



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Problemas de Conjunto Dominante en Grafos

Verónica Moyano

Director: Min Chih Lin

Junio 2012

Agradecimientos

Gracias a Oscar por dirigir este trabajo de la mejor manera, con paciencia y confiando en mí, por el tiempo y las oportunidades que me ofrece.

A Gabriela y Willy, por tomarse el tiempo de leer y corregir esta tesis.

A la Universidad de Buenos Aires por las becas Sarmiento y a Jonathan B. por ser mi tutor en dicha beca.

A Flora y Patricia y toda la gente que forma parte de la Olimpiada Matemática Argentina, por despertar mi interés en la matemática entre problemas y amigos.

Gracias a mi familia por darme tanto cariño, la oportunidad de estudiar y los empujones necesarios para avanzar. A Rodrigo por bancarme en todo y por ser tan buena persona y hermano. A mi abu y a mi prima Eri. Los considero una bendición en mi vida. Querida familia este logro es también de ustedes.

A todos los amigos que conocí estos años de facultad y a los que me acompañan desde antes todavía, gracias por crecer conmigo, por cuidarme y por llenar mi vida de risas y momentos hermosos e inolvidables.

A Pau, Lucas y Xime: mis maestros en el arte del LaTeX. A Maggie, Cyn y Gaby por escucharme siempre y por sus consejos. A Fede, Martín, Marcos, Lucho, Romi y Pablo C., mis compañeros de últimos finales. Y porque junto con Pablo B, Charly, Christian, Maxi, Quimey, Pablo Z., Ema, Luli, Ceci, Carla y Flor hicieron que todo fuera mucho más divertido.

A Emi, Flor, Nadia, Julai, mi tía Nelly, Natu y las Cindys! porque a pesar de la distancia seguimos unidos desde Jujuy o cualquier otro lugar.

A Rochis, Santi, Marianita, Nico, Facu, Agos y los chicos de la comunidad, gracias por los abrazos y las avispidas.

A todos ¡Muchas Gracias!

Índice general

Introducción	5
1. Preliminares	7
1.1. Definiciones	7
1.2. Problemas de Conjunto Dominante	10
2. Cotas superiores en grafos generales	13
2.1. Cotas dependientes del orden y mínimo grado	13
2.2. Cotas con otros parámetros	17
2.3. Parámetros esenciales en la cota de Reed	20
2.3.1. Reducciones de grafos	20
2.3.2. Propiedades estructurales	24
2.3.3. Generalización de la cota de Reed	27
3. Producto de grafos	37
3.1. Tres productos fundamentales	37
3.1.1. Matrices de adyacencia de grafos producto	39
3.1.2. Proyecciones y distancia	40
3.2. Dominación en el producto directo de grafos	42
3.2.1. Cotas superiores para γ	42
3.2.2. Cotas inferiores para γ	46
3.3. Dominación en el producto Cartesiano de grafos	49
3.3.1. La conjetura de Vizing en subclases de grafos	50
3.3.2. La doble proyección	55
3.3.3. La clase \mathcal{X}	59
Bibliografía	67

Introducción

En Teoría de Grafos se estudian distintos problemas de cubrimiento, uno de los más clásicos es el problema de *conjunto dominante* que consiste en lo siguiente: dado un grafo $G = (V, E)$, encontrar un subconjunto de vértices $D \subseteq V$ de menor tamaño tal que cada vértice es vecino a algún vértice de D , o bien está en D . El número de dominación del grafo es el tamaño del conjunto D .

En 1979 Garey y Johnson [14] probaron que este problema es NP-Hard, es decir que hallar el conjunto D es difícil de tratar computacionalmente y no se conoce hasta la fecha ningún algoritmo que en tiempo polinomial pueda determinar si $\gamma(G)$ es menor o igual que cierto número k .

En consecuencia, se estudian y desarrollan diferentes cotas para $\gamma(G)$, las mismas pueden ser válidas para grafos en general o para grafos con cierta estructura, es decir que G pertenezca a una clase específica de grafos. Al establecer una cota, ya sea superior o inferior, una pregunta natural que surge es saber si existe algún grafo en donde se cumpla la igualdad, en tal caso se dice que la cota es *ajustada*. A lo largo de esta tesis, al establecer una cota de $\gamma(G)$ mencionaremos si se sabe que la cota es ajustada o no y en caso que lo sea mostraremos una familia de grafos en donde se cumpla la igualdad.

El objetivo de esta tesis es estudiar el problema de dominación de grafos en general y de grafos producto exponiendo los resultados más significativos de la bibliografía. Además, como aporte de nuestro trabajo, probaremos que una clase de grafos muy conocida, los llamados arco-circulares, satisfacen la conjetura de Vizing que trata sobre los productos Cartesianos. A continuación explicaremos brevemente la estructura de la tesis.

En el primer capítulo daremos las definiciones y notaciones que usaremos y discutiremos sobre la NP-Complejidad del problema.

En el segundo capítulo trataremos el problema de acotar $\gamma(G)$ para grafos en general y lo vincularemos con ciertos subgrafos inducidos. En 1962 Ore [35] probó que si todo vértice en G es extremo de al menos una arista, el número de dominación de un grafo es a lo sumo la mitad de la cantidad de vértices. Posteriormente McCuaig y Shepherd [29] en 1989 y Reed [38] en 1996 obtuvieron mejores cotas restringiendo la estructura de los grafos. A lo largo de este capítulo iremos determinando cuáles son las sub-estructuras de un grafo que fuerzan que el número de dominación sea alto. Esta estrategia empleada por Henning, Schiermeyer y Yeo en 2011 [19], permitió probar una cota que depende muy fuertemente de la estructura del grafo. Más específicamente, depende de la cantidad de los llamados bad-cut vértices y ciclos especiales que admite el grafo. Nuestro aporte aquí será presentar algoritmos eficientes que calculan esos parámetros.

En el tercer capítulo nos dedicaremos al problema de dominación en grafos que son el producto de otros grafos, donde la operación producto no está en principio bien definida. El producto entre G y H es un grafo que tiene por vértices al conjunto $V(G) \times V(H)$ y las aristas pueden ser definidas siguiendo distintas reglas.

En la primera sección del capítulo, definiremos tres tipos de productos de grafos y daremos además las notaciones y algunas propiedades que se desprenden de la estructura producto. Al tratar el problema de dominación es natural buscar una relación entre el número de dominación del producto y el número de dominación de los factores.

En la segunda sección trabajaremos con el producto directo de grafos y mostraremos las cotas ajustadas superiores e inferiores que se conocen. Brešar, Klavžar y Rall en su trabajo [6] del 2007 probaron que la cota superior ajustada es multiplicativa: $\gamma(G \times H) \leq 3\gamma(G)\gamma(H)$. Por su parte, G. Mekiš en [32] 2010 probó que la cota inferior depende linealmente del número de dominación de cada factor. Más precisamente $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) + \gamma(H) - 1$.

V.G. Vizing en 1963 [40] presentó un estudio de varias invariantes de grafos para el producto Cartesiano, entre ellas el número de dominación (llamado en ese entonces el coeficiente de estabilidad externa) y preguntó si el número de dominación del producto Cartesiano es al menos el producto de los números de dominación de cada factor. Se dice que un grafo G satisface la conjetura de Vizing si para todo grafo H se cumple que $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$. Esa afirmación, formulada en 1968 como conjetura, tuvo su primer avance importante en 1979 con el trabajo de Barcalkin y German [4] que determinaron una clase de grafos para los cuales vale la conjetura, los llamados BG-grafos. Hartnell y Rall [17] en 1995 definieron otra clase de grafos, \mathcal{X} , que satisfacen la conjetura. La clase \mathcal{X} contiene estrictamente a los BG-grafos. Sin embargo no hay una manera fácil o eficiente de decidir si un grafo pertenece o no a \mathcal{X} ni tampoco a la clase de los BG-grafos. En 2000, Clark y Suen [10] usaron un argumento similar al de [4] para conseguir una cota inferior multiplicativa para el número de dominación del producto Cartesiano: $\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2}\gamma(G)\gamma(H)$. En 2009 Aharoni y Szabó [2] probaron que los grafos cordales satisfacen la conjetura.

En la tercera sección nos dedicaremos al problema de dominación en el producto Cartesiano y en especial a la conjetura de Vizing, presentando las distintas estrategias que se desarrollan en la actualidad para encararla. Nuestro aporte aquí es dar una prueba alternativa de que los grafos de intervalo cumplen la conjetura de Vizing a través de un algoritmo lineal que simultáneamente construye un conjunto dominante mínimo y un packing máximo del mismo tamaño. También modificaremos el algoritmo anterior de manera eficiente para obtener un resultado parecido para grafos arco-circulares. Así probaremos la conjetura de Vizing para grafos arco-circulares.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Definiciones

Primero repasaremos algunas definiciones y notaciones que se usarán a lo largo del trabajo. Algunos términos particulares se dejaron en inglés debido a su amplia difusión en el ambiente.

Definición 1.1. Un *grafo* G es un par ordenado $G = (V(G), E(G))$ donde

- $V(G)$ es un conjunto finito de elementos que llamaremos *vértices* y
- $E(G) \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V(G), u \neq v\}$ es el conjunto de *aristas* del grafo. Por simplicidad, notaremos a una arista $e \in E$ como $e = (u, v)$.

El *orden* del grafo es $|V(G)| = n$ y el *tamaño* es $|E(G)| = m$, donde notamos entre $||$ a la cantidad de elementos del conjunto.

Dada una arista $e = (u, v)$ decimos que e *incide* en los vértices u y v y que los *extremos* de e son u y v . Dos vértices u, v son *adyacentes* o *vecinos* si $(u, v) \in E$. También suele notarse $u \sim v$ ya que los grafos se usan para modelar relaciones entre objetos.

Por eso, si G y H son grafos que modelan las mismas relaciones entre los vértices diremos que son grafos isomorfos. Más precisamente, un *isomorfismo* entre G y H es una función $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ biyectiva y tal que

$$u, v \text{ son adyacentes en } G \Leftrightarrow \varphi(u), \varphi(v) \text{ son adyacentes en } H .$$

Un *subgrafo* de G es un grafo H tal que $V(H) \subseteq V(G)$ y $E(H) \subseteq E(G)$.

Si además se cumple que $\forall u, v \in V(H), e = (u, v) \in E(G), \Rightarrow e \in E(H)$, decimos que H es un *subgrafo inducido* de G .

Observar que, fijados los vértices $V(H)$, hay un único subgrafo inducido. Notamos con $G[S]$ al subgrafo inducido por los vértices $S \subseteq V(G)$.

El *vecindario abierto* de un vértice $v \in V(G)$ se define como $N(v) = \{w \in V : (v, w) \in E\}$ y el *vecindario cerrado* se define como $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

El *grado* un vértice $v \in V$ es la cantidad de vecinos que tiene, es decir $deg_G(v) = |N(v)|$.

Definición 1.2. Decimos que un conjunto de vértices D *domina* a $T \subseteq V(G)$ si cada vértice de T cumple que está en D o bien tiene un vecino en D . Es decir, $T \subseteq \bigcup_{u \in D} N[u]$.

D es un *conjunto dominante* del grafo G si D domina a todos los vértices $V(G)$.

El *número de dominación* o *domination number* de G es el menor tamaño de un conjunto dominante de G y lo notamos con $\gamma(G)$.

Un γ -*set* de G es un conjunto dominante de tamaño mínimo. Es decir que D domina el grafo G y para cualquier otro conjunto dominante D' se verifica $|D| \leq |D'|$.

Existen otros tipos de dominación en grafos que surgen de modelar ciertos problemas (como veremos en la siguiente sección) o de las definiciones de otros invariantes de grafos. En el tercer capítulo usaremos el concepto de dominación total:

Un conjunto $S \subseteq V(G)$ *domina totalmente* a $T \subseteq V(G)$ si todo vértice de T tiene al menos un vecino en S . En otras palabras, $T \subseteq \bigcup_{u \in S} N(u)$.

Si S domina totalmente todos los vértices, se dice que es un *conjunto totalmente dominante* del grafo G . El *número de dominación total* o *total domination number* de G es el menor tamaño de un conjunto totalmente dominante y lo notamos con $\gamma_t(G)$. Un γ_t -*set* es un conjunto totalmente dominante de tamaño mínimo.

Notar que un conjunto totalmente dominante, en particular domina todo el grafo. En consecuencia, siempre se cumple que $\gamma(G) \leq \gamma_t(G)$. Por ejemplo en la Figura 1, $\gamma(P_6) = 2$ y $\gamma_t(P_6) = 4$.

Definición 1.3. Dados dos vértices $u, v \in V(G)$, un *camino en el grafo G* desde u hasta v es una sucesión de vértices $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ tales que $(u_i, u_{i+1}) \in E$ para todo $i = 1, \dots, k - 1$. Si los vértices del camino son todos distintos, se dice que el camino es *simple*.

La *longitud* de un camino es la cantidad de aristas que tiene, es decir $k - 1$.

Un *ciclo (ciclo simple)* es un camino donde $u_1 = u_k$ (y los vértices $\{u_1, \dots, u_{k-1}\}$ son distintos).

En general trabajaremos con caminos y ciclos simples, salvo que indiquemos lo contrario. Un ejemplo que usaremos más adelante es el siguiente. Notamos con P_n al grafo que consiste en un camino simple de n vértices (con $n \geq 2$) y C_n es el ciclo simple de n vértices (con $n \geq 3$). En estos casos se tiene que $\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. Un γ -set se consigue seleccionando los vértices como indica la Figura 1.

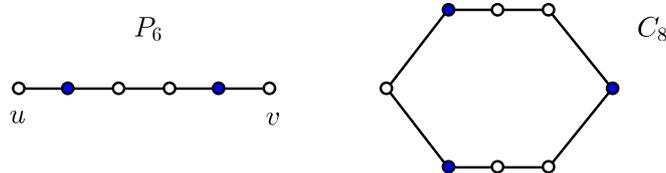


Figura 1: Conjuntos dominantes mínimos en ciclos y caminos.

Un grafo G es *conexo* si para todo par de vértices, existe un camino en G entre ellos. En caso contrario, G es *disconexo*.

Si para cualquier par $u, v \in V(G)$ existen k caminos disjuntos que los unen, se dice que G es k -*conexo*. Por ejemplo, un ciclo es un grafo 2-conexo.

La *distancia en el grafo* G entre u y v es la menor longitud de un camino entre u y v (si tal camino no existe consideramos que la distancia es infinita). Notamos con $d_G(u, v)$ a la distancia y suprimiremos el subíndice G si no hay ambigüedad en el grafo.

Un *conjunto independiente* en G es un conjunto $I \subseteq V(G)$ tal que los vértices en I no son adyacentes entre sí. Un *conjunto independiente maximal* es un conjunto independiente tal que para cualquier vértice $u \in V(G) \setminus I$, el conjunto $I \cup \{u\}$ no es independiente.

Definición 1.4. Un conjunto de vértices A es un *packing* de G si los vértices en A tienen vecindarios cerrados disjuntos, es decir $u, v \in A \Rightarrow N[u] \cap N[v] = \emptyset$.

Notar que esto es equivalente a pedir que la distancia entre dos vértices de A sea por lo menos 3.

El *packing number* de G es el mayor tamaño de un packing $A \subseteq V(G)$ y lo notamos con $\rho(G)$.

Observación 1.5. Una observación importante es que ρ es siempre una cota inferior para γ . Porque si A es un packing y D un conjunto dominante de G , en particular D domina a los vértices A entonces $N[a] \cap D \neq \emptyset$ para todo $a \in A$. Y como los vecindarios cerrados son disjuntos, $|A| \leq |D|$.

Cuando A es máximo packing y D mínimo conjunto dominante, se tiene

$$\rho(G) = |A| \leq |D| = \gamma(G).$$

Ilustramos estas definiciones en la siguiente figura.

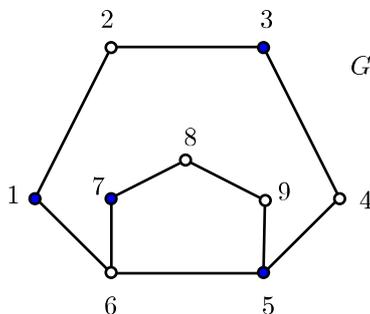


Figura 2: Conjunto dominante en un grafo.

El conjunto $S = \{1, 3, 5, 7\}$ es un conjunto dominante de G y es minimal en el sentido que si le suprimimos un vértice, deja de ser un conjunto dominante. Pero S no es un γ -set. En cambio $D = \{2, 5, 7\}$ es un γ -set porque es conjunto dominante, $|D| = 3$ y no existe ningún conjunto dominante de tamaño 2. Una forma de ver esto es observar que los vértices 1, 4 y 8 forman un packing. Entonces se necesitan por lo menos 3 vértices para dominar el grafo.

Definición 1.6. Dado un grafo $G = (V, E)$ llamamos $\delta(G)$ al mínimo grado entre los vértices de G . Es decir $\delta(G) = \min\{deg(v), v \in V\}$.

Si todos los vértices en G tienen el mismo grado, decimos que G es *regular*.

Un vértice u es *aislado* si no tiene vecinos, o sea si $deg_G(u) = 0$.

Una *hoja* de G es un vértice u con $deg_G(u) = 1$.

Por ejemplo, en la Figura 2, tenemos $\delta(G) = 2$. Y en la Figura 1, C_n es un grafo regular (*2-regular* porque todo vértice tiene grado igual a 2); y los vértices u y v son las hojas de P_n .

Definición 1.7. Un *matching* en un grafo $G = (V, E)$ es un conjunto de aristas $\mathcal{M} \subseteq E$ que no tienen extremos en común.

Un *matching máximo* es un matching con la mayor cantidad posible de aristas. Es decir, para cualquier otro matching \mathcal{M}' se cumple $|\mathcal{M}'| \leq |\mathcal{M}|$.

Un *matching perfecto* es un matching tal que todo vértice es extremo de una de las aristas de \mathcal{M} .

Notar que un matching perfecto es máximo. Pero no vale la recíproca.

1.2. Problemas de Conjunto Dominante

En cualquier grafo el conjunto $V(G)$ domina a G , por lo tanto es interesante preguntar cuál es la mínima cantidad de vértices que se necesitan para dominar al grafo. Dependiendo del problema a tratar se usan distintos tipos de dominación.

Ejemplo 1.8. Supongamos que en un tablero de ajedrez queremos poner algunas damas de manera que todas las casillas estén amenazadas por al menos una de ellas y queremos usar la menor cantidad posible de damas. ¿Cuántas damas son necesarias? y ¿cómo hay que ubicarlas?

Se puede plantear este ejemplo como un problema de conjunto dominante. Para ello consideramos el grafo donde los vértices representan las casillas de un tablero de ajedrez y dos vértices son adyacentes si una dama ubicada en la casilla u amenaza la casilla v . Un conjunto dominante mínimo D nos dice dónde hay que ubicar las damas en el tablero para amenazar a todas las casillas. Si además queremos que las damas se amenacen entre sí, D debe ser un conjunto totalmente dominante.

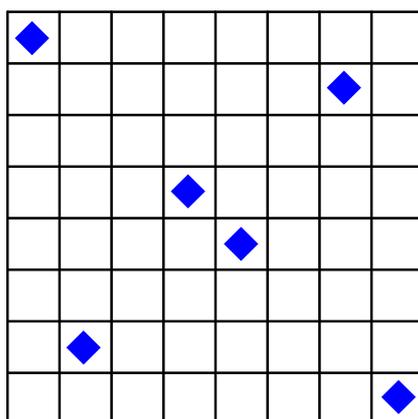


Figura 3: Posiciones de 6 damas que dominan «totalmente» el tablero. También es posible ubicar 5 damas que dominen todo el tablero.

En Teoría de Complejidad se clasifican los problemas a tratar y también se estudia qué tan «fácil» o «rápido» se pueden resolver. Los problemas de optimización consisten en hallar la mejor respuesta dentro de un conjunto de posibles soluciones, según una función objetivo que se busca maximizar o minimizar. Los problemas de decisión consisten en determinar si una afirmación es verdadera o falsa. Para los problemas de decisión, un certificado positivo es alguna información relacionada con los datos de entrada que permitiría deducir que la respuesta es *SI*. Análogamente, un certificado negativo permitiría deducir que la respuesta es *NO*.

Dado un grafo $G = (V, E)$ el problema de optimización del conjunto dominante consiste en hallar $D \subseteq V$ un conjunto dominante de tamaño mínimo. El problema de decisión asociado consiste en, dado k determinar si $\gamma(G) \leq k$. Un certificado positivo para este problema puede ser un conjunto $A \subseteq V(G)$ tal que A domina el grafo G y $|A| \leq k$.

La complejidad de un problema se define a partir de los algoritmos que lo resuelven.

La clase de problemas P son aquellos para los cuales existe un algoritmo que los resuelve en tiempo polinomial (respecto del tamaño de los datos de entrada).

Definiremos los problemas NP^1 según el concepto de algoritmos de verificación de la siguiente manera. Un problema está en la clase NP si existe un algoritmo tal que, dada una instancia del problema en que la respuesta sea *SI* y una posible respuesta o certificado positivo, en tiempo polinomial verifica que la respuesta es correcta.

Un problema de decisión es NP-Completo si está en NP y cualquier otro problema de NP se reduce (en tiempo polinomial) a él. Los problemas NP-Hard son aquellos problemas de decisión tales que cualquier problema NP se reduce (en tiempo polinomial) a él. Para problemas de optimización, decimos que son NP, NP-completos, NP-Hard, etc. si el problema de decisión asociado es de ese tipo.

Se sabe que el problema de decisión del conjunto dominante es NP-Completo. Esto fue probado por D. Johnson en [14] donde muestra que el problema es NP y se puede reducir a este problema el problema SAT, del cual se conoce que es NP-Completo.

Una forma de tratar un problema en Teoría de Grafos es restringir nuestro análisis a grafos que cumplen cierta propiedad. Pues podría pasar que el problema para esa clase sea más «fácil» de resolver, en el sentido de la complejidad computacional. El problema del Conjunto Dominante es NP-Completo incluso si nos restringimos a las siguientes clases de grafos:

- bipartito [11]
- cordal (todo ciclo de longitud ≥ 4 tiene una cuerda) [7] (y también para la subclase: split) [5]
- círculo (grafo intersección de cuerdas de un círculo) [24]
- grilla [9]
- planar (y también para la subclase: planar, de grado mínimo 3 y bipartito) [14]

¹Los problemas de la clase NP son aquellos para los que existe un algoritmo de una Máquina de Turing No Determinística que los resuelve en tiempo polinomial.

En principio, trabajar con grafos que cumplen cierta propiedad podría llegar a dar resultados que son solamente parciales. Sin embargo puede probarse que el problema de conjunto dominante en grafos generales puede reducirse al problema de conjunto dominante en grafos bipartitos de la siguiente manera.

Observación 1.9. Dado un grafo $G = (V, E)$, *subdividir* una arista $e = (u, v)$ en 4 pedazos consiste en quitar la arista e y agregar en su lugar un camino de longitud 4.

El grafo G' que obtenemos tiene $|V(G')| = |V(G)| + 3$ y $|E(G')| = |E(G)| + 3$. Veremos en el Capítulo 2 que además cumple $\gamma(G') = \gamma(G) + 1$. (Observación 2.19)

Si en un grafo cualquiera G (de n vértices y m aristas) subdividimos cada arista en 4, obtenemos un grafo G' (de $n + 3m$ vértices y $4m$ aristas) que resulta ser bipartito. Además, esta construcción puede hacerse en tiempo polinomial.

En conclusión, resolver el problema del conjunto dominante para grafos bipartitos es tan difícil como resolverlo en el caso general.

Numerosos trabajos se han publicado y se están desarrollando sobre el problema del conjunto dominante. Veremos en los siguientes capítulos algunos de los resultados más importantes. Así como preguntas que todavía están abiertas.

Capítulo 2

Cotas superiores en grafos generales

Este capítulo está dedicado a los trabajos más importantes acerca del número de dominación de grafos sin restringir (demasiado) su estructura.

En la primera sección analizamos cómo depende $\gamma(G)$ del grado mínimo de los vértices $\delta(G)$ sin ninguna otra restricción sobre G .

En la segunda sección estudiamos la relación de γ con otros parámetros como la circunferencia mínima de un grafo.

En la tercera sección, basándonos en [19], analizamos cómo se generaliza el Teorema de Reed (2.5). En primer lugar definimos dos tipos de reducciones de grafos y construimos una familia \mathcal{F} de grafos con número de dominación «grande». Después estudiamos ciertas estructuras que son «malas» para la dominación. Finalmente presentamos las generalizaciones que se consiguen al tener en cuenta los nuevos parámetros y como aporte original de nuestro trabajo, describimos algoritmos eficientes para calcular estos parámetros.

