Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

M-ideales en espacios de Banach

Gabriel David Czyzewski

Directora: Silvia Lassalle

Tesis para acceder al grado de
Licenciado en Ciencias de la Matemática

Noviembre 30, 2012

Índice general

Agradecimientos

Quiero agradecer a mis padres porque siempre creyeron en mí, por bancarme en toda la carrera y por estar siempre ahí cuando los necesité.

A todos mis compañeros de cursada, pasillos y cafés que hicieron mi pasada por exactas más divertida cada día.

A Daniel Carando y Daniel Galicer, por mostrar lo divertido e interesante del Analisis Funcional; y sobre todo a Silvia por justificarlo.

A mis amigos, Daniel, Roberto Pablo y Alexia que sin importar las distancias y el pasar del tiempo siempre hacen lo posible por recordar los primeros días de amistad.

A Pepe y Aucha, quienes crearon y criaron a la persona más maravillosa del mundo.

A Boby, a Sheini, a Floppy.

A vos MI AMOR, por toda tu bondad, por todas esas fuerzas que siempre me das, por estar, por caminar a mi lado y por darme el mayor regalo que una persona pueda recibir.

Introducción

La noción de M-ideal fue introducida por E. M. Alfsen y E. G. Effros en su artículo *Structure in real Banach spaces* publicado en 1972. La teoría de M-ideales surge al querer extender la noción de ideal bilátero interno de un álgebra de Banach a un espacio de Banach general. Esta estructura nos permite un mejor entendimiento de la geometría de un espacio de Banach en términos de la geometría y las propiedades de la bola unidad cerrada de su espacio dual. Más concretamente, un subespacio cerrado J de un espacio de Banach X se dice un M**-ideal** en X, si su espacio anulador $J^\perp$, es la imágen de una proyección P del espacio dual tal que $\|x^*\| = \|P(x^*)\| + \|x^* - P(x^*)\|$, para todo $x^* \in X^*$. Cuando J es un M-ideal en X, el complemento canónico de $J^\perp$ en X^* se identifica (isométricamente) con J^*. Así, podemos escribir $X^* = J^\perp \oplus_1 J^*$, igualdad que, de alguna manera, muestra que en la bola unidad de X subyace una estructura de norma supremo que está cercánamente relacionada con J. Cuando X se descompone como $J \oplus_\infty \widetilde{J}$, para $\widetilde{J}$ algún subespacio cerrado de X, se dice que J es un M**-sumando** de X. Claramente, los M-sumandos son M-ideales, pero existen sutiles diferencias entre estas dos nociones. Por ejemplo, c_0 es un M-ideal en ℓ_∞ y no en un M-sumando. Desde su surgimiento, la estructura de M-ideales ha sido muy estudiada. Nuestro trabajo se basa fuertemente en la monografía de Hardmand, Werner and Werner [HWW], donde se encuentran los principales desarrollos de esta teoría.

En estas notas presentamos algunos conceptos básicos de la estructura de M-ideales, introducimos las propiedades más relevantes que nos permiten asegurar la presencia de M estructura en espacios clásicos y mostramos como impacta esta teoría en espacios de funciones no lineales, más específicamente en especios de polinomios homogéneos definidos sobre un Banach.

El trabajo se divide en cuatro partes. El Capítulo 1 es introductorio. Presentamos propiedades de M-ideales haciendo hincapié en su descripción e impacto geométrico. Mostramos (Teorema 1.2.3) que es equivalente que un subespacio cerrado sea un M-ideal de X a que se verifique la 3-ball property, una propiedad que involucra intersección de tres bolas en el espacio X. La fuerza de este resultado radica en que se puede constatar que un subespacio es un M-ideal a través de la estructura del espacio y no del espacio dual. Como aplicación damos un primer ejemplo de M-ideal no trivial (Ejemplo 1.2.6).

Gelfand y Naimark probaron que toda C^*-álgebra es isométricamente *-isomorfo a la $^*-$álgebra formada por los operadores acotados de algún espacio de Hilbert H. En este caso, el único ideal bilátero cerrado es $\mathcal{K}(H)$, el subespacio de los operadores compactos. Esto genera un interés en saber cuándo los operadores compactos forman un M-ideal en el conjunto de los operadores acotados. Este problema es tratado en el Capítulo 2, en el que se estudia el caso particular en el que X es un espacio de Lorentz.

En el Capítulo 3 presentamos dos propiedades; la propiedad (M) y la propiedad (M^*). Éstas, en conjunto con las aproximaciones compactas achicantes de la identidad, permiten caracterizar cuándo los operadores compactos forman un M-ideal dentro del conjunto de los operadores acotados (Teorema 3.2.3).

Por último, el Capítulo 4 está dedicado a resultados novedosos sobre la estructura de M-ideales, en espacios donde las funciones no son lineales. Trabajamos sobre el artículo reciente de V. Dimant [Dv] estudiando el espacio de polinomios homogéneos definidos sobre un espacio de Banach. Para ésto, como primer paso, introducimos las nociones básicas de la teoría de polinomios homogéneos. Como consecuencia de estar trabajando sobre espacios de dimensión infinita, aparecen naturalmente distintas subclases de polinomios, que también presentamos. Entre estas clases se encuentran las de los polinomios de tipo finito, los aproximables, los débil continuos sobre conjuntos acotados del espacio y los débil secuencialmente continuos.

Al cambiar del contexto de operadores al de polinomios homogéneos, el rol que juegan los operadores compactos suelen jugarlo los polinomios débil continuos en acotados (Proposición 4.2.9). Esto da sentido al problema de estudiar cuándo los polinomios débil continuos en acotados forman un M-ideal en el espacio de los polinomios homogéneos.

Al trabajar con espacios de polinomios veremos que varias propiedades que cumplen los operadores acotados son preservadas (Proposiciones 4.3.1 y 4.3.2). En este contexto la falta de linealidad y, más precisamente, el grado de homogemneidad, tienen un protagonismo importante. De hecho, (Corolario 4.3.9) mostramos que existe un único valos de n para el cual los polinomios débil continuos en acotados pueden ser un M-ideal no trivial. Este valor de n, depende del espacio de Banach dominio X y es llamado el valor crítico de X.

Terminamos esta monografía, dando una extensión de las definiciones de Propiedad (M) y Propiedad (M^*) al caso polinomial y presentando una versión (para el caso homogéneo) de las equivalencias del Teorema 3.2.3 (Teorema 4.5.3).

Capítulo 1

M-ideales en espacios de Banach

En este trabajo, consideramos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ denota el cuerpo de números reales o complejos. Dado un espacio de Banach X, B_X y S_X denotarán, respectivamente, la bola unidad cerrada y la esfera unitaria de X. Si $x \in X$ y $r > 0$, $B(x,r)$ denota la bola cerrada de centro x y radio r. Por otra parte, X^* denota el espacio dual de X y X^{**} su bidual. Dado $x \in X$, $\hat{x}$ representa el elemento de X^{**} definido por $\hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$ para cada $\varphi \in X^{**}$. Usamos w y w^* para notar las topologías débil y débil-* respectivamente. Recordamos el teorema de *Banach-Alaoglu* que nos asegura que (B_{X^*}, w^*) es compacto para todo espacio de Banach X.

Dados X e Y espacios de Banach notamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al espacio de operadores lineales y continuos de X a Y dotado de la norma supremo y por $\mathcal{K}(X,Y)$ al subespacio de los operadores compactos.

Nuestros primeros ejemplos serán contruídos sobre espacios clásicos de sucesiones, a los que notaremos de manera usual. Entre éstos se encuentran:

$$c_0 = \{(a_n)_n \subset \mathbb{K}\colon\ \lim a_n = 0\}$$

y

$$\ell_\infty = \{(a_n)_n \subset \mathbb{K}\colon (|a_n|)_n \quad \text{es acotada}\},$$

ambos dotados con la norma supremo, $\|(a_n)\|_\infty = \sup_n |a_n|$. También, con $1 \leq p < \infty$, apelaremos frecuentemente al espacio

$$\ell_p = \{(a_n)_n \subset \mathbb{K}\colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\},$$

con su norma usual $\|(a_n)\|_p = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\Big)^{\frac{1}{p}}$. Para estos espacios e_n denota el elemento cuyas coordenadas son todas nulas salvo la n-ésima donde toma el valor 1.

Con esta notación, $X \oplus_p Y$ será la suma directa de dos espacios de Banach X e Y equipada con la norma de ℓ_p, es decir, si $z \in X \oplus_p Y$, entonces z tiene una única escritura en la forma $z = x + y$ con $x \in X$ e $y \in Y$ y además $\|z\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{\frac{1}{p}}$.

1.1. Teoría Básica de M-ideales

1.1.1. Primeras definiciones

Para J subespacio de X, notamos $J^\perp$ al subespacio de X^* formado por aquellas funciones que se anulan sobre J y que llamamos anulador de J. Es decir:

$$J^\perp =: \{x^* \in X^* : \quad x^*(x) = 0, \quad \text{para todo} \quad x \in J\}.$$

Un proyector es un operador continuo $P : X \to X$ tal que $P^2 = P$. El proyector se dice contráctil si $\|P\| = 1$ y el subespacio $Rg(P)$ se dice 1-complementado. Notar que para todo proyector P, se tiene $\|P\| \geq 1$.

El concepto de M-ideal se puede expresar usando una clase especial de proyectores que pasamos a definir.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio de Banach.

(i) Un proyector $P : X \to X$ se dice M-proyector si para todo $x \in X$,

$$\|x\| = \max\{\|Px\|; \|x - Px\|\}.$$

(ii) Un proyector $P : X \to X$ se dice L-proyector si para todo $x \in X$,

$$\|x\| = \|Px\| + \|x - Px\|.$$

(iii) Un subespacio cerrado $J \subseteq X$ se dice M-sumando (resp. L-sumando) si es la imagen de un M-proyector (resp. L-proyector).

(iv) Un subespacio cerrado $J \subseteq X$ se dice M-ideal si $J^\perp$ es un L-sumando en X^*.

Todo espacio de Banach posee M-ideales triviales, $J = \{0\}$ y $J = X$. Lo que nos interesa saber es cuando un espacio de Banach X posee M-ideales no triviales; así también poder mostrar que no todo subespacio es un M-ideal. Esto último lo logramos en el Ejemplo 1.2.5 y en el Corolario 2.4.13.

Observación 1.1.2. *En la definición, se podría haber definido cuando un subespacio es un L-ideal; sin embargo [HWW, Teorema 1.9] muestra que todo L-ideal es un L-sumando y por lo tanto no estaríamos definiendo algo nuevo.*

Notemos que todo M-proyector y L-proyector es contráctil.

Veamos que los L-proyectores están determinados por su núcleo y los M-proyectores por su rango. Para esto necesitamos un lema previo.

Lema 1.1.3. *Sea $P : X \to X$ un L-proyector, entonces para todo $x \in X$, existe un único $y \in \ker P$ tal que $\|x - y\| = \inf_{z \in \ker P} \|x - z\| = d(x, \ker(P))$.*

Demostración. Veamos que $y = x - Px$ nos da la existencia. Si $z \in \ker P$ tenemos que $\|x-y\| = \|Px\| = \|P(x-z)\| \leq \|P\|\|x-z\| \leq \|x-z\|$. Luego,$\|x-y\| \leq \inf_{z\in\ker P}\|x-z\|$. Además, como $y \in \ker P$, obtenemos la igualdad.
Supongamos entonces que existe otro $\tilde{y} \in \ker P$ tal que $\|x-\tilde{y}\| = \inf_{z\in\ker P}\|x-z\|$.
Como P es un L-proyector e $\tilde{y} \in \ker P$, tenemos que $\|x-\tilde{y}\| = \|P(x)\| + \|y-\tilde{y}\|$. Pero entonces,

$$\|P(x)\| + \|y-\tilde{y}\| = \|x-\tilde{y}\| = \|x-y\| = \|Px\| + \|x-y-Px\| = \|Px\|.$$

Luego, $\|y-\tilde{y}\| = 0$ y por lo tanto $y = \tilde{y}$. □

Proposición 1.1.4.

(i) *Sean P, Q L-proyectores tales que* $\ker(P) = \ker(Q)$ *entonces* $P = Q$.

(ii) *Sean P, Q M-proyectores tales que $Rg(P) = Rg(Q)$ entonces $P = Q$.*

Demostración. Probemos (i): Sea $x \in X$, queremos probar que $Qx = Px$. Por el lema previo, existe un único $y \in \ker(P)$ tal que $\|x-y\| = \inf_{z\in\ker(P)}\|x-z\|$, más aún, $y = x-Px$. Ahora, para $x \in X$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} \|x-(x-Qx)\| & = & \|Qx\| \\ & = & \|Q(x-(x-Px))\| \\ & \leq & \|Q\|.\|Px\| \\ & \leq & \|Px\| \\ & = & \|x-(x-Px)\|. \end{array}$$

Donde la segunda igualdad se debe a que $x - Px \in Ker(P) = Ker(Q)$. Luego, $x - Qx$ es una apoximación de x tan buena como $x - Px$, que es la mejor, y por la unicidad de y resulta que $x - Qx = x - Px$ como queríamos ver.
Para probar (ii) usamos que $\ker(P^*) = Rg(P)^\perp = Rg(Q)^\perp = \ker(Q^*)$ y, por lo tanto, siendo P^* y Q^* L-proyectores, podemos usar (i) para concluir que $P^* = Q^*$. Como X^* separa puntos de X, se tiene que $P = Q$. □

Corolario 1.1.5. *Sea J un M-sumando (resp. L-sumando) de X, entonces existe un único M-proyector (resp. L-proyector) P tal que $Rg(P) = J$.*

Observación 1.1.6. *Si J es un M-sumando y P es el M-proyector cuya imagen es J, podemos escribir $X = J \oplus_\infty \widehat{J}$ para algún $\widehat{J} \subseteq X$ subespacio cerrado. Más aún, por Corolario 1.1.5, $\widehat{J}$ resulta ser único. (En efecto, $\widehat{J} = Rg(I-P)$).*
De la misma forma, si J es un M-ideal, existe un único $\widehat{J}^\perp$ tal que $X^* = J^\perp \oplus_1 \widehat{J}^\perp$
La recíproca también es fácil de ver; si $X = J \oplus_\infty \widehat{J}$ entonces J es un M-sumando y si $X^* = J^\perp \oplus_1 \widehat{J}^\perp$ entonces J es un M-ideal.

El siguiente lema, da una relación entre M-ideales y M-sumandos, mostrando que uno es un caso particular del otro.

Lema 1.1.7. *Todo M-sumando es un M-ideal.*

Demostración. Sea J un M-sumando de X. Entonces $X = J \oplus_\infty \widehat{J}$. Luego, si $\varphi \in X^*$ y $x \in X$, escribimos $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in J$ y $x_2 \in \widehat{J}$ y $\varphi(x) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$. Si definimos $\varphi_2(x) =: \varphi(x_1)$ y $\varphi_1(x) =: \varphi(x_2)$ tenemos que $\varphi_1 \in J^\perp$, $\varphi_2 \in \widehat{J}^\perp$ y $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.
Además, $J^\perp \cap \widehat{J}^\perp = 0$. Si vemos que $\|\varphi\| = \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$, entonces $X^* = J^\perp \oplus_1 \widehat{J}^\perp$ y J resulta un M-ideal.
Sea $x \in B_X$, como $X = J \oplus_\infty \widehat{J}$ existe $x_1 \in B_J$, $x_2 \in B_{\widehat{J}}$ tal que $x = x_1 + x_2$. Así, se tiene que $|\varphi(x)| \leq |\varphi(x_1)| + |\varphi(x_2)| = |\varphi_1(x)| + |\varphi_2(x)| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$ por lo que $\|\varphi\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\|$.
Recíprocamente, sean $x_1 \in B_J$, $x_2 \in B_{\widehat{J}}$ y sean θ_1, $\theta_2 \in \mathbb{R}$ tales que $|\varphi_1(x_1)| = e^{i\theta_1}\varphi(x_1)$ y $|\varphi_2(x_2)| = e^{i\theta_2}\varphi(x_2)$. Entonces tenemos,

$$\begin{aligned} |\varphi_1(x_1)| + |\varphi_2(x_2)| &= \varphi(e^{i\theta_1}x_1 + e^{i\theta_2}x_2) \\ &\leq \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Como esto pasa para todo $x_1 \in B_J$ y $x_2 \in B_{\widehat{J}}$, se obtiene la otra desigualdad. □

Resta preguntarse si vale la vuelta. Es cierto que todo M-ideal es un M-sumando? El siguiente ejemplo responde esta pregunta en forma negativa.

Ejemplo 1.1.8. Existen M-ideales que no son M-sumandos, basta considerar $J = c_0$ en $X = \ell_\infty$.
En efecto, como c_0 no esta complementado en ℓ_∞ se tiene que J no puede ser un M-sumando. Por otro lado J es un M-ideal y para probarlo usaremos la *3-ball property* que demostraremos más adelante. La misma asegura que si un subespacio J verifica que $\forall y_1,\ y_2,\ y_3 \in B_J,\ x \in B_X\ y\ \varepsilon > 0$ existe $y \in J$ tal que para todo $i = 1, 2, 3$,

$$\|x + y_i - y\| \leq 1 + \varepsilon,$$

entonces J es un M-ideal en X.
Veamos que esto ocurre para $c_0 \subseteq \ell_\infty$. En efecto, dados $y_1,\ y_2,\ y_3 \in B_{c_0},\ x \in B_{\ell_\infty}\ y\ \varepsilon > 0$; elegimos n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, $|y_n(i)| \leq \varepsilon$ para todo $i = 1, 2, 3$. Así, si $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, elegimos

$$y = (x_1, \ldots, x_{n_0}, 0, 0, \ldots).$$

Claramente $y \in c_0$ y tenemos que

$$x + y_i - y = (y_i(1), \ldots, y_i(n_0), x_{n_0+1}, \ldots) + (0, \ldots, 0, y_i(n_0 + 1), \ldots).$$

Por lo tanto

$$\|x + y_i - y\| \leq 1 + \varepsilon$$

para todo $i = 1, 2, 3$.

Proposición 1.1.9. *Sea $J \subseteq X$ un M-ideal. Entonces, todo $y^* \in J^*$ tiene una única extensión a una funcional $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \|y^*\|$.*

Demostración. Como J es un M-ideal en X, tenemos que $J^\perp$ es un L-sumando en X^*. Luego, podemos escribir $X^* = J^\perp \oplus_1 \tilde{J}$ para algún $\tilde{J} \subseteq X^*$.
Podemos identificar más explícitamente a $\tilde{J}$ mediante isomorfismos isométricos,

$$J^* \cong X^*/J^\perp \cong \tilde{J}. \tag{1.1}$$

Llamemos $T_1 : J^* \to X^*/J^\perp$ y $T_2 : \tilde{J} \to X^*/J^\perp$ las isometrías que a cada funcional le toma su clase en el cociente $X^*/J^\perp$.
Probemos entonces la proposición.
Sea $y^* \in J^*$ y consideremos $x^* = T_2^{-1}T_1y^*$. Veamos que x^* es una extensión de y^*. Como $T_2(x^*) = T_1(y^*)$, ambas funcionales tienen la misma clase en $X^*/J^\perp$. Entonces $x^* - y^* \in J^\perp$ y por lo tanto x^* coincide sobre J con y^*.
Como T_1 y T_2 son isometrías, por (1.1), podemos indentificar $\widehat{J} = \{z^* \in X^* : \|z^*\| = \|z^*\big|_J\|\}$, y por lo tanto, $\|x^*\| = \|x^*\big|_J\| = \|y^*\|$. La unicidad de x^* se obtiene al ser T_1, T_2 funciones biyectivas. $\square$

Observación 1.1.10. *La proposición anterior, nos permite ver a J^* como un subespacio de X^*. Con esto, cuando J es un M-ideal en X, podemos escribir $X^* = J^\perp \oplus_1 J^*$.*

En [HWW, Proposición 1.7] se muestran condiciones para saber si un espacio X solo posee M-ideales o L-sumandos triviales. En el siguiente teorema muestra que para la mayoría de los espacios, no pueden convivir las estructuras de M-ideales y L-sumandos al mismo tiempo.

Teorema 1.1.11. *Sea X un espacio de Banach que no es isométrico a $\ell_\infty(2) =: \mathbb{R} \oplus_\infty \mathbb{R}$. Entonces, X no contiene M-ideales y L-sumandos no triviales al mismo tiempo.*

Demostración. Supongamos que el enunciado es falso y veamos que $\dim X^* = 2$. Con esto estaremos viendo que X es un espacio de dimensión dos que tiene un M-sumando no trivial (de dimension 1) y por lo tanto, X será isométrico a $\ell_\infty(2)$ lo que nos dará un absurdo.
Por hipótesis, podemos descomponer de forma no trivial $X^* = G \oplus_\infty \widehat{G} = Y \oplus_1 \widehat{Y}$. Nuestro objetivo será ver que tanto Y como $\widehat{Y}$ son unidimensionales.
Sea $P : X^* \to X^*$ el M-proyector cuya imagen es G y sea $\pi : X^* \to X^*$ el L-proyector cuya imagen es Y. Veamos que $G \cap Y = \{0\}$.
Supongamos que existe $u \in G \cap Y$, $\|u\| = 1$ y tomemos $x \in \widehat{G}$, $\|x\| = 1$; entonces $\|u \pm x\| = 1$ y por lo tanto, siendo $\pi(u) = u$ tenemos que

$$\begin{aligned}
2 &= \|u + x\| + \|u - x\| \\
&= \|\pi(u + x)\| + \|u + x - \pi(u + x)\| + \|\pi(u - x)\| + \|u - x - \pi(u - x)\| \\
&= \|u + \pi x\| + \|x - \pi x\| + \|u - \pi x\| + \|\pi x - x\| \\
&\geq 2\|u\| + 2\|x - \pi x\| \\
&= 2 + 2\|x - \pi x\|.
\end{aligned}$$

Con esto se tiene que $x = \pi x \in Y$. Luego $\widehat{G} \subseteq Y$. En particular $\widehat{G} \cap Y \neq \{0\}$ y por lo tanto, podemos volver a aplicar el mismo razonamiento para G e Y para probar que $G \subseteq Y$. Así $X^* = Y$ lo que es absurdo pues $\widehat{Y}$ era subespacio propio no vacío. Por lo tanto, $G \cap Y = 0$ y por la misma razón debe ser $\widehat{G} \cap Y = 0$.
Ahora, supongamos que existe $Y_0 \subseteq Y$ subespacio de dimensión 2. Como $\widehat{G} \cap Y = 0$ se tiene que $P\big|_{Y_0}$ es inyectivo. En efecto, si para algún $y_0 \in Y_0$, $P(y_0) = 0$, se tiene que $y_0 \in Y \cap \ker(P) = Y \cap \widehat{Y} = 0$.
Con todo esto, $G_0 =: P(Y_0)$ es un subespacio de dimensión 2. Por el Teorema de Mazur [H] G_0 contiene un punto de diferenciación z, es decir, $\|z\| = 1$ y

$$l(x) =: \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\|z + hx\| - 1)$$

existe para todo $x \in G_0$. Notemos que con esto estamos diciendo que $N =: \|.\|$ es una función diferenciable en z. Por lo tanto, $l(x)$ es derivada direccional de N en z en la dirección de x. Luego, $l(x) = \langle \nabla N(z), x \rangle$ y por lo tanto l es lineal. Si pensamos a $l : G_0 \to \mathbb{R}$, como G_0 tiene dimensión 2, podemos encontrar $x \in G_0$, $\|x\| = 1$ tal que $l(x) = 0$.
Como $\|z\| = 1$ y $z \in G_0 = P(Y_0)$ podemos escribir $z = \frac{Py}{\|Py\|}$ con $\|y\| = 1$, $y \in Y_0$.

Veamos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|y + hx\| - 1}{h} = 0.$$

Para probar esto, notemos que como $x \in G_0 \subseteq Rg(P)$ se tiene que

$$\|y + hx\| = \max\{\|Py + hx\|; \|y - Py\|\}.$$

Además,

$$1 = \|y\| = \max\{\|Py\|; \|y - Py\|\}.$$

Ahora, si $\|Py\| < 1$ se tiene que $\|y - Py\| = 1$ y, para h suficientemente chico, $\|Py + hx\| < 1$ y por lo tanto

$$\|y + hx\| = \|y - Py\| = 1.$$

Si $\|Py\| = 1$ y $\|y - Py\| < 1$, entonces $z = Py$ y, por lo tanto, para h suficientemente chico

$$\|y + hx\| = \|Py + hx\| = \|z + hx\|.$$

Si $1 = \|Py\| = \|y - Py\|$ entonces

$$\|y + hx\| = \max\{\|z + hx\|; 1\}.$$

En cualquiera de los tres casos, se obtiene $\lim_{h \to 0} \frac{\|y+hx\|-1}{h} = 0$ como queríamos ver. Luego, si $h > 0$ tenemos, para $y \in Y_0$, que

$$\|y + hx\| = \|y + h\pi x\| + h\|x - \pi x\|,$$
$$\|y - hx\| = \|y - h\pi x\| + h\|x - \pi x\|.$$

Observando que

$$\|y + h\pi x\| + \|y - h\pi x\| \geq 2\|y\| = 2,$$

tenemos

$$\|y + hx\| + \|y - hx\| = 2h\|x - \pi x\| + \|y + h\pi x\| + \|y - h\pi x\| \geq 2h\|x - \pi x\| + 2$$

y podemos concluir que

$$\frac{\|y + hx\| - 1}{h} + \frac{\|y - hx\| - 1}{h} \geq 2\|x - \pi x\|.$$

Tomando límite para $h \to 0^+$, se obtiene que $x = \pi x \in Y$. Pero entonces $x \in G \cap Y$ y $x \neq 0$ lo cual es un absurdo y por lo tanto $\dim Y = 1$. $\square$

Observación 1.1.12. *No es difícil ver que $X = \ell_\infty(2)$ posee M-ideales y L-sumandos no triviales.* Basta tomar $I = \{(s,t)/s = 0\}$ y $J = \{(s,t)/s - t = 0\}$

En efecto, es claro que I es un M-sumando y por lo tanto, un M-ideal. Para ver que J es un L-sumando, notamos que

$$(s,t) = \frac{s-t}{2}(1,-1) + \frac{s+t}{2}(1,1)$$

y

$$\max\{|s|,|t|\} = \frac{|s-t|}{2} + \frac{|s+t|}{2} = \|\frac{s-t}{2}(1,-1)\|_\infty + \|\frac{s+t}{2}(1,1)\|_\infty.$$

1.2. 3-ball property

Hasta el momento hemos dado una primera visión sobre M-ideales y M-sumandos y los relacionamos entre sí. Sin embargo, para dar un ejemplo de M-ideal no trivial o que no sea un M-sumando, usamos una propiedad que llamamos la *3-ball property*. Esta herramienta resulta ser muy útil y nos da equivalencias para decidir cuándo un subespacio J es un M-ideal de un espacio X. Antes, necesitamos un par de lemas. El primero, requiere la noción de ε-isometría; es decir, un operador inversible T tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$.

Lema 1.2.1. *(Principio de reflexividad local) Sea X un espacio de Banach y sean $E \subseteq X^{**}$ y $F \subseteq X^*$ subespacios de dimensión finita. Entonces, para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe una ε-isometría $T : E \longrightarrow X$ verificando* *(i)* $T(\widehat{x}) = x$ *para todo* $x \in E \cap X$.

(ii) $< x^*; T(x^{**}) > = < x^{**}; x^* >$ *para todo* $x^{**} \in E$ *y todo* $x^* \in F$.

Una demostración de este hecho se puede ver en [AK, Teorema 11.2.4.].

Lema 1.2.2. *Sea* $J \subseteq X$ *un* M*-sumando y sea* $(B_i)_{i\in I}$ *una colección de bolas cerradas en* X *tales que* $\bigcap_i B_i \neq \emptyset$ *y* $B_i \cap J \neq \emptyset$ *para todo* i*; entonces* $\bigcap_i B_i \cap J \neq \emptyset$.

Demostración. Sean $x_i \in X$, $r_i > 0$ tales que $B_i = B(x_i, r_i)$. Como J es un M-sumando en X, podemos descomponer $X = J \oplus_\infty R$, con R subespacio cerrado. Sea $P : X \to J$ la M-proyección asociada a J y sea $x \in \bigcap_i B_i$. Afirmamos que $Px \in \bigcap_i B_i \cap J$. En efecto, sabemos que $Px \in J$. Para cada i, tomamos $y_i \in B_i \cap J$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} r_i &\geq \|x_i - y_i\| \\ &= \|\underbrace{(Px_i - y_i)}_{\in J} + \underbrace{(x_i - Px_i)}_{\in R = \ker P}\| \\ &= \text{máx}\{\|Px_i - y_i\|; \|x_i - Px_i\|\} \\ &\geq \|x_i - Px_i\|. \end{aligned}$$

Luego, como $\|Px - Px_i\| \leq \|P\|\|x - x_i\| = \|x - x_i\| \leq r_i$, se tiene que

$$\|Px - x_i\| = \text{máx}\{\|Px - Px_i\|; \|Px_i - x_i\|\} \leq r_i.$$

Luego, $Px \in B(x_i, r_i)$ para todo i y se tiene el resultado. $\square$

Teorema 1.2.3. *(3-ball property) Sea* $J \subseteq X$ *un subespacio cerrado. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

(i) J *es un* M*-ideal en* X.

(ii) *(La n-ball property) Dado* $n \in \mathbb{N}$*. Para cada familia* $B_1, \ldots, B_n$ *de bolas cerradas,* $B_i = B(x_i, r_i)$*, tales que* $\bigcap_i B_i \neq \emptyset$ *y* $B_i \cap J \neq \emptyset$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, se tiene que* $\bigcap_i B(x_i, r_i + \varepsilon) \cap J \neq \emptyset$ *para todo* $\varepsilon > 0$.

(iii) *(La 3-ball property) Igual que (ii) con* $n = 3$.

