UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Aplicaciones de la teoría de Ramsey a espacios de Banach

María Paula Albónico

Director: Carando, Daniel
Co-director: Galicer, Daniel

Diciembre 2011

Índice general

Introducción

En esta tesis expondremos tres problemas del análisis funcional con la particularidad de que para resolverlos se usan técnicas de carácter combinatorio. En sus demostraciones aparece la necesidad de estudiar teoremas cuyos enunciados plantean dicotomías donde obtenemos conjuntos (o subespacios) que poseen cierta propiedad o una totalmente opuesta. Es ahí donde jugará un rol decisivo el enfoque combinatorio que nos permitirá probar dichas dicotomías usando herramientas de la llamada teoría de Ramsey. Esta rama de la matemática, que debe su nombre a Frank P. Ramsey, generaliza el principio del palomar, el cual establece que no puede existir una aplicación inyectiva entre un conjunto de m elementos y otro de n elementos, si $m > n$. Suele plantear preguntas del tipo "qué tan grande debe ser cierta estructura para que tenga cierta propiedad"; los resultados de esta teoría suelen enunciarse como un problema de *coloreo* y muchos de sus argumentos dependen de un razonamiento diagonal. Estas características serán evidentes en los teoremas de Ramsey que estudiemos.

Lo primero que haremos es desarrollar la teoría necesaria para poder abordar los problemas a resolver; esto lo haremos en el Capítulo 1.

En el segundo capítulo el objetivo será demostrar dos resultados clásicos usando un mismo teorema de la teoría de Ramsey. La primera sección está dedicada a dicha teoría: ahondaremos en las características generales nombradas anteriormente y demostraremos nuestro primer resultado de tipo Ramsey. En las secciones siguientes, plantearemos dos problemas y los resolveremos usando este resultado. El primero es el Teorema ℓ_1 de Rosenthal [R] que afirma que, dado un espacio de Banach de dimensión infinita, éste contiene a ℓ_1 o bien tiene la propiedad de que toda sucesión acotada tiene una subsucesión *débil Cauchy*. Recordaremos este concepto y veremos que ℓ_1 no tiene dicha propiedad mientras que, por otro lado, los espacios reflexivos sí. De esta manera, como los subespacios de espacios reflexivos, son también reflexivos (y ℓ_1 no lo es), el enunciado del teorema sugiere que estamos en la presencia de una dicotomía como las antes mencionadas.

El segundo problema que estudiaremos en este trabajo es cómo generalizar el lema de Riesz (el cual nos permite obtener una sucesión de normalizada cuyos elementos disten "casi" uno) en un teorema de separación más fuerte, el Teorema de Elton-Odell [EO]. Específicamente, dado un espacio de Banach X, buscaremos una sucesión $(x_n)_n$ en la esfera de radio 1 tal que $\sup_{n\neq m} ||x_n - x_m|| > 1$. Como paso previo, veremos esto último en $X = c_0$ y luego lo generalizaremos al caso en que el espacio contengan una copia de c_0. Para demostrar el caso restante, usaremos el teorema de Ramsey para obtener una dicotomía similar a la que apareció en Teorema de Rosenthal, pero ahora donde el espacio distinguido sea c_0.

En el último capítulo, analizaremos el llamado "Problema de los espacios homogéneos", planteado por Banach en 1932. Un resultado de Lindenstrauss y Tzafriri [LT] establece que si todo subespacio de un espacio de Banach es complementado, entonces dicho espacio debe ser isomorfo a un espacio de Hilbert. El problema que nosotros estudiaremos aparece si se consideran isomorfismos en vez de proyecciones: se plantea la pregunta de si ℓ_2 es el único espacio isomorfo a todos sus subespacios cerrados de dimensión infinita. Para estudiar este tipo de espacios (que llamaremos homogéneos) lógicamente será de mucha utilidad mirar sus subespacios; buscaremos, por ejemplo, bases incondicionales y subespacios *hereditariamente indescomponibles*. Veremos que estos conceptos y el de homogeneidad están intrínsicamente relacionados. Un espacio arbitrario deberá contener un subespacio hereditariamente indescomponible o una base incondicional; sin embargo, un espacio homogéneo no podrá ser hereditariamente indescomponible. Entonces, relacionar ℓ_2 y el concepto de bases incondicionales nos permitirá cerrar el razonamiento.

La solución a este problema es el resultado de la combinación de dos trabajos independientes, [G1] y [K T-J]. Nosotros nos concentraremos en el primero, donde el autor trabaja con ciertas dicotomías cuyas demostraciones requieren de herramientas de la teoría de Ramsey, en este caso, distintas a las usadas en el capítulo anterior.

Capítulo 1

Preliminares

A lo largo de este trabajo, los espacios de Banach que consideremos serán de dimensión infinita, a no ser que se aclare lo contrario. Los resultados que veremos valen tanto sobre $\mathbb{R}$ como sobre $\mathbb{C}$ (variando, quizás, alguna constante), haciendo algunos cambios en las demostraciones. Por comodidad, consideraremos espacios reales y, eventualmente, en alguna demostración veremos cómo se puede adaptar el razonamiento al caso complejo.

Antes de comenzar será conveniente aclarar la notación que usaremos. Dado un espacio de Banach X, X' será su espacio dual, X'' el doble dual, y B_X y S_X serán la bola y la esfera unitaria, respectivamente. Dado $x \in X$, $\hat{x}$ representará al elemento del doble dual definido por $\hat{x}(x') = x'(x)$ para cada $x' \in X'$. Además, siempre y cuando haya un sólo espacio involucrado y no se preste a confusión, la norma de dicho espacio será notada $||\cdot||$. Aparecerán algunos de los espacios más clásicos, los cuáles serán notados de la manera usual. Ya vimos en la introducción el rol importante que tendrán

$$\ell_1 = \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} : \sum_n |a_n| < \infty\}$$

y

$$c_0 = \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} : \lim_n a_n = 0\}$$

en los dos primeros teoremas, y

$$\ell_2 = \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} : \sum_n |a_n|^2 < \infty\}$$

en el problema de los espacios homogéneos. Además, notaremos

$$c_{00} = \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} : a_n \neq 0 \text{ para finitos } n\}.$$

En todos estos ejemplos, e_n denotará, como es de esperarse, al vector cuyas coordenadas son todas nulas salvo la n-ésima, que es 1.

Por último, recordemos algunas definiciones. Dada una sucesión $(x_n)_n$ y un vector x en un espacio de Banach X, diremos que $(x_n)_n$ tiende *débil* a x, y notaremos $x_n \xrightarrow{w} x$, si $x'(x_n) \to x$ para toda $x' \in X'$. Dada una suseción $(x'_n)_n$ y una una funcional x' en X' diremos que $(x'_n)_n$ tiende *débil estrella* a x', y notaremos $x'_n \xrightarrow{w*} x'$, si $x'_n(x) \to x'(x)$ para todo $x \in X$, esto es, $\hat{x}(x'_n) \to \hat{x}(x')$. Otra noción de convergencia no tan común es la siguiente: $(x_n)_n \subset X$ es *débil Cauchy* si para cada $x' \in X'$ la sucesión escalar $(x'(x_n))_n$ tiene límite. La definición es muy similar a la de convergencia débil. Sin embargo, no son conceptos equivalentes; la diferencia reside en si el límite de la sucesión

$(x'(x_n))_n$ depende o no de la funcional x'. Claramente, la condición de ser w-convergente es más fuerte que la de w Cauchy convergente. Retomaremos esto en el Capítulo 2.

1.1. Bases de Schauder

Definición 1.1.1. Dado un espacio de Banach X, diremos que $(e_n)_n \subset X$ es una *base de Schauder* de X si para todo $x \in X$ existen únicos $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$.

Nota 1. El orden de los elementos de una base es importante. Veremos esto en la sección de bases incondicionales.

Observemos que podemos definir las siguientes funciones lineales: $e'_n : X \to \mathbb{R}, e'_n(x) = x_n$, $P_N : X \to X, P_n = \sum_{n=1}^{N} e'_n$.

Teorema 1.1.2. *Las funciones coordenadas e'_n y las proyecciones P_N definidas anteriormente son continuas.*

Demostración. Vamos a definir una nueva norma en X: $|||x||| = \sup\{||P_N(x)|| : N \in \mathbb{N}\}$, donde $|| \cdot ||$ es la norma original. Observemos que el supremo está bien definido ya que como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)e_n$ converge (a x), en particular las sumas parciales están acotadas. Que sea una norma se deduce de las propiedades del supremo y del hecho que $|| \cdot ||$ lo sea.

Veamos que las $|| \cdot ||$ y $||| \cdot |||$ normas son equivalentes. Por un lado, $||x|| = \|\sum_{n=1}^{\infty} e'_n(x)e_n\| = \lim_{N\to\infty} \left\|\sum_{n=1}^{N} e'_n(x)e_n\right\| \leq |||x|||$. Para probar que son equivalentes entonces, por el teorema de la aplicación inversa, basta probar que $(X, ||| \cdot |||)$ es un espacio de Banach. Supongamos entonces que $(x_n)_n \subset (X, ||| \cdot |||)$ es una sucesión de Cauchy. Por la desigualdad anterior, tenemos que $(x_n)_n$ también es de Cauchy con la norma original y, por lo tanto, existe $x \in X$ tal que $x_n \overset{||\cdot||}{\longrightarrow} x$. Nuestro objetivo será probar que también converge a x con $||| \cdot |||$.

Observemos que $||P_N(x_n) - P_N(x_m)|| \leq |||x_n - x_m|||$, luego, para cada $N \in \mathbb{N}$, $P_N(x_n) \overset{||\cdot||}{\longrightarrow} y_N$ converge en $[e_1, \cdots, e_N]$. Pero las funcionales $e'_j : [e_1, \cdots, e_N] \longrightarrow \mathbb{R}$ son continuas, entonces para todo $1 \leq j \leq N$ tenemos

$$e'_j(x_n) = e'_j(P_N(x_n)) \underset{n}{\longrightarrow} e'_j(y_N) := a_j,$$

y entonces $y_N = \sum_{j=1}^{N} a_j e_j$. Veamos que $y_N \overset{||\cdot||}{\longrightarrow} x$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos n tal que $|||x_m - x_n||| < \varepsilon/3$ para todo $m \geq n$, y N_0 tal que $||P_N(x_n) - x_n|| < \varepsilon/3$ para todo $N \geq N_0$. Observemos que así $||P_N(x_m) - P_N(x_n)|| \leq |||x_m - x_n||| < \varepsilon/3$ y también $||x_n - x_m|| < \varepsilon/3$. Entonces, para todo $N \geq N_0$

$$\begin{aligned} ||y_N - x|| &\leq ||y_N - P_N(x_n)|| + ||P_N(x_n) - x_n|| + ||x_n - x|| \\ &= \lim_m ||P_N(x_m) - P_N(x_n)|| + ||P_N(x_n) - x_n|| + \lim_m ||x_n - x_m|| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j e_j$ en $||\cdot||$ y, por escritura única, $P_N(x) = y_N$.