Notar que si llegamos a una cota del estilo $\gamma(G) \leq c.n$ para grafos conexos de n vértices, la misma cota vale para grafos disconexos. Porque un conjunto dominante de $G \cup H$ es la unión de un conjunto dominante de G y uno de H y por lo tanto,

$$\gamma(G \cup H) = \gamma(G) + \gamma(H) \leq c|V(G)| + c|V(H)| = c|V(G \cup H)|.$$

En este sentido, decimos que γ es *aditiva* en las componentes conexas del grafo.

Al establecer una cota, ya sea superior o inferior, de γ , una pregunta natural es saber si existe algún grafo que cumpla la igualdad (en nuestro ejemplo sería $\gamma(G) = c.n$). En tal caso se dice que la cota es *ajustada*. A lo largo de esta tesis, cada vez que establecemos una cota de $\gamma(G)$, si se sabe que la cota es ajustada mostramos una familia de grafos en donde se cumpla la igualdad.

2.1. Cotas dependientes del orden y mínimo grado

En esta sección presentamos las cotas superiores para $\gamma(G)$ en términos de n y δ . Es decir estas cotas valen para cualquier grafo de orden n que cumpla una cierta condición del parámetro δ .

Teorema 2.1 (Ore). [35] Si G es un grafo de orden n con $\delta(G) \geq 1$, se tiene

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}.$$

Demostración. Consideramos I un conjunto independiente maximal en G . Afirmamos que tanto I como $V(G) \setminus I$ son conjuntos dominantes de G .

En efecto, si I no domina todo el grafo existe $u \in V(G)$ tal que $u \notin I$ y u no tiene vecinos en I . Entonces $I \cup \{u\}$ es independiente. Lo que contradice la maximalidad de I .

Para $V(G) \setminus I$, observamos que toda arista $e = (u, v)$ tiene un extremo en el conjunto¹ $V(G) \setminus I$. Pues en caso contrario $u, v \in I$, son adyacentes y se contradice que I sea un conjunto independiente. Dado que $\delta(G) \geq 1$, todo vértice es extremo de al menos una arista, entonces todo vértice está dominado por $V(G) \setminus I$.

Alguno de los dos conjuntos I o $V(G) \setminus I$ debe tener tamaño menor o igual que $\frac{n}{2}$. Luego,

$$\gamma(G) \leq \min\{|I|, |V(G) \setminus I|\} \leq \frac{n}{2}.$$

□

Existen algoritmos que a partir de un grafo G encuentran un conjunto independiente máximo en tiempo lineal: $O(n + m)$.

Por ejemplo, el algoritmo que consiste en tomar un vértice u , agregarlo a I y sacar de $V(G)$ a u y todos sus vecinos. Si aún quedaran vértices por seleccionar, se repite este procedimiento.

Entonces es posible hallar en tiempo lineal un conjunto dominante D que cumple $|D| \leq \frac{n}{2}$ (En nuestro algoritmo sería el conjunto I o el conjunto $V \setminus I$). Pero puede pasar, de hecho es lo que suele pasar, que $\gamma(G)$ sea menor que $\frac{n}{2}$.

Ejemplo 2.2. La cota del Teorema 2.1 es ajustada, por ejemplo, cuando G es un conjunto de aristas con extremos disjuntos, un C_4 o los grafos de la Figura 1. Para cada uno de ellos marcamos un γ -set de tamaño $\frac{n}{2}$.

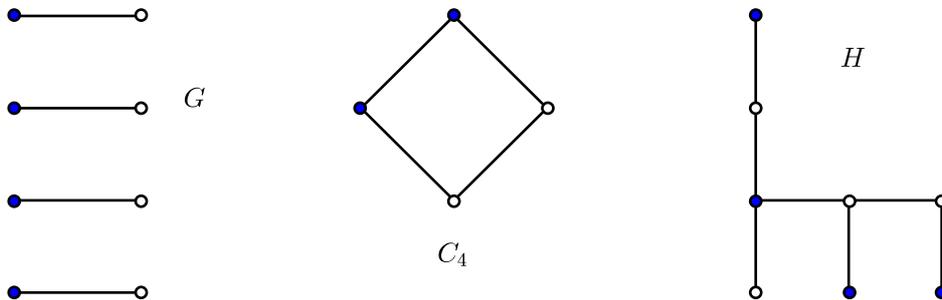


Figura 1: Grafos que cumplen $\gamma = \frac{n}{2}$

¹Un conjunto $S \subseteq V(G)$ con la propiedad que toda arista $e \in E(G)$ tiene un extremo en S se llama un *vertex cover*.

A partir de un grafo G se puede armar un grafo que cumple la igualdad en el Teorema 2.1 agregando por cada $u \in V(G)$ un vértice h_u y la arista (u, h_u) . En otras palabras, G' se obtiene al agregar una hoja a cada vértice de G . Más aún ésta es una caracterización de los grafos que cumplen la igualdad $\gamma(G) = \frac{n}{2}$. Por ejemplo, en la Figura 1 el grafo H se obtiene a partir del camino P_4 de esa manera.

En [29], McCuaig y Shepherd probaron que si se pide que el mínimo grado de G sea por lo menos 2, todos los grafos excepto 7, cumplen una mejor cota.

Teorema 2.3 (McCuaig y Shepherd). [29] *Si G es un grafo de orden n con $\delta(G) \geq 2$ y $G \notin \mathcal{G}$, entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}.$$

Los grafos de la familia \mathcal{G} son los de la Figura 2. Todos ellos tienen orden menor o igual que 7 y en la figura marcamos un conjunto dominante mínimo para cada grafo. Para el C_4 se cumple $\gamma = 2 > \frac{2 \cdot 4}{5}$ y para los demás $\gamma = 3 > \frac{2 \cdot 7}{5}$.

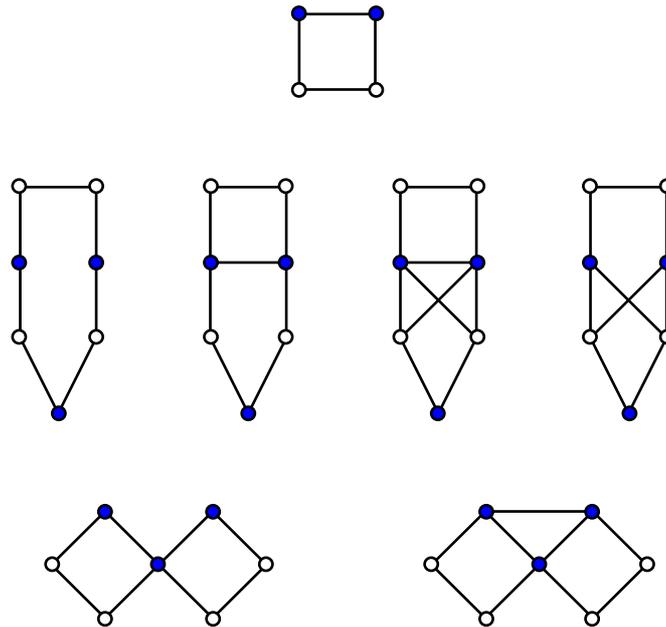


Figura 2: Familia \mathcal{G}

Más adelante, en la Sección 2.3.3, llegaremos a que el Teorema de McCuaig y Shepherd puede verse como un corolario del Teorema de Reed (2.5). Por lo tanto, no haremos la demostración aquí pero sí mostraremos que la cota es ajustada.

La familia (infinita) de la Figura 3 cumple la igualdad en la cota del Teorema 2.3.

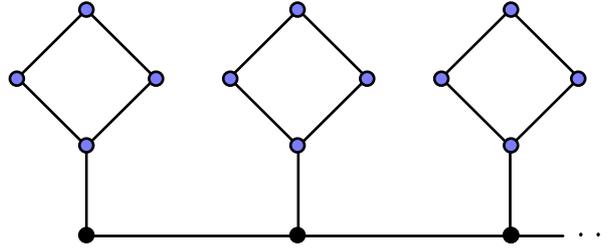


Figura 3: Familia de grafos con $\gamma = \frac{2n}{5}$

Ejemplo 2.4. Otra manera del construir grafos que cumplen $\gamma = \frac{2n}{5}$ es a partir de un grafo H 2-conexo que posee un matching perfecto \mathcal{M} . Por ejemplo, un ciclo de longitud $2k$. Modificamos H cambiando cada arista (u, v) de \mathcal{M} por un C_5 como en la Figura 4. El grafo que obtenemos G tiene orden $n = 5k$.

Para dominar cada ciclo agregado necesitamos 2 vértices incluso en el caso que los vértices u y v están dominados por otros vértices. (Esto nos dice que $\gamma(G) \geq 2k$). Además los vértices $V(H)$ forman un conjunto dominante de G . Lo que prueba que $\gamma(G) = 2k = \frac{2n}{5}$.

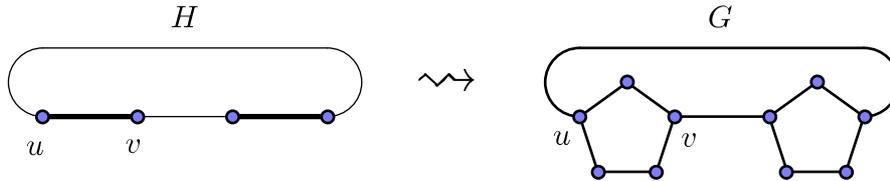


Figura 4: Construcción de G a partir de $H = C_4$.

Destacamos que estos ejemplos tienen ciclos C_4 o C_5 inducidos.

En [38], B. Reed estableció una cota ajustada para los grafos que tienen mínimo grado por lo menos 3. No haremos la demostración del Teorema de Reed 2.5 en esta tesis, pero mencionamos que está basada en buscar un conjunto de caminos en el grafo que cubran todos los vértices. Y luego, elegir convenientemente algunos vértices de cada camino para formar un conjunto dominante. Al final se eligen un poco más de $\frac{1}{3}$ de los vértices del grafo.

Teorema 2.5 (Reed). [38] Si G es un grafo de orden n con $\delta(G) \geq 3$, se tiene

$$\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}.$$

Ejemplo 2.6. La cota del Teorema de Reed es ajustada. Una manera de construir grafos en donde se da la igualdad es a partir de un grafo cualquiera H de k vértices. Agregamos k copias del grafo R de la Figura 5 e identificamos un vértice $u \in V(H)$ con uno de los vértices a, b, c de R . En el grafo G que se obtiene la cantidad de vértices es $8k$ y cada uno de ellos tiene grado por lo menos 3. Observamos que se necesitan por lo menos 3 vértices

para dominar cada copia de R agregada. Más aún, existe D un γ -set de G que consiste en $V(H)$ y dos vértices extras en cada R . Entonces $\gamma(G) = 3k = \frac{3|V(G)|}{8}$.

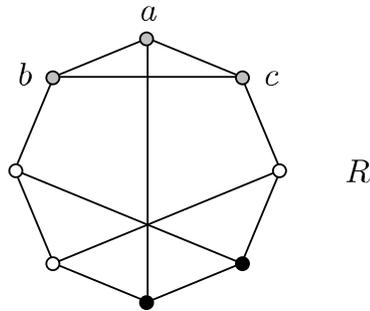


Figura 5: Grafo R de ocho vértices con número de dominación 3. Los vértices marcados en negro, junto con a , b o c , forman un γ -set de R .

Es razonable esperar que, a medida que aumenta el grado mínimo de los vértices, los conjuntos dominantes tengan menor cantidad de vértices. En esa dirección, Alan y Spencer usaron un método probabilístico para probar el siguiente teorema.

Teorema 2.7. [3] *Si G es un grafo conexo, se tiene*

$$\gamma(G) \leq \left(\frac{1 + \ln(\delta + 1)}{\delta + 1} \right) n.$$

Esta cota es interesante (en el sentido que mejora las cotas anteriores) cuando δ es mayor o igual que 5.

2.2. Cotas con otros parámetros

Mientras que las cotas de la sección anterior valen sin restringir la estructura de los grafos, es razonable identificar los subgrafos o las invariantes que fuerzan que el número de dominación sea alto. En esta sección presentamos resultados parciales que involucran condiciones sobre el parámetro g (que definimos a continuación).

Definición 2.8. La *mínima circunferencia*, *cintura* o *girth* de un grafo G , $g(G)$, se define como el menor natural k tal que G tiene un ciclo de longitud k .

Observación 2.9. Se cumple que cualquier ciclo de longitud $g(G)$ es un ciclo inducido. Porque si existiera una arista entre los vértices del ciclo, se podría hallar un ciclo de longitud menor.

Por ejemplo, el grafo de la Figura 6 tiene un ciclo C de longitud 7 y $g = 4$.

Teorema 2.10 (Brigham y Dutton). [8] *Sea G un grafo de orden n , mínimo grado $\delta \geq 2$ y mínima circunferencia $g \geq 5$. Entonces*

$$\gamma(G) \leq \left\lceil \frac{n}{2} - \frac{g}{6} \right\rceil.$$

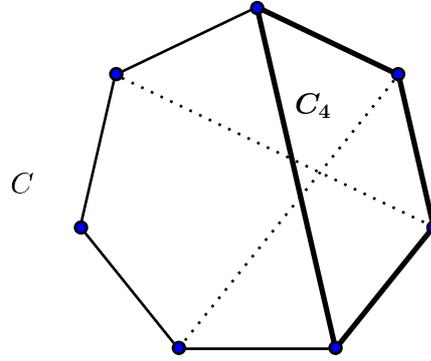


Figura 6: Grafo que tiene un ciclo C no inducido. Las aristas en líneas punteadas pueden estar o no en el grafo.

Demostración. Lo fundamental en la demostración es el hecho de que si en G (con $\delta \geq 2$ y $g \geq 5$) se borran² los vértices de un ciclo mínimo C , el grafo resultante H no tiene vértices aislados. Entonces, H cumple las hipótesis de la cota del Teorema de Ore (2.1) que afirma $\gamma(H) \leq \frac{|V(H)|}{2}$.

Para probar esa afirmación, tomamos u un vértice de H y llamamos v_1, v_2, \dots, v_g a los vértices de C . Como el mínimo grado es 2, u tiene por lo menos dos vecinos en el grafo G . Si u tiene dos vecinos en C digamos v_1 y v_k tenemos la situación de la Figura 7.

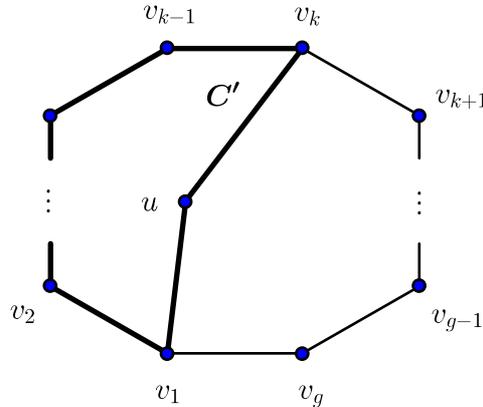


Figura 7: Ciclo C'

Notar que los vértices u, v_1, v_2, \dots, v_k forman un ciclo C' de longitud $k+1$. Y los vértices $v_k, v_{k+1}, \dots, v_g, v_1, u$ forman un ciclo de longitud $g-k+3$. La menor longitud de un ciclo es 5, entonces $g-k+3 > 4$ de donde $g > k+1$. Por lo tanto, encontramos un ciclo C' de longitud menor que $g(G)$. Un absurdo. (No estamos diciendo que estos ciclos son

²Dado un grafo $G = (V, E)$, notamos por $G-u$ al grafo que se obtiene al borrar el vértice u y las aristas que inciden en él. Es decir, $V(G-u) = V \setminus \{u\}$ y $E(G-u) = \{(v, w) \in E, v \neq u \text{ y } w \neq u\}$. En otras palabras, $G-u$ es el subgrafo inducido por $V \setminus \{u\}$.

Análogamente podemos borrar o eliminar de G un conjunto de vértices $S \subseteq V$. El grafo resultante se nota $G-S$ es el subgrafo inducido por $V \setminus S$.

ciclos inducidos, pero por la Observación 2.9 tener un ciclo no necesariamente inducido de longitud l asegura tener un ciclo inducido de longitud $l' \leq l$.)

Luego, u debe tener un vecino en H , es decir que el subgrafo inducido por H no tiene vértices aislados ($\delta(H) \geq 1$).

Recordamos del Capítulo 1 que si C es un ciclo de longitud k , $\gamma(C) = \lceil \frac{k}{3} \rceil$. Tenemos a G dividido en dos subgrafos H y C , entonces

$$\gamma(G) \leq \gamma(H) + \gamma(C) \leq \frac{n-g}{2} + \lceil \frac{g}{3} \rceil \leq \lceil \frac{n}{2} - \frac{g}{6} \rceil.$$

□

En 2007, Dieter Rautenbach probó el siguiente resultado.

Teorema 2.11. [37] *Sea $k \in \mathbb{N}$. Existe un conjunto finito de grafos \mathcal{G}_k tal que, si G es un grafo de orden n , mínimo grado $\delta \geq 2$, mínima circunferencia $g \geq 5$ tal que G no es un ciclo y no pertenece a \mathcal{G}_k , entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{2} - \frac{g}{6} - k.$$

Y además realizó una conjetura, probando una versión débil de la misma.

Conjetura 2.12. [37] *Si G es un grafo de orden n , mínimo grado $\delta \geq 2$ y mínima circunferencia $g \geq 5$, entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{3} + \frac{2n}{3(g-1)}.$$

En el mismo paper está la prueba de esta conjetura con la hipótesis adicional de que la distancia $d_G(u, v) \geq g$ para todo par $u, v \in V(G)$ con $\deg_G(u), \deg_G(v) \geq 3$.

Una manera de restringir la estructura de un grafo es imponer que todos los vértices tengan el mismo grado, esto es que G sea *regular*. Los grafos en los que todo vértice tiene grado exactamente 3 se llaman grafos *cúbicos* o *3-regulares*.

En [28] Kostochka y Stodolsky demuestran los siguientes resultados.

Teorema 2.13. [28] *Si G es un grafo conexo, cúbico, de orden $n > 8$, entonces*

$$\gamma(G) \leq \frac{4n}{11}.$$

Teorema 2.14. [28] *Si G es un grafo conexo, cúbico, de orden $n > 8$ y mínima circunferencia g , entonces*

$$\gamma(G) \leq n \left(\frac{1}{3} + \frac{8}{3g^2} \right).$$

Esta última cota es interesante (en el sentido que mejora los resultados anteriores) cuando $g \geq 9$.

También se ha intentado determinar el supremo de $\frac{\gamma(G)}{|V(G)|}$ sobre los grafos cúbicos. Kostochka y Stodolsky mostraron que ese supremo es por lo menos $\frac{8}{23}$ (y menor o igual que $\frac{4}{11}$, por el Teorema 2.14). Sin embargo no tienen una propuesta para el valor exacto. Molloy y Reed en [33] mostraron que el número de dominación de un grafo cúbico aleatorio de orden n está entre $0,236n$ y $0,3126n$ con probabilidad asintótica 1.

Dado que las cotas superiores e inferiores del número de dominación de grafos cúbicos aún pueden mejorarse, ésta es una de las líneas de investigación que se desarrolla en la actualidad.

2.3. Parámetros esenciales en la cota de Reed

En esta sección seguiremos el paper de M. Henning, I. Schiermeyer y A. Yeo [19] para mostrar cuáles son los parámetros estructurales que fuerzan un número de dominación más grande. Con estos nuevos parámetros, los autores consiguen mejorar los resultados del Teorema de McCuaig y Shepherd (2.3) y del Teorema de Reed (2.5).

Al final de esta sección mostramos algunos aportes de nuestro trabajo.

2.3.1. Reducciones de grafos

En un grafo G , *identificar los vértices x e y* consiste en reemplazar x e y por un nuevo vértice u_{xy} que es adyacente a todos los vértices que eran adyacentes a x o y en G .

Definición 2.15. Si existe en el grafo G un camino simple u_1, v_1, v_2, u_2 de manera que $d_G(v_1) = d_G(v_2) = 2$, armamos el grafo G' identificando los vértices u_1 y u_2 y borrando $\{v_1, v_2\}$. Decimos que el grafo G' es una *reducción tipo 1* de G y también que G se reduce tipo 1 a G' .

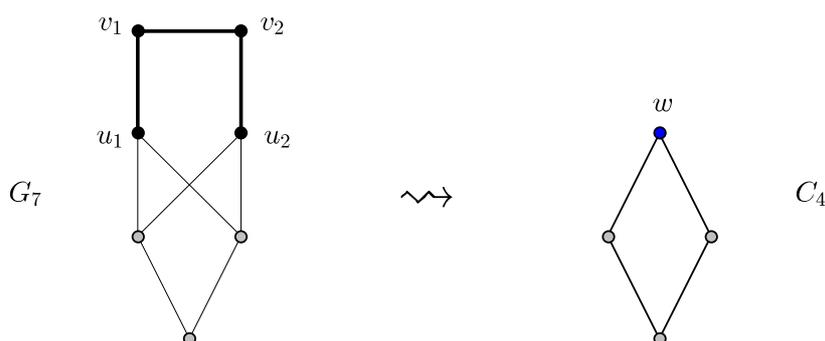


Figura 8: Ejemplo de una reducción tipo 1. El grafo G_7 se reduce tipo 1 a C_4 .

Definición 2.16. Si existe en el grafo G un camino simple x_1, w_1, w_2, w_3, x_2 tal que $d_G(w_2) = 2$ y $N(w_1) = \{x_1, w_2, x_2\} = N(w_3)$ en G , armamos G' borrando los vértices $\{w_1, w_2, w_3\}$ y agregando la arista (x_1, x_2) (si no está en $E(G)$). Decimos que el grafo G' es una *reducción tipo 2* de G o bien que G se reduce tipo 2 a G' .

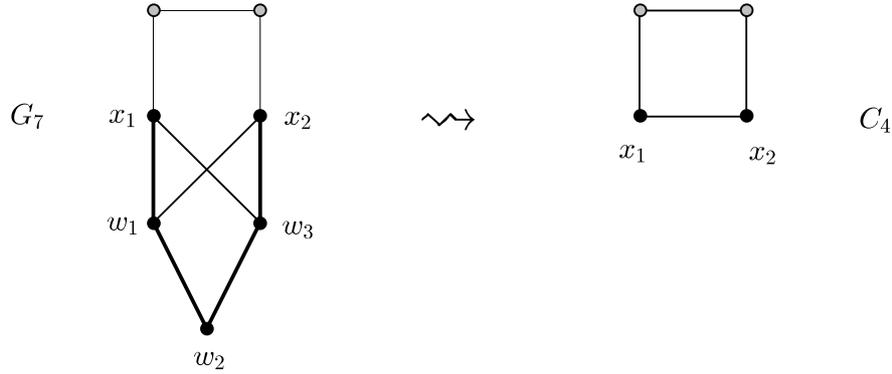


Figura 9: Ejemplo de una reducción tipo 2. El grafo G_7 se reduce tipo 2 a C_4 .

Definición 2.17. Sea $\mathcal{F}_4 = \{C_4\}$. Para $i > 4$, $i \equiv 1 \pmod{3}$ definimos la familia \mathcal{F}_i de la siguiente manera: $G \in \mathcal{F}_i$ si y sólo si tiene mínimo grado $\delta(G) \geq 2$ y existe $G' \in \mathcal{F}_{i-3}$ tal que G se reduce (tipo 1 o tipo 2) a G' .

Observamos que para $i \geq 4$, $i \equiv 1 \pmod{3}$, todos los grafos en \mathcal{F}_i tienen orden i , porque en cada reducción el orden disminuye en 3.

Para ilustrar la Definición 2.17, consideramos los grafos G_7 , G_{10} y G_{13} de la Figura 10. Cada uno de ellos tiene mínimo grado mayor o igual a 2. El grafo G_7 es el mismo que el de las Figuras 8 y 9 y vimos que G_7 se reduce (tipo 1 y tipo 2) a C_4 , entonces $G_7 \in \mathcal{F}_7$. El grafo G_{10} se reduce tipo 1 a G_7 (reduciendo los vértices marcados en la figura) y entonces $G_{10} \in \mathcal{F}_{10}$. El grafo G_{13} se reduce tipo 2 a G_{10} y por lo tanto $G_{13} \in \mathcal{F}_{13}$.