(iv) *(La 3-ball property restringida) Dados* y_1, y_2, $y_3 \in B_J$, $x \in B_X$ *y* $\varepsilon > 0$*, existe* $y \in J$ *tal que* $\|x + y_i - y\| \leq 1 + \varepsilon$ *para todo* $i = 1, 2, 3$.

(v) *(La n-ball property estricta) Dado* $n \in \mathbb{N}$*. Para cada familia* $B_1, \ldots, B_n$ *de bolas cerradas, tales que* $(\bigcap_i B_i)^\circ \neq \emptyset$ *y* $B_i \cap J \neq \emptyset$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$*, se tiene que* $\bigcap_i B_i \cap J \neq \emptyset$.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii): Sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $B_i =: B(x_i, r_i)$ $i = 1, \ldots, n$ bolas cerradas en las condiciones de (ii). Como J es M-ideal, entonces $J^\perp$ es L-sumando en X^*, es decir, $X^* = J^\perp \oplus_1 J^*$; y por lo tanto, $J^{\perp\perp}$ es M-sumando en X^{**}. Además, tenemos que $\bigcap_i B(\widehat{x}_i, r_i) \neq \emptyset$ y $B(\widehat{x}_i, r_i) \cap J^{\perp\perp} \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n$ pues $\cap B_i \neq \emptyset$ y $B_i \cap J \neq \emptyset$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Así, por Lema 1.2.2, existe $x_0^{**} \in \bigcap_i B(\widehat{x}_i, r_i) \cap J^{\perp\perp}$.
Supongamos que (ii) es falso, luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que si $D =: \bigcap_i B(x_i, r_i + \varepsilon)$, entonces D y J tienen distancia positiva. Al ser D convexo y J subespacio cerrado; podemos separarlos estrictamente. Esto es, por Hahn-Banach, existen $\varphi \in X^*$ y $\gamma > 0$ tales que $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in J$ ($\varphi \in J^\perp$) y $\gamma \leq Re(\varphi(y))$ para todo $y \in D$.
Sean $F =: [\varphi]$, $E =: [x_0^{**}, \widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n]$ y $\delta = \text{mín}\{\frac{\varepsilon}{r_i}\}$. Por el principio de reflexividad local, existe una δ-isometría $T : E \longrightarrow X$ tal que $\|T^{-1}\| = 1$, $\|T\| \leq 1 + \delta$ y

- $T(\widehat{x}_i) = x_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.
- $< \varphi; T(x_0^{**}) > = < x_0^{**}; \varphi >$.

Afirmamos que $Tx_0^{**} \in D$. En efecto,

$$\begin{array}{rcl} \|Tx_0^{**} - x_i\| & = & \|Tx_0^{**} - T\widehat{x}_i\| \\ & \leq & \|T\|\|x_0^{**} - \widehat{x}_i\| \\ & \leq & (1+\delta)r_i \\ & \leq & r_i + \varepsilon. \end{array}$$

Con esto, $0 < \gamma \leq Re(< \varphi, Tx_0^{**} >) = Re(< x_0^{**}, \varphi >)$. Como $x_0^{**} \in (J^\perp)^\perp$ y $\varphi \in J^\perp$, tenemos una contradicción.

Es evidente que (ii) $\Rightarrow$ (iii). Veamos que (iii) implica (iv).

Dados y_1, y_2, y_3, x y $\varepsilon > 0$ como en el enunciado, consideramos $B_i =: B(x + y_i, 1)$. Así, $x \in \bigcap_i B_i$ y $y_i \in B_i \cap J$ para todo $i = 1, 2, 3$ y por lo tanto, por (iii) existe $y \in \bigcap_i B(x + y_i, 1 + \varepsilon) \cap J$ que cumple lo pedido.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Debemos probar que existe un subespacio cerrado $R \subseteq X^*$ tal que $X^* = J^\perp \oplus_1 R$. Más aún, probaremos que $R = J^* = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = \|x^*\big|_J\|\}$. Veamos que se tienen las siguientes afirmaciones.

(a) Todo $x^* \in X^*$ se puede descomponer en la forma $x^* = x_1^* + x_2^*$ con $x_1^* \in J^\perp$ y $x_2^* \in J^*$, con escritura única.

(b) $\|x_1^* + x_2^*\| = \|x_1^*\| + \|x_2^*\|$ para todo $x_1^* \in J^\perp$ y $x_2^* \in J^*$.

(c) J^* es subespacio cerrado de X^*.

Dado $x^* \in X^*$ consideramos x_2^* una extensión por Hahn-Banach de $x^*\big|_J$ y tomamos $x_1^* =: x^* - x_2^*$, de donde $x^* = x_1^* + x_2^*$ como en (a).
Para poder ver la unicidad de la escritura, necesitamos primero probar (b).

Para ver (b), basta mostrar que $\|x_1^* + x_2^*\| \geq \|x_1^*\| + \|x_2^*\|$, si $x_1^* \in J^\perp$ y $x_2^* \in J^*$. Sea $\varepsilon > 0$ y sean $x \in B_X$ y $z \in B_J$ tales que $x_1^*(x)$ y $x_2^*(z)$ son reales y además vale

$$x_1^*(x) \geq \|x_1^*\| - \varepsilon,$$
$$x_2^*(z) \geq \|x_2^*\| - \varepsilon.$$

Por (iv) tenemos que existe $y \in J$ tal que $\|x \pm z - y\| \leq 1 + \varepsilon$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)(\|x_1^* + x_2^*\| + \|x_1^* - x_2^*\|) &\geq \big|(x_1^* + x_2^*)(x + z - y) + (x_1^* - x_2^*)(x - z - y)\big| \\ &= 2\big|x_1^*(x) + x_2^*(z)\big| \\ &\geq 2\|x_1^*\| + 2\|x_2^*\| - 4\varepsilon \\ &\geq \|x_1^*\| + \|x_2^*\| + \|x_1^* - x_2^*\| - 4\varepsilon.\end{aligned}$$

El resultado se obtiene haciendo tender ε a 0.

Ahora, supongamos que $x_1^* + x_2^* = y_1^* + y_2^*$ con $x_1^*,\ y_1^* \in J^\perp$ y $x_2^*,\ y_2^* \in J^*$; entonces $x_2^* = (y_1^* - x_1^*) + y_2^* \in J^\perp + J^*$ y como $x_1^*,\ y_1^* \in J^\perp$, se tiene que $x_2^*\big|_J = y_2^*\big|_J$. Así, por lo visto en (b) se tiene que $\|x_2^*\| = \|y_1^* - x_1^*\| + \|y_2^*\| = \|y_1^* - x_1^*\| + \|y_2^*\big|_J\| = \|y_1^* - x_1^*\| + \|x_2^*\big|_J\| = \|y_1^* - x_1^*\| + \|x_2^*\|$ y por lo tanto $\|y_1^* - x_1^*\| = 0$. Luego, la descomposición en (a) es única.

Por último, probemos (c). Como la convergencia de puntos de un espacio de Banach, implica la convergencia de sus normas, tenemos que $J^* = \{\varphi / \|\varphi\| = \|\varphi\big|_J\|\}$ es cerrado. Además, si $\varphi \in J^*$, $\lambda\varphi \in J^*$ para todo λ escalar. Veamos entonces que es cerrado para la suma. Sean $x^*,\ y^* \in J^*$ y sean $x_1^* \in J^\perp$, $x_2^* \in J^*$ únicos tales que $x^* + y^* = x_1^* + x_2^*$. Queremos ver que $x_1^* = 0$.
Sea $x \in B_X$. Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $y_1,\ y_2,\ y_3 \in B_J$ tales que

$$x^*(y_1) \geq \|x^*\| - \varepsilon, \qquad y^*(y_2) \geq \|y^*\| - \varepsilon, \qquad -x_2^*(y_3) \geq \|x_2^*\| - \varepsilon.$$

Por (iv) existe $y \in J$ tal que $\|x + y_i - y\| \leq 1 + \varepsilon$ para $i = 1, 2, 3$. Así,

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)(\|x^*\| + \|y^*\| + \|x_2^*\|) &\geq \big|x^*(x + y_1 - y) + y^*(x + y_2 - y) - x_2^*(x + y_3 - y)\big| \\ &\geq Re(x^*(x + y_1 - y) + y^*(x + y_2 - y) - x_2^*(x + y_3 - y)) \\ &= Re((x^* + y^* - x_2^*)(x - y)) + \mathrm{Re}(x^*(y_1) + y^*(y_2) - x_2^*(y_3)) \\ &= Re(x_1^*(x)) + x^*(y_1) + y^*(y_2) - x_2^*(y_3) \\ &\geq Re(x_1^*(x)) + \|x^*\| + \|y^*\| + \|x_2^*\| - 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Con lo cual, haciendo $\varepsilon \to 0$ se tiene que $Re(x_1^*(x)) \leq 0$ para todo $x \in B_X$ y, por lo tanto, $x_1^*(x) = 0$ para todo $x \in B_X$. Luego, $x_1^* = 0$.

Dadas n bolas, $B(x_1;r_1),\dots,B(x_n;r_n)$ y $\varepsilon>0$; para ver que (v) $\to$ (ii) basta usar (v) con la colección $B(x_i;r_i+\varepsilon)$ para $i=1,\dots,n$.

Para finalizar la demostración, veamos que (ii) $\Rightarrow$ (v). Sean $B(x_1;r_1),\dots,B(x_n;r_n)$ bolas cerradas tales que $(\bigcap_i B_i)^\circ\neq\emptyset$ y $B_i\cap J\neq\emptyset$ para todo $i=1,\dots,n$. Sea $\delta>0$ e $y_0\in X$ tales que $\|y_0-x_i\|\leq r_i-\delta$ para todo $i=1,\dots,n$. Sea $r=:\min r_i$.

Vamos a construir una sucesión $(y_k)\subseteq J$ tal que

$$\|y_k-y_{k+1}\|\leq 2^{-k}4r, \tag{1.2}$$

$$\|y_k-x_i\|\leq r_i+2^{-k}\delta \qquad \text{para todo } 1\leq i\leq n.$$

Al lograr esto, obtendremos una sucesión de Cauchy en J, cuyo límite pertenece a J y que verifica además pertenecer a $\bigcap_i B(x_i;r_i)$. Por lo tanto, $\bigcap_i B(x_i;r_i)\cap J\neq\emptyset$.

Consideramos las bolas $B(y_0;2r-\delta)$ y $B(x_i;r_i)$ para $i=1,\dots,n$. Estas $n+1$ bolas, cumplen (ii), en efecto

$$y_0\in B(y_0;2r-\delta)\cap\bigcap B(x_i;r_i-\delta)\subseteq B(y_0;2r-\delta)\cap\bigcap B(x_i;r_i),$$

Sea i_0 tal que $r=r_{i_0}$. Como $B(x_{i_0};r_{i_0})\cap J\neq\emptyset$, tomamos $x\in B(x_{i_0},r_{i_0})\cap J$. Resulta que $x\in B(y_0;2r-\delta)\cap J$. Así,

$$B(y_0;2r-\delta)\cap\bigcap_i B(x_i;r_i)\cap J\neq\emptyset.$$

Luego, por (ii) existe $y_1\in B(y_0;2r-\frac{\delta}{2})\cap\bigcap_i B(x_i;r_i+\frac{\delta}{2})\cap J\subseteq B(y_0;2r)\cap\bigcap_i B(x_i;r_i+\frac{\delta}{2})$ que es lo que queríamos probar para $k=1$.
Supongamos que tenemos elegidos $y_1,\dots,y_k$ como en (1.2) y construyamos y_{k+1} que también verifique (1.2).
Consideramos las bolas $B(y_k;(2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})4r)$ y $B(x_i;r_i+(2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})\delta)$. Como $y_k\in J$ y $B(x_i;r_i)\cap J\neq\emptyset$ se tiene que estas $n+1$ bolas intersecan J. Más aún, veremos que la intersección de estas bolas es no vacía. Para esto veamos que

$$z_k=:2^{-(k+1)}y_0+(1-2^{-(k+1)})y_k\in B(y_k;(2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})4r)\cap\bigcap_i B(x_i;r_i+(2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})\delta).$$

Veamos primero que $z_k\in B(y_k;(2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})4r)$:

$$\begin{aligned}\|z_k-y_k\| &= 2^{-(k+1)}\|y_0-y_k\|\\ &\leq 2^{-(k+1)}(\|y_0-y_1\|+\ldots+\|y_{k-1}-y_k\|)\\ &\leq 2^{-(k+1)}\textstyle\sum_{i=1}^k 2^{-i}4r\\ &= (2^{-(k+1)}-2^{-(2k+1)})4r.\end{aligned}$$

Veamos ahora que $z_k \in \bigcap_i B(x_i; r_i + (2^{-(k+1)} - 2^{-(2k+1)})\delta)$, para esto notemos que z_k es una combinación convexa entre y_0 e y_k y por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} \|z_k - x_i\| & \leq & 2^{-(k+1)}\|y_0 - x_i\| + (1 - 2^{-(k+1)})\|y_k - x_i\| \\ & \leq & 2^{-(k+1)}(r_i - \delta) + (1 - 2^{-(k+1)})(r_i + 2^{-k}\delta) \\ & = & r_i + (2^{-(k+1)} - 2^{-(2k+1)})\delta. \end{array}$$

Finalmente, podemos aplicar (ii) con $\varepsilon = 2^{-(2k+1)}\min\{4r; \delta\}$ para obtener un elemento de J tal que

$$y_{k+1} \in B(y_k; 2^{-(k+1)}4r) \cap \bigcap_i B(x_i; r_i + 2^{-(k+1)}\delta) \cap J.$$

Luego, el teorema queda probado. □

Una pregunta natural es si vale la *2-ball property*; es decir si el item (ii) del Teorema 1.2.3 formulado con $n = 2$ da un criterio necesario y suficiente para determinar si un subespacio es un M-ideal. La respuesta es negativa, como lo muestra el Ejemplo 1.2.5. Antes, necesitamos el siguiente lema.

Lema 1.2.4. *Sea $f \in L_\infty$. Entonces $f = c + g$ donde $c = \frac{\sup f + \text{ínf} f}{2}$, $g = f - c$ y $\|f\| = |c| + \|g\|$.*

Demostración. Si $f(x) \geq 0$ o $f(x) \leq 0$ para todo x, el resultado es trivial. Supongamos entonces que f cambia de signo. Entonces $\|f\| = \sup |f(x)| = \text{máx}\{\sup f(x), -\text{ínf} f(x)\}$. Por otro lado, $\sup g(x) = \sup f(x) - c = \frac{\sup f - \text{ínf} f}{2}$ y $\text{ínf}\, g(x) = \text{ínf} f(x) - c = \frac{\text{ínf} f - \sup f}{2}$. Luego, $\|g\| = |\frac{\sup f - \text{ínf} f}{2}| = \frac{\sup f - \text{ínf} f}{2}$. Así, si $\sup f \geq -\text{ínf} f$, entonces y $\|f\| = \sup f$ y

$$|c| + \|g\| = \frac{\sup f + \text{ínf} f}{2} + \frac{\sup f - \text{ínf} f}{2} = \sup f.$$

Si $\sup f \leq -\text{ínf} f$, entonces $\|f\| = -\text{ínf} f$ y

$$|c| + \|g\| = -\frac{\sup f + \text{ínf} f}{2} + \frac{\sup f - \text{ínf} f}{2} = -\text{ínf} f.$$

□

Ejemplo 1.2.5. *Sea $X = L_1(\mu) = \{x$ μ-medibles : $\int |x| d\mu < \infty\}$ con μ una medida positiva, y sea $J = \{x \in X / \int x d\mu = 0\}$. Entonces, J no es un M-ideal, aunque cumple la 2-ball property.*

Veamos que J no es un M-ideal de X. Por Teorema 1.1.11, alcanza ver que X posee un L-sumando no trivial. En efecto, todo $x \in X$ se puede escribir de la forma $x = x^+ - x^-$, donde x^+ es su parte positiva y x^- su parte negativa. Notemos que

$$\begin{array}{rcl} \|x\| & = & \int |x| d\mu \\ & = & \int x^+ d\mu + \int x^- d\mu \\ & = & \int |x^+| d\mu + \int |x^-| d\mu \\ & = & \|x^+\| + \|x^-\|. \end{array}$$

Con lo cual $\{x \in X/x = x^+\}$ es un L-sumando no trivial de X.
Para ver que J cumple la *2-ball property* supongamos que se tienen $B_1 =: B(x_1, r_1)$ y $B_2 =: B(x_2, r_2)$ tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ y $B_i \cap J \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$ y que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_1, r_1 + \varepsilon) \cap B(x_2, r_2 + \varepsilon) \cap J = \emptyset$.
Consideremos en $L_1 \oplus L_1$ el conjunto convexo $D = \{(z_1, z_2) : \|z_i - x_i\| \leq r_i; i = 1, 2\}$ y el subespacio $F = \{(y, y) : y \in J\}$. Por el teorema geométrico de Hahn-Banach, podemos separar estríctamente a D y F por una funcional $(f_1, f_2) \in L_\infty \oplus L_\infty$.
Así tenemos que

$$f_1 + f_2 \in J^\perp$$

y

$$\sup_{(z_1,z_2)\in D} \int (f_1 z_1 + f_2 z_2) d\mu < 0. \tag{1.3}$$

Por Lema 1.2.4, toda $g \in L_\infty$ puede ser descompuesta en la forma

$$g = c + h$$

donde c es una constante, $h = g - c$ y $\|g\| = |c| + \|h\|$.
Como $J^\perp = [1]$, podemos conseguir una misma $g \in L_\infty$ tal que

$$f_1 = c_1 + g$$

y

$$f_2 = c_2 - g,$$

donde

$$\|f_i\| = |c_i| + \|g\| \qquad i = 1, 2.$$

Notemos además que para toda $f \in L_\infty$

$$\|f\| = \sup_{x \in B_{L_1}} \int f x d\mu = \sup_{x \in B(x_1, r_1)} \int f\big(\frac{x - x_1}{r_1}\big) d\mu,$$

y si $z \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ entonces

$$\big|\int f(x_1 - x_2) d\mu\big| \leq \|f\|_\infty \big(\int |x_1 - z| d\mu + \int |x_2 - z| d\mu\big) \leq \|f\|(r_1 + r_2).$$

Por lo tanto, si consideramos $y_i \in B(x_i, r_i) \cap J$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{(z_1,z_2)\in D} \int (f_1 z_1 + f_2 z_2) d\mu &= \sup_{(z_1,z_2)\in D} \int \big(f_1(z_1 - x_1) + f_1 x_1 + f_2(z_2 - x_2) + f_2 x_2\big) d\mu \\
&= \|f_1\| r_1 + \|f_2\| r_2 + c_1 \textstyle\int x_1 d\mu + \int (g(x_1 - x_2) d\mu + c_2 \int x_2 d\mu \\
&= \|f_1\| r_1 + \|f_2\| r_2 + c_1 \textstyle\int (x_1 - y_1) d\mu + \int g(x_1 - x_2) d\mu \\
&\quad + c_2 \textstyle\int (x_2 - y_2) d\mu \\
&\geq \|f_1\| r_1 + \|f_2\| r_2 - \big(|c_1| r_1 + \|g\|(r_1 + r_2) + |c_2| r_2\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

lo que contradice (1.3).

Un subespacio que cumple la *2-ball property* se dice un semi-M-ideal. Para más información sobre semi-M-ideales ver [HWW, página 43]. El ejemplo anterior muestra que hay semi-M-ideales que no son M-ideales.

El siguiente es un ejemplo clásico que ilustra cómo la *3-ball property* permite mostrar fácilmente que un subespacio es un M-ideal.

Ejemplo 1.2.6. *Sea $1 < p \leq q < \infty$. Enontces $\mathcal{K}(\ell_p, \ell_q)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$. También, cualquiera sea X espacio de Banach, se tiene que $\mathcal{K}(X, c_0)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X, c_0)$.*

Demostración. Veamos primero que $\mathcal{K}(\ell_p, \ell_q)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$. Sean P_n y Q_n las proyecciones en las primeras n coordenadas de ℓ_p y ℓ_q respectivamente. Entonces ambas sucesiones convergen puntualmente a la identidad y por lo tanto convergen unifórmemente en cualquier conjunto compacto. Lo mismo sucede para sus operadores adjuntos P_n^* y Q_n^*. Verifiquemos la *3-ball property.* Sean S_1, S_2, $S_3 \in B_{\mathcal{K}(\ell_p,\ell_q)}$, sea $T \in B_{\mathcal{L}(\ell_p,\ell_q)}$ y sea $\varepsilon > 0$. Vamos a probar que se pueden elegir n, m suficientemente grandes tales que

$$\|T + S_i - (Q_nT + TP_m - Q_nTP_m)\| \leq 1 + \varepsilon. \tag{1.4}$$

Como P_m, Q_n son operadores de rango finito, resulta que $(Q_nT + TP_m - Q_nTP_m) \in \mathcal{K}(\ell_p, \ell_q)$ para todo n, m. Para probar (1.4) vamos a intercalar $Q_nS_iP_m$. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} \|Q_nS_iP_m - S_i\| &\leq \lim_{n,m\to\infty} \|Q_nS_i - S_i\|\|P_m\| + \|S_iP_m - S_i\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \|Q_nS_i - S_i\| + \lim_{m\to\infty} \|P_m^*S_i^* - S^*\|. \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, necesitamos estimar

$$\|T + Q_nS_iP_m - (Q_nT + TP_m - Q_nTP_m)\|.$$

Para esto, notemos que

$$T - (Q_nT + TP_m - Q_nTP_m) = (I - Q_n)T - (I - Q_n)TP_m = (I - Q_n)T(I - P_m).$$

Dado $x \in \ell_p$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|[(I - Q_n)T(I - P_m) + Q_nS_iP_m]x\| &= \Big(\|(I - Q_nT(I - P_m))x\|^q + \|Q_nS_iP_mx\|^q\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\|(I - P_m)x\|^q + \|P_mx\|^q)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq (\|(I - P_m)x\|^p + \|P_mx\|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|. \end{aligned}$$

Como $\|Q_n S_i P_n - S_i\|$ puede tomarse tan chico como se quiera, hemos probado que se pueden encontrar n,m que cumplen lo pedido.

Para ver que $\mathcal{K}(X, c_0) \subseteq \mathcal{L}(X, c_0)$ es un M-ideal, se razona de la misma forma. En este caso, el operador compacto que sirve es $Q_n T$ para algún n suficientemente grande. $\square$

Qué sucede para $p > q$? En este caso, se puede probar que $\mathcal{K}(\ell_p, \ell_q) = \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ (Corolario 2.4.8) con lo cual los operadores compactos de ℓ_p en ℓ_q resultan ser un M-ideal trivial en $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$.

1.2.1. M-ideales y su geometría

Terminaremos esta sección inicial comentando sobre algunas propiedades geometricas de los espacios que admiten una estructura de M-ideal. Un subespacio J de un espacio de Banach X se dice proximinal si para todo $x \in X$ existe $y \in J$ que realiza la distancia a x, es decir $\|x - y\| = d(x, J)$. Notamos por $P_J(x)$ al conjunto de tales $y \in J$, que llamaremos elementos proximinales, y diremos que $P_J(x)$ es el conjunto de mejores aproximantes de J a x. Si, para todo $x \in X$, $P_J(x)$ tiene un único elemento, decimos que J es un subespacio de Chebyshev. Por ejemplo, todo subespacio cerrado $J \subseteq H$, con H un espacio de Hilbert, es de Chebyshev. Lo mismo sucede con $\ker(P)$ para P un L-proyector (Lema 1.1.3).

Proposición 1.2.7. *Sea X un espacio de Banach y sea $J \subseteq X$ un M-sumando. Sea $P : X \to X$ una M-proyección con rango J. Entonces, para todo $x \in X \setminus J$, el conjunto $P_J(x)$ es la bola de centro Px y radio $\|x - Px\|$.*

Demostración. Como J es un M-sumando, tenemos que para todo $y \in J$, $\|y - x\| = \max\{\|y - Px\|, \|x - Px\|\} \geq \|x - Px\|$. Luego, como $Px \in J$ se tiene que $\|x - Px\| = d(x, J)$ y por lo tanto $Px \in P_J(x)$.
Sea $y \in J$ tal que $\|y - Px\| \leq \|x - Px\|$. Entonces $\|y - x\| = \|x - Px\| = d(x, J)$ y por lo tanto $y \in P_J(x)$. Por otro lado, si $y \in P_J(x)$, entonces $\|x - Px\| = d(x, J) = \|y - x\|$, pero como $\|y - x\| = \max\{\|y - Px\|, \|x - Px\|\}$ entonces debe ser $\|y - Px\| \leq \|x - Px\|$. Así, probamos que $P_J(x)$ es la bola de centro Px y radio $\|x - Px\|$. $\square$

Corolario 1.2.8. *Si J es un M-sumando en X, entonces $J = span\{P_J(x)\}$ para todo $x \in X \setminus J$.*

Con este resultado, vemos que un M-sumando está lejos de ser un subespacio de Chebyshev, aunque sí son subespacios proximinales. El siguiente resultado muestra que un M-ideal es un subespacio proximinal.

Proposición 1.2.9. *Los M-ideales son proximinales.*

Demostración. Sea $J \subseteq X$ un M-ideal y sea $x \in X$ tal que $d = d(x, J) > 0$. Vamos a construir una sucesión $(y_n) \subseteq J$ cumpliendo

$$\|y_{n+1} - y_n\| \leq (\frac{3}{4})^n, \tag{1.5}$$

$$\|y_n - x\| \leq d + (\frac{3}{4})^{n-1}. \tag{1.6}$$

Una vez logrado esto, por (1.5) tenemos que (y_n) es de Cauchy y, por lo tanto, converge a un elemento $y \in J$. Por (1.6), se tiene que y dista de x en no más que d. Con lo cual tenemos que $y \in P_J(x)$.

Construimos la sucesión (y_n) por inducción. Sea $\varepsilon > 0$ y sea $y \in J$ tal que $\|y - x\| < d + \varepsilon$. Consideramos las bolas $B(x, d + \frac{\varepsilon}{2})$ y $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$. Como $d > 0$, estas bolas tiene intersección no vacía. Además, $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ interseca a J en y y como $d = d(x, J)$, $B(x, d + \frac{\varepsilon}{2})$ también interseca a J.

Como J es un M-ideal, por el Teorema 1.2.3 item (ii), tenemos que existe

$$y_1 \in J \cap B(x, d + \frac{3\varepsilon}{4}) \cap B(y, \frac{3\varepsilon}{4}).$$

Aplicando este razonamiento para $\varepsilon_n = (\frac{3}{4})^{n-1}$ obtenemos la sucesión (y_n) deseada. $\square$

Una herramienta útil al momento de calcular normas en un espacio de Banach es el conjunto de puntos extremales. En el caso en que X posea un M-ideal J, podemos describir los extremales de X en función de los extremales de J.

Definición 1.2.10. Sea $C \subseteq X$ un subconjunto convexo de un espacio de Banach, decimos que $x \in C$ es un punto extremal de C si $\forall y, z \in C$ y $t \in (0, 1)$ tal que $x = ty + (1 - t)z$ se tiene que $x = y = z$.

Notamos por $Ext(C)$ al conjunto de puntos extremales de C y tomamos la convención $Ext(\{0\}) = \emptyset$.

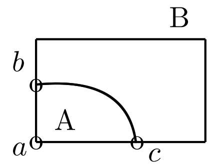
En otras palabras, un punto extremal de un conjunto convexo, no es otra cosa que un punto que no pertenece a ningún segmento no trivial incluido en el conjunto.

Notar que para todo X espacio vectorial normado, se tiene que $Ext(B_X) \subseteq S_X$, ya que dado x_0 punto interior en B_X, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_0, \varepsilon) \subseteq B_X$, y x_0 se escribe como punto medio de dos elementos de B_X.

Observación 1.2.11. *Sean A, B dos conjuntos convexos tales que $A \subseteq B$, entonces $Ext(B) \cap A \subseteq Ext(A)$.*

En efecto, sea x_0 un punto extremal de B tal que $x_0 \in A$ y supongamos que x_0 es un punto interior de un segmento con extremos a_1, $a_2 \in A$. Como A es convexo y $A \subseteq B$, entonces el segmento $[a_1, a_2]$ esta incluido en B, lo que contradice el hecho de que x_0 sea un punto extremal de B. Luego $x_0 \in Ext(A)$.

Notar que en A pueden haber otros extremales que no sean extremales de B. El siguiente gráfico muestra un ejemplo de esto.



(1.7)

En este caso, a es un extremal de B que interseca a A, pero b y c son extremales de A que no lo son de B.

Para L-sumandos se tiene la siguiente descripción.