Ahora sí, veamos que $|||x_n - x||| \longrightarrow 0$. Dado $\varepsilon > 0$, sea n_0 tal que $|||x_n - x_m||| < \varepsilon$ para todo $n, m \geq n_0$. Luego

$$\begin{aligned} |||x_n - x||| &= \sup_N ||P_N(x_n) - P_N(x)|| \\ &= \sup_N ||P_N(x_n) - y_N|| \\ &= \sup_N \lim_m ||P_N(x_n) - P_N(x_m)|| \\ &\leq \lim_m |||x_n - x_m||| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Probamos entonces que las normas son equivalentes y que, por lo tanto, existe $K > 0$ tal que $|||x||| \leq K||x|| \ \forall\ x \in X$. Luego, $||P_N(x)|| \leq K||x|| \ \forall\ x \in X$, es decir, los operadores P_N son continuos. Por último, las funciones coordenadas son continuas:

$$|e_n'(x)| = \frac{||P_N(x) - P_{N-1}(x)||}{||e_n||} \leq \frac{2K}{||e_n||}||x||. \tag{1.1}$$

□

Corolario 1.1.3. *Las proyecciones P_N están uniformemente acotadas.*

Demostración. En la demostración anterior, se probó que $||P_N(x)|| \leq K||x|| \ \forall\ x \in X$; equivalentemente, $||P_N|| \leq K$ para todo N. □

Definición 1.1.4. Dada $(e_n)_n$ una base de Schauder de un espacio de Banach X, $K = \sup_N ||P_N||$ se llama la *constante de la base*. En el caso en que $K = 1$, decimos que la base es *monótona*.

Observación 1.1.5. Dada $(e_n)_n$ una base, y definiendo una norma auxiliar como antes, se tiene que $(e_n)_n$ es monótona en $(X, |||\cdot|||)$. En efecto, usando que $P_M \circ P_N = P_{\min\{N,M\}}$ se tiene que

$$|||P_N(x)||| = \sup_M ||P_M(P_N(x))|| = \sup_M ||P_M(x)|| = |||x|||.$$

Entonces podemos, y muchas veces convendrá, suponer que la base dada es monótona. Además, si la base era normalizada con la norma original, también lo será con la nueva norma:

$$|||e_k||| = \sup_N ||P_N(e_k)|| = ||e_k|| = 1.$$

Observación 1.1.6. Notemos que de (1.1) se sigue que $||e_n'|| \leq \frac{2K}{||e_n||}$. En particular, si la base es normalizada o seminormalizada, esto es, acotada superior e inferiormente, las funcionales e_n' estarán uniformemente acotadas.

1.2. Sucesiones Básicas

Definición 1.2.1. Una sucesión $(e_n)_n \subset X$ se llama *sucesión básica* si es una base (de Schauder) para el espacio $\overline{[(e_k)_k]}$.

Teorema 1.2.2. *Si $(e_n)_n$ es una sucesión de elementos no nulos, son equivalentes:*

(1) $(e_n)_n$ *es una sucesión básica;*

(2) $\exists\ K > 0 \ /\ \forall\ a_1, \cdots, a_M \in \mathbb{R}, \forall\ N < M$ *se tiene que*

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| \leq K \left\| \sum_{k=1}^{M} a_k e_k \right\|.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Consideremos K la constante de la sucesión básica (pensándola como base del espacio generado). Si $x = \sum_{k=1}^{M} a_k e_k$, entonces

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k e_k \right\| = ||P_N(x)|| \leq K||x|| = K \left\| \sum_{k=1}^{M} a_k e_k \right\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Dado $x \in \overline{[(e_n)_n]}$, queremos ver que existen únicos escalares $(a_n)_n$ tal que $x = \sum a_n e_n$.

Veamos primero la unicidad. Si $0 = \sum a_n e_n$, miramos la desigualdad de (2) para $N = 1, 2, \cdots$ y M suficientemente grande:

$$|a_1|\ ||x_1|| = ||a_1 e_1|| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{M} a_n e_n \right\| \xrightarrow[M]{} 0 \qquad \Rightarrow a_1 = 0,$$

$$|a_2|\ ||x_2|| = \left\| \sum_{i=1}^{2} a_i e_i \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{M} a_n e_n \right\| \xrightarrow[M]{} 0 \qquad \Rightarrow a_2 = 0.$$

Inductivamente, se concluye que $a_i = 0$ para todo i.

Veamos ahora la existencia de los escalares.
Sean $P_N : [(e_n)_n] \longrightarrow \overline{[(e_n)_n]}$, $P_N(\sum a_n e_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n$. La hipótesis asegura que $||P_N|| \leq K$ para todo N. Por continuidad uniforme P_N se extiende a $\overline{[(e_n)_n]}$. De la misma manera, tenemos las funciones coordenadas $e'_n : \overline{[(e_n)_n]} \longrightarrow \mathbb{R}$. Además, como para todo $x \in [(e_n)_n]$ se tiene que $e'_n(x)e_n = P_n(x) - P_{n-1}(x)$, por densidad, también vale en $\overline{[(e_n)_n]}$.
Dado $x \in X$, veamos que $x = \sum e'_n(x)e_n$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $y \in [(e_n)_n]$ tal que $||y - x|| < \varepsilon$, N_0 tal que $P_N(y) = y$ para todo $N \geq N_0$. Entonces para tales N tenemos:

$$\begin{aligned} ||x - P_N(x)|| &\leq ||x - y|| + ||y - P_N(y)|| + ||P_N(y) - P_N(x)|| \\ &\leq (1 + K)||x - y|| + ||y - P_N(y)|| \\ &< (1 + K)\varepsilon. \end{aligned}$$

□

Una pregunta razonable sería: ¿todo espacio de Banach separable tiene una base? Per Enflo resolvió este problema en 1973, exhibiendo un contraejemplo. Sin embargo, sí es cierto que todo espacio tiene un subespacio con base.

Lema 1.2.3 (Mazur)**.** *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita, $F \subset X$ subespacio de dimensión finita. Dado $0 < \varepsilon \leq 1$, existe $x \in X \setminus F$ tal que $||y|| \leq (1+\varepsilon)||y-\lambda x||$ $\forall\ y \in F$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.*

Demostración. Como la esfera S_F es compacta, podemos tomar una $\varepsilon/2$-red, $\{y_1, \cdots, y_n\}$, con $y'_k \in X'$, $||y'_k|| = 1$ tal que $y'_k(y_k) = 1$. Como $Ker(y'_k)$ es un subespacio de codimensión 1 para cada k, podemos tomar $x \in \bigcap_{k=1}^{n} Ker(y'_k)$, $||x|| = 1$.
Si $y \in S_F$, existe l tal que $||y - y_l|| < \varepsilon/2$, y se tiene:

$$||y-\lambda x|| = ||y - y_l + y_l - \lambda x|| \geq ||y_l - \lambda x|| - \varepsilon/2 \geq |y'_l(y_l - \lambda x)| - \varepsilon/2 = 1 - \varepsilon/2 \geq \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{||y||}{1+\varepsilon}.$$

Luego, $||y|| \leq (1+\varepsilon)||y - \lambda x||$.

Si $y \in F$ es arbitrario, no nulo, como lo anterior vale para todo λ, tenemos que

$$\left\|\frac{y}{||y||}\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\frac{y}{||y||} - \frac{\lambda}{||y||}x\right\|,$$

y entonces

$$||y|| \leq (1+\varepsilon)||y-\lambda x||.$$

Esto concluye la demostración; observemos que, además, pudimos tomar $||x|| = 1$.

□

Teorema 1.2.4. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe una sucesión básica con constante a lo sumo $1+\varepsilon$.*

Demostración. Sean $\varepsilon_n > 0$ tal que $\prod(1+\varepsilon_n) \leq 1+\varepsilon$ (esto ocurre por ejemplo si tomamos $\ln(1+\varepsilon_n) \leq \frac{\ln(1+\varepsilon)}{2^n}$). Tomemos $x_1 \in S_X$ cualquiera, y llamemos $F_1 = [x_1]$. Por el lema anterior, existe $x_2 \in S_X \setminus F_1$ tal que $||y|| \leq (1+\varepsilon_1)||y+\lambda x_2||$ para todo $y \in F_1$ y todo *lambda*. Repetimos el procedimiento. Supongamos construidos $x_1, \cdots, x_{n-1}, F_{n-1} = [x_i]_{i=1}^{n-1}$. Aplicando el lema nuevamente, tomamos $x_n \in S_X \setminus F_{n-1}$ tal que $||y|| \leq (1+\varepsilon_{n-1})||y+\lambda x_n||$ para todo $y \in F_{n-1}$, y todo λ. Así, obtenemos $(x_n)_n \subset S_X$; veamos que es una sucesión básica. Si $N < M, a_1, \cdots, a_M \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned}
\Big\|\underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n x_n}_{\in F_N}\Big\| &\leq (1+\varepsilon_N)\Big\|\sum_{n=1}^{N} a_n x_n + \overbrace{a_{(N+1)}}^{\lambda} x_{(N+1)}\Big\| \\
&\leq (1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_{N+1})\Big\|\sum_{n=1}^{N+1} a_n x_n + a_{(N+2)}x_{(N+2)}\Big\| \\
&\vdots \\
&\leq (1+\varepsilon_N)(1+\varepsilon_{N+1})\cdots(1+\varepsilon_M)\Big\|\sum_{n=1}^{M} a_n x_n\Big\| \\
&\leq (1+\varepsilon)\Big\|\sum_{n=1}^{M} a_n x_n\Big\|.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 1.2.2, concluimos que $(x_n)_n$ es una sucesión básica con constante a lo sumo $1+\varepsilon$. □

Usando este resultado e ideas similares a las usadas en la demostración, se puede probar el siguiente teorema de Bessaga-Pelczynski [D, página 42] :

Teorema 1.2.5. *Toda sucesión débil nula en un espacio de Banach X admite una subsucesión que es sucesión básica.*

En las próximas secciones veremos otras versiones más fuertes del principio de selección de Bessaga-Pelczynski.

Definición 1.2.6. Sea $(e_n)_n$ una base de X. Dados $p_1 < q_1 < p_2 < \cdots$ números naturales y $(a_j)_j) \subset \mathbb{R}$, podemos definir $u_n = \sum_{j=p_n}^{q_n} a_j e_j$ no nulos. Decimos que $(u_n)_n$ es una *sucesión básica en bloque de* $(e_n)_n$.

Observación 1.2.7. Una sucesión básica en bloque es, efectivamente, una sucesión básica. Más aun, si K es la constante de la base de X, la constante de $(u_n)_n$ es a lo sumo K.

Demostración. Usando nuevamente el Teorema 1.2.2, tomemos $N < M$,

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} b_n u_n\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} b_n \Big(\sum_{j=p_n}^{q_n} a_j e_j\Big)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=p_n}^{q_n} b_n a_j e_j\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^{M}\sum_{j=p_n}^{q_n} b_n a_j e_j\right\| = K\left\|\sum_{n=1}^{M} b_n u_n\right\|.$$

$\square$

Notación 1.2.8. Dados $(u_n)_n$ como en la definición de sucesión básica en bloque, escribiremos $u_1 < u_2 < \cdots$.