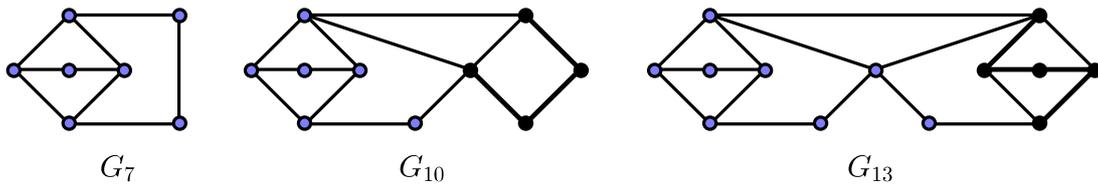


Figura 10: Los grafos G_7 , G_{10} y G_{13}

Los seis grafos en la familia \mathcal{F}_7 son los de la Figura 2, de la página 15 (sin contar el C_4). Y, junto con el C_4 , son los únicos grafos que no cumplen la cota del Teorema de McCuaig y Shepherd (Teorema 2.3).

Los grafos de las familias \mathcal{F}_i tienen número de dominación relativamente alto respecto del orden del grafo. Para probar esto primero analizamos cómo cambia el número de dominación al reducir un grafo.

Lema 2.18. [19] Si G es un grafo que se reduce tipo 1 a G' , entonces

$$\gamma(G) = \gamma(G') + 1.$$

Demostración. Sea u_1, v_1, v_2, u_2 un camino simple en G tal que $\deg_G(v_1) = \deg_G(v_2) = 2$ y sea G' el grafo que se obtiene al identificar u_1 y u_2 en un vértice w y eliminar los vértices $\{v_1, v_2\}$.

- \leq) Sea D' un γ -set de G' . Si $w \in D'$, tomamos $D = (D' \setminus \{w\}) \cup \{u_1, u_2\}$. Si $w \notin D'$, sea $w' \in D'$ adyacente a w en G' . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que w' es adyacente a u_1 en G . (Posiblemente w' también sea adyacente a u_2 en G .) En tal caso tomamos $D = D' \cup \{v_2\}$. En ambos casos, D domina el grafo G y $|D| = |D'| + 1$. Luego, $\gamma(G) \leq |D'| + 1 = \gamma(G') + 1$.
- \geq) Probaremos ahora que $\gamma(G') \leq \gamma(G) - 1$. Sea S un γ -set de G . Notar hay a lo sumo 2 vértices del camino u_1, v_1, v_2, u_2 en S . Si $|S \cap \{u_1, v_1, v_2, u_2\}| = 2$, armamos S' sacando esos dos vértices de S y agregando w . Si $|S \cap \{u_1, v_1, v_2, u_2\}| = 1$, sin pérdida de generalidad tenemos $v_1 \in S$; y tomamos $S' = S \setminus \{v_1\}$. En ambos casos S' es un conjunto dominante de G' y $|S'| = |S| - 1$. Por lo tanto, $\gamma(G') \leq \gamma(G) - 1$.

□

Observación 2.19. Notar que si en un grafo subdividimos una arista (u, v) en 4, aparece un camino P_4 inducido: u, y_1, y_2, y_3, v . Si aplicamos una reducción tipo 1 a los vértices u, y_1, y_2, y_3 volvemos a tener el mismo grafo. Entonces el Lema 2.18 prueba que al subdividir una arista en 4, el número de dominación aumenta en 1.

Sin embargo no es cierto que subdividir aristas en 4 y la reducción tipo 1 sean operaciones inversas. Ver por ejemplo la Figura 8.

Lema 2.20. [19] *Si G es un grafo que se reduce tipo 2 a G' , entonces*

$$\gamma(G) = \gamma(G') + 1.$$

Demostración. Sea x_1, w_1, w_2, w_3, x_2 un camino en G tal que $\deg_G(w_2) = 2$, $N(w_1) = N(w_3) = \{x_1, w_2, x_2\}$ y sea G' el grafo que se obtiene al eliminar los vértices $\{w_1, w_2, w_3\}$ y añadir la arista (x_1, x_2) .

- \leq) Sea D' un γ -set de G' . Si $D' \cap \{x_1, x_2\} = \emptyset$, tomamos $D = D' \cup \{w_2\}$. Si $D' \cap \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$, tomamos $D = D' \cup \{w_1\}$. Notar que w_1 domina $\{x_1, w_1, w_2, x_2\}$ y $D' \cap \{x_1, x_2\}$ domina el vértice w_3 . En ambos casos, D es un conjunto dominante de G y $|D| = |D'| + 1$. Por lo tanto $\gamma(G) \leq |D| = \gamma(G') + 1$.
- \geq) Mostramos que $\gamma(G') \leq \gamma(G) - 1$. Entre todos los γ -set de G elegimos un S que minimiza $|S \cap \{w_1, w_2, w_3\}|$. Entonces $|S \cap \{w_1, w_2, w_3\}| = 1$ (ver Figura 11). Si $w_2 \in S$, ($w_1, w_3 \notin S$) tomamos $S' = S \setminus \{w_2\}$. Notar que x_1 y x_2 están dominados en G por vértices que no se eliminan. Si $w_2 \notin S$, podemos asumir sin pérdida de generalidad, $w_1, x_i \in S$ (y $w_3 \notin S$). En este caso, x_1 y x_2 están dominados por x_i en G' y tomamos $S' = S \setminus \{w_1\}$. En ambos casos, el conjunto S' domina el grafo G' y $|S'| = |S| - 1$. Entonces $\gamma(G') \leq |S'| = \gamma(G) - 1$.

□

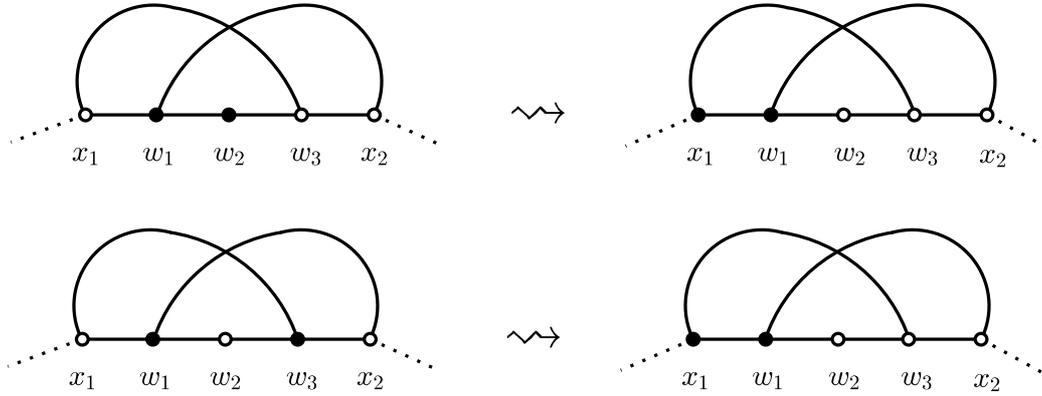


Figura 11: Detalle de cómo conseguir a partir un γ -set de G , un S que cumpla $|S \cap \{w_1, w_2, w_3\}| = 1$.

Proposición 2.21. [19] Para todo $G \in \mathcal{F}_i$ con $i \geq 4$, $i \equiv 1 \pmod{3}$, se tiene

$$\gamma(G) = \frac{i+2}{3}.$$

Demostración. La demostración es por inducción en i para $i \geq 4$, $i \equiv 1 \pmod{3}$. Observamos que si $i = 4$, $G = C_4$ y $\gamma(G) = 2 = \frac{i+2}{3}$.

Si $i > 4$ y $G \in \mathcal{F}_i$, tenemos que existe un $G' \in \mathcal{F}_{i-3}$ tal que G se reduce tipo 1 o tipo 2 a G' . Por hipótesis inductiva, $\gamma(G') = \frac{i-3+2}{3}$. Y los Lemas 2.18 y 2.20 implican que $\gamma(G) = \gamma(G') + 1 = \frac{i+2}{3}$. □

Como mencionamos antes, en las familias \mathcal{F}_i el número de dominación es relativamente alto, y serán los grafos excepcionales para la cota que probaremos en la última sección. Además para estos grafos sabemos exactamente cuánto vale γ . Presentamos algunas propiedades más de estas familias de grafos.

Notación. Llamaremos $\mathcal{F}_{\leq 13} = \mathcal{F}_4 \cup \mathcal{F}_7 \cup \mathcal{F}_{10} \cup \mathcal{F}_{13}$

Propiedades. Sea un grafo $G \in \mathcal{F}_{\leq 13}$ de orden n , entonces

- a) $n \leq 13$
- b) $\gamma(G) \leq \frac{n+2}{3}$
- c) Si $G \in \mathcal{F}_{10} \cup \mathcal{F}_{13}$ entonces $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$.
- d) Si G contiene un triángulo entonces a lo sumo un vértice del triángulo tiene grado 2 en el grafo G .

Demostración. La propiedad (a) se debe al hecho que todo grafo en \mathcal{F}_i tiene orden i .

La propiedad (b) es la Proposición 2.21.

La propiedad (c) es un consecuencia de la propiedad (b). Ya que $\frac{n+2}{3} \leq \frac{2n}{5} \Leftrightarrow 10 \leq n$.

Para probar (d), sea G un grafo que contiene un triángulo tal que hay dos vértices con grado 2 en G . Cuando G se reduce (tipo 1 o tipo 2) a G' , esos vértices no son eliminados. Más aún, en G' hay un triángulo que contiene 2 vértices con grado 2 en G' . Repitiendo este procedimiento llegaríamos a que el C_4 , el único grafo en \mathcal{F}_4 , contiene un triángulo. Lo cual es absurdo. □

2.3.2. Propiedades estructurales

El estudio de las subestructuras de un grafo que son «malas» en el sentido de la dominación, permite definir una cota para γ que depende fuertemente de la estructura del grafo.

De esta manera, la cota que obtenemos brinda una demostración alternativa del Teorema de McCuaig y Shepherd (Teorema 2.3), como de otros resultados conocidos de dominación en grafos y permite obtener nuevas propiedades y cotas para subclases de grafos.

Definimos, entonces, los parámetros y también un nuevo tipo de dominación que usaremos en esta sección.

Definición 2.22 (Dominación restringida). Dados un grafo $G = (V, E)$ y un conjunto de vértices $X \subseteq V$, decimos que $S \subseteq V$ es un conjunto X -dominante de G si es un conjunto dominante de G y contiene a X . El número de X -dominación de G es el menor tamaño de un conjunto X -dominante y lo notamos $\gamma(G; X)$.

Observar que si $X = \emptyset$, los conjuntos \emptyset -dominantes son exactamente los conjuntos dominantes de G , y por lo tanto $\gamma(G; \emptyset) = \gamma(G)$.

Definición 2.23 (Vértices de corte). En un grafo conexo $G = (V, E)$, un vértice $u \in V$ se dice *vértice de corte* si $G - u$ es desconexo.

Dado $X \subseteq V$, u es un X -cut vértice si $u \notin X$ y el grafo $G - u$ tiene una componente conexa C_u tal que: es un C_4 inducido, no contiene vértices de X y no todos los vértices de C_u son adyacentes a u (claramente hay uno que sí lo es).

Puede pasar que u no sea vértice de corte de G . En la Figura 12 mostramos el grado que pueden tener los vértices de C_u en el grafo G .

Notamos $bc(G; X)$ al número de X -cut vértices en G (por «bad-cut» o «corte malo»).

Cuando $X = \emptyset$, decimos que un X -cut vértice es un *bad-cut vértice* y notamos $bc(G; \emptyset)$ simplemente como $bc(G)$.

Para justificar el nombre de «bad-cut» supongamos que G tiene un bad-cut vértice u y armamos un conjunto dominante seleccionando el vértice u . Para dominar el «resto» del grafo, es decir $V \setminus N[u]$, tendremos que agregar un vértice del C_4 que aparece en $G - u$. Si no seleccionamos el vértice u , para dominar el subgrafo C_u necesitamos dos vértices de este ciclo. En ambos casos estaríamos seleccionando 2 vértices para dominar los 5 vértices de $C_u \cup \{u\}$. Y esa es justamente la proporción que queremos mejorar.

Por ejemplo, en la Figura 3 (página 16) los vértices del camino inferior (los marcados en negro) son bad-cut vértices.

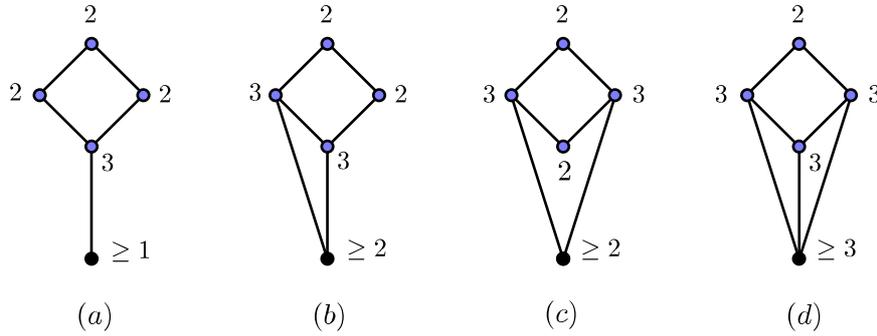


Figura 12: Posibles adyacencias de un bad-cut vértice u con la componente C_u . Los números al lado de cada vértice indican el grado del vértice en el grafo G .

Definición 2.24 (Ciclos especiales). Sean $G = (V, E)$ un grafo y $X \subseteq V$. Decimos que C es un *ciclo X -especial* de G si es un ciclo de 5 vértices que no están en X y cumple: es una componente C_5 o tiene un sólo vértice de grado mayor o igual que 3 o tiene dos vértices de grado mayor o igual que 3 y esos vértices no son consecutivos en C (aunque pueden ser adyacentes en G). (Ver los grafos A , B y C en la Figura 13.)

Notamos $sc(G; X)$ al máximo número de ciclos X -especiales disjuntos que no contienen X -cut vértices.

Cuando $X = \emptyset$, llamamos *ciclos especiales* a los ciclos \emptyset -especiales y notamos a $sc(G; \emptyset)$ simplemente con $sc(G)$. Es decir que $sc(G)$ es el máximo número de ciclos especiales disjuntos que no contienen bad-cut vértices.

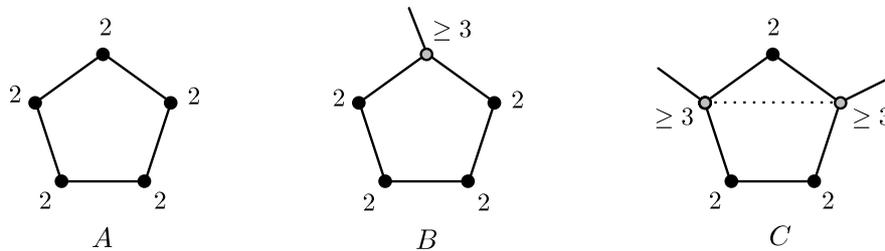


Figura 13: Ciclos especiales. Los números al lado de cada vértice indican el grado del vértice en el grafo G . La arista en línea punteada pueden estar o no en $E(G)$.

Los ciclos X -especiales son estructuras «malas» en el sentido de la dominación porque para dominar los 5 vértices de C se necesitan al menos 2 vértices de C . Más aún, si queremos expandir el conjunto X para que sea dominante, X podría estar dominando los vértices de grado 3, pero de todas formas hay que seleccionar 2 vértices de C para dominar el ciclo.

Definición 2.25 (La función ψ). Sean $G = (V, E)$ un grafo y $X \subseteq V$. Notamos con $\delta_1(G; X)$ al número de vértices de grado 1 en G que no están en X .

Definimos la función ψ de un grafo como

$$\psi(G; X) = \frac{1}{8}(3|V| + 5|X| + sc(G; X) + bc(G; X) + 2\delta_1(G; X)) .$$

Para ilustrar la definición de ψ , consideramos G el grafo de la Figura 14 y tomamos $X = \{x\}$. El vértice v es un X -cut vértice. Como tenemos $|V(G)| = 13$, $|X| = 1$, $bc(G; X) = 1$, $sc(G; X) = 1$ y $\delta_1(G; X) = 1$, resulta $\psi(G; X) = 6$. Observar además que para este grafo, $\gamma(G; X) = 6 = \psi(G; X)$.

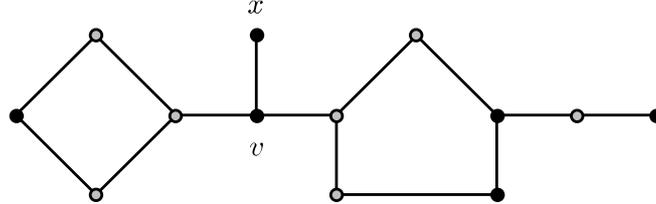


Figura 14: Grafo G . Los vértices en negro forman un conjunto X -dominante mínimo.

Mostramos ahora la relación de estos parámetros con algunas restricciones ya estudiadas para el problema del conjunto dominante. Estas observaciones serán útiles más adelante.

Proposición 2.26. [19] Sea G un grafo de orden n con mínimo grado $\delta(G) \geq 1$. Para cualquier $X \subseteq V(G)$ valen las siguientes propiedades:

- Si $\delta(G) \geq 2$, entonces $\delta_1(G; X) = 0$.
- $sc(G) + bc(G) \leq \frac{n}{5}$.
- Si G no tiene C_4 y C_5 inducidos³, entonces $sc(G; X) = 0$.
- Si G no tiene a C_4 como subgrafo inducido, entonces $bc(G; X) = 0$.
- Si G es 2-conexo y $n \neq 5$, entonces $bc(G; X) = 0$.
- Si $deg_G(u) + deg_G(v) \geq 5$ para todo par de vértices adyacentes, entonces $sc(G) = 0$.

Demostración. Las afirmaciones (a) y (d) se desprenden de las definiciones de δ_1 y bc

La afirmación (c) se debe a que cualquier ciclo X -especial es un C_5 inducido o contiene un C_4 inducido. Ver la Figura 13.

Para la afirmación (b) observar que si x es un bad-cut vértice y C_x es un C_4 inducido que le corresponde a x , el conjunto $C_x \cup \{x\}$ es disjunto con cualquier ciclo especial y con cualquier $C_y \cup \{y\}$ para un bad-cut vértice $y \neq x$. De esta manera podemos separar 5 vértices de G por cada bad-cut vértice y por cada ciclo especial.

Para la afirmación (e) tener en cuenta que en un grafo 2-conexo no hay vértices de corte. Y cuando x es un X -cut vértice y $n \neq 5$, hay al menos dos componentes conexas en $G - u$ (una de ellas es el C_u).

La afirmación (f), se debe al hecho que en un ciclo especial existen dos vértices consecutivos con grado 2 en G .

□

³Dado un grafo H , se suele usar la notación H -free para los grafos que no tienen a H como subgrafo inducido.

En su trabajo, Henning, Schiermeyer y Yeo generaron mediante un programa de computadora los grafos de la familia $\mathcal{F}_{\leq 13}$. Establecieron que hay 28076 grafos no isomorfos y exactamente 41 de ellos tienen bad-cut vértices. Definimos la familia \mathcal{F} como los 28035 grafos restantes, es decir:

$$\mathcal{F} = \{G \in \mathcal{F}_{\leq 13} \mid bc(G) = 0\}.$$

Terminamos esta sección con propiedades de la familia \mathcal{F} que son útiles en la demostración del teorema principal.

Lema 2.27. [19] *Sea G un grafo de la familia \mathcal{F} y $u, v \in V(G)$. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

- a) $\gamma(G - u) = \gamma(G) - 1$
- b) *Existe un γ -set que contiene a u .*
- c) *Existe un γ -set que contiene a u y v .*
- d) *Si u y v no son adyacentes y $(G \cup (u, v)) \notin \mathcal{F}$, entonces $\gamma(G \cup (u, v)) = \gamma(G) - 1$.*

Demostración. Los autores mencionan que la prueba de (a), (c) y (d) puede hacerse por computadora analizando los grafos de la familia \mathcal{F} . Para (b), observar que por la propiedad (a), cualquier γ -set de $G - u$ puede extenderse a un conjunto dominante (mínimo) de G agregando el vértice u . \square

2.3.3. Generalización de la cota de Reed

El resultado principal del paper es el siguiente,

Teorema 2.28. [19] *Sean G un grafo conexo y $X \subseteq V(G)$. Si $deg_G(u) \geq 1$ para todo $u \in V(G) \setminus X$, entonces*

$$X = \emptyset \text{ y } G \in \mathcal{F}, \quad \text{o bien} \quad \gamma(G; X) \leq \psi(G; X).$$

Notar que si G es conexo, para cualquier vértice se cumple que $deg_G(u) \geq 1$ (salvo que G sea el grafo con un sólo vértice). Es decir que la hipótesis adicional $deg_G(u) \geq 1, \forall u \in V(G) \setminus X$ sólo restringe el caso $G = \{u\}$ y $X = \emptyset$.

Antes de hablar de la demostración mencionaremos las consecuencias del Teorema 2.28. En particular, cuando $X = \emptyset$ tenemos:

Teorema 2.29. [19] *Si G es un grafo conexo, con mínimo grado $\delta \geq 2$, entonces $G \in \mathcal{F}$*

$$\gamma(G) \leq \frac{1}{8} (3|V(G)| + sc(G) + bc(G)).$$

Demostración. Tenemos que $\delta(G) \geq 2$ implica $\delta_1(G; X) = 0$ (Proposición 2.26 (a)) y $|X| = 0$. El resultado se obtiene a partir del Teorema anterior simplemente reemplazando estos valores en la fórmula de ψ (definida en 2.25, página 25). \square

Los siguientes dos corolarios generalizan el Teorema de Reed 2.5 para nuevas clases de grafos.

Corolario 2.30. [19] Sea G un grafo conexo de orden n con mínimo grado $\delta \geq 2$ tal que no contiene ciclos especiales ni bad-cut vértices, entonces

$$G \in \mathcal{F} \quad \text{o} \quad \gamma(G) \leq \frac{3n}{8}.$$

Corolario 2.31. [19] Sea G un grafo conexo de orden $n \geq 14$ y $\delta(G) \geq 2$ tal que no contiene ciclos especiales ni bad-cut vértices, entonces

$$\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}.$$

Demostración. Si sigue del Corolario anterior teniendo en cuenta que todos los grafos de la familia \mathcal{F} tienen orden menor o igual a 13. \square

Una observación importante es que si $\delta(G) \geq 3$, el grafo G no admite C_4 ni C_5 inducidos, y en consecuencia no posee ciclos especiales ni bad-cut-vértices (Proposición 2.26 (c) y (d)). Además resulta que G es un grafo que no se puede reducir tipo 1 ni tipo 2, porque los caminos que «se reducen» tienen vértices de grado 2, entonces $G \notin \mathcal{F}$. De esta manera, la cota del Teorema de Reed (2.5) puede verse como un corolario del Teorema 2.29:

$$\delta(G) \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \gamma(G) \leq \frac{1}{8} (3|V(G)| + sc(G) + bc(G)) = \frac{3|V(G)|}{8}.$$

Sin embargo, dado que la demostración del Teorema 2.28 usa el Teorema de Reed, no es cierto que (2.29) sea un resultado más fuerte. En realidad, lo que se hace es relajar la condición sobre el mínimo grado δ de 3 a 2, y restringir la estructura del grafo para que siga valiendo la cota $\gamma \leq \frac{3n}{8}$.

Observación 2.32. (Demostración del Teorema 2.3) Usando los parámetros que definimos, la cota de McCuaig y Shepherd también puede deducirse del Teorema 2.29 observando que:

- todo grafo en \mathcal{F}_{10} y \mathcal{F}_{13} (y en particular, todo grafo en $\mathcal{F} \setminus \mathcal{G}$) cumple $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$ (Propiedad (c) de la familia $\mathcal{F}_{\leq 13}$)
- $sc(G) + bc(G) \leq \frac{n}{5}$ (Proposición 2.26 (b)) y por el Teorema 2.29: $\gamma(G) \leq \frac{1}{8} (3n + \frac{n}{5}) = \frac{2}{5}n$.