Proposición 1.2.12. *Sea $X = J_1 \oplus_1 J_2$ entonces:*

$$Ext(B_X) = Ext(B_{J_1}) \cup Ext(B_{J_2}).$$

Demostración. Sea $x \in Ext(B_X)$, entonces existen únicos $y \in J_1$, $z \in J_2$ tales que $x = y + z$. Si $y = 0$, entonces $x = z \in J_2$ y, como x es un punto extremal, $x \in B_{J_2}$. Como $B_{J_2} \subseteq B_X$, por la observación anterior, tenemos que

$$x \in Ext(B_X) \cap B_{J_2} \subseteq Ext(B_{J_2}) \subseteq Ext(B_{J_1}) \cup Ext(B_{J_2}).$$

Lo mismo obtenemos si $z = 0$. Nos queda analizar el caso en el que $0 < \|y\| < 1$ y $0 < \|z\| < 1$. En este caso tomamos un $\varepsilon > 0$ tal que $(1 - \varepsilon\frac{\|y\|}{\|z\|}) > 0$ y $(1 - \varepsilon\frac{\|z\|}{\|y\|}) > 0$. Entonces, escribimos

$$w_1 =: (1+\varepsilon)y + (1 - \varepsilon\frac{\|y\|}{\|z\|})z,$$

$$w_2 =: (1 - \varepsilon\frac{\|z\|}{\|y\|})y + (1+\varepsilon)z.$$

Notemos que w_1 está en S_X; más aún,

$$\|w_1\| = (1+\varepsilon)\|y\| + (1 - \varepsilon\frac{\|y\|}{\|z\|})\|z\| = \|y\| + \|z\| = \|x\| = 1$$

al estar x en $Ext(B_X)$. De la misma forma $w_2 \in S_E$.
Tomando $t = \frac{\|z\|}{\|y\|+\|z\|} \in (0,1)$, podemos escribir

$$x = tw_1 + (1-t)w_2.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} tw_1 + (1-t)w_2 &= \tfrac{\|z\|}{\|z\|+\|y\|}\Big((1+\varepsilon)y + \big(1 - \varepsilon\tfrac{\|y\|}{\|z\|}\big)z\Big) + \big(1 - \tfrac{\|z\|}{\|z\|+\|y\|}\big)\Big(\big(1 - \varepsilon\tfrac{\|z\|}{\|y\|}\big)y + (1+\varepsilon)z\Big) \\ &= \Big(\tfrac{(1+\varepsilon)\|z\|}{\|y\|+\|z\|} + \tfrac{\|y\|-\varepsilon\|z\|}{\|y\|+\|z\|}\Big)y + \Big(\tfrac{\|z\|-\varepsilon\|y\|}{\|y\|+\|z\|} + \tfrac{\|y\|(1+\varepsilon)}{\|y\|+\|z\|}\Big)z \\ &= y + z \\ &= x \end{aligned}$$

mostrando que $x \notin Ext(B_X)$ y contradiciendo la hipótesis.

Ahora, sea $x \in Ext(B_{J_1})$, $\|x\| = 1$ y supongamos que existen $\lambda \in (0,1)$, $y, z \in B_X$ tales que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Sean $y_1, z_1 \in J_1$ y $y_2, z_2 \in J_2$ tales que $y = y_1 + y_2$ y $z = z_1 + z_2$. Así, podemos escibir

$$x = \lambda y_1 + (1-\lambda)z_1 + \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2.$$

Como $x \in J_1$ debe ser $\lambda y_2 + (1-\lambda)z_2 = 0$ y como $x \in Ext(B_{J_1})$ entonces $x = y_1 = z_1$. Pero entonces $x \in J_1 \cap J_2 = 0$, llegando a un absurdo al ser $\|x\| = 1$.
Luego $x \in B_X$. Análogamente se prueba que $Ext(B_{J_2}) \subseteq Ext(B_X)$. □

Corolario 1.2.13. *Sea X un espacio de Banach y sea $J \subseteq X$ un M-ideal. Entonces*

$$Ext(B_{X^*}) = Ext(B_{J^\perp}) \cup Ext(B_{J^*})$$

Demostración. Por la Observación 1.1.10, tenemos que $X^* = J^\perp \oplus_1 J^*$. El resultado se sigue de la Proposición 1.2.12. □

Capítulo 2

M-ideales en espacios de Operadores.

2.1. Algunas propiedades básicas.

Recordemos que la teoría de M-ideales trata de generalizar la noción de ideal bilátero en un álgebra de Banach. Gelfand y Naimark probaron que toda C^*-álgebra es isométricamente *-isomorfa a la *-álgebra formada por los operadores acotados de algún espacio de Hilbert H. En este caso, el único ideal bilátero cerrado es $\mathcal{K}(H)$, el subespacio de los operadores compactos.
Esto propicia un interés particular por estudiar cuándo $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal dentro de $\mathcal{L}(X)$ y, más en general, estudiar cuándo $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal y si es el único.
En este capítulo estudiaremos estos casos, introduciremos la noción de la propiedad (M) y la usaremos para dar una nueva equivalencia para un subespacio de ser un M-ideal. Comencemos por definir la distancia de Banach-Mazur entre dos espacios de Banach.

Definición 2.1.1 (Distancia de Banach-Mazur)**.** Sean X, Y dos espacios de Banach. Se define la distancia de Banach-Mazur entre X e Y por

$$d(X,Y) =: \inf\{\|T\|.\|T^{-1}\| \text{ tal que } T: X \to Y \text{ es isomorfismo}\}.$$

Por otra parte, si X e Y no son isomorfos, la distancia de Banach-Mazur es infinita.

Observemos que dado $c \in \mathbb{R}$ y $T: X \to Y$ isomorfismo tal que $\|T\|\|T^{-1}\| \leq c$, podemos tomar $\tilde{T} = \frac{T}{\|T\|}$ para obtener un isomorfismo que cumple $\|\tilde{T}\| = 1$ y $\|\tilde{T}^{-1}\| \leq c$.

Proposición 2.1.2.

(a) *Sean X, Y espacios de Banach tales que $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal y sean $E \subseteq X$, $F \subseteq Y$ subespacios 1-complementados. Entonces $\mathcal{K}(E,F) \subseteq \mathcal{L}(E,F)$ es M-ideal.*

(b) La clase de los espacios de Banach para los cuales $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es M-ideal es cerrada con la distancia de Banach-Mazur.

Demostración. (a) Sean π_E, π_F proyecciones, ambas de norma 1, a E y F respectivamente. Vamos a verificar la *3-ball property* para $\mathcal{K}(E,F)$ y $\mathcal{L}(E,F)$. Sean $S_i \in B_{\mathcal{K}(E,F)}$, $T \in B_{\mathcal{L}(E,F)}$, $\varepsilon > 0$ y sean $J_E : E \to X$, $J_F : F \to Y$ las respectivas inclusiones. Entonces $J_F S_i \pi_E \in B_{\mathcal{K}(X,Y)}$ y $J_F T \pi_E \in B_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Así, por hipótesis, existe $R \in \mathcal{K}(X,Y)$ tal que para todo $i = 1,2,3$

$$\|J_F T \pi_E + J_F S_i \pi_E - R\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Sea $\pi_F R J_E \in \mathcal{K}(E,F)$ y $x \in B_E$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(T + S_i - \pi_F R J_E)x\| &= \|\pi_F(T + S_i - RJ_E)x\| \\ &\leq \|(T + S_i - RJ_E)x\| \\ &= \|(J_F T \pi_E + J_F S_i \pi_E - R)x\| \\ &\leq \|J_F T \pi_E + J_F S_i \pi_E - R\| \\ &\leq 1 + \varepsilon, \end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostar.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, sea $\tilde{\varepsilon} > 0$ tal que $(1+\tilde{\varepsilon})^3 \leq 1 + \varepsilon$. Sean X_ε y Y_ε espacios de Banach tales que $d(X, X_\varepsilon) < 1 + \tilde{\varepsilon}$, $d(Y, Y_\varepsilon) < 1 + \tilde{\varepsilon}$ y $\mathcal{K}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon) \subseteq \mathcal{L}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ es un M-ideal. Queremos ver que $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal. Igual que en (a) vamos a verificar la *3-ball property*. Sean $S_i \in B_{\mathcal{K}(X,Y)}$, $i = 1,2,3$ y $T \in B_{\mathcal{L}(X,Y)}$. Sean $T_1 : X_\varepsilon \to X$ y $T_2 : Y \to Y_\varepsilon$ isomorfismos tales que $\|T_i\| = 1$ y $\|T_i^{-1}\| \leq 1 + \tilde{\varepsilon}$, $i = 1,2$. Entonces, considerando $T_2 T T_1 \in B_{\mathcal{L}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)}$, $T_2 S_i T_1 \in B_{\mathcal{K}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)}$, existe $R \in \mathcal{K}(X_\varepsilon, Y_\varepsilon)$ tal que para $i = 1,2,3$

$$\|T_2 T T_1 + T_2 S_i T_1 - R\| \leq 1 + \tilde{\varepsilon}.$$

Con lo cual, si $\tilde{R} = T_2^{-1} R T_1^{-1}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T + S_i - \tilde{R}\| &= \|T_2^{-1}(T_2 T T_1 + T_2 S_i T_1 - R) T_1^{-1}\| \\ &\leq (1+\tilde{\varepsilon})^3 \\ &\leq 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

y la proposición queda probada. □

Proposición 2.1.3. *Si $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-sumando, entonces $\mathcal{K}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración. Por el absurdo, supongamos que existe un subespacio no trivial $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{R} \neq \{0\}$, tal que $\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y) \oplus_\infty \mathcal{R}$ y sea $T \in \mathcal{R}$ con $\|T\| = 1$. Sea $0 < \varepsilon < 1$, $x_0 \in S_X$ tal que $\|Tx_0\| \geq 1 - \varepsilon$, y sea $x_0^* \in S_{X^*}$ tal que $x_0^*(x_0) = 1$. Definimos $S \in \mathcal{K}(X,Y)$ dado por $Sx = x_0^*(x) T x_0$. Entonces, $\|S\| \leq 1$ y por lo tanto $\|S + T\| = \text{máx}\{\|S\|, \|T\|\} = 1$.

Por otro lado, $\|(S+T)x_0\| = 2\|Tx_0\| \geq 2 - 2\varepsilon$, lo que nos lleva a un absurdo pues $x_0 \in S_X$. $\square$

2.2. Distancia de un operador a $\mathcal{K}(X,Y)$.

Los operadores compactos entre dos espacios de Banach son importantes por las diversas propiedades que poseen. Sin embargo, no siempre podemos trabajar con operadores compactos. Aún así, podemos preguntarnos cuán cerca está un operador de ser compacto. Para esto se define la norma esencial de un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ como su distancia a $\mathcal{K}(X,Y)$.

Definición 2.2.1. Sea $T : X \to Y$ un operador lineal y acotado. La norma esencial de T será el número

$$\|T\|_e =: d(T, \mathcal{K}(X,Y)) = \text{ínf}\{\|T-K\| : K \in \mathcal{K}(X,Y)\}.$$

Observación 2.2.2. *Podemos pensar $\|T\|_e$ como una norma cociente, la de la clase de T en $\mathcal{L}(X,Y)/\mathcal{K}(X,Y)$. Como $(E/S)^* = S^\perp$, siempre podemos encontrar $\psi \in B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp}$ tal que $\psi(T) = \|T\|_e$.*

Definición 2.2.3. Sea X un espacio de Banach y $C \subseteq X^*$ un subconjunto acotado. Un conjunto $B \subseteq C$ se dice frontera de James para C si para todo $x \in X$ existe $\psi \in B$ tal que $\psi(x) = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in C\}$. Un subconjunto $B \subseteq B_{X^*}$ se dice frontera de James de X si es una frontera de James para B_{X^*}.

Notemos que si $B \subseteq B_{X^*}$ es una frontera de James de X, entonces todo $x \in X$ realiza su norma a través de una función de B. Todo espacio de Banach tiene como frontera de James al conjunto $Ext(B_{X^*})$. Una demostración de este hecho se puede ver en [FHHMPZ, Pag. 80]. Con esto y la Observación 2.2.2, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.2.4. *Sean X, Y espacios de Banach tales que $\mathcal{K}(X,Y)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$. Entonces, para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ existe $\psi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp})$ tal que $\psi(T) = \|T\|_e$.*

Introducimos ahora un par de lemas útiles; el primero de ellos es una versión recíproca del teorema de Kreim-Milman, [FHHMPZ, Teorema 3.41]. Notaremos por $co(B)$ la cápsula convexa de un conjunto B, que es el conjunto de las combinaciones lineales finitas convexas de los elementos de B.

Lema 2.2.5. *Sea X un espacio de Banach y sea $C \subseteq X$ un subconjunto w^*-compacto y convexo. Sea $B \subseteq C$ tal que $\overline{co(B)} = C$. Entonces $Ext(C) \subseteq \overline{B}^{w^*}$.*

Demostración. Supongamos que existe $x \in \mathrm{Ext}(C)$ tal que $x \notin \overline{B}^{w^*}$. Entonces por el teorema de Kreim-Milman, existe $\varphi \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\Re(\varphi(x)) > \alpha \geq \sup_{y \in B} \Re(\varphi(y))$. Como φ es lineal tenemos que $\sup_{y\in B} \Re(\varphi(y)) = \sup_{y \in \overline{co(B)}} \Re(\varphi(y))$. En efecto, como $B \subseteq \overline{co(B)}$, $\sup_{y\in B}\Re(\varphi(y)) \leq \sup_{y\in\overline{co(B)}} \Re(\varphi(y))$. Por otro lado, si $y \in \overline{co(B)}$ y $\varepsilon > 0$ existe $y_0 \in co(B)$ tal que $\|y - y_0\| \leq \varepsilon$. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ e $y_1 \ldots, y_N \in B$ tales que $y_0 = \sum \lambda_i y_i$ con $\sum \lambda_i = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\Re(\varphi(y_0)) &= \sum \Re(\lambda_i \varphi(y_i)) \\
&= \sum \Re(\lambda_i)\Re(\varphi(y_i)) - \Im(\lambda_i)\Im(\varphi(y_i)) \\
&\leq \sum \Re(\lambda_i)\sup_{z\in B}\Re(\varphi(z)) + \Im(\lambda_i)\sup_{z\in B}\Im(\varphi(z)) \\
&= \sup_{z\in B}\Re(\varphi(z)).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\Re(\varphi(y)) = \Re(\varphi(y - y_0)) + \Re(\varphi(y_0)) \leq \|\varphi\|\varepsilon + \sup_{z\in B}\Re(\varphi(z)).$$

Como esto vale para cualquier $\varepsilon > 0$, se obtiene lo buscado. Sin embargo, el hecho de que $\sup_{y\in B} \Re(\varphi(y)) = \sup_{y\in\overline{co(B)}} \Re(\varphi(y))$ sumado a que $x \in C$, contradice $\overline{co(B)} = C$. $\square$

Proposición 2.2.6. *Sean X, Y espacios de Banach. Entonces,*

$$Ext(B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}) \subseteq \overline{\{y^* \otimes x : y^* \in B_{Y^*}, x \in B_X\}}^{w^*}.$$

Acá estamos viendo a $y^* \otimes x$ como elemento de $\mathcal{L}(X,Y)^*$ mediante $y^* \otimes x(T) =: y^*(Tx)$.

Demostración. Llamamos $B = \{y^* \otimes x : y^* \in B_{Y^*}, x \in B_X\}$. Por el Lema 2.2.5, basta probar que $\overline{co(B)} = B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$.
Sean $y^* \in B_{Y^*}$ y $x \in B_X$. Si $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, entonces $|y^* \otimes x(T)| \leq \|T\|$. Luego, $B \subseteq B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$ y por lo tanto $\overline{co(B)} \subseteq B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$. Para mostrar la otra inclusión, supongamos que existe una $\varphi \in B_{\mathcal{L}(X,Y)^*} \setminus \overline{co(B)}$. Como $B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}$ es w^*-compacto, por el teorema de Hahn-Banach geométrico, podemos encontrar un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\|T\| = 1$ y $r > \tilde{r} > 0$ tales que para todo $y^* \in B_{Y^*}$, $x \in B_X$

$$\Big\langle y^* \otimes x, T \Big\rangle < \tilde{r} < r \leq \Big\langle \varphi, T \Big\rangle \leq 1.$$

Entonces

$$1 = \|T\| = \sup_{y^*\otimes x \in B_{Y^*}\otimes B_X} y^*(Tx) \leq \tilde{r} < 1$$

teniendo una contradicción. Luego, el resultado es cierto. $\square$

Lema 2.2.7. *Sean X, Y espacios de Banach, y sean $x_0^{**} \in X^{**}$, $y_0^* \in Y^*$ tales que $x_0^{**}(K^* y_0^*) = 0$ para todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ de la forma $K(x) = x^*(x).y$ con $x^* \in X^*$ e $y \in Y$. Entonces $x_0^{**} = 0$ o $y_0^* = 0$.*

Demostración. Supongamos que $x_0^{**} \neq 0$ e $y_0^* \neq 0$; entonces existen $x_0^* \in X^*$ e $y_0 \in Y$ tales que $x_0^{**}(x_0^*) = 1$ y $y_0^*(y_0) = 1$.
Definimos $K : X \to Y$ en la forma $K(x) =: x_0^*(x).y_0$. Este es un operador lineal, continuo y compacto (al ser de rango finito). Si $y^* \in Y^*$ y $x \in X$, tenemos que

$$K^*(y^*)(x) = y^*(Kx) = x_0^*(x).y^*(y_0).$$

Con lo cual, $K^*(y_0^*) = x_0^*$ y, por lo tanto $x_0^{**}(K^*y_0^*) = 1 \neq 0$ llegando a una contradicción. Luego, el lema queda probado. □

Dado un operador, no es fácil calcular su norma esencial, sin embargo, vamos a ver que si $\mathcal{K}(X,Y)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$, tenemos una forma alternativa para hallar $\|T\|_e$ cualquiera sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Proposición 2.2.8. *Sean X, Y espacios de Banach tales que $\mathcal{K}(X,Y)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$. Entonces para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$*

$$\|T\|_e = \max\{w(T), w^*(T)\},$$

donde

$$w(T) = \sup\{\limsup \|Tx_\alpha\| \ / \ (x_\alpha) \subseteq S_X \ y \ x_\alpha \stackrel{w}{\to} 0\},$$
$$w^*(T) = \sup\{\limsup \|T^*x_\alpha^*\| \ / \ (x_\alpha) \subseteq S_X \ y \ x_\alpha^* \stackrel{w^*}{\to} 0\}.$$

Demostración. Sea $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ y sea $(x_\alpha) \subseteq S_X$ una red tal que $x_\alpha \stackrel{w}{\to} 0$. Como K es compacto, se tiene que $Kx_\alpha \to 0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \limsup \|Tx_\alpha\| &= \limsup \|(T-K)x_\alpha\| \\ &\leq \|T-K\|. \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $(x_\alpha) \subseteq S_X$ tal que $x_\alpha \stackrel{w}{\to} 0$, tenemos que $w(T) \leq \|T\|_e$.
Por otro lado, si $(y_\alpha^*) \subseteq Y^*$, $\|y_\alpha^*\| = 1$ y $y_\alpha^* \stackrel{w^*}{\to} 0$, entonces para todo $x \in B_X$ tenemos que

$$K^*y_\alpha^*(x) = y_\alpha^*(Kx) \to 0.$$

Con lo cual $K^*y_\alpha^*$ converge a cero puntualmente. Al ser K compacto resulta que K^* lo es y por lo tanto esta convergencia se puede conseguir en norma. Luego, el mismo razonamiento hecho para $w(T)$ se aplica para llegar a $w^*(T) \leq \|T\|_e$. Así, $\|T\|_e \geq \max\{w(T), w^*(T)\}$ (observemos que esta desigualdad se probó sin usar que los operadores compactos formen un M-ideal dentro de los operadores acotados).
Para probar la otra desigualdad por el Corolario 2.2.4, consideramos $\psi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp})$ tal que $\psi(T) = \|T\|_e$. Como $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal, por el Corolario 1.2.13,

tenemos que $\psi \in \mathrm{Ext}(B_{\mathcal{L}(X,Y)^*})$.
Por la Proposición 2.2.6 existen redes $(x_\alpha) \in B_X$, $(y^*_\alpha) \in B_{Y^*}$ tales que $y^*_\alpha \otimes x_\alpha \overset{w^*}{\to} \psi$. Pasando a subredes, podemos suponer además que existe $y^* \in Y^*$, $x^{**} \in X^{**}$ tales que $y^*_\alpha \overset{w^*}{\to} y^*$ y $x_\alpha \overset{w^*}{\to} x^{**}$ Entonces, para todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ de la forma $K(x) = x^*(x).y$ con $x^* \in X^*$ e $y \in Y$, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(K) \\ &= \text{lím}(y^*_\alpha \otimes x_\alpha)(K) \\ &= \text{lím}\, y^*_\alpha(Kx_\alpha) \\ &= \text{lím}\, x^*(x_\alpha)y^*_\alpha(y) \\ &= \text{lím}\, x^{**}(x^*)y^*(y) \\ &= \text{lím}\, x^{**}(K^*y^*). \end{aligned}$$

Como esto vale para todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ de la forma $K(x) = x^*(x).y$, por Lema 2.2.7, debe ser $x^{**} = 0$ o $y^* = 0$.
Si $x^{**} = 0$ entonces $x_\alpha \overset{w^*}{\to} 0$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|T\|_e &= \psi(T) \\ &= \text{lím}\, y^*_\alpha(Tx_\alpha) \\ &\leq \text{lím sup}\, \|Tx_\alpha\| \\ &\leq w(T). \end{aligned}$$

Por otro lado, si $y^* = 0$ tenemos $\|T\|_e \leq w^*(T)$ terminando la demostración. □

Como aplicación de la norma esencial para $\mathcal{K}(X,Y)$ un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$, tenemos el siguiente resultado que debe ser leído a la luz del teorema de Bishop-Phelps ([BD, p. 7]), el cual afirma que para todo espacio de Banach X, el conjunto de las funcionales que alcanzan la norma es denso en X^*. Este problema es estudiado en profundidad en [A].

Proposición 2.2.9. *Sean X, Y espacios de Banach tales que $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal.*

(i) *Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que T^* no alcanza su norma, entonces $\|T\| = \|T\|_e$.*

(ii) *El conjunto de los operadores T para los cuales T^* no alcanzan su norma en B_{Y^*} es nunca denso en $\mathcal{L}(X,Y)$.*

Demostración. Vamos a ver una prueba de estos hechos, apelando a resultados de [HWW] que no demostraremos.
(i) Sea $\psi \in Ext(B_{\mathcal{L}(X,Y)^*})$ tal que $\psi(T) = \|T\|$. Por Proposición 1.2.12 tenemos que $\psi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp})$ o $\psi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^*})$. Si este último fuese el caso, por [HWW, Teorema VI 1.3] existen $x^{**} \in Ext(B_{X^{**}})$ e $y \in Ext(B_{Y^*})$ tales que $\|T^*\| = \|T\| = \psi(T) = \langle T^{**}x^{**}, y^* \rangle = \langle x^{**}, T^*y^* \rangle$. Con esto tenemos que $\|T^*\| \leq \|x^{**}\|\|T^*y^*\| \leq \|T^*y^*\| \leq \|T^*\|$

contradiciendo la hipótesis. Luego $\psi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp})$ y por lo tanto

$$\|T\| = \psi(T) = \sup\{\varphi(T) : \varphi \in Ext(B_{\mathcal{K}(X,Y)^\perp})\} = \|T\|_e.$$

(ii) El conjunto $\{T \in \mathcal{L}(X,Y) : \|T\| = \|T\|_e\}$ es claramente cerrado y, por (a), contiene al conjunto de los operadores cuyos adjuntos no alcanzan la norma. Por lo tanto basta probar que tiene interior vacío.
Notemos que

$$\begin{aligned} \sup_{\psi \in B_{\mathcal{K}(X,Y)^*}} |\psi(T)| &\leq \sup_{\psi \in B_{\mathcal{L}(X,Y)^*}} |\psi(T)| \\ &= \sup_{y^* \in B_{Y^*}, x \in B_X} |\langle y^* \otimes x, T\rangle| \\ &\leq \sup_{\psi \in B_{\mathcal{K}(X,Y)^*}} |\psi(T)|, \end{aligned}$$

y por lo tanto $\|T\| = \sup_{\psi \in B_{\mathcal{K}(X,Y)^*}} |\psi(T)|$.
El resultado se obtiene por [HWW, Corolario II.1.7] y [HWW, Proposición II.1.11], tomando $J = \mathcal{K}(X,Y)$ y notando que si $d(T,J) = 1$ entonces $\|T\| = \|T\|_e = 1$ para todo $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\|T^*\|$ no alcanza la norma. □

2.3. Bases incondicionales.

En esta sección desarrollamos, brevemente, conceptos elementales sobre la teoría de bases incondicionales que necesitamos para poder estudiar estructuras de M-ideales cuando trabajamos con los espacios de Lorentz (Ver sección 2.4). Comenzamos con algunas definiciones.

Definición 2.3.1. Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n) \subseteq X$ una sucesión. Decimos que la serie $\sum x_n$ converge incondicionalmente si la serie $\sum x_{\sigma(n)}$ converge para toda $\sigma \in S(\mathbb{N})$, siendo $S(\mathbb{N})$ el conjunto de las permutaciones de los naturales.

El Teorema de Riemann de reordenamiento de una serie demuestra que en el caso de $\mathbb{K}$ la noción de convergencia incondicional y absoluta son equivalentes. Esto muestra que, en el caso de trabajar sobre $\mathbb{K}$ todo reordenamiento de una serie incondicionalmente convergente suma lo mismo. Al pasar a espacios de Banach arbitrarios, no es cierto que la convergencia incondicional implique la convergencia absoluta, sin embargo sigue valiendo que todo reordenamiento suma lo mismo.

Lema 2.3.2. *Sea X un espacio de Banach y $(x_k) \subseteq X$ tal que $\sum x_k$ converge incondicionalmente. Entonces, para toda permutación $\sigma \in S(\mathbb{N})$ tenemos que $\sum x_k = \sum x_{\sigma(k)}$.*

Demostración. Sea $\varphi \in X^*$. Entonces, $\sum \varphi(x_k)$ es una serie incondicionalmente convergente en $\mathbb{K}$ y por lo tanto todo reordenamiento suma lo mismo. Como X^* separa puntos y $\varphi(\sum x_k) = \sum \varphi(x_k)$, el lema queda probado. □

Llamamos una *subserie* de una serie $\sum x_n$ a una serie de la forma $\sum x_{n_k}$, n_k una sucesión creciente infinita de $\mathbb{N}$.

Proposición 2.3.3. *Son equivalentes:*

(i) *La serie $\sum x_n$ converge incondicionalmente.*

(ii) *Toda subserie es convergente.*

Demostración. Supongamos que la serie $\sum x_n$ converge incondicionalmente y que $\sum x_{n_k}$ es una subserie que no converge. Entonces la sucesión de sumas parciales no es de Cauchy, y por lo tanto, existen $\varepsilon > 0$ y $p_1 < q_1 < p_2 < \dots$, tales que

$$\|\sum_{k=p_j}^{q_j} x_{n_k}\| \geq \varepsilon \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

Consideramos la sucesión de términos (y_n) que no están en ningún bloque $\{x_{p_j}, \dots, x_{q_j}\}$, y tomamos el reordenamiento $x_{p_1}, \dots, x_{q_1}, y_1, x_{p_2}, \dots, x_{q_2}, y_2, \dots$. Este reordenamiento no converge. En efecto, para $\varepsilon > 0$, por (2.1), la cola de la serie nunca es menor que ε. Así tenemos (ii) a partir de (i).
Para mostrar la recíproca, supongamos que existe una permutación $\sigma \in S(\mathbb{N})$ tal que $\sum x_{\sigma(n)}$ no converge. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión $p_j < q_j < p_{j+1} < \dots$, tales que para todo j,

$$\|\sum_{n=p_j}^{q_j} x_{\sigma(n)}\| \geq \varepsilon.$$

Podemos suponer que $\sigma(q_j) < \sigma(p_{j+1})$ para todo j, sino, podemos elegir una subsucesión conveniente para que esta condición se cumpla. Consideramos los bloques dados por $\{\sigma(p_j), \dots, \sigma(q_j)\}$ y suponemos que para todo j, $\sigma(q_j) < \sigma(p_{j+1})$. Así,

$$\sum_j \sum_{n=p_j}^{q_j} x_n$$

es una subserie que no converge, lo que contradice (ii). $\square$

Definición 2.3.4. Una base (e_n) de un espacio de Banach X se dice incondicional si $(e_{\sigma(n)})$ es una base para toda permutación $\sigma \in S(\mathbb{N})$.

Por el lema previo, esta definición es equivalente a pedir que toda serie $\sum a_n e_n$ converge incondicionalmente.

Para cada $\theta \in B_{\ell_\infty}$ y X con base incondicional (e_n), se considera el operador $M_\theta : X \to X$ en la forma

$$M_\theta(\sum a_n e_n) = \sum a_n \theta_n e_n$$

Estos operadores resultan ser lineales y continuos. En efecto, son límite puntual de los operadores continuos M_θ^N que provienen de componer

$$M_\theta^N : \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \longmapsto \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \longmapsto \sum_{n=1}^{N} a_n \theta_n e_n.$$

Por el Principio de Acotación Uniforme, los operadores M_θ están uniformemente acotados. Definimos así la constante incondicional de la base (e_n) como el número $\kappa = \sup_{\theta \in B_{\ell_\infty}} \|M_\theta\|$. Observemos que si $\theta_n = 1$ para todo n, entonces $\kappa \geq \|M_\theta\| = 1$.

Definición 2.3.5. Una base (e_n) de un espacio de Banach X se dice una base κ-incondicional si es una base incondicional con constante incondicional κ.

Proposición 2.3.6. *Sea X un espacio de Banach con una base (e_n). Encontes, son equivalentes:*

(i) *(e_n) es una base κ-incondicional.*

(ii) *Para todo $N \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_N$ y $b_1, \ldots, b_N$ escalares tales que $|a_i| \leq |b_i|$ para todo $i = 1, \ldots, N$, se tiene*
$$\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| \leq \kappa \|\sum_{n=1}^{N} b_n e_n\|.$$

Demostración. Supongamos que (e_n) es una base κ-incondicional. Entonces $\theta = (\theta_n) =: (\frac{a_n}{b_n}) \in B_{\ell_\infty}$ (donde $|a_n| > 0$ implica $|b_n| > 0$), y tenemos que

$$\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} b_n \theta_n e_n\| = \|M_\theta(\sum b_n e_n)\| \leq \kappa \|\sum b_n e_n\|$$

como queríamos ver.