1.3. Equivalencia de Sucesiones Básicas

Dada una base $(e_n)_n$ de un espacio de Banach X (análogamente, una sucesión básica), un elemento $x \in X$ (o en el subespacio generado por dicha sucesión) queda determinado por sus coordenadas $(e_n'(x))_n$. Pero no toda sucesión $(a_n)_n$ determina un elemento del espacio. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.3.1. Dos bases (o sucesiones básicas) $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ de espacios de Banach X e Y respectivamente, se dicen *equivalentes* si dada una sucesión de escalares $(a_n)_n$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ converge en } X \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ converge en } Y.$$

Teorema 1.3.2. *Dadas $(x_n)_n$ base de X, $(y_n)_n$ base de Y, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*1*) $(x_n)_n$ *e* $(y_n)_n$ *son bases equivalentes;*

(*2*) *existe un isomorfismo $T : X \to Y$ que verifica $T(x_n) = y_n$;*

(*3*) *existen $C_1, C_2 > 0$ tal que $\forall\ N,\ \forall a_1, \cdots, a_N$,*

$$C_1\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k y_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{N} a_k x_k\right\| \leq C_2\left\|\sum_{k=1}^{N} a_k y_k\right\|.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Por hipótesis, podemos definir $T(\sum_n a_n x_n) = \sum_n a_n y_n$ siempre que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converja en X; es claro que se cumple que $T(x_n) = y_n$. Además, la condición recíproca en la definición de sucesiones equivalentes, asegura que T sea biyectivo. Veamos que es continuo usando el teorema de gráfico cerrado: si $z_n \to z$ en X, y $T(z_n) \to y$ en Y, queremos ver que $T(z) = y$.

$$\begin{array}{ccc} y'_k\left(\sum_{j=1}^{\infty} x'_j(z_n) y_j\right) & = & x'_k(z_n) \underset{n}{\longrightarrow} x'_k(z) \\ \shortparallel & & \\ y'_k\left(\sum_{j=1}^{\infty} x'_j(z_n) T(x_j)\right) & = & y'_k(T(z_n)) \underset{n}{\longrightarrow} y'_k(y). \end{array}$$

Luego, $x'_k(z) = y'_k(y)$ para todo k, y entonces: $T(z) = \sum_k x'_k(z) y_k = \sum_k y'_k(y) y_k = y$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Como T y T^{-1} son continuas, basta tomar: $C_1 = (||T||)^{-1}, C_2 = ||T_{-1}||$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Dada $(a_n)_n$ sucesión de escalares, entonces por hipótesis, para todo $M < N$, tenemos que:

$$C_1 \left\| \sum_{k=M}^{N} a_k y_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=M}^{N} a_k x_k \right\| \leq C_2 \left\| \sum_{k=M}^{N} a_k y_k \right\|.$$

Luego, las series tienen el mismo comportamiento. □

Observación 1.3.3. Supongamos que $(x_n)_n$ es una base de X, y sea $(y_n)_n \subset Y$ una sucesión de elementos no nulos, tales que se verifica la condición del punto (3) (equivalentemente, del punto (2)) del teorema anterior. Entonces $(y_n)_n$ es una sucesión básica, y por lo tanto, equivalente a $(x_n)_n$.

Demostración. Dados $N < M$, buscamos una constante C tal que: $\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \leq C \left\| \sum_{k=1}^{M} a_k y_k \right\|$. Si K es la constante de la base $(x_n)_n$, entonces:

$$\left\| \sum_{k=1}^{N} a_k y_k \right\| \leq \frac{1}{C_1} \left\| \sum_{k=1}^{N} a_k x_k \right\| \leq \frac{K}{C_1} \left\| \sum_{k=1}^{M} a_k x_k \right\| \leq \frac{K C_2}{C_1} \left\| \sum_{k=1}^{M} a_k y_k \right\|.$$

□

El siguiente lema será de utilidad para luego demostrar el principio de selección de Bessaga-Pelczynski.

Teorema 1.3.4. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica con constante a lo sumo K, $(y_n)_n$ tal que*

$$2K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{||x_n - y_n||}{||x_n||} < 1,$$

entonces $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ son sucesiones equivalentes.

Demostración. Para cada $x \in X$ definimos $T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} x'_n(x)(y_n - x_n)$. Observemos que T está bien definido pues la serie converge absolutamente. Recordemos que por la Observación 1.1.6 tenemos que $||x'_n||\,||x_n|| \leq 2K$; de esta manera, T es un operador acotado:

$$\begin{aligned}
||T|| &\leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}||x_n'||\,||y_n-x_n|| \\
&\leq 1+2K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{||y_n-x_n||}{||x_n||} \\
&< 2.
\end{aligned}$$

Además,

$$||T-I|| \leq \sum_n ||x_n'||\,||y_n-x_n|| \leq 2K\sum_n \frac{x_n-y_n}{x_n} < 1,$$

de donde sigue que T es inversible. Por último, es fácil ver que $T(x_m)=y_m$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Luego, las sucesiones son equivalentes.

□

Teorema 1.3.5 (Principio de selección de Bessaga-Pelczynski)**.** *Sea $(e_n)_n$ una base de X con constante K, y $(e_n')_n$ sus funciones coordenadas. Sea $(y_k)_k\subset X$ tal que $\inf||y_k||>0$ y $e_k'(y_n)\underset{n}{\longrightarrow}0$ para todo k. Entonces, $(y_k)_k$ tiene una subsucesión básica equivalente a alguna sucesión básica en bloque de los $(e_n)_n$.*

Demostración. Llamemos $\alpha=\inf||y_n||>0$, y tomemos $0<\delta<\frac{1}{4}$.
Tomemos $n_1=1$, $r_0=0$. Entonces existe $r_1\in\mathbb{N}$ tal que

$$||y_{n_1}-P_{r_1}(y_{n_1})||=\left\|\sum_{n=r_1+1}^{\infty}e_n'(y_{n_1})e_n\right\|<\frac{\alpha\delta}{2K}.$$

Como $||P_{r_1}(y_n)||\underset{n}{\longrightarrow}0$, existe $n_2>n_1$ tal que $||P_{r_1}(y_{n_2})||<\frac{\alpha\delta^2}{2K}$. Tomamos $r_2>r_1$ tal que $||y_{n_2}-P_{r_2}(y_{n_2})||<\frac{\alpha\delta^3}{2K}$.

Iterando, obtenemos una subsucesión $(y_{n_k})_k$ y una sucesión creciente de números naturales $(r_k)_k$, con $r_k=0$, tales que:

$$||P_{r_{k-1}}(y_{n_k})||<\frac{\alpha\delta^k}{2K} \quad \text{y} \quad ||y_{n_k}-P_{r_k}(y_{n_k})||<\frac{\alpha\delta^k}{2K}.$$

Consideremos $x_k=P_{r_k}(y_{n_k})-P_{r_{k-1}}(y_{n_k})$. Como $(x_k)_k$ es una sucesión básica en bloque de la base $(e_n)_n$ resulta una sucesión básica con constante a lo sumo K. Notemos que, para cada k, tenemos

$$||y_{n_k}-x_k||\leq||y_{n_k}-P_{r_k}(y_{n_k})||+||P_{r_{k-1}}(y_{n_k})||<\frac{\alpha\delta^k}{K},$$

y

$$||y_{n_k}-x_k||\geq||y_{n_k}||-||x_k||\geq\alpha-||x_k||.$$

Así,

$$||x_k||>\alpha-\frac{\alpha\delta^k}{K}=\alpha\left(1-\frac{\delta^k}{K}\right)\geq\alpha\left(1-\frac{\delta}{K}\right)\geq\alpha(1-\delta).$$

Entonces,

$$2K\sum_{k=1}^{\infty}\frac{||x_k-y_{n_k}||}{||x_k||}<2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha\delta^k}{\alpha(1-\delta)}=\frac{2}{1-\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\delta^k=\frac{2\delta}{(1-\delta)^2}<8/9.$$

Por el Teorema 1.3.4, $(y_{n_k})_k$ y $(x_k)_k$ son sucesiones equivalentes. □

Presentamos como corolario una reformulación del Corolario 7 de [D, página 45] que sirve de criterio para determinar si un espacio de Banach contiene o no una copia de c_0,

Teorema 1.3.6. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica en un espacio de Banach X con $\inf ||x_n|| > 0$. Si existe una constante $C > 0$ tal que para todo $F \subset \mathbb{N}$ subconjunto finito y para cada elección de signos $(\varepsilon_n)_{n\in F}$ se tiene que $|| \sum_{n\in F} \varepsilon_n x_n|| \leq C$, entonces $(x_n)_n$ es equivalente a la base canónica de c_0.*

1.4. Condicionalidad e Incondicionalidad

1.4.1. Convergencia de Series

Definición 1.4.1. Dada $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice *incondicionalmente convergente* si $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge para toda permutación $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$.

Sabemos que en el caso de series reales, convergencia incondicional es equivalente a convergencia absoluta y, en ese caso, cualquier reordenamiento converge a lo mismo. En el caso de un espacio de Banach arbitrario, convergencia absoluta implica convergencia incondicional, pero no necesariamente vale la recíproca.

Observación 1.4.2. Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ incondicionalmente convergente, entonces todo reordenamiento converge al mismo elemento.

Demostración. Llamemos $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Dada $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, llamemos $y = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. Para ver que $x = y$ tomamos $x' \in X'$ y como $x'(x)$ es una serie incondicionalmente convergente en $\mathbb{R}$

$$x'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x'(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x'(x_{\sigma(n)}) = x'(y).$$

Luego, $x = y$. □

Definición 1.4.3. Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ se dice *w-incondicionalmente convergente* si $\sum_{n=1}^{\infty} x'(x_{\sigma(n)})$ converge para toda permutación $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, para todo $x' \in X'$. Equivalentemente, si $\sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|$ converge.

Observación 1.4.4. Una serie incondicionalmente convergente es w-incondicionalmente convergente.

Proposición 1.4.5. *Dada una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en un espacio de Banach X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente;*

(2) *toda subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ converge incondicionalmente;*

(3) *toda subserie $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j}$ converge;*

(4) *existe un operador compacto $T : c_0 \longrightarrow X$ tal que $T(e_n) = x_n \ \forall \ n \in \mathbb{N}$;*

(5) *la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge para todo $(a_n)_n \in \ell_\infty$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que existe una subserie $\sum_j x_{n_j}$ que no converge o, equivalentemente, una subserie cuya sucesión de sumas parciales no es de Cauchy. Luego existe $\varepsilon > 0, p_1 < q_1 < p_2 < \cdots \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{k=p_j}^{q_j} x_{n_k}\right\| > \varepsilon$. Si $\{y_1, y_2, \cdots\}$ es el conjunto de los términos de $(x_n)_n$ que no figuran en ningún bloque $\{x_{p_j}, \cdots, x_{q_j}\}$, entonces para el reordenamiento $x_{p_1}, \cdots, x_{q_1}, y_1, x_{p_2}, \cdots, x_{q_2}, y_2, \cdots$ la serie no converge, lo cual es una contradicción.