La Proposición 2.26 y las Propiedades de la familia \mathcal{F} pueden combinarse para dar nuevos corolarios del Teorema 2.29 y obtener familias de grafos que cumplen que el número de dominación γ es a lo sumo tres octavos de n . Como por ejemplo:

Corolario 2.33. [19] Si $G \notin \mathcal{F}$ tiene orden n , mínimo grado $\delta \geq 2$ y no posee C_4 ni C_5 inducidos, entonces $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Demostración. Aplicamos el Teorema 2.29 y por la Proposición 2.26 (c) y (d), tenemos $sc(G) = bc(G) = 0$. \square

Corolario 2.34. [19] Si G es un grafo de orden $n \geq 14$, tiene mínimo grado $\delta \geq 2$ y no posee C_4 ni C_5 inducidos, entonces $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Demostración. Esta afirmación se deduce del Corolario anterior y el hecho que los grafos en \mathcal{F} tienen orden menor o igual a 13. □

Corolario 2.35. [19] Si G es un grafo de orden $n \geq 14$, G es 2-conexo y $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq 5$ para todo par de vértices adyacentes, entonces $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$.

Notar que (cuando G es 2-conexo) la condición $\deg_G(u) + \deg_G(v) \geq 5$ para todo $(u, v) \in E(G)$ es equivalente a: los vértices de grado 2 son un conjunto independiente.

Demostración. Se sigue del Teorema 2.29 y la Proposición 2.26 (e) y (f), pues ésta implica que $sc(G) = 0 = bc(G)$. □

Recalcamos que hay muchos grafos en la familia \mathcal{F} que no poseen C_4 ni C_5 inducidos. Los ejemplos más sencillos son los ciclos C_7 , C_{10} y C_{13} pero hay más, por ejemplo el grafo de la siguiente figura.

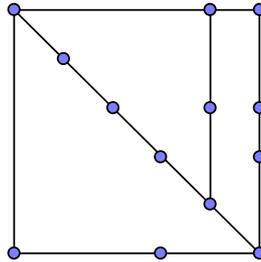


Figura 15: Un grafo en \mathcal{F} sin C_4 y C_5 inducidos.

Con respecto a la cuestión de si las cotas de los corolarios anteriores son ajustadas o no, presentamos los siguientes ejemplos. En ellos mostramos cómo construir una familia infinita de grafos que alcanzan la igualdad en los Corolarios 2.33 y 2.34 (Ejemplo 2.36) y Corolario 2.35 (Ejemplo 2.37). Es decir que mostraremos que todas las cotas son ajustadas.

Ejemplo 2.36. Las unidades básicas que vamos a usar para formar los grafos son:

- un *ciclo básico*, un grafo isomorfo a C_8
- una *llave básica*, un grafo isomorfo a un C_7 al que se le ha añadido un vértice de grado 1 (una hoja).

Para unir estas unidades consideramos ciertos *vértices de enlace*: en un ciclo básico los vértices de enlace serán un vértice cualquiera y los dos vértices a distancia 3; en una llave básica el vértice de enlace será la hoja.

Para armar un grafo G tomamos la unión disjunta de ℓ unidades básicas y agregamos

$\ell - 1$ aristas entre ellas de manera que: el grafo resulte conexo y las aristas agregadas incidan en los vértices de enlace. Por ejemplo, en la Figura 16 el grafo G está formado por 5 unidades básicas. Remarcamos que un vértice de enlace puede ser extremo de varias aristas de enlace y eventualmente de ninguna.

Todo grafo que podamos armar de esta manera tiene $\delta(G) \geq 2$ y no admite C_4 ni C_5 inducidos. Esto implica, por el Corolario 2.33 o 2.34, que $\gamma(G) \leq \frac{3}{8}|V(G)|$. Observar que para dominar los 8 vértices de una unidad básica se necesitan al menos 3 vértices, incluso si consideramos que los vértices de enlace ya están dominados. Luego, se da la igualdad $\gamma(G) = \frac{3}{8}|V(G)|$.

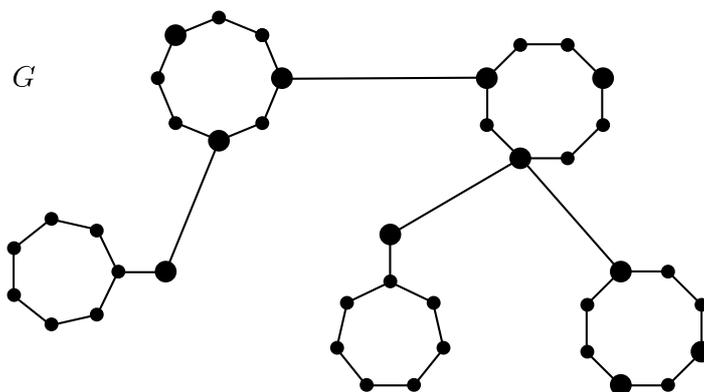


Figura 16: Unidades básicas. Los vértices de enlace son los más grandes.

Ejemplo 2.37. Construimos un grafo G que cumpla la igualdad en el Corolario 2.35 a partir de un grafo H que sea 2-conexo y tenga un matching perfecto \mathcal{M} . Por ejemplo, un camino de orden par. Reemplazamos cada arista (u, v) de \mathcal{M} por un grafo isomorfo a un C_8 con dos aristas extras, como en la Figura 17.

El grafo G que obtenemos es 2-conexo y cumple que los vértices de orden 2 forman un conjunto independiente (y por el Corolario 2.35, resulta que $\gamma(G) \leq \frac{3}{8}|V(G)|$). Además, para dominar los 8 vértices de los grafos agregados se necesitan por lo menos 3 vértices, incluso si consideramos que los vértices u y v ya están dominados. Luego, el número de dominación es exactamente $\frac{3}{8}|V(G)|$.

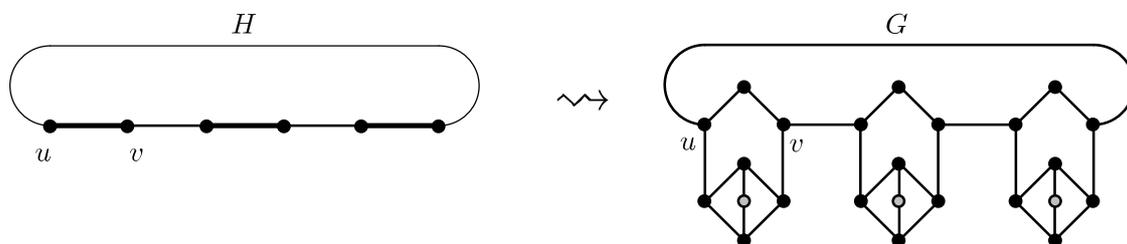


Figura 17: Construcción de G a partir de $H = C_6$. Los vértices en gris son los de grado igual a 2 en G y forman un conjunto independiente.

La demostración completa del Teorema 2.28 tiene muchos detalles técnicos que no desarrollaremos en esta tesis. Presentamos sólo un resumen, y las ideas principales de la demostración. Los detalles están en [19].

Esquema de la demostración del Teorema 2.28. La demostración es por inducción en las secuencias $(|V(G)| - |X|, |V(G)|)$ según el orden lexicográfico. Para simplificar la notación llamamos $s(G)$ a la secuencia $(|V(G)| - |X|, |V(G)|)$ y $s(G')$ a la secuencia $(|V(G')| - |X'|, |V(G')|)$. Recordamos el resultado del Teorema 2.28 y la fórmula de ψ :

$$X = \emptyset \text{ y } G \in \mathcal{F}, \quad \text{o bien} \quad \gamma(G; X) \leq \psi(G; X) \quad (2.1)$$

$$\psi(G; X) = \frac{1}{8}(3|V(G)| + 5|X| + sc(G; X) + bc(G; X) + 2\delta_1(G; X)) \quad (2.2)$$

Cuando $|V(G)| - |X| = 0$, tenemos $X = V(G)$ y $\gamma(G; X) = |X| = \psi(G; X)$. Lo que constituye el caso base. Asumimos entonces que $|V(G)| - |X| \geq 1$ y que el resultado (2.1) vale para todo grafo conexo G' y $X' \subseteq V(G')$ (con $deg_{G'}(u) \geq 1$ para todo u en $V(G') \setminus X'$), tales que la secuencia $s(G')$ sea menor que $s(G)$.

La demostración del paso inductivo consiste en ir determinando las propiedades que debe cumplir el grafo G si el resultado no vale. Como es de esperar, de todas formas llegaremos a que G cumple el resultado (2.1).

- i) Primero se prueba que $|V(G)| \geq 3$ y también $\delta_1(G; X) = 0$.
Deducimos de esto que $deg_G(u) \geq 2$ para todo $u \in V(G) \setminus X$.
También se prueba que no existen X -cut vértices ni ciclos X -especiales, es decir $bc(G; X) = 0$ y $sc(G; X) = 0$.
Luego se prueba que ningún vértice de X es un vértice de corte de G . Pues en caso que $x \in X$ es vértice de corte y H_1, H_2, \dots, H_k , $k \geq 2$ son las componentes conexas de $G - x$, se consideran los grafos $G_i = G[V(H_i) \cup \{x\}]$ y los conjuntos $X_i = X \cap V(G_i)$. Las secuencias correspondientes cumplen $s(G_i) < s(G)$ y por hipótesis inductiva ($X_i \neq \emptyset$) $\gamma(G_i; X_i) \leq \psi(G_i; X_i)$. La linealidad de los parámetros que definen ψ respecto a las componentes del grafo, permiten deducir que vale (2.1) para G .
- ii) En segundo lugar, se considera S el conjunto de los vértices de grado 2 que no están en X , $S = \{s \in V(G) \setminus X, deg_G(s) = 2\}$. Y se determina algunas propiedades del conjunto S .
Para probar que $S \neq \emptyset$ se usa el Teorema de Reed: Si $S = \emptyset$, todo vértice en $V(G) \setminus X$ tiene grado mayor o igual a 3. Para asegurar que $deg(x) \geq 3$ cuando $x \in X$, modificamos G de la siguiente manera⁴. Agregamos $|X|$ copias del grafo de la Figura 18 e identificamos un $x \in X$ con uno de los vértices a , b o c de R . Claramente el grafo que se obtiene, G' , tiene mínimo grado $\delta(G') = 3$ y por el Teorema de Reed (2.5), $\gamma(G') \leq \frac{3}{8}|V(G')| = \frac{3}{8}(|V(G)| + 7|X|)$.
Observamos que se necesitan por lo menos 3 vértices para dominar cada copia de R agregada. Más aún, existe D' un γ -set de G' que contiene a X y dos vértices en cada

⁴Esta construcción es la misma que usamos para armar el Ejemplo 2.6

R . (Ver Figura 5) Entonces $D = D' \cap V(G)$ es un conjunto dominante de G y

$$\begin{aligned} \gamma(G) &\leq |D| = |D'| - 2|X| = \gamma(G') - 2|X| \\ &\leq \frac{3}{8}(|V(G)| + 7|X|) - 2|X| = \frac{1}{8}(3|V(G)| + 5|X|) = \psi(G; X) . \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que en el punto (i) probamos que $bc(G; X) = sc(G; X) = \delta_1(G; X) = 0$.

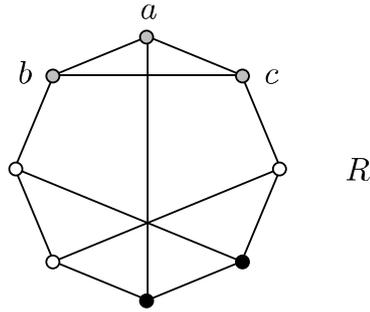


Figura 18: Grafo cúbico R de ocho vértices con número de dominación 3. Los vértices marcados en negro, junto con a , b o c , forman un γ -set de R .

Los vértices de $S = \{s \in V(G) \setminus X, \deg_G(s) = 2\}$ inducen un subgrafo en G , el siguiente paso es probar que no hay caminos de longitud 2 en este subgrafo. (Usando que no hay ciclos X -especiales ni X -cut vértices.)

Luego se prueba que no hay aristas entre los vértices de S .

Resulta que S es un conjunto independiente en G y si u es adyacente a un vértice de S , entonces $\deg_G(u) \geq 3$ o $u \in X$. Se prueba que esto último no ocurre. Es decir que $s \in S, u \in N(s) \Rightarrow u \notin X$ y $\deg_G(u) \geq 3$.

Esto permite probar que ningún par de vértices de S pertenecen a un mismo ciclo C_4 que tenga un vértice de grado por lo menos 4 en G . Y después, que ningún par de vértices de S están en el mismo C_4 .

Usando todo esto, se puede demostrar que el conjunto S es un packing de G . Esto es: cualquier par de vértices de S están a distancia por lo menos 3 en G .

III) Finalmente, consideramos un vértice $s \in S$ y sus vecinos $N(s) = \{u, v\}$. Por lo que vimos en el punto (II), $u, v \notin X$.

Tomamos $G' = G - N[s]$ y $X' = X$. Entonces $|V(G')| = |V(G)| - 3$ y $|X'| = |X|$. Sea G_1 una componente conexa de G' y $X_1 = X' \cap V(G_1)$. El siguiente paso es mostrar que

$$\gamma(G_1; X_1) > \psi(G_1; X_1) \wedge G_1 \neq G' \Rightarrow \gamma(G; X) \leq \psi(G; X) .$$

Más aún, se prueba que

$$\gamma(G'; X') > \psi(G'; X') \Rightarrow \gamma(G; X) \leq \psi(G; X) .$$

En consecuencia, podemos quedarnos con el caso $\gamma(G'; X') \leq \psi(G'; X')$.

También se prueba que $sc(G'; X') = 0$.

Se muestra que el vértice s de grado 2 puede elegirse de manera que $bc(G'; X') = 0$. En el grafo G' se cumple que $deg_{G'}(w) \geq 1 \forall w \in V(G') \setminus X'$ porque si w queda aislado al borrar $\{s, u, v\}$, el vértice w está a distancia 2 de s y por (II), tiene grado mayor o igual a 3. Una contradicción.

Finalmente se prueba que $\delta_1(G'; X') = 0$. De esta manera, teniendo en cuenta el punto (I)

$$\begin{aligned} \psi(G'; X') &= \frac{1}{8}(3|V(G')| + 5|X'|) \\ &= \frac{1}{8}(3(|V(G)| - 3) + 5|X|) = \psi(G; X) - \frac{9}{8} < \psi(G; X) - 1. \end{aligned}$$

Por otro lado, todo conjunto X' -dominante de G' puede extenderse a un conjunto X -dominante de G agregando el vértice s . Entonces,

$$\gamma(G; X) \leq \gamma(G'; X') + 1 \leq \psi(G'; X') + 1 < \psi(G; X).$$

Esto completa la demostración del Teorema 2.28.

□

Para terminar el capítulo mencionamos algunos aportes de nuestro trabajo.

Los grafos que tienen bad-cut vértices tienen alguna de las estructuras de la Figura 12 (página 25). Es decir que no es necesario prohibir todos los C_4 para que $bc(G) = 0$ sino sólo los C_4 «malos».

Proposición 2.38. Si G es un grafo que no tiene a C_5 ni los grafos de la Figura 12 como subgrafos inducidos entonces

$$bc(G) = 0 \quad \text{y} \quad sc(G) = 0.$$

Demostración. Tener en cuenta que al no tener los grafos de la Figura 12, no hay bad-cut vértices y $bc(G) = 0$. Un ciclo especial induce un C_5 o el grafo (b) de la Figura 12. Como ninguno de los dos es un subgrafo inducido en G tenemos $sc(G) = 0$.

□

Teniendo en cuenta la proposición anterior y el Teorema 2.29 reescribimos el Corolario 2.33 como:

Corolario 2.39. Si $G \notin \mathcal{F}$ tiene mínimo grado $\delta \geq 2$ y no tiene a C_5 ni a los grafos de la Figura 12 como subgrafos inducidos, entonces

$$\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}.$$

Con respecto a la búsqueda de estas estructuras, mencionamos que decidir si existe un subgrafo de G que verifica condiciones de grado sobre sus vértices puede determinarse en tiempo polinomial. En consecuencia es posible hallar los X -cut vértices y los ciclos X -especiales en tiempo polinomial para cualquier conjunto $X \subseteq V(G)$.

Sin embargo, determinar el parámetro $sc(G)$ en principio no es tan sencillo porque involucra hallar la máxima cantidad de ciclos especiales disjuntos que no contienen bad-cut vértices. Nosotros diseñamos un algoritmo que consiga evaluar $sc(G)$ para cualquier grafo en tiempo polinomial y es el siguiente:

Algoritmo 1 Parámetro $sc(G)$

Input: Un grafo G con los vértices numerados $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$.

Output: El valor de $sc(G)$.

- 1) Hallar el conjunto BC de los bad-cut vértices de G .
 - 2) Hallar los ciclos especiales de G que no tienen vértices en BC .
 - 3) Contar los ciclos especiales de G que forman el grafo A de la Figura 13 (página 25). Llamamos s_A a este valor.
 - 4) Armaremos un grafo auxiliar H a partir de los ciclos especiales como B y C de la Figura 13.
 - Por cada ciclo de la forma B , digamos v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 con $deg_G(v_1) \geq 3$ elegimos dos vértices: v_1 y v_3 o v_1 y v_4 (por ejemplo elegimos el menor número entre v_3 y v_4). Agregamos esos dos vértices a H y también una arista entre ellos.
 - Por cada ciclo de la forma C elegimos los vértices de grado mayor o igual a 3. Agregamos esos dos vértices a H y también una arista entre ellos.
 - 5) Hallar en H un matching máximo \mathcal{M} . (Existen algoritmos que a partir de un grafo G encuentran un matching máximo en tiempo $O(nm)$. Por ejemplo, el algoritmo de Edmonds.)
El matching hallado determina cuáles son los ciclos especiales B y C que seleccionamos.
 - 6) **return** $s_A + |\mathcal{M}|$
-

Lema 2.40. *El Algoritmo 1 obtiene el parámetro $sc(G)$.*

Demostración. Notar que todo ciclo especial B o C del grafo G está representado con una arista en el grafo H , y dos ciclos especiales son disjuntos si y sólo si sus aristas correspondientes en H no tienen extremos en común. Entonces el tamaño de un matching máximo en H es la máxima cantidad de ciclos B o C disjuntos sin bad-cut vértices.

Dado que los ciclos especiales A son disjuntos con cualquier otro ciclo especial, la máxima cantidad de ciclos especiales sin bad-cut vértices es:

$$sc(G) = s_A + |\mathcal{M}| .$$

□

Observación 2.41. Notar que este algoritmo además del valor de $bc(G)$ y $sc(G)$, puede dar exactamente cuáles son los vértices bad-cut, sus C_u asociados y un conjunto de tamaño máximo de ciclos especiales disjuntos que no contienen bad-cut vértices.

A partir del Algoritmo 1 es posible incorporar una pequeña modificación para hallar los X -cut vértices, $bc(G; X)$, los ciclos X -especiales y el valor de $sc(G; X)$. Si tenemos en cuenta que determinar $\delta_1(G; X)$ es lineal, llegamos a que evaluar la función $\psi(G; X)$ para un grafo cualquiera y $X \subseteq V(G)$ puede hacerse en tiempo polinomial.

Dado que nuestro algoritmo encuentra cuáles son los vértices involucrados y sabemos que se necesitan dos vértices para dominar cada ciclo especial y cada $C_u \cup \{u\}$ con u bad-cut vértice, podemos usarlo para obtener un conjunto D que domina esa parte del grafo de manera óptima.

Corolario 2.42. Sea G un grafo tal que todo vértice está en alguna de las estructuras de las Figuras 12 y 13. Entonces es posible hallar en tiempo polinomial un conjunto dominante D que verifica

$$|D| \leq \frac{2|V(G)|}{5} .$$

Demostración. Repasamos los pasos del Algoritmo 1 para mostrar cómo se seleccionan los vértices del conjunto dominante.

En el paso (1), al encontrar un bad-cut vértice u agregamos u a D y agregamos un vértice de cada C_4 inducido en $G - u$ para dominar el vértice no adyacente con u . Hasta ahora la proporción

$$\frac{|D|}{\text{vértices dominados por } D}$$

es menor o igual a $\frac{2}{5}$.

En el paso (3) al encontrar un ciclo especial A seleccionamos dos vértices, entonces la proporción anterior sigue siendo menor o igual a $\frac{2}{5}$.

En el paso (4) seleccionamos todos los vértices de H . Observar que cada arista $e = (u, v)$ de H representa uno o varios ciclos especiales B o C y los vértices u, v dominan en G a los ciclos representados. Por lo tanto, los vértices de H dominan al menos $|V(H)| + 3|E(H)|$ vértices en G .

Dado que $|E(G)| \geq \frac{|V(H)|}{2}$, los $|V(H)|$ vértices dominan al menos $|V(H)| + \frac{3}{2}|V(H)| = \frac{5}{2}|V(H)|$ vértices y se mantiene la proporción buscada.

En consecuencia, el conjunto D que armamos domina todo el grafo y cumple

$$|D| \leq \frac{2|V(G)|}{5} .$$

□

Capítulo 3

Producto de grafos

Si pensamos el producto como una operación binaria entre grafos, el producto de G y H puede ser definido de varias maneras. Sin embargo, al pedir propiedades naturales como la asociatividad, los posibles productos son muy pocos. Un análisis completo puede encontrarse en [42].

La conjetura de Vizing, formulada en [41] en el año 1968, propone una cota inferior para el número de dominación del producto Cartesiano de grafos. La cota parece natural pero aún no ha sido probada convirtiéndose así en el problema abierto más importante en dominación de grafos.

En la primera sección de este capítulo, definimos los productos de grafos y damos propiedades de las matrices de adyacencia y la distancia en grafos producto.

En la segunda sección estudiamos el problema de dominación en el producto directo y mostramos que la cota superior de γ es multiplicativa y la cota inferior es aditiva en la cantidad de factores. Mostramos además que ambas cotas son ajustadas.

La tercera sección está dedicada al problema de dominación en el producto Cartesiano. Damos primero una cota superior y luego presentamos distintas alternativas que se están desarrollando para decidir si la cota inferior propuesta por Vizing es válida o no.

Uno de los enfoques es determinar las clases de grafos para los que la conjetura de Vizing es válida. Nuestro trabajo aquí es mostrar que los grafos de intervalo satisfacen la conjetura de Vizing. Otro argumento usa cierta partición de los vértices de los factores y estudiamos cómo este argumento da una cota inferior multiplicativa para γ y permite probar la conjetura para grafos cordales. Por último, presentamos nuestro trabajo en el que mostramos que los grafos arco-circulares también satisfacen la conjetura de Vizing.

3.1. Tres productos fundamentales

En esta sección, siguiendo el libro [42], definiremos los tres productos fundamentales de grafos y daremos algunas propiedades básicas que nos permitan atacar, en las siguientes secciones el problema de conjunto dominante en grafos producto.

Definición 3.1. El *producto directo* de los grafos G y H es el grafo $G \times H = (V, E)$ con vértices $V = V(G) \times V(H)$ y aristas $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ si u_1 y u_2 son adyacentes en G y v_1 y v_2 son adyacentes en H .

El producto directo de grafos aparece en la bibliografía con distintos nombres como por ejemplo: producto Kronecker, producto cruz, producto tensorial, producto o producto categórico. Pero solo desde el punto de vista categórico, sólo los últimos dos nombres son apropiados.

Definición 3.2. El *producto Cartesiano* de los grafos G y H es el grafo $G \square H = (V, E)$ con vértices $V = V(G) \times V(H)$ y aristas $((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \in E$ si $u_1 = u_2$ y v_1 y v_2 son adyacentes en H o bien $v_1 = v_2$ y u_1 y u_2 son adyacentes en G .

Definición 3.3. El *producto fuerte* de los grafos G y H es el grafo $G \boxtimes H = (V, E)$ con vértices $V = V(G) \times V(H)$ y aristas $E = E(G \times H) \cup E(G \square H)$.

La notación \times para el producto directo, \square para el producto Cartesiano y \boxtimes para el producto fuerte están motivadas por cómo queda el grafo producto de dos aristas.

A modo de ejemplo y para mostrar las diferencias en las definiciones, la Figura 1 muestra los grafos producto de P_3 y P_4 .

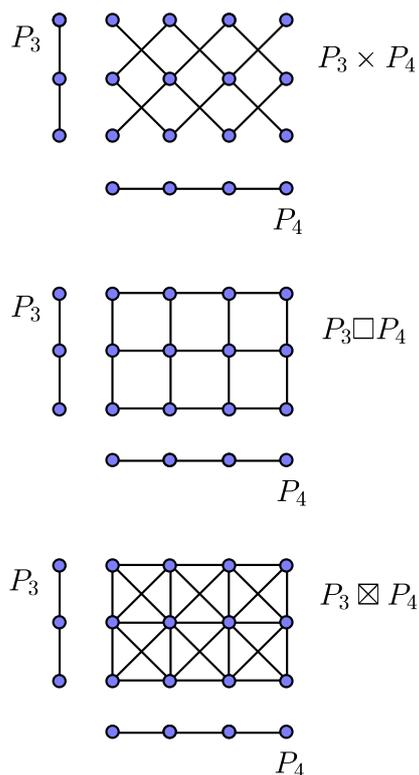


Figura 1: Productos de Grafos

A partir de las definiciones es inmediato probar que los tres productos son conmutativos. Ya que la función $(g, h) \rightarrow (h, g)$ es un isomorfismo entre $G * H$ y $H * G$ para cualquiera de los tres productos anteriores.