Para probar el recíproco, notemos que, por la Proposición 2.3.3, basta ver que toda subserie converge. Sea $\sum a_{n_k} e_{n_k}$ una subserie y sea $\varepsilon > 0$. Como $\sum a_n e_n$ converge, existe n_0 tal que para todo $q > p \geq n_0$
$$\|\sum_{j=p+1}^{q} a_j e_j\| \leq \frac{\varepsilon}{\kappa}.$$

Ahora, para todo l, tenemos que $\{n_{k+1}, \ldots, n_{k+l}\} \subseteq \{n_k + 1, \ldots, n_{k+l}\}$. Luego, usando la hipótesis para $|a_n| \geq 0$ tenemos que

$$\|\sum_{j=k+1}^{k+l} a_{n_j} e_{n_j}\| \leq \kappa \|\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+l}} a_j e_j\| \leq \varepsilon.$$

Así, la serie $\sum a_{n_k} e_{n_k}$ es de Cauchy y por lo tanto, converge. □

Proposición 2.3.7. *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $(x_n) \subseteq X$ una base κ-incondicional. Sea $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ tal que $\sum a_n e_n$ converge, y sea $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{C}$ acotada. Entonces,*

$$\|\sum \lambda_n a_n e_n\| \leq 2\kappa \sup |\lambda_n| \|\sum a_n e_n\|.$$

Demostración. Sea $x^* \in X^*$, $\|x^*\| = 1$ tal que

$$\sum \lambda_n a_n x^*(e_n) = \|\sum \lambda_n a_n e_n\|,$$

y sean $(\theta_n), (\eta_n) \subseteq \{\pm 1\}$ definidas como $\theta_n = 1$ si $\Re(a_n x^*(e_n)) \geq 0$ y $\theta_n = -1$ si $\Re(a_n x^*(e_n)) < 0$ y $\eta_n = 1$ si $\Im(a_n x^*(e_n)) \geq 0$ y $\eta_n = -1$ si $\Im(a_n x^*(e_n)) < 0$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|\sum \lambda_n a_n e_n\| &\leq \sup |\lambda_n| \sum |a_n x^*(e_n)| \\
&\leq \sup |\lambda_n| \sum |\Re(a_n x^*(e_n))| + |\Im(a_n x^*(e_n))| \\
&= \sup |\lambda_n| \sum \Big(\Re(\theta_n a_n x^*(e_n)) + \Im(\eta_n a_n x^*(e_n))\Big) \\
&= \sup |\lambda_n| \Big(x^*(M_\theta(\sum a_n e_n)) + x^*(M_\eta(\sum a_n e_n))\Big) \\
&\leq \sup |\lambda_n| 2\kappa \|\sum a_n e_n\|,
\end{aligned}$$

obteniendo así lo enunciado. □

2.4. M-ideales en espacios de operadores sobre espacios de sucesiones.

Queremos estudiar cuándo los operadores compactos forman un M-ideal en el espacio de los operadores lineales y acotados. Nuestra primera aproximación serán los operadores sobre espacios de sucesiones clásicos como lo son ℓ_p y los espacios de Lorentz dado que estos tienen base incondicional.
Comenzamos por dar la definición de los espacios de Lorentz.

Para cada $p \geq 1$ y cada sucesión de números positivos no creciente $w = (w_k)$ tal que $w_1 = 1$, consideramos el conjunto

$$d(w, p) =: \{x = (x_k) : \sup \sum |x_{\sigma(k)}|^p w_k < \infty\},$$

si $p \neq \infty$, y

$$d(w, p) =: \{x = (x_k) : \sup \|x_{\sigma(k)} w_k\|_\infty < \infty\},$$

si $p = \infty$; donde el supremo lo tomamos sobre todas las permutaciones $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$.
Para $x \in d(w, p)$, definimos $\|x\| =: \sup_{\sigma \in S_{\mathbb{N}}} (\sum |x_{\sigma(k)}|^p w_k)^{\frac{1}{p}}$, que resulta ser una norma que hace de $d(w, p)$ un espacio de Banach para todo $1 \leq p < \infty$. De forma análoga se define la norma para $p = \infty$.

Observación 2.4.1. Si $x \in d(w,p)$ y $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum |x_{\sigma(k)}|^p w_k &\leq \sum |x_{\sigma(k)}|^p \\ &= \sum |x_k|^p; \end{aligned}$$

donde la primera desigualdad se debe a que $w_k \leq 1$ para todo k.

Así, $Id : \ell_p \to d(w,p)$ es continua si $1 \leq p < \infty$. De la misma forma $Id : \ell_\infty \to d(w,\infty)$ es continua. Con lo cual se tiene que si $\inf w_k > 0$ entonces, $d(w,p) \approx \ell_p$ y si $\sum w_k < \infty$ resulta $d(w,p) \approx \ell_\infty$.

En adelante, llamaremos sucesión admisible a una sucesión $(w_k) \in \ell_p$ de términos positivos tal que w_k es no creciente, $w_1 = 1$, $\lim w_k = 0$ y $\sum w_k = \infty$.
Ahora definimos los espacios de Lorentz (que serán espacios distintos de los ℓ_p) como sigue.

Definición 2.4.2. Sea $p \geq 1$, $w = (w_k)$ una sucesión admisible. Se define el espacio de Lorentz asociado a w mediante

$$d(w,p) =: \{x = (x_k) / \|x\|_{d(w,p)} < \infty\}$$

donde

$$\|x\|_{d(w,p)} = \sup_{\sigma \in S_{\mathbb{N}}} (\sum |x_{\sigma(k)}|^p w_k)^{\frac{1}{p}}$$

si $p \neq \infty$, y

$$\|x\|_{d(w,p)} = \sup_{\sigma \in S_{\mathbb{N}}} \|x_{\sigma(k)} w_k\|_\infty$$

si $p = \infty$.

Notar que los vectores canónicos forman una base de $d(w,p)$ que además es incondicional de constante $\kappa = 1$.
La siguiente definición permite comparar sucesiones entre espacios de Banach.

Definición 2.4.3. Sean X, Y espacios de Banach, $(x_k) \subseteq X$ e $(y_k) \subseteq Y$ dos sucesiones. Decimos que (x_k) domina a (y_k) si existe $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $Tx_k = y_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En este caso notamos $(x_k) > (y_k)$.

Observación 2.4.4. *Por la Observación 2.4.1, la base canónica de ℓ_p domina a la base canónica de $d(w,p)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$.*

Definición 2.4.5. Dos bases (x_n), (y_n) de X e Y respectivamente se dicen equivalentes si, $\sum a_n x_n$ converge si y sólo si $\sum a_n y_n$ converge.

Por el teorema del gráfico cerrado se tiene que dos bases (x_k) e (y_k) son equivalentes si y solo si $(x_k) > (y_k)$ e $(y_k) > (x_k)$. En efecto, es claro que si $(x_k) > (y_k)$ e $(y_k) > (x_k)$ las bases son equivalentes. Recíprocamente, definimos $T : [x_n] \to [y_n]$ mediante $Tx_n =: y_n$

y lo extendemos por linealidad. Para ver que T resulta ser un operador acotado, tomamos $(z_n) \subseteq X$, $z \in X$ e $y \in X$ tales que $z_n \to z$ y $T(z_n) \to y$. Queremos ver que $Tz = y$.
Si (x_n^*) e (y_n^*) son las bases duales de (x_n) e (y_n) respectivamente, escribimos $z_n = \sum x_j^*(z_n)x_j$ y $T(z_n) = \sum x_j^*(z_n)y_j$. Así, para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$x_k^*(z) = \lim_n x_k^*(z_n) = \lim_n y_k^*(\sum_j x_j^*(z_n)y_j) = \lim_n y_k^*(T(z_n)) = y_k^*(y)$$

Luego, $x_k^*(z) = y_k^*(y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$; y con lo cual, $T(z) = \sum x_k^*(z)y_k = \sum y_k^*(y)y_k = y$ como queríamos ver.

Ejemplo 2.4.6. *Sean $1 < p, q < \infty$ y sean (e_k), (f_k) las bases canónicas de ℓ_p y ℓ_q respectivamente. Entonces $(e_k) > (f_k)$ si y sólo si $p \leq q$.*

En efecto, si $p \leq q$ la inclusión de ℓ_p en ℓ_q resulta continua y cumple la definición. Recíprocamente, supongamos que $p > q$ y que existe $T \in \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$ tal que $Te_k = f_k$. Como $p > q$ existe una sucesión $(a_k) \in \ell_p \setminus \ell_q$. Escribimos $a = \sum a_k e_k$. Entonces, por definición de T, tenemos que $\sum a_k f_k = \sum a_k Te_k = Ta \in \ell_q$, lo cual es absurdo.

La siguiente proposición, basada en comparación de sucesiones, da un criterio para asegurar que todo operador continuo es compacto.

Proposición 2.4.7. *Sean $(e_k) \subseteq X$, $(f_k) \subseteq Y$ sucesiones tales que $(f_k) \not< (e_k)$. Supongamos que para toda (x_k) débil nula, $\|x_k\| \nrightarrow 0$, existe una subsucesión (x_{n_k}) tal que $(x_{n_k}) < (e_k)$ y para toda sucesión (y_k) débil nula, $\|y_k\| \nrightarrow 0$, existe una subsucesión (y_{n_k}) tal que $(y_{n_k}) > (f_k)$. Entonces $\mathcal{K}(X, Y) = \mathcal{L}(X, Y)$.*

Demostración. Supongamos que existe $T \in \mathcal{L}(X, Y) \setminus \mathcal{K}(X, Y)$. Entonces existe $\alpha > 0$ y $(x_k) \subseteq X$ débil nula tal que $\|Tx_k\| > \alpha \geq 0$. Como T es continua, entonces T es w-w continua y por lo tanto $Tx_k \xrightarrow{w} 0$. Como $\|Tx_k\| \nrightarrow 0$ y $\|x_k\| \geq \frac{\alpha}{\|T\|}$, entonces $\|x_k\| \nrightarrow 0$. Por hipótesis, y pasando por subsucesiones de ser necesario, podemos pensar que $(e_k) > (x_k)$ y $(Tx_k) > (f_k)$. Pero esto es absurdo al ser $>$ una relación transitiva. □

Corolario 2.4.8. *Si $p > q$, entonces $\mathcal{K}(\ell_p, \ell_q) = \mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$*

Demostración. Por [LT, Pag. 53] se tiene que toda sucesión $(x_k) \subseteq \ell_p$ débil nula tal que $\|x_k\| \nrightarrow 0$ tiene una subsucesión equivalente a (e_k), la base canónica de ℓ_p. Por otro lado, como $p > q$, por el Ejemplo 2.4.6, $(e_k) \not> (f_k)$. □

Ahora estudiaremos condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{K}(\ell_p, d(w, q))$ sea un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, d(w, q))$ en el caso en que $p > q$. En este caso, vamos a ver que para toda sucesión admisible tal que $w \notin \ell_{\frac{p}{p-q}}$, $\mathcal{K}(\ell_p, d(w, q)) = \mathcal{L}(\ell_p, d(w, q))$ y que, por el contrario, si $w \in \ell_{\frac{p}{p-q}}$ entonces no sólo existe un operador acotado no compacto sino que $\mathcal{K}(\ell_p, d(w, q))$ no es un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, d(w, q))$. Notemos que, como $p > q$, resulta que $1 < \frac{p}{p-q} < \infty$ y $(\ell_{\frac{p}{q}})^* = \ell_{\frac{p}{p-q}}$.

Lema 2.4.9. *Sea $p > q$, $w \notin \ell_{\frac{p}{p-q}}$ una sucesión admisible y sean $(e_k) \subseteq \ell_p$ y $(f_k) \subseteq d(w,q)$ las bases canónicas. Entonces $(e_k) \not> (f_k)$.*

Demostración. Como $w \notin \ell_{\frac{p}{p-q}}$, por la dualidad de los espacios ℓ_p, existe $b = (b_k) \in \ell_{\frac{p}{q}}$ tal que $\sum w_k |b_k| = \infty$. Luego, no puede existir una constante $C > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$

$$\| \sum^N (b_k)^{\frac{1}{q}} f_k \|_{d(w,q)} \leq C \| \sum^N (b_k)^{\frac{1}{q}} e_k \|_{\ell_p}. \tag{2.2}$$

En efecto, si esta constante existiera, se tendría que

$$\begin{aligned} C(\sum^N |b_k|^{\frac{p}{q}})^{\frac{1}{p}} &= C \| \sum^N (b_k)^{\frac{1}{q}} e_k \|_{d(w,p)} \\ &\geq \| \sum^N (b_k)^{\frac{1}{q}} f_k \|_{d(w,q)} \\ &= \sup_\sigma \sum^N w_k |b_{\sigma(k)}| \\ &\geq \sum^N w_k |b_k|, \end{aligned}$$

llegando a un absurdo al hacer $N \to \infty$.

Ahora, supongamos que (f_k) esta dominada por (e_k). Entonces existe un operador acotado $T : \ell_p \to d(w,q)$ tal que $Te_k = f_k$. Pero entonces $C = \|T\|$ cumple (2.2), lo que es una contradicción. □

Observación 2.4.10. *Observemos que esto no lo podemos hacer en el caso en que w sea una sucesión admisible tal que $w \in \ell_{\frac{p}{p-q}}$. En este caso se tiene que $(e_k) > (f_k)$.*
Para verlo, alcanza con notar que para cualquier elección de escalares $a_1, \ldots, a_N$, se tiene

$$(\sum^N w_k |a_k|^q)^{\frac{1}{q}} \leq (\sum^N w_k^{\frac{p}{p-q}})^{\frac{p-q}{pq}} (\sum^N |a_k|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Con lo cual, definiendo $Te_k =: f_k$ y extendiendo por linealidad, resulta ser $T : \ell_p \to d(w,q)$ continua, con $\|T\| = (\sum^N w_k^{\frac{p}{p-q}})^{\frac{p-q}{pq}}$.

Proposición 2.4.11. *Sea $p > q$ y sea $w \notin \ell_{\frac{p}{p-q}}$ una sucesión admisible. Entonces $\mathcal{K}(\ell_p, d(w,q)) = \mathcal{L}(\ell_p, d(w,q))$.*

Demostración. Sean (e_k) y (f_k) las bases canónicas de ℓ_p y ℓ_q respectivamente. Por el Lema 2.4.9, $(e_k) \not\geq (f_k)$. Por la Proposición 2.4.7, basta probar que toda sucesión $(y_n) \in d(w,q)$ débil nula tal que $\|y_n\| \nrightarrow 0$ tiene una subsucesión (y_{n_k}) tal que $(y_{n_k}) > (f_k)$.
Sea $(y_n) \in d(w,q)$ débil nula tal que $\|y_n\| \nrightarrow 0$. Por [LT, Proposición 1.a.12.], (y_n) es equivalente a una base normalizada (u_n) de bloques de la base $(f_k) \subseteq d(w,q)$. Supongamos que u_n es de la forma

$$u_n = \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k f_k \ . \tag{2.3}$$

Si $a_k \to 0$, por [LT, Proposición 4.e.3.], resulta que (u_n) es equivalente a (e_n) la base de ℓ_p. Pero, por la Observación 2.4.4, ésta domina a (f_n) y por lo tanto existe una subsucesión $(y_{n_k}) > (f_n)$.

Si $a_k \nrightarrow 0$, existe una subsucesión a_{j_k} y $\varepsilon > 0$ tal que $|a_{j_k}| \geq \varepsilon$ para todo k. Tomando una subsucesión de los (u_n) podemos suponer que en la escritura (2.3) aparece un coeficiente a_{j_k} y por lo tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k(n) \in \{m_n + 1, \ldots, m_{n+1}\}$ tal que $|a_{k(n)}| > \varepsilon$. Como (f_n) es una base incondicional con constante incondicional 1, por la Proposición 2.3.6, se tiene que para todo $N \in \mathbb{N}$ y $b_1, \ldots, b_N$ escalares,

$$\varepsilon\|\sum_{n=1}^{N} b_n f_{k(n)}\| = \|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon b_n f_{k(n)}\| \leq \|\sum_{n=1}^{N} a_{k(n)} b_n f_{k(n)}\|. \tag{2.4}$$

Tomando $\lambda_n = 1$ si $n = n(k)$ y $\lambda_n = 0$ si no, podemos reescribir (2.4) para obtener

$$\begin{aligned} \|\sum_{n=1}^{N} a_{k(n)} b_n f_{k(n)}\| &= \|\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} \lambda_n a_k b_n f_k\| \\ &\leq 2\|\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k b_n f_k\|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la Proposición 2.3.7 notando que $\sup|\lambda_n| = 1$. Luego, $2\|\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k b_n f_k\| \geq \varepsilon\|\sum_{n=1}^{N} b_n f_{k(n)}\|$ y por lo tanto, recordando el Lema 2.3.2, tenemos que

$$\|\sum_{n=1}^{N} b_n u_n\| = \|\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=m_n+1}^{m_{n+1}} a_k b_n f_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}\|\sum_{n=1}^{N} b_n f_{k(n)}\| = \frac{\varepsilon}{2}\|\sum_{n=1}^{N} b_n f_n\|.$$

Luego, definir $Tu_n = f_n$ nos da un operador continuo y por lo tanto $(u_n) > (f_n)$. Como (u_n) es equivalente a una subsucesión de (y_n) obtenemos lo buscado. □

Para terminar esta sección, vamos a ver que $\mathcal{K}(\ell_p, d(w,q))$ no es un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, d(w,q))$ si $p > q$ y $w \in \ell_{\frac{p}{p-q}}$. Para esto, necesitamos la siguiente proposición.

Proposición 2.4.12. *Sea (e_n) base de X y sea (f_n) base incondicional de Y con constante incondicional 1, tal que $(e_n) > (f_n)$ y sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $Te_n = f_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos además que existe $D \in \mathcal{K}(X,Y)$ y $\delta > 0$ tal que $\|D\| \leq \|T\| < \delta$ y para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$\|P^n T - D\| \geq \delta,$$

donde $P^n : Y \to Y$ esta dada por $P^n(\sum a_k f_k) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k f_k$. Entonces $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ no es un semi-M-ideal.

Demostración. Sean $P_n = I - P^n$ las proyecciones a las primeras coordenadas. Como D es compacto, se tiene que $\|P_n D - D\| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$ tal que $\|T\| < \delta - \varepsilon = \tilde{\delta}$, existe

$m \geq N$ tal que $\|P^nT + P_mD\| \geq \tilde{\delta}$. Con lo cual podemos suponer que $D = P_mD$.
Vamos a construir dos bolas en $\mathcal{L}(X,Y)$, B_1 y B_2 tales que $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, $B_1 \cap \mathcal{K}(X,Y) \neq \emptyset$ y $B_2 \cap \mathcal{K}(X,Y) \neq \emptyset$ pero $B_1 \cap B_2 \cap \mathcal{K}(X,Y) = \emptyset$. Con lo cual, no se cumple la 2-ball property y $\mathcal{K}(X,Y)$ no puede ser un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$.
Sea $B_1 = B(P^mT + D; \|T\|)$ y $B_2 = B(P^mT - D; \|T\|)$. Por hipótesis, se tiene que $P^mT \in B_1 \cap B_2$. Como $\|P^m\| \leq 1$, tenemos que $D \in B_1 \cap \mathcal{K}(X,Y)$ y $-D \in B_2 \cap \mathcal{K}(X,Y)$.
Supongamos que existe

$$A \in B_1 \cap B_2 \cap \mathcal{K}(X,Y). \tag{2.5}$$

Nuevamente, podemos suponer que $A = P_nA$ para algún $n \geq m$. Ahora,

$$2\delta \leq \|2(P^nT + D)\| \leq \|P^nT + D - P_mA\| + \|P^nT + D + P_mA\|. \tag{2.6}$$

Como $n \geq m$, $P^nP^m = P^n$. Además $P_mP^m = 0$ y por lo tanto se tiene que

$$P^nT + D - P_mA = (P_m + P^n)(P^mT + D - A).$$

Por otro lado, como la constante incondicional de Y es 1, se tiene que $\|P^nT+D+P_mA\| = \| - P^nT + D + P_mA\|$. Se sigue de (2.6) que

$$\begin{array}{rcl} 2\delta & \leq & \|(P_m + P^n)(P^mT + D - A)\| + \| - P^nT + D + P_mA\| \\ & \leq & \|(P_m + P^n)\| \frac{\|T\|+\delta}{2} + \frac{\|T\|+\delta}{2} \\ & \leq & \frac{\|T\|+\delta}{2} + \frac{\|T\|+\delta}{2} \\ & = & \|T\| + \delta \\ & < & 2\delta. \end{array}$$

Como esto es un absurdo, tenemos entonces que no puede existir un A cumpliendo (2.5), mostrando que $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ no es un semi-M-ideal. $\square$

Corolario 2.4.13. *Sea $p > q$, $w \in \ell_{\frac{p}{p-q}}$ una sucesión admisible. Entonces $\mathcal{K}(\ell_p, d(w,q))$ no es un semi-M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_p, d(w,q))$; y por lo tanto, no es un M-ideal.*

Demostración. Sean (e_k), (f_k) las bases canónicas de ℓ_p y $d(w,q)$ respectivamente. Como $w \in \ell_{\frac{p}{p-q}}$, por la Observación 2.4.10, existe $T \in \mathcal{L}(\ell_p, d(w,q))$ tal que $Te_k = f_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos $D \in \mathcal{K}(\ell_p, d(w,q))$ en la forma: $De_1 =: \|T\|f_1$ y $De_i = 0$ para todo $i \geq 2$. Así, $\|D\| = \|T\|$.
Sea

$$x_n = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, w_2^{\frac{1}{p-q}}, w_3^{\frac{1}{p-q}}, \ldots).$$

Sea $W = \sum w_k^{\frac{p}{p-q}}$ y $a > W^{\frac{1}{p}}$. Entonces

$$\|ae_1 + x_n\|_p = (a^p + W - 1)^{\frac{1}{p}} =: b$$

y

$$\|(P^nT + D)(ae_1 + x_n)\|_{d(w,q)} \geq (a^qW^{\frac{p-q}{p}} + W - 1)^{\frac{1}{q}} =: c,$$

Notar que $W^{\frac{p-q}{pq}} = \|T\|$.
Si pensamos a b y c como funciones en a, el cociente $\frac{c}{b}$ tiende a $W^{\frac{p-q}{pq}} = \|T\|$ cuando a crece. Más aún, $\frac{c}{b}$ decrece a $\|T\|$; con lo cual, podemos elegir a suficientemente grande de modo que si $\delta =: \frac{c}{b}$, entonces $\delta > \|T\|$.
Por último, notamos que

$$\|P^nT + D\| \geq \|(P^nT + D)(\frac{ae_1 + x_n}{b}) = \frac{c}{b},$$

obteniendose así el resultado gracias a la Proposición 2.4.12. $\square$

Cabe mencionar que la situación para operadores entre espacios de Lorentz fue estudiada parcialmente por [O], en donde se muestra que si $p > (p-1)q$ y $d(v,p)^* \subseteq d(w,q)$, entonces $\mathcal{K}(d(v,p)^*, d(w,q))$ no es un semi-M-ideal en $\mathcal{L}(d(v,p)^*, d(w,q))$.

Capítulo 3

Propiedades (M) y (M^*)

En este capítulo trataremos de clasificar los espacios de Banach X para los cuales $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X)$. El resultado principal es el Teorema 3.2.3 en el que damos varias equivalencias. La conclusión más importante (condición (v)) es que un espacio de Banach X tiene la propiedad de que $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X)$ si y sólo si X satisface una condición estructural, llamada (M)-propiedad o propiedad (M) junto con la existencia de una red de operadores compactos $(K_\alpha)_\alpha$ tales que tanto K_α como K_α^* aproximan puntualmente a la identidad y se satisface que $\lim \|I - 2K_\alpha\| = 1$.

3.1. La propiedad (M) y la estructura de M-ideal

La propiedad (M) se define como sigue:

Definición 3.1.1. Sea X un espacio de Banach. Decimos que X tiene la propiedad (M) si para todo u, $v \in X$; $\|u\| = \|v\|$ y toda red $(x_\alpha) \subseteq X$ acotada débil nula, se tiene

$$\limsup \|u + x_\alpha\| = \limsup \|v + x_\alpha\|.$$

Definición 3.1.2. Sea $(x_\alpha) \subseteq X$ una red. Decimos que la red es relativamente compacta en norma si $\{x_\alpha\}$ tiene clausura compacta; es decir, si existe una subred convergente en norma.

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) *X tiene la propiedad (M).*

(ii) *Para todo $u, v \in X$, $\|u\| = \|v\|$ y toda red $(x_\alpha) \subseteq X$ acotada débil nula tal que $\lim \|u + x_\alpha\|$ existe; se tiene que $\lim \|v + x_\alpha\|$ existe y ambos límites coinciden.*

(iii) *Para todo $u, v \in X$, $\|u\| \leq \|v\|$ y toda red $(x_\alpha) \subseteq X$ acotada débil nula se tiene que*

$$\limsup \|u + x_\alpha\| \leq \limsup \|v + x_\alpha\|.$$

(iv) *Si* (u_α), $(v_\alpha) \subseteq X$ *son redes relativamente compactas en norma tal que* $\|u_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$ *para todo* α *y* $(x_\alpha) \subseteq X$ *es una red acotada débil nula, entonces*

$$\limsup \|u_\alpha + x_\alpha\| \leq \limsup \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

Demostración. Supongamos que X tiene la propiedad (M) y sean u, $v \in X$ y $(x_\alpha) \subseteq X$ red acotada débil nula, tales que $\lim \|u + x_\alpha\|$ existe y por lo tanto coincide con su límite superior. Entonces

$$\lim \|u + x_\alpha\| = \limsup \|u + x_\alpha\| = \limsup \|v + x_\alpha\|.$$

Con lo cual $\lim \|v + x_\alpha\|$ existe y coincide con $\lim \|u + x_\alpha\|$. Luego (i) implica (ii).
Veamos que podemos obtener (i) a partir de (ii). Supongamos que existen u, $v \in X$ y $(x_\alpha) \subseteq X$ red acotada débil nula tales que

$$\limsup \|u + x_\alpha\| < \limsup \|v + x_\alpha\|.$$

Entonces, como el límite superior es el supremos de los límites de todas las subredes convergentes, existe una subred (x_{α_γ}) convergente a x tal que $\limsup \|u + x_\alpha\| < \lim \|v + x_{\alpha_\gamma}\|$. Por hipótesis, $\lim \|u + x_{\alpha_\gamma}\|$ existe y coincide con $\lim \|v + x_{\alpha_\gamma}\|$.
Pero entonces $\limsup \|u + x_\alpha\| < \lim \|v + x_{\alpha_\gamma}\| = \lim \|u + x_{\alpha_\gamma}\| \leq \limsup \|u + x_\alpha\|$.

Vamos a ver que (iv)$\Rightarrow$(i)$\Rightarrow$(iii)$\Rightarrow$(iv). Es fácil ver que (iv)$\Rightarrow$(iii) y (iii)$\Rightarrow$(i). Luego (iv) implica (i). Para probar que (i) implica (iii) tomamos u, v como en (i) y $\lambda > 1$ tal que $\|\lambda u\| = \|v\|$. Al ser $\lambda > 1$, $u + x_\alpha$ es una combinación convexa de $\lambda u + x_\alpha$ y $-\lambda u + x_\alpha$, luego se tiene que

$$\|u + x_\alpha\| \leq \max\{\|\lambda u + x_\alpha\|; \|x_\alpha - \lambda u\|\},$$

con lo cual

$$\begin{aligned} \limsup \|u + x_\alpha\| &\leq \max\{\limsup \|\lambda u + x_\alpha\|; \limsup \|x_\alpha - \lambda u\|\} \\ &= \max\{\limsup \|v + x_\alpha\|; \limsup \|x_\alpha - v\|\}. \end{aligned}$$

Usando otra vez que X tiene la propiedad (M), tenemos que $\limsup \|x_\alpha - v\| = \limsup \|v + x_\alpha\|$ y se sigue el resultado.
Por último, veamos que (iv) se obtiene de (iii). Supongamos que (iv) es falso. Entonces, como las redes son relativamente compactas en normas, podemos encontrar subredes (u_{α_k}), $(v_{\alpha_k}) \subseteq X$ y u, $v \in X$ tales que $u_{\alpha_k} \to u$ y $v_{\alpha_k} \to v$, cumpliendo

$$\limsup \|u_{\alpha_k} + x_{\alpha_k}\| > \limsup \|v_{\alpha_k} + x_{\alpha_k}\|.$$

Pero como $\|u_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$ se tiene que $\|u\| \leq \|v\|$; con lo cual resulta ser falso (iii) para este u, v contradiciendo las hipótesis. $\square$

El siguiente lema vincula la propiedad (M) de un espacio X con los operadores contráctiles sobre X.

Lema 3.1.4. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad (M) y sea $T \in \mathcal{L}(X)$; $\|T\| \leq 1$. Sean (u_α), $(v_\alpha) \subseteq X$ redes relativamente compactas en norma tales que $\|u_\alpha\| \leq \|v_\alpha\|$ y sea $(x_\alpha) \subseteq X$ red acotada débil nula. Entonces,*

$$\limsup \|u_\alpha + Tx_\alpha\| \leq \limsup \|v_\alpha + x_\alpha\|.$$

Demostración. Supongamos que $\|T\| = 1$ y para cada $\lambda < 1$, $w \in X$, sea $\|w\| = 1$, tal que $\|Tw\| > \lambda$. Sean $w_\alpha = \|v_\alpha\| w$. Entonces, como $\|\lambda u_\alpha\| \leq \|Tw\|\|v_\alpha\| = \|Tw_\alpha\|$ y (Tx_α) es acotada y débil nula, por Lema 3.1.3 tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \limsup \|\lambda u_\alpha + Tx_\alpha\| & \leq & \limsup \|Tw_\alpha + Tx_\alpha\| \\ & \leq & \limsup \|w_\alpha + x_\alpha\| \\ & = & \limsup \|v_\alpha + x_\alpha\|. \end{array}$$

Haciendo $\lambda \to 1$ obtenemos lo buscado.
Supongamos ahora que $\|T\| < 1$ y escribimos $T = \lambda L$ donde $\lambda = \|T\|$ y $\|L\| = 1$. Nuevamente considerando combinaciones convexas y, utilizando el caso anterior para L, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \limsup \|u_\alpha + Tx_\alpha\| & \leq & \max\{\limsup \|u_\alpha + Lx_\alpha\|; \limsup \|u_\alpha - Lx_\alpha\|\} \\ & \leq & \max\{\limsup \|v_\alpha + x_\alpha\|; \limsup \|-v_\alpha + x_\alpha\|\} \\ & = & \limsup \|v_\alpha + x_\alpha\| \end{array}$$

como queríamos probar. □

Análogamente a la definición de propiedad (M), se define la condición (M^*). Decimos que X tiene la propiedad (M^*) si para todo u^*, $v^* \in X^*$; $\|u^*\| = \|v^*\|$ y toda red $(x^*_\alpha) \subseteq X^*$ acotada débil* nula, se tiene

$$\limsup \|u^* + x^*_\alpha\| = \limsup \|v^* + x^*_\alpha\|.$$

Lema 3.1.5. *Para la propiedad (M^*) se tiene un resultado similar al Lema 3.1.3*

Demostración. La demostración es análoga a la hecha para el Lema 3.1.3. □

Podemos preguntarnos si hay alguna relación entre la propiedad (M) y la propiedad (M^*). A continuación mostraremos que la propiedad (M^*) implica la propiedad (M) pero no al revés. Aunque estas dos propiedades son equivalentes si el espacio tiene una aproximación compacta achicante de la identidad, como muestra el Teorema 3.2.3.