Probamos entonces que dicha subserie converge. Veamos que, además, converge incondicionalmente: $\sum_k x_{n_{\sigma(k)}}$ converge $\forall\ \sigma \in S_{\mathbb{N}}$. En efecto, σ induce una permutación en $\{n_1, n_2, \cdots\}$, la cual podemos "extender" a $\mathbb{N}$:

$$\widetilde{\sigma}(n) = \begin{cases} n_{\sigma(k)} & n = n_k \text{ para algún } k \\ n & \text{si no.} \end{cases}$$

Entonces, $\sum_n x_{\widetilde{\sigma}(n)}$ converge (por hipótesis) y converge incondicionalmente. Luego, por lo que acabamos de probar, su subserie $\sum_k x_{\widetilde{\sigma}(n_k)} = \sum_k x_{n_{\sigma(k)}}$ converge.

(2) $\Rightarrow$ (3) es automática.

(3) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que existe $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ tal que $\sum_n x_{\sigma(n)}$ no converge. Entonces existen $\varepsilon > 0$ y bloques finitos $\Delta_j = \{p_j, \cdots, q_j\}, q_k < p_{k+1}$, tal que $\left\|\sum_{n\in\Delta_j} x_{\sigma(n)}\right\| > \varepsilon$. Llamemos $I_j = \sigma(\Delta_j)$ (con el orden natural). Eliminando algunos I_j si fuera necesario, podemos suponer $\max I_j < \min I_{j+1}$. Así, la subserie de los términos $k \in \bigcup_j I_j$ no converge.

(1) $\Rightarrow$ (4) Definimos $T : c_{00} \longrightarrow X, T((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Veamos que T es continuo: sea $x' \in X'$

$$\left\|x'\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big)\right\| \leq ||a||_\infty \sum_{n=1}^{\infty} |x'(x_n)|.$$

Luego, por la Observación 1.4.4, el conjunto $\{x'(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) : ||a||_{c_{00}} \leq 1\}$ es acotado, y por un corolario del principio de acotación uniforme, $\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : ||a||_{c_{00}} \leq 1\}$ es acotado (en X). Esto prueba que T es continuo y, por densidad, T se extiende de manera continua a c_0. Veamos que el operador $T : c_0 \longrightarrow X$ es compacto, probando que se aproxima por operadores de rango finito. Específicamente, veamos que $T_N \xrightarrow{||\cdot||} T$, donde $T_N((a_n)_n) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$. Para eso, dado $\varepsilon > 0$, asumamos que vale lo siguiente:

$$\exists\ n_0 \ /\ \forall\ F \subset \{n > n_0\} \text{ finito, } \left\|\sum_{n\in F} x_n\right\| < \varepsilon/2. \tag{1.2}$$

Dado $F \subset \{n > n_0\}$ finito y $x' \in X', ||x'|| \leq 1$, llamamos $F_+ = \{n \in F : x'(x_n) > 0\}$ y $F_- = \{n \in F : x'(x_n) < 0\}$. Como también son subconjuntos finitos, por (1.2) tenemos

$$\varepsilon/2 > \left\|\sum_{n\in F_+} x_n\right\| \geq x'\Big(\sum_{n\in F_+} x_n\Big)$$

y

$$\varepsilon/2 > \left\|\sum_{n\in F_-} x_n\right\| \geq -x'\Big(\sum_{n\in F_-} x_n\Big).$$

De esta manera

$$\sum_{n\in F} |x'(x_n)| = \sum_{n\in F_+} x'(x_n) + \sum_{n\in F_-} -x'(x_n) < \varepsilon,$$

y entonces

$$|x'(T_N(a) - T_M(a))| = \left| \sum_{n=N+1}^{M} a_n x'(x_n) \right| \leq ||a||_\infty \, \varepsilon \quad \text{ para todo } \; M > N \geq n_0, x' \in B_{X'},$$

y equivalentemente,

$$||T_N - T_M|| \leq \varepsilon \;\; \text{para todo } M > N \geq n_0.$$

Luego, T_N converge y debe ser $T_N \xrightarrow{||\cdot||} T$.

Probemos entonces que efectivamente vale (1.2). Supongamos que no se cumple y sea $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $F_n \subset \{n+1, n+2, \cdots\}$ finito tal que $\left\| \sum_{j \in F_n} x_j \right\| \geq \varepsilon$. Veamos que no puede ocurrir que la serie converja incondicionalmente. Consideramos:

$$\begin{gathered} n_1 = 1; A_1 = F_{n_1}; \\ n_2 = \max F_{n_1}; B_1 = \{n_1 + 1; n_2\} \setminus A_1; A_2 = F_{n_2}; \\ n_3 = \max F_{n_2}; B_2 = \{n_2 + 1; n_3\} \setminus A_2; A_3 = F_{n_3}; \\ \vdots \end{gathered}$$

Observemos que $A_k \cup B_k = \{n_k+1, \cdots, n_{k+1}\}$. Tomamos $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$ tal que $\sigma(\{n_k+1, \cdots, n_{k+1}\}) = \{n_k + 1, \cdots, n_{k+1}\}$ y tal que $\max(\sigma(A_k)) \leq \min(\sigma(B_k))$ para todo k. Es decir, $\sigma(A_k)$ es un subconjunto ordenado de $\{n_k + 1, \cdots, n_{k+1}\}$. Entonces,

$$\Big\| \sum_{j \in \sigma(A_k)} x_{\sigma^{-1}(j)} \Big\| = \Big\| \sum_{j \in A_k} x_j \Big\| = \Big\| \sum_{j \in F_{n_k}} x_j \Big\| \geq \varepsilon.$$

Por lo tanto, la serie $\sum_{j \in \mathbb{N}} x_{\sigma^{-1}(j)}$ no puede ser convergente.

(4) $\Rightarrow$ (5) Sea $(a_n)_n \in \ell_\infty$, llamamos $S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n; T_N = T(S_N) = \sum_{n=1}^{N} a_n x_n$. Como los operadores compactos mandan sucesiones débil Cauchy en sucesiones de Cauchy (en norma), basta ver que $(S_N)_N$ es débil Cauchy. Tomemos entonces $\phi \in \ell_1 = c_0'$ (es decir $\sum |\phi(e_n)| < \infty$) y veamos que la serie $\phi(S_N)$ converge absolutamente:

$$\sum_{n=1}^{N} |a_n \phi(e_n)| \leq ||a||_\infty \sum_{n=1}^{N} |\phi(e_n)| \leq ||a||_\infty ||\phi||_{\ell_1}.$$

(5) $\Rightarrow$ (2) Si queremos ver que la subserie $\sum_k x_{n_k}$ converge, consideramos la sucesión de ℓ_∞ definida por $a_j = 1$ si $j \in \{n_k\}_k$ y $a_j = 0$ en caso contrario. Entonces $\sum_k x_{n_k} = \sum_j a_j x_j$, que sabemos que converge.

□

1.4.2. Bases incondicionales

Definición 1.4.6. Una base $(e_n)_n$ de un espacio de Banach X se dice *incondicional* si $(e_{\sigma(n)})_n$ es una base para toda permutación $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. Equivalentemente, cada vez que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge, lo hace incondicionalmente.

Nota 2. La base de Fourier de $L_p[0,1]$, $\{e^{2\pi int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base (de Schauder) pero, en general, no es base incondicional. De hecho, vale que es base incondicional si y sólo si $p = 2$ [W, página 62].

Proposición 1.4.7. *Dada una base $(x_n)_n$ de un espacio de Banach X, son equivalentes:*

(1) *$(x_n)_n$ es incondicional;*

(2) *existe una constante $K \geq 1$ tal que para todo N, si $a_1, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_N$ son escalares tales que $|a_n| \leq |b_n|$ para todo $n = 1, \cdots, N$, entonces se tiene:*

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{N} b_n x_n \right\|.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Para cada $t = (t_n)_n \in B_{\ell_\infty}$, por la Proposición 1.4.5, podemos definir $T_t : X \to X, T_t (\sum c_n x_n) = \sum t_n c_n x_n$. Observemos que T_t es un operador continuo, por ser límite puntual de los operadores continuos

$$T_t^N \left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right) := \sum_{n=1}^{N} t_n c_n x_n$$

(T_t^N es continuo por ser composición de operadores continuos: la proyección N-ésima, y un operador entre espacios de dimensión finita):

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \longmapsto \sum_{n=1}^{N} c_n x_n \longmapsto \sum_{n=1}^{N} t_n c_n x_n.$$

Veamos ahora que las normas de T_t están uniformemente acotadas. Fijemos $x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n$ (converge incondicionalmente) y consideremos $S : c_0 \to X$ dado por $S(e_n) = c_n x_n$. como S es continuo (más aun, es compacto), existe K_x tal que $||S(t)|| \leq K_x$ para todo $t \in c_{00}$, $||t|| \leq 1$. Es decir:

$$\left\| \sum_{n=1}^{N} t_n c_n x_n \right\| \leq K_x \quad \text{para todo } N, \text{ para todo } \quad ||t||_\infty \leq 1$$

y por lo tanto,

$$||T_t(x)|| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n c_n x_n \right\| \leq K_x \quad \text{para todo} \quad ||t||_\infty \leq 1.$$

Entonces, por el principio de acotación uniforme, existe una constante K tal que $||T_t|| \leq K$ para todo $t \in B_{\ell_\infty}$, y luego:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n c_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n \right\|.$$

Observemos que tomando $t_n = 1$ para todo n se concluye que $K \geq 1$. Por último, veamos que de esta desigualdad se deduce la que queremos probar. Como $|a_n| \leq |b_n|$, si llamamos $t_n = \frac{a_n}{b_n}$ si $b_n \neq 0, t_n = 0$ si $b_n = 0$, tenemos que $|t_n| \leq 1$. Tomando $c_n = b_n$, tenemos $a_n = t_n b_n$ y entonces:

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n \right\|.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Dada $\sum a_n x_n$ serie convergente, queremos ver que converge incondicionalmente. Equivalentemente, queremos ver que toda subserie $\sum_k a_{n_k} x_{n_k}$ converge. Dado $\varepsilon > 0$, como la serie original converge, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \geq N, L \geq 1$ se tiene:

$$\left\| \sum_{n=m+1}^{m+L} a_n x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

Veamos que para todo $N \leq n_k < \cdots < n_{k+l}$ tenemos

$$\left\| \sum_{j=k+1}^{k+l} a_{n_j} x_{n_j} \right\| \leq K \left\| \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+l}} a_j x_j \right\|. \tag{1.3}$$

Dado que $n_{k+l} = n_k + L$ para algún $L \geq 1$ el término de la derecha es a lo sumo ε, esto terminaría la demostración.
Observemos que el soporte de la suma del lado izquierdo es $\{n_{k+1}, n_{k+2}, \cdots, n_{k+l}\}$ y el del lado derecho: $\{n_k+1, n_k+2, \cdots, n_{k+l}\} \supset \{n_{k+1}, n_{k+2}, \cdots, n_{k+l}\}$. Entonces, podemos escribir (1.3) como en la hipótesis: $\left\|\sum_{n=1}^N a'_n x_n\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^N b'_n x_n\right\|$, con $|a'_n| \leq |b'_n|$, tomando:

$N = n_{k+l}$;
$a'_n = b'_n = 0 \ \forall \ n \leq n_k + 1$;
$a'_n = 0 \ \forall \ n \in \{n_k + 1, n_k + 2, \cdots, n_{k+l}\} \setminus \{n_{k+1}, n_{k+2}, \cdots, n_{k+l}\}$;
$b'_n = a_n \ \forall \ n_{k+1} \leq n \leq n_{k+l}$;
$a'_n = a_n \ \forall \ n \in \{n_{k+1}, n_{k+2}, \cdots, n_{k+l}\}$; etc.

