una medida exterior, tenemos que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(B)$, y por lo tanto,

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(B).$$

$\square$

Definición 27. *Dos conjuntos A y B se dicen metricamente separados si la distancia entre ellos es positiva.*

Definición 28. *Una medida exterior μ de dice métrica si*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

para todos los conjuntos A y B que sean metricamente separados.

Proposición 29. *La medida exterior $\mathcal{H}^s$ en métrica.*

Demostración. Sean A y B conjuntos metricamente separados. Llamemos $d := \operatorname{dist}(A, B)$. Para cada $\delta \in \left(0, \frac{d}{3}\right)$ tenemos que los δ-cubrimientos de $A \cup B$ se corresponden con unir un δ-cubrimiento de A con un δ-cubrimiento de B. Con lo cual para cada $\delta \in \left(0, \frac{d}{3}\right)$ tenemos,

$$\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B).$$

Por lo tanto, haciendo δ tender a cero,

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

$\square$

Lema 30. *Sea μ una medida exterior que es métrica, y $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos con $A := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ y $dist(A_j, A \cap A^c_{j+1}) > 0$. Entonces,*

$$\mu(A) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Demostración. Es claro que $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$ existe (posiblemente igual a $+\infty$); ya que $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de conjuntos, y por lo tanto $(\mu(A_j))_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente. Por ser $A_j \subseteq A$ es $\mu(A_j) \leq \mu(A)$, y por lo tanto

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) \leq \mu(A).$$

Veamos la otra desigualdad. En el caso en que $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) = +\infty$ no hay nada que probar. Resta verlo para el caso $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) < +\infty$. Consideremos los conjuntos $B_1 := A_1$, $B_j := A_j \setminus A_{j-1}$ para $j \geq 2$. Si $j+2 \leq i$, se tiene $B_j \subseteq A_j$ y $B_i \subseteq A \setminus A_{i-1} \subseteq A \setminus A_{j+1}$, con lo cual B_i y B_j son metricamente separados, por lo que, por ser μ métrica:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{2k-1})$$

y

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu(B_{2k}).$$

Donde sus respectivas series convergen porque estamos trabajando en el caso en que $\lim_{j\to\infty} \mu(A_j) < +\infty$, donde $\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k}$ y $\bigcup_{k=1}^{m} B_{2k-1}$ están contenidos en A_{2m}. Con lo cual $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k)$ converge.

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) \\
&= \mu\left(A_j \cup \bigcup_{k\geq j+1}^{\infty} B_k\right) \\
&\leq \mu(A_j) + \sum_{k\geq j+1}^{\infty} \mu(B_k) \\
&\leq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i) + \sum_{k\geq j+1}^{\infty} \mu(B_k)
\end{aligned}$$

Y por ser la serie convergente, haciendo $j \to \infty$, resulta:

$$\mu(A) \leq \lim_{i\to\infty} \mu(A_i).$$

□

Definición 31. *Sea μ una medida exterior en un espacio X. Decimos que un conjunto $E \subseteq X$ satisface la condición de Carathéodory si*

$$\mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

O equivalentemente,

$$\mu(A) \geq \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c).$$

(Es equivalente, ya que la otra desigualdad se cumple trivialmente por ser μ una medida exterior).

Definición 32. *Decimos que un conjunto es medible si cumple la condición de Carathéodory.*

Definición 33. *Una medida en un conjunto X, sobre una sigma álgebra $\mathcal{F}$, es una función*

$$\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

tal que:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- *Si $E_1 \subseteq E_2$, $E_1 \in \mathcal{F}$, $E_2 \in \mathcal{F}$, entonces $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$ (monotonía)*
- *Si los conjuntos $E_k \in \mathcal{F}$ con $k \in \mathbb{N}$ son disjuntos, $\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\right) E_k = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(E_k)$ (sigma aditividad)*

Teorema 34. *Sea μ una medida exterior en X, y sea $\mathcal{M}$ la clase de subconjuntos de X que son medibles respecto de μ. Entonces $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y la restricción de μ a $\mathcal{M}$ define una medida sobre $\mathcal{M}$.*

Demostración. Es claro que $X \in \mathcal{M}$, y que si $E \in \mathcal{M}$ entonces $E^C \in \mathcal{M}$. Veamos ahora que la unión finita de conjuntos medibles, es medible: Basta ver que dados E_1, $E_2 \in \mathcal{M}$; vale que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$. Sea $A \subseteq X$ arbitrario; como E_1 es medible,

$$\mu(A) = \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^C).$$

Usando la medibilidad de E_2 para $A \cap E_1^C$, tenemos

$$\mu(A \cap E_1^C) = \mu(A \cap E_1^C \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^C \cap E_2^C),$$

por otro lado, como

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = [(A \cap E_1^C) \cap E_2] \cup (A \cap E_1),$$

entonces

$$\mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) \leq \mu((A \cap E_1^C) \cap E_2) + \mu(A \cap E_1),$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \mu(A \cap E_1) + \mu(A \cap E_1^C \cap E_2) + \mu(A \cap E_1^C \cap E_2^C)\\ &\geq \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(A \cap (E_1 \cup E_2)^C),\end{aligned}$$

Es decir, $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$.

Sea ahora $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, con $E_n \in \mathcal{M}$. Podemos suponer que los E_n son disjuntos, (pues si no consideraríamos $\tilde{E}_1 := E_1$, y para $n \geq 2$ $\tilde{E}_n := E_n \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{n-1}) = E_n \cap E_1^C \cap \cdots \cap E_{n-1}^C$). Sea para cada n natural, $F_n := \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $F_n \in \mathcal{M}$. Por inducción se probará que para todo $A \subseteq X$ vale que

$$\mu(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i).$$

Para $n = 1$ es claro. Supongamos que la proposición vale para n, y veamos que se cumple para $n+1$. Como $A \cap F_{n+1} \cap F_n = A \cap F_n$ y $A \cap F_{n+1} \cap F_n^C = A \cap E_{n+1}$, usando que F_n es medible con el conjunto $A \cap F_{n+1}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(A \cap F_{n+1}) &= \mu(A \cap F_{n+1} \cap F_n) + \mu(A \cap F_{n+1} \cap F_n^C)\\ &= \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap E_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap E_{n+1})\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \mu(A \cap E_i).\end{aligned}$$

Como μ es monótona, para todo n se cumple que:

$$\mu(A \cap E) \geq \mu(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i),$$

entonces

$$\mu(A \cap E) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n). \tag{2.3}$$

Y por la σ-subaditividad de μ, resulta que

$$\mu(A \cap E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n).$$

Además, para todo A y para todo n se cumple que

$$\mu(A) = \mu(A \cap F_n) + \mu(A \cap F_n^C) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A \cap E_i) + \mu(A \cap E^C),$$

y luego

$$\mu(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap E_n) + \mu(A \cap E^C) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^C).$$

De esta forma está demostrado que $E \in \mathcal{M}$, y si en (2.3) se toma $A = X$, se tiene además la σ-subaditividad para la restricción de μ a $\mathcal{M}$, quedando así demostrado el teorema.

□

Corolario 35. *Si consideramos la medida exterior de Hausdorff s-dimensional sobre los conjuntos que cumplen la condición de Carathéodory, resulta ser una medida.*

Teorema 36. *Si μ es una medida exterior que es métrica, tenemos que los conjuntos borelianos son μ-medibles.*

Demostración. Como los μ-medibles forman una sigma álgebra, y los borelianos son la más pequeña sigma álgebra que contiene a los cerrados, bastará ver que los cerrados son μ-medibles.
Sea F un conjunto cerrado, y A un conjunto cualquiera. Queremos ver que

$$\mu(A) = \mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^c).$$

Por ser μ medida exterior, es claro que $\mu(A) \leq \mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^c)$, asi que resta ver la otra desigualdad. Sea

$$A_j := \left\{ x \in A \cap F^c : \operatorname{dist}(F, x) > \frac{1}{j} \right\}.$$

Tenemos que $\operatorname{dist}(A \cap F, A_j) \geq \frac{1}{j}$, con lo cual para cada j, por ser μ métrica:

$$\mu(A \cap F) + \mu(A_j) = \mu\left((A \cap F) \cup A_j\right) \leq \mu(A) \tag{2.4}$$

La sucesión de conjuntos $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es creciente, y como F es cerrado

$$A \cap F^c = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j.$$

Pero como además

$$\operatorname{dist}(A_j, A \cap F^c \cap A^c_{j+1}) \geq \operatorname{dist}(A_j, A \cap A^c_{j+1}) \geq \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} > 0,$$

por el Lema 30, tenemos que

$$\mu(A \cap F^c) \leq \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

Con lo cual, por (2.4), se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(A \cap F) + \mu(A \cap F^c) &\leq \mu(A \cap F) + \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) \\ &= \lim_{j \to \infty} \mu\left((A \cap F) \cup A_j\right) \\ &\leq \mu(A). \end{aligned}$$

□

Corolario 37. *Los borelianos son $\mathcal{H}^s$-medibles.*

Demostración. Es claro por la Proposición 29 y el Teorema 36.

□

Teorema 38. *1. Si $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ y $t > s$, entonces $\mathcal{H}^t(E) = 0$*

2. Si $\mathcal{H}^t(E) > 0$ y $s < t$, entonces $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$

Demostración. 1. Si $(E_k)_k$ es un δ-cubrimiento de E, y $t > s$ tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t_\delta(E) &\leq \sum_k |E_k|^t \\ &= \sum_k |E_k|^s |E_k|^{t-s} \\ &\leq \delta^{t-s} \sum_k |E_k|^s. \end{aligned}$$

Tomando ínfimo sobre los δ-cubrimientos de E, tenemos

$$\mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s_\delta(E).$$

De lo cual, por ser $\mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$, resulta

$$0 \leq \mathcal{H}^t_\delta(E) \leq \delta^{t-s}\mathcal{H}^s(E).$$

Utilizando la hipótesis $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, hacemos δ tender a cero, obteniendo:

$$\mathcal{H}^t(E) = 0$$

2. Es equivalente a 1. Si $\mathcal{H}^t(E) > 0$ y $s < t$, utilizando el contrarrecíproco de 1, obtenemos que $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$

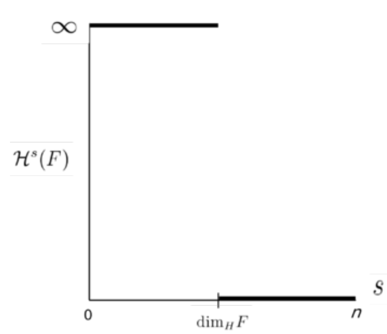
$\square$

Definición 39. *Se define la dimensión de Hausdorff como,*

$$\begin{aligned} \dim_H(E) &:= \sup\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\} \\ &= \inf\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} \end{aligned}$$

En la definición anterior, tomamos la convención de que $\sup(\emptyset) = 0$ y que $\inf(\emptyset) = +\infty$.

Notar que el Teorema anterior nos dice que tenemos una gráfica de la forma:



Observación 40. *La medida exterior de Hausdorff generaliza la idea de longitud, área y volumen. Al considerar $s = 0$, es la medida de contar puntos. Cuando tomamos $s = 1$ es la longitud, y para $s = n$ es proporcional a la medida de Lebesgue n-dimensional ([17], Teorema 11.16). Hay, sin embargo, muchos conjuntos irregulares que tienen dimensión de Hausdorff no entera.*

Observación 41. *Si $E \subseteq F$, tenemos que $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F)$. A esta propiedad se la conoce como monotonía de la dimensión de Hausdorff.*

Demostración. Por lo visto en la Proposición 19, sabemos que para cada $s > 0$ es $\mathcal{H}^s$ una medida exterior , por lo que es para cada $s > 0$ resulta $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$. Con lo cual

$$\{s > 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\} \subseteq \{s > 0 : \mathcal{H}^s(F) = +\infty\}.$$

Por lo que $\dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F)$.

□

Lema 42. *Sea $(F_k)_k$ una sucesión contable (finita o numerable) de conjuntos. Tenemos que:*

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_k F_k\right) = \sup_k \dim_{\mathcal{H}}(F_k).$$

A esta propiedad se la conoce como estabilidad contable de la dimensión de Hausdorff.

Demostración. Por la Observación 41, es

$$\dim_{\mathcal{H}}(F_k) \leq \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_n F_n\right) \text{ para cada } k.$$

Con lo cual, tomando supremo:

$$\sup_k \dim_{\mathcal{H}}(F_k) \leq \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_n F_n\right).$$

Veamos la otra desigualdad: Si $s > \sup_k \dim_{\mathcal{H}}(F_k)$, entonces $s > \dim_{\mathcal{H}}(F_k)$ para todo k; con lo cual tenemos que $\mathcal{H}^s(F_k) = 0$ para todo k. Por lo que, por ser

$$0 \leq \mathcal{H}^s\left(\bigcup_k F_k\right) \leq \sum_k \mathcal{H}^s(F_k) = \sum_k 0 = 0,$$

resulta

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_k F_k\right) = 0.$$

Por lo tanto,

$$\dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_k F_k\right) < s.$$

Haciendo $s \to \sup_k \dim_{\mathcal{H}}(F_k)$, tenemos

$$\sup_k \dim_{\mathcal{H}}(F_k) \geq \dim_{\mathcal{H}}\left(\bigcup_n F_n\right).$$

□

Veamos una generalización de la medida exterior de Hausdorff:

Definición 43. *Se define el espacio de funciones de dimensión como,*

$$H = \{h : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} : h(t) > 0 \text{ si } t > 0, h(0) = 0, \text{ continua a derecha y creciente}\}$$

Definición 44. *Dadas dos funciones $f, g \in H$, diremos que f es menor que g, y lo notamos: $f \prec g$, si $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.*

Observación 45. *$x^s \prec x^t$ si y solo si $s < t$.*

Definición 46. *Dadas dos funciones $f, g \in H$, diremos que f es equivalente a g, y lo notamos: $f \equiv g$, si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que*

$$0 < c_1 \leq \varliminf_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} \leq \varlimsup_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} < c_2 < \infty$$

Definición 47. *Un orden parcial en un conjunto X es una relación binaria $\mathcal{R}$ tal que:*

- *$a\mathcal{R}a$ para cualquier $a \in X$ (reflexividad)*
- *$a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$, entonces $a = b$ (antisimetría)*
- *$a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$, entonces $a\mathcal{R}c$ (transitividad)*

Observación 48. *H con la relación $\leq$, definida por $f \leq g$ si $f \prec g$ o $f \equiv g$; resulta ser un poset (conjunto parcialmente ordenado).*

Esta última observación puede verse, por ejemplo, en [13, Capítulo 2, sección 4].

Nota 49. *Definimos para cada G abierto y no vacío, $h(G) = h(|G|)$, y $h(\emptyset) = 0$*

Definición 50. *La medida exterior de Hausdorff asociada a h es*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h(E) &:= \sup_{\delta>0} \inf\{\sum_k h(C_k) : \{C_k\}_k \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento abierto de } E\} \\ &= \lim_{\delta\to 0} \inf\{\sum_k h(C_k) : \{C_k\}_k \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento abierto de } E\}.\end{aligned}$$

Nota 51. *Para simplificar notación llamaremos*

$$\mathcal{H}^h_\delta(E) := \inf\{\sum_k h(C_k) : \{C_k\}_k \text{ es un } \delta\text{-cubrimiento abierto de } E\}.$$

Observación 52. *$\mathcal{H}^h_\delta(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$ cualquiera sea $\delta > 0$.*

Observación 53. *De manera análoga a la demostración de que $\mathcal{H}^s$ es medida exterior, se demuestra que $\mathcal{H}^h$ es una medida exterior.*

Observación 54. *Cuando consideramos para cada $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ la función $h(x) := x^s$ como caso particular, tenemos según las definiciones anteriores que*

$$\mathcal{H}^h_\delta(E) = \mathcal{H}^s_\delta(E) \text{ para todo } \delta > 0;$$

con lo cual $\mathcal{H}^h(E) = \mathcal{H}^s(E)$.