Proposición 3.1.6. *Sea X un espacio de Banach con la propiedad (M^*), entonces X tiene la propiedad (M).*

Demostración. Haremos la demostración en el caso en que X sea un espacio de Banach real.
Supongamos que existen $\|u\| = \|v\|$ y (x_α) acotada débil nula tales que

$$\limsup \|u + x_\alpha\| > \limsup \|v + x_\alpha\|,$$

y sea $(x_\alpha^*) \subseteq B_{X^*}$ tal que $x_\alpha^*(u + x_\alpha) = \|u + x_\alpha\|$ para cada α. Pasando por subredes, podemos suponer que (x_α^*) converge débil* a x^*. Sea $v^* \in X^*$ tal que $\|v^*\| = \|x^*\|$ y $v^*(v) = \|x^*\|\|v\|$. Entonces $x^*(u) \leq \|x^*\|\|u\| = \|v^*\|\|v\| = v^*(v)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\limsup \|u + x_\alpha\| &= \limsup \ x_\alpha^*(u + x_\alpha) \\
&= x^*(u) + \limsup (x_\alpha^* - x^*)(x_\alpha) \\
&\leq v^*(v) + \limsup (x_\alpha^* - x^*)(x_\alpha) \\
&= \limsup (v^* + x_\alpha^* - x^*)(v + x_\alpha) \\
&\leq \limsup \|v^* + x_\alpha^* - x^*\|\|v + x_\alpha\| \\
&\leq \limsup \|v + x_\alpha\|,
\end{aligned}$$

pues la propiedad (M^*) implica que $\limsup \|v^* + x_\alpha^* - x^*\| = \limsup \|x^* + x_\alpha^* - x^*\| \leq 1$. □

Ejemplo 3.1.7. *No todo espacio que cumple la propiedad (M), cumple la propiedad (M^*).*
En efecto, veamos que ℓ_1 es un ejemplo de esta situación.
Si tomamos (e^n) la sucesión canónica de $\ell_\infty = (\ell_1)^*$; esta sucesión es débil* nula, pero si consideramos $v = (1, \ldots, 1, \ldots,)$ en ℓ_∞, tenemos que $\|e_1\|_\infty = \|v\|_\infty$ aunque si $n > 1$,

$$\|e_1 + e^n\|_\infty = 1 < 2 = \|v + e^n\|,$$

mostrándonos que ℓ_1 no posee la propiedad (M^*).
Para ver que este espacio sí cumple la propiedad (M), vamos a definir una propiedad más general que la propiedad (M).

Definición 3.1.8. Dado $1 \leq p < \infty$. Decimos que un espacio de Banach X tiene la propiedad m_p si para todo $x \in X$ y toda red acotada débil nula $(x_\alpha) \subseteq X$ se tiene que

$$\limsup \|x + x_\alpha\| = \left(\|x\|^p + \limsup \|x_\alpha\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Así mismo decimos que X tiene la propiedad m_∞ si

$$\limsup \|x + x_\alpha\| = \max\{\|x\|, \limsup \|x_\alpha\|\}.$$

Observemos que por la Definición 3.1.1 todo espacio con la propiedad m_p inmediatamente cumple la propiedad (M). Luego para probar que ℓ_1 tiene la propiedad (M), basta mostrar que tiene la propiedad m_p, para algún p. Más en general tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.1.9. *Si $1 \leq p < \infty$, entonces ℓ_p tiene la propiedad m_p, además c_0 tiene la propiedad m_∞.*

Demostración. Sea $x \in \ell_p$ y $(x_n) \subseteq \ell_p$ acotada débil nula. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\pi_n : \ell_p \to \ell_p$ la proyección canónica en las primeras n coordenadas. Sean $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(I - \pi_{k_0})x\| \leq \varepsilon$. Como (x_α) es débil nula, existe un α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$, $\|\pi_{k_0} x_\alpha\| \leq \varepsilon$. Entonces, si $\alpha > \alpha_0$ tenemos que

$$|\|x + x_\alpha\| - \|\pi_{k_0} x + (I - \pi_{k_0}) x_\alpha\|| \leq 2\varepsilon.$$

Luego, $\limsup \|x + x_\alpha\| = \limsup \|\pi_{k_0}x + (I - \pi_{k_0})x_\alpha\|$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} |\|\pi_{k_0}x + (I-\pi_{k_0})x_\alpha\|^p - (\|x\|^p + \|x_\alpha\|^p)| &= \sum_{j=1}^{k_0}|x_j|^p + \sum_{j=k_0+1}^{\infty}|x_j^\alpha|^p - (\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p + \sum_{j=1}^{\infty}|x_j^\alpha|^p) \\ &= \sum_{j=k_0+1}^{\infty}|x_j|^p + \sum_{j=1}^{k_0}|x_j^\alpha|^p \\ &\leq 2\varepsilon^p. \end{aligned}$$

Con lo cual, $\limsup \|\pi_{k_0}x + (I - \pi_{k_0})x_\alpha\|^p = (\|x\| + \limsup \|x_\alpha\|^p)^{\frac{1}{p}}$, probando así el resultado. Con una demostración análoga obtenemos el resultado deseado para c_0. $\square$

Hasta ahora vimos que todo espacio con la propiedad (M^*) tiene la propiedad (M). Además mostramos que para ℓ_1 la recíproca es falsa. El siguiente teorema muestra que ℓ_1 es esencialmente el único espacio separable con esta propiedad.

Teorema 3.1.10. *Sea X un espacio de Banach separable con la propiedad (M) y que no contiene una copia de ℓ_1. Entonces X tiene la propiedad (M^*).*

Demostración. Por [KW, Lema 2.5], X^* es separable y, por lo tanto, podemos probar la propiedad (M^*) usando sucesiones. Sea $(x_n^*) \subseteq X^*$ una sucesión débil* nula. Por el Lema 3.1.3 (iii) para la versión (M^*), es suficiente probar que si para todo $x^* \in X^*$, $\lim \|x^* + x_n^*\|$ existe, entonces para todo $y^* \in X^*$ con $\|x^*\| = \|y^*\|$,

$$\phi(x^*) =: \lim \|x^* + x_n^*\|$$

satisface

$$\phi(x^*) = \phi(y^*). \tag{3.1}$$

Notemos que ϕ es contráctil ya que $|\phi(x^*) - \phi(y^*)| \leq \|x^* - y^*\|$, luego es continua. Para mostrar (3.1) vamos a usar la función auxiliar $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) =: \inf\{\phi(x^*) : \|x^*\| = t\},$$

(que resulta continua) y vamos a probar que $\phi(\tau x^*) = g(\tau)$ para todo $\tau \geq 0$ y para todo x^* de norma 1. Está claro que si vemos esto, obtenemos (3.1). En efecto, si $\|x^*\| = \|y^*\| = 1$ o $\|x^*\| = \|y^*\| = 0$, no hay nada que mostrar. Si no, $x^*/\|y^*\|$ tiene norma 1 y vale

$$\phi(x^*) = \phi(\|y^*\|\frac{x^*}{\|y^*\|}) = g(\|y^*\|) = \phi(\|y^*\|\frac{y^*}{\|y^*\|}) = \phi(y^*).$$

La demostración de lo que sigue, es técnica. Notemos que $\phi(x^*) \geq \|x^*\| - \phi(0)$. Luego $g(t) \geq t - g(0)$. Con lo cual, g alcanza su mínimo en $\tau_0 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Más aún, $g(\tau_0) < g(\tau)$ para todo $\tau_0 < \tau$.

Como X^* es separable, existen $u^* \in B_{X^*}$ y $u \in S_X$ tales que $u^*(u) = 1$ y $\lim \|u_n^* - u^*\| = 0$

para toda $(u_n^*) \in X^*$ satisfaciendo $\lim \|u_n^*\| = \lim u_n^*(x) = 1$, ver [P, p. 80].
Sean $\tau > 0$, $Z = \{x^* \in X^* : x^*(u) = 0\}$ y sea

$$\theta =: \inf\{\phi(\tau v^*) : v^* \in u^* + Z\}.$$

Sea (F_n) una sucesión creciente de subespacios de Z, de dimensión finita, tal que $\bigcup F_n$ es densa en Z. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\liminf_n d(\tau u^* + x_n^*, F_k) \geq \theta. \tag{3.2}$$

En efecto, supongamos que existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ para el cual esto no se cumple. Como (x_n^*) es w^*-nula, por un argumento de compacidad, podemos encontrar una subsucesión $(x_{n_j}^*)$ y $f^* \in F_{k_0}$ tal que $\lim_j \|f^* + \tau u^* + x_{n_j}^*\| < \theta$. Pero entonces, $\phi(f^* + \tau u^*) < \theta$ lo que contradice la elección de θ. Luego, (3.2) se cumple y por lo tanto, existe una subsucesión (y_n^*) de (x_n^*) tal que $\liminf_n \, d(\tau u^* + y_n^*, F_n) \geq \theta$.
Por Hahn-Banach, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in B_X$, tal que $f^*(y_n) = 0$ para todo $f^* \in F_n$ y

$$\liminf_n (\tau u^*(y_n) + y_n^*(y_n)) \geq \theta. \tag{3.3}$$

Como $\bigcup F_n$ es densa en Z y $f^*(y_n) = 0$ para todo $f^* \in F_n$, tenemos que si $\hat{y}_n \stackrel{w^*}{\to} \xi$, entonces $\xi\big|_Z = 0$ y por lo tanto $\xi \in [\hat{u}]$.
Como X es reflexivo, B_X es relativamente débil compacto. Luego, pasando por subsucesiones, podemos suponer que (y_n) converge débilmente a αu para algún $\alpha \in \mathbb{K}$. Escribimos entonces $y_n = \alpha u + f_n$ con (f_n) débil nula y $\|u\| = 1$.
Vamos a usar esta sucesión (y_n) para estimar ϕ.
Si $\|x\| \leq 1$, como X tiene la propiedad (M), entonces $\limsup \|\alpha x + f_n\| = \limsup \|\alpha u + f_n\| = \limsup \|y_n\| \leq 1$. Luego, si $x^* \in X^*$,

$$\phi(x^*) = \lim \|x^* + x_n^*\| = \lim \|x^* + y_n^*\| \geq \lim (x^* + y_n^*)(\alpha x + f_n) = \alpha x^*(x) + \limsup y_n^*(f_n).$$

Como esto es para todo $\|x\| \leq 1$, si $\beta = \limsup y_n^*(f_n)$, tenemos que

$$\phi(x^*) \geq |\alpha| \|x^*\| + \beta, \tag{3.4}$$

para todo $x^* \in X^*$.
Si $v^* \in u^* + Z$, se tiene que $\|v^*\| \geq v^*(u) = 1$ y por lo tanto

$$\theta \geq |\alpha| \tau + \beta.$$

Por otra parte, por (3.2) tenemos que

$$\theta \leq \liminf (\tau u^*(y_n) + y_n^*(y_n)) \leq \alpha \tau + \beta.$$

Concluimos entonces que $\theta = \alpha\tau + \beta$ con $\alpha \geq 0$ y $\tau > 0$.
Supongamos entonces que $\tau > \tau_0$. Como $\phi(x^*) \geq \alpha\|x^*\| + \beta \geq \beta$, tenemos que $\beta \leq g(\tau_0)$.
Por otro lado, si $t \geq \tau$ y $\|x^*\| = t$, entonces por (3.4)

$$\theta = \alpha\tau + \beta \leq \alpha t + \beta \leq |\alpha|\|x^*\| + \beta \leq \phi(x^*).$$

Luego, $\theta \leq g(t)$ para todo $t \geq \tau$ y por lo tanto,

$$\theta \geq \text{ínf}\{g(t) : t \geq \tau\} > g(\tau_0).$$

Entonces, $\theta = \alpha\tau + \beta > g(\tau_0) \geq \beta$ y por lo tanto $\alpha > 0$ al ser $\tau > 0$.
Sea $(v_n^*) \subseteq u^* + Z$ tal que $\phi(v_n^*) < \theta + \frac{1}{n}$. Entonces

$$\alpha\tau\|v_n^*\| + \beta < \theta + \frac{1}{n},$$

y por lo tanto

$$\|v_n^*\| - 1 \leq \frac{1}{\alpha\tau n}.$$

Como $v_n^*(u) = u^*(u) = 1$ tenemos que $\text{lím}\,\|v_n^*\| = 1$. Por lo tanto, por la elección de u^*, $\text{lím}\,\|v_n^* - u^*\| = 0$. Como ϕ es continua, tenemos que $\phi(\tau u^*) = \theta = \alpha\tau + \beta$.
Por (3.4) tenemos que $\phi(\tau u^*) \leq \phi(\tau v^*)$ para todo $\|v^*\| = 1$. Con lo cual, $\phi(\tau u^*) = g(\tau)$.
Sea B el subconjunto de B_{X^*} formado por los puntos w^* para los cuales existe $w \in B_X$ tal que $w^*(w) = 1$ y, para toda $(u_n^*) \in X^*$ cumpliendo que $\text{lím}\,\|u_n^*\| = \text{lím}\,u_n^*(w) = 1$, se tiene que $\text{lím}\,\|u_n^* - w^*\| = 0$. Como $u^* \in B$ y ϕ es convexa, entonces $\phi(\tau x^*) \leq g(\tau)$ para todo x^* en la clausura convexa C de B.
Como X^* es separable, por [P, p. 80], C es w^*-denso en B_{X^*} y por [KW, Lema 3.5], es denso en B_{X^*}. Luego, $\phi(\tau x^*) \leq g(\tau)$ para todo $\|x^*\| \leq 1$. En particular, $\phi(\tau x^*) = g(\tau)$ si $\|x^*\| = 1$ y $\tau > \tau_0$.
Por otro lado, si $\tau < \tau_0$, entonces, por el argumento de recién, $\phi(\tau x^*) \leq g(t)$ para todo $\|x^*\| = 1$ y $t > \tau_0$. Luego, $\phi(\tau x^*) \leq g(\tau_0)$ y, por lo tanto, $\phi(\tau x^*) = g(\tau_0) \leq g(\tau)$. Así, $\phi(\tau x^*) = g(\tau)$.
Hemos probado entonces que $\phi(\tau x^*) = g(\tau)$ para todo $\tau \geq 0$ y para todo $\|x^*\| = 1$, lo que muestra (3.1). □

3.2. La propiedad (M) y M-ideales de operadores.

En esta sección relacionamos estas dos nuevas nociones con la de M-ideales estudiada anteriormente. Veremos que todo espacio X que tiene la propiedad (M^*) es un M-ideal en X^{**}. También introduciremos la definición de una aproximación compacta achicante de la identidad que nos ayudará a dar equivalencias para saber cuándo $\mathcal{K}(X, Y)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X, Y)$.

Proposición 3.2.1. *Sea X un espacio de Banach que tiene la propiedad (M^*). Entonces X es un M-ideal en X^{**}.*

Demostración. Debemos ver que $X^{***} = X^\perp \oplus_1 X^*$. Sea $\varphi \in X^\perp \subseteq X^{***}$ y sea $\psi \in X^*$ (acá pensamos $X^* \subseteq X^{***}$). Vamos a probar que $\|\varphi + \psi\| = \|\varphi\| + \|\psi\|$.
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < 1$ y $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tales que $\varphi(x^{**}) > \lambda\|\varphi\|$. Tomamos $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = \|\psi\|$ y $x^{**}(x^*) > \lambda\|x^*\| = \lambda\|\psi\|$.
Como $\varphi \in B(-\psi; \|\psi + \varphi\|) \subseteq X^{***}$, por el teorema de densidad de Goldstine, existe $(y^*_\alpha) \subseteq B(-\psi; \|\psi + \varphi\|)$ tal que (y^*_α) converge débil-* a φ en X^{***}.
Como $\varphi(x^{**}) > \lambda\|\varphi\|$, podemos además suponer que para todo α, $x^{**}(y^*_\alpha) > \lambda\|\varphi\|$.
Por último, como $\varphi \in X^\perp$, tenemos que (y_α) tiende w^* a cero en X^*; con $w^* = \sigma(X^*, X)$.
Con todo esto

$$\begin{aligned} \|\psi + \varphi\| &\geq \limsup \|\psi + y^*_\alpha\| \\ &= \limsup \|x^* + y^*_\alpha\| \\ &\geq \limsup \ x^{**}(x^* + y^*_\alpha) \\ &\geq \lambda(\|\psi\| + \|\varphi\|), \end{aligned}$$

donde la igualdad se debe a que X tiene la propiedad (M^*) y $\|\psi\| = \|x^*\|$. Haciendo $\lambda \to 1$ se obtiene una desigualdad. La proposición queda probada al notar que $\|\psi+\varphi\| \leq \|\psi\|+\|\varphi\|$ siempre. $\square$

Introducimos ahora el concepto de aproximaciones compactas achicantes de la identidad que usaremos junto con los conceptos de propiedad (M) y propiedad (M^*) para dar nuevas equivalencias que nos permitan saber cuándo $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$ es un M-ideal.

Definición 3.2.2. Una red de operadores compactos (K_α) sobre un espacio de Banach X se dice una aproximación compacta achicante de la identidad (SCAI) si $K_\alpha x \to x$ y $K^*_\alpha x^* \to x^*$ para todo $x \in X$ y todo $x^* \in X^*$.

Teorema 3.2.3. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Son equivalentes:*

(i) *$\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X)$.*

(ii) *Existe (K_α) una SCAI tal que para todo S, $T \in \mathcal{L}(X)$*

$$\limsup \|SK_\alpha + T(I - K_\alpha)\| \leq \max\{\|S\|; \|T\|\}.$$

(iii) *Existe (K_α) una SCAI tal que para todo S, $T \in \mathcal{L}(X)$*

$$\limsup \|K_\alpha S + (I - K_\alpha)T\| \leq \max\{\|S\|; \|T\|\}.$$

(iv) *Existe (K_α) una SCAI tal que $\|K_\alpha\| \leq 1$ para todo α y para todo $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$*

$$\limsup \|S + I - K_\alpha\| \leq 1.$$

(v) *X tiene la propiedad (M) y existe (K_α) una SCAI tal que*

$$\lim \|I - 2K_\alpha\| = 1.$$

(vi) *X tiene la propiedad (M^*) y existe (K_α) una SCAI tal que*

$$\lim \|I - 2K_\alpha\| = 1.$$

Antes de demostrar este teorema, se necesitan algunas herramientas acerca de M-ideales en un álgebra de Banach. Para la definición de M-ideal interno a derecha (izquierda) y M-ideal interno bilátero, referirse a [HWW, Definición V.3.1.]. Por [HWW, Proposición VI.4.10.] se tiene que si $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X)$, entonces resulta ser un M-ideal interno bilátero.
Para $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach y e su neutro, decimos que (p_α) es una λ-aproximación a izquierda de la identidad si cumple

- $\|p_\alpha\| \leq \lambda$ para todo α
- $\lim p_\alpha a = a$ para todo $a \in \mathfrak{U}$.

De la misma forma se dice que p_α aproxima a derecha si $\lim ap_\alpha = a$ para todo $a \in \mathfrak{U}$. Además se tiene el siguiente resultado que también debemos a [HWW].

Teorema 3.2.4. *[HWW, Teorema V.3.2.] Sea $\mathfrak{U}$ un álgebra de Banach con unidad y sea $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{U}$ subespacio. Son equivalentes:*

(i) *$\mathfrak{J}$ es un M-ideal interno a izquierda (derecha).*

(ii) *$\mathfrak{J}$ es un ideal a izquierda (derecha), un M-ideal y contiene una 1-aproximación de la identidad a la derecha (izquierda).*

(iii) *$\mathfrak{J}$ es un ideal a izquierda (derecha) y contiene una aproximación de la identidad a derecha (izquierda) $(p_\alpha) \subseteq \mathfrak{J}$ satisfaciendo*

$$\limsup \|sp_\alpha + t(e - p_\alpha)\| \leq 1 \qquad \forall s, t \in B_{\mathfrak{U}},$$

donde e es el elemento neutro del álgebra $\mathfrak{U}$.

Además, si $\mathfrak{J}$ es un M-ideal interno bilátero, entonces se puede elegir (p_α) una aproximación bilateral de la identidad, cumpliendo simultáneamente

$$\limsup \|sp_\alpha + t(e - p_\alpha)\| \leq 1$$

y

$$\limsup \|p_\alpha s + (e - p_\alpha)t\| \leq 1.$$

Demostración. (del teorema 3.2.3)
Veamos primero que (i) y (ii) son equivalentes.
Si (i) es cierto, por lo observado arriba $\mathcal{K}(X)$ resulta ser un M-ideal interno bilátero, y por el Teorema 3.2.4, $K(X)$ contiene una 1-aproximación de la identidad (K_α) cumpliendo

$$\limsup \|SK_\alpha + T(I-K_\alpha)\| \leq 1 \qquad \forall S,T \in \mathcal{L}(X).$$

Las equivalencias entre (iv) y (v) del [HWW, Lema VI.4.9.], implican $(K_\alpha^*)_\alpha$ converge puntualmente a la identidad sobre X^*, mostrando que $(K_\alpha)_\alpha$ es una SCAI.
Obetenemos (ii) multiplicando y dividiendo por $\max\{\|S\|; \|T\|\}$.
Usando (iii) $\Rightarrow$ (ii) del Teorema 3.2.3 obtenemos (i) a partir de (ii); siempre recordando que $\mathcal{K}(X)$ es un ideal bilátero en $\mathcal{L}(X)$. De la misma forma se tiene que (ii) implica (iii).
Para probar que (iii) implica (iv), tomamos $S = I$ y $T = 0$ y tenemos que $\|K_\alpha\| \leq 1$ para todo α. Por último, si $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ entonces

$$\|S + I - K_\alpha\| \leq \|K_\alpha S + I - K_\alpha\| + \|K_\alpha S - S\|.$$

Como S es compacto y K_α converge puntualmente a la identidad, se tiene que $\|K_\alpha\, S - S\| \to 0$.
(iv) $\Rightarrow$ (vi): Observemos que $\|I - 2K_\alpha\| \geq 1$ para todo α. En efecto, si esto no fuese cierto, tendríamos que $2K = I - (I - 2K)$ es inversible pero esto no puede ser pues X es un espacio de dimensión infinita. Tomando $S = -K_\alpha$ en la hipótesis de (iv), tenemos la otra desigualdad.
Veamos entonces que X tiene la propiedad (M^*). Para esto usaremos el Lema 3.1.5. Supongamos que $(x_\gamma^*) \subseteq X^*$ es una red acotada débil-* nula y sean $u^*, v^* \in X^*$ tales que $\|u^*\| \leq \|v^*\|$. Entonces existe un operador $\tilde{S}$ de rango 1 (y por lo tanto compacto) tal que $\|\tilde{S}\| \leq 1$ y $\tilde{S}(v^*) = u^*$. En efecto, supongamos que $\theta \in X^{**}$ tal que $\|\theta\| = 1$ y $\theta(v^*) = \|v^*\|$. Entonces $\tilde{S}(x^*) = \frac{\theta(x^*)}{\|v^*\|} u^*$ cumple lo buscado.
Notemos que $\|\tilde{K} x_\gamma^*\| \to 0$ para todo operador compacto $\tilde{K}$. Así, si fijamos un índice α,

$$\begin{aligned}
\limsup_\gamma \|u^* + x_\gamma^*\| &= \limsup_\gamma \|\tilde{S}(v^* + x_\gamma^*) + (I - K_\alpha^*) x_\gamma^*\| \\
&\leq \|\tilde{S} + I - K_\alpha^*\| \limsup_\gamma \|v^* + x_\gamma^*\| + \|(I - K_\alpha^*) v^*\|.
\end{aligned}$$

Tomando límite en α obtenemos

$$\limsup_\gamma \|u^* + x_\gamma^*\| \leq \limsup_\gamma \|v^* + x_\gamma^*\|.$$

La Proposición 3.1.6 implica (v) suponiendo que (vi) es cierto.
Por último, probamos (i) a partir de (v) usando la *3-ball property* (Teorema 1.2.3). Para esto, alcanza con ver que si $S \in B_{\mathcal{K}(X)}$ y $T \in B_{\mathcal{L}(X)}$, entonces

$$\limsup \|S + T(I - K_\alpha)\| \leq 1. \tag{3.5}$$

En efecto, para mostrar que se cumple la 3-ball property, es necesario encontrar un operador compacto K cumpliendo

$$\|S_i + T - K\| \leq 1 + \varepsilon \tag{3.6}$$

para S_1, S_2, $S_3 \in B_{\mathcal{K}(X)}$, $T \in B_{\mathcal{L}(X)}$ y $\varepsilon > 0$. Si (3.5) se cumple, entonces para el $\varepsilon > 0$ dado y para S_1 existe α_1 cumpliendo para todo $\alpha \geq \alpha_1$

$$\|S_1 + T(I - K_\alpha)\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Partiendo de los $\alpha \geq \alpha_1$, de la misma forma se consiguen α_2 y, luego α_3, para S_2 y S_3 respectivamente. El operador compacto K buscado será TK_{α_3} que cumple con (3.6) para todos los S_i, $i = 1, 2, 3$.
Probemos entonces (3.5). Fijemos un índice β. Como $\|S + T(I - K_\alpha)\| \leq \|SK_\beta + T(I - K_\alpha)\| + \|S - SK_\beta\|$ y $\|S - SK_\beta\| \to 0$ es suficiente probar que $\limsup_\alpha \|SK_\beta + T(I - K_\alpha)\| \leq 1$.
Para esto, vamos a usar el lema 3.1.4. Tomemos $(x_\alpha) \subseteq B_X$ tal que $\|SK_\beta + T(I - K_\alpha)\| = \|SK_\beta x_\alpha + T(I - K_\alpha)x_\alpha\|$.
Observemos que $(K_\beta x_\alpha)_\alpha$ es una red relativamente compacta; además, como $\lim K_\alpha^* x^* = x^*$ para todo $x^* \in X^*$, se tiene que $((I - K_\alpha)x_\alpha)$ y $(T(I - K_\alpha)x_\alpha)$ son redes débil nulas. Con lo cual, aplicando el Lema 3.1.4 y el item (iii) del Lema 3.1.3 tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + T(I - K_\alpha)x_\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|K_\beta x_\alpha + T(I - K_\alpha)x_\alpha\| \\
&\leq \limsup_\alpha \|K_\beta x_\alpha + (I - K_\alpha)x_\alpha\| \\
&\leq \limsup_\alpha \|K_\beta + I - K_\alpha\|.
\end{aligned}$$

Por último, veamos que $\limsup\limits_\alpha \|K_\beta + I - K_\alpha\| \leq \|I - 2K_\beta\|$.
Notemos que

$$\|K_\beta + I - K_\alpha\| \leq \|I - K_\alpha - K_\beta + 2K_\alpha K_\beta\| + 2\|K_\alpha K_\beta - K_\beta\|.$$

Además, $\lim\limits_\alpha \|K_\alpha K_\beta - K_\beta\| = 0$. Luego, basta probar que $\limsup\limits_\alpha \|I - K_\alpha - K_\beta + 2K_\alpha K_\beta\| \leq \|I - 2K_\beta\|$ para todo β. Usando que $\|I - 2K_\alpha\|\|I - 2K_\beta\| \geq 1$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|I - K_\alpha - K_\beta + 2K_\alpha K_\beta\| &= \tfrac{1}{2}\|I + (I - 2K_\alpha)(I - 2K_\beta)\| \\
&\leq \tfrac{1}{2}(1 + \|I - 2K_\alpha\|\|I - 2K_\beta\|) \\
&\leq \|I - 2K_\alpha\|\|I - 2K_\beta\|,
\end{aligned}$$

y por (v), $\limsup\limits_\alpha \|I - K_\alpha - K_\beta + 2K_\alpha K_\beta\| \leq \|I - 2K_\beta\|$ para todo β. Luego,

$$\begin{aligned}
\limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + T(I - K_\alpha)x_\alpha\| &\leq \limsup_\alpha \|K_\beta + I - K_\alpha\| \\
&\leq \limsup_\alpha \|I - K_\alpha - K_\beta + 2K_\alpha K_\beta\| \\
&\leq \limsup_\alpha \|I - 2K_\alpha\|\|I - 2K_\beta\| \\
&\leq \|I - 2K_\beta\|.
\end{aligned}$$

Probamos entonces que para todo β fijo

$$\limsup_\alpha \|S+T(I-K_\alpha)\| \leq \limsup_\alpha \|SK_\beta+T(I-K_\alpha)\|+\|S-SK_\beta\| \leq \|I-2K_\beta\|+\|S-SK_\beta\|.$$

Tomando límite en β, usando (v) y recordando que $\|S - SK_\beta\| \to 0$ con β se tiene que

$$\limsup_\alpha \|S + T(I - K_\alpha)\| \leq 1$$

como queríamos probar. □

Ejemplo 3.2.5. En la Proposición 3.1.9, vimos que para $1 < p < \infty$, ℓ_p y c_0 son espacios que tienen la propiedad (M). Más aún, las proyecciones (π_n) en las primeras n coordenadas cumplen el item (v) del Teorema 3.2.3, dándonos nuevos ejemplos de M-ideales. Sin embargo, ℓ_1 no tiene la propiedad (M^*) y por lo tanto $\mathcal{K}(\ell_1)$ no es un M-ideal en $\mathcal{L}(\ell_1)$.