□

Definición 1.4.8. Si $(e_n)_n$ es una base incondicional de un espacio de Banach X, definimos la *constante de incondicionalidad de la base*, $\chi(e_n)$, a la menor constante K para la cual se verifica la condición (2) de la proposición. Diremos que $(e_n)_n$ es *K-incondicional* si $K \geq \chi(e_n)$.

Observación 1.4.9. Revisando la demostración, vemos que, equivalentemente, $(e_n)_n$ es *K-incondicional* si $\left\|\sum_{n=1}^N t_n c_n e_n\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^N c_n e_n\right\|$ para toda sucesión $|t_n| \leq 1$. Más aun, basta considerar sólamente el caso en que $t_1, \cdots, t_N$ es cualquier elección de signos.

Demostración. Tomemos $|t_n| \leq 1$. Existe $x' \in B_{X'}$ tal que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^N t_n c_n e_n \right\| &= x'\left(\sum_{n=1}^N t_n c_n e_n\right) = \sum_{n=1}^N t_n c_n e'(e_n) \\
&= \sum_{n=1}^N t_n \varepsilon_n \underbrace{\varepsilon_n c_n e'(e_n)}_{\geq 0} \quad \text{para} \quad \varepsilon_n = sg(c_n e'(e_n)) \\
&\leq \sup_{1 \leq n \leq N} |t_n \varepsilon_n| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n c_n e'(e_n) \leq x'\left(\sum_{n=1}^N \varepsilon_n c_n e_n\right) \\
&\leq \left\| \sum_{n=1}^N \varepsilon_n c_n e_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^N c_n e_n \right\|.
\end{aligned}$$

□

El concepto de *K-incondicionalidad* se puede extender a bases en bloques.

Definición 1.4.10. Fijada una base en un espacio de Banach X, dada $(y_n)_n$ una base en bloque, diremos que es *K-incondicional* si dados escalares $c_1, \cdots, c_N$ y cualquier elección de signos $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N$ se tiene que $\left\|\sum_{n=1}^N \varepsilon_n c_n y_n\right\| \leq K \left\|\sum_{n=1}^N c_n y_n\right\|$.

Definición 1.4.11. Diremos que una sucesión $y_1 < \cdots < y_N$ es *K-condicional* si cumple que $\left\|\sum_{n=1}^N y_n\right\| > K \left\|\sum_{n=1}^N (-1)^n y_n\right\|$.

Observación 1.4.12. Tenemos entonces que una base en bloque en K-incondicional si y sólo si genera un subespacio que no contiene sucesiones en bloque finitas K-condicionales.

1.5. Cotipo

Definición 1.5.1. Llamaremos *funciones Rademacher* a las funciones definidas en el intervalo $[0;1]$ por $r_j(t) = sg(\text{sen}(2\pi jt)), j \in \mathbb{N}_0$.

Observación 1.5.2. Valen las siguientes propiedades:

(1) $|r_j(t)| = 1 \ \forall \ t \in [0;1], \ \forall \ j$.

(2) $\int_0^1 r_j(t) r_k(t) dt = \delta_{jk}$.

Definición 1.5.3. Para $2 \leq q \leq \infty$, diremos que un espacio de Banach X tiene *cotipo Rademacher* q (o *cotipo* q) si para algún $1 \leq r < \infty$ existe una constante C tal que para toda elección de elementos de X, $x_1, \cdots, x_n$, se tiene

$$\left(\sum_{j=1}^n ||x_j||^q\right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\right\|^r dt\right)^{1/r}, \tag{1.4}$$

y, en el caso de $q = \infty$

$$\max_{1\leq j\leq n} ||x_j|| \leq C \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\right\|^r dt\right)^{1/r} = C \left\| \left(\left\|\sum_{j=1}^n r_j(t) x_j\right\| \right) \right\|_{L_q[0;1]}.$$

Se puede probar que si X tiene cotipo q, entonces tiene cotipo q' para $q < q'$, y que todo espacio de Banach X tiene cotipo ∞. Serán interesante entonces los espacios con cotipo no trivial. Dentro de los espacios de Banach clásicos, $L_p(\mu)$ tiene cotipo $q = \max\{2; p\}$.
Nosotros no necesitaremos ahondar en la definición y las propiedades básicas del cotipo; se puede encontrar más información sobre el tema, como también las demostraciones de las propiedades anteriores, en [AK, 137-142].

Capítulo 2

Dos resultados clásicos

En este capítulo presentaremos dos problemas clásicos del análisis funcional cuyas demostraciones requieren de herramientas de la teoría de Ramsey.

El primero de ellos, el Teorema ℓ_1 de Rosenthal (1974), da una condición necesaria y suficiente para que ℓ_1 sea isomorfo a un subespacio de un espacio de Banach X. Específicamente, afirma que un espacio de Banach X o bien contiene a ℓ_1, o bien tiene la propiedad de que toda sucesión acotada contiene una subsucesión débil Cauchy. Al comienzo del Capítulo 1 definimos este concepto y notamos que w-convergencia es más fuerte que la convergencia débil Cauchy; veamos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1. Consideremos en $X = c_0$ la siguiente sucesión: $x_n = e_1 + \cdots + e_n$. Es claro que $(x_n)_n$ es una sucesión débil Cauchy; en efecto, para cada $x' = (a_n)_n \in c_0' = \ell_1$ se tiene que $x'(x_n) = \sum_{i=1}^n a_i$ converge (absolutamente). Sin embargo, si $y = (1, 1, \cdots)$, tenemos que $\widehat{x_n} \xrightarrow{w^*} y$ en ℓ_∞, es decir $x'(x_n) \to x'(y)$ para todo $x' \in X'$, pero $y \notin c_0$.

Sin embargo, existen espacios donde ambas nociones de convergencia son equivalentes; son ejemplos de esto, como veremos en la siguiente proposición, los espacios donde toda sucesión w-convergente sea convergente (en norma), esto es, los espacios con la propiedad de Schur. Sin ir más lejos, ℓ_1 tiene dicha propiedad [D, página 85].

Proposición 2.0.4. *Si X es un espacio de Banach con la propiedad de Schur, entonces toda sucesión débil Cauchy es débil convergente, más aún, es convergente (en norma).*

Demostración. Supongamos $(x_n)_n$ es una sucesión débil Cauchy. Dadas dos sucesiones estrictamente crecientes de números enteros $(n_k)_k$ y $(m_k)_k$, por la hipótesis, se tiene que $(x_{n_k} - x_{m_k})_k$ converge débilmente a 0 pero entonces, como X tiene la propiedad de Schur, converge en norma. Luego, la sucesión $(x_n)_n$ es de Cauchy y por lo tanto converge. □

Esto nos servirá para verificar la condición del teorema de Rosenthal en el caso $X = \ell_1$; si consideramos la base canónica, es un ejemplo de una sucesión acotada que no tiene ninguna subsucesión débil Cauchy; esto vale pues no tiene ninguna subsucesión débil convergente y ambas nociones de convergencia son equivalentes.

El segundo problema que estudiaremos es un problema de separación que, en algún sentido mejora el siguiente resultado clásico del análisis funcional.

Lema 2.0.5 (Riesz)**.** *Sea X un espacio normado de dimensión infinita, $Y \subsetneq X$ un subespacio cerrado propio y $0 < \theta < 1$, entonces existe $x_\theta \in S_X$ tal que $||x_\theta - y|| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Observación 2.0.6. Si Y es un subespacio de dimensión finita, se puede tomar $x_1 \in S_X$ tal que $||y - x_1|| \geq 1$ para todo $y \in Y$. En efecto, si $x_0 \in X \setminus Y$, como $\dim(Y) < \infty$, podemos tomar $y_0 \in Y$ tal que $d = d(x_0; F) = ||x_0 - y_0||$. Si entonces consideramos $x_1 = \frac{x_0 - y_0}{||x_0 - y_0||}$, para todo $y \in Y$ tenemos que $||x_1 - y|| = \frac{||x_0 - (y_0 + dy)||}{d} \geq 1$.

Esta observación nos sirve para probar la siguiente "mejora" del lema de Riesz.

Corolario 2.0.7. *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe $(x_n)_n \in S_X$ tal que $||x_n - x_m|| \geq 1$ para todo $n \neq m$.*

Demostración. Tomamos $x_1 \in S_X$ y consideramos el subespacio $Y_1 = \langle x_1 \rangle$. Por la observación anterior, existe $x_2 \in S_X$ tal que $||x_1 - x_2|| \geq 1$. Sea ahora $Y_2 = \langle x_1, x_2 \rangle$, nuevamente, existe $x_3 \in S_X$ tal que $||x_3 - x_i|| \geq 1$ para $i = 1, 2$. Repitiendo este proceso, obtenemos la sucesión buscada.

□

Más aun, se puede lograr un mayor estricto en el enunciado anterior. Es decir:

Proposición 2.0.8. *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, entonces existe $(x_n)_n \in S_X$ tal que $||x_n - x_m|| > 1$ para todo $n \neq m$.*

Demostración. Procedemos por inducción. Sea $x_1 \in S_X$ y $x_1' \in S_{X'}$ tal que $x_1'(x_1) = 1$.
Supongamos elegidos k elementos linealmente independientes de $S_{X'}$, $x_1', \cdots, x_k'$ y k elementos de S_X, $x_1, \ldots, x_k$ tales que $||x_n - x_m|| > 1$ para todo $1 \leq n, m \leq k$, con $x_n'(x_n) = 1$. Elegimos $y \in X$ tal que $x_1'(y), \cdots, x_k'(y) < 0$ y $x \in \bigcap_{i=1}^k \ker(x_i')$ no nulo, y sea K tal que $||y|| < ||y + Kx||$. Entonces, si tomamos cualquier combinación lineal no trivial $\sum_{i=1}^k a_i x_i'$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^k a_i x_i'(y + Kx) \right| &= \left| \sum_{i=1}^k a_i x_i'(y) \right| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i x_i' \right\| ||y|| \\ &< \left\| \sum_{i=1}^k a_i x_i' \right\| ||y + Kx||. \end{aligned}$$

Sea $x_{k+1} = \frac{y + Kx}{||y + Kx||}$ y $x_{k+1}' \in S_{X'}$ tal que $x_{k+1}'(x_{k+1}) = 1$. Entonces, por lo anterior, debe ser $x_{k+1}' \notin \langle x_1', \cdots, x_k' \rangle$. Por último, sea $1 \leq n \leq k$ se tiene

$$||x_{k+1} - x_n|| \geq |x_n'(x_{k+1} - x_n)| = |x_n'(x_{k+1}) - x_n'(x_n)| = |1 - \underbrace{x_n'(x_{k+1})}_{<0}| > 1.$$

□

Vale la pena recalcar la simplicidad del argumento anterior, donde el único resultado previo que se utiliza es el Teorema de Hahn Banach. Sin embargo, aunque para cada n y m valga la desigualdad estricta, podría ocurrir que $\inf_{n \neq m} ||x_n - x_m|| = 1$.