Esto nos dice que considerar $\mathcal{H}^s$ sobre todos los $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ es un caso particular de $\mathcal{H}^h$ sobre todas las h funciones de dimensión. Con lo cual utilizar $\mathcal{H}^h$ sobre las h funciones de dimensión permite medir conjuntos de manera más fina.

Observación 55. *Si E es un conjunto, h y g son funciones de dimensión, con $h \prec g$; entonces $\mathcal{H}^g(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$.*

Demostración. Como $h \prec g$, es $\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$. Por lo cual para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta_0(\varepsilon) > 0$ tal que $0 \leq \frac{g(x)}{h(x)} \leq \varepsilon$ para $\delta \in (0, \delta_0(\varepsilon))$. En particular para $\varepsilon = 1$ vale que:

$$\text{existe } \delta_0 > 0 \text{ tal que si } x \in (0, \delta_0); \text{ entonces } 0 \leq g(x) \leq h(x).$$

Así, para cada $\delta \in (0, \delta_0)$ es

$$\sum_k g(|C_k|) \leq \sum_k h(|C_k|) \text{ para cada } \{C_k\} \ \delta\text{-cubrimiento de } E.$$

Además por ser para cada $\delta \in (0, \delta_0)$: $\mathcal{H}^g_\delta(E) \leq \sum_k g(C_k)$, resulta que $\mathcal{H}^g_\delta(E) \leq \sum_k h(C_k)$, y tomando ínfimo a derecha es

$$\mathcal{H}^g_\delta(E) \leq \mathcal{H}^h_\delta(E) \text{ para cada } \delta \in (0, \delta_0).$$

Por lo tanto, haciendo δ tender a cero, resulta

$$\mathcal{H}^g(E) \leq \mathcal{H}^h(E).$$

□

2.2. Teorema de densidad de Lebesgue

Definición 56. *Diremos que una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es localmente integrable, si es integrable sobre cualquier cubo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$.*

Nota 57. *Notaremos $\mathcal{Q} \searrow x$ al límite sobre los cubos $\mathcal{Q} \ni x$ con $|\mathcal{Q}| \to 0$*

Recordemos el Teorema de diferenciación de Lebesgue, ver por ejemplo [5, Teorema (8.3)]

Teorema 58 (Teorema de diferenciación de Lebesgue)**.** *Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$. Entonces los promedios*

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} |f(y) - f(x)|\, dy$$

tienden a cero cuando $\mathcal{Q} \searrow x$, para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

El siguiente Teorema se conoce como:

Teorema 59 (Teorema de densidad de Lebesgue (versión para cubos))**.** *Dado un conjunto medible Lebesgue $E \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que*

$$\lim \frac{\mathcal{L}(E \cap \mathcal{Q})}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} = \chi_E(x)$$

Donde el límite se toma sobre los cubos $\mathcal{Q} \searrow x$.

Demostración. Queremos ver que para casi todo x en $\mathbb{R}^n$ vale que

$$\lim_{\mathcal{Q}\searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} \chi_E(y)\, dy = \chi_E(x)$$

Pero como $f(y) := \chi_E(y)$ es una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue (Teorema 58), resulta que para casi todo $x \in \mathbb{R}^N$:

$$\lim_{\mathcal{Q}\searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} |\chi_E(y) - \chi_E(x)|\, dy = 0$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{\int_{\mathcal{Q}} \chi_E(y)\, dy}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} - \chi_E(x) \right| \\ &= \left| \frac{\int_{\mathcal{Q}} \chi_E(y)\, dy}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} - \frac{\int_{\mathcal{Q}} \chi_E(x)\, dy}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} |\chi_E(y) - \chi_E(x)|\, dy \end{aligned}$$

Tomando $\lim_{\mathcal{Q}\searrow x}$ tenemos que para casi todo x en $\mathbb{R}^n$:

$$\lim_{\mathcal{Q}\searrow x} \frac{1}{\mathcal{L}(\mathcal{Q})} \int_{\mathcal{Q}} \chi_E(y)\, dy = \chi_E(x)$$

□

2.3. Distribución de masa

En general tanto la medida exterior de Hausdorff como su dimensión, no suelen ser difíciles de acotar por arriba, debido a la naturaleza de las definiciones (para dar una cota superior es suficiente exhibir cubrimientos específicos). Pues para ver que $\mathcal{H}^s(E) \leq C$, basta ver que existe una sucesión de números positivos $\delta_n \to 0$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un δ_n-cubrimiento $\{U_i^{(n)}\}_i$ de E tal que $\sum_i |U_i^{(n)}|^s \leq C$. Pues así, $\mathcal{H}^s_{\delta_n}(E) \leq C$, y haciendo $n \to +\infty$, $\mathcal{H}^s(E) \leq C$. Y para ver que $\dim_H(E) \leq s$, basta ver que hay una sucesión decreciente $(t_n)_n$ convergente a s tal que $\mathcal{H}^t(E) \leq +\infty$.

Las cotas por debajo suelen ser más complicadas de obtener, ya que requieren un control sobre todos los cubrimientos del conjunto. Una herramienta muy útil para poder obtener cotas inferiores es el principio de distribución de masa y su generalización, que desarrollaremos a continuación.

Definición 60. *Dado un conjunto acotado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, una distribución de masa en E es una medida exterior μ con soporte en E tal que $0 < \mu(E) < \infty$.*

Proposición 61 (Principio de distribución de masa)**.** *Sea μ una distribución de masa en E. Sea $s > 0$ tal que existen $c > 0$ $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mu(U) \leq c|U|^s \quad \forall U \text{ con } |U| \leq \varepsilon.$$

Entonces,

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0$$

y por lo tanto, $\dim_H(E) \geq s$

Demostración. Sea $\delta \in (0, \varepsilon)$. Si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es δ-cubrimiento de E, entonces

$$0 < \mu(E) \leq \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(U_i) \leq c \sum_{i\in\mathbb{N}} |U_i|^s.$$

Tomando infimo sobre los δ-cubrimientos, se tiene

$$0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^s_\delta(E).$$

Y tomando el limite de $\delta \to 0$ tenemos

$$0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^s(E),$$

y por lo tanto

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq \mathcal{H}^s(E) \text{ y } \dim_H(E) \geq s.$$

□

Proposición 62 (Principio de distribución de masa generalizado)**.** *Sea μ una distribución de masa en E. Sea h una función de dimensión tal que existen $c > 0$, $\varepsilon > 0$ que satisfacen*

$$\mu(U) \leq ch(|U|) \quad \forall U \text{ con } |U| \leq \varepsilon.$$

Entonces,

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq \mathcal{H}^h(E).$$

Demostración. Sea $\delta \in (0,\varepsilon)$. Si $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es δ-cubrimiento de E, entonces

$$0 < \mu(E) \leq \mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(U_i) \leq c \sum_{i\in\mathbb{N}} h(U_i).$$

Tomando infimo sobre los δ-cubrimientos, se tiene

$$0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^h_\delta(E).$$

Y tomando el limite de $\delta \to 0$ tenemos $0 < \mu(E) \leq c\mathcal{H}^h(E)$, de lo cual concluimos

$$0 < \frac{\mu(E)}{c} \leq \mathcal{H}^h(E).$$

□

Observación 63. *Para el caso $E \subseteq \mathbb{R}$: Si en las hipótesis de los principios de distribución de masa suponíamos que los U son intervalos, entonces los conclusiones también son válidas. Esto sale haciendo análogamente las demostraciones de los principios de distribución de masa, y utilizando la Observación 20.*

Lema 64. *Sea $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números naturales mayores o iguales que 2. Supongamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene un conjunto cerrado E_k que es una unión de $m_1 \cdots m_k$ intervalos cerrados disjuntos, de forma tal que cada intervalo de E_k es una unión de m_{k+1} de los intervalos de E_{k+1}. Notemos en particular que $E_k \supset E_{k+1}$. Sea*

$$E := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k.$$

Definimos, para cada I^k intervalo de E_k, $\mu_0(I^k) := \frac{1}{m_1\cdots m_k}$. Entonces,

$$\mu(A) := \text{ínf}\left\{ \sum_j \mu_0(I_j) \ : \ \{I_j\}_j \textit{ es un cubrimiento de } A \right\}$$

es una medida exterior en E, tal que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1\cdots m_k}$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Durante la demostración, I^k denota cualquiera de los intervalos que componen E_k.

♣ Veamos que μ es una medida exterior en E.

- $\mu(\emptyset) = 0$ pues por ser I^k cubrimiento del conjunto vacío,

$$0 \leq \mu(\emptyset) \leq \mu_0(I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$$

Y como esto vale cualquiera sea $k \in \mathbb{N}$, haciendo $k \to \infty$ tenemos lo requerido.

- Sean $A \subseteq B$ subconjuntos de E, veamos que $\mu(A) \leq \mu(B)$. Como todo cubrimiento de B, es un cubrimiento de A, tenemos que

$$\begin{aligned}\mu(A) &:= \text{ínf}\left\{\sum_j \mu_0(I_j) \ : \ \{I_j\}_j \text{ es un cubrimiento de A}\right\} \\ &\leq \text{ínf}\left\{\sum_j \mu_0(I_j) \ : \ \{I_j\}_j \text{ es un cubrimiento de B}\right\} =: \mu(B).\end{aligned}$$

- Veamos que $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Sea cubrimiento $\{I_j\}_{j\in J}$ de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Como estamos considerando el ínfimo en la definición de μ, podemos suponer sin pérdida de generalidad que cada I_j interseca a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$; es decir, que cada I_j interseca a al menos un A_k. Así para cada $k \in \mathbb{N}$, A_k se cubre con $\{I_j\}_{j\in B_k}$, donde por la suposición anterior $\bigcup_{j\in J} B_j = J$. Entonces,

$$\mu(A) \leq \sum_{j\in J} \mu_0(I_j) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{j\in B_j} \mu_0(I_j).$$

Con lo cual, tomando ínfimo a derecha (sobre los cubrimientos de A_k),

$$\mu(A) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

♣ Sea $k \in \mathbb{N}$ e I^k un intervalo de E_k, veamos que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$.

- Por ser I^k un cubrimiento particular de $I^k \cap E$, tenemos que

$$\mu(I^k \cap E) \leq \mu_0(I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}.$$

Y cualquier cubrimiento que tenga algún intervalo de pasos anteriores a k daría un número mayor. Con lo cual, para estimar $\mu(I^k \cap E)$, nos interesa mirar cubrimientos cuyos intervalos sean del nivel k en adelante.

- Sea $\{I_j\}_j$ cubrimiento de $I^k \cap E$. Podemos suponer, por definición de μ, que todo intervalo del cubrimiento interseca a $I^k \cap E$.

  Podemos suponer también que el cubrimiento es finito. Pues como $I^k \cap E$ es un conjunto compacto, cubierto por $\{I_j\}_j$, donde para cualquier j es $E \cap I_j$ abierto en E; entonces existe un subcubrimiento finito: $I_1, \cdots, I_N$.

  Finalmente, podemos suponer que $I_1, \cdots, I_N$ son disjuntos. Pues si dos de los intervalos se intersecan, uno está contenido en el otro (por construcción), así que podríamos sacar el más pequeño del cubrimiento.

  Llamemos $k_1, \cdots, k_N$ a los niveles que pertenecen $I_1, \cdots, I_N$ respectivamente. Sea $K := \max\{k_1, \cdots, k_N\}$. Podemos hacer la siguiente reducción: El intervalo I_K está contenido en un único I^{K-1} intervalo de E_{K-1}. Si $K > k$, por ser K el máximo, y los intervalos que cubren I^k disjuntos; entonces todo intervalo del paso K que esté contenido en I^{K-1} debe estar en el cubrimiento finito. Por ser

  $$\sum_{I_j \subseteq I^{K-1}} \mu_0(I_j) = m_K \frac{1}{m_1 \cdots m_K} = \frac{1}{m_1 \cdots m_{K-1}} = \mu_0(I^{K-1}),$$

  podemos cambiar el cubrimiento finito que teníamos por uno con estrictamente menos elementos, reemplazando todos los $I_j \subseteq I^{K-1}$ por I^{K-1}. Iterando esto, llegamos en finitos pasos, a que el cubrimiento tomado era equivalente al cubrimiento $\{I^k\}$.

Así por los dos últimos items, tenemos que $\mu(E \cap I^k) = \frac{1}{m_1 \cdots m_k}$, como queríamos probar.

$\square$

Como aplicación del Principio de distribución de masa (Proposición 61), tenemos la siguiente:

Proposición 65. *Sea $(\delta_k)_k$ una sucesión decreciente de números positivos, convergentes a 0; y sea $(m_k)_k$ una sucesión de números naturales mayores o iguales que 2. Supongamos que $(E_k)_k$ es una sucesión de conjuntos compactos tales que se cumple lo siguiente:*

- $E_0 = [0, 1]$.
- *E_k es una unión de $m_1 \cdots m_k$ intervalos cerrados disjuntos separados por distancias de al menos δ_k.*

- *Cada uno de los intervalos que compone E_k contiene exactamente m_{k+1} de los intervalos que componen E_{k+1}.*

Llamando $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} E_k$, tenemos que

$$\dim_H(E) \geq \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k\delta_k)}.$$

Demostración. Si $\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1\dots m_{k-1})}{-\log(m_k\delta_k)} \leq 0$, como $\dim_H(E) \geq 0$, no hay nada que probar.

Si no, definimos una distribución de masa en E que a cada intervalo del paso k (hay $m_1 \dots m_k$ intervalos), le asigna masa $\frac{1}{m_1\dots m_k}$ (esto es posible por el Lema 64).

Dado un intervalo U con $0 \leq |U| \leq \delta_1$, estimemos $\mu(U)$:

Existe un único $k \geq 2$ tal que $\delta_k \leq |U| < \delta_{k-1}$ (pues $(\delta_k)_k$ decrece a cero y $0 < |U| < \delta_1$).

1. La cantidad de intervalos del nivel k que intersecan a U es a lo sumo m_k.
   Pues como $|U| < \delta_{k-1}$ entonces U interseca como mucho a un intervalo del paso $k-1$, luego U interseca como mucho a m_k intervalos del paso k.

2. La cantidad de intervalos del nivel k que intersecan U es como mucho $\frac{2|U|}{\delta_k}$.
   Pues como $\delta_k \leq |U|$ entonces $\frac{|U|}{\delta_k}+1 \leq 2\frac{|U|}{\delta_k}$. Como $|U|$ es mayor estricto que la cantidad de huecos que U interseca del paso k multiplicada por δ_k; $\frac{|U|}{\delta_k}$ >cantidad de huecos que U interseca del paso k; y por lo tanto la cantidad de intervalos que U interseca del paso k es menor o igual que $\frac{|U|}{\delta_k} + 1 \leq \frac{2|U|}{\delta_k}$.

Así de 1 y 2, tenemos que la cantidad de intervalos del paso k que intersecan a U es menor o igual que $\min\{m_k, \frac{2|U|}{\delta_k}\}$.