Terminamos este capítulo con una aplicación del Teorema 3.2.3.

Lema 3.2.6. *Sean X, Y, espacios de Banach, tales que $\mathcal{K}(X) \subseteq \mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{K}(Y) \subseteq \mathcal{L}(Y)$ son M-ideales, entones $\mathcal{K}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ es un M-ideal.*

Demostración. Vamos a mostrar la *3-ball property*. Sea (K_α) una SCAI para X, veamos entonces que

$$\limsup \|S + T(I - K_\alpha)\| \leq 1$$

para todo $S \in B_{\mathcal{K}(X,Y)}$ y $T \in B_{\mathcal{L}(X,Y)}$.
Fijamos β y elegimos $(x_\alpha) \subseteq B_X$ tal que $\|SK_\beta x_\alpha + T(I-K_\alpha)x_\alpha\| = \|SK_\beta + T(I-K_\alpha)\|$. Al igual que en $(v) \Rightarrow (i)$ del Teorema 3.2.3, y notando que $(I - K_\alpha)x_\alpha$ es débil nula, podemos probar que

$$\limsup_\alpha \|SK_\beta x_\alpha + T(I - K_\alpha)x_\alpha\| \leq \limsup_\alpha \|K_\beta x_\alpha + (I - K_\alpha)x_\alpha\| \leq 1,$$

como queríamos ver. □

Capítulo 4

M-ideales en espacios de polinomios.

En este capítulo, centramos nuestro estudio en el espacio de polinomios n-homogéneos. Si bien la definición podría darse para funciones entre dos espacios vectoriales, vamos a optar por presentar esta clase de funciones a valores escalares. Después de dar las nociones básicas de esta toería, vamos a estudiar si hay presencia o no de una estructura de M-ideales. En lo siguiente si X es un espacio de Banach, $\mathcal{L}(^nX)$ representará al espacios de las funciones multilineales acotadas $A : X^n \to \; Y$.

4.1. Polinómios n-homogéneos.

Para dar la noción de polinomio n-homogéneo, usaremos las funciones multilineales. Decimos que A es simétrica si para toda permutación $\sigma \in S_n$

$$A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = A(x_1, \ldots, x_n).$$

Una función multilineal es continua (o acotada) si es continua en cada n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$. Además,

$$\|A\| = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|A(x_1, \ldots, x_n)\|$$

resulta ser una norma en el espacio de las funciones multilineales, que lo hace un espacio de Banach. Notaremos por $\mathcal{L}(^nX)$ al espacio de funciones n-lineales continuas, y por $\mathcal{L}_s(^nX)$ al subespacio de las funciones simétricas.

Dada una multilineal A, podemos definir una multilineal simétrica asociada dada por

$$\tilde{A}(x_1, \ldots, x_n) =: \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Definición 4.1.1. Decimos que una función $P : X \to \mathbb{K}$ es un polinomio n-homogéneo continuo si existe $A \in \mathcal{L}(^nX)$ continua tal que $P(x) = A(x, \ldots, x)$.

Vamos a notar por $\mathcal{P}(^nX)$ al conjunto de polinomios n-homogéneos continuos a valores en $\mathbb{K}$.

Definición 4.1.2. Para P polinomio n-homogéneo, definimos $\|P\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|P(x)\|$. Ésta resulta ser una norma en el espacio de polinomios n-homogéneos que lo hace un espacio de Banach.

A continuación damos distintas formas de mirar la continuidad de un polinomio. La demostración es análoga a la conocida para operadores lineales.

Proposición 4.1.3. *Sea $P \in \mathcal{P}(^nX)$, son equivalentes:*

(i) *P es continuo para cada $x \in X$.*

(ii) *P es continuo en un punto $x_0 \in X$.*

(iii) $\|P\| < \infty$.

(iv) $\|P\| = inf\{C > 0$ *tal que* $\|P(x)\| \leq C\|x\|^n$ *para todo* $x \in X\}$.

Además, en el caso en que P es continuo se tiene que $\|P(x)\| \leq \|P\|\|x\|^n$ para todo $x \in X$.

Para funciones n-lineales, tenemos un resultado similar a la Proposición 4.1.3. Además, si A es n-lineal y continua, se tiene que

$$\|A(x_1, \dots, x_n)\| \leq \|A\|\|x_1\| \dots \|x_n\|$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in X$.

Notar que todo elemento de X^* es un polinomio 1-homogéneo. Más en general, tenemos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.1.4. *Si $\varphi \in X^*$, entonces φ^n es un polinomio n-homogéneo asociado a la n-lineal $A : X^n \to \mathbb{K}$ dada por*

$$A(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n).$$

Además, si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$, el producto $P(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$ es un polinomio n-homogéneo. Una n-lineal que lo representa es

$$A(x_1, \dots, x_n) = \varphi_1(x_1) \dots \varphi_n(x_n) \tag{4.1}$$

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in X^*$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$, entonces

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j^n(x) \tag{4.2}$$

es un polinomio n-homogéneo.

Los polinomios de la forma (4.2) forman la clase de polinomios distinguida que llamaremos *Polinomios de tipo finito* y que notaremos $P_f({}^nX)$. Más adelante veremos que los polinomios n-homogéneos asociados a la multilineal de la forma (4.1) también son de tipo finito.

Si X es un espacio de dimensión finita, entonces todo polinomio sobre X es de tipo finito. Por otro lado, si X tiene dimensión infinita, entonces podemos dar una condición necesaria para que un polinomio P sea de tipo finito.

Lema 4.1.5. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y sea P un polinomio de tipo finito. Entonces $P^{-1}(0)$ posee un subespacio de dimensión infinita.*

Demostración. Sean $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in X^*$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tales que $P(x) = \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_j^n(x)$ para todo $x \in X$. Definimos $T : X \to \mathbb{K}^k$ en la forma

$$T(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)),$$

que T resulta ser un operador lineal y continuo. Como $\ker T \subseteq P^{-1}(0)$, basta mostrar que $\ker T$ posee un subespacio de dimensión infinita. Pero esto se cumple al ser $X/\ker(T)$ isomorfo a un subespacio finito de $\mathbb{K}^k$. $\square$

Este lema nos permite mostrar que no todo polinomio es de tipo finito. En efecto, si consideramos $X = \ell_2$ y el polinomio $P : \ell_2 \to \mathbb{R}$, $P(x) = \sum x_j^2$, tenemos que $P^{-1}(0) = 0$. Notar que P es efectivamente un polinomio si tomamos la función 2-lineal $A : \ell_2 \times \ell_2 \to \mathbb{R}$

$$A(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

La desigualdad de Hölder muestra que A esta bien definida y es continua.

Recordemos que dada A n-lineal, siempre podemos tomar $\tilde{A}$ para tener una n-lineal simétrica tal que $A(x, \ldots, x) = \tilde{A}(x, \ldots, x)$. Luego, dado P polinomio n-homogéneo siempre existe A n-lineal y simétrica que lo define.

Si $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| =: \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Escribimos $x_j^{\alpha_j}$ para notar $\underbrace{x_j, \ldots, x_j}_{\alpha_j\text{-veces}}$. Para $|\alpha| = n$, notamos $A(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_n^{\alpha_n}) = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$.

La fórmula de Leibnitz vincula un polinomio con su n-lineal simétrica:

$$P(x_1 + \ldots + x_k) = \sum_{|\alpha|=n} \frac{n!}{\alpha!} A(x_1^{\alpha_1}, \ldots, x_k^{\alpha_k}),$$

donde $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$. En particular obtenemos la versión polinomial del binomio de Newton,

$$P(x + y) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A(x^j, y^{n-j}).$$

Por último, la fórmula de polarización dice cómo recuperar una multilineal simétrica asociada a un polinomio P.

$$A(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n P(\sum_j \varepsilon_j x_j). \tag{4.3}$$

Una demostración de esta fórmula se puede ver en [D, Proposición 1.5.].

Corolario 4.1.6. *Para todo polinomio n-homogéneo P, existe una única n-lineal simétrica A tal que $P(x) = A(x, \dots, x)$.*

Estamos ahora en condiciones de mostrar que un polinomio asociado a una n-lineal como en (4.1) es un polinomio de tipo finito. En efecto, fijo $x \in X$, definimos $A : X^* \times \dots \times X^* \to \mathbb{K}$ la n-lineal dada por $A(\psi_1, \dots, \psi_n) := \psi_1(x) \dots \psi_n(x)$. Con esto, si $P(x) = \varphi_1(x) \dots \varphi_n(x)$, por (4.3), se tiene que

$$P(x) = A(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_n \sum_{j=1}^{n} \big(\varepsilon_j \varphi_j\big)^n (x),$$

mostrando que P es de tipo finito.

El subespacio de polinomios de tipo finito $\mathcal{P}_f(^n X)$ no es cerrado en $\mathcal{P}(^n X)$ con la norma supremo. Su clausura se conoce como la clase de polinomios aproximables que notamos por $\mathcal{P}_A(^n X)$. Es decir

$$P_A(^n X) =: \overline{P_f(^n X)}.$$

Ahora mostraremos otras clases de polinomios que surgen de la riqueza de trabajar sobre dominios de dimensión infinita. Para esto, introducimos el operador T_P asociado a P dado por $T_P : X \to \mathcal{P}(^{n-1} X)$,

$$T_P(x)(y) = A_x(y^{n-1}) = A(x, y, \dots, y),$$

donde A es la única n-lineal simétrica tal que $P(x) = A(x^n)$.

Proposición 4.1.7. *Un polinomio homogéneo es de tipo finito si y sólo si su operador asociado es de rango finito.*

Demostración. Si P es n-homogéneo de tipo finito, escribimos $P(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j^n(x)$ donde $\lambda_j \in \mathbb{K}$ y $\varphi_j \in X^*$, para todo $j = 1, \dots, k$. Consideramos $A : X^n \to \mathbb{K}$ dada por

$$A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x_1) \dots \varphi_j(x_n).$$

Es claro que A es simétrica y representa a P. Luego

$$T_P(x)(y) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x), \varphi_j^{n-1}(y),$$

y, por lo tanto,

$$T_P(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j(x), \varphi_j^{n-1},$$

mostrando que $Rg(T_P) \subseteq [\varphi_1^{n-1}, \ldots, \varphi_k^{n-1}]$.
Recíprocamente, supongamos que dim $Rg(T_p) < \infty$. Como $X/\ker T_P$ es isomorfo a $Rg(T_P)$ resulta que $X/\ker T_P$ tiene dimensión finita. Consideramos $\tilde{P} : X/\ker T_P \to \mathbb{K}$, $\tilde{P}([x]) =: P(x)$. Veamos que está función esta bien definida. Supongamos que $[x] = [y]$. Si A es la única n-lineal simétrica que representa a P, entonces $A_x \in \mathcal{L}(^{n-1}X)$ dada por

$$A_x(y_1, \ldots, y_{n-1}) = A(x, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

es la única $(n-1)$-lineal simétrica que representa a $T_P(x)$. De la misma forma A_y será la única $(n-1)$-lineal simétrica que representa a $T_P(y)$.
Como $[x] = [y]$, tenemos que $T_P(x) = T_P(y)$ y por lo tanto $A_x = A_y$. Luego,

$$\begin{aligned} P(x) &= T_P(x)(x) \\ &= T_P(y)(x) \\ &= A_y(x^{n-1}) \\ &= A(y, x^{n-1}) \\ &= A(x, y, x^{n-2}) \\ &= A_x(y, x^{n-2}) \\ &= A_y(y, x^{n-2}) \\ &= A(y^2, x^{n-2}). \end{aligned}$$

Iterando este proceso, obtenemos que $P(x) = P(y)$ mostrando que $\tilde{P}$ esta bien definido y resulta ser un polinomio n-homogéneo. En efecto, si $\pi : X \to X/\ker T_P$ es la proyección al cociente, consideramos $\pi^n : X \to (X/\ker T_P)^n$, $\pi^n(x) =: (\pi(x), \ldots, \pi(x))$. Entonces $\tilde{A} =: A \circ \pi$ es la n-lineal simétrica que lo representa.
Como $\tilde{P}$ es un polinomio n-homogéneo sobre un espacio de dimensión finita, debe ser de tipo finito. Entonces existen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ y $\psi_1, \ldots, \psi_k \in (X/\ker T_P)^*$ tales que

$$\tilde{P}([x]) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \psi_j^n([x])$$

para todo $x \in X$.
Llegamos al resultado deseado escribiendo

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j^n(x)$$

donde $\varphi_j = \psi_j \circ \pi$ y recordando que $\tilde{P}([x]) = P(x)$. □

Corolario 4.1.8. *Un polinomio homogéneo es aproximable si y sólo su operador asociado se aproxima por operadores de rango finito.*

Es natural estudiar la clase de operadores cuyo operador asociado es compacto. Esta clase será fundamental para estudiar M-estructuras en espacios de polinomios. Aprovechamos para dar su definición.

Definición 4.1.9. Decimos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^nX)$ es w-continuo en acotados si $P(x_\alpha) \to P(x)$ para toda red acotada (x_α) tal que $x_\alpha \overset{w}{\to} x$. Notamos por $\mathcal{P}_w(^nX)$ al conjunto de polinomios débil continuos en acotados.

La equivalencia entre la clase de polinomios homosgéneos w-continuos y la clase de polinomios cuyo operador asociado es compacto se muestra en [AHV, Teorema 2.9.].

Finalmente, vamos a usar una clase mayor de polinomios que es la siguiente:

Definición 4.1.10. Decimos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^nX)$ es débil continuo en cero si $P(x_\alpha) \to 0$ para toda red acotada (x_α) débil nula. Notamos por $\mathcal{P}_{w0}(^nX)$ al conjunto de polinomios débil continuos en cero.

En general, $\mathcal{P}(^nX) \neq \mathcal{P}_w(^nX)$, un ejemplo de esto es el polinomio $P : \ell_2 \to \mathbb{K}$, $P(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} x_j^2$. La base canónica (e_j) de ℓ_2 es débil nula, pero $P(e_j) = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Además, $\mathcal{P}_{w0}(^nX) \neq \mathcal{P}_w(^nX)$ en muchas situaciones, aunque estos espacios coinciden para grado 2 como se muestra a continuación.

Proposición 4.1.11. *$\mathcal{P}_w(^2X) = \mathcal{P}_{w0}(^2X)$ para todo espacio de Banach X.*

Demostración. Sólo hay que probar una inclusión. Sea $P \in \mathcal{P}_{w0}(^2X)$, queremos ver que P es débil continuo en acotados de X. Sea $(x_\alpha) \subseteq X$ una red acotada y sea $x_0 \in X$ tal que $x_\alpha \overset{w}{\to} x_0$. Sea $A \in \mathcal{L}(^2X)$ la única 2-lineal simétrica tal que $A(x,x) = P(x)$ para todo $x \in X$. Entonces,

$$P(x_\alpha) - P(x_0) = A(x_\alpha, x_\alpha - x_0) + A(x_0, x_\alpha - x_0) = P(x_\alpha - x_0) + 2A(x_0, x_\alpha - x_0).$$

Como P es débil continuo en 0, $P(x_\alpha - x_0) \to 0$. Pero por otra parte, $A(x_0, \cdot)$ es un elemento de X^* y por lo tanto $A(x_0, x_\alpha - x_0) \to 0$. Luego $P(x_\alpha) \to P(x_0)$ y por lo tanto, P es débil continuo en acotados. $\square$

Para $n > 2$, existen espacios X para los cuales $\mathcal{P}_w(^nX) = \mathcal{P}_{w0}(^nX)$. Para verlo, usaremos el siguiente resultado.

Lema 4.1.12. *Sean $1 < p < \infty$, $(x_n) \subseteq \ell_p$, $x \in \ell_p$. Entonces $x_n \overset{w}{\to} x$ si y solo $\sup \|x_n\|_p < \infty$ y $\lim_n x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Podemos suponer que $x = 0$, sino se considerará $y_n = x_n - x$.
Si $x_n \overset{w}{\to} 0$, el principio de acotación uniforme nos asegura que $\sup \|x_n\|_p < \infty$. Obtenemos $\lim_n x_n(k) = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ usando las funcionales $e_k^* : \ell_p \to \mathbb{K}$, $e_k^*(x) =: x_k$.

Recíprocamente, sea $\varphi \in (\ell_p)^*$, $\varphi \sim y$ donde $y \in \ell_q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sean $\varepsilon > 0$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\sum_{j=k_0}^{\infty} |y(j)|^q < \varepsilon^q$. Entonces,

$$|\varphi(x_n)| \leq \Big|\sum_{j=1}^{k_0} x_n(j)y(j)\Big| + \Big|\sum_{j=k_0+1}^{\infty} x_n(j)y(j)\Big| \leq \Big|\sum_{j=1}^{k_0} x_n(j)y(j)\Big| + \sum_{j=k_0+1}^{\infty} |y(j)|^q \|x_n\|.$$

Por hipótesis, $\|x_n\|$ esta uniformemente acotada y x_n tiende débil a cero. Luego, podemos obtener $|\varphi(x_n)| < \varepsilon$ para n suficientemente grande. $\square$

Con este lema, podemos obtener que el polinomio $P : \ell_2 \to \mathbb{K}$ dado por $P(x) = x(1)\sum_{j=2}^{\infty} x(j)^2$ no es débil continuo en $x = e_1$. En efecto, usando el lema vemos que $x_n = e_1 + e_{n+1}$ tiende débil a e_1, pero $P(e_1) = 0$ y $P(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, este polinomio es débil continuo en $x = 0$. En efecto, supongamos que x_α es una red débil nula que está acotada en norma por una constante $C > 0$. Con esto,

$$|P(x_\alpha)| = \Big|x_\alpha(1)\sum_{j=2}^{\infty}(x_\alpha(j)^2\Big| \leq |x_\alpha(1)|\|x_\alpha\|_2 \leq x_\alpha(1)C.$$

Como $x_\alpha(1) \to 0$, tenemos que $P \in \mathcal{P}_{w0}(^3X) \setminus \mathcal{P}_w(^3X)$ con $X = \ell_2$.

Vimos que, en general, $\mathcal{P}(^nX) \neq \mathcal{P}_w(^nX)$. Sin embargo, el espacio de polinomios sobre espacios ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, tiene la siguiente propiedad.

Proposición 4.1.13. *Sea $n < p$. Entonces $\mathcal{P}(^n\ell_p) = \mathcal{P}_w(^n\ell_p)$.*

Para poder ver esto necesitamos primero algunas definiciones y resultados.

Definición 4.1.14. Sea X un espacio de Banach con base de Schauder (e_j). Definimos el soporte de un elemento $x \in X$, $x = \sum x_j e_j \in E$ por $\mathrm{sop}(x) =: \{j \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j \neq 0\}$.

Lema 4.1.15. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ y $1 \leq j \leq n-1$ se tiene que*

$$\sum_{r=0}^{n-j} \binom{n}{r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j} = 0.$$

Demostración. Recordemos que $\sum_{r=0}^{s}\binom{s}{r}(-1)^r = (1-1)^s = 0$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^{n-j} \binom{n}{r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j} &= \sum_{r=0}^{n-j} \frac{n!}{r!j!(n-r-j)!}(-1)^{n-r-j} \\ &= \tfrac{n!(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!}\sum_{r=0}^{n-j}\binom{n-j}{r}(-1)^r = 0,\end{aligned}$$

tomando $s = n-j$. $\square$

Proposición 4.1.16. *Sea $P \in \mathcal{P}(^nX)$ un polinomio n-homogéneo y sea A su única n-lineal simétrica tal que $P(x) = A(x^n)$. Entonces, para todo x, $y \in X$*

$$P(x) - P(y) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} A(y^r, (x-y)^{n-r})$$

Demostración. Usando el binomio de Newton, escribimos

$$\begin{aligned}
\sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} A(y^r, (x-y)^{n-r}) &= \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-r} \binom{n}{r}\binom{n-r}{j} A(x^j, y^{n-j})(-1)^{n-r-j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} A(x^j, y^{n-j}) \sum_{r=1}^{n-j} \binom{n}{r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j} \\
&= A(x^n) + \sum_{j=1}^{n-1} A(x^j, y^{n-j}) \underbrace{\sum_{r=1}^{n-j} \binom{n}{r}\binom{n-r}{j}(-1)^{n-r-j}}_{0} - A(y^n),
\end{aligned}$$

donde, si $j = 0$, tenemos que

$$\sum_{r=0}^{n-0} \binom{n}{r}\binom{n-r}{0}(-1)^{n-r-0} = 1.$$

□

Proposición 4.1.17. *Sea $1 \leq p < \infty$ y sea (e_j) la base canónica de ℓ_p. Sea $(u_n) \subseteq \ell_p$ una sucesión de elementos con soportes disjuntos y sean a, $b > 0$ tales que $a < \|u_n\| < b$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el espacio generado por (u_n) es isomorfo a ℓ_p.*

Demostración. Supongamos que u_n es una sucesión de bloques; es decir, $u_n = \sum_{j=p_n}^{q_n} u_n(j)e(j)$ con $p_1 < q_1 < p_2 < \ldots$. Si vemos que (u_n) es equivalente a (e_n), entonces los espacios que generan son isomorfos. Escribimos

$$\begin{aligned}
\| \textstyle\sum_{n=1}^N a_n u_n \| &= \| \textstyle\sum_{n=1}^N \sum_{j=p_n}^{q_n} a_n u_n(j) e(j) \| \\
&= \big(\textstyle\sum_{n=1}^N \sum_{j=p_n}^{q_n} |a_n u_n(j)|^p \big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \big(\textstyle\sum_{n=1}^N |a_n|^p \big)^{\frac{1}{p}} \big(\sum_{j=p_n}^{q_n} |u_n(j)|^p \big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \big(\textstyle\sum_{n=1}^N |a_n|^p \|u_n\|^p \big)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

notando que $\big(\sum_{j=p_n}^{q_n} a_n u_n(j) e_j\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tienen soporte disjuntos para justificar la segunda igualdad.

Como $a < \|u_n\| < b$, entonces $a^p < \|u_n\|^p < b^p$ y por lo tanto se tiene que $a\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\| \leq \|\sum_{n=1}^{N} a_n u_n\| \leq b\|\sum_{n=1}^{N} a_n e_n\|$. Luego, $\| \sum_{n=1}^N a_n u_n\|$ converge sí y solo sí $\| \sum_{n=1}^N a_n e_n\|$ lo hace. Entonces (u_n) y (e_n) son sucesiones equivalentes. □

Proposición 4.1.18. *Sean $1 \leq n < p < \infty$, $P \in \mathcal{P}(^n\ell_p)$ y (e_j) la base canónica de ℓ_p. Entonces*

$$\big(P(e_j)\big)_j \in \ell_{\frac{p}{p-n}}.$$

Más aún, para todo $j \in \mathbb{N}$,

$$\|(P(e_j))_j\|_{\frac{p}{p-n}} \leq \|P\|.$$

Demostración. Para cada j elegimos $\lambda_j \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda_j^n P(e_j) = |P(e_j)|^{\frac{p}{p-n}}$. Por [D, Lema 1.57.] tenemos que $\sum P(x_j) = E\big[P(\sum s_j x_j)\big]$ donde $E[\cdot]$ es la función esperanza y s_j son variables aleatorias continuas en $[0,1]$ cumpliendo

$$E\big[s_{i_1}, \ldots, s_{i_n}\big] = \begin{cases} 1 & \text{si } s_{i_l} = s_{i_r} \text{ para todo } i, r, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

y

$$|s_j(t)| = 1 \text{ para todo } t \text{ y todo } j.$$

Así,

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{j=1}^k |P(e_j)|^{\frac{p}{p-n}} &= \textstyle\sum_{j=1}^k P(\lambda_j e_j) \\ &= E\big[P(\textstyle\sum_{j=1}^k \lambda_j s_j e_j)\big] \\ &= \textstyle\int_0^1 P\big(\sum_{j=1}^k \lambda_j s_j(t) e_j\big) dt \\ &\leq \|P\|\big(\textstyle\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^p\big)^{\frac{n}{p}}. \end{aligned}$$

Como $\lambda_j^n P(e_j) = |P(e_j)|^{\frac{p}{p-n}}$, tenemos que

$$|\lambda_j^p||P(e_j)|^{\frac{p}{n}} = |P(e_j)|^{\frac{p}{n}\frac{p}{p-n}},$$

luego

$$|\lambda_j^p| = |P(e_j)|^{\frac{p}{n}(\frac{p}{p-n}-1)} = |P(e_j)|^{\frac{p}{p-n}}.$$

Asumiendo que $P(e_{j_0}) \neq 0$ para algún j_0 y tomando $k \geq j_0$ tenemos que

$$\big(\sum_{j=1}^k |P(e_j)|^{\frac{p}{p-n}}\big)^{\frac{p-n}{p}} = \|\big(P(e_j)_j\big)\|_{\ell_{\frac{p}{p-n}}} \leq \|P\|,$$

de donde se sigue el resultado. □

Observación 4.1.19. *Si P es un polinomio homogéneo e $(y_j) \in \ell_p$ es equivalente a (e_j) se tiene que $(P(y_j)) \in \ell_{\frac{p}{p-n}}$. En efecto, sea $T : \ell_p \to \ell_p$ lineal y continuo tal que $Te_j = y_j$. Podemos tomar $\lambda_j \in \mathbb{C}$ cumpliendo*

$$\lambda_j^n P(y_j) = |P(y_j)|^{\frac{p}{p-n}}.$$

Siguiendo la demostración de anterior, tenemos $\sum_{j=1}^k |P(y_j)|^{\frac{p}{p-n}} = \sum_{j=1}^k |P(Te_j)|^{\frac{p}{p-n}} \leq \|P\|\|T\|\big(\sum_{j=1}^k |\lambda_j|^p\big)^{\frac{n}{p}}$. En este caso se tiene que $\|(P(y_j))_j\| \leq \|P\|\|T\|$.

Veamos ahora que si $n < p$, todo polinomio continuo $P \in \mathcal{P}(^n\ell_p)$ es débil continuo sobre acotados de ℓ_p.

Demostración. (de la Proposición 4.1.13)
Sea $P \in \mathcal{P}(^n\ell_p)$ y sea $A : \ell_p^n \to \mathbb{C}$ la única n-lineal simétrica tal que $A(x^n) = P(x)$ para todo $x \in \ell_p$. Recordemos que

$$P(x) - P(y) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} A(y^r, (x-y)^{n-r})$$

para todo $x, y \in \ell_p$. Luego, como $A(y^r, (x-y)^{n-r})$ son polinomios $(n-r)$-homogéneos en la variable x para todo r, basta probar que $\mathcal{P}(^n\ell_p) \subseteq \mathcal{P}_{w0}(^n\ell_p)$. Supongamos que $P \notin \mathcal{P}_{w0}(^n\ell_p)$, entonces existe una sucesión $(w_j) \in B_{\ell_p}$ débil nula y un $\delta > 0$ tal que

$$|P(w_j)| > \delta.$$

Como P es continuo, $\|w_j\|$ no puede tender a cero y por lo tanto, considerando una subsucesión de ser necesario, podemos suponer que existe un $\gamma \in (0,1)$ tal que $\gamma < \|w_j\| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$.
Hacemos la siguiente construcción basada en el principio de selección de Bessaga-Pelczynski. Tomamos $n_1 = 1$ y elegimos $r_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(I - \pi_{r_1})w_{n_1}\| \leq \frac{\gamma}{2}$. Como (w_j) es débil nula y π_s es compacto para todo $s \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $n_2 > n_1$ tal que $\|\pi_{r_1} w_{n_2}\| \leq \frac{\gamma}{4}$. Además, como P es continuo, es posible elegir n_2 cumpliendo

$$|P((I - \pi_{r_1})w_{n_2})| \geq |P(w_{n_2})| - |P(\pi_{r_1} w_{n_2})| > \delta - \frac{\delta}{4} = \frac{3}{4}\delta.$$

Ahora elegimos $r_2 > r_1$ tal que $\|(I - \pi_{r_2})w_{n_2}\| \leq (\frac{\gamma}{2})^2$ y luego $n_3 > n_2$ tal que

$$\|\pi_{r_2} w_{n_3}\| \leq \frac{\gamma}{4}$$

y

$$|P((I - \pi_{r_2})w_{n_3})| > \frac{3}{4}\delta.$$

De esta forma, se contruyen dos sucesiones crecientes de números naturales, (r_k) y (n_k), cumpliendo simultáneamente

$$\|(I - \pi_{r_k})w_{n_k}\| \leq (\frac{\gamma}{2})^k,$$

$$\|\pi_{r_k} w_{n_{k+1}}\| \leq \frac{\gamma}{4},$$

y

$$|P((I - \pi_{r_k})w_{n_{k+1}})| > \frac{3}{4}\delta. \tag{4.4}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.
Si consideramos $y_k = (\pi_{r_k} - \pi_{r_{k-1}})w_{n_k}$, entonces $(y_k) \subseteq \ell_p$ y se tiene que

$$\|y_k - w_{n_k}\| = \|(\pi_{r_k} - \pi_{r_{k-1}})w_{n_k} - w_{n_k}\| \leq \|\pi_{r_{k-1}} w_{n_k}\| + \|(I - \pi_{r_k})w_{n_k}\| \leq \frac{\gamma}{4} + (\frac{\gamma}{2})^k \leq \frac{3\gamma}{4},$$

y, por lo tanto,

$$\|y_k\| > \gamma - \frac{3\gamma}{4} = \frac{\gamma}{4}.$$

Como $\|y_k\| \leq \|\pi_{r_k} - \pi_{r_{k-1}}\|\|w_{n_k}\| \leq 1$, usando la Proposición 4.1.17, tenemos que (y_k) es equivalente a (e_k), la base canónica de ℓ_p. Por lo tanto, por la Observación 4.1.19, $(P(y_k))_k \in \ell_{\frac{p}{p-n}}$.
Por último, si $u_k =: (I - \pi_{r_{k-1}})w_{n_k}$, recordando que $\|y_k\| \leq 1$ y $\gamma < 1$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} |P(u_k) - P(y_k)| & \leq & \sum_{r=0}^{n-1} \|A\|\|y_k\|^r\|u_k - y_k\|^{n-r} \\ & < & \sum_{r=0}^{n-1} \|A\|\|y_k\|\|(I - \pi_{r_k})\|^{n-r} \\ & \leq & \sum_{r=0}^{n-1} \|A\|(\frac{\gamma}{2})^{k(n-r)} \\ & \leq & M(\frac{\gamma}{2})^k. \end{array}$$

Luego $(P(u_k) - P(y_k))_k \in \ell_{\frac{p}{p-n}}$ al ser $\gamma < 1$.
Como $\ell_{\frac{p}{p-n}}$ es un espacio vectorial tenemos que $(P(u_k))_k \in \ell_{\frac{p}{p-n}}$, pero esto contradice (4.4) y por lo tanto P es débil continuo en acotados. □

4.2. Extensiones al bidual.

En general no existe una versión del teorema de Hahn-Banach para polinomios n-homogéneos si $n \geq 2$. Sin embargo, Aron y Berner mostraron en [AB] que es posible extender polinomios y operadores multilineales al bidual.