Con respecto a la asociatividad, la prueba de $(G_1 * G_2) * G_3 \cong G_1 * (G_2 * G_3)$ no es tan evidente pero es esencialmente por definición.

Proposición 3.4. Dados los grafos G_1, G_2 y G_3 , la función $((x_1, x_2), x_3) \rightarrow (x_1, (x_2, x_3))$ es un isomorfismo entre los grafos producto $(G_1 * G_2) * G_3$ y $G_1 * (G_2 * G_3)$ para cualquiera de los productos Cartesiano, directo o fuerte.

La asociatividad nos permite omitir paréntesis al trabajar con el producto de varios grafos y usar notaciones como $\times_{i=1}^k G_i$.

3.1.1. Matrices de adyacencia de grafos producto

Una manera natural de representar grafos es a partir de la matriz de adyacencia. Dado un ordenamiento de los vértices de G , digamos u_1, \dots, u_n , la matriz de adyacencia es

$$A = (a_{i,j})_{i,j \leq n} \quad \text{donde} \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_i \text{ y } u_j \text{ son adyacentes} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

La matriz de adyacencia de los grafos producto puede obtenerse a partir de la matriz de adyacencia de los factores usando el producto Kronecker de matrices: $A \otimes B$ es la matriz armada por bloques poniendo en cada entrada $a_{i,j}$ un bloque igual a $a_{i,j} \cdot B$.

Para el producto directo, si A_G y A_H son las matrices de adyacencia de G y H respecto al ordenamiento g_1, g_2, \dots, g_n y h_1, h_2, \dots, h_m . Se tiene que $A_{G \times H} = A_G \otimes A_H$ es la matriz de adyacencia del producto cuando ordenamos a los vértices de la siguiente manera

$$(g_1, h_1), (g_1, h_2), \dots, (g_1, h_m), (g_2, h_1), (g_2, h_2), \dots, (g_2, h_m), \dots, (g_n, h_1), (g_n, h_2), \dots, (g_n, h_m) .$$

(Esto justifica que se use el nombre de producto Kronecker para el producto directo de grafos.)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A \otimes B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B \\ \hline B & 0 \end{array} \right)$$

Producto Kronecker

Para el producto Cartesiano y el fuerte, si A_G y A_H son las matrices de adyacencia de G y H , tenemos que

$$A_{G \square H} = I_n \otimes A_H + A_G \otimes I_m$$

$$A_{G \boxtimes H} = A_G \otimes A_H + I_n \otimes A_H + A_G \otimes I_m .$$

Este punto de vista permite simplificar algunas demostraciones. Por ejemplo, si G es bipartito su matriz de adyacencia es una matriz por bloques $C = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$. Si B es la matriz de adyacencia de H , la matriz del producto directo $G \times H$ será $C \otimes B = \begin{pmatrix} 0 & A \otimes B \\ A^T \otimes B & 0 \end{pmatrix}$. La forma por bloques de la matriz muestra que el producto es bipartito. Es decir que el producto directo de un grafo bipartito por cualquier grafo H resulta bipartito.

3.1.2. Proyecciones y distancia

Los vértices en $G * H$ son pares (u, v) con $u \in V(G)$ y $v \in V(H)$, para cualquiera de los productos que definimos. Decimos que u es la *coordenada* G del vértice y v es la *coordenada* H . Llamamos π_G a la proyección sobre la coordenada G (la primera coordenada en $G * H$). Similarmente, π_H es la proyección a la coordenada H .

$$\pi_G : V(G) \times V(H) \rightarrow V(G) \quad \text{y} \quad \pi_H : V(G) \times V(H) \rightarrow V(H).$$

Abusando de la notación, también usaremos $\pi_G(D)$ para $D \subseteq V(G) \times V(H)$. Es decir,

$$\pi_G(D) = \{u \in V(G), \text{ tal que } \exists (u, v) \in D\}$$

Será útil en lo sucesivo considerar los vértices con la misma coordenada en G o en H . Para eso fijamos la siguiente notación. Dado un vértice $v \in H$ notamos con G_v a los vértices con coordenada H igual a v , es decir

$$G_v = V(G) \times \{v\} = \{(u, v) / u \in G\}.$$

Y diremos que G_v es una *copia de* G en el producto $G * H$. Más precisamente diremos que es la copia de G correspondiente al vértice $v \in H$.

Análogamente, fijado $u \in G$, H_u es la copia de H correspondiente a u ,

$$H_u = \{u\} \times V(H) = \{(u, v) / v \in H\}.$$

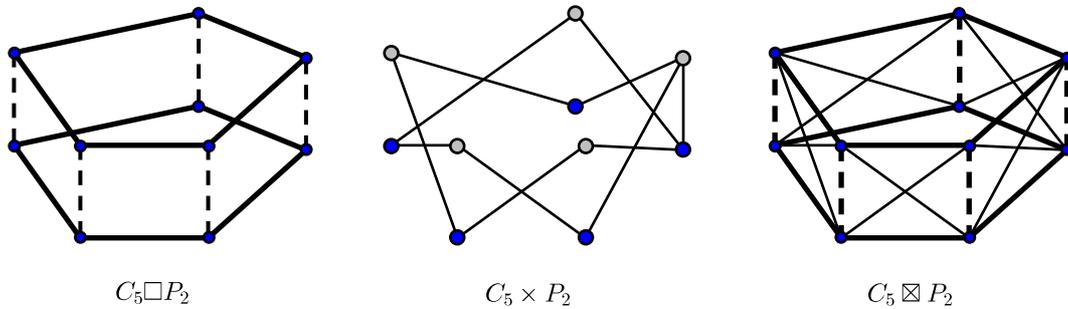


Figura 2: Productos entre C_5 y P_2 y copias de C_5 (en negrita) y P_2 (en líneas punteadas).

Notar que, en los casos del producto Cartesiano o del producto fuerte, cada copia G_v (vista como subgrafo inducido en $G \square H$ o $G \boxtimes H$) es isomorfa al grafo G . Más aún, la proyección π_G es un isomorfismo entre G_v y G para todo $v \in V(H)$.

En cambio, en el producto directo, las copias G_v inducen un subgrafo totalmente desconexo en $G \times H$. Ver Figura 2.

Observación 3.5. Un *homomorfismo* entre los grafos G y H es una función $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $(u, v) \in E(G) \Rightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$.

Por la definición del producto directo, en un grafo $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k$ cada proyección $\pi_i : G \rightarrow G_i$ es un homomorfismo. Además, dados un grafo H y una colección de homomorfismos $\varphi_i : H \rightarrow G_i$, $i = 1, \dots, k$, queda definida la función $x \mapsto (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x))$

y resulta ser un homomorfismo $\varphi : H \rightarrow G$.

De estos dos hechos se desprende que todo homomorfismo $\varphi : H \rightarrow G$ es de la forma $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x))$ con $\varphi_i : H \rightarrow G_i$ homomorfismos y $\pi_i \circ \varphi = \varphi_i$.

Esta propiedad es justamente la propiedad universal del producto¹ en la categoría de grafos. Lo que justifica el nombre de producto categórico usado por algunos autores para el producto directo.

Con respecto al problema de la distancia en los grafos producto, analizamos sólo los productos directo y Cartesiano pues son los que usaremos más adelante.

Lema 3.6. Sean $(x, y), (u, v)$ vértices del producto directo $G \times H$. La distancia en el grafo producto cumple $d_{G \times H}((x, y), (u, v)) = \min\{d; \exists \text{ caminos de longitud } d \text{ no necesariamente simples de } x \text{ a } u \text{ en el grafo } G \text{ y de } y \text{ a } v \text{ en el grafo } H\}$.

Demostración. \geq) Dado un camino de longitud mínima d en el grafo producto $G \times H$, digamos $C : (x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_d, y_d) = (u, v)$. La proyección $\pi_G(C)$ es un camino no necesariamente simple de x a u de longitud d en G . Ya que $(x_i, y_i) \sim (x_{i+1}, y_{i+1})$ en X implica que x_i y x_{i+1} son vértices (distintos) adyacentes en G . De la misma manera, $\pi_H(C)$ es un camino no necesariamente simple de y a v de longitud d en H .

\leq) Por otro lado, sea d el mínimo entero tal que existen caminos $x = x_1, x_2, \dots, x_d = u$ en G y $y = y_1, y_2, \dots, y_d = v$ en H entonces los vértices (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) son adyacentes en el grafo producto $G \times H$ para todo $i = 1, \dots, d - 1$. Es decir que $(x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_d, y_d) = (u, v)$ es un camino en $G \times H$ y la distancia en el grafo producto es a lo sumo d . \square

En particular, este lema implica que si no existen caminos, uno en G y otro en H , de la misma paridad, entonces los vértices correspondientes están en distintas componentes conexas de $G \times H$. El producto directo de grafos conexos no necesariamente es conexo.

Lema 3.7. Sean (x, y) y (u, v) vértices del producto Cartesiano $G \square H$. La distancia en el grafo producto cumple $d_{G \square H}((x, y), (u, v)) = d_G(x, u) + d_H(y, v)$.

Demostración. \geq) Dado un camino de longitud mínima d en el grafo producto $G \square H$, digamos $C : (x, y) = (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_d, y_d) = (u, v)$. La proyección $\pi_G(C)$ es una sucesión de vértices en G y $(x_i, y_i) \sim (x_{i+1}, y_{i+1}) \Rightarrow x_i = x_{i+1}$ o $(x_i, x_{i+1}) \in E(G)$. Si en la sucesión x_1, x_2, \dots, x_d omitimos las repeticiones consecutivas de vértices, obtenemos un camino en G de x a u de longitud $d_1 \leq d$. De la misma manera $\pi_H(C)$ induce un camino de y a v de longitud $d_2 \leq d$ en H . Además se verifica que $d_1 + d_2 = d$ porque en cada par $(x_i, y_i) \sim (x_{i+1}, y_{i+1})$ se cumple uno y sólo uno de $x_i = x_{i+1}$ o $y_i = y_{i+1}$. Esto prueba que $d_{G \square H}((x, y), (u, v)) = d_1 + d_2 \geq d_G(x, u) + d_H(y, v)$.

\leq) Por otro lado, si tenemos caminos de longitud mínima $x = x_1, x_2, \dots, x_{d_1} = u$ en G y $y = y_1, y_2, \dots, y_{d_2} = v$ en H entonces la sucesión de vértices en el producto Cartesiano $G \square H$, $(x_1, y_1), (x_2, y_1), \dots, (x_{d_1}, y_1), (x_{d_1}, y_2), \dots, (x_{d_1}, y_{d_2})$ es un camino de longitud $d_1 + d_2$. Esto prueba que $d_{G \square H}((x, y), (u, v)) \leq d_1 + d_2 = d_G(x, u) + d_H(y, v)$ \square

¹Sean \mathcal{C} una categoría y $\{X_i, i \in I\}$ una colección de objetos de \mathcal{C} no necesariamente distintos. Decimos que $X \in \mathcal{C}$ es el producto de los X_i si existen morfismos $p_i : X \rightarrow X_i$ (llamados las proyecciones canónicas) que satisfacen la siguiente Propiedad Universal: Para un objeto Y de \mathcal{C} y una colección de morfismos $\varphi_i : Y \rightarrow X_i$ existe un único morfismo $\varphi : Y \rightarrow X$ tal que $p_i \circ \varphi = \varphi_i$ para todo $i \in I$.

3.2. Dominación en el producto directo de grafos

En esta sección usaremos a menudo propiedades de la proyección de conjuntos de vértices de $G \times H$ a los factores G y H .

Lema 3.8. *Si D un conjunto dominante de $G \times H$, entonces $\pi_G(D)$ es conjunto dominante del grafo G .*

Más aún, alcanza con pedir que D domine los vértices de una copia G_h para un vértice $h \in V(H)$ fijo.

Análogamente, si D domina H_g para un $g \in V(G)$ entonces $\pi_H(D)$ es conjunto dominante de H .

Demostración. Dado $g \in G$, el vértice (g, h) cumple que $(g, h) \in D$ o bien es adyacente a $(g', h') \in D$ en el producto directo. Entonces $g \in \pi_G(D)$ o $g' \in \pi_G(D)$ con $(g, g') \in E(G)$. En ambos casos, resulta que g está dominado por $\pi_G(D)$. \square

Este lema implica que el número de dominación del producto directo es mayor o igual al número de dominación de cada factor. Más adelante conseguiremos mejores cotas inferiores usando la misma idea.

Un hecho importante es que la estructura del producto directo implica que si dos vértices (x, y) y (u, v) coinciden en alguna coordenada entonces no son adyacentes.

3.2.1. Cotas superiores para γ

Fijamos ahora un poco de notación y damos cotas superiores ajustadas para $\gamma(G \times H)$.

Notación. Dados un grafo G y un conjunto totalmente dominante D , $\gamma_D(G)$ es el tamaño del menor subconjunto de D que domina G .

Teorema 3.9. [6] *Dados dos grafos cualesquiera G y H ,*

$$\gamma(G \times H) \leq \min\{\gamma_D(G)|D'| + \gamma_{D'}(H)|D| - \gamma_D(G)\gamma_{D'}(H)\}$$

donde el mínimo se toma sobre todos los conjuntos totalmente dominantes D de G y D' de H .

Demostración. Sean D y D' conjuntos totalmente dominantes de G y H y sean $A \subseteq D$ y $B \subseteq D'$ conjuntos dominantes de tamaño $\gamma_D(G)$ y $\gamma_{D'}(H)$, respectivamente.

Afirmamos que $X = (A \times D') \cup (D \times B)$ es un conjunto dominante de $G \times H$. En efecto, tomamos un vértice $(u, v) \notin X$. Tenemos tres casos según el siguiente esquema:

	A	D	$G \setminus D$
B	X	X	II
D'	X	I	II
$H \setminus D'$	III	III	II

- I. Si $u \in D \setminus A$ y $v \in D' \setminus B$, como A es conjunto dominante de G , existe $a \in A$ adyacente a u ; como B es conjunto dominante de H , existe $b \in B$ adyacente a v . Luego, el vértice $(a, b) \in X$ es adyacente a (u, v) en el grafo $G \times H$.
- II. Si $u \in G \setminus D$ y v es cualquier vértice de H , u es adyacente a un vértice $a \in A$, pues A domina G y v es adyacente a $d \in D'$ pues D' domina totalmente H . Entonces $(a, d) \in X$ es adyacente a (u, v) .
- III. Análogamente, si u es cualquier vértice en G y $v \in H \setminus D'$, existe un vértice en X adyacente a (u, v) .

Esto prueba que X es un conjunto dominante de $G \times H$. Luego,

$$\begin{aligned} \gamma(G \times H) &\leq |A \times D'| + |D \times B| - |(A \times D') \cap (D \times B)| \\ &\leq |A||D'| + |D||B| - |A||B| \\ &\leq \gamma_D(G)|D'| + |D|\gamma_{D'}(H) - \gamma_D(G)\gamma_{D'}(H) \end{aligned}$$

□

Corolario 3.10. [6] Para cualquier par de grafos G y H , sin vértices aislados,

$$\gamma(G \times H) \leq 3\gamma(G)\gamma(H).$$

Demostración. Sea A un γ -set de G . Agregando un vecino de $u \in A$ por cada vértice aislado en el subgrafo inducido por A , se obtiene un conjunto D totalmente dominante. Notar que $\gamma_D(G) = |A| = \gamma(G)$ y puede pasar que D no tenga tamaño $\gamma_t(G)$, sin embargo se verifica $|D| \leq 2|A| = 2\gamma(G)$. De la misma manera, tomamos B un γ -set de H y lo extendemos a un conjunto totalmente dominante D' . El teorema anterior afirma que

$$\begin{aligned} \gamma(G \times H) &\leq |A| \cdot |D'| + |B| \cdot |D| - |A| \cdot |B| \\ &\leq \gamma(G) \cdot 2\gamma(H) + 2\gamma(G) \cdot \gamma(H) - \gamma(G)\gamma(H) = 3\gamma(G)\gamma(H). \end{aligned}$$

□

Notar que si $|D| < 2\gamma(G)$, la desigualdad en (3.10) es estricta para cualquier grafo H . Esto pasa cuando conseguimos A un γ -set que no forma un packing. Por ejemplo, si $\rho(G) < \gamma(G)$ hay vértices en el subgrafo inducido por A que no son aislados y por lo tanto para armar D es necesario agregar menos de $|A|$ vértices.

La cota del Corolario 3.10 es ajustada. Un ejemplo sencillo es $G = H = P_3$, donde se cumple que $\gamma(G) = \gamma(H) = 1$. La Figura 3 es el producto directo. Tiene dos componentes conexas, una de ellas es un C_4 (que tiene número de dominación 2) y la otra se puede dominar con un vértice. Los 3 vértices marcados forman un γ -set de $P_3 \times P_3$. Se pueden armar más ejemplos de grafos que alcancen la igualdad en (3.10) tomando uniones disjuntas de P_3 . Es decir $G = \cup_{i=1}^n P_3$, $H = \cup_{j=1}^m P_3$.

Ahora mostraremos una construcción para obtener grafos conexos que cumplan la igualdad en el Corolario 3.10. Esta construcción permite obtener grafos con número de dominación arbitrario y puede hacerse en tiempo polinomial.

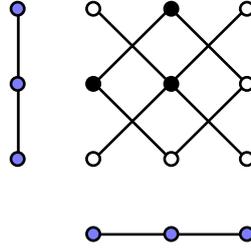


Figura 3: Grafo $P_3 \times P_3$

Consideramos un grafo G tal que $\rho(G) = \gamma(G)$ y existe un conjunto D que es, simultáneamente, máximo packing y γ -set de G . Después veremos cómo conseguir grafos así. Notamos G^+ al grafo que se obtiene al agregar dos hojas a cada uno de los vértices de D . Este nuevo grafo tiene un único conjunto γ -set que es D .

Proposición 3.11. [6] Sean G y H grafos conexos cada uno conteniendo un conjunto que es simultáneamente máximo packing y γ -set. Entonces $\gamma(G^+ \times H^+) = 3\gamma(G^+)\gamma(H^+)$.

Demostración. Sean D y D' mínimos conjuntos dominantes de G y H . Armamos los grafos G^+ y H^+ y notamos x_p y x_q a las hojas (en G^+) de un vértice $x \in D$. Similarmente, y_p y y_q son las hojas de $y \in D'$ en H^+ .

En el producto $G^+ \times H^+$ cada vértice de $D \times D'$ tiene las siguientes hojas: (x_p, y_p) , (x_p, y_q) , (x_q, y_p) , (x_q, y_q) . (Ver los vértices grises de la Figura 4). Se sigue que cualquier conjunto dominante mínimo de $G^+ \times H^+$ debe contener a $D \times D'$. Probaremos que cualquier conjunto dominante debe tener como mínimo $3|D||D'|$ vértices.

Sean $(x, y), (u, v)$ vértices distintos de $D \times D'$ observar que los vértices $(x, y_p), (x, y_q), (x_p, y), (x_q, y)$ inducen un subgrafo $C(x, y)$ isomorfo a C_4 . (Ver Figura 4). De la misma manera el subgrafo $C(u, v)$ es isomorfo a C_4 . Afirmamos que $C(u, v)$ y $C(x, y)$ están a distancia por lo menos 4. Aquí usaremos fuertemente el Lema 3.6. Primero, (x, y) y (u, v) tienen al menos una coordenada distinta, digamos $x \neq u$, entonces $d_G(x, u) \geq 3$ porque $x, u \in D$ y D es packing. Por lo tanto $d_{G^+ \times H^+}((x, y), (u, v)) \geq 3$.

Más aún, la distancia en G entre una hoja de x y el vértice u es por lo menos 4, y entre una hoja de x y una hoja de u es por lo menos 5. Por lo tanto la distancia en $G^+ \times H^+$ entre

- I. un vértice (x_i, y) y cualquier vértice de $C(u, v)$ es por lo menos 4
- II. un vértice (x, y_i) y (u_j, v) es por lo menos 4

Nos queda ver que la distancia entre (x, y_i) y (u, v_j) es por lo menos 4 para $i, j \in \{p, q\}$. Si $y \neq v$ esto vale por la distancia en la segunda coordenada. Si $y = v$ notar que los caminos en H que empiezan y terminan en un mismo vértice o que van de y_p a y_q tienen longitud par. Entonces la distancia en $G^+ \times H^+$ entre

- III. un vértice (x, y_i) y (u, v_j) es par y mayor o igual que 3, o sea por lo menos 4

Se sigue que un vértice en $G^+ \times H^+$ no puede dominar simultáneamente un vértice en $C(x, y)$ y uno en $C(u, v)$. Por lo tanto se necesitan 2 vértices para dominar cada $C(x, y)$.

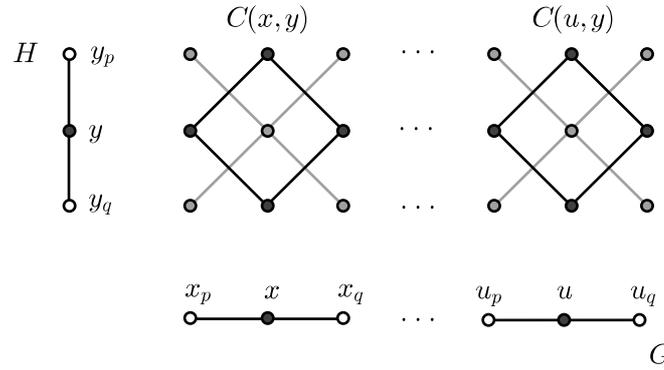


Figura 4: C_4 asociados a (x, y) y (u, y)

Además afirmamos que esos vértices no están en $D \times D'$. En efecto, un vértice (g, h) en $C(x, y)$ tiene la coordenada $g \in D$ o bien la coordenada $h \in D'$. Si $g \in D$, un vértice $(u, v) \in D \times D'$ cumple $u = g$ o $N[u] \cap N[g] = \emptyset$. Entonces u y g no son adyacentes. El caso $h \in D'$ es análogo.

Concluimos un conjunto dominante de $G^+ \times H^+$ debe contener a $D \times D'$ y dos vértices por cada C_4 que corresponde a $(x, y) \in D \times D'$. Así,

$$\gamma(G^+ \times H^+) \geq 3|D \times D'| = 3\gamma(G^+)\gamma(H^+) .$$

El Corolario 3.10 da la otra desigualdad, completando la demostración. □

Hay muchos grafos que verifican las hipótesis de la Proposición 3.11. Tomando un grafo conexo cualquiera, subdividimos cada arista con dos vértices intermedios. Los vértices del grafo original forman un máximo packing y también un γ -set y esta construcción puede hacerse en tiempo polinomial.

En algunos casos, la cota del Teorema 3.9 puede expresarse más explícitamente. Por ejemplo:

Corolario 3.12. [6] Sean G y H grafos que tienen un γ -set que puede extenderse a un γ_t -set. Entonces

$$\gamma(G \times H) \leq \gamma(G)\gamma_t(H) + \gamma_t(G)\gamma(H) - \gamma(G)\gamma(H) .$$

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.9 para A y A' conjuntos dominantes mínimos de G y H que se extienden a D y D' conjuntos totalmente dominantes de tamaño mínimo. De esta manera tenemos $\gamma_D(G) = |A| = \gamma(G)$ y $|D| = \gamma_t(G)$. Similarmente para H , $\gamma_{D'}(H) = |A'| = \gamma(H)$ y $|D'| = \gamma_t(H)$. □

Corolario 3.13. [6] Si se verifica $\gamma(G) = \gamma_t(G)$ y $\gamma(H) = \gamma_t(H)$. Entonces

$$\gamma(G \times H) \leq \gamma(G)\gamma(H) .$$

3.2.2. Cotas inferiores para γ

A continuación presentamos resultados sobre cotas inferiores para el número de dominación en el producto directo. La cota superior para γ es multiplicativa, sin embargo veremos que la cota inferior no es multiplicativa sino aditiva.