Como cada intervalo del nivel k tiene masa $\frac{1}{m_1\dots m_k}$; se tiene:

$$\begin{aligned}\mu(U) &\leq \frac{1}{m_1\dots m_k} \min\left\{m_k, \frac{2|U|}{\delta_k}\right\} \\ &\leq \frac{1}{m_1\dots m_k}\left(\frac{2|U|}{\delta_k}\right)^s m_k^{1-s} \qquad \forall s \in [0,1].\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier $s \in [0,1]$:

$$\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq \frac{1}{m_1 \dots m_k} m_k^{1-s} \left(\frac{2}{\delta_k}\right)^s = \frac{2^s}{m_1 \dots m_{k-1} m_k^s \delta_k^s} \tag{2.5}$$

Si $0 \leq s < \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}$, entonces existe un k_0 tal que

$$-s\log(m_k\delta_k) < \log(m_1 \dots m_{k-1}) \quad \forall k \geq k_0$$

De lo que se sigue:

$$\log\left(\frac{1}{(m_k\delta_k)^s}\right) < \log(m_1 \dots m_{k-1}) \quad \forall k \geq k_0$$

Y como el logaritmo es creciente:

$$\frac{1}{(m_k\delta_k)^s} < m_1 \dots m_{k-1} \quad \forall k \geq k_0$$

Con lo cual,

$$1 < m_1 \dots m_{k-1} m_k^s \delta_k^s \quad \forall k \geq k_0 \tag{2.6}$$

Veamos que en este caso es $s \leq 1$: Por ser $s < \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)}$, basta ver que $\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} < 1$. Como en el paso k hay $m_1 \cdots m_k$ intervalos separados por huecos de longitud $\geq \delta_k$, se tiene que $\delta_k(m_1 \cdots m_k - 1) \leq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow m_1 \cdots m_k &\leq \frac{1}{\delta_k} + 1 \\
\Rightarrow m_1 \cdots m_{k-1} &\leq \frac{1}{m_k}\left(\frac{1}{\delta_k} + 1\right) \\
\Rightarrow \log(m_1 \cdots m_{k-1}) &\leq \log\left(\frac{1}{m_k}\left(\frac{1}{\delta_k} + 1\right)\right) \\
&= -\log(m_k \frac{\delta_k}{1+\delta_k}).
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \delta_k)} = \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(m_k \frac{\delta_k}{1+\delta_k})} \leq 1.$$

Por ser $s \in [0,1]$ podemos utilizar (2.6), junto con (2.5), obteniendo que $\frac{\mu(U)}{|U|^s} \leq 2^s$, y así $\mu(U) \leq 2^s|U|^s$
Así, por el Principio de distribución de masa (Proposición 61), $\dim_H(E) \geq s$
Y como eso vale para todo $s < \underline{\lim}_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \ldots m_{k-1})}{-\log(m_k\delta_k)}$, tenemos lo requerido.

$\square$

Capítulo 3

Patrones infinitos y medida

3.1. Introducción

Definición 66. *$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice una homotecia si existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = ax + b$.*
Y se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ son homotéticos, si existe una homotecia T tal que $T(A) = B$

Definición 67. *$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se dice una similaridad si existe $a \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $\| T(x) - T(y) \| = a \| x - y \|$.*
Y se dice que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ son similares, si existe una similaridad T tal que $T(A) = B$

Lema 68. *En el caso $n = 1$ las definiciones de similaridad y homotecia coinciden. Toda homotecia es similaridad, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Veamos que toda homotecia es una similaridad: Sea T una homotecia. Existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tales que $T(x) = ax + b$. Entonces

$$\| T(x) - T(y) \| = \| a(x - y) \| = |a| \| x - y \| .$$

Así, T resulta una similaridad.

Veamos que cuando $n = 1$ toda similaridad es una homotecia: Sea T una similaridad. Existe un $c > 0$ tal que $\| T(x) - T(y) \| = c \| x - y \|$. Llamemos $b := T(0)$, y $\tilde{T}(x) := T(x) - b$. Se verifica que

$$\| \tilde{T}(x) - \tilde{T}(y) \| = \| T(x) - T(y) \| = c \| x - y \| .$$

Queremos ver que $\tilde{T}(x) = ax$ con $a > 0$. Como

$$\| \tilde{T}(x) \| = \| \tilde{T}(x) - \tilde{T}(0) \| = c \| x - 0 \| = c \| x \|,$$

entonces, usando que $n = 1$, tenemos que para cada x

$$\tilde{T}(x) = cx \text{ o } \tilde{T}(x) = -cx \text{ donde}$$

como $\tilde{T}$ es una similaridad, $\tilde{T}$ es contínua, y resulta que para $c > 0$ es $\tilde{T}(x) = cx$ para todo x o $\tilde{T}(x) = -cx$ para todo x o bien $\tilde{T}(x) = \pm c|x|$ para todo x. Pero este último caso no puede ser ya que no es una similaridad, pues sinó sería $0 = |\tilde{T}(x) - \tilde{T}(-x)| = 2c|x|$ para todo x, con lo cual $c = 0$, lo que es un absurdo. Así $\tilde{T}(x) = cx$ para todo x o $\tilde{T}(x) = -cx$ para todo x, como queríamos probar. □

Lema 69. *Si A y B son homotéticos, entonces tienen la misma dimensión de Hausdorff.*

Demostración. Por ser A y B homotéticos, hay una $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $T(x) = ax + b$ con $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(A) = B$. Notemos que

$$\{U_i\}_i \text{ es } \delta - \text{cubrimiento de } A \Leftrightarrow \{T(U_i)\}_i \text{ es } a\delta - \text{cubrimiento de B.}$$

Luego, para cada $s > 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^s_{a\delta}(B) &= \inf_{\{T(U_i)\}_i \ a\delta\text{-cubrim de B}} \sum_i |T(U_i)|^s \\
&= \inf_{\{U_i\}_i \ \delta\text{-cubrim de } A} \sum_i a^s |U_i|^s \\
&= a^s \mathcal{H}^s_\delta(A)
\end{aligned}$$

Así, haciendo $\delta \to 0^+$, por ser $a \neq 0$, es

$$\mathcal{H}^s(B) = a^s \mathcal{H}^s(A) \text{ para cada } s > 0.$$

Por lo cual, dado que $a \neq 0$, resulta

$$\{s > 0 : \mathcal{H}^s(B) = 0\} = \{s > 0 : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Y así, $\dim_{\mathcal{H}}(A) = \dim_{\mathcal{H}}(B)$.

□

Vimos en la introducción que una **conjetura de Erdös** dice que para cualquier conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$ existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ de medida de Lebesgue positiva que no contiene ninguna copia similar de A.

Se han realizado algunos avances parciales en la solución de este problema. En particular, Falconer [3] demuestra esta conjetura en el caso de que A está dado por una sucesión de números reales que no decae muy rápidamente. Por lo tanto se sabe que las sucesiones que decaen lentamente no son contraejemplos, pero casi nada se sabe acerca de sucesiones que convergen a 0 de forma al menos exponencial, como la sucesión $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Otro tipo de avance parcial fue obtenido por Kolountzakis [11], quien mostró que para cada conjunto infinito A, hay un conjunto E de medida positiva tal que $x + tA$ no está incluido en E para *casi todo* par (x, t) (la conjetura de Erdös requiere que esto se cumpla *para todo* para (x, t)). Lo veremos más adelante en este capítulo.

Para comenzar veamos que en caso de ser $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto *finito*, cualquier conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue positiva tiene copia homotética de A. Con lo cual, como ya mencionamos en la introducción es, por contrarrecíproco: Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que existe un $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida de Lebesgue positiva que no tiene copia homotética de A, entonces A es infinito. La conjetura de Erdös antes mencionada, es que vale el recíproco cuando $n = 1$.

Proposición 70. *Sean $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un medible Lebesgue, de medida positiva; y $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto finito.*
Entonces, existen $a \in \mathbb{R}_{\neq 0}, b \in \mathbb{R}^n$ tales que $aA + b \subseteq E$.

Para probar esta proposición, utilizaremos los siguientes lemas:

Lema 71. *Si $A_1, \cdots, A_m$ son subconjuntos de $[0, 1]^n$ tales que $\mathcal{L}(A_i) \geq 1-\varepsilon_i$; entonces $\mathcal{L}\left(\bigcap_{1\leq i\leq m} A_i\right) \geq 1 - \sum_{1\leq i\leq m} \varepsilon_i$.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
1-\mathcal{L}\left(\bigcap_{1\le i\le m} A_i\right) &= \mathcal{L}\left([0,1]^n \setminus \bigcap_{1\le i\le m} A_i\right)\\
&= \mathcal{L}\left(\bigcup_{1\le i\le m} ([0,1]^n \setminus A_i)\right)\\
&\le \sum_{1\le i\le m} \mathcal{L}([0,1]^n \setminus A_i)\\
&\le \sum_{1\le i\le m} \varepsilon_i.
\end{aligned}$$

□

Lema 72. *Si* $B \subseteq [0,1]^n$ *y* $\| v \| \le r$*, entonces*

$$\mathcal{L}\left((B-v)\cap[0,1]^n\right) \ge \mathcal{L}(B) - nr.$$

Demostración. Como $B-v = [(B-v)\cap[0,1]^n] \cup \left[(B-v)\cap([0,1]^n)^C\right]$, tomando medida de Lebesgue y despejando,

$$\mathcal{L}((B-v)\cap[0,1]^n) = \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}((B-v)\cap([0,1]^n)^C).$$

Utilizando que $B-v \subseteq [0,1]^n - v$, se tiene

$$\mathcal{L}((B-v)\cap[0,1]^n) \ge \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(([0,1]^n - v)\cap([0,1]^n)^C).$$

Y como $([0,1]^n - v)\cap([0,1]^n)^C$ se puede cubrir con n paralelepípedos donde cada uno de ellos tiene medida de Lebesgue n dimensional igual a r,

$$\mathcal{L}((B-v)\cap[0,1]^n) \ge \mathcal{L}(B) - nr.$$

□

Demostración de la Proposición 70. Como A es finito, $A = \{a_0, \ldots, a_m\}$, sea $R = \max_{0\le i\le m} \| a_i \|$. Por el Teorema de densidad de Lebesgue (Teorema 59), sabemos que para casi todo $x \in E$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}(E\cap Q_r(x))}{\mathcal{L}(Q_r(x))} = 1$$

donde $Q_r(x) = \prod_{i=1}^n [x_i - r, x_i + r]$

Entonces, existe un $r_0 > 0$ tal que $\frac{\mathcal{L}(E\cap Q_{r_0}(x))}{\mathcal{L}(Q_{r_0}(x))} > 1 - \frac{1}{10m}$
Podemos suponer que $Q_{r_0}(x) = \prod_{i=1}^n [0,1]$ (Pues si no trasladamos y reescalamos E).
Es suficiente mostrar que

$$\bigcap_{0\leq i\leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right) \neq \emptyset. \tag{3.1}$$

Pues así valdría que

$$\text{existe un } b \in \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right) \forall 0 \leq i \leq m.$$

Con lo cual sería

$$\text{existe un b, tal que } \frac{a_i}{10Rmn} + b \in E \text{ para todo } 0 \leq i \leq m.$$

Es decir,

$$A\frac{1}{10Rmn} + b \subseteq E,$$

como queríamos probar.

Para probar (3.1), basta ver que

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{0\leq i\leq m} \left(E - \frac{a_i}{10Rmn}\right)\right) > 0$$

Notemos que

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{1\leq i\leq m} (E - \frac{a_i}{10Rmn})\right) \geq \mathcal{L}\left(\bigcap_{1\leq i\leq m} \left((E\cap[0,1]^n - \frac{a_i}{10Rmn})\cap[0,1]^n\right)\right) \tag{3.2}$$

Por ser $\mathcal{L}(E\cap[0,1]^n) \geq 1 - \frac{1}{10m}$, y por ser $\frac{a_i}{10Rmn}$ un vector de norma menor o igual que $\frac{1}{10mn}$, resulta utilizando el Lema 72 que,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left((E\cap[0,1]^n - \frac{a_i}{10Rmn})\cap[0,1]^n\right) &\geq \mathcal{L}(E\cap[0,1]^n) - n\frac{1}{10mn}\\ &\geq 1 - \frac{1}{10m} - \frac{1}{10m}\\ &= 1 - \frac{1}{5m}.\end{aligned}$$

Utilizando lo recién visto junto con la Observación 71, tenemos de (3.2), que:

$$\mathcal{L}\left(\bigcap_{1\leq i\leq m}(E-\frac{a_i}{10Rmn})\right)\geq 1-m\frac{1}{5m}=\frac{4}{5}>0$$

□

La Proposición 70 dice que si un conjunto tiene medida Lebesgue positiva, entonces tiene copia homotética de cualquier conjunto finito. Tal vez incluso se pueda encontrar una condición más débil que tener medida positiva para implicar que contenga copia homotética de todos los conjuntos finitos. Esto último tiene sentido preguntárselo, ya que existe un conjunto con dimensión de Hausdorff 0, verificando esa propiedad (lo desarrollaremos en el siguiente capítulo).

Definición 73. *Diremos que un conjunto A de $\mathbb{R}^n$ es universal en medida si para todo $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con medida de Lebesgue positiva, se tiene que existen $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$ tales que $tA + x := \{ta + x : a \in A\} \subseteq E$. Es decir, si todo conjunto de medida positiva tiene copia homotética de A.*

Este último Teorema dice que cualquier conjunto finito de puntos es universal en medida. Recodemos que Erdös conjeturó que no existen conjuntos infinitos universales en medida.

3.2. Sucesiones que decaen lentamente

Veremos un resultado parcial a la conjetura de Erdös, debido a Falconer [3], en el que prueba la conjetura para el caso en que el conjunto A es una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ decreciente a cero, con cierto tipo de convergencia suave:

Teorema 74. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ una sucesión decreciente, convergente a 0, tal que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$. Entonces existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ cerrado con $\mathcal{L}(E) > 0$ tal que $\forall b \in \mathbb{R}\ \forall c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$ se tiene que $cx_n - b \notin E$ para infinitos $n \in \mathbb{N}$.*

Notar que en particular vale que: E no tiene copia similar de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Demostración. Queremos construir E de modo que para cada $b \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$, haya infinitos $n \in \mathbb{N}$ tales que $cx_n - b \notin E$.

Sean $\lambda_k \in (0,1)$.
Construimos E de la forma:

$$E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \text{ con } E_k = \bigcup_{r\in\mathbb{Z}} [rl_k, rl_k + l_k(1-\lambda_k)]$$

donde $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ será una sucesión de números reales positivos que elegiremos convenientemente más adelante.

- El conjunto E es cerrado.

  Los intevalos de E_k son disjuntos, pues como $\lambda_k > 0$ y $l_k > 0$ tenemos que

  $$\begin{aligned} rl_k + l_k(1-\lambda_k) &= rl_k + l_k - l_k\lambda_k < rl_k + l_k \\ &= (r+1)l_k \text{ para cada } r \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

  Así E_k es cerrado (por ser unión de intervalos disjuntos, de la misma longitud). Con lo cual, E es cerrado, por ser intersección de cerrados.

- Si pedimos que $l_k < 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k < \frac{1}{2}$ (por ejemplo, tomando $\lambda_k = \frac{1}{2^{k+1}}$), tenemos que $\mathcal{L}(E) > 0$.