Observación 2.0.9. Consideremos el caso $X = c_0$.
Tomemos $x_k = \sum_{i=1}^{k} e_i - e_{k+1}$ y $n > m$, entonces

$$||x_n - x_m||_{c_0} = \left\| \sum_{i=n+2}^{n} e_i - e_{n+1} + 2e_{m+1} \right\|_{c_0} = 2.$$

Es decir, en el ejemplo anterior probamos algo todavía más fuerte que lo afirmado por la proposición. Surge entonces la pregunta de si éste será un hecho general, es decir, si valdrá que para cualquier espacio de Banach arbitrario podemos encontrar una sucesión normalizada tal que dos términos cualesquiera disten en más de 1 "más algo". Inspirados en el ejemplo y en la escritura de la sucesión elegida, veremos primero que en el caso de los espacios que contengan copias de c_0 esto será posible. De hecho, con el Teorema de Elton-Odell demostraremos que esto ocurre en todo espacio de Banach. Para el caso restante, así como la teoría de Ramsey sirve para probar una condición necesaria y suficiente para que un espacio contenga una copia de ℓ_1, ahora nos servirá para probar una condición suficiente para que un espacio contenga una copia de c_0.

2.1. Teoría de Ramsey

La llamada teoría de Ramsey surge en 1930, cuando F. P. Ramsey publica su artículo "On a problem of formal logic". Para enunciar el primer teorema de Ramsey, será necesario primero introducir algunos conceptos. Dado un conjunto X, notaremos por $\mathcal{F}_k(X)$ al conjunto de los subconjuntos de X de cardinal k. Una *r-coloración* de un conjunto A será una función $A \to \{1, \cdots, r\}$; si un conjunto A tiene una r-coloración y $B \subset A$, entonces diremos que B es *monocromático* si la imagen de B es constante. Ahora sí, el teorema de Ramsey es el siguiente:

Teorema 2.1.1. *Sean k y r números naturales. Entonces para cada r-coloración de $\mathcal{F}_k(\mathbb{N})$ existe un subconjunto X de $\mathbb{N}$ tal que $\mathcal{F}_k(X)$ es monocromático.*

Así, se suele decir que un teorema pertenece a la teoría de Ramsey, o que es un teorema de Ramsey, si es de la forma: dado un coloreo (finito) de algún objeto matemático, entonces existe un subobjeto de cierto tipo que es monocromático. Si bien los teoremas de Ramsey que nosotros estudiemos no estarán enunciados en términos de colores, trataremos de mostrar la analogía.

El teorema de Ramsey que demostraremos en esta sección es el Teorema de Nash-Williams que, de alguna manera, concierne a las coloraciones de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, el conjunto de los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Motivados por el teorema original de Ramsey, uno esperaría que, dada una r-coloración de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, exista un subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, X, tal que $\mathcal{P}_\infty(X)$ sea monocromático. Sin embargo, esto no ocurre. Una manera de verlo es considerar en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ la relación de equivalencia definida por: $A \sim B$ si y sólo si su diferencia simétrica es finita. Luego, defimos una 2-coloración: A será rojo o azul dependiendo de si la diferencia simétrica entre A y el representante de su clase de equivalencia tiene una cantidad par o impar de elementos, respectivamente. Así, si A es un conjunto y $\overline{A}$ un representante de su clase de equivalencia, tomando $n \in X \setminus A \cup \overline{A}$, los conjuntos A y $A \cup \{n\}$ tendrán distinto color.

Entonces, si bien no podremos generalizar el teorema anterior a subconjuntos infinitos, podremos utilizar herramientas de la teoría de Ramsey para demostrar el llamado Teorema de Nash-Williams. Para eso, primero introduciremos otras definiciones y notaciones.

Antes de continuar, introduciremos algunas otras notaciones y definiciones.

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ denotará al conjunto de partes de $\mathbb{N}$.
- $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.
- Dada $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, escribiremos

$$\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A) = \alpha$$

si $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ A \in \mathcal{F}_r(M), A \subset [N, +\infty)$ se tiene que $|f(A) - \alpha| < \varepsilon$.

Veamos ahora el primer resultado de tipo Ramsey; si bien no lo usaremos posteriormente, es un resultado que podemos probar simplemente usando las definiciones anteriores y cuyo enunciado es muy similar a otro que sí necesitaremos, pero para el cual necesitamos más herramientas.

Teorema 2.1.2. (*1*) *Supongamos* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función acotada, entonces existe* $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ *para el cual existe* $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$.

(*2*) *Si* $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_r(\mathbb{N})$ *entonces existe* $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ *tal que* $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$ *o* $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.

Demostración. Veamos primero que (2) se deduce de (1). Definiendo $f(A) = \chi_{\mathcal{A}}(A)$, por (1) existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ para el cual existe $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$. De la definición de límite se deduce que hay dos opciones:

- $(\alpha = 0)$ $f(A) = 0\ \ \forall\ A \in \mathcal{F}_r(M)$. En este caso $\mathcal{F}_r(M) \cap \mathcal{A} = \emptyset$.
- $(\alpha = 1)$ $f(A) = 1\ \ \forall\ A \in \mathcal{F}_r(M)$. En este caso $\mathcal{F}_r(M) \subset \mathcal{A}$.

Probemos (1) por inducción en r. Veamos que para todo r vale:

dado $M' \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ *y* $f : \mathcal{F}_r(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada,* $\exists\ M \in \mathcal{P}_\infty(M')$ *tal que existe* $\lim\limits_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$.

Para $r = 1$, tenemos $f : \mathcal{F}_1(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}, M' \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. El conjunto $\{f(\{n\}) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. En particular, la sucesión $(a_n)_{n \in M'}$ definida por $a_n = f(\{n\})$ es acotada, luego tiene una subsucesión convergente, es decir, existe $\{n_k\}_k \in \mathcal{P}_\infty(M')$ creciente tal que $(a_{n_k})_k$ es convergente. Sea α su límite, dado un $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$ $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$. Veamos que sirve tomar $M = \{\{n_1\}, \{n_2\}, \cdots\}$. Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $N = n_{k_0}$; entonces para todo $\{n_k\} \in \mathcal{F}_1(M), n_k \geq N$ se tiene que $k \geq k_0$ y, por lo tanto, $|f(\{n_k\}) - \alpha| < \varepsilon$.

Observemos que este caso se puede reescribir (con cierto abuso de notación) de la siguiente manera: dados $M' \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada, entonces existe $M \in \mathcal{P}_\infty(M')$ tal que existe $\lim_{n \in M} f(n)$.

Sea ahora $r \geq 2$ y supongamos la afirmación cierta para $r - 1$. Notaremos $f(\{m_1, \cdots, m_k\}) = f(m_1, \cdots, m_k)$ siempre que $m_i \neq m_j$ para todo $i \neq j$. Tomemos $m_1^1, \cdots, m_{r-1}^1 \in \mathbb{N}$ todos distintos, entonces, como $f(m_1^1, \cdots, m_{r-1}^1, \cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, por el caso $r = 1$ (para $M' = \mathbb{N}$) existe $I_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que existe el límite $\lim_{m_r \in I_1} f(m_1^1, \cdots, m_{r-1}^1, m_r) = \alpha_1$.

Tomemos $m_1^2, \cdots, m_{r-1}^2 \in \mathbb{N}$ distintos, como la función $f(m_1^2, \cdots, m_{r-1}^2, \cdot) : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, por el caso $r = 1$ existe $I_2 \in \mathcal{P}_\infty(I_1)$ tal que existe $\lim_{m_r \in I_2} f(m_1^2, \cdots, m_{r-1}^2, m_r) = \alpha_2$.

Razonando de la misma manera, dados $m_1^3, \cdots, m_{r-1}^3 \in \mathbb{N}$ distintos, existe $I_3 \subset I_2$ subconjunto infinito tal que $\lim_{m_r \in I_3} f(m_1^3, \cdots, m_{r-1}^3, m_r) = \alpha_3$.

Veamos ahora que existe $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que para cada elección $m_1, \cdots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$ distintos existe

$$\lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \cdots, m_r) = \lim_{m_r \in M_1} f(\{m_1, \cdots, m_r\}).$$

Para entender cómo hay que tomar M_1, construidos $I_1 \supset I_2 \supset \cdots$, veamos el caso $r = 2$; buscamos M_1 tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista el límite $\lim_{m \in M_1} f(n,m)$. Por lo anterior:

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 1 \quad \exists\, I_1 \subset \mathbb{N} \quad \text{tal que } \exists \lim_{m \in I_1} f(1,m),\\
&\text{para } n = 2 \quad \exists\, I_2 \subset I_1 \quad \text{tal que } \exists \lim_{m \in I_2} f(2,m),\\
&\qquad \vdots\\
&\text{para } n = k \quad \exists\, I_k \subset I_{k-1} \quad \text{tal que } \exists \lim_{m \in I_k} f(k,m).
\end{aligned}$$

Tomemos $M_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{k\text{-ésimo elemento de } I_k\}$ y veamos que sirve: dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $\lim_{m \in I_n} f(n,m) = \alpha_n$ luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m \in I_n \cap [N, \infty)$ vale $|f(n,m) - \alpha_n| < \varepsilon$. Sea $N' = \max\{N; n\text{-ésimo elemento de } I_n\}$ y $m \in M_1 \cap [N'; +\infty)$, como m es mayor que el n-ésimo elemento de I_n, entonces m debe ser el j-ésimo elemento de I_j para algún $j \geq n$, luego $m \in I_j \subset I_n$ y, por lo tanto, $m \in I_n \cap [N, +\infty)$ y $|f(n,m) - \alpha_n| < \varepsilon$.

Si $r \geq 2$, tomamos una biyección $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^{r-1}$ y escribamos $\sigma(n) = (m_1^n, \cdots, m_{r-1}^n)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 1 \quad \exists\, I_1 \subset \mathbb{N} \quad \text{tal que } \exists \lim_{m_r \in I_1} f(\sigma(1), m_r),\\
&\text{para } n = 2 \quad \exists\, I_2 \subset I_1 \quad \text{tal que } \exists \lim_{m_r \in I_2} f(\sigma(2), m_r),\\
&\qquad \vdots\\
&\text{para } n = k \quad \exists\, I_k \subset I_{k-1} \quad \text{tal que } \exists \lim_{m_r \in I_k} f(\sigma(k), m_r).
\end{aligned}$$

Tomemos $M_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{k\text{-ésimo elemento de } I_k\}$ y veamos que sirve: dado $n \in \mathbb{N}$, sabemos que existe $\lim_{m_r \in I_n} f(\sigma(n), m_r) = \alpha_n$ luego, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m_r \in I_n \cap [N, \infty)$ vale $|f(\sigma(n), m_r) - \alpha_n| < \varepsilon$. Sea $N' = \max\{N; n\text{-ésimo elemento de } I_n\}$ y $m_r \in M_1 \cap [N'; +\infty)$, como m_r es mayor que el n-ésimo elemento de I_n, entonces m_r debe ser el j-ésimo elemento de I_j para algún $j \geq n$, luego $m_r \in I_j \subset I_n$ y, por lo tanto, $m_r \in I_n \cap [N, +\infty)$ y $|f(\sigma(n), m_r) - \alpha_n| < \varepsilon$.