Teorema 3.14. [34] *Dados G y H grafos,*

$$\gamma(G \times H) \geq \max\{\rho(G)\gamma(H), \rho(H)\gamma(G)\}.$$

Demostración. Sean $D \subset G \times H$ un conjunto dominante de tamaño mínimo y $A \subset G$ un packing. Para cualquier par de vértices distintos $a_1, a_2 \in A$ tenemos que $d_G(a_1, a_2) \geq 3$ ya que los vecindarios cerrados son disjuntos. Entonces la distancia entre cualquier vértice de H_{a_1} y uno de H_{a_2} es por lo menos 3 (Lema 3.10). Y por lo tanto ningún vértice en el producto directo puede dominar simultáneamente vértices de H_{a_1} y H_{a_2} .

Fijado $a \in A$, los vértices $D_1 \subseteq D$ que dominan H_a cumplen que $\pi_H(D_1)$ es un conjunto dominante de H (Lema 3.8).

Hemos probado que usando $|D|$ vértices es posible armar $|A|$ conjuntos dominantes de H . Análogamente, dado B un packing de H es posible armar $|B|$ conjuntos dominantes de G . En conclusión,

$$|D| = \gamma(G \times H) \geq \max\{\rho(G)\gamma(H), \rho(H)\gamma(G)\}.$$

□

Usando este resultado obtenemos que si G y H verifican las hipótesis del Corolario 3.13 y además $\rho(G) = \gamma(G)$ o $\rho(H) = \gamma(H)$, entonces $\gamma(G \times H) = \gamma(G)\gamma(H)$.

El Teorema 3.14 puede mejorarse un poco al reemplazar γ por γ_t .

Teorema 3.15. [36] *Sean G y H grafos sin vértices aislados y packing number ρ ,*

$$\gamma(G \times H) \geq \max\{\rho(G)\gamma_t(H), \rho(H)\gamma_t(G)\}.$$

Demostración. Sean D un conjunto dominante mínimo de $G \times H$ y A un máximo packing de G . Los conjuntos $N[a] \times V(H)$ para $a \in A$ son disjuntos de a pares. Entonces alcanza con probar que $|D \cap N[a] \times V(H)| \geq \gamma_t(H)$. Pues esto implica que con $|D|$ vértices es posible armar $|A|$ conjuntos totalmente dominantes de H . Es decir, $\gamma(G \times H) \geq |A|\gamma_t(H) = \rho(G)\gamma_t(H)$. Y análogamente para $\rho(H)\gamma_t(G)$.

Fijado $a \in A$ llamamos $M = D \cap (N[a] \times V(H))$. Cada vértice de H_a está dominado por M . Si (a, h) está dominado sólo por sí mismo, cambiamos M quitando el vértice (a, h) y agregando (a', h') con $a \sim a'$ y $h \sim h'$ (a' y h' existen porque G y H no tienen vértices aislados). Luego de hacer esto para cada (a, h) dominado sólo por sí mismo, llegamos a un nuevo conjunto M con la propiedad de que cada (a, h) con $h \in H$ tiene un vecino en M (es decir que M domina totalmente a H_a). En consecuencia cada vértice $h \in H$ tiene un vecino en $\pi_H(M)$. Es decir que $\pi_H(M)$ es un conjunto totalmente dominante de H y

$$\gamma_t(H) \leq |\pi_H(M)| \leq |M| \leq |D \cap (N[a] \times V(H))|.$$

□

Hay trabajos en los que se calcula el número de dominación del producto directo de ciertos grafos. Estos resultados involucran productos de dos caminos, el producto de un camino por el complemento de un camino, el producto de un K_2 por un árbol, el producto de un grafo bipartito por un ciclo impar y pueden encontrarse en [15, 26, 27].

Antes de probar la cota inferior ajustada del número de dominación, calcularemos el número de dominación para el producto de finitos grafos completos:

Teorema 3.16. [32] Sea $G = \times_{i=1}^t K_{n_i}$ con $t \geq 3$ y $n_i \geq 2$ para todo i , entonces

$$\gamma(G) \geq t + 1.$$

Demostración. Por el contrario, supongamos que existe un conjunto dominante de tamaño t , digamos $D = \{(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_t^{(1)}), (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_t^{(2)}), \dots, (x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \dots, x_t^{(t)})\}$. Y sean y_k, z_k vértices distintos de K_{n_k} para $k = 1, \dots, t$.

Supongamos que existe un coordenada i tal que al menos dos vértices de D coinciden en la coordenada i . Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que es la primera coordenada. Si $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \neq x_1^{(s)}$ para $s > 2$, consideramos los vértices

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(3)}, x_3^{(4)}, \dots, x_{t-1}^{(t)}, y_t) \quad \text{y} \quad (x_1^{(1)}, x_2^{(3)}, x_3^{(4)}, \dots, x_{t-1}^{(t)}, z_t),$$

Estos vértices coinciden con cada vértice de D en al menos una coordenada. Por lo tanto no son adyacentes a ningún vértice de D . Como ambos tienen la primera coordenada igual a la del primer vértice de D , al menos uno de ellos no está en D . Entonces ese vértice no está dominado. Lo cual es absurdo.

Si $x_1^{(1)} = x_1^{(2)} = \dots = x_1^{(j)} \neq x_1^{(s)}$ para $s > j$, siguiendo la misma idea consideramos los vértices de la forma

$$(x_1^{(1)}, x_2^{(j+1)}, x_3^{(j+2)}, \dots, x_{t-j}^{(t)}, w_{t-j+1}, \dots, w_t), \quad \text{con } w_k \in \{y_k, z_k\}.$$

Estos vértices no son adyacentes a ningún vértice de D (pues coinciden en alguna coordenada) y sólo pueden ser iguales a los primeros j vértices de D . Como hay 2^j vértices de la forma anterior y $2^j > j$, tenemos que existe un vértice que no está en D y no está dominado. Absurdo.

La otra situación sería que fijada una coordenada cualquiera, los elementos de D fueran todos distintos. Entonces el vértice $(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \dots, x_t^{(t)})$ no está en D y no es adyacente a los vértices de D , es decir, no está dominado. Nuevamente, absurdo.

Luego, un conjunto dominante de G debe tener por lo menos $t + 1$ vértices. □

La cota del Teorema 3.16 es ajustada, y también es ajustada como cota del número de total dominación. (Recordar que siempre se cumple $\gamma_t \geq \gamma$.) Eso lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.17. [32] Sea $G = \times_{i=1}^t K_{n_i}$ donde $t \geq 3$ y $n_i > t$ para todo i , entonces

$$\gamma(G) = \gamma_t(G) = t + 1.$$

En efecto, numeramos a los vértices de cada K_{n_i} con los números del 0 al $n_i - 1$ (por hipótesis $n_i - 1 \geq t$). Probaremos que el conjunto $D = (0, 0, \dots, 0), (1, 1, \dots, 1), \dots, (t, t, \dots, t)$ domina (totalmente) a G .

Dado que G es producto directo de grafos completos, dos vértices de G son adyacentes si y sólo si no coinciden en ninguna coordenada K_{n_i} . Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_t) \in V(G) \setminus D$ y supongamos que no está dominado. Entonces x y cualquier vértice en D deben coincidir en una coordenada. Pero no es posible que los $t + 1$ elementos $\{0, 1, \dots, t\}$ aparezcan en las t coordenadas de x . Por lo tanto D es un conjunto dominante. Además induce un subgrafo completo en G , entonces resulta totalmente dominante. Esto implica que $\gamma(G) \leq \gamma_t(G) \leq |D| = t + 1$. La cota del Teorema 3.16 da la otra desigualdad.

El ejemplo anterior muestra que para el producto directo de grafos completos el número de dominación es lineal en la cantidad de factores. En consecuencia, las cotas inferiores para $\gamma(G \times H)$ no pueden ser multiplicativas en $\gamma(G)$ y $\gamma(H)$. Probaremos a continuación una cota inferior aditiva para el número de dominación del producto directo y mostraremos con una serie de ejemplos que la cota es ajustada.

Teorema 3.18. [32] Sean G y H dos grafos,

$$\gamma(G \times H) \geq \gamma(G) + \gamma(H) - 1.$$

Demostración. Supongamos que existe un conjunto dominante D con $|D| = \gamma(G) + \gamma(H) - 2$. Por el Lema 3.8 tenemos que las proyecciones de D sobre G y H son conjuntos dominantes. Entonces $|\pi_G(D)| \geq \gamma(G)$ y $|\pi_H(D)| \geq \gamma(H)$. Notar que si $\gamma(G) = 1$ queda que $|D| = \gamma(H) - 1$ y $\pi_H(D)$ es conjunto dominante de H de tamaño menor que $\gamma(H)$, lo cual es absurdo. Por lo tanto podemos asumir que $\gamma(G), \gamma(H) \geq 2$.

Dado que $\pi_G(D)$ domina G , tenemos $|\pi_G(D)| \geq \gamma(G)$ y por lo tanto existe un subconjunto de D ,

$$D_0 = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{\gamma(G)-1}, y_{\gamma(G)-1})\},$$

tal que las primeras coordenadas son distintas entre sí.

Como $|\pi_G(D_0)| = \gamma(G) - 1$, tomamos un $x \in V(G)$ que no esté dominado por $\pi_G(D_0)$ (esto es: x no es adyacente a ningún vértice en $\pi_G(D_0)$ y x no está en $\pi_G(D_0)$.) Notar que $|D \setminus D_0| = \gamma(H) - 1$ y $|\pi_H(D \setminus D_0)| < \gamma(H)$ por lo que existe $y \in V(H)$ que no está dominado por $\pi_H(D \setminus D_0)$. Resulta que el vértice (x, y) no está dominado por D_0 (pues la primera coordenada no es adyacente ni igual a los vértices en $\pi_G(D_0)$) y no está dominado por $D \setminus D_0$ (pues la segunda coordenada no es adyacente ni igual a los vértices en $\pi_H(D \setminus D_0)$). En conclusión, D no domina el vértice (x, y) . Absurdo. \square

La cota inferior dada por del Teorema 3.18 es ajustada. Podemos usar el Ejemplo 3.17 para armar familias de grafos producto con número de dominación arbitrario que alcancen la igualdad en (3.18).

Tomamos $G = H = \times_{i=1}^n K_{2n+1}$ con $n \geq 3$. Por el Ejemplo 3.17 estos grafos tienen número de dominación $n + 1$ y $\gamma(G \times H) = 2n + 1$. Con estos ejemplos, conseguimos grafos que alcanzan la igualdad en (3.18) y $\gamma(G \times H)$ es impar y mayor o igual que 7.

Para el caso par, podemos tomar $G = K_{2n}^n$ y $H = K_{2n}^{n-1}$ con $n \geq 3$. Se cumple que

$\gamma(G) = n + 1, \gamma(H) = n$ y $\gamma(G \times H) = 2n$. En [32] se dan ejemplos para cuando $G \times H$ tiene número de dominación menor o igual que 5. Con el resultado llamativo que si G y H son grafos que alcanzan la igualdad en el Teorema 3.18, y no son K_1 entonces $|\pi_G(D)| = |\pi_H(D)| = \gamma(G)\gamma(H) - 1$ (donde D es γ -set de $G \times H$).

Finalizamos esta sección comentando que en 1995 Gravier y Khelladi plantearon una conjetura parecida a la conjetura de Vizing: $\gamma(G \times H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$. En 1996 Nowakowski y Rall [34] e independientemente, Klaszár y Zmazek probaron que esta afirmación es falsa mostrando una serie de contraejemplos. Los ejemplos que armamos en el párrafo anterior también constiruyen una serie de contraejemplos ya que

$$\gamma(G)\gamma(H) - \gamma(G \times H) = (n + 1)(n + 1) - (2n + 1) = n^2.$$

3.3. Dominación en el producto Cartesiano de grafos

El problema de dominación en el producto Cartesiano está inevitablemente ligado a la conjetura de Vizing que enunciamos a continuación.

Conjetura 3.19 (Vizing). [41] Para cualquier par de grafos G y H , se cumple

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H).$$

En esta sección presentaremos primero una cota superior para $\gamma(G \square H)$ para después tratar el tema de las cotas inferiores. Posteriormente desarrollaremos las distintas alternativas para tratar la conjetura de Vizing. Esto nos permitirá ir encontrando varias clases de grafos que verifican la conjetura de Vizing y presentar nuestro trabajo que prueba la conjetura para los grafos de intervalo y los arco-circulares.

Lema 3.20. Si D un conjunto dominante de $G \square H$ entonces $\pi_G(D)$ es un conjunto dominante del grafo G .

Más en general, sean $A \subseteq V(G)$ y $D \subseteq V(G) \times V(H)$ tales que D domina una copia A_h para un $h \in H$ en el producto Cartesiano, entonces $\pi_G(D)$ domina A en el grafo G .

Análogamente, dado $B \subseteq V(H)$ si D domina B_g en $G \square H$ para un $g \in G$ entonces $\pi_H(D)$ domina B en H .

Demostración. Dado $a \in A$ el vértice (a, h) cumple que pertenece a D o bien es adyacente a $(u, v) \in D$ en el producto Cartesiano. Lo que implica que $a = u$ o $(a, u) \in E(G)$. Por lo tanto $a \in \pi_G(D)$ o $u \in \pi_G(D)$. En ambos casos resulta que a está dominado por $\pi_G(D)$. \square

Proposición 3.21. [40] Para cualquier par de grafos G y H se tiene

$$\gamma(G \square H) \leq \min\{\gamma(G)|V(H)|, \gamma(H)|V(G)|\}.$$

Demostración. Sea D un conjunto dominante de G de tamaño mínimo. Observar que esto implica que los vértices de la forma $D \times \{h\}$ dominan la copia G_h . Entonces $D \times V(H)$ es un conjunto dominante de $G \square H$ y por lo tanto $\gamma(G \square H) \leq |D||V(H)| = \gamma(G)|V(H)|$. Similarmente, $\gamma(G \square H) \leq \gamma(H)|V(G)|$. \square

Una observación importante es que la estructura del producto Cartesiano $G \square H$ implica que un vértice (u, v) sólo puede dominar vértices en la misma copia G_v o H_u y sólo puede ser dominado por un vértice que coincida con (u, v) en al menos una coordenada.

Esta observación será la base de algunos de los teoremas que desarrollaremos. En particular, nos permite establecer una cota inferior.

Proposición 3.22. [13] $\gamma(G \square H) \geq \min\{|V(G)|, |V(H)|\}$.

Demostración. Supongamos que D domina el producto Cartesiano y $|D| < |V(G)| \leq |V(H)|$. Por lo tanto existe $g \in V(G)$ tal que H_g no contiene ningún vértice de D . Cada vértice (g, h) con $h \in V(H)$ está dominado por un vértice en D de la forma (g_h, h) (y estos vértices son todos distintos porque tienen la segunda coordenada distinta). Llegamos a $|D| \geq |V(H)|$ que es una contradicción. □

Teorema 3.23. [23] *Dados dos grafos G y H , se tiene que*

$$\gamma(G \square H) \geq \max\{\rho(G)\gamma(H), \rho(H)\gamma(G)\}.$$

Demostración. La prueba es similar al caso del producto directo. Consideramos D un conjunto dominante de $G \square H$ y A un máximo packing de G . Los conjuntos $D \cap N[a]$ son disjuntos dos a dos. Además, un vértice en $D \cap N[a]$ no puede dominar vértices en $H_{a'}$ para $a' \in A$ y $a' \neq a$.

Por lo tanto la copia H_a está dominada por $D \cap N[a]$ y por el Lema 3.20 la proyección $\pi_H(D \cap N[a])$ es un conjunto dominante de H . Es decir que con $|D|$ vértices es posible armar $|A|$ conjuntos dominantes de H y resulta que

$$|D| \geq |A|\gamma(H) = \rho(G)\gamma(H)$$

para cualquier conjunto dominante D .

Similarmente, $\gamma(G \square H) \geq \rho(H)\gamma(G)$. □

3.3.1. La conjetura de Vizing en subclases de grafos

Dado un grafo G decimos que G *satisface la conjetura de Vizing* o bien que la conjetura es *válida para G* si se verifica que $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ para cualquier grafo H .

Con los resultados anteriores podemos obtener algunas clases de grafos para los cuales vale la conjetura de Vizing.

Proposición 3.24. Si G es un grafo con $\gamma(G) = 1$, entonces la conjetura de Vizing es válida para G .

Demostración. Observar que la proyección sobre H de un conjunto dominante D de $G \square H$, resulta ser un conjunto dominante de H (Lema 3.20). Si consideramos D un γ -set tenemos:

$$\gamma(G \square H) = |D| \geq |\pi_H(D)| \geq \gamma(H) = \gamma(G)\gamma(H).$$

□

Proposición 3.25. Si G es un grafo con $\rho(G) = \gamma(G)$, entonces la conjetura de Vizing es válida para G .

Demostración. Es un corolario inmediato del Teorema 3.23. □

Una familia de grafos que tienen máximo packing igual al número de dominación son los árboles² (probado en [31]).

La conjetura de Vizing también es válida cuando G y H son caminos o ciclos. En ese caso el producto Cartesiano es un grafo grilla. El argumento puede armarse observando que un vértice en el producto Cartesiano puede dominar a lo sumo 5 vértices y luego comparar $\gamma(G)\gamma(H) = \left\lceil \frac{|V(G)|}{3} \right\rceil \left\lceil \frac{|V(H)|}{3} \right\rceil$ con $\frac{|V(G)||V(H)|}{5}$.

También se conoce con exactitud el número de dominación de $P_2 \square P_n$ y $C_3 \square C_n$, [22, 25],

$$P_2 \square P_n = \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad \text{y} \quad C_3 \square C_n = n - \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor.$$

Nosotros probaremos la conjetura de Vizing para dos clases de grafos que son más generales: los grafos de intervalo y los grafos arco-circulares. Estas clases contienen a los caminos y ciclos, respectivamente.

Conjetura de Vizing para grafos de intervalo.

Definición 3.26. G es un *grafo de intervalo* si tiene un modelo de intersección de intervalos. Es decir si existe una familia de intervalos abiertos \mathcal{I} que representa a los vértices de G tal que $I_u \cap I_v \neq \emptyset \Leftrightarrow (u, v) \in E(G)$.

En cada intervalo $I_v = (s, t)$, s es el *start-point* y t el *end-point*.

La Figura 5 ejemplifica esta definición. Otro ejemplo de grafos de intervalo son los caminos P_n .

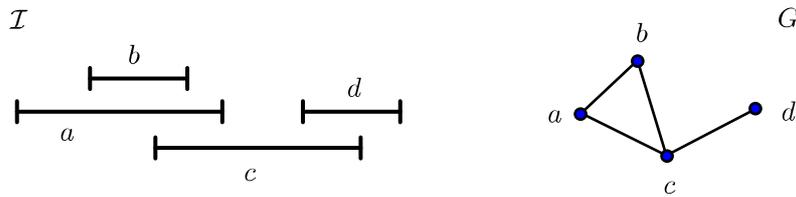


Figura 5: Modelo de intersección de intervalos y el grafo que representa.

Observamos que un grafo de intervalo puede tener más de un modelo de intersección de intervalos que lo represente. Además dado un grafo de intervalo G es posible dar en tiempo lineal un modelo de intervalos \mathcal{I} para G .

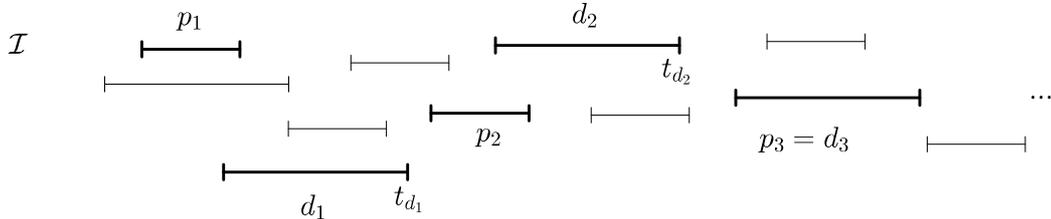
El siguiente algoritmo es lineal y encuentra un γ -set y un máximo packing de un grafo de intervalo.

²Un *árbol* G es un grafo conexo que no tiene ciclos.

Algoritmo 2 Máximo packing y Conjunto dominante mínimo de grafos de Intervalo**Input:** El modelo $\mathcal{I} = \{(s_i, t_i)\}_{i=1\dots n}$ con $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ del grafo G .**Output:** Un máximo packing P y un γ -set D .

- 1) Consideramos el primer end-point t_p y agregamos el vértice p a P .
Notar que p es adyacente sólo a los primeros intervalos.
Entre los intervalos que contienen el punto t_p elijo aquel cuyo end-point sea mayor que el resto. Éste es el vértice d que seleccionamos para D . Ver ejemplo en la siguiente figura.
Notar que d domina $N[p]$ y domina a todo vértice cuyo intervalo tiene $s < t_d$. Puede pasar que $p = d$.
- 2) Para elegir el siguiente vértice consideramos sólo los intervalos que empiezan después del punto t_d . Y repetimos el procedimiento de 1.
- 3) El conjunto P es un packing porque al elegir un p_2 nuevo lo hacemos de manera que el intervalo I_{p_2} tenga su start-point después de todos los end-point de la vecindad de p_1 . Esto implica que I_{p_2} es disjunto con los intervalos de todos los vértices en P y sus vecinos, hasta ese momento.
- 4) El conjunto D es dominante porque domina a todos los intervalos que empiezan entre el $t_{d'}$ anterior y el t_d . Además el último vértice que elegimos es el que tiene end-point mayor a todos los end-points de intervalos del modelo.
- 5) **return** P y D

En la siguiente figura mostramos cómo funciona el algoritmo en un ejemplo concreto.



Vértices que selecciona el Algoritmo 2 para el modelo \mathcal{I} .

Dado que P es un packing particular y D es un conjunto dominante particular,

$$|P| \leq \rho(G) \leq \gamma(G) \leq |D| .$$

Por construcción hay una correspondencia 1 a 1 entre los vértices de P y los de D , entonces $|P| = |D|$, y tenemos que $\rho(G) = \gamma(G)$ para grafos de intervalo. Además concluimos que los conjuntos P y D que construye el algoritmo son respectivamente un máximo packing y un γ -set de G y esta construcción puede hacerse en tiempo lineal. Por la Proposición 3.25 tenemos:

Proposición 3.27. La conjetura de Vizing es válida para grafos de intervalo.

Una alternativa para probar la conjetura de Vizing es el método constructivo propuesto por Hartnell y Rall en [16]. El planteo consiste en empezar con una clase \mathcal{C} de grafos que

verifican la conjetura y definir operaciones tales que, aplicadas a un grafo de \mathcal{C} , mantienen la validez de la conjetura. Desde esta perspectiva el objetivo es probar que todo grafo puede obtenerse a partir de la clase \mathcal{C} aplicando finitas operaciones.

En esta dirección analizamos en qué situaciones podemos prescindir de un vértice o una arista en cuanto a la validez de la conjetura de Vizing.

Proposición 3.28. [18] Sean G un grafo tal que la conjetura de Vizing es válida para G y v un vértice de G tal que $\gamma(G - v) = \gamma(G) - 1$. Entonces la conjetura de Vizing es válida para $G - v$.

Demostración. Sean $G' = G - v$ y H un grafo cualquiera. Dado D un conjunto dominante mínimo en $G' \square H$ podemos armar un conjunto dominante de $G \square H$ agregando a D un conjunto dominante mínimo de la copia H_v (es decir que agregamos a D los vértices (v, h) para h en un γ -set de H). Entonces $\gamma(G' \square H) + \gamma(H) \geq \gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H)$ de donde se obtiene

$$\gamma(G' \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H) - \gamma(H) = \gamma(G')\gamma(H) .$$

□

Un *subgrafo recubridor* o *spanning subgraph* de G es un subgrafo G' con el mismo conjunto de vértices que G . En otras palabras, G' es el resultado de eliminar de G algunas aristas pero ningún vértice.

Proposición 3.29. [16] Sean G un grafo que satisface la conjetura de Vizing y G' un subgrafo recubridor de G con $\gamma(G') = \gamma(G)$. Entonces la conjetura de Vizing es válida para G' .

Demostración. Dado que G' es un subgrafo recubridor de G , tenemos que $G' \square H$ es un subgrafo recubridor de $G \square H$ y por lo tanto $\gamma(G' \square H) \geq \gamma(G \square H)$ (un γ -set de $G' \square H$ es en particular conjunto dominante de $G \square H$).

Y por hipótesis, $\gamma(G \square H) \geq \gamma(G)\gamma(H) = \gamma(G')\gamma(H)$.

□

Uno de los primeros avances importantes en cuanto a la Conjetura de Vizing fue el resultado de Barcalkin y German, publicado en 1979. Y permite probar la conjetura para varias clases de grafos. En consecuencia los grafos que satisfacen las hipótesis del Teorema 3.31 son llamados *BG-grafos*.