  Pues:

  $$\begin{aligned} \mathcal{L}([0,1] \setminus E) &= \mathcal{L}\left([0,1] \setminus \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k\right) \\ &= \mathcal{L}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} ([0,1] \setminus E_k)\right) \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{L}([0,1] \setminus E_k) \end{aligned}$$

  La longitud de cada hueco de E_k es

  $$(r+1)l_k - [rl_k + l_k(1-\lambda_k)] = l_k - l_k(1-\lambda_k) = l_k\lambda_k.$$

  Además si $[rl_k, rl_k + l_k(1-\lambda_k)]$ interseca al $[0,1]$ entonces $0 \leq r$ y $rl_k \leq 1$, y esto es si y solo si $0 \leq r \leq \frac{1}{l_k}$. Lo que implica que la cantidad de intervalos de E_k que intersecan el $[0,1]$ es menor o igual que $\frac{1}{l_k}$, y por lo tanto la cantidad de huecos de E_k que intersecan el $[0,1]$ es menor o igual que $\frac{1}{l_k}+1$.

Por lo anterior resulta:

$$\mathcal{L}([0,1]\setminus E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k l_k \left(\frac{1}{l_k}+1\right)$$

Por ser $l_k(\frac{1}{l_k}+1) = 1 + l_k < 2$, resulta:

$$\mathcal{L}([0,1]\setminus E) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k 2 < 1$$

Entonces,

$$\mathcal{L}(E) \geq \mathcal{L}(E\cap[0,1]) = 1 - \mathcal{L}([0,1]\setminus E) > 0.$$

- Veamos que para cada $k \in \mathbb{N}$, hay un $j_0 = j_0(k)$ cumpliendo que

$$\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}\right].$$

Notemos que podemos suponer que la sucesión $(j_0(k))_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente estricta, ya que $\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}}$ decrece cuando $j_0(k)$ crece.

Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Como $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, se sigue que hay una subsucesión tal que $\lim_{j\to\infty} \frac{x_{n_j+1}}{x_{n_j}} = 1$. Por lo tanto dado que $\lambda_k > 0$, existe $j_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n_j+1}}{x_{n_j}} > 1 - \frac{\lambda_k}{2}$ para todo $j \geq j_0(k)$. De lo que, multiplicando por $\frac{2l_k}{x_{n_j+1}}$ tenemos:

$$\frac{2l_k}{x_{n_j}} > \frac{1}{x_{n_j+1}} l_k(2-\lambda_k) \text{ para todo } j \geq j_0(k). \tag{3.3}$$

Supongamos de momento que $b \in [0, l_k]$. Tenemos que:

$$\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_j+1}} = \frac{l_k(2-\lambda_k)+b}{x_{n_j+1}} - \frac{l_k}{x_{n_j+1}}.$$

Así por (3.3), tenemos que: $\forall j \geq j_0(k)$

$$\begin{aligned}
\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_j+1}} &< \frac{2l_k}{x_{n_j}} + \frac{b}{x_{n_j+1}} - \frac{l_k}{x_{n_j+1}} \\
&= \frac{l_k+b}{x_{n_j}} + (l_k-b)(\frac{1}{x_{n_j}} - \frac{1}{x_{n_j+1}}) \\
&\leq \frac{l_k+b}{x_{n_j}} \qquad (3.4)
\end{aligned}$$

ya que la sucesión $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es decreciente y positiva y $b \in [0, l_k]$.
Para cada $j \geq j_0(k)$, los intervalos

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) := \frac{1}{x_{n_j}}\,(l_k(1-\lambda_k)+b, l_k+b)$$

y

$$(\tilde{c}, \tilde{d}) := \frac{1}{x_{n_j+1}}\,(l_k(1-\lambda_k)+b, l_k+b)$$

se intersecan. Pues por ser la sucesión positiva y decreciente, y por (3.4),

$$\tilde{c} = \frac{1}{x_{n_j+1}}(l_k(1-\lambda_k)+b) < \frac{1}{x_{n_j}}(l_k+b) = \tilde{b} \leq \frac{1}{x_{n_j+1}}(l_k+b) := \tilde{d}$$

Veamos por absurdo que el intervalo $\left(\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}, +\infty\right)$ está en el complemento de $\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}}$. Supongamos que

$$y \in \left(\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}, +\infty\right) = \bigcup_{j\geq j_0(k)} \frac{1}{x_{n_j}}\,(l_k(1-\lambda_k)+b, l_k+b)\,,$$

tal que

$$y \in \bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}}$$

Existe entonces un $j_1 \geq j_0(k)$ tal que

$$y \in \frac{1}{x_{n_{j_1}}}\,(l_k(1-\lambda_k)+b, l_k+b)$$

y además se cumple que

$$x_{n_j}y - b \in E_k \text{ para todo } j \geq j_0(k).$$

En particular,

$$x_{n_{j_1}}y - b \in E_k \quad \text{y} \quad l_k(1-\lambda_k) < x_{n_{j_1}}y - b < l_k$$

Entonces existe un $r \in Z$ tal que

$$rl_k \leq x_{n_{j_1}}y - b < rl_k + l_k(1-\lambda_k)$$

y

$$l_k(1-\lambda_k) < x_{n_{j_1}}y - b < l_k$$

Entonces,

$$rl_k \leq x_{n_{j_1}}y - b < l_k$$

y

$$l_k(1-\lambda_k) < x_{n_{j_1}}y - b < rl_k + l_k(1-\lambda_k).$$

Así, por ser $rl_k \leq yx_{n_{j_1}} - b < l_k$ es $r < 0$, y por ser $l_k(1-\lambda_k) < yx_{n_{j_1}} - b \leq rl_k + l_k(1-\lambda_k)$ es $0 \leq r$;

se deduce $0 \leq r < 0$, lo que es un absurdo.

Analogamente el intervalo

$$\left(-\infty, -\left(\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0}}}\right)\right) = \bigcup_{j\geq j_0(k)} \frac{1}{x_{n_j}}\left(-(l_k+b), -(l_k(1-\lambda_k)+b)\right)$$

está incluido en el complemento de $\bigcap_{j\leq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}}$

Por lo tanto, por ser

$$\bigcap_{j\leq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left(-\infty, \frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}\right]$$

y

$$\bigcap_{j\leq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}, +\infty\right)$$

se deduce que:

$$\bigcap_{j\leq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}, \frac{l_k(1-\lambda_k)+b}{x_{n_{j_0(k)}}}.\right]$$

Este conjunto a su vez está contenido en $\left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}\right]$, ya que como $b \leq l_k$ y λ_k y l_k son positivos se tiene $l_k(1-\lambda_k)+b = l_k+b-l_k\lambda_k \leq 2l_k$.

Recordemos que hasta ahora asumimos que $b \in [0, l_k]$. En general, por periodicidad del conjunto E_k, tenemos que la contención

$$\bigcap_{j\leq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}\right]$$

vale para todo $b \in \mathbb{R}$.

Pues si para $b \in [0, l_k]$, para cualquier $j \geq j_0(k)$ vale que $\frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}\right]$. Entonces para $b \in [0, l_k]$, para cualquier $j \geq j_0(k)$ vale que $E_k + b \subseteq \left[-\frac{2l_k x_{n_j}}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k x_{n_j}}{x_{n_{j_0}}}\right]$. Si $\hat{b} \in \mathbb{R}$, podemos escribir $\hat{b} = rl_k + b$ con $r \in \mathbb{Z}$ y $b \in [0, l_k)$, y como E_k es l_k-periódico; tenemos que $E_k + \hat{b} = E_k + b \subseteq \left[-\frac{2l_k x_{n_j}}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k x_{n_j}}{x_{n_{j_0}}}\right]$ para cualquier $j \geq j_0(k)$.

Así vimos que: para cada k fijo, hay un $j_0 = j_0(k)$ cumpliendo que

$$\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_k+b}{x_{n_j}} \subseteq \left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}\right].$$

- Tomando $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que (además de ser positivos y menores que 1) se verifique que $\lim_{k\to\infty} \frac{l_k}{x_{n_{j_0(k)}}} = 0$, veamos que para cada k, hay un $j_0(k)$ cumpliendo que

$$\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E_+b}{x_{n_j}} \subseteq \{0\}.$$

Como supusimos que la sucesión $(j_0(k))_{k\in\mathbb{N}}$ es creciente estricta, para cada m, tenemos:

$$\begin{aligned}
\bigcap_{j\geq j_0(m)} \frac{E+b}{x_{n_j}} &= \bigcap_{j\geq j_0(m)} \frac{1}{x_{n_j}} \left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k + b \right) \\
&\subseteq \bigcap_{j\geq j_0(m)} \frac{1}{x_{n_j}} \left(\bigcap_{k\geq m} E_k + b \right) \\
&= \bigcap_{k\geq m} \bigcap_{j\geq j_0(m)} \frac{1}{x_{n_j}} (E_k + b)
\end{aligned}$$

que por ser $(j_0(m))_{m\in\mathbb{N}}$ creciente, está contenido en:

$$\bigcap_{k\geq m} \bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{1}{x_{n_j}} (E_k + b)$$

para cada $k \geq m$.

Quien, por el ítem anterior, está contenido en $\bigcap_{k\geq m} \left[-\frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}}, \frac{2l_k}{x_{n_{j_0}}} \right]$.

Y tomando $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de modo que (además de ser positivos) se verifique que $\lim_{k\to\infty} \frac{l_k}{x_{n_{j_0(k)}}} = 0$, tenemos que este último conjunto es $\{0\}$.

Vimos que para cada k fijo, hay un $j_0(k)$ cumpliendo que

$$\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E+b}{x_{n_j}} \subseteq \{0\}.$$

- Con lo visto hasta ahora, concluyamos la demostración: Por lo que vimos en el último ítem,

  para cada $c \neq 0$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ tenemos que $c \notin \displaystyle\bigcap_{j\geq j_0(k)} \frac{E+b}{x_{n_j}}$.

  Entonces $c \notin \frac{E+b}{x_{n_j}}$ para todo $j \geq j_0(1)$. Es decir, $cx_n - b \notin E$ para todo $j \geq$ Y por lo tanto, hay infinitos naturales N tales que $cx_N - b \notin E$.

$\square$

3.3. Un resultado de Kolountzakis

En este capítulo desarrollaremos un resultado parcial a la conjetura de Erdös, debido a Kolountzakis [11]: para cualquier conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$ existe un $E \subseteq [0,1]$ tal que $x + tA \subseteq E$ para *casi todo* par (x,t). Este resultado vale para cualquier conjunto infinto, pero dice que hay un conjunto que tiene "pocas" imágenes similares de A, lo que es más débil que la conjetura de Erdös (que dice no tener *ninguna* imagen similar de A). Es decir, Kolountzakis muestra para cualquier conjunto infinito A algo más débil que la conjetura; a diferencia del resultado de Falconer que la demuestra pero bajo una hipótesis muy fuerte para el conjunto A.

Teorema 75 (Kolountzakis)**.** *Para cada conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$, hay un conjunto $E \subseteq [0,1]$ de medida arbitrariamente cerca de 1; tal que $\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + tA \subseteq E\} = 0$.*

Demostración. En el caso en que A no es acotado, el teorema es trivial. Ya que si A no es acotado, $x + tA$ no es acotado para cualquier par $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0}$. Tomando $E = [0,1]$ que tiene medida 1, tenemos que $\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + tA \subseteq E\} = 0$.

Con lo cual, basta probar el teorema en el caso en que A acotado e infinito.

Hagamos algunas reducciones:

Si A es acotado e infinito, existen un $b \in \mathbb{R}$ y una sucesión monótona estricta $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a b.

- Podemos suponer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente estricta. Pues si no sería creciente estricta, con lo cual podemos trabajar con $-A$ que es infinito, acotado, y tiene una sucesión convergente decreciente estricta $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + tA \subseteq E\} &= \mathcal{L}\{(x,-t) \in \mathbb{R}^2 : x - tA \subseteq E\}\\ &= \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x - tA \subseteq E\}\\ &= \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + t(-A) \subseteq E\}.\end{aligned}$$

- Tenemos $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ decreciente, convergente a un b. Podemos suponer que $b = 0$, pues si no trabajamos con $A - b$ que es un conjunto infinito, acotado, que tiene una sucesión decreciente estricta convergente a 0, donde (utilizando la invariancia de la medida de Lebesgue bajo translaciones)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+t(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\} &= \int \mathcal{L}\{x\in\mathbb{R} : x+t(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\}\, dt\\ &= \int \mathcal{L}\{x\in\mathbb{R} : x+t(a_n-b)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\}\, dt\\ &= \mathcal{L}\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+t(a_n-b)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\}.\end{aligned}$$

- Si el teorema vale cuando A es una sucesión de términos positivos decrecientes a 0, veamos que el teorema vale para A infinito acotado que contiene una sucesión de términos positivos decrecientes a 0. Y así, por lo anterior, valdría para cualquier A infinito acotado.

  Como

  $$\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+tA\subseteq E\}\subseteq\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+t(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\};$$

  si el teorema vale para $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de términos positivos decrecientes a 0, tendríamos que hay un conjunto $E\subseteq[0,1]$ de medida arbitrariamente cerca de 1 tal que

  $$\mathcal{L}\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+t(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq E\}=0,$$

  con lo cual por monotonía de la medida de Lebesgue $\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+tA\subseteq E\}=0$.

Por lo anterior, tenemos que ver que: si A es una sucesión de términos positivos decrecientes a 0, hay un conjunto $E\subseteq[0,1]$ de medida arbitrariamente cerca de 1; tal que $\mathcal{L}\{(x,t)\in\mathbb{R}^2 : x+tA\subseteq E\}=0$.

Hagamos una última reducción:

- Podemos suponer que el parámetro t está restringido a un intervalo arbitrario $[\alpha,\beta]$ con $0<\alpha<\beta<\infty$.

  De forma análoga, puede demostrarse para intervalos $[\tilde{\alpha},\tilde{\beta}]$ con $-\infty<\tilde{\alpha}<\tilde{\beta}<0$. Y siendo válido para cuando el parámetro t está restringido a cada intervalo cerrado que no tiene el 0, podemos hacer la siguiente construcción, para cada $k\geq 3$:

  Para cada $n\in\mathbb{Z}$ existe

  $$E_n\subseteq[0,1] \text{ con } \mathcal{L}(E_n)\geq 1-2^{-|n|-k}$$

tal que

$$\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [2^n, 2^{n+1}] : x + tA \subseteq E_n\} = 0$$

y

$$\tilde{E}_n \subseteq [0,1] \text{ con } \mathcal{L}(\tilde{E}_n) \geq 1 - 2^{-|n|-k}$$

tal que

$$\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [-2^{n+1}, -2^n] : x + tA \subseteq \tilde{E}_n\} = 0.$$

Tomando $E := \bigcap_{n\in\mathbb{Z}}(E_n \cap \tilde{E}_n) \subseteq [0,1]$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(E) &= \lim_{N\to+\infty} \mathcal{L}\left(\bigcap_{-N\leq n\leq N} E_n \cap \tilde{E}_n\right) \\
&\geq \lim_{N\to+\infty} 1 - 2\sum_{-N\leq n\leq N} 2^{-|n|-k} \\
&= 1 - \frac{2}{2^k} \lim_{N\to+\infty} \sum_{-N\leq n\leq N} 2^{-|n|} \\
&= 1 - \frac{2}{2^k}\left(\sum_{0\leq n\leq+\infty} 2^{-|n|} + \sum_{1\leq n\leq+\infty} 2^{-|n|}\right) \\
&= 1 - \frac{2}{2^k}(2+1) \\
&= 1 - \frac{6}{2^k}.
\end{aligned}$$

La desigualdad anterior es válida pues: $E_n \subseteq [0,1]$ con $\mathcal{L}(E_n) \geq 1 - 2^{-|n|-k}$, $\tilde{E}_n \subseteq [0,1]$ con $\mathcal{L}(\tilde{E}_n) \geq 1 - 2^{-|n|-k}$, y el Lema 71.