Si $\varphi \in X^*$ podemos definir $\overline{\varphi} \in X^{**}$, $\overline{\varphi}(z) = z(\varphi)$. Esta $\overline{\varphi}$ resulta ser una extensión, ya que si $x \in X$, entonces $\overline{\varphi}(\hat{x}) = \hat{x}(\varphi) = \varphi(x)$, donde $\hat{x}$ denota la inclusión de X en X^*. Además $\|\overline{\varphi}\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} \|\overline{\varphi}(z)\| = \sup\limits_{\|z\|\leq 1} \|z(\varphi)\| \leq \|\varphi\|$ y al ser $\overline{\varphi}$ una extensión se obtiene la igualdad de las normas. Esta misma extensión de φ se puede lograr por w^*-densidad. Esto es, si $z \in X^{**}$ y $x_\alpha \overset{w^*}{\to} z$, se define $\overline{\varphi}(z) = w^* - \lim \varphi(x_\alpha)$.

La idea para extender funciones multilineales es la misma.

Sea $A \in \mathcal{L}(^n X)$, sean $x_1, \ldots, x_{n-1} \in X$ fijos y sea $A_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \in X^*$ dada por

$$A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x) = A(x_1, \ldots, x_{n-1}, x).$$

Si $z \in X^{**}$ definimos $\overline{z} : \mathcal{L}(^n X) \to \mathcal{L}(^{n-1} X)$

$$\overline{z}(A)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = z(A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}).$$

Observación 4.2.1. *Observemos que si $x_1, \ldots, x_{n-1}, x \in B_X$, entonces $\|A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}(x)\| \leq \|A\|\|x_1\| \ldots \|x_{n-1}\|\|x\| \leq \|A\|$. Luego,*

$$\|\overline{z}(A)(x_1, \ldots, x_{n-1})\| = \|z(A_{x_1,\ldots,x_{n-1}})\| \leq \|z\|\|A_{x_1,\ldots,x_{n-1}}\| \leq \|z\|\|A\|,$$

y por lo tanto, $\|\overline{z}(A)\| \leq \|z\|\|A\|$.

Así, si A es n-lineal, vamos a definir $\overline{A} \in \mathcal{L}(^n X^{**})$ en la forma

$$\overline{A}(z_1, \dots, z_n) =: \overline{z}_1 \circ \dots \circ \overline{z}_n(A).$$

Observación 4.2.2. *En las condiciones de arriba se tiene:*

(i) $\overline{A}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = A(x_1, \dots, x_n)$ *para todo* $x_1, \dots, x_n \in X$ *y, por lo tanto,* $\overline{A}$ *es una extensión de* A.

(ii) $\|\overline{A}\| = \|A\|$.

(iii) $\overline{A}$ *es* w^**-continua en su primera variable.*

Demostración.
(i) Si $z = \hat{x}$, entonces $\overline{z}(A)(x_1, \dots, x_{n-1}) = \hat{x}(A_{x_1,\dots,x_{n-1}}) = A(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$. Obtenemos lo buscando aplicando esto n veces.
(ii) Por el punto anterior, $\overline{A}$ resulta ser una extensión de A y por lo tanto, $\|A\| \geq \|\overline{A}\|$. Por otro lado, por la Observación 4.2.1,

$$|\overline{A}(z_1, \dots, z_n)| = |\overline{z}_1 \circ \dots \circ \overline{z}_n(A)| \leq \|A\|$$

para todo $\|z_i\| \leq 1$.
(iii) Sea $(w_\alpha) \subseteq X$ y $w \in X^{**}$ tal que $w_\alpha \stackrel{w^*}{\to} w$, entonces

$$\overline{A}(w_\alpha, z_2, \dots, z_n) = w_\alpha(\underbrace{\overline{z}_2 \circ \dots \circ \overline{z}_n}_{\in X^*})(A) \to w(\overline{z}_2 \circ \dots \circ \overline{z}_n)(A) = \overline{A}(w, z_2, \dots, z_n),$$

completando la demostración. $\square$

En general, $\overline{A}$ es w^*-continua en la última variable que usamos para extender, es decir, si $\sigma \in S_n$, podemos definir

$$\overline{A}_\sigma(z_1, \dots, z_n) = \overline{z}_{\sigma(1)} \circ \dots \circ \overline{z}_{\sigma(n)}(A),$$

y esta sera w^*-continua en la variable $z_{\sigma(1)}$.

Definición 4.2.3. Para $A \in \mathcal{L}(^n X)$ se define su extensión canónica $\overline{A} \in \mathcal{L}(^n X^{**})$ por $\overline{A} = \overline{A}_{Id}$.

Para dar la extensión de un polinomio $P \in \mathcal{P}(^n X)$ a X^{**} tenemos que elegir una n-lineal que lo define. Es natural considerar la única n-lineal simétrica asociada a P. Si bien no es cierto que esta extensión resulte ser simétrica, aún si A lo fuera, tenemos la siguiente proposición que usaremos más adelante.

Proposición 4.2.4. *Sea $A \in \mathcal{L}(^nX)$ simétrica, y sea $\overline{A}$ su extesión canónica a X^*, entonces todo elemento de X conmuta con los de X^{**}, es decir*

$$\overline{A}(\hat{x}, z_2, \dots, z_n) = \overline{A}(z_2, \hat{x}, z_3, \dots, z_n) = \overline{A}(z_2, \dots, z_n, \hat{x}) \qquad \forall z_i \in X^{**}\ i = 2, \dots, n\ \forall\, x \in X.$$

Demostración. Por la definición de $\overline{A}$, basta probar que $\overline{\hat{x}} \circ z = z \circ \overline{\hat{x}}$ para todo $x \in X$, $z \in X^{**}$.
Observemos que si B es n-lineal, entonces $\overline{\hat{x}}(B) = B_x \in \mathcal{L}(^{n-1}X)$ con lo cual, para todo $A \in \mathcal{L}(^nX)$ tenemos

$$\begin{aligned} \overline{\hat{x}} \circ z(A)(x_1, \dots, x_{n-2}) &= (z(A))_x(x_1, \dots, x_{n-2}) \\ &= z(A)(x_1, \dots, x_{n-2}, x) \\ &= z(A_{x_1, \dots, x_{n-2}, x}) \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} z \circ \overline{\hat{x}}(A)(x_1, \dots, x_{n-2}) &= z \circ A_x(x_1, \dots, x_{x-2}) \\ &= z((A_x)_{x_1, \dots, x_{x-2}}) \\ &= z(A_{x, x_1, \dots, x_{n-2}}) \end{aligned}$$

Por último, como A es simétrica obtenemos la igualdad buscada. $\square$

Definición 4.2.5. Para $P \in \mathcal{P}(^nX)$ se define su extensión canónica $\overline{P} \in \mathcal{P}(^nX^{**})$ como $\overline{P}(z) =: \overline{A}(z^n)$ donde $\overline{A}$ es la extensión canónica de la única n-lineal simétrica asociada a P.

Notemos que si $\hat{x}^i_\alpha \xrightarrow{w^*} z^i$ para todo $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\overline{A}(z^1, \dots, z^n) = w^* - \lim_{\alpha_1} \dots \lim_{\alpha_n} A(x^1_{\alpha_1}, \dots, x^n_{\alpha_n})$$

y por lo tanto, si z es el w^*-límite de una red (x_α) tenemos que $\overline{P}(x_\alpha) \to \overline{P}(z)$.

Observación 4.2.6. *Dado P n-homogéneo, la extensión canónica $\overline{P}$ es una extensión de P y por lo tanto $P(B_X) \subseteq \overline{P}(B_{X^{**}})$, con lo cual, $\|P\| \leq \|\overline{P}\|$.*

A continuación mostramos que vale la igualdad de las normas.

Teorema 4.2.7. *(Davie-Gamelin)*
Sea $P \in \mathcal{P}(^nX)$ y sea $\overline{P}$ su extensión canónica, entonces $\|\overline{P}\| = \|P\|$.

Demostración. Por la observación anterior, $\|P\| \leq \|\overline{P}\|$.
Para mostrar la igualdad, basta probar que $\overline{P}(B_{X^{**}}) \subseteq \overline{P(B_X)}$.
Sea $z \in B_{X^{**}}$ y $\varepsilon > 0$, buscamos $x \in B_X$ tal que $|\overline{P}(z) - P(x)| \leq 2\varepsilon$.
Sea A la única n-lineal simétrica que representa a P y sea $\overline{A}$ su extensión de canónica.
Como B_X es w^*-densa en $B_{X^{**}}$ y $\overline{A}$ es w^*-continua en su primer variable, existe $x_1 \in B_X$ tal que

$$|\overline{A}(x_1, z^{n-1}) - \overline{A}(z^n)| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Por la proposición 4.2.3., los elementos de X conmutan con los de X^{**} para $\overline{A}$, con lo cual, podemos conseguir $x_2 \in B_X$ cumpliendo simultaneamente

$$|\overline{A}(x_1, x_2, z^{n-2}) - \overline{A}(x_1, z^{n-1})| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

y

$$|\overline{A}(x_2, z^{n-1}) - \overline{A}(z^n)| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Con el mismo razonamiento, podemos conseguir $x_3 \in B_X$ cumpliendo

$$|\overline{A}(x_3, z^{n-1}) - \overline{A}(z^n)| \leq \frac{\varepsilon}{n},$$
$$|\overline{A}(x_1, x_3, z^{n-2}) - \overline{A}(x_1, z^{n-1})| \leq \frac{\varepsilon}{n},$$
$$|\overline{A}(x_2, x_3, z^{n-2}) - \overline{A}(x_2, z^{n-1})| \leq \frac{\varepsilon}{n},$$

y

$$|\overline{A}(x_1, x_2, x_3, z^{n-3}) - \overline{A}(x_1, x_2, z^{n-2})| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

En general, conseguimos $x_1, \ldots, x_n \in B_X$ cumpliendo

$$|\overline{A}(x_j, z^{n-1}) - \overline{A}(z^n)| \leq \frac{\varepsilon}{n},$$

$$|\overline{A}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}, z^{n-r}) - \overline{A}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{r-1}}, z^{n-r+1})| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

para todo $r > 0$.

Con esto, si $j_1 < j_2 < \ldots < j_n$ se tiene que

$$\begin{array}{rcl} |\overline{A}(z^n) - \overline{A}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})| & \leq & |\overline{A}(z^n) - \overline{A}(x_{j_1}, z^{n-1})| + \\ & \ldots & + |\overline{A}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n-1}}) - \overline{A}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})| \\ & \leq & n.\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon. \end{array}$$

Sea $m \in \mathbb{N}$ y

$$x_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_j \in B_X.$$

Entonces,

$$\begin{array}{rcl} |\overline{P}(z) - P(x_m)| & = & |\overline{A}(z^n) - \overline{A}(\frac{1}{m} \sum_{j_1=1}^{m} x_{j_1}, \ldots, \frac{1}{m} \sum_{j_n=1}^{m} x_{j_n})| \\ & = & |\overline{A}(z^n) - \frac{1}{m^n} \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_n=1}^{m} A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})| \\ & \leq & \frac{1}{m^n} \sum_{j_1=1}^{m} \ldots \sum_{j_n=1}^{m} |\overline{A}(z^n) - A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})| \\ & = & \frac{1}{m^n} \sum_1 + \frac{1}{m^n} \sum_2 . \end{array}$$

donde $\sum_1$ es la suma en donde todos los subíndices son distintos y $\sum_2$ en donde algún subíndice se repite.
Si todos los subíndices son distintos, como A es simétrica, puedo elegirlos de forma tal que $j_1 < \ldots < j_n$ sin alterar el valor de $A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$, con lo cual por lo visto arriba $\frac{1}{m^n}\sum_1 \leq \frac{c_1}{m^n}\varepsilon$, donde c_1 es la cantidad de n-uplas de números distintos entre 1 y m, ordenadas en forma creciente. Como este número es menor estricto que m^n (todas las n-uplas) se tiene que $\frac{c_1}{m^n} \leq 1$.
Para las uplas en las que hay dos subíndices que se repiten, acotamos $\frac{1}{m^n}\sum_2 \leq \frac{c_2}{m^n}2\|A\|$. Donde c_2 es la cantidad de uplas en las que se repite algún subíndice.
Empleando un razonamiento combinatorio se puede calcular

$$c_2 = m^n - m(m-1)\ldots(m-(n-1))$$

pensando que son todas las uplas menos las que no se repiten.
Así, $\frac{c_2}{m^n} \to 0$ si $m \to \infty$ con lo cual, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que $|\overline{P}(z) - P(x_m)| \leq 2\varepsilon$. □

Proposición 4.2.8. *Sea $P \in \mathcal{P}_w(^nX)$ y sea $\overline{P}$ su extensión canónica. Entonces $\overline{P}$ es w^*-continua en acotados.*

Demostración. Sea $z \in X^{**}$ y sea $\varepsilon > 0$. Queremos probar que existen finitas funcionales $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in X^*$ y $\delta > 0$ tales que si $w \in W_{\varphi_1,\ldots,\varphi_m;\delta} =: \{w \in X^{**} : |(w-z)(\varphi_i)| \leq \delta \ \forall\ i = 1, \ldots, m\}$, entonces $|\overline{P}(z) - \overline{P}(w)| \leq \varepsilon$.
Sea $(x_\alpha) \subseteq B_X$ tal que $x_\alpha \overset{w^*}{\to} z$ y sea α_0 tal que si $\alpha > \alpha_0$, $|P(x_\alpha) - \overline{P}(z)| \leq \frac{\epsilon}{3}$.
Para este x_{α_0}, como P es débil continuo en acotados, existen $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ y $\delta > 0$ tal que si $y \in U =: \{y \in X : |\varphi_i(y - x_{\alpha_0})| \leq \delta \ \forall\ i = 1, \ldots, m\}$ entonces $|P(y) - P(x_{\alpha_0})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
Como $x_\alpha \overset{w^*}{\to} z$, existe $\alpha_1 > \alpha_0$ tal que $|(\hat{x}_{\alpha_1} - z)(\varphi_i)| \leq \frac{\delta}{3}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Consideramos $W = \{w \in X^{**}$ tal que $|(w - z)\ (\varphi_i)| \leq \frac{\delta}{3}, \forall i = 1, \ldots, m\}$.
Sean $w \in W$ e $(y_\alpha) \subseteq X$ tales que $y_\alpha \to w$, y sea $\alpha_2 > \alpha_1$ tal que $|\overline{P}(w) - P(y_{\alpha_2})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ y $|(\hat{y}_{\alpha_2} - w)(\varphi_i)| \leq \frac{\delta}{3}$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Entonces,

$$|\overline{P}(w)-\overline{P}(z)| \leq |\overline{P}(w)-P(y_{\alpha_2})|+|P(y_{\alpha_2})-P(x_{\alpha_1})|+|P(x_{\alpha_1})-\overline{P}(z)| \leq \frac{2\varepsilon}{3}+|P(y_{\alpha_2})-P(x_{\alpha_1})|.$$

Afirmamos que $y_{\alpha_2} \in U$. En efecto, si $1 \leq i \leq m$, $|\varphi_i(y_{\alpha_2} - x_{\alpha_1})| \leq |(\hat{y}_{\alpha_2} - w)(\varphi_i)| + |(w - z)(\varphi_i)| + |(z - \hat{x}_{\alpha_1})(\varphi_i)| \leq \delta$ pues $w \in W$. Luego $|P(y_{\alpha_2}) - P(x_{\alpha_1})| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Con esto queda demostrado que $\overline{P}$ es w^*-continuo. □

En el Capítulo 2, estudiamos cuándo $\mathcal{K}(X,Y)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X,Y)$. Al pasar a espacios de polinomios, el rol que tienen los operadores compactos, lo tienen los polinomios débil continuos sobre acotados. Una razón para esto es que si $n = 1$, $\mathcal{L}_w(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 4.2.9. *$\mathcal{L}_w(X,Y) = \mathcal{K}(X,Y)$ para todo X, Y espacios de Banach.*

Demostración. Sean T un operador compacto y $(x_\alpha) \subseteq X$ una red acotada débil nula. Entonces existe $x \in X$ y una subred (x_{α_γ}) tal que $T(x_{\alpha_\gamma}) \to T(x)$ y por lo tanto $T(x_{\alpha_\gamma}) \xrightarrow{w} T(x)$. Como T es continuo, entonces T es $w-w$-continuo y como x_α es débil nula, $T(x_{\alpha_\gamma}) \xrightarrow{w} 0$. Con lo cual $T(x) = 0$. Como esto vale para cualquier subred, resulta $T(x_\alpha) \to 0$.
Recíprocamente, sea T débil continuo, queremos probar que $\overline{T(B_X)}$ es compacto. Sea $(x_\alpha) \subseteq B_X$, como $B_{X^{**}}$ es w^*-compacto, existe (x_{α_γ}) una subred, tal que $(\hat{x}_{\alpha_\gamma})$ es w^*-convergente y por lo tanto w^*-Cauchy. Con lo cual, $x_{\alpha_\gamma} \subseteq X$ es w-Cauchy. Como T es débil continuo, manda redes w-Cauchy en redes de Cauchy. Luego $T(x_{\alpha_\gamma})$ converge. □

4.3. M-ideales en espacios de polinomios.

Comenzamos esta sección extendiendo las proposiciones 2.1.2 y 2.1.3 a la versión polinomial.

Proposición 4.3.1. *Sea X un espacio de Banach.*

(i) *Si $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es M-ideal y $E \subseteq X$ es un subespacio 1-complementado, entonces $\mathcal{P}_w(^nE) \subseteq \mathcal{P}(^nE)$ es un M-ideal.*

(ii) *La clase de los espacios de Banach para los cuales $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal, es cerrada con respecto a la distancia de Banach-Mazur.*

Demostración. Las demostraciones para estas proposiciones son análogas a las de la Proposición 2.1.2, teniendo en cuenta en (i) que la restricción de un polinomio débil continuo es débil continuo y en (ii) notando que si T_1, T_2 son isomorfismos y P débil continuo en acotados, entonces T_1PT_2 es también un polinomio débil continuo en acotados. □

Proposición 4.3.2. *Si $\mathcal{P}_w(^nX)$ es un M-sumando en $\mathcal{P}(^nX)$ entonces $\mathcal{P}_w(^nX) = \mathcal{P}(^nX)$.*

Demostración. La demostracion es similar que la Proposición 2.1.3 considerando $Q \in \mathcal{P}(^nX)$ en la forma $Q(x) = x^*(x)P(x)$ y notando que Q es débil continuo en acotados. □

La siguiente, es una versión polinomial de la Proposición 2.2.6. Para cada $x \in X$, consideramos $e_x \in \mathcal{P}(^nX)^*$ dado por $e_x(P) =: P(x)$ y se tiene que $\|e_x\| \leq \|x\|^n$.

Proposición 4.3.3. *Sea X un espacio de Banach.*

(i) *Sea $J \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ un subespacio tal que $P_f(^nX) \subseteq J$, entonces*

$$Ext(B_{J^*}) \subseteq \overline{\{\pm e_x : x \in S_X\}}^{w^*},$$

donde $\pm$ es necesario sólo en el caso real y w^* es la topología $\sigma(J^*, J)$.

(ii) *En el caso especial de (*i) en el que $J = \mathcal{P}_w(^nX)$ se tiene que

$$Ext(B_{J^*}) \subseteq \{\pm e_z : z \in S_{X^{**}}\},$$

donde $\pm$ es necesario sólo en el caso real.

Demostración. (i): Por el lema 2.2.5, basta probar que

$$B_{J^*} = \overline{co\{\pm e_x : x \in S_X\}}.$$

Sea $x \in S_X$. Entonces la aplicación e_x definida por $e_x(P) =: P(x)$, es de norma 1. Además, como $P_f(^nX) \subseteq J$, tenemos que los polinomios de la forma γ^n estan en J, con lo cual si tomamos $\gamma \in B_{X^*}$ tal que $|\gamma(x)| = \|x\| = 1$ tenemos la igualdad. Con esto, tenemos que $\overline{co\{\pm e_x : x \in S_X\}} \subseteq B_{J^*}$.
Para ver la otra inclusión, supongamos que existe $\varphi \in B_{J^*} \setminus \overline{c_o\{\pm e_x : x \in S_X\}}$. Por el teorema de separación de Hahn-Banach, existen $P \in \mathcal{P}(^nX)$, $\|P\| = 1$, y $r > s > 0$ tales que

$$\Re(\langle P, \xi\rangle) < s < r \leq \Re(\langle P, \varphi\rangle)$$

para todo $\xi \in \overline{c_o\{\pm e_x : x \in S_X\}}$. En particular si $\xi = sg(P(x))e_x$, con $x \in S_X$, resulta que

$$|P(x)| < s < r \leq \Re(\langle P, \varphi\rangle) \leq \|P\|\|\varphi\| \leq 1.$$

Luego, $\|P\| \leq s < 1$, llegando a un absurdo.
(ii): Sea $\phi \in Ext(B_{J^*})$. Por el item (i), existe una red $(x_\alpha) \subseteq S_X$ tal que $e_{x_\alpha} \overset{w^*}{\to} \phi$. Esta elección de signos es posible dado que, como $\|\phi\| = 1$, existe $P \in J$ tal que $\phi(P) > 0$. Luego, $e_{x_\alpha}(P) \to \phi(P) > 0$ y, por lo tanto, existen infinitos α para los cuales e_{x_α} no cambia de signo. Pasando por una subred, podemos suponer que $(\hat{x}_\alpha)$ converge en la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ a una elemento $z \in B_{X^{**}}$.
Por la Proposisión 4.2.8 tenemos que $\overline{P}(\hat{x}_\alpha) \to \overline{P}(z)$ para todo $P \in \mathcal{P}_w(^nX)$ y por lo tanto $e_{x_\alpha} \overset{w^*}{\to} e_z$, donde w^* es la topología $\sigma(J^*, J)$ con $J = \mathcal{P}_w(^nX)$. Como esta topología w^* es Hausdorff tenemos que $\phi = e_z$.
Por último, notemos que

$$1 = \|\phi\| = \|e_z\| = \|z\|^n.$$

$\square$

Usando la Proposición 4.2.9, podemos extender la Definición 2.2.1, como sigue.

Definición 4.3.4. Dado $P \in \mathcal{P}(^nX)$ se define su norma esencial por

$$\|P\|_e =: d(P, \mathcal{P}_w(^nX)) = \text{ínf}\{\|P - Q\| : Q \in \mathcal{P}_w(^nX)\}.$$

A continuación damos la versión polinomial de la Proposisión 2.2.8.

Proposición 4.3.5. *Supongamos que $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal y sea $P \in \mathcal{P}(^nX)$. Entonces $\|P\|_e = w(P)$ donde*

$$w(P) =: \sup\{\limsup |P(x_\alpha)| : \|x_\alpha\| = 1,\ x_\alpha \xrightarrow{w} 0\}.$$

Demostración. Sea $Q \in \mathcal{P}_w(^nX)$ y $(x_\alpha) \subseteq X$ una red acotada débil nula, $\|x_\alpha\| = 1$. Entonces

$$\|P - Q\| \geq |(P - Q)(x_\alpha)| \geq |P(x_\alpha)| - |Q(x_\alpha)|$$

y como Q es débil continuo en acotados tenemos que $\|P - Q\| \geq \limsup |P(x_\alpha)|$ y por lo tanto $\|P\|_e \geq w(P)$. Esto pasa independientemente de que $\mathcal{P}_w(^nX)$ sea un M-ideal.
Por el Corolario 2.2.4, existe $\psi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)^\perp})$ tal que $\psi(P) = \|P\|_e$. Por el Corolario 1.2.13 tenemos que $\psi \in Ext(B_{\mathcal{P}(^nX)^*})$ y, por la Proposición 4.3.3 (i), $\psi \in \overline{\{\pm e_x : x \in S_X\}}^{w^*}$, acá w^* es la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$.
Entonces, existe una red $(x_\alpha) \in S_X$ tal que $e_{x_\alpha} \xrightarrow{w^*} \psi$. Pasando por una subred, podemos suponer que $e_{x_\alpha} \xrightarrow{w^*} z$ para algún $z \in B_{X^{**}}$.
Ahora, si $\gamma \in X^*$, entonces $\gamma^n \in \mathcal{P}_w(^nX)$ y por lo tanto, como $\psi \in P_w(^nX)^\perp$,

$$0 = \psi(\gamma^n) = \lim_\alpha (\gamma(x_\alpha))^n = (z(\gamma))^n,$$

con lo cual $z = 0$ y por lo tanto (x_α) es débil nula.
Así

$$\|P\|_e = \psi(P) = \lim_\alpha\ e_{x_\alpha}(P) = \lim_\alpha P(x_\alpha) \leq w(P),$$

completando la demostración. □

Corolario 4.3.6. *Si $\mathcal{P}_w(^nX)$ es un M-ideal en $\mathcal{P}(^nX)$, entonces $\mathcal{P}_w(^nX) = \mathcal{P}_{w0}(^nX)$.*

Demostración. Si P es débil continuo en $x = 0$, entonces $\|P\|_e = w(P) = 0$ y por lo tanto P es débil continuo. □

El teorema de Bishop-Phelps, afirma que las funcionales que alcanzan la norma son densas en X^*. Aron, García y Maestre probaron en [AGM] que los polinomios 2-homogéneos cuyas extensiones canónicas alcanzan la norma, son densos en $\mathcal{P}(^2X)$. Es un problema abierto saber si este resultado se puede generalizar para polinomios n-homogéneos en general. Sin embargo, con la fuerte condición de que $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ sea un M-ideal, tenemos la siguiente proposición, que resulta ser la versión polinomial de la Proposición 2.2.9.

Proposición 4.3.7. *Sea X un espacio de Banach, tal que $\mathcal{P}_w(^nX)$ es un M-ideal en $\mathcal{P}(^nX)$, entonces:*

(i) *Si P es un polinomio tal que su extensión canónica $\overline{P}$ no alcanza la norma en $B_{X^{**}}$, entonces $\|P\|_e = \|P\|$.*

(ii) *El conjunto de los polinomios $P \in \mathcal{P}(^nX)$ cuya extensión canónica no alcanza la norma es nunca denso en $\mathcal{P}(^nX)$.*

Demostración. (i): Sea $\phi \in Ext(B_{\mathcal{P}(^nX)^*})$ tal que $\phi(P) = \|P\|$. Por el Corolario 1.2.13, tenemos que $\phi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*})$ o $\phi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)}\perp)$. Si $\phi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*})$, por Propocisión 4.3.3 (ii), resulta que $\phi = \pm e_z$ con $z \in X^{**}$, $\|z\| = 1$. Así,

$$\|\overline{P}\| = \|P\| = \phi(P) = |\overline{P}(z)|,$$

y por lo tanto, $\overline{P}$ alcanza su norma.
Como esto no es posible, $\phi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)}\perp)$ y por lo tanto

$$\|P\| = \phi(P) = \sup\{|\xi(P)| : \xi \in Ext(B_{\mathcal{P}_w(^nX)^\perp}))\} = \|P\|_e.$$

(ii): Por (i), el conjunto de los polinomios cuya extensión canónica no alcanza la norma, esta incluído en

$$F = \{P \in \mathcal{P}(^nX) : \|P\| = \|P\|_e\}.$$

Como este conjunto es cerrado, basta probar que tiene interior vacío. Por [HWW, Proposición II.1.11.], esto pasa si y sólo si

$$\text{ínf}\{\sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*}} |\phi(P)| : \|P\|_e = 1\} = 1.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*}} |\phi(P)| &\leq \sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}(^nX)^*}} |\phi(P)| \\
&= \|P\| \\
&= \sup_{x \in B_X} |P(x)| \\
&= \sup_{x \in B_X} |(e_x(P))| \\
&\leq \sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*}} |\phi(P)|.
\end{aligned}$$

Con lo cual

$$\text{ínf}\{\sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*}} |\phi(P)| : \|P\|_e = 1\} = \text{ínf}\{\|P\| : \|P\|_e = 1\}.$$

Pero $1 = \|P\|_e \leq \|P\|$ siempre y si $P \in F$ conseguimos

$$\text{ínf}\{\sup_{\phi \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)^*}} |\phi(P)| : \|P\|_e = 1\} = 1.$$

□

Al trabajar con espacios de polinomios, el hecho de que $\mathcal{P}_w(^nX)$ sea un M-ideal en $\mathcal{P}(^nX)$, condiciona el valor de $n \in \mathbb{N}$ (Corolario 4.3.9). Esto nos restringe al momento de buscar M-estructuras en $\mathcal{P}(^nX)$. Se tiene la siguiente situación.