Definición 3.30. Decimos que un grafo G es *descomponible* si existe una partición de sus vértices en $\gamma(G)$ conjuntos: $V(G) = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{\gamma(G)}$ de manera que cada Q_j induce un subgrafo completo en G .

Teorema 3.31 (Barcalkin y German). [4] Sea G' un grafo tal que existe un grafo descomponible G de manera que G' es un subgrafo recubridor de G y $\gamma(G') = \gamma(G)$. Entonces la conjetura de Vizing es válida para G' .

Demostración. Por la Proposición 3.29 alcanza con probar el caso $G' = G$, es decir, probar la conjetura de Vizing para un grafo descomponible. Partimos $V(G)$ en los conjuntos $Q_1, Q_2, \dots, Q_{\gamma(G)}$ que inducen, cada uno, un subgrafo completo en G .

Sean H un grafo cualquiera y D un conjunto dominante mínimo de $G \square H$. Consideramos los conjuntos $D_i = D \cap (Q_i \times V(H))$ para $i = 1, 2, \dots, \gamma(G)$ y los subgrafos completos $K_{iv} = Q_i \times \{v\}$, para $i = 1, 2, \dots, \gamma(G)$ y $v \in V(H)$. (Ver la Figura 6)

Usaremos algunos de estos subgrafos completos para probar el resultado. Notar que los siguientes conjuntos son disjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{K_{iv} / \text{ningún vértice de } K_{iv} \text{ está dominado por un vértice de } D_i\} \\ \mathcal{S} &= \{K_{iv} / D \cap K_{iv} \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

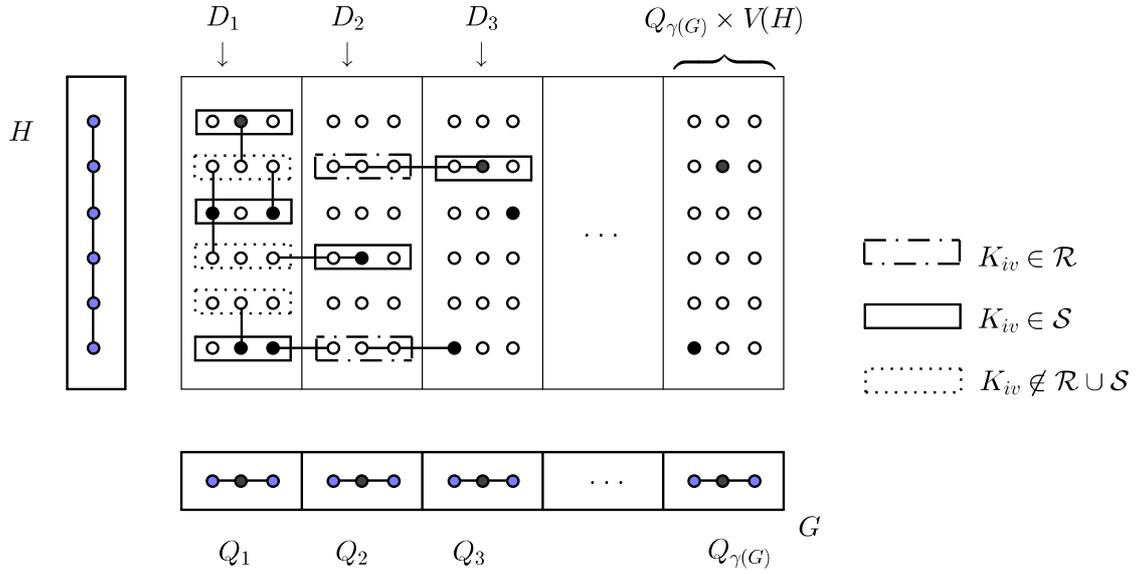


Figura 6: Partición de G y subgrafos K_{iv} en $G \square H$

Observamos que por la estructura del producto Cartesiano, cualquier vértice de $K_{iv} \in \mathcal{R}$ está dominado por un vértice de D con la misma coordenada en H , es decir, un vértice de $D \cap K_{jv}$ con $j \neq i$.

Probaremos que $|\mathcal{R} \cup \mathcal{S}| \geq \gamma(G)\gamma(H)$ y también $|D| \geq |\mathcal{R} \cup \mathcal{S}|$.

En primer lugar construimos $\gamma(G)$ conjuntos dominantes de H . Fijado i , $1 \leq i \leq \gamma(G)$, llamamos $\mathcal{R}_i = \{K_{iv} \in \mathcal{R}, v \in V(H)\}$, $\mathcal{S}_i = \{K_{iv} \in \mathcal{S}, v \in V(H)\}$ y consideramos el conjunto $D' = \{v \in V(H) \text{ tal que } K_{iv} \in \mathcal{R}_i \cup \mathcal{S}_i\}$. Afirmamos que este conjunto domina H . En efecto, para $w \in V(H)$ tenemos que K_{iw} está dominado por D y

$$\begin{aligned} K_{iw} \notin \mathcal{R}_i \cup \mathcal{S}_i &\Rightarrow K_{iw} \notin \mathcal{S} \text{ y } K_{iw} \notin \mathcal{R} \\ &\Rightarrow K_{iw} \cap D = \emptyset \text{ y } K_{iw} \text{ tiene al menos un vértice dominado por } D_i. \end{aligned}$$

Por la estructura del producto Cartesiano, ese vértice de K_{iw} está dominado por un elemento de $D \cap K_{iz}$ con $z \neq w$. Resulta que $K_{iz} \in \mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{R}_i \cup \mathcal{S}_i$, $z \in D'$ y z domina w en H . Luego D' es un conjunto dominante de H y $|\mathcal{R}_i \cup \mathcal{S}_i| \geq \gamma(H)$ y sumando sobre todos los i ,

$$|\mathcal{R} \cup \mathcal{S}| \geq \gamma(G)\gamma(H).$$

Por otro lado, si fijamos la segunda coordenada $v \in V(H)$ tenemos los conjuntos: $D_v = D \cap G_v$, $\mathcal{R}_v = \{\mathcal{R}_{iv} \in \mathcal{R}, 1 \leq i \leq \gamma(G)\}$ y $\mathcal{S}_v = \{\mathcal{S}_{iv} \in \mathcal{S}, 1 \leq i \leq \gamma(G)\}$. Vamos a armar un conjunto dominante de cada copia de G . Cada subgrafo K_{iv} en $\mathcal{R}_v \cup \mathcal{S}_v$ está dominado por un vértice en D_v . Agregamos a D_v un vértice de K_{iv} por cada K_{iv} que no está en $\mathcal{R}_v \cup \mathcal{S}_v$. Notar que agregamos exactamente $\gamma(G) - |\mathcal{R}_v \cup \mathcal{S}_v|$ vértices. Entonces, $|D_v| + (\gamma(G) - |\mathcal{R}_v \cup \mathcal{S}_v|) \geq \gamma(G)$ de donde se deduce que $|D_v| \geq |\mathcal{R}_v \cup \mathcal{S}_v|$. Y, sumando sobre todos los v en $V(H)$,

$$|D| \geq |\mathcal{R} \cup \mathcal{S}| \geq \gamma(G)\gamma(H).$$

□

El siguiente corolario muestra la utilidad del Teorema de Barcalkin y German.

Corolario 3.32. [4] La conjetura de Vizing es válida para los grafos con $\gamma(G) = 2$.

Demostración. Sea G' un grafo con $\gamma(G') = 2$. Armamos otro grafo G agregando a G' el máximo número de aristas manteniendo $\gamma(G) = 2$. (Resulta que G' es un subgrafo recubridor de G .) Por el Teorema de Barcalkin y German, alcanza con probar que el grafo G es descomponible.

Sea $Q_1 \subseteq V(G)$ un conjunto completo maximal³. Tenemos que $Q_1 \subsetneq V(G)$ pues de lo contrario $\gamma(G) = 1$. Veamos que $Q_2 = V(G) \setminus Q_1$ induce un subgrafo completo en G . En efecto, sean u y v dos vértices no adyacentes y probemos que no pueden estar ambos en Q_2 . Por construcción de G , $\gamma(G) = 2$ y $\gamma(G \cup (u, v)) = 1$. Entonces u o v dominan todos los vértices de $G \cup (u, v)$. Y si ambos están en Q_2 tendríamos que uno de ellos, junto con Q_1 induce un subgrafo completo, contradiciendo la maximalidad de Q_1 . Luego, todo par de vértices en Q_2 son adyacentes y $Q_1 \cup Q_2$ es una descomposición de G . □

También se cumple la siguiente propiedad:

Proposición 3.33. [4] Si $\rho(G) = \gamma(G)$ entonces G es un BG-grafo.

Posteriormente Sun [39] probó que la conjetura de Vizing es válida para un grafo con $\gamma(G) = 3$. En su trabajo usa la Proposición 3.29 para quedarse con el caso en que G es *crítico en aristas*⁴. Considera un conjunto dominante de G , $\{u, p, q\}$, y uno de $G \square H$ y consigue armar 3 conjuntos dominantes de H desarrollando por separado los casos en que p y q son adyacentes o no. Sin embargo, al ser una demostración muy técnica no la pondremos en este trabajo.

3.3.2. La doble proyección

La idea de contar ciertos subgrafos en $G \square H$ de la demostración del Teorema 3.31 dio lugar al denominado *argumento de la doble proyección*. El cual combina distintas particiones de los vértices de G y H con la estructura del producto Cartesiano.

³Un conjunto S es *completo maximal* si es completo y para todo vértice $w \notin S$, $S \cup \{w\}$ no es completo. El subgrafo inducido por un conjunto completo maximal recibe el nombre de *clique*.

⁴Un grafo G es *crítico en aristas* si al agregar cualquier arista el número de dominación disminuye. Es decir que para todo par de vértices u, v no adyacentes, $\gamma(G \cup (u, v)) = \gamma(G) - 1$.

El enfoque que plantearon Clark y Suen [10] en 2000 finalmente permitió probar una cota inferior multiplicativa para $\gamma(G \square H)$.

Posteriormente, Aharoni y Szabó [2] realizan otra partición de los vértices y probaron la validez de la conjetura de Vizing para grafos cordales.

Teorema 3.34 (Clark y Suen). [10] *Para cualquier par de grafos G y H se cumple*

$$\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2} \gamma(G) \gamma(H) .$$

Demostración. Sea $\{h_1, h_2, \dots, h_{\gamma(H)}\}$ un conjunto dominante de H . Elegimos una partición de los vértices de H : $\{T_1, T_2, \dots, T_{\gamma(H)}\}$ de manera que $h_i \in T_i$ y $T_i \subseteq N[h_i]$ (es decir h_i domina T_i). En el producto Cartesiano $G \square H$ llamamos G_i a los vértices en $V(G) \times T_i$ y para cada $g \in V(G)$ consideramos los subgrafos inducidos por $\{g\} \times T_i$ que llamaremos *celdas*. Ver Figura 7.

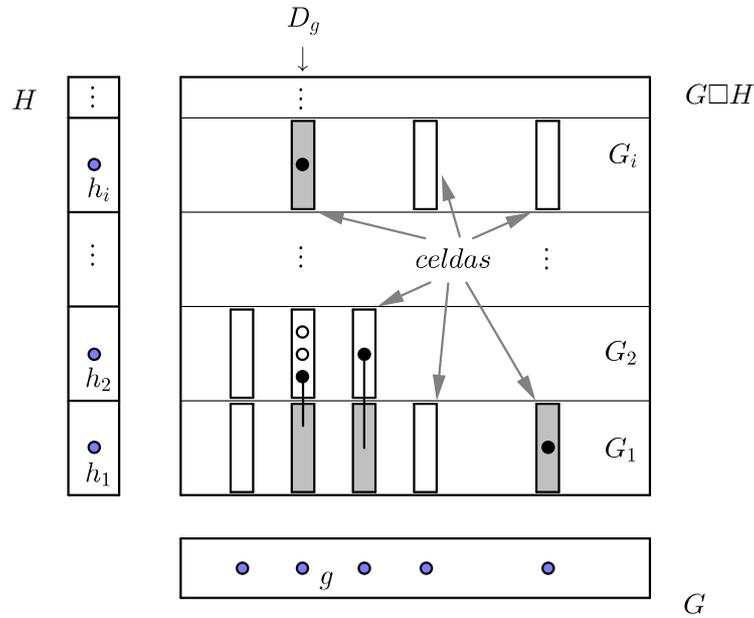


Figura 7: Partición de Clark y Suen

Sea D un conjunto dominante mínimo de $G \square H$. Para un i fijo ($1 \leq i \leq \gamma(H)$) sea n_i la cantidad de celdas en G_i que tienen todos sus vértices dominados por vértices en la misma copia de H que la celda (es decir con la misma coordenada en G). Ver las celdas sombreadas en la Figura 7, donde se tiene que $n_1 = 3$. Consideramos la proyección $\pi_G(D \cap G_i)$ y agregamos los n_i vértices en G que posiblemente no estén dominados. Se sigue que $|D \cap G_i| + n_i \geq \gamma(G)$ y sumando sobre todos los i ,

$$|D| + \sum_{i=1}^{\gamma(H)} n_i \geq \gamma(G) \gamma(H) . \quad (3.1)$$

Por otra lado, fijado $g \in V(G)$, sea $D_g = D \cap H_g$ y sea m_g la cantidad de celdas $\{g\} \times T_i$ tales que todo vértice está dominado por un vértice en D_g (es decir con la misma

coordenada en G). (En la Figura 7 tenemos $m_g = 2$). En la copia H_g las otras celdas (las no sombreadas) no están dominadas por D_g . Podemos armar un conjunto dominante de H_g agregando a D_g los $\gamma(H) - m_g$ vértices (g, h_i) . Entonces, $|D_g| + (\gamma(H) - m_g) \geq \gamma(H)$ de donde se deduce $|D_g| \geq m_g$. Y sumando sobre todos los g tenemos

$$|D| \geq \sum_{g \in G} m_g . \quad (3.2)$$

Finalmente observamos que las sumas $\sum_{i=1}^{\gamma(H)} n_i$ y $\sum_{g \in G} m_g$ son dos maneras de contar el mismo conjunto de celdas. (Las celdas que están dominadas «verticalmente», en la Figura 7 aparecen sombreadas). Entonces, sumando las desigualdades (3.1) y (3.2) tenemos

$$2|D| \geq \gamma(G)\gamma(H) .$$

□

En 2009, Aharoni y Szabó modificaron el planteo anterior considerando un nuevo parámetro que relaciona los conjuntos independientes con el número de dominación de un grafo.

Definición 3.35. Dado M un subconjunto de los vértices de un grafo G , llamamos $\gamma_G(M)$ al menor tamaño de un conjunto que domina M en el grafo G , es decir que $M \subseteq \bigcup_{u \in D} N[u]$. Definimos además:

$$\gamma^i(G) = \text{máx}\{\gamma_G(I), I \subseteq V(G) \text{ conjunto independiente}\} .$$

Teorema 3.36 (Aharoni y Szabó). [2] *Dados dos grafos G y H , se tiene*

$$\gamma(G \square H) \geq \gamma^i(G)\gamma(H) .$$

Demostración. Consideramos I un conjunto independiente en G tal que $\gamma_G(I) = \gamma^i(G)$. Es decir que se necesitan por lo menos $\gamma^i(G)$ vértices para dominar I en G . Tomamos una partición $\{T_1, T_2, \dots, T_{\gamma(H)}\}$ de los vértices de H como en la demostración del Teorema de Clark y Suen (3.34).

Sea D un conjunto de tamaño mínimo que domina los vértices de $I \times V(H)$ en el producto Cartesiano. En esta demostración sólo consideramos las celdas de la forma $\{g\} \times T_i$ con $g \in I$. Ver Figura 8. Observar que como I es un conjunto independiente, una celda de este tipo está dominada por (g', h') con $g' = g$ o bien $g' \in G \setminus I$.

Sea m la cantidad de celdas que son dominadas por vértices con la misma coordenada en G . (Las celdas sombreadas en la Figura 8) Fijado i , $1 \leq i \leq \gamma(H)$, tomamos la proyección sobre G de $D \cap ((V(G) \setminus I) \times T_i)$ y agregamos los m_i vértices correspondientes a las celdas en $V(G) \times T_i$ dominadas «verticalmente». Así llegamos a un conjunto que domina I en G y por lo tanto:

$$|D \cap ((V(G) \setminus I) \times T_i)| + m_i \geq \gamma_G(I) = \gamma^i(G)$$

y sumando sobre todos los i :

$$|D \cap ((V(G) \setminus I) \times V(H))| + m \geq \gamma^i(G)\gamma(H) . \quad (3.3)$$

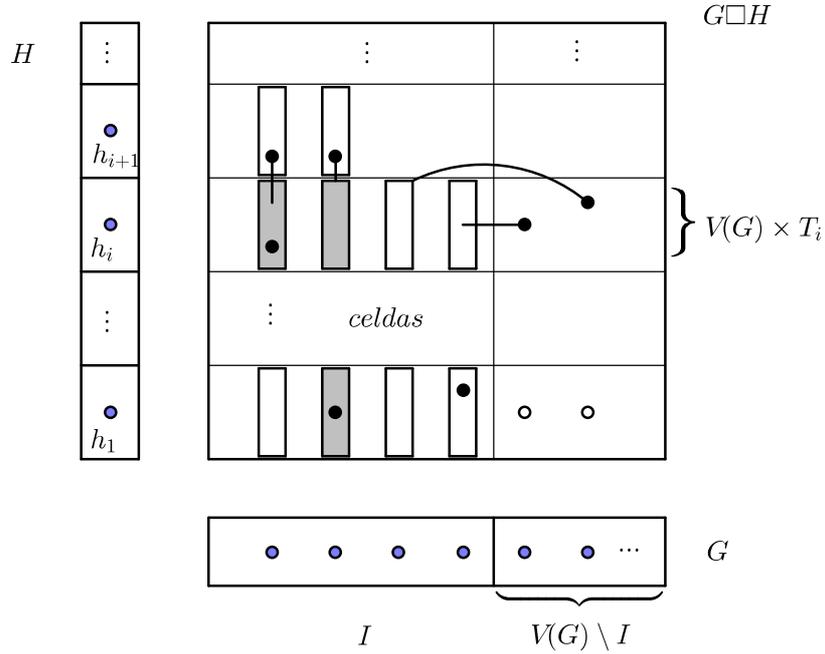


Figura 8: Partición y celdas de Aharoni y Szabó

Por otro lado, mirando la proyección sobre H tenemos

$$|D \cap (I \times V(H))| \geq m. \quad (3.4)$$

De las desigualdades (3.3) y (3.4) se sigue que $|D| \geq \gamma^i(G)\gamma(H)$. Y dado que un conjunto dominante de $G \square H$ en particular domina los vértices $I \times V(H)$, resulta

$$\gamma(G \square H) \geq |D| \geq \gamma^i(G)\gamma(H).$$

□

La utilidad del Teorema de Aharoni y Szabó radica en relacionar γ^i y γ .

Observar que un conjunto dominante de G en particular domina los vértices de M (para cualquier subconjunto $M \subseteq V$), luego se tiene $\gamma_G(M) \leq \gamma(G)$ y en consecuencia siempre se cumple $\gamma^i(G) \leq \gamma(G)$.

Desafortunadamente, $\gamma^i(G)$ puede ser arbitrariamente más chico que $\gamma(G)$.

Aharoni, Berger y Ziv probaron en [1] que en el caso que G sea cordal, se tiene la siguiente propiedad:

Dados $M \subseteq V(G)$ y $u, v \in M$ vértices adyacentes,

$$\gamma_G(M \setminus \{u\}) = \gamma_G(M) \text{ o bien } \gamma_G(M \setminus \{v\}) = \gamma_G(M).$$

Comenzando con $M = V(G)$ ($\gamma_G(V(G)) = \gamma(G)$), aplicamos repetidamente esta propiedad para eliminar vértices de M hasta llegar a un conjunto independiente I . Como tenemos $\gamma_G(I) = \gamma(G)$ para un conjunto independiente, se deduce que $\gamma^i(G) = \gamma(G)$.

Y en virtud del Teorema 3.36 resulta

Corolario 3.37. [2] Si G es un grafo cordal, entonces G verifica la conjetura de Vizing.

3.3.3. La clase \mathcal{X}

En [17] Hartnell y Rall analizan otro tipo de particiones de vértices distinta a la de Barcalkin y German e introducen una nueva clase de grafos, la clase \mathcal{X} de los grafos que admiten esa partición. Además prueban que todo grafo en la clase \mathcal{X} satisface la conjetura de Vizing. Lo cual, combinado con la Proposición 3.29 da el siguiente resultado.

Teorema 3.38. [17] Sean G un grafo de la clase \mathcal{X} y G' un subgrafo recubridor de G tal que $\gamma(G) = \gamma(G')$. Entonces G' satisface la conjetura de Vizing.

La clase \mathcal{X} contiene estrictamente a los BG-grafos. Los mismos autores prueban que todo grafo con $\gamma(G) = \rho(G) + 1$ está en la clase \mathcal{X} . Por lo que se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.39. [17] Si un grafo G cumple $\gamma(G) = \rho(G) + 1$, entonces la conjetura de Vizing es válida para G .

A continuación usamos estos resultados para probar la conjetura de Vizing para grafos arco-circulares.

Conjetura de Vizing para grafos arco-circulares.

Definición 3.40. G es un grafo arco-circular si admite un modelo de intersección de arcos de una circunferencia. Es decir si existe una familia \mathcal{A} de arcos de una circunferencia que representa a los vértices de G tal que $A_u \cap A_v \neq \emptyset \Leftrightarrow u$ y v son adyacentes en G .

Decimos que el arco A tiene *start-point* s y *end-point* t si A es el arco que se forma al recorrer la circunferencia en sentido horario desde s hasta t .

En el modelo arco-circular \mathcal{A} fijamos un arco que llamaremos $A_1 = (s_1, t_1)$ y nombramos a los arcos según el orden en que aparecen sus start-points a partir de s_1 en sentido horario. Diremos que un punto a está *antes* (*después*) que b si al recorrer la circunferencia en sentido horario desde s_1 , el punto a aparece en primer lugar (en segundo lugar).

La Figura 9 ejemplifica esta definición. Los ciclos C_n también son grafos arco-circulares.

Como en el caso de los grafos de intervalo, G puede admitir más de un modelo arco-circular. Y, si se sabe que G es un grafo arco-circular, se puede conseguir en un modelo arco-circular para G en tiempo lineal.

Vamos a seguir una serie de pasos para probar que si G es grafo arco-circular entonces $\gamma(G) \leq \rho(G) + 1$.

El primer paso es determinar el packing number de un grafo arco-circular. Para ello usaremos un algoritmo auxiliar que en tiempo polinomial ($O(nm)$) construye simultáneamente un packing y un conjunto dominante de G «casi» óptimos.

Observación 3.41. En cualquier grafo, si v y w son dos vértices tales que $N[v] \subseteq N[w]$ y P es un packing que contiene a w , entonces $(P \cup \{v\}) \setminus \{w\}$ es un packing del mismo tamaño que P y contiene a v .

En el caso de los grafos arco-circulares, si en un modelo \mathcal{A} el arco A_v está contenido en el arco A_w entonces $N[v] \subseteq N[w]$. Por ejemplo, en la Figura 9 se tiene $A_e \subseteq A_d$.

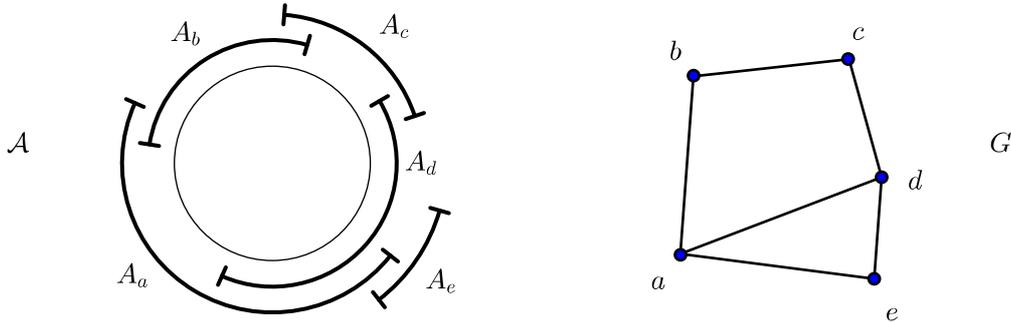


Figura 9: Modelo de intersección de arcos y el grafo que representa.