Así, tomando k suficientemente grande, conseguimos $E \subseteq [0,1]$, de medida de Lebesgue arbitrariamente cerca de 1, tal que

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : x + tA \subseteq E\} \\
&= \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\neq 0} : x + tA \subseteq E\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [-2^{n+1}, -2^n] : x + tA \subseteq E\} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [2^n, 2^{n+1}] : x + tA \subseteq E\} \\
&\leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [-2^{n+1}, -2^n] : x + tA \subseteq \tilde{E}_n\} \\
&\qquad + \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [2^n, 2^{n+1}] : x + tA \subseteq E_n\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Así resta probar: Sea $A := (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente estricta, convergente a 0, sean $0 < \alpha < \beta < +\infty$, entonces existe un $E \subseteq [0,1]$ medible Lebesgue, de medida arbitrariamente cerca de 1, tal que $\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E\} = 0$.

Para cada $q \in (0,1)$ arbitrario, veremos que existe $E \subseteq [0,1]$ medible Lebesgue, que cumple simultaneamente $\mathcal{L}(E) \geq q$ y

$$\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E\} = 0.$$

Para esto, fijado $q \in (0,1)$, nos bastará ver que ciertos conjuntos $E \subseteq [0,1]$ construidos en forma aleatoria cumplen que la probabilidad de que $\mathcal{L}(E) \geq q$ es positiva, y que la probabilidad de que $\mathcal{L}\{(x,t) \in \mathbb{R} \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E\} = 0$ es 1. Pues así existirá uno verificando ambas propiedades.

La clase de conjuntos que consideraremos son conjuntos $E \subseteq [0,1]$ de tipo Cantor, construidos en forma aleatoria. Más precisamente, definimos $E := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j$, donde cada F_j será construido aleatoriamente de forma independiente. Recalcamos que los F_j no están necesariamente encajados.

Para cada $j \in \mathbb{N}$, fijaremos $m_j \in \mathbb{N}$ cualesquiera suficientemente grandes para que verifiquen que

$$\frac{1}{m_j} \leq \frac{\alpha}{2} \min_{1\leq i<k\leq j} \operatorname{dist}(a_i, a_k). \tag{3.5}$$

Tomaremos $p_j \in (0,1]$ de modo que

$$\prod_{j\in\mathbb{N}} p_j = q \text{ y } \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^j = 0. \tag{3.6}$$

Veamos que existe $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ verificando eso: Como

$$q \in (0,1)\ ,\ \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j = q \text{ y } \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^j = 0$$

es equivalente a

$$-\ln q > 0\ ,\ \sum_{j\in\mathbb{N}} -\ln p_j = -\ln q \text{ y } \sum_{j\in\mathbb{N}} j(-lnp_j) = -\infty.$$

Llamemos $a := -\ln q$ y $b_j := -\ln p_j \geq 0$. Basta ver que dado $a > 0$ existen $b_j \geq 0$ tales que

$$a = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_j \text{ y } +\infty = \sum_{j\in\mathbb{N}} jb_j.$$

Eligiendo, por ejemplo, $b_j = \frac{a}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}}\frac{1}{j^2}$; tenemos que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} b_j = \frac{a}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j^2} = a$$

y

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} jb_j = \frac{a}{\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{i^2}}\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j} = +\infty.$$

Para cada j fijo, con los m_j y p_j fijados, construyamos $F_j \subseteq [0,1]$ en forma aleatoria (y por lo tanto habremos construido E en forma aleatoria):

Particionamos $[0,1]$ en m_j subintervalos de igual longitud: $I_{j,k} := \left[\frac{k-1}{m_j}, \frac{k}{m_j}\right)$ si $1 \leq k < m_j$, y $I_{j,m_j} := \left[\frac{k-1}{m_j}, 1\right]$. Definiremos que cada uno de esos intervalos tenga probabilidad p_j de que lo elijamos (las elecciones de cada uno de los intervalos la hacemos en forma independiente); y el conjunto F_j será la unión de los intervalos elegidos del paso j.

Formalicemos esta idea. Fijados los m_k, p_j, $I_{j,k}$, para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos $\omega_j := (\omega_j^1, \cdots, \omega_j^{m_j})$ donde $\omega_j^k \sim \mathrm{Be}(p_j)$ (distribución Bernoulli con parámetro p_j) y las ω_j^k son independientes. Llamemos $\Omega_j := \{0,1\}^{m_j}$ y

$P_j(\omega_j^1, \cdots, \omega_j^{m_j}) = p_j^{\#\{k\ :m_j^k=1\}}(1-p_j)^{\#\{k\ :m_j^k=0\}}$. Tomemos $\Omega := \prod_{j\in\mathbb{N}}\Omega_j$, $P := \prod_{j\in\mathbb{N}} P_j$ y $\mathcal{B}$ los borelianos en el espacio producto. $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ es un espacio de probabilidad. Dados $\omega \in \Omega$ y $j \in \mathbb{N}$, tenemos definidos

$$F_j := F_j^\omega := \bigcup_{k\in\{k\ :\omega_j^k=1\}} I_{j,k}$$

y

$$E := E^\omega := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j^\omega.$$

Así hemos definido para cada $\omega \in \Omega$ un conjuntos de tipo Cantor E^ω.

Debemos ver que esta construcción cumple con lo requerido, esto es:

1) La probabilidad de que $\mathcal{L}(E^\omega) \geq q$ es positiva.

2) $\mathcal{L}\{(x,t) \in [0,1]\times[\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E^\omega\} = 0$ con probabilidad 1.

Veamos 1):

Fijado $x \in [0,1]$, vale que $P(x \in E^\omega) = q$, pues

$$\begin{aligned}
P\{x \in E^\omega\} &= P\{x \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j^\omega\} \\
&= \prod_{j\in\mathbb{N}} P\{x \in F_j^\omega\} && \text{por independencia} \\
&= \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j && \text{pues cada } x \text{ está en un único } I_{j,k} \\
&= q && \text{por (3.6).}
\end{aligned}$$

Por lo que, notando con $\mathcal{E}$ a la esperanza,

$$\begin{aligned}
q &= \int_0^1 q\ dx \\
&= \int_0^1 \int \chi_{E^\omega}(x)\ dP(\omega)\ dx \\
&= \int \int_0^1 \chi_{E^\omega}(x)\ dx\ dP(\omega) \\
&= \int \mathcal{L}(E^\omega)\ dP(\omega) \\
&= \mathcal{E}(\mathcal{L}(E^\omega)),
\end{aligned}$$

donde en la tercer desigualdad utilizamos el Teorema de Tonelli. Para poder utilizar Tonelli debemos justificar que la función $\chi_{E^\omega}(x)$ es medible; para esto veremos que el conjunto $\{(x,\omega) : x \in E^\omega\}$ es boreliano en $[0,1] \times \Omega$. Pero eso vale pues

$$\begin{aligned}\{(x,\omega) : x \in E^\omega := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} F_j^\omega\} &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \{(x,\omega) : x \in F_j^\omega\} \\ &= \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\le k\le m_j} (I_{j,k} \times \{\omega : \omega_j^k = 1\}\end{aligned}$$

que claramente es boreliano.

De lo de arriba podemos deducir que $\mathcal{L}(E^\omega) \geq q$ con probabilidad positiva. Veámoslo por absurdo. Si no, sería $P\{E^\omega : \mathcal{L}(E^\omega) \geq q\} = 0$

$$\Rightarrow 0 < q - \mathcal{L}(E^\omega) \text{ salvo un conjunto de probabilidad } 0$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0,\ \exists A \text{ de probabilidad positiva, tal que } \varepsilon < q - \mathcal{L}(E^\omega)\ \forall E \in A.$$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= q - \int \mathcal{L}(E^\omega)\ dP(\omega) \\ &= \int q - \mathcal{L}(E^\omega)\ dP(\omega) \\ &\geq \int_A q - \mathcal{L}(E^\omega)\ dP(\omega) \\ &\geq \varepsilon P(A) \\ &> 0, \end{aligned}$$

lo que es un absurdo.

Veamos 2):

Fijados $x \in [0,1]$ y $t \in [\alpha,\beta]$ veamos primero que $P(x + tA \subseteq E^\omega) = 0$.

Podemos asumir que $x + tA \subseteq [0,1]$, de otra manera $x + tA \nsubseteq E^\omega$ determinísticamente. Por ser $x + tA \subseteq [0,1]$, y tener particionado el $[0,1]$ en los intervalos $I_{j,k}$ con $1 \leq k \leq m_j$; cada uno de los números $x + ta_1, \cdots, x + ta_j$ está en alguno de esos intervalos. Más aún deben estar en distintos intervalos, pues

$$\begin{aligned}
\operatorname{long}(I_{j,k}) &= \frac{1}{m_j} \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \min_{1\leq i<k\leq j} \operatorname{dist}(a_i, a_k) && \text{por (3.5)} \\
&\leq \frac{t}{2} \min_{1\leq i<k\leq j} \operatorname{dist}(a_i, a_k) \\
&< \operatorname{dist}(ta_i, ta_k) \text{ para todo } 1 \leq i < k \leq j \\
&= \operatorname{dist}(x + ta_i, x + ta_k) \text{ para todo } 1 \leq i < k \leq j
\end{aligned}$$

Para que $x + tA \subseteq E^\omega$, es necesario que para cada $j \in \mathbb{N}$ todos los intervalos del paso j que contienen los números $x + ta_1, \cdots, x + ta_j$ sean elegidos. Pero como esos números están en exactamente j de esos intevalos que queremos elegir necesariamente, donde la probabilidad de que cada uno sea elegido es p_j; la probabilidad de elegir esos j intervalos es exactamente p_j^j. Por independencia y por como fueron elegidos los p_j en (3.6), la probabilidad de que eso ocurra en todos los pasos es igual a $\prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^j = 0$.

Así, fijados $x \in [0, 1]$ y $t \in [\alpha, \beta]$, tenemos que

$$P(\omega : x + tA \subseteq E^\omega) \leq \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^j = 0.$$

Concluyamos que $\mathcal{L}\{(x, t) \in [0, 1] \times [\alpha, \beta] : x + tA \subseteq E\} = 0$ con probabilidad 1:

Llamemos

$$\varphi(x, t, \omega) := \begin{cases} 1 & \text{si } x + tA \subseteq E^\omega \\ 0 & \text{si no} \end{cases} . \tag{3.7}$$

Dado que $P(\omega : x + tA \subseteq E^\omega) = 0$ para x, t fijos, usando nuevamente el

Teorema de Tonelli, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\int \mathcal{L}\{(x,t) \in [0,1] \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E^\omega\}\ dP(\omega) \\
&\qquad = \int \left(\int_0^1 \int_\alpha^\beta \varphi(x,t,\omega)\ dt\ dx \right)\ dP(\omega) \\
&\qquad = \int_0^1 \int_\alpha^\beta \int \varphi(x,t,\omega)\ dP\ dt\ dx \\
&\qquad = \int_0^1 \int_\alpha^\beta P(\omega : x + tA \subseteq E^\omega)\ dt\ dx \\
&\qquad = \int_0^1 \int_\alpha^\beta 0\ dt\ dx \\
&\qquad = 0,
\end{aligned}$$

donde pudimos aplicar Tonelli pues, recordando que $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
&\{(x,t,\omega) : x + tA \subseteq E^\omega\} \\
&\qquad = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{(x,t,\omega) : x + ta_n \subseteq E^\omega\} \\
&\qquad = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{1\le k\le m_j} (\{(x,t) : x + ta_n \in I_{j,k}\} \times \{\omega : \omega_j^k = 1\})
\end{aligned}$$

que es claramente boreliano.

Por la igualdad vista anteriormente y por ser $\mathcal{L}\{(x,t) \in [0,1] \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E^\omega\} \geq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{(x,t) \in [0,1] \times [\alpha,\beta] : x + tA \subseteq E\} = 0 \text{ con probabilidad 1.}$$

$\square$

Corolario 76. *Para cada conjunto infinito $A \subseteq \mathbb{R}$, hay un conjunto $E \subseteq [0,1]$ de medida positiva tal que $x + tA \subseteq E$ falla para casi todos los pares (x,t).*

Para finalizar este capítulo, mencionemos que de hecho Kolountzakis prueba un resultado más fuerte que el teorema anterior:

Teorema 77. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto infinito. Entonces existe $E \subseteq [0,1]$ con medida de Lebesgue arbitrariamente cerca de 1, tal que*

$$\mathcal{L}\{t : \exists x \text{ tal que } x + tA \subseteq E\} = 0.$$

Que este resultado implica el Teorema 75 se ve aplicando nuevamente el Teorema de Tonelli, esta vez a la función

$$\varphi(x,t) := \begin{cases} 1 & \text{si } x + tA \subseteq E \\ 0 & \text{si no} \end{cases} .$$

Capítulo 4

Patrones finitos y dimensión

4.1. Un conjunto de dimensión total sin progresiones

4.1.1. Una construcción de Keleti

A grandes rasgos en el trabajo de Keleti [10], se muestra que para cualquier colección contable de conjuntos de 3 puntos, hay un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, con dimensión de Hausdorff total, que no contiene copia similar de cualquiera de los conjuntos de 3 puntos dados.
Dado un conjunto contable de ternas de números reales ordenados:

$$T = \{(x_i, y_i, z_i) : x_i, y_i, z_i \in \mathbb{R}, x_i < y_i < z_i\}_i$$

con i en un conjunto finito de índices o $i \in \mathbb{N}$, definimos

$$A = \left\{ \frac{z_i - x_i}{z_i - y_i} : (x_i, y_i, z_i) \in T \right\}_i .$$

Este es el conjunto de las "proporciones" de las ternas de T.

El conjunto A es contable, pues T es contable. Además $A \subseteq (1, +\infty)$, pues $x_i < y_i < z_i$.

Teorema 78. *Para cualquier conjunto contable $A \subseteq (1, +\infty)$, existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto, con $\dim_H(E) = 1$ tal que si $x < y < z$ en E, se tiene $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.*

Antes de probar el teorema, veamos dos corolarios con sus respectivas demostraciones:

Corolario 79. *Para toda sucesión de subconjuntos de* $\mathbb{R}$*:* $B_1, B_2, \ldots$ *con* $\#B_i \geq 3$, *existe* $E \subseteq \mathbb{R}$ *compacto con* $\dim_H(E) = 1$*, que no contiene una copia similar de cualquiera de los* B_i*.*

Demostración. Si $\#B_i = 3\ \forall\ i \in \mathbb{N}$ sea

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \left(\left\{ \frac{z-x}{z-y} : x < y < z \text{ en } B_i \right\} \cup \left\{ \frac{z-x}{y-x} : x < y < z \text{ en } B_i \right\} \right),$$

que es un subconjunto de $(1, \infty)$. Entonces por el Teorema 78 existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene copia similar de cualquier B_i. Pues: Si E tuviera una copia similar de algún $B_{i_0} = \{x, y, z\}$ con $x < y < z$; entonces existen a no nulo y b tales que $ax + b, ay + b, az + b$ están en E. Con lo cual tenemos que en caso de ser $a > 0$ $ax + b < ay + b < az + b$ en E, o en caso de ser $a < 0$ tenemos $az + b < ay + b < ax + b$ en E. Por lo que (por lo que verifica el E del Teorema)

$$\frac{z-x}{z-y} = \frac{(az+b)-(ax+b)}{(az+b)-(ay+b)} \notin A$$

o bien

$$\frac{z-x}{y-x} = \frac{x-z}{x-y} = \frac{(ax+b)-(az+b)}{(ax+b)-(ay+b)} \notin A,$$

lo que en cualquier caso es un absurdo por como definimos A.