Proposición 4.3.8.

(i) $\mathcal{P}_w({}^nX) \subseteq \mathcal{P}_{w0}({}^nX)$.

(ii) *Si* $\mathcal{P}_w({}^kX) = \mathcal{P}({}^kX)$ *para todo* $1 \leq k < n$ *entonces* $\mathcal{P}_w({}^nX) = \mathcal{P}_{w0}({}^nX)$.

(iii) *Si existe un polinomio n-homogéneo que no es débil continuo en algún punto* $x \neq 0$, *entonces* $\mathcal{P}_{w0}({}^{n+k}X) \neq \mathcal{P}_w({}^{n+k}X)$ *para todo* k.

Demostración.
(i): Trivial por definición.
(ii): Sea $P \in \mathcal{P}_{w0}({}^nX)$ y $x_\alpha \overset{w}{\to} x$. Entonces, por la Proposición 4.1.16,

$$P(x_\alpha) - P(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} A((x_\alpha - x)^k, x^{n-k}) = P(x_\alpha - x) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} A((x_\alpha - x)^k, x^{n-k}).$$

Obtenemos lo buscado notando que $x_\alpha - x \overset{w}{\to} 0$ y, para todo $1 \leq k < n$,

$$A((x_\alpha - x)^k, x^{n-k}) \in \mathcal{P}({}^{n-k}X) = \mathcal{P}_w({}^{n-k}X)$$

(iii): Sea P un polinomio que no es w-continuo en $x \neq 0$. Consideremos $\gamma \in X^*$ tal que $\gamma(x) \neq 0$ y $Q(x) = \gamma^k(x)P(x) \in \mathcal{P}({}^{n+k}X)$. Veamos que Q no es débil continuo en x. Sea (x_α), tal que $x_\alpha \overset{w}{\to} x$ pero $P(x_\alpha) \nrightarrow P(x)$ y supongamos que $Q(x_\alpha) \to Q(x)$. Podemos suponer, considerando subredes, que $\gamma(x_\alpha) \neq 0$ para todo α.
Así, $P(x_\alpha) = \frac{Q(x_\alpha)}{\gamma^k(x_\alpha)} \to \frac{\gamma^k(x)P(x)}{\gamma^k(x)}$ lo que contradice la elección de (x_α). □

Con lo visto hasta ahora tenemos el siguiente corolario, que usaremos constantemente en lo que sigue.

Corolario 4.3.9. Sea X un espacio de Banach, entonces $\mathcal{P}_w({}^kX) = \mathcal{P}_{w0}({}^kX) = \mathcal{P}({}^kX)$ para todo k o existe un único n tal que

- $\mathcal{P}_w({}^kX) = \mathcal{P}_{w0}({}^kX) = \mathcal{P}({}^kX)$ para todo $k < n$.
- $\mathcal{P}_w({}^nX) = \mathcal{P}_{w0}({}^nX) \subsetneqq \mathcal{P}({}^nX)$.
- $\mathcal{P}_w({}^kX) \subsetneqq \mathcal{P}_{w0}({}^kX) \subseteq \mathcal{P}({}^kX)$ para todo $k > n$.

Cuando este único n existe, decimos que n es el grado crítico de X y lo notamos $n = cd(X)$. Así, si existe un polinomio en X que no es débil continuo, resulta que

$$cd(X) = min\{k : \mathcal{P}_w({}^kX) \neq \mathcal{P}({}^kX)\}.$$

Si $n = 1$, entonces $\mathcal{P}({}^1X) = X^* = \mathcal{P}_w({}^1X)$ y por lo tanto, $cd(X) \geq 2$ para todo espacio de Banach X.

Ejemplo 4.3.10. Si H es un espacio de Hilbert y (e_α) es una base ortonormal, entonces el polinomio

$$P(x) = \sum_\alpha < x, e_\alpha >^2$$

es continuo pero no débil continuo en acotados. Luego, $cd(H) \leq 2$ y por lo tanto, $cd(H) = 2$ para todo espacio de Hilbert H.

Ejemplo 4.3.11. Si $X = \ell_p$, entonces $cd(\ell_p)$ es el único número n_0 que cumple $p \leq n_0 < p+1$.
En efecto, si $k \geq p$ podemos considerar el polinomio $P(x) = \sum x_j^k$. Como $e_j \overset{w}{\to} 0$ y $P(e_j) = 1$ para todo j, tenemos que este polinomio no es débil continuo en acotados. Pero como $k \geq p$, P resulta ser continuo y $cd(\ell_p) \leq n_0$.
Si $k < p$ vimos, en el Ejemplo 4.1.13, que $\mathcal{P}(^n\ell_p) = \mathcal{P}_w(^n\ell_p)$ y, por lo tanto, $cd(\ell_p) = n_0$ donde $p \leq n_0 < p+1$.

Ejemplo 4.3.12. Sea $X = d^*(w,p)$ el espacio dual de un espacio de Lorentz y sea $n-1$ el mayor número natural estríctamente más chico que p^* donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. Supongamos que $w \notin \ell_s$ donde $s = (\frac{(n-1)^*}{p})^*$. Entonces [JSP, Proposición 2.4.] muestra que $n = cd(X)$.

4.4. Aproximaciones compactas.

En esta sección, estudiaremos como usar las SCAI (Definición 3.2.2) para ayudarnos a ver cuándo $\mathcal{P}_w(^nX)$ es un M-ideal, y veremos algunos ejemplos que surgirán a partir del Corolario 4.4.3. En este caso, por el Corolario 4.3.9, necesitamos la condición $n = cd(X)$.

Lema 4.4.1. *Sea X un espacio de Banach, y sea $(S_\alpha) \subseteq \mathcal{L}(X)$ tal que $S_\alpha^*\gamma \to \gamma$ para todo $\gamma \in X^*$. Entonces, para todo $P \in \mathcal{P}_w(^nX)$, $\|P - P \circ S_\alpha\| \to 0$.*

Demostración. Como S_α^* converge puntualmente a la identidad, entonces existe $C > 0$ al que $\|S_\alpha\| = \|S_\alpha^*\| \leq C$ para todo α.
Para todo espacio de Banach Y y todo $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ operador compacto,

$$\|K^* - K^* \circ S_\alpha^*\| \to 0,$$

Con lo cual, si $P \in \mathcal{P}_w(^nX)$ su operador asociado T_P es compacto y por lo tanto, para todo $\|x\| \leq 1$,

$$\begin{array}{rcl} |P(x) - P \circ S_\alpha(x)| & = & \sum \binom{n}{k} A((x - S_\alpha(x))^k, S_\alpha(x)^{n-k}) \\ & \leq & \sum \binom{n}{k} |T_P(x - S_\alpha(x))((x - S_\alpha(x))^{k-1}, S_\alpha(x)^{n-k}) \\ & \leq & \sum \binom{n}{k} \|T_P - T_P \circ S_\alpha\| \|I - S_\alpha\|^{k-1} \|S_\alpha\|^{n-k} \|x\|^n \\ & \leq & \sum \binom{n}{k} \|T_P - T_P \circ S_\alpha\| (1+C)^{k-1} C^{n-k}, \end{array}$$

que tiende a cero independientemente de $x \in B_X$. □

Proposición 4.4.2. *Sea X un espacio de Banach, $n = cd(X)$, y sea (K_α) una red acotada de operadores compactos de X en X satisfaciendo*

- $K_\alpha^*\gamma \to \gamma$ *para toda* $\gamma \in X^*$.
- *Para todo* $\varepsilon > 0$ *y todo* α_0, *existe* $\alpha > \alpha_0$ *tal que para todo* $x \in X$

$$\|K_\alpha x\|^n + \|x - K_\alpha x\|^n \leq (1+\varepsilon)\|x\|^n.$$

Entonces, $\mathcal{P}_w(^nX)$ *es un* M*-ideal en* $\mathcal{P}(^nX)$.

Demostración. Vamos a verificar la *3-ball property* para $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$. Sean P_1, P_2, $P_3 \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)}$, $Q \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$ y $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $P \in \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que

$$\|Q + P_i - P\| \leq 1 + \varepsilon \qquad \text{para } i = 1, 2, 3. \tag{4.5}$$

Por la proposición anterior, podemos elegir un α_0 tal que si $\alpha > \alpha_0$

$$\|P_i - P_i \circ K_\alpha\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } i = 1, 2, 3.$$

y

$$\|K_\alpha x\|^n + \|x - K_\alpha x\|^n \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2})\|x\|^n \qquad \text{para todo } x \in X.$$

Consideramos el polinomio $P \in \mathcal{P}(^nX)$

$$P(x) = Q(x) - Q(x - K_\alpha x)$$

Vamos a ver que P es débil continuo en acotados y satisface (4.5). Como $n = cd(X)$ basta ver que P es débil continuo en $x = 0$.

Sea $(x_\beta) \subseteq X$ una red acotada débil nula. Como K_α es compacto, existen una subsubred x_{β_γ} e $y \in X$ tal que $\lim_\gamma K_\alpha(x_{\beta_\gamma}) = y$. Entonces $K_\alpha(x_{\beta_\gamma}) \xrightarrow{w} y$. Como K_α es continuo, entonces es $w-w$-continuo y resulta $y = 0$ al ser x_α débil nula. Luego, $K_\alpha(x_\beta) \to 0$ cuando $\beta \to \infty$.

Sea B es la n-lineal simétrica tal que $Q(x) = B(x^n)$. Entonces, por la Proposición 4.1.16,

$$\begin{aligned} |P(x_\beta)| &= |Q(x_\beta) - Q(x_\beta - K_\alpha x_\beta)| \\ &\leq \sum \tbinom{n}{k} B((K_\alpha x_\beta)^k, (x_\beta - K_\alpha x_\beta)^{n-k}) \\ &\leq \sum \tbinom{n}{k} \|B\| \|K_\alpha x_\beta\|^k ((1 + C_1)C_2)^{n-j} \to 0, \end{aligned}$$

donde C_1 es la constante que acota a $(K_\alpha)_\alpha$ y C_2, la que acota a $(x_\beta)_\beta$. Luego P es débil continuo en $x = 0$. Veamos que verifica (4.5)

Sea $x \in B_X$, entonces, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe un α tal que

$$\begin{aligned} \|(Q + P_i \circ K_\alpha - P)x\| &= \|Q(x - K_\alpha x) + P_i(K_\alpha x)\| \\ &\leq \|K_\alpha x\|^n + \|x - K_\alpha x\|^n \\ &\leq 1 + \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Con lo cual $\|Q + P_i \circ K_\alpha - P\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ y por lo tanto, si $i = 1, 2, 3$, se tiene que

$$\|Q + P_i - P\| \leq \| \leq \|Q + P_i \circ K_\alpha - P\| + \|P_i - P_i \circ K_\alpha\| \leq 1 + \varepsilon$$

como queríamos ver. $\square$

Un caso particular en el que se cumplen la primera condición de la Proposición 4.4.2 es cuando el espacio de Banach posee una descomposición achicante de espacios de dimensión finita. Dado un espacio de Banach X, diremos que la sucesión de subespacios cerrados $\{X_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una *descomposición de Schauder* para X (o simplemente una descomposición para X) si todo $x \in X$ tiene una única representación de la forma $x = \sum_{j=1}^{\infty} u_j$ con $u_j \in X_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Si todos los subespacios X_j tienen dimensión finita, decimos que X posee una descomposición de espacios de dimensión finita. Por último, vamos a decir que la descomposición es achicante si para todo $\varphi \in X^*$ se tiene que $\lim_k \|\varphi|_{[X_j : j>k]}\| = 0$.

Corolario 4.4.3. *Sea X una espacio de Banach con una descomposición achicante de espacios de dimensión finita, con proyecciones π_j tales que para todo $\varepsilon > 0$ y j_0, existe $j > j_0$ satisfaciendo*

$$\|\pi_j x\|^n + \|x - \pi_j x\|^n \leq (1 + \varepsilon)\|x\|^n \qquad \forall x \in X.$$

Si $n = cd(X)$, entonces $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal.

Ejemplo 4.4.4. En el Ejemplo 4.3.10 vimos que $cd(H) = 2$ para todo espacio de Hilbert H. Las proyecciones asociadas a la base (e_α) cumplen las hipótesis del corolario anterior y por lo tanto, $\mathcal{P}_w(^2H) \subseteq \mathcal{P}(^2H)$ es un M-ideal para todo H espacio de Hilbert.

Ejemplo 4.4.5. En el Ejemplo 4.3.11 se vió que $cd(\ell_p)$ es el único número natural n_0 cumpliendo $p \leq n_0 < p + 1$. Como las proyecciones en las primeras coordenadas cumplen las hipótesis del Corolario 4.4.3, $\mathcal{P}_w(^{n_0}\ell_p)$ es un M-ideal en $\mathcal{P}(^{n_0}\ell_p)$.

Ejemplo 4.4.6. Sea $X = d^*(w, p)$ el espacio dual de un espacio de Lorentz. Sabemos por Ejemplo 4.3.12 que si $s = (\frac{(n-1)^*}{p})^*$ y $w \notin \ell_s$ entonces $cd(X) = n$ cumple que $n - 1$ es el mayor número natural estrictamente más chico que p^*. Para este n, se tiene que $\mathcal{P}_w(^nX)$ es un M-ideal en $\mathcal{P}(^nX)$. En efecto, $d^*(w, p)$ tiene una base achicante de Schauder (e_j). Si elejimos (π_m) las proyecciones

$$\pi_m(x) = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$$

tenemos que

$$\|\pi_m x\|^n + \|x - \pi_m x\|^n \leq (\|\pi_m x\|^{p^*} + \|x - \pi_m x\|^{p^*})^{\frac{n}{p^*}},$$

donde la última desigualdad se debe a que $n \geq p^*$.

4.5. Propiedad (M) para polinomios.

En el Capítulo 3, introdujimos la propiedad (M), junto con la propiedad (M^*) y vimos que existía una relación entre la teoría de M-ideales y estas propiedades. Al trabajar con espacios de polinomios, obtenemos una equivalencia (Teorema 4.5.8) que relaciona nuevamente ambos conceptos. Para ello se define una versión polinomial de la propiedad (M); pero antes necesitamos algunos resultados.

Lema 4.5.1. *Si $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal entonces, para todo $P \in \mathcal{P}(^nX)$ existe una red acotada $(P_\alpha) \subseteq \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que $\overline{P}_\alpha(z) \to \overline{P}(z)$ para todo $z \in X^{**}$.*

Demostración. Por [HWW, Remark I.1.13] tenemos que $B_{\mathcal{P}_w(^nX)}$ es $\sigma(\mathcal{P}(^nX), \mathcal{P}_w(^nX)^*)$ densa en $B_{\mathcal{P}(^nX)}$, con lo cual para $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$, existe $(P_\alpha) \subseteq \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que $P_\alpha \to P$ en la topología $\sigma(\mathcal{P}(^nX), \mathcal{P}_w(^nX)^*)$. El resultado se obtiene al notar que, para $z \in X^{**}$ la aplicación $e_z : \mathcal{P}_w(^nX) \to \mathbb{K}$ dada por $e_z(P) =: \overline{P}(z)$ es un elemento de $\mathcal{P}_w(^nX)^*$. En efecto, e_z es lineal y cumple $|e_z(P)| = |\overline{P}(z)| \leq \|\overline{P}\|\|z\|^n = \|P\|\|z\|^n$ para todo $z \in B_{X^{**}}$. $\square$

La siguiente proposición es necesaria para demostrar el Teorema 4.5.3

Proposición 4.5.2. *Sea X un espacio de Banach y sea $J \subseteq X$ un M-ideal. Entonces para todo $x \in X$ existe red $(x_\alpha) \subseteq J$ tal que $x_\alpha \to x$ en la topología $\sigma(X, J^*)$ cumpliendo*

$$\limsup \|z + (x - x_\alpha)\| \leq \max\{\|z\|, \|z + J\| + \|x\|\} \qquad \forall z \in X.$$

Una demostración de esto se puede ver en [W, Proposición 2.3]

Teorema 4.5.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ *es un M-ideal.*

(ii) *Dado $P \in \mathcal{P}(^nX)$, existe una red $(P_\alpha) \subseteq \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que para todo $z \in X^{**}$, $\overline{P}_\alpha(z) \to \overline{P}(z)$ y*

$$\limsup \|Q + P - P_\alpha\| \leq \max\{\|Q\|, \|Q\|_e + \|P\|\} \qquad \forall\ Q \in \mathcal{P}(^nX).$$

(iii) *Dado $P \in \mathcal{P}(^nX)$, existe una red $(P_\alpha) \subseteq \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que para todo $z \in X^{**}$, $\overline{P}_\alpha(z) \to \overline{P}(z)$ y*

$$\limsup \|Q + P - P_\alpha\| \leq \max\{\|Q\|, \|P\|\} \qquad \forall\ Q \in \mathcal{P}_w(^nX).$$

Demostración. Por el Lema 4.5.1 y la Proposición 4.5.2 tenemos que (i) implica (ii). Además obtenemos (iii) de (ii) notando que si $Q \in \mathcal{P}_w(^nX)$ entonces $\|Q\|_e = 0$.
Para ver que (iii) implica (i), chequeamos la *3-ball property*. Sean P_1, P_2, $P_3 \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)}$

y $Q \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$. Por (ii) existe una red $(Q_\alpha) \subseteq \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que $\overline{Q}_\alpha(z) \to \overline{Q}(z)$ para todo $z \in X^{**}$ y para todo $i = 1, 2, 3$,

$$\limsup \|Q + P_i - Q_\alpha\| \leq \max\{\|Q\|, \|P_i\|\} \leq 1.$$

Fijo P_1, dado $\varepsilon > 0$, podemos entontrar una subred $Q_{\tilde{\alpha}}$ de Q_α tal que

$$\|Q + P_1 - Q_{\tilde{\alpha}}\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Ahora, partiendo de esta subred procedemos de igual manera con P_2 y luego con P_3. $\square$

Ahora sí estamos en condiciones de definir la propiedad (M) para polinomios en conjunto con la propiedad (M) n-polinomial para espacios de Banach X.

Definición 4.5.4. Decimos que un polinomio $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$ tiene la propiedad (M) si para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in X$ tal que $|\lambda| \leq \|v\|^n$ y toda red acotada $(x_\alpha) \subseteq X$ débil nula, se tiene que

$$\limsup |\lambda + P(x_\alpha)| \leq \limsup \|v + x_\alpha\|^n.$$

Definición 4.5.5. Decimos que un espacio de Banach X tiene la propiedad (M) n-polinomial si todo $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$ tiene la propiedad (M).

Extendiendo el Lema 3.1.3 (iv) para la versión polinomial obtenemos el siguiente resultado cuya demostración es análoga a la ya mostrada.

Lema 4.5.6. *Sea $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$ con la propiedad (M) y sea (v_α) una red contenida en un conjunto compacto de X. Entonces, para toda red $(\lambda_\alpha) \subseteq \mathbb{K}$ tal que $|\lambda_\alpha| \leq \|v_\alpha\|^n$ para todo α y toda red acotada $(x_\alpha) \subseteq X$ débil nula, se tiene que*

$$\limsup |\lambda_\alpha + P(x_\alpha)| \leq \limsup \|v_\alpha + x_\alpha\|^n.$$

Proposición 4.5.7. *Sea X un espacio de Banach, $n = cd(X)$ y supongamos que $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal. Entonces X tiene la propiedad (M) n-polinomial.*

Demostración. Sea $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$, $v \in X$ y λ tal que $|\lambda| \leq \|v\|^n$, y sea (x_α) una red acotada débil nula. Tomamos $Q \in \mathcal{P}_w(^nX)$, $\|Q\| \leq 1$ tal que $Q(v) = \lambda$ y $\varepsilon > 0$.
Por el Teorema 4.5.3 (iii), existe un polinomio $R \in \mathcal{P}_w(^nX)$ tal que

$$|P(v) - R(v)| \leq \varepsilon \qquad y \qquad \|Q + P - R\| \leq 1 + \varepsilon.$$

Como $Q(v + x_\alpha) \to Q(v)$ y $R(x_\alpha) \to 0$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\limsup |\lambda + P(x_\alpha)| &= \limsup |Q(v) + P(x_\alpha)| \\
&= \limsup |Q(v + x_\alpha) + (P - R)(x_\alpha)| \\
&\leq \limsup |Q(v + x_\alpha) + (P - R)(x_\alpha) + (P - R)(v)| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sea A la única n-lineal simétrica que representa a $(P-R)$.
Entonces, como $n = cd(X)$, por el Corolario 4.3.9, para todo $1 \leq k \leq n-1$, $\mathcal{P}(^kX) = \mathcal{P}_w(^kX)$ y, por lo tanto,

$$|(P-R)(v+x_\alpha) - [(P-R)(v) + (P-R)(x_\alpha)]| = |\sum_{j=1}^{n-1} A(v^j, x_\alpha^{n-j})| \to 0.$$

Luego,

$$\text{lím sup}\,|\lambda + P(x_\alpha)| \leq \text{lím sup}\,|Q(v+x_\alpha) + (P-R)(v+x_\alpha)| + \varepsilon \leq (1+\varepsilon)\,\text{lím sup}\,\|v+x_\alpha\|^n + \varepsilon.$$

El resultado se obtiene entonces haciendo $\varepsilon \to 0$. □

El siguiente teorema es la versión polinomial de las equivalencias entre (i) y (v) del Teorema 3.2.3

Teorema 4.5.8. *Sea X un espacio de Banach y sea (K_α) una SCAI tal que $\|I - 2K_\alpha\| \to 1$ y sea $n = cd(X)$. Entonces $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal si y sólo si X tiene la propiedad (M) n-polinomial.*

Demostración. La proposición anterior nos da una de las implicaciones. Para probar la recíproca, verifiquemos la *3-ball property*. Sean P_1, P_2, $P_3 \in B_{\mathcal{P}_w(^nX)}$, $Q \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$, $\varepsilon > 0$ y sea $P(x) =: Q(x) - Q(x - K_\alpha x)$. Como en la demostración de la Proposición 4.4.2 se puede ver que P es débil continuo en acotados. Por el Lema 4.4.1 podemos elegir β tal que

$$\|I - 2K_\beta\|^n \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad y \qquad \|P_i - P_i \circ K_\beta\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad i = 1, 2, 3.$$

Como

$$\|Q + P_i - P\| \leq \|Q + P_i \circ K_\beta - P\| + \|P_i - P_i \circ K_\beta\| \leq \|P_i \circ K_\beta + Q \circ (I - K_\alpha)\| + \frac{\varepsilon}{2},$$

basta ver que $\|P_i \circ K_\beta + Q \circ (I - K_\alpha)\| \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$.
Sea $(x_\alpha) \subseteq B_X$ tal que

$$\|P_1 \circ K_\beta + Q \circ (I - K_\alpha)\| = |P_1(K_\beta x_\alpha) + Q(x_\alpha - K_\alpha x_\alpha)|.$$

Notemos que $|P_1(K_\beta x_\alpha)| \leq \|K_\beta x_\alpha\|^n$, $(K_\beta x_\alpha)_\alpha$ está contenida en un conjunto compacto y, como (K_α) es una SCAI, tenemos que $(x_\alpha - K_\alpha x_\alpha)$ es una red acotada débil nula. Luego, por el Lema 4.5.6, tenemos que

$$\begin{aligned}
\text{lím sup}\,|P_1(K_\beta x_\alpha) + Q(x_\alpha - K_\alpha x_\alpha)| &\leq \text{lím sup}\,\|K_\beta x_\alpha + x_\alpha - K_\alpha x_\alpha\|^n \\
&\leq \text{lím sup}\,\|K_\beta + I - K_\alpha\|^n \\
&\leq \|I - 2K_\beta\|^n \leq 1 + \tfrac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad proviene de la demostración $(v) \Rightarrow (i)$ del Teorema 3.2.3. □

Proposición 4.5.9. *Sea X un espacio de Banach y sea $n = cd(X)$. Si X tiene la propiedad (M), entonces X tiene la propiedad (M) n-polinomial.*

Demostración. Sea $P \in B_{\mathcal{P}(^nX)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in X$ tal que $|\lambda| \leq \|v\|^n$ y sea (x_α) una red acotada débil nula. Queremos probar que

$$\limsup |\lambda + P(x_\alpha)| \leq \limsup \|v + x_\alpha\|^n. \tag{4.6}$$

Supongamos primero que $\|P\| = 1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $u_\varepsilon \in X$ tal que $P(u_\varepsilon) = \lambda(1-\varepsilon)$ y $\|u_\varepsilon\| \leq |\lambda|^{\frac{1}{n}} \leq \|v\|$. En efecto sea $y_\varepsilon \in B_X$ tal que $|P(y_\varepsilon)| > 1-\varepsilon$ y sea $0 < r < 1$ tal que $r^n|P(y_\varepsilon)| = 1-\varepsilon$. Luego, si $\sigma = sg(P(y_\varepsilon))$ entonces $u_\epsilon = \lambda^{\frac{1}{n}}\sigma r y_\varepsilon$ sirve.
Así

$$\begin{aligned}
\limsup |\lambda + P(x_\alpha)| &\leq \limsup |P(u_\varepsilon) + P(x_\alpha)| + \varepsilon|\lambda| \\
&= \limsup |P(u_\varepsilon - x_\alpha)| + \varepsilon|\lambda| \\
&\leq \|P\| \limsup \|u_\varepsilon + x_\alpha\|^n + \varepsilon|\lambda| \\
&\leq \limsup \|v + x_\alpha\|^n + \varepsilon|\lambda|,
\end{aligned}$$

donde la igualdad vale por ser $n = cd(X)$ y la última desigualdad se debe a que X tiene la propiedad (M). Luego tenemos (4.6) para todo $\|P\| = 1$. Ahora, si $\|P\| < 1$, $(\lambda + P(x_\alpha))$ es una combinación convexa de $(\lambda + \frac{P}{\|P\|}(x_\alpha))$ y $(\lambda - \frac{P}{\|P\|}(x_\alpha))$. En efecto, tomando $\xi = \frac{1+\|P\|}{2}$ se tiene que

$$\xi\big(\lambda + \frac{P}{\|P\|}(x_\alpha)\big) + (1-\xi)\big(\lambda - \frac{P}{\|P\|}(x_\alpha)\big) = \lambda + P(x_\alpha).$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\limsup |\lambda + P(x_\alpha)| &\leq \max\{\limsup |\lambda + \tfrac{P}{\|P\|}(x_\alpha)|; \limsup |\lambda - \tfrac{P}{\|P\|}(x_\alpha)|\} \\
&\leq \limsup \|v + x_\alpha\|^n,
\end{aligned}$$

como queríamos ver. □

Corolario 4.5.10. *Sea X un espacio de Banach y $n = cd(X)$. Si $\mathcal{K}(X)$ es un M-ideal en $\mathcal{L}(X)$, entonces $\mathcal{P}_w(^nX) \subseteq \mathcal{P}(^nX)$ es un M-ideal.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.3, X tiene la propiedad (M) y existe una SCAI (K_α) tal que $\|I - 2K_\alpha\| \to 1$. El resultado se obtiene entonces a partir del Teorema 4.5.8 y la Proposición 4.5.9. □

La recíproca no es cierta. Un contraejemplo de esto se puede ver en [Dv, Remark 3.12.].

Bibliografía

[A] M. Acosta, *Denseness of norm attaining mappings,* Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. *VOL* **100** (1-2), 2006, pp. 9-30

[AK] F. Albiac and N. Kalton, *Topics in Banach space theory,* Springer, New York, 2006.

[AE] E.M. Alfsen and E. G. Effros, *Structure in real Banach spaces, Part I and II* Ann. of Math. **96** (1972), 98-173.

[AB] R. Aron and P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3-24.

[ADi] R. Aron and V. Dimant, *Sets of weak sequential continuity for polynomials,* Indag. Math. (N.S.) **13** (2002), no. 3, 287-299

[AGM] R. Aron, D. García and M. Maestre, *On norm attaining polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **39** (2003), 165-172.

[AGl] R. M. Aron and J. Globevnik, *Analytical functions on c0*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid **2** (1989), supplementary, 27-33.

[AHV] R. Aron, C. Hervés and M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces*. J. Funct. Anal., **52** (1983), 189-204.

[BS] J. Bochnak and J. Siciak, *Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces*, Studia Math., **39** (1971), 59-76.

[BD] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II*, London Mathematical Society Lecture Note Series 10, **39** Cambridge University Press, 1973.

[Dv] V. Dimant, *M-ideals of homogeneous polynomials,* Studia Mathematica, Vol. **202**, no. 1 (2010), 81-104.

[DiG] V. Dimant and R. Gonzalo, *Block diagonal polynomials,* Trans. Amer. Math. Soc., **353 (2)** (2000), 733-747.

[D] S. Dineen, Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces, S.M.M., Springer, 1999.

[FHHMPZ] Fabian, M., Habala, P., Hjek, P., Montesinos, V., Pelant, J., Zizler, V. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books in Mathematics SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[HWW] P. Harmand; D. Werner; W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras,* Lecture Notes in Mathematics, 1547. Springer-Verlag, Berlin, 1993.

[H] R. B. Holmes, *Geometric Functional Analysis and its Applications,* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975.

[JSP] M. Jimenez Sevilla and R. Payá, *Norm attaining multilinear forms and polynomials on preduals of Lorentz sequence spaces,* Studia Math. **127** (1998), no. 2 99-112.

[KW] Kalton, Nigel J.; Werner, Dirk. *Property (M), M-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces.* J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 137–178.

[L] S. Lassalle, Tesis Doctoral. *Polinomios sobre un espacio de Banach y su relación con el dual,* 2001.

[LT] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, Classical *Banach spaces I and II, Springer,* 1977.

[O] E. Oja, *On M-ideals of compact operators and Lorentz sequence spaces,* Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. **40**, (1991), 31-36.

[P] R. R. Phelps. *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability.* Lecture Notes in Math. 1364. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1989.

[W] D. Werner, *M-ideals and the basic inequality,* J. Aproxx. Theory **76** (1994), no. 1, 21-31.