En nuestra búsqueda de un máximo packing de un grafo arco-circular, usaremos un algoritmo que construye un máximo packing entre los que contienen a cierto vértice u . Es importante notar que gracias a la Observación 3.41 alcanza usar este algoritmo cuando el arco de u no contiene otros arcos del modelo \mathcal{A} .

La idea detrás del siguiente algoritmo es seguir las construcciones realizadas en el Algoritmo 2 de la Sección 3.3.1, teniendo en cuenta que ahora estamos en un círculo.

Algoritmo 3 Máximo Packing que contiene a u y Conjunto Dominante en Grafos Arco-Circulares

Input: El modelo $\mathcal{A} = \{(s_i, t_i)\}_{i=1\dots n}$ del grafo G y un vértice u tal que A_u no contiene otro arco de \mathcal{A} .

Output: P un packing de tamaño máximo entre los packing que contienen a u y D un conjunto dominante de G .

- 1) Tomamos el conjunto $P = \{u\}$.
 - 2) Si existe un $v \in N(u)$ tal que $A_u \cup A_v$ cubre toda la circunferencia (Figura 10), el máximo packing que contiene a u es $P = \{u\}$ y $D = \{v\}$ y el algoritmo termina.
 - 3) En caso contrario sea $u = u_1$ y de todos los arcos que intersecan a A_{u_1} consideramos aquel cuyo end-point aparece en último lugar (al recorrer la circunferencia en sentido horario desde t_{u_1}). Sea A_{d_1} este arco, d_1 el vértice que representa y agregamos d_1 a D . (Puede pasar que $d_1 = u_1$).
Análogamente, de los arcos que intersecan a A_{u_1} sea $A_{\tilde{d}}$ aquel cuyo start-point aparece en primer lugar desde t_{u_1} . Llamamos \tilde{d} al vértice que representa y agregamos \tilde{d} a D . (Puede pasar que $\tilde{d} = d_1$.)
 - 4) Dados u_i y d_i vamos a construir los siguientes u_{i+1} y d_{i+1} : (Ver Figura 11)
 $A_{u_{i+1}}$ es el arco tal que empieza después de t_{d_i} y termina en primer lugar;
 $A_{d_{i+1}}$ es el arco que interseca a $A_{u_{i+1}}$ tal que su end-point aparece en último lugar.
 - 5) Si u_{i+1} y \tilde{d} no son adyacentes y $u_{i+1} \neq \tilde{d}$, (esto ocurre cuando $t_{d_{i+1}}$ aparece antes que $s_{\tilde{d}}$), agregamos u_{i+1} a P , agregamos d_{i+1} a D y repetimos el paso (4) para u_{i+1} y d_{i+1} . En caso contrario, el algoritmo termina.
 - 6) **return** P y D
-

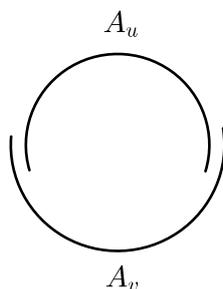


Figura 10: Dos arcos que cubren toda la circunferencia.

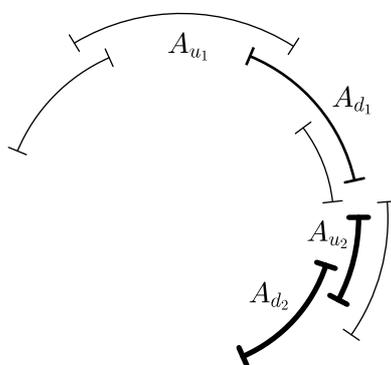


Figura 11: Modelo arco-circular. Marcamos en negrita los arcos de u_2 y d_2 elegidos en el paso (4) a partir de $u_1 = u$.

A modo de ejemplo en la siguiente figura mostramos cómo funciona el algoritmo en un caso concreto. Obviamos los pasos (1) y (2) porque en el modelo \mathcal{A} no hay dos arcos que cubren toda la circunferencia.

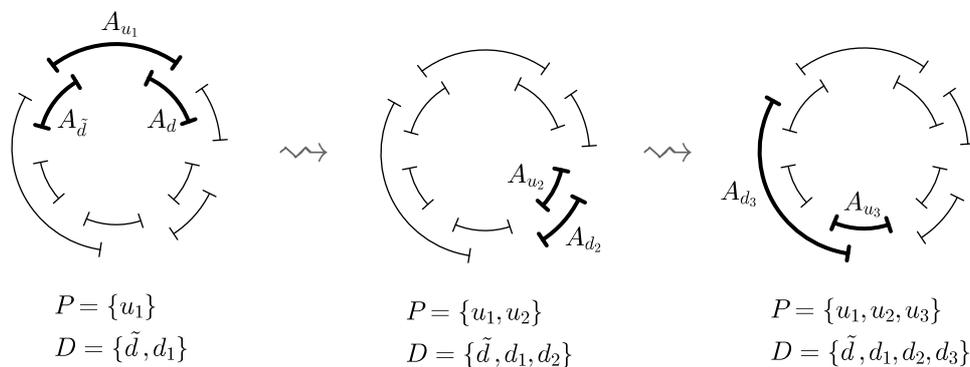


Figura 12: Ejemplo de la ejecución del Algoritmo 3 a partir del paso (3).

Lema 3.42. *El conjunto P construido en el Algoritmo 3 es un packing de G .*

Demostración. Cuando $P = \{u\}$ está claro que P es un packing.

Cuando el algoritmo considera los vértices u_1, u_2, \dots, u_k , una observación importante es que el vértice d_i está elegido de manera que los arcos de los vértices en $N[u_i]$ tienen end-points entre s_{u_i} y t_{d_i} . Claramente, se puede ver que los conjuntos $(s_{u_1}, t_{d_1}), (s_{u_2}, t_{d_2}), \dots, (s_{u_k}, t_{d_k})$ son disjuntos.

Entonces se cumple que $N[u_i] \cap N[u_j] = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y concluimos que $P = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ es un packing de G . □

Lema 3.43. *El conjunto P construido en el Algoritmo 3 es un packing de tamaño máximo entre los packings de G que contienen al vértice u .*

Demostración. Sea $P = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ el packing que construye el algoritmo y supongamos que existe un packing $Q = \{w_1, w_2, \dots, w_{k+1}\}$ con $w_1 = u$ y los w_i numerados según el orden en que aparecen los arcos A_{w_i} al recorrer la circunferencia en sentido horario. Observar que estos arcos son disjuntos pues Q es packing.

Probaremos mediante un razonamiento inductivo que el arco de w_i termina después o en el mismo punto que el arco de u_i .

Para $i = 1$ se verifica pues $w_1 = u = u_1$.

Supongamos que hasta el i -ésimo arco se verifica que A_{w_i} termina después o igual que A_{u_i} . Veremos que el arco $A_{w_{i+1}}$ empieza después que el punto t_{d_i} . Luego, la definición de u_{i+1} asegura que $u_{i+1} = w_{i+1}$ o bien el end-point de $A_{u_{i+1}}$ aparece antes que el end-point de $A_{w_{i+1}}$.

En efecto, si el arco A_{w_i} termina después del punto t_{d_i} , en particular el arco $A_{w_{i+1}}$ empieza después del punto t_{d_i} . (Figura 13(a)). Si en cambio A_{w_i} termina entre t_{u_i} y t_{d_i} , los vértices w_i y d_i son adyacentes y entonces w_{i+1} y d_i no son adyacentes, pues Q es un packing. Por lo tanto el arco $A_{w_{i+1}}$ empieza después del punto t_{d_i} . (Figura 13(b)).

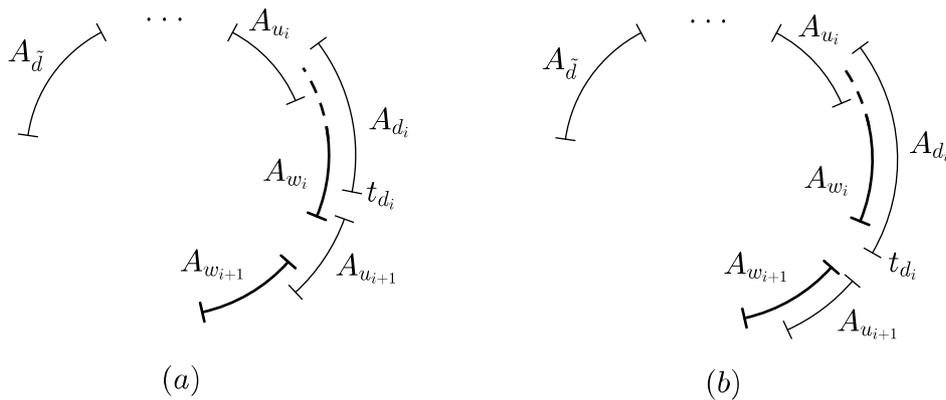


Figura 13: Detalle de la demostración del Lema 3.43: Si el arco A_{w_i} termina después que el arco A_{u_i} , lo mismo ocurre para $A_{w_{i+1}}$ y $A_{u_{i+1}}$.

Con lo cual queda probado el paso inductivo y tenemos que para todo $i = 1, \dots, k$, el arco A_{w_i} termina después que A_{u_i} .

El algoritmo termina cuando al repetir el paso (4) para u_k y d_k obtiene u_{k+1} y d_{k+1} pero en el paso (5) no agrega u_{k+1} a P .

El vértice w_{k+1} cumple $N[w_{k+1}] \cap N[u] = \emptyset$ ($u = w_1$) lo cual quiere decir que w_{i+1} y \tilde{d} no son adyacentes, y además el arco $A_{w_{k+1}}$ empieza después del punto t_{d_k} . Entonces el algoritmo podría haber agregado un $(k + 1)$ -ésimo vértice al conjunto P (el vértice w_{k+1} por ejemplo). Absurdo.

Luego, P es un packing de tamaño máximo entre los packing de G que contienen al vértice u . □

Lema 3.44. *El conjunto D que construye el Algoritmo 3 es un conjunto dominante de G . Más aún, tiene tamaño $|D| \leq |P| + 1$.*

Demostración. Fijamos u tal que el arco A_u no contiene otros arcos del modelo \mathcal{A} y repasamos los pasos del algoritmo para mostrar que el conjunto D domina todo el grafo.

Si en el paso (2) existe A_v de manera que $A_u \cup A_v$ cubren toda la circunferencia, entonces el vértice v domina todo el grafo. Pues la única manera que un arco A_w tenga intersección vacía con A_v es que $A_w \subseteq A_u$ lo que contradice la elección de u . Además $|D| = |P| = 1$.

En caso contrario, el algoritmo construye $P = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ y $D = \{\tilde{d}, d_1, d_2, \dots, d_k\}$.

Dado que A_u no contiene otros arcos del modelo \mathcal{A} , los arcos $A_{\tilde{d}}$ y A_{d_1} dominan todo arco con puntos entre $s_{\tilde{d}}$ y t_{d_1} .

Para cada $i = 1, \dots, k - 1$ los arcos A_{d_i} y $A_{d_{i+1}}$ dominan todo arco con puntos entre t_{d_i} y $t_{d_{i+1}}$ ya que, de lo contrario tendríamos la situación de la Figura 14(a) que contradice la elección de u_{i+1} .

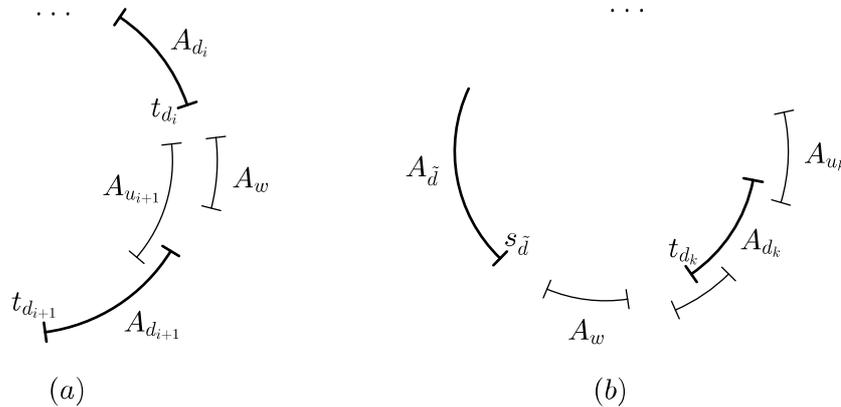


Figura 14: Detalle de la demostración del Lema 3.44: el conjunto D domina el grafo G .

Por último, si $s_{\tilde{d}}$ está en (t_{k-1}, t_k) hemos dominado toda la circunferencia. En el otro caso, los arcos A_{d_k} y $A_{\tilde{d}}$ dominan los arcos con puntos entre t_{d_k} y $s_{\tilde{d}}$ porque de lo contrario tendríamos la situación de la Figura 14(b) y el algoritmo podría agregar un vértice más al conjunto P . Absurdo.

Luego, D es conjunto dominante de G y $|D| \leq |P| + 1$. □

Usando al Algoritmo 3 podemos conseguir un máximo packing de G de la siguiente manera: generamos los packing máximos que contienen a cada vértice de G cuyo arco no contiene otros arcos del modelo \mathcal{A} y después elegimos entre ellos uno de tamaño máximo. La Observación 3.41, nos asegura que hay un máximo packing entre ellos y conseguimos $|P| = \rho(G)$.

El siguiente paso es mostrar que los conjuntos que consigue el Algoritmo 3 son casi óptimos.

Observación 3.45. Dado que el algoritmo consigue un packing y un conjunto dominante en particular, y recordando que ρ es una cota inferior para γ , tenemos que

$$|P| \leq \rho(G) \leq \gamma(G) \leq |D|. \quad (3.5)$$

Ejecutar el Algoritmo 3 con distintos u en principio podría dar lugar a packings P_u de distintos tamaños, pero si tenemos en cuenta (3.5) y el Lemma 3.44, resulta

$$\begin{aligned} \rho(G) &\leq |D| \leq |P| + 1 \\ \rho(G) - 1 &\leq |P| \leq \rho(G). \end{aligned}$$

Luego, para hallar el máximo packing de G alcanza con generar los packings P_u hasta conseguir una mejora. Ya que si $|P_u| < |P_{u'}|$ la desigualdad anterior nos asegura que $|P_{u'}| = \rho(G)$.

Observación 3.46. Del Lema 3.44 y la desigualdad (3.5) se desprende que todo conjunto dominante que construye el Algoritmo 3 cumple

$$\begin{aligned} |D| &\leq |P| + 1 \leq \rho(G) + 1 \\ \gamma(G) &\leq |D| \leq \gamma(G) + 1. \end{aligned}$$

Entonces no sólo se consigue un conjunto dominante sino uno casi óptimo en tiempo $O(nm)$.

Observación 3.47. La clase de los grafos arco-circulares no está contenida en la clase de los BG-grafos. Sin embargo, con el Algoritmo 3 podemos distinguir tres situaciones en las que G es un BG-grafo:

- Cuando en el paso (2) hay dos arcos que cubren toda la circunferencia.
- Cuando en el paso (3) resulta $d = \tilde{d}$.
- Cuando encontramos P_u y $P_{u'}$ de distinto tamaño, digamos $|P_u| < |P_{u'}|$.

Afirmamos que en estos casos hay un conjunto dominante del mismo tamaño que un packing. En efecto, en el primer caso $P = \{u\}$ y $D = \{v\}$; en el segundo, $|D| = k = |P|$; y en el tercero D_u tiene tamaño $|P_u|$ o $|P_u| + 1 = |P_{u'}|$.

Luego, por (3.5), el conjunto dominante tiene tamaño $\gamma(G)$, el packing tiene tamaño $\rho(G)$ y $\rho(G) = \gamma(G)$. La Proposición 3.33 asegura que G es un BG-grafo.

Finalmente nuestros resultados permiten probar la conjetura de Vizing para grafos arco-circulares.

Proposición 3.48. Si G es un grafo arco-circular entonces

$$\rho(G) \leq \gamma(G) \leq \rho(G) + 1 .$$

Demostración. La primera desigualdad se verifica para cualquier grafo. Para la segunda, tener en cuenta que en el Lema 3.44, P puede ser un máximo packing de G . □

Teorema 3.49. Si G es un grafo arco-circular entonces la conjetura de Vizing es válida para G .

Demostración. Sea G un grafo arco circular. Por la Proposición 3.48, tenemos

$$\rho(G) \leq \gamma(G) \leq \rho(G) + 1 .$$

Si $\gamma(G) = \rho(G)$ aplicamos la Proposición 3.25 y tenemos que la conjetura de Vizing es válida para G . Más aún, G es un BG-grafo.

Si $\gamma(G) = \rho(G) + 1$, el Corolario 3.39 asegura que la conjetura de Vizing es válida para G . En este caso, G es un grafo de la clase \mathcal{X} . □

Terminamos el tema de la conjetura de Vizing comentando que en general $\gamma(G \square H)$ es mucho más grande que $\gamma(G)\gamma(H)$. Sin embargo existen familias infinitas de grafos para los que vale la igualdad. En [12] El-Zahar, Khamis y Nazzal probaron que $\gamma(C_n \square G) = \gamma(C_n)\gamma(G)$ sólo es posible cuando $n \equiv 1 \pmod{3}$ y caracterizaron los grafos que verifican $\gamma(C_4 \square G) = \gamma(C_4)\gamma(G)$. En el mismo trabajo está la siguiente

Conjetura 3.50. Si $\gamma(G \square H) = \gamma(G)\gamma(H)$ entonces alguno de los grafos G o H es K_2 o bien tiene un conjunto dominante D *excesivo* en el sentido que tiene un vértice $v \in D$ tal que $D \setminus \{v\}$ domina $V(G) \setminus \{v\}$.

Por el momento, todos los grafos conocidos que cumplen la igualdad en la conjetura de Vizing satisfacen también esta otra propiedad. Los autores sugieren entonces prestar más atención a la igualdad $\gamma(G \square H) = \gamma(G)\gamma(H)$.

Los trabajos que se desarrollan en la actualidad sobre este tema abarcan desde propiedades de un hipotético contraejemplo minimal, la formulación de conjeturas parecidas a la conjetura de Vizing (como por ejemplo su versión fraccional o versiones con otro tipo de dominación) y la relación con otros parámetros de la teoría de Grafos.

En general se sospecha que la conjetura es cierta. Aunque los resultados (incluso parciales) son probados con dificultad. Y la verificación de un contraejemplo también se dificulta porque determinar si $\gamma(G \square H) \geq k$ es un problema NP-completo.

Bibliografía

- [1] R. Aharoni, E. Berger, R. Ziv, *A tree version of König's theorem*, *Combinatorica*, 22 (2002) 335-343.
- [2] R. Aharoni, T. Szabó, *Vizing's conjecture for chordal graphs*, *Discrete Math.* 309 (2009) 1766-1768.
- [3] N. Alon, J. Spencer, *The probabilistic Method*, John Wiley and Sons, Inc. (1992).
- [4] A.M. Barcalkin, L.F. German, *The external stability number of the Cartesian product of graphs* *Bul. Akad. Štiințe RSS Moldoven.*, 1 (1979) 5-8.
- [5] A.A. Bertossi, *Dominating sets for split and bipartite graphs.*, *Inform. Process. Lett.* 19 (1984) 37-40
- [6] B. Brešar, S. Klavžar, D.F. Rall, *Dominating direct products of graphs*, *Discrete Math.*, 307 (2007) 1636-1642.
- [7] K.S. Booth, J.H. Johnson, *Dominating sets in chordal graphs*, *SIAM J. Comput.*, 11 (1982) 191-199
- [8] R.C. Brigham, R.D. Dutton, *Bounds on the domination number of a graph*, *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 2, 41 (1990) 269-275.
- [9] B.N. Clark, C.J. Colbourn, D.S. Johnson, *Unit disk graphs*, *Discrete Math.* 86 (1990) 165-177
- [10] W. E. Clark, S. Suen, *An inequality related to Vizing's conjecture*, *Electron. J. Combin.* 7, Note 4 (2000) 3pp.
- [11] A.K. Dewdney, *Fast turing reductions between problems in NP; chapter 4; reductions between NP-complete problems*, Technical Report 71, Dept. Computer Science, University of Western Ontario (1981)
- [12] M.H. El-Zahar, S.M. Khamis, K.M. Nazzal, *On the domination number of the Cartesian product of the cycle of length n and any graph*, *Discrete Appl. Math.*, 155 (2007) 515-522.
- [13] M.H. El-Zahar, C.M. Pareek, *Domination number of products of graphs*, *Ars Combin.* 31 (1991) 223-227.

- [14] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman and Company, San Francisco (1979).
- [15] S. Gravier, A. Khelladi, *On the domination number of cross products of graphs*, Discrete Math. 145 (1995) 273-277.
- [16] B.L. Hartnell, D.F. Rall, *On Vizing's conjecture*, Congr. Numer., 82 (1991) 87-96.
- [17] B.L. Hartnell, D.F. Rall, *Vizing's conjecture and the one-half argument*, Discuss Math. Graph Theory 15, (1995) 205-216.
- [18] B.L. Hartnell, D.F. Rall, *Domination in Cartesian products: Vizing's conjecture*, en *Domination in Graphs, Advanced Topics*, volume 209 of Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., Dekker, New York, (1998) 163-189.
- [19] M. Henning, I. Schiermeyer, A. Yeo, *A new bound on the domination number of graphs with minimum degree two*, Electronic Journal of Combinatorics 18 (2011) Paper 12.
- [20] W. Imrich, *Factoring cardinal product graphs in polynomial time*, Discrete Math., 192 (1998) 119-144.
- [21] W.Imrich, I. Peterin, *Recognizing Cartesian products in linear time*, Discrete Math., 307 (2007) 472-483.
- [22] M.S. Jacobson, L.F. Kinch, *On the domination number of products of graphs: I*. Ars Combin., 18 (1984) 33-44.
- [23] M.S. Jacobson, L.F. Kinch, *On the domination number of products of graphs II: Trees*, J. Graph Theory, 10 (1986) 97-106.
- [24] J.M. Keil, *The complexity of domination problems in circle graphs* Discrete Appl. Math. 42 (1993) 51-63
- [25] S. Klavžar, N. Seifter, *Dominating Cartesian products of cycles*, Discrete Appl. Math., 59 (1995) 129-136.
- [26] A. Klobucar, *Domination numbers of cardinal products*, Math. Slovaca, 49 (1999) 387-402.
- [27] A. Klobucar, *Domination numbers of cardinal products $P_6 \times P_n$* , Math. Commun, 4 (1999) 241-250.
- [28] A.V. Kostochka, B.Y. Stodolsky, *An upper bound on the domination number of n -vertex connected cubic graphs*, Discrete Math. 309 (2009) 1142-1162.
- [29] W. McCuaig, B. Shepherd *Domination in graphs with minimum degree two*, J. Graph Theory, 13 (1989) 749-762.
- [30] R. McKenzie, *Cardinal multiplication of structures with a reflexive relation*, Fund. Math., 70 (1971) 59-101.

- [31] A. Meir, J.W. Moon, *Relations between packing and covering numbers of a tree*, Pacific J. Math., 61 (1975) 225-233.
- [32] G. Mekiš, *Lower bounds for the domination number and the total domination number of direct product graphs*, Discrete Math., 310 (2010) 3310-3317.
- [33] M. Molloy, B. Reed, *The dominating number of a random cubic graph*, Random Structures Algorithms, 7 (1995) 209-221.
- [34] R.J. Nowakowski, D.F. Rall. *Associative graph products and their independence, domination and coloring numbers* Discuss. Math. Graph Theory, 16 (1996) 53-79.
- [35] O. Ore, *Theory of Graphs*, American Math. Society Colloquium Publications, 38 (1962).
- [36] D.F. Rall, *Total domination in categorical products of graphs*, Discuss. Math. Graph Theory, 25 (2005) 35-44.
- [37] D. Rautenbach, *A note on domination, girth and minimum degree*, Discrete Math. 308 (2008) 2325-2329.
- [38] B. Reed, *Paths, stars and the number three*, Combim. Probab. Comput., 5 (1996), 277-295.
- [39] L. Sun, *A result on Vizing's conjecture*, Discrete Math., 275 (2004) 363-366.
- [40] V.G. Vizing, *The Cartesian product of graphs*, Vychisl. Sistemy, 9 (1963) 30-43.
- [41] V.G. Vizing, *Some unsolved problems in graph theory*, Russ. Math. Surv., 23 (1968) 125-141.
- [42] R. Hammack, W. Imrich, S. Klavžar, *Handbook of product graphs* Second Ed., Discrete Math. and its Applications, Boca Raton, FL: CRC Press (2011).