Tenemos entonces $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que para cada elección $m_1, \cdots, m_{r-1} \in \mathbb{N}$ distintos existe

$$\lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \cdots, m_r) = \lim_{m_r \in M_1} f(\{m_1, \cdots, m_r\}).$$

Observemos que dicho límite no depende del orden de los m_i (pues f es una función evaluada en conjuntos). Llamemos

$$\lim_{m_r \in M_1} f(m_1, \cdots, m_r) = g(m_1, \cdots, m_{r-1}) = g(\{m_1, \cdots, m_{r-1}\}).$$

Luego, $g : \mathcal{F}_{r-1}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada. Por hipótesis inductiva, existe $M_2 \in \mathcal{P}_\infty(M_1)$ tal que, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\lim_{B \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)} f(B) = \alpha.$$

Además, dados $\varepsilon > 0$ y $B \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)$ existe $N = N(\varepsilon, B)$ (que podemos tomar mayor o igual que $\max B$) tal que para todo $n \geq N, n \in M$ se tiene $|f(B \cup \{n\}) - g(B)| < \varepsilon$, y esto sigue valiendo para $n \in M_2$. Notar que tales n no pertenecen a B.

A continuación construiremos el subconjunto M a tomar. Elegimos $r-1$ elementos cualesquiera de M_2: $m_1 < m_2 < \cdots < m_{r-1}$. Supongamos elegidos n elementos, $m_1 < \cdots < m_n$ para $n \geq r-1$, elegimos $m_{n+1} > m_n$ tal que

$$m_{n+1} > \max_{B \in \{m_1, \cdots, m_n\}} N(2^{-n}, B).$$

Finalmente, tomamos $M = \{m_j\}_j$ subconjunto de M_2. Veamos que sirve, es decir, veamos que existe $\lim_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A)$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{B \in \mathcal{F}_{r-1}(M_2)} g(B) = \alpha$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que para todo $B \subset [m_n, +\infty)$, $B \in \mathcal{F}_{r-1}(M)$ ($\subset \mathcal{F}_{r-1}(M_2)$), se tiene $|g(B) - \alpha| < \varepsilon/2$ y podemos suponer n suficientemente grande para asegurar que $2^{-n} < \varepsilon/2$. Tomamos $N = m_n$; dado $A \in \mathcal{F}_r(M)$, $A \subset [N, +\infty)$, llamamos m_k al máximo de A y $B := A \setminus \{m_k\} \in \mathcal{F}_{r-1}(M)$. Entonces, como $m_k \in M_2$ y $m_k \geq N(2^{-(k-1)}, B)$, vale que $|f(A) - g(B)| < 2^{k-1}$. Luego,

$$|f(A) - \alpha| \leq |f(A) - g(B)| + |g(B) - \alpha| < \varepsilon.$$

Es decir, $\lim\limits_{A \in \mathcal{F}_r(M)} f(A) = \alpha$. □

Nuestro objetivo en esta sección es generalizar el punto (2) del Teorema 2.1.2 en el siguiente sentido: queremos ver qué condiciones hay que pedirle a un subconjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ para que que exista $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ que verifique que $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{V}$ o $\mathcal{P}_\infty(M) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Siguiendo el espíritu de los primeros teoremas de Ramsey, esto se puede interpretar como un problema de coloreo: si los números naturales representan bolitas distinguibles que pintamos de azul si pertenecen a $\mathcal{V}$ y de rojo sino, entonces lo que queremos ver es cuándo es posible elegir infinitas bolitas que sean o todas rojas o todas azules.

Definición 2.1.3. Si un conjunto $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ verifica la dicotomía anterior, diremos que tiene la *propiedad de Ramsey* o que es un *conjunto de Ramsey*.

Sin embargo, resultará más fácil estudiar una propiedad más fuerte. Para eso, dados $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, definimos el conjunto

$$\mathcal{P}_\infty(A, E) = \{B \in \mathcal{P}_\infty(A \cup E) : A \subset B\}.$$

Observación 2.1.4. Valen la siguientes propiedades:

- $\mathcal{P}_\infty(\emptyset, E) = \mathcal{P}_\infty(E)$.
- Si $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow \mathcal{P}_\infty(A_2, E) \subset \mathcal{P}_\infty(A_1, E)$.
- Si $E_1 \subset E_2 \Rightarrow \mathcal{P}_\infty(A, E_1) \subset \mathcal{P}_\infty(A, E_2)$.

Definición 2.1.5. Diremos que $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ es *completamente Ramsey* si dados $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ y $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ vale alguna de las siguientes afirmaciones:

(i) $\exists\ M \in \mathcal{P}_\infty(E)\ /\ \mathcal{P}_\infty(A, M) \subset \mathcal{V}$.

(ii) $\exists\ M \in \mathcal{P}_\infty(E)\ /\ \mathcal{P}_\infty(A, M) \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Observación 2.1.6. Para $A = \emptyset$ y $E = \mathbb{N}$, esta dicotomía es justamente la propiedad de Ramsey.

Observación 2.1.7. Si $\mathcal{V}$ es completamente Ramsey, entonces también lo es $\mathcal{V}^c$.

Esta condición que buscamos será una propiedad de carácter topológico; estudiemos entonces dos posibles topologías en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Sea $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ el conjunto de Cantor, podemos identificar

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \Delta \\ A & \longmapsto & \chi_A. \end{array}$$

Consideramos en Δ la topología inducida por la distancia:

$$d(\delta_1, \delta_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\delta_1^k - \delta_2^k|}{2^k}.$$

Así, $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ hereda una topología métrica, que llamaremos topología de Cantor y que notaremos τ_C. Específicamente, la distancia en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ es

$$d(A_1, A_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_{A_1}(k) - \chi_{A_2}(k)|}{2^k},$$

y una base para la topología son los entornos $B(A, \varepsilon) = \{B \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) : d(A, B) < \varepsilon\}$, variando $A \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ y $\varepsilon > 0$.

También trabajaremos con otra topología en $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, la topología de Ellentuck, que notaremos τ_E.

Definición 2.1.8. *Topología de Ellentuck en* $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$
Diremos que $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ es un abierto-Ellentuck si para todo $E \in \mathcal{U}$ existe $A \subset E$ subconjunto finito tal que $\mathcal{P}_\infty(A, E) \subset \mathcal{U}$.

Observación 2.1.9. Esto define una topología.

- $\emptyset, \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \in \tau_E$ trivialmente.

- $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau_E \Rightarrow \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \in \tau_E$.
  Claramente $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_i \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. Por otro lado, dado $E \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$, como para cada $i = 1, 2$, $E \in \mathcal{U}_i$, $\exists\, A_i \subset E$ tal que $\mathcal{P}_\infty(A_i, E) \subset \mathcal{U}_i$. Sea $A = A_1 \cup A_2 \subset E$ subconjunto finito, luego $\mathcal{P}_\infty(A, E) \subset \mathcal{P}_\infty(A_i, E) \subset \mathcal{U}_i$, y entonces $\mathcal{P}_\infty(A, E) \subset \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$.

- $\mathcal{U}_\alpha \in \tau_E \Rightarrow \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha \in \tau_E$
  Como $\mathcal{U}_\alpha \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ para todo α, también la unión pertenece a $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$. Por otro lado, dado $E \in \bigcup \mathcal{U}_\alpha$, existe α_0 tal que $E \in \mathcal{U}_{\alpha_0}$ y, como $\mathcal{U}_{\alpha_0} \in \tau_E$, existe $A_{\alpha_0} \subset E$ subconjunto finito tal que $\mathcal{P}_\infty(A_{\alpha_0}, E) \subset \mathcal{U}_{\alpha_0} \subset \bigcup_\alpha \mathcal{U}_\alpha$.

Observación 2.1.10. Los conjuntos $\mathcal{P}_\infty(A, E)$ son una base para la topología, variando $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ y $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ (no es necesario pedir $A \subset E$ ya que siempre $A \subset E' = A \cup E$).

Proposición 2.1.11. *La topología de Ellentuck es más fina que la topología de Cantor, es decir, los conjuntos abiertos para la topología de Cantor son también abiertos Ellentuck.*

Demostración. Basta ver que los entornos básicos pertenecen a τ_E: dado $\mathcal{U} = B(A, \varepsilon)$ y $B \in \mathcal{U}$, buscamos un subconjunto finito $F \subset B$ tal que $\mathcal{P}_\infty(F, B) \subset \mathcal{U}$. Como $B \in \mathcal{U}$, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_A(k) - \chi_B(k)|}{2^k} = \delta < \varepsilon.$$

Necesitamos F finito tal que para cada $E \in \mathcal{P}_\infty(F, B)$ valga

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_A(k) - \chi_E(k)|}{2^k} < \varepsilon.$$

Observemos que

$$\sum \frac{|\chi_A(k) - \chi_E(k)|}{2^k} = \sum_{A \setminus E} \frac{1}{2^k} + \sum_{E \setminus A} \frac{1}{2^k} \leq \sum_{A \setminus E} \frac{1}{2^k} + \sum_{B \setminus A} \frac{1}{2^k}.$$

No vamos a poder lograr $A \setminus E = A \setminus B$ en general, pero sí si intersecamos con un conjunto finito:

$$\begin{array}{cccc} & (A \setminus E) \cap \{1, \cdots, k_0\} & = & (A \setminus B) \cap \{1, \cdots, k_0\} \\ \Leftrightarrow & (A \cap \{1, \cdots, k_0\}) \setminus E & = & (A \cap \{1, \cdots, k_0\}) \setminus B \\ \Leftrightarrow & (B \setminus E) \cap A \cap \{1, \cdots, k_0\} & = & (B \cap A \cap \{1, \cdots, k_0\}) \setminus E = \emptyset \\ \Leftrightarrow & B \cap A \cap \{1, \cdots, k_0\} & \subset E. & \end{array}$$

Tomamos $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k>k_0} \frac{1}{2^k} < \varepsilon - \delta$ y $F = B \cap A \cap \{1, \cdots, k_0\}$ y entonces tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\chi_A(k) - \chi_E(k)|}{2^k} &= \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|\chi_A(k) - \chi_E(k)|}{2^k} + \sum_{k>k_0} \frac{|\chi_A(k) - \chi_E(k)|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_0} \frac{|\chi_A(k) - \chi_B(k)|}{2^k} + \sum_{k>k_0} \frac{1}{2^k} < \delta + \varepsilon - \delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Enunciemos y demostremos ahora el Teorema de Nash-Williams (1965) que generaliza el teorema al inicio de esta sección.