Veamos el caso general. Suponemos que $\#B_i \geq 3$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Tomando $\tilde{B}_i \subseteq B_i$ con $\#\tilde{B}_i = 3$, por el caso anterior existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene copia similar de cualquier $\tilde{B}_i$; y por lo tanto no contiene copia similar de cualquier B_i.

□

En particular, para cualquier colección contable de conjuntos de 3 puntos, hay un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, con dimensión de Hausdorff total, que no contiene copia similar de cualquiera de los conjuntos de 3 puntos dados. Más en particular, tomando la colección que tiene solo el elemento $\{1, 2, 3\}$, tenemos que existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que no contiene progresiones aritméticas.

Corolario 80. *Para cualquier $B \subseteq \mathbb{R}$ contable, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$, que interseca a toda copia similar de B en a lo sumo dos puntos.*

Demostración. Sea

$$A = \left\{ \frac{z-x}{z-y} : x < y < z \in B \right\} \cup \left\{ \frac{z-x}{y-x} : x < y < z \in B \right\} \subseteq (1, +\infty).$$

Como además A es contable, utilizando el Teorema 78, existe $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto con $\dim_H(E) = 1$,tal que

$$\frac{z-x}{z-y} \notin A \text{ y } \frac{z-x}{y-x} \notin A \text{ para cualquier terna } x < y < z \text{ en } E. \tag{4.1}$$

Si $\widetilde{B}$ es una copia similar cualquiera de B, entonces $\widetilde{B} = aB + b$ con a y b números reales donde a es no nulo. Veamos, por absurdo, que $\widetilde{B} \cap E$ tiene como mucho dos puntos: Supongamos que existen $x < y < z$ en $E \cap \widetilde{B}$

1. Si $a > 0$, tenemos $\frac{x-b}{a} < \frac{y-b}{a} < \frac{z-b}{a}$ en B; por lo tanto, por como definimos A, resulta:

   $$\frac{z-x}{z-y} = \frac{\frac{z-b}{a} - \frac{x-b}{a}}{\frac{z-b}{a} - \frac{y-b}{a}} \in A.$$

   Lo que es un absurdo por (4.1).

2. $a < 0$ tenemos $\frac{x-b}{a} > \frac{y-b}{a} > \frac{z-b}{a}$ en B; por lo tanto, por como definimos A, resulta:

   $$\frac{z-x}{y-x} = \frac{x-z}{x-y} = \frac{\frac{x-b}{a} - \frac{z-b}{a}}{\frac{x-b}{a} - \frac{y-b}{a}} \in A.$$

   Lo que es un absurdo por (4.1).

□

A continuación veremos la demostración del Teorema 78:

Demostración. Podemos pensar $A = \{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de modo que cada $a \in A$ se repita infinitas veces en la sucesión $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.
Pues como A es contable: si A es finito $A = \{a_1, \dots a_n\}$ podemos tomar una

sucesión de α como: $a_1, \dots a_n, a_1, \dots a_n, \dots$. Y en el caso que A sea numerable $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podemos tomar la sucesión como $a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4 \dots$.

Definimos:

$$\beta_k := \text{máx}\left\{6\alpha_k, \frac{6\alpha_k}{\alpha_k - 1}\right\}. \tag{4.2}$$

Notemos que

$$\beta_k \geq 6\alpha_k \geq 6 \quad \text{pues} \quad \alpha_k \in (1, +\infty).$$

Podemos tomar

$$(m_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}_{\geq 3} \text{ tal que } \lim_{k\to\infty} \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} = 0. \tag{4.3}$$

Por ejemplo, tomando

$$\begin{aligned}
&m_1 \geq 3 \text{ tal que } m_1 \geq (\beta_1\beta_2)^2\\
&m_2 \geq 3 \text{ tal que } m_2 \geq \beta_1\beta_2\beta_3^3\\
&m_3 \geq 3 \text{ tal que } m_3 \geq \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4^4\\
&\dots
\end{aligned}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned}
&m_1 \geq (\beta_1\beta_2)^2\\
&m_1m_2 \geq (\beta_1\beta_2\beta_3)^3\\
&m_1m_2m_3 \geq (\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4)^4\\
&\dots
\end{aligned}$$

con lo cual:

$$0 \leq \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} \leq \frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log((\beta_1 \dots \beta_k)^k)} = \frac{1}{k} \to 0.$$

Sea

$$\delta_k := \frac{1}{\beta_1 \dots \beta_k m_1 \dots m_k}. \tag{4.4}$$

♣ Construcción de E:

Por inducción definiremos $E_0 \supseteq E_1 \supseteq \dots$ de la siguiente manera: $E_0 = [0, 1]$.

Definimos E_1 como cualquier unión de m_1 intervalos cerrados de longitud δ_1 separados por huecos de longitud al menos δ_1, de forma que $E_1 \subseteq E_0$. Esto es posible porque $(2m_1-1)\delta_1 = \frac{2m_1-1}{\beta_1 m_1} \leq \frac{2m_1-1}{6m_1} \leq \frac{2}{6} \leq 1$.

Definiremos inductivamente los E_k, $k \geq 2$.

Cada E_k, será unión de $m_1 \cdots m_k$ intervalos cerrados de longitud δ_k, separados por huecos de longitud al menos δ_k, donde cada intervalo E_{k-1} contendrá exactamente m_k intervalos de E_k. Esto es posible ya que

$$(2m_k-1)\delta_k = \frac{2m_k-1}{\beta_k m_k}\delta_{k-1} \leq \frac{2m_k}{6m_k}\delta_{k-1} \leq \delta_{k-1}.$$

Llamaremos $I_1^k \dots I_{m_1\dots m_k}^k$ a los intervalos de E_k ordenados de izquierda a derecha (Estamos nombrándolos según su posición, si bien todavía no están fijados).

Sea

$$\Gamma := \left\{(I_a^k, I_b^k, I_c^k)/1 \leq a < b < c \leq m_1 \dots m_k,\ k \in \mathbb{N}\right\}$$

el conjunto de todas las ternas de intervalos de cada nivel de construcción ordenados de izquierda a derecha. Notemos que Γ es numerable.

Podemos tomar $\Gamma = \{(J_n, K_n, L_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$\text{si } n > 1 \text{ y } (J_n, K_n, L_n) = (I_a^k, K_b^k, L_c^k) \text{ entonces } n > k. \tag{4.5}$$

Es decir, que si $n > 1$ el término n-ésimo es una terna de intervalos de un paso de la construcción anterior a n. Y podemos hacer que además se verifique que

$$\forall a \in A \text{ y } \forall (J,K,L) \in \Gamma, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \alpha_n = a \text{ y } (J_n,K_n,L_n) = (J,K,L) \tag{4.6}$$

En efecto, podemos construir (J_n, K_n, L_n) de la siguiente manera:

Como $(\alpha_k)_k$ la construimos de modo que tome infinitas veces cada valor de A, para cada $a \in A$ tenemos la subsucesión $(\alpha_{k_m})_m$ de todos los que toman el valor a, y definimos $(J_{k_m}, K_{k_m}, L_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ que recorra todas las ternas de Γ, como lo hacía la sucesión que cumplía (4.5). De este modo se verifica lo pedido en (4.6) y se sigue cumpliendo (4.5).

Si tenemos definidos $E_1, \dots, E_{k-1}$ para $k \geq 2$, tenemos definido también

$$(J_k, K_k, L_k) = (I_a^{k'}, K_b^{k'}, L_c^{k'})$$

pues $k' < k$ (por (4.5))

Por como fueron elegidos, sabemos que cada intervalo de E_{k-1}, o bien está incluido en exactamente uno de los J_k, K_k, L_k, o bien es disjunto de $J_k \cup K_k \cup L_k$ (pues los intervalos de E_{k-1} son o bien del mismo nivel o bien de algún paso siguiente).

Para construir E_k, consideremos (J_k, K_k, L_k) que son intervalos de un mismo nivel, que como vimos es anterior a k.

Sea I intervalo de E_{k-1}. Consideramos los casos:

- $I \subseteq J_k$.

  Utilizando la definición de β_k dada en (4.2)

  $$\begin{aligned}\frac{\delta_{k-1}}{\delta_k 3\alpha_k} &= \frac{\beta_k m_k}{3\alpha_k} \\ &\geq \frac{6\alpha_k m_k}{3\alpha_k} = 2m_k\end{aligned}$$

  Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1},

  $$\operatorname{long}(I) = \delta_{k-1} \geq \delta_k 3\alpha_k 2m_k$$

  y por lo tanto I tiene al menos m_k puntos de la forma $\delta_k 3\alpha_k i$ con $i \in \mathbb{Z}$ y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

  $$\delta_k \left(3\alpha_k i + [0,1]\right) \text{ con } i \in \mathbb{Z}.$$

  La distancia entre dos de esos intervalos es

  $$\begin{aligned}3\alpha_k\delta_k i - (3\alpha_k\delta_k(i-1) + \delta_k) &= 3\alpha_k\delta_k - \delta_k \\ &\geq (3\alpha_k - 1)\delta_k \\ &> 2\delta_k \\ &> \delta_k\end{aligned}$$

  donde la anteúltima desigualdad vale porque $\alpha_k \in A \subseteq (1, +\infty)$. Por lo tanto tomamos a estos m_k intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I.

- $I \subseteq K_k$.

Dado que, por la definición de los δ_k dada en (4.4), y por como definimos β_k en (4.2) es $\beta_k \geq 6\alpha_k > 6$, resulta que

$$\frac{\delta_{k-1}}{3\delta_k} = \frac{m_k\beta_k}{3} \geq 2m_k.$$

Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1}, tenemos que

$$\mathrm{long}(I) = \delta_{k-1} \geq 3\delta_k 2m_k$$

y por lo tanto I tiene al menos m_k puntos de la forma $\delta_k 3j$ con $j \in \mathbb{Z}$, y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

$$\delta_k\,(3j + [0,1]) \text{ con } j \in \mathbb{Z}.$$

La distancia entre dos de esos intervalos es

$$\begin{aligned}\delta_k 3j - (\delta_k 3(j-1) + \delta_k) &= 2\delta_k \\ &> \delta_k.\end{aligned}$$

Tomamos estos m_k intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I.

- $I \subseteq L_k$.

  Por como definimos β_k en (4.2) es $\beta_k \geq \frac{6\alpha_k}{\alpha_k-1}$, y por como definimos los δ_k en (4.4), resulta entonces que

  $$\begin{aligned}\frac{\delta_{k-1}}{\frac{3\alpha_k\delta_k}{\alpha_k-1}} = \frac{\beta_k m_k}{\frac{3\alpha_k}{\alpha_k-1}} &= \frac{2\beta_k m_k}{\frac{6\alpha_k}{\alpha_k-1}} \\ &\geq \frac{2m_k\beta_k}{\beta_k} = 2m_k\end{aligned}$$

  Entonces, por ser I un intervalo de E_{k-1}, tenemos que

  $$\mathrm{long}(I) = \delta_{k-1} \geq \frac{\delta_k 3\alpha_k}{\alpha_k - 1} 2m_k$$

  y por lo tanto tiene al menos m_k puntos de la forma $\frac{3\alpha_k\delta_k}{\alpha_k-1}(l + \frac{1}{2}) + \delta_k$ con $l \in \mathbb{Z}$ y podemos elegir m_k intervalos en I como segmentos de la forma

  $$\delta_k \left(\frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1}\left(l + \frac{1}{2}\right) + [0,1]\right) \text{ con } l \in \mathbb{Z}.$$

Notar que a diferencia de los casos anteriores, introdujimos un factor $\frac{1}{2}$ sumando. Más adelante se verá que lo necesitaremos para cuando veamos que si $x < y < z$ en entonces $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.

La distancia entre dos de esos intervalos es

$$\begin{aligned}\delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1}\left(l + \frac{1}{2}\right) - \left(\delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1}\left(l - \frac{1}{2}\right) + \delta_k\right) &= \delta_k \frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} - \delta_k \\ &= \delta_k \left(\frac{3\alpha_k}{\alpha_k - 1} - 1\right) \\ &\geq 2\delta_k \\ &> \delta_k\end{aligned}$$

donde la anteúltima desigualdad vale porque $\frac{3x}{x-1} > 3$ si $x > 1$.

Tomamos a estos m_k intervalos como los intervalos del paso k contenidos en I.

- $I \cap (J_k \cup K_k \cup L_k) = \emptyset$.

  En este caso definimos m_k intervalos de longitud δ_k en I arbitrariamente de modo que queden separados por huecos de longitud al menos δ_k, y tomamos a estos intervalos como los intervalos de E_k contenidos en I.

Si comparamos la distancia entre subintervalos de E_k de los diferentes casos, tenemos por construcción de E_{k-1}, que deben distar más que $\delta_{k-1} \geq \delta_k$.

Así construimos E_k, que consiste en $m_1 \dots m_k$ intervalos de longitud δ_k, separados por huecos de al menos δ_k y cada intervalo de E_{k-1} contiene m_k intervalos de E_k.

Definimos $E := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$, que es compacto.

♣ Veamos que $\dim_H(E) = 1$.

Por ser $E \subseteq \mathbb{R}$, se tiene que $\dim_H(E) \leq 1$.

Por otra parte, por ser $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}_0} E_k$ donde $E_1 = [0,1] \supseteq E_2 \supseteq \dots$ construidos de modo que cada intervalo del paso $k-1$ tiene $m_k \geq 2$ intervalos del paso k, separados por agujeros de longitud al menos δ_k, donde $\delta_k > \delta_{k+1} > 0\ \forall k$, $\delta_k \to 0$, utilizando la Proposición 65 vista en los preliminares, tenemos que:

$$\dim_H(E) \geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{-\log(\delta_k m_k)}.$$

Por como elegimos los δ_k en (4.4), deducimos que

$$\begin{aligned}
\dim_H(E) &\geq \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{\log(\beta_1 \dots \beta_k m_1 \dots m_{k-1})} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log(m_1 \dots m_{k-1})}{\log(\beta_1 \dots \beta_k) + \log(m_1 \dots m_{k-1})} \\
&= \varliminf_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{\log(\beta_1 \dots \beta_k)}{\log(m_1 \dots m_{k-1})} + 1} \\
&= 1
\end{aligned}$$

donde la última igualdad vale por como elegimos $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en (4.3).

♣ Sean $x < y < z$ en E. Veamos, por absurdo, que $\frac{z-x}{z-y} \notin A$:

Supongamos que $x < y < z$ en E cumplen que $\frac{z-x}{z-y} \in A$. Como $\lim_{k\to\infty} \delta_k = 0$, donde δ_k es la longitud de cada intervalo de E_k, tenemos que existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que x, y, z están en distintos intervalos de E_k.

Así, por (4.6), para $a = \frac{z-x}{z-y}$ y (J, K, L) la terna de intervalos del nivel k en la que están x, y, z respectivamente; existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = \frac{z-x}{z-y}$, $x \in J_n$, $y \in K_n$, $z \in L_n$ (Es decir, $J = J_n$, $K = K_n$, $L = L_n$).

Por construcción de E_n, tenemos que existen $i, j, l \in \mathbb{Z}$ tales que

$$\begin{aligned}
&x \in \delta_n \left(3i\alpha_n + [0,1]\right), \\
&y \in \delta_n \left(3j + [0,1]\right), \\
&z \in \delta_n \left(\frac{3\alpha_n}{\alpha_n - 1}(l + \frac{1}{2}) + [0,1]\right).
\end{aligned}$$

Llamando

$$\begin{aligned}
X &:= 3i\alpha_n + [0,1] \\
Y &:= 3j + [0,1] \\
Z &:= \frac{3\alpha_n}{\alpha_n - 1}\left(l + \frac{1}{2}\right) + [0,1]
\end{aligned}$$

tenemos (por lo visto recién) que

$$\frac{x}{\delta_n} \in X,\ \frac{y}{\delta_n} \in Y,\ \frac{z}{\delta_n} \in Z.$$

Como $\alpha_n = \frac{z-x}{z-y}$, resulta $\alpha_n z - \alpha_n y = z - x$, por lo que $z(\alpha_n - 1) + x = \alpha_n y$. De ahí se sigue que

$$X + (\alpha_n - 1)Z \ni \frac{z}{\delta_n}(\alpha_n - 1) + \frac{x}{\delta_n} = \alpha_n \frac{y}{\delta_n} \in \alpha_n Y.$$

Por lo tanto,

$$(\alpha_n Y) \cap (X + (\alpha_n - 1)Z) \neq \emptyset. \tag{4.7}$$

Además,

$$\begin{aligned} X + (\alpha_n - 1)Z &= 3i\alpha_n + [0,1] + 3\alpha_n \left(l + \frac{1}{2}\right) + (\alpha_n - 1)[0,1] \\ &= 3\alpha_n(i+l) + \frac{3}{2}\alpha_n + [0,1] + [0, \alpha_n - 1] \\ &= 3\alpha_n(i+l) + \frac{3}{2}\alpha_n + [0, \alpha_n] \\ &= \alpha_n \left(3(i+l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]\right), \end{aligned}$$

y también

$$\alpha_n Y = \alpha_n(3j + [0,1]) \tag{4.8}$$

Reemplazando ambas en (4.7), tenemos que:

$$\emptyset \neq (\alpha_n Y) \cap (X + (\alpha_n - 1)Z) = (\alpha_n(3j + [0,1])) \cap \left(\alpha_n \left(3(i+l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]\right)\right),$$

con lo cual

$$\emptyset \neq (3j + [0,1]) \cap \left(3(i+l) + \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]\right) \text{ con } i, j, l \in \mathbb{Z},$$

lo que es un absurdo. (Pudimos llegar a un absurdo por introducir ese factor $\frac{1}{2}$ antes mencionado, para que quedaran disjuntos los conjuntos).

El absurdo provino de suponer que era $\frac{z-x}{z-y} \in A$, por lo cual resulta que $\frac{z-x}{z-y} \notin A$.

$\square$

4.1.2. Generalización de un caso particular del resultado de Keleti

El Teorema de Keleti muestra que dado un conjunto contable $A \subseteq \mathbb{R}$, existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$, de dimensión de Hausdorff 1, cuyas proporciones entre cualesquiera tres puntos del conjunto no están en A. Si bien el conjunto construido es de dimensión de Hausdorff lo más grande posible (por estar incluido en $\mathbb{R}$), vimos en los preliminares que hay una noción más general para "medir" conjuntos, esto es considerando las funciones de dimensión. Así resulta de nuestro interés encontrar funciones de dimensión h que verifiquen $x^a \prec h$ para todo $a \in (0,1)$, tales que $0 < \mathcal{H}^h(E)$. En el caso pararticular en que la sucesión de los α_k están contenidos en un intervalo (A^{-1}, A) con $1 < A < +\infty$, construiremos una función de dimensión con estas propiedades:

Proposición 81. *Para el caso en que existe $C > 1$ tal que $\frac{C}{C-1} \leq \alpha_k \leq C$ para todo k, existe una función de dimensión h (que daremos en forma explícita) que verifica $x^a \prec h$ para todo $a \in (0,1)$, tal que $0 < \mathcal{H}^h(E)$, donde $E \subseteq \mathbb{R}$ es el conjunto construido por Keleti.*

Demostración. Comencemos por recordar que tenemos: $A = \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, donde cada $a \in A$ se repite infinitas veces en la sucesión, $\beta_k = \text{máx}\left\{6\alpha_k, \frac{6\alpha_k}{\alpha_k-1}\right\}$, podíamos suponer $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ creciente, E_k consiste en $m_1 \dots m_k =: p_k$ intervalos de longitud $\delta_k := \frac{1}{p_k\beta_1\dots\beta_k}$ separados por huecos de longitud al menos δ_k. En este caso, tomamos $m_k = (6C)^{k+1}$, con lo que resulta $p_k = (6C)^{\frac{1}{2}k^2+\frac{3}{2}k}$.

Definimos una distribución de masa μ en $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k$ asignando a cada uno de los p_k intervalos de E_k una masa $\frac{1}{p_k}$ (esto es posible por el Lema 64).

Construyamos una función de dimensión de modo que $h(\delta_{k+1}) := \frac{1}{p_k}$, donde consideramos que $p_0 = 1$, interpolando mediante segmentos de rectas. Así $h : [0, \delta_1) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ con $h(0) = 0$, y

$$h(x) = \frac{\frac{1}{p_{k-1}} - \frac{1}{p_k}}{\delta_k - \delta_{k+1}}(x - \delta_{k+1}) + \frac{1}{p_k} \text{ para } x \in [\delta_{k+1}, \delta_k].$$

- Veamos que h es función de dimensión.

  Es claro que h es continua y que $h(0) = 0$.

Veamos que h es creciente. Para esto basta ver que $\frac{\frac{1}{p_{k-1}}-\frac{1}{p_k}}{\delta_k-\delta_{k+1}} > 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{1}{p_{k-1}}-\frac{1}{p_k}}{\delta_k-\delta_{k+1}} &= \frac{1-\frac{1}{m_k}}{\frac{1}{\beta_1\ldots\beta_k m_k}-\frac{1}{\beta_1\ldots\beta_{k+1}m_k m_{k+1}}}\\
&= \frac{\frac{m_k-1}{m_k}}{1-\frac{1}{\beta_{k+1}m_{k+1}}}\beta_1\ldots\beta_k m_k\\
&= \frac{m_k-1}{\beta_{k+1}m_{k+1}-1}\beta_{k+1}m_{k+1}\\
&> 0.
\end{aligned}$$

- Veamos que $0 < \mathcal{H}^h(E)$.

  Si I es un intervalo de longitud menor que δ_2, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $\delta_{k+1} \leq |I| < \delta_k$.

  Como $|I| < \delta_k$, y δ_k es la longitud de cada uno de los intervalos del paso k. Entonces, $\mu(I) \leq \frac{1}{p_k}$. Pero como además h es creciente, tenemos que $\mu(I) \leq \frac{1}{p_k} = h(\delta_{k+1}) \leq h(|I|)$.

  Así, utilizando el principio de distribución de masa generalizado (Proposición 62 que vimos en los preliminares), con $\varepsilon = \delta_2$, la h construida y $c = 1$; tenemos que $0 < \mathcal{H}^h(E)$ como queríamos probar.

- Veamos que $x^a \prec h$ para todo $a \in (0, 1)$.

  Sea $a \in (0, 1)$. Debemos ver que $\lim_{x\to 0^+} \frac{h(x)}{x^a} = 0$.

  Como la sucesión $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es decreciente y tiende a cero, para cada $x \in (0, \delta_1)$, existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [\delta_{k+1}, \delta_k)$. Y por ser h creciente y positiva, tenemos que $0 \leq \frac{h(x)}{x^a} \leq \frac{h(\delta_k)}{\delta_{k+1}^a}$, por lo que basta ver que $\lim_{k\to+\infty} \frac{h(\delta_k)}{\delta_{k+1}^a} = 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{h(\delta_k)}{\delta_{k+1}^a} &= \frac{(\beta_1\cdots\beta_{k+1}m_1\cdots m_{k+1})^a}{m_1\cdots m_{k-1}}\\
&= \frac{(\beta_1\cdots\beta_{k+1})^a m_k^a m_{k+1}^a}{(m_1\cdots m_{k-1})^{1-a}} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Se sigue de la hipótesis sobre los α_k que la sucesión (β_k) está acotada superiormente por $\beta := 6C$. Notemos que nuestra elección $m_k := \beta^{k+1}$ verifica todo lo pedido en la construcción de Keleti, pues

$$\frac{\log(\beta_1 \cdots \beta_k)}{\log(m_1 \cdots m_{k-1})} \leq \frac{\log(\beta^k)}{\log(p_{k-1})} = \frac{k}{\frac{1}{2}(k-1)^2 + \frac{3}{2}(k-1)} \to_{k\to\infty} 0.$$

Así, reemplazando y acotando en (4.9), tenemos

$$\begin{aligned}\frac{h(\delta_k)}{\delta_{k+1}^a} &\leq \beta^{a(\frac{k^2}{2}+\frac{7}{2}k+2)-(\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}-1)} \\ &= \beta^{k^2\frac{a-1}{2}+k\frac{7a-1}{2}+2a+1} \to_{k\to+\infty} 0.\end{aligned}$$

□

Como caso particular de este resultado, existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$ que no contiene progresiones aritméticas, y existe una función de dimensión h (definida explícitamente) que verifica $x^a \prec h$ para todo $a \in (0,1)$, tal que $0 < \mathcal{H}^h(E)$.

4.2. Un conjunto de dimensión 0 que contiene todos los patrones finitos

Veremos en esta sección que aún los conjuntos muy "chicos" pueden contener todos los patrones finitos (Más especificamente veremos que hay un conjunto de dimensión de Hausdorff 0 que tiene todos los patrones finitos). Esto contrasta con la construcción de Keleti (vista en la sección anterior) de conjunto "grande" (de dimensión de Hausdorff 1) que no tiene ninguna progresión de longitud 3 de un conjunto de ternas contables.

Más especificamente construiremos un conjunto compacto, con dimensión de Hausdorff 0, que tiene una copia similar de cualquier conjunto finito, siguiendo el trabajo [2].

Definición 82. *Sea $n \in \mathbb{N}$. Diremos que $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene la propiedad S_n si existe $\eta_n > 0$ tal que cualquier conjunto finito de n puntos $\{a_1, \cdots, a_n\}$ cuyo diámetro es menor que η_n; verifica que*

$$\bigcap_{j=1}^{n}(E + a_j) \neq \emptyset.$$

Definición 83. *Diremos que un $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene la propiedad S_∞ si tiene la propiedad S_n para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Lema 84. *Si $E \subseteq \mathbb{R}$ tiene la propiedad S_∞; entonces E tiene copia similar de cualquier conjunto finito.*

Demostración. Sea $B := \{b_1, \cdots, b_n\}$ un conjunto finito cualquiera. Queremos ver que E contiene una copia similar de B.

Para ese $n \in \mathbb{N}$ tenemos por la hipótesis que existe $\eta_n > 0$ tal que cualquier conjunto finito de n puntos $\{a_1, \cdots, a_n\}$ cuyo diámetro es menor que η_n; verifica que

$$\bigcap_{j=1}^{n}(E + a_j) \neq \emptyset.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $\operatorname{diam}(B) < \eta_n$ (pues si no multiplicamos cada elemento de B por una constante $c > 0$ suficientemente chica).

Por la hipótesis aplicada al B, tenemos que

$$\bigcap_{j=1}^{n}(E + b_j) \neq \emptyset.$$

Por lo cual existe un $b \in \bigcap_{j=1}^{n}(E + b_j)$, de lo que se sigue que

$$b - b_j \in E \text{ para todo } 1 \leq j \leq n.$$

Así, $b - B \subseteq E$ y por lo tanto E tiene una copia similar de B.

□

Gracias a este lema, para construir un conjunto E compacto con dimensión de Hausdorff 0 que tenga una copia similar de cualquier conjunto finito, nos bastará construir un conjunto E compacto con dimensión de Hausdorff 0 que verifique la propiedad S_∞.

Antes de contruir dicho conjunto, veamos una observación y una proposición que necesitaremos.

Lema 85. *Sean h una función de dimensión, $D \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{H}^h(D) = 0$, $T(x) := ax + b$ con $a \in (0, 1)$ y $b \in \mathbb{R}$. Entonces $\mathcal{H}^h(T(D)) = 0$.*

Demostración. Como $\{U_i\}_i$ es un δ-cubrimiento de D si y solo si $\{T(U_i)\}_i$ es un $a\delta$-cubrimiento de $T(D)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathcal{H}^h_{a\delta}(T(D)) &= \inf_{\{T(U_i)\}_i \text{ a}\delta\text{-cubrimiento de } T(D)} \sum_i h(T(U_i)) \\
&= \inf_{\{U_i\}_i\ \delta\text{-cubrimiento de } D} \sum_i h(a|U_i|) \\
&\leq \inf_{\{U_i\}_i\ \delta\text{-cubrimiento de } D} \sum_i h(U_i) \\
&= \mathcal{H}^h_\delta(D),
\end{aligned}$$

donde en la desigualdad utilizamos que h es creciente y $a \in (0,1)$, por lo que $h(a|U_i|) \leq h(|U_i|)$.

El lema se sigue haciendo $\delta \to 0$.

□

Proposición 86. *Si h es una función de dimensión, entonces existe una sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tal que:*

$$\delta_0 = 1 \quad y \quad \delta_n \leq \frac{1}{6}\delta_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{a\delta_{n-1}} + 1\right) h(a\delta_n) = 0 \text{ para todo } a \text{ racional positivo.} \tag{4.11}$$

Demostración. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una enumeración de todos las racionales positivos. Definamos $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ por inducción: Tomamos $\delta_0 = 1$. Una vez definidos $\delta_0, \cdots, \delta_{n-1}$, definimos δ_n como el más grande número positivo satisfaciendo simultáneamente las condiciones:

$$\delta_n \leq \frac{1}{6}\delta_{n-1}$$

y

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1\right) h(a_i\delta_n) < \frac{1}{n} \text{ para todo } 1 \leq i \leq n \tag{4.12}$$

Esto último se puede hacer, pues por ser h una función de dimensión, vale que $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$.

Por (4.12), para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1\right) h(a_i\delta_n) < \varepsilon \text{ si } 1 \leq i \leq n \text{ y } \frac{1}{n} \leq \varepsilon,$$

es decir

$$\left(\frac{6}{a_i\delta_{n-1}} + 1\right) h(a_i\delta_n) < \varepsilon \text{ si } \max\left\{i; \frac{1}{\varepsilon}\right\} \leq n. \tag{4.13}$$

Por lo cual, como para cada a racional positivo, existe un $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a = a_{i_0}$, por (4.13) tomando $i = i_0$, tenemos que: Para cada $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{6}{a_{i_0}\delta_{n-1}} + 1\right) h(a_{i_0}\delta_n) < \varepsilon \text{ para todo } n \geq \max\{i_0, \frac{1}{\varepsilon}\}.$$

Como lo anterior vale cualquiera sea ε positivo,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{a_{i_0}\delta_{n-1}} + 1\right) h(a_{i_0}\delta_n) = 0.$$

□

Teorema 87. *Fijada una función de dimensión h, existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, que tiene la propiedad S_∞.*

Demostración. Para la función de dimensión dada en el enunciado, tenemos por la Proposición 86 una sucesión $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ tal que:

$$\delta_0 = 1 \quad \text{y} \quad \delta_n \leq \frac{1}{6}\delta_{n-1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \tag{4.14}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{6}{a\delta_{n-1}} + 1\right) h(a\delta_n) = 0 \text{ para todo a racional positivo.} \tag{4.15}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, construimos F_n que consiste en unión de intervalos cerrados de longitud δ_n, separados por huecos de longitud $\frac{1}{6}\delta_{n-1}$, a lo largo de toda la recta real (Tomamos cualquiera que lo verifique. No nos va a importar si consideramos ese o cualquier trasladado). Para cada $i \in \mathbb{N}$ definimos

$$K_i = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} F_{(2k-1)2^{i-1}},$$

que es cerrado (por ser intersección de cerrados).

Sea $(\psi_r)_{r\in\mathbb{N}}$ una enumeración de todas las $\psi(x) := ax + b$ con a y b racionales, y $a \neq 0$.

♣ Si $\tilde{E} \subseteq \bigcup_{r\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \psi_r(K_i)$, veamos que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0$.

- Comencemos por probar que para cada $r \in \mathbb{N}$, para cada $i \in \mathbb{N}$, y cada intervalo I de longitud 1, vale que $\mathcal{H}^h(I \cap \psi_r(K_i)) = 0$.

  Por construcción, $\psi_r(F_n)$ consiste en intervalos de longitud $|a|\delta_n$ separados por huecos de longitud $\frac{1}{6}|a|\delta_{n-1}$ a lo largo de toda la recta real. Con lo cual, el conjunto $I \cap \psi_r(F_n)$ consiste en m intervalos $J_n^1, \cdots, J_n^m$ donde $m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1$ y cada intervalo tiene longitud menor o igual que $|a|\delta_n$.

  Veamos que $m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1$:

  Recordemos que en $\psi_r(F_n)$ la longitud de los intervalos es $\delta_n|a|$ y la longitud de los huecos es $\frac{1}{6}\delta_{n-1}|a|$. De lo que se deduce

  $$(m-2)\delta_n|a| + (m-1)\frac{\delta_{n-1}}{6}|a| \leq 1.$$

  Entonces

  $$m\left(\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1}|a|}{6}\right) \leq 1 + 2\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1}|a|}{6}.$$

  Por lo que

  $$\begin{aligned} m &\leq \frac{1+\delta_n|a|}{\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1}|a|}{6}} + \frac{\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1|a|}}{6}}{\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1|a|}}{6}} \\ &= \frac{1+\delta_n|a|}{\delta_n|a| + \frac{\delta_{n-1}|a|}{6}} + 1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

  En el caso en que $|a|\delta_{n-1} > 6$, la longitud de cada hueco $= \frac{1}{6}|a|\delta_{n-1} > 1$; y por lo tanto $m \leq 1$.

  Resta ver el caso $|a|\delta_{n-1} \leq 6$. En este caso,

  $$\frac{1+\delta_n|a|}{\delta_n|a| + \frac{|a|\delta_{n-1}}{6}} \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}}.$$

  Pues eso vale si y solo si

  $$(1+\delta_n|a|)|a|\delta_{n-1} \leq 6\delta_n|a| + |a|\delta_{n-1}.$$

  Si y solo si

  $$(1+\delta_n|a|)\delta_{n-1} \leq 6\delta_n + \delta_{n-1}.$$

Si y solo si

$$\delta_n|a|\delta_{n-1} \leq 6\delta_n.$$

Si y solo si

$$|a|\delta_{n-1} \leq 6,$$

y esto último es válido por lo supuesto en este caso.

Así, en cualquier caso, por lo recien visto y (4.16), resulta $m \leq \frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1$.

Por lo tanto, por ser $\{J_n^1, \cdots, J_n^m\}$ un cubrimiento particular de $I \cap \psi_r(F_n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^h_{|a|\delta_n}(I \cap \psi_r(F_n)) &\leq \sum_{1\leq j\leq m} h(|J_n^j|)\\ &\leq \left(\frac{6}{|a|\delta_{n-1}} + 1\right) h(|a|\delta_n)\end{aligned}$$

Y esto último tiende a cero cuando $n \to \infty$ por como tomamos δ_n en la Proposición 86.

- Concluyamos que $\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0$:

  Utilizando lo que probamos en el item anterior, tenemos que

  $$0 \leq \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}^h\left([k, k+1] \cap \psi_r(K_i)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} 0 = 0.$$

  Con lo cual

  $$0 = \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) \text{ para cada } r \in \mathbb{N} \text{ y para cada } i \in \mathbb{N}$$

  De lo que se sigue:

  $$0 \leq \mathcal{H}^h(\tilde{E}) \leq \sum_{r\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^h(\psi_r(K_i)) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} 0 = 0.$$

  Y así,

  $$\mathcal{H}^h(\tilde{E}) = 0.$$

♣ Para cada $n \geq 2$ construyamos D_n compacto, con la propiedad S_n, tal que $\mathcal{H}^h(D_n) = 0$.

Tomemos I un intervalo cerrado de longitud 2, y

$$D_n := \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i \right) \cap I.$$

Veamos que el D_n que elegimos, cumple con lo requerido.

- D_n es compacto (es cerrado por ser intersección de cerrados, y acotado por estar contenido en I).
- $\mathcal{H}^h(D_n) = 0$, pues

  $$D_n := \left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} K_i \right) \cap I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subseteq \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \psi_r(K_i)$$

  (la última inclusión vale porque la identidad es una ψ_r particular); con lo cual por el item anterior, $\mathcal{H}^h(D_n) = 0$.
- D_n tiene la propiedad S_n con $\eta_n = 1$, pues

  Si $\{a_1, \cdots, a_n\}$ es un conjunto cualquiera de n puntos, cuyo diámetro es menor que 1, por ser $D_n \supseteq K_s \cap I$ para todo $1 \leq s \leq n$ y definiendo $\varphi_{a_s}(x) := x + a_s$ resulta:

  $$\begin{aligned} \bigcap_{1 \leq s \leq n} \varphi_{a_s}(D_n) &\supseteq \bigcap_{1 \leq s \leq n} \varphi_{a_s}(K_s \cap I) \\ &= \left(\bigcap_{1 \leq s \leq n} \varphi_{a_s}(I) \right) \cap \left(\bigcap_{1 \leq s \leq n} \varphi_{a_s}(K_s) \right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

  Como I es un intervalo de longitud 2, el diámetro de $\{a_1, \cdots, a_n\}$ es menor que 1, y por como definimos φ_{a_s} ; resulta que $I_R := \bigcap_{1 \leq s \leq n} \varphi_{a_s}(I)$ es un intervalo de longitud mayor o igual que 1.

  Así, como cada $m \in \mathbb{N}$ puede escribirse en forma única como $m = (2k-1)2^{s-1}$ con $k \in \mathbb{N}$ y $s \in \mathbb{N}$, llamando $\lambda_m := \varphi_{a_s}$ y $F_m = F_{(2k-1)2^{s-1}}$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap_{1\le s\le n}\varphi_{a_s}(I)\right)\cap\left(\bigcap_{1\le s\le n}\varphi_{a_s}(K_s)\right)&\\
&= I_R\cap\left(\bigcap_{1\le s\le n}\varphi_{a_s}(K_s)\right)\\
&= I_R\cap\left(\bigcap_{1\le s\le n}\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\varphi_{a_s}(F_{(2k-1)2^{s-1}})\right)\\
&\supseteq I_R\cap\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m(F_m), \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Vale que

$$I_R\cap\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m(F_m)\right)\neq\emptyset, \qquad (4.19)$$

Veamoslo: Como $\delta_1 \le \frac{1}{6}\delta_0 = \frac{1}{6}$, I_R es un intervalo de longitud mayor o igual que 1, y como $\lambda_1(F_1)$ está formado por intervalos de longitud $\delta_1 \le \frac{1}{6}$ separados por huecos de longitud $\frac{1}{6}\delta_0 = \frac{1}{6}$; resulta que I_R contiene al menos un intervalo completo de $\lambda_1(F_1)$.

Como cada intervalo de $\lambda_{m-1}(F_{m-1})$ tiene longitud δ_{m-1}. Y como $\lambda_m(F_m)$ está formado por intervalos de longitud $\delta_m \le \frac{1}{6}\delta_{m-1}$, separados por huecos de longitud $\frac{1}{6}\delta_{m-1}$; resulta que cada intervalo de $\lambda_{m-1}(F_{m-1})$ contiene al menos un intervalo completo de $\lambda_m(F_m)$.

Así, vimos que I_R contiene al menos un intervalo completo de $\lambda_1(F_1)$, y para cada $m \ge 2$ cada intervalo de $\lambda_{m-1}(F_{m-1})$ contiene al menos un intervalo completo de $\lambda_m(F_m)$. Con lo cual tenemos un encaje de intervalos cerrados en $I_R \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m(F_m)\right)$, lo que nos muestra que $I_R \cap \left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}}\lambda_m(F_m)\right) \neq \emptyset$.

Así, juntando todo lo visto ((4.17), (4.18), (4.19)), tenemos que:

$$\bigcap_{1\le s\le n}\varphi_{a_s}(D_n)\neq\emptyset.$$

Como eso vale para cualquier conjunto $\{a_1,\cdots,a_n\}$ de n puntos, cuyo diámetro es menor que 1, hemos visto que D_n tiene la propiedad S_n.

♣ Construcción de E.

Por el ítem anterior, tenemos construido para cada $n \geq 2$ un conjunto compacto D_n, con la propiedad S_n, y con $\mathcal{H}^h(D_n) = 0$. Aplicando una transformación $T(x) := ax + b$ con $a \in (0,1)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad (por lo visto en el Lema 85), que

$$\begin{aligned} &D_2 \subseteq \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ &D_3 \subseteq \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ &D_4 \subseteq \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right) \\ &\ldots \end{aligned}$$

Tomemos

$$E := \bigcup_{n \geq 2} D_n \cup \{1\}$$

que es un conjunto compacto (por ser cerrado y acotado).

El conjunto E tiene la propiedad S_∞, pues: Para cada $n \in \mathbb{N}$, como D_n tiene la propiedad S_n y $D_n \subseteq E$, resulta que E tiene la propiedad S_n.

$\mathcal{H}^h(E) = 0$, pues: Es unión numerable de conjuntos D_n, cada uno de los cuales cumple que $\mathcal{H}^h(D_n) = 0$ para todo n, y $\mathcal{H}^h(\{1\}) = 0$. Dado que $\mathcal{H}^h$ es medida exterior:

$$0 \leq \mathcal{H}^h(E) \leq \mathcal{H}^h(\{1\}) + \sum_k \mathcal{H}^h(\{D_k\}) = 0 + \sum_k 0 = 0.$$

Y por lo tanto

$$\mathcal{H}^h(E) = 0.$$

□

Corolario 88. *Existe un conjunto compacto $E \subseteq \mathbb{R}$, con dimensión de Hausdorff 0, que tiene la propiedad S_∞.*

Demostración. Sea $h : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida así:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{-\ln(x)} & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\ln(2)} & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Basta ver que esa h es efectivamente una función de dimensión y que $h(x) \prec x^s$ para cualquier $s > 0$. Pues así, por el Teorema 87, tenemos que existe un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ compacto, con $\mathcal{H}^h(E) = 0$, que tiene la propiedad S_∞. Pero por ser $\mathcal{H}^h(E) = 0$, y $h(x) \prec x^s$ para cualquier $s > 0$, se sigue que la dimensión de Hausdorff de E es 0 (ya que $h(x) \prec x^s$ implica que $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^h(E)$ por lo visto en le Observación 55).

Veamos que h es función de dimensión: Si $x > 0$, $h(x) > 0$. Pues para $0 < x \leq \frac{1}{2}$: como el logaritmo es creciente estricta, $-\ln(x)$ es decreciente estricta y resulta $-\ln(x) > -\ln(\frac{1}{2}) = \ln(2) > 0$, y por lo tanto $\frac{1}{-\ln(x)} > 0$. Y para $x \geq \frac{1}{2}$, por ser $\ln(2) > 0$, resulta $h(x) > 0$.

Es continua a derecha, más aún, es contínua (por ser continua en cada tramo y pegarse bien en $x = \frac{1}{2}$).

La función h es creciente; pues en $[0, \frac{1}{2}]$ es creciente ya que $-\ln(x)$ es decreciente; y en $[\frac{1}{2}, +\infty)$ es constante.

Resta ver que si $s > 0$, resulta $h(x) \prec x^s$. Veámoslo:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^s}{h(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^s}{\frac{1}{-\ln(x)}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-\ln(x)}{x^{-s}}$$

donde este último límite, utilizando la Regla de L´Hopital generalizada, es claramente cero.

$\square$

Bibliografía

[1] Vincent Chan, Izabella Łaba, and Malabika Pramanik. Finite configurations in sparse sets. *Preprint*, 2013. Disponible en `http://arxiv.org/abs/1307.1174`.

[2] Roy O. Davies, J. M. Marstrand, and S. J. Taylor. On the intersections of transforms of linear sets. *Colloq. Math.*, 7:237–243, 1959/1960.

[3] K. J. Falconer. On a problem of Erdős on sequences and measurable sets. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 90(1):77–78, 1984.

[4] Kenneth Falconer. *Fractal geometry*. John Wiley & Sons Inc., Hoboken, NJ, second edition, 2003. Mathematical foundations and applications.

[5] Norberto Fava and Felipe Zo. *Medida e Integral de Lebesgue*. Red Olímpica, 1996.

[6] Harry Furstenberg. Ergodic behavior of diagonal measures and a theorem of Szemerédi on arithmetic progressions. *J. Analyse Math.*, 31:204–256, 1977.

[7] Ben Green and Terence Tao. The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. *Ann. of Math. (2)*, 167(2):481–547, 2008.

[8] Viktor Harangi, Tamás Keleti, Gergely Kiss, Péter Maga, András Máthé, Pertti Mattila, and Balázs Strenner. How large dimension guarantees a given angle? *Preprint*, 2013. Disponible en `http://arxiv.org/abs/1101.1426v2`.

[9] Imre Ruzsa y Carlos Vinuesa. Javier Cilleruelo. Generalized sidon sets. *Preprint*, 2010. Disponible en `http://arxiv.org/abs/0909.5024`.

[10] Tamás Keleti. Construction of one-dimensional subsets of the reals not containing similar copies of given patterns. *Anal. PDE*, 1(1):29–33, 2008.

[11] Mihail N. Kolountzakis. Infinite patterns that can be avoided by measure. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 29(4):415–424, 1997.

[12] Izabella Łaba and Malabika Pramanik. Arithmetic progressions in sets of fractional dimension. *Geom. Funct. Anal.*, 19(2):429–456, 2009.

[13] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of the 1970 original, With a foreword by K. J. Falconer.

[14] Klaus Roth. Sur quelques ensembles déntiers. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234:388–390, 1952.

[15] E. Szemerédi. On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.*, 27:199–245, 1975. Collection of articles in memory of Juriĭ Vladimirovič Linnik.

[16] B. L. van der Waerden. Beweis einer baudetschen vermutung. *Nieuw Arch. Wisk.*, (15):212–216, 1927.

[17] Richard L. Wheeden and Antoni Zygmund. *Measure and integral*. Marcel Dekker Inc., New York, 1977. An introduction to real analysis, Pure and Applied Mathematics, Vol. 43.