Teorema 2.1.12 (Nash-Williams)**.** *Todo abierto Ellentuck es completamente Ramsey.*

Demostración. Primero, introduzcamos algunas definiciones. Si $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ y $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, diremos que (A, E) es un *par*. Dado $\mathcal{U} \in \tau_E$, un par (A, E) se dice *bueno (para $\mathcal{U}$)* si existe $M \in \mathcal{P}_\infty(E)$ tal que $\mathcal{P}_\infty(A, M) \subset \mathcal{U}$. En caso contrario, diremos que es un par *malo*. Observemos lo siguiente:

- Si (A, E) es un par malo y $F \in \mathcal{P}_\infty(E)$, entonces (A, F) también es un par malo.
- Si $E, F \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ son tales que la diferencia simétrica $E \Delta F$ es finita, entonces (A, F) y (A, E) son o los dos buenos o los dos malos. Esto se deduce de lo siguiente: si $M \in \mathcal{P}_\infty(F)$, entonces

$$\underbrace{M}_{\text{infinito}} = \underbrace{M \cap (F \cap E)}_{=M\cap E} \cup \underbrace{M \cap (F \setminus E)}_{\text{finito}}.$$

Luego debe ser $M \cap E$ infinito. Con el mismo razonamiento, si $M \in \mathcal{P}_\infty(E)$ entonces $M \cap F$ es infinito. De esto sigue que si (A, F) es bueno, existe $M \in \mathcal{P}_\infty(F)$ tal que $\mathcal{P}_\infty(A, M) \subset \mathcal{U}$ y, entonces $M \cap E \in \mathcal{P}_\infty(E)$ y $\mathcal{P}_\infty(A, M \cap E) \subset \mathcal{P}_\infty(A, M) \subset \mathcal{U}$, es decir, (A, E) es bueno. Análogamente, si (A, E) es bueno, también lo es (A, F).

Ahora sí, para demostrar el teorema, dados $A \in \mathcal{F}(\mathbb{N}), E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ queremos ver que $\mathcal{U}$ cumple alguna de las condiciones de la definición de completamente Ramsey. Es claro que si (A, E) es bueno entonces se cumple (i). Probemos que si (A, E) es un par malo vale (ii). Lo haremos en tres pasos y sólo usaremos la hipótesis ($\mathcal{U} \in \tau_E$) en el último.

Paso 1. Sean $(A_j)_{j=1}^m$ conjuntos finitos, $E \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que (A_j, E) es malo para todo $1 \leq j \leq m$, entonces existe $n \in E \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j$ y $F \in \mathcal{P}_\infty(E)$ tal que $(A_j \cup \{n\}, F)$ es malo para todo j.

Supongamos que esto es falso. Entonces si tomamos $n_1 \in E \setminus \bigcup_{j=1}^m$ y $E_1 \in \mathcal{P}_\infty(E)$ se tiene que $(A_{p(1)} \cup \{n_1\}, M)$ es bueno para algún $1 \leq p(1) \leq m$ y, por lo tanto, existe $M \in \mathcal{P}_\infty(E_1)$ tal que $\mathcal{P}_\infty(A_{p(1)} \cup \{n_1\}, M) \subset \mathcal{U}$. Cambiando E_1 por M tenemos

$$n_1 \in E \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^m A_j,\ E_1 \in \mathcal{P}_\infty(E),\ \mathcal{P}_\infty(A_{p(1)} \cup \{n_1\}, E_1) \subset \mathcal{U}\,.$$

Como $E_1 \subset E, (A_j, E_1)$ es malo para todo j. Si existiera $n \in E_1 \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j$ y $F \in \mathcal{P}_\infty(E_1)$ tal que $(A_j \cup \{n\}, F)$ es malo para todo j, en particular sería $n \in E \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j$ y $F \in \mathcal{P}_\infty(E)$, lo cual es una contradicción. Entonces tomamos $n_2 \in E_1 \setminus \bigcup_{j=1}^m A_j, E_2 \in \mathcal{P}_\infty(E_1)$ tal que $n_2 > n_1$ y vale que $(A_{p(2)} \cup \{n_2\}, E_2)$ es bueno para algún $1 \leq p(2) \leq m$ y, por lo tanto existe $M \in \mathcal{P}_\infty(E_2)$ tal que $\mathcal{P}_\infty(A_{p(2)} \cup \{n_2\}, M) \subset \mathcal{U}$. Cambiando E_2 por M tenemos

$$n_2 \in E_1 \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^m A_j,\ E_2 \in \mathcal{P}_\infty(E_1),\ \mathcal{P}_\infty(A_{p(2)} \cup \{n_2\}, E_2) \subset \mathcal{U}\,.$$

Inductivamente, construimos una sucesión creciente $(n_k)_{k=1}^\infty \subset E$, una sucesión decreciente de subconjuntos infinitos $(E_k)_{k=0}^\infty$ con $E_0 = E$, y una sucesión $(p(k))_{k=1}^\infty, 1 \leq p(k) \leq m$ tales que

$$n_k \in E_{k-1} \setminus \textstyle\bigcup_{j=1}^m A_j,\ \mathcal{P}_\infty(A_{p(k)} \cup \{n_k\}, E_k) \subset \mathcal{U} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Observar que $n_j \in E_k\ \forall\ j > k$.

Existe $1 \leq p \leq m$ tal que $\{k : p(k) = p\}$ es infinito. Tomamos $M = \{n_k : p(k) = p\} \in \mathcal{P}_\infty(E)$, veamos que $\mathcal{P}_\infty(A_p, M) \subset \mathcal{U}$ (contradiciendo el hecho de que (A_p, E) sea malo). Dado $G \in \mathcal{P}_\infty(A_p, M)$, tomamos k el menor entero tal que $n_k \in G$. Luego tenemos que $A_p \subset G$ y $G \in \mathcal{P}_\infty(A_p \cup \{n_k\} \cup E_k)$ y entonces $G \in \mathcal{P}_\infty(A_p \cup \{n_k\}, E_k) \subset \mathcal{U}$; es decir, probamos que $G \in \mathcal{U}$.

Paso 2. Si (A, E) es malo, entonces existe $M \in \mathcal{P}_\infty(E)$ tal que (B, M) es malo para todo conjunto finito $A \subset B \subset A \cup M$.

Sea $E_0 = E$, como (A, E_0) es malo, por el paso 1, existe $n_1 \in E_0 \setminus A$ y $E_1 \in \mathcal{P}_\infty(E_0)$ tal que $(A \cup \{n_1\}, E_1)$ es malo. Pero como $\mathcal{P}_\infty(A \cup \{n_1\}, M) \subset \mathcal{P}_\infty(A, M)\ \forall\ M \in \mathcal{P}_\infty(E_1)$, no puede ser (A, E_1) bueno. Entonces concluimos que (B, E_1) es malo para todo subconjunto $A \subset B \subset A \cup \{n_1\}$. Supongamos elegidos conjuntos infinitos $E_0 \supset E_1 \supset \cdots \supset E_k$, enteros $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ con $n_j \in E_{j-1}$ tales que (B, E_j) es malo para todo $A \subset B \subset A \cup \{n_1, \cdots, n_j\}$. Entonces, por el paso 1, para $\{A_j\}_{j=1}^m = \{B : A \subset B \subset A \cup \{n_1, \cdots, n_k\}\}$ existe un entero $n_{k+1} \in E_k$, $n_{k+1} > n_k$ y un subconjunto infinito $E_{k+1} \subset E_k$ tal que $(B \cup \{n_{k+1}\}, E_{k+1})$ es malo para todo $A \subset B \subset A \cup \{n_1, \cdots, n_k\}$. Falta ver que $M = \{n_k\}_k$ cumple lo pedido. Tomemos entonces $A \subset B \subset A \cup M$ un conjunto finito y k el mayor número entero tal que $n_k \in B$, luego $B \subset A \cup \{n_1, \cdots, n_k\}$, y sabemos que (B, E_k) es malo; como $M \subset E_k \cup \{n_1, \cdots, n_k\}$ (y observar que $n_j \in E_k \ \forall\ j > k$) se tiene que $E_k \Delta M \subset \{n_1, \cdots, n_k\}$ y por lo tanto la diferencia simétrica es un conjunto finito y, por una observación anterior, concluimos que (B, M) es malo para $\mathcal{U}$.

Paso 3. Probemos el Teorema de Nash-Williams.

Recordemos que $\mathcal{U} \in \tau_E$ y supongamos que (A, E) es malo para $\mathcal{U}$. Por el paso 2, existe $M \in \mathcal{P}_\infty(E)$ tal que (B, M) es malo para todo conjunto finito $A \subset B \subset A \cup M$. Queremos ver que $\mathcal{P}_\infty(A, M) \cap \mathcal{U} = \emptyset$. Supongamos que no: existe $G \in \mathcal{P}_\infty(A, M) \cap \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es abierto-Ellentuck, existe $B \subset G$ subconjunto finito tal que $\mathcal{P}_\infty(B, G) \subset \mathcal{U}$. Observemos que como $G \in \mathcal{P}_\infty(A, M)$ tenemos que $A \subset G$, entonces $A \cup B \subset G$ y es finito; además, $\mathcal{P}_\infty(A \cup B, G) \subset \mathcal{P}_\infty(B, G) \subset \mathcal{U}$. Luego, cambiando B por $A \cup B$ de ser necesario, podemos suponer que $A \subset B$ y entonces (B, M) es bueno, llegando así a un absurdo. □

De este teorema y de la Observación 2.1.7 se deduce automáticamente el siguiente corolario.

Corolario 2.1.13. *Los conjuntos cerrados-Ellentuck son completamente Ramsey. En particular, los cerrados-Cantor son completamente Ramsey.*

En general, este resultado va a ser suficiente; sin embargo en ocasiones usaremos un hecho más fuerte, el siguiente teorema de Galvin y Prikry [GP]:

Teorema 2.1.14. *Sea $\mathcal{V}$ un subconjunto de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ Boreliano para la topología de Ellentuck, entonces $\mathcal{V}$ es completamente Ramsey.*

2.2. El Teorema ℓ_1 de Rosenthal

Recordemos que la pregunta que queríamos resolver es cuándo, dada una sucesión acotada en un espacio de Banach X, es posible extraer una subsucesión débil Cauchy. Si X es reflexivo, la bola unitaria es débil compacta luego, por el teorema de Eberlein-Šmulian, secuencialmente débil compacta; es decir, siempre se puede extraer un sucesón débil Cauchy. Pero esto no es cierto en otros espacios, por ejemplo en ℓ_1, como vimos al comienzo del capítulo. Esto no es casual; Rosenthal probó que esencialmente ℓ_1 es el único contraejemplo.

Para la demostración usaremos el siguiente resultado de sucesiones básicas de [AK, Theorem 1.5.6]

Teorema 2.2.1. *Sea S un conjunto acotado tal que $0 \notin \overline{S}^{\|\cdot\|}$. Son equivalentes:*

(*1*) *S no tiene sucesiones básicas,*

(*2*) *$\overline{S}^w$ es débil compacto y no contiene al 0.*

Ahora sí, demostremos el Teorema ℓ_1 de Rosenthal.

Teorema 2.2.2. *Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión seminormalizada en un espacio de Banach de dimensión infinita X. Entonces ocurre alguna de las siguientes afirmaciones:*

(a) $(x_n)_n$ *tiene una sucesión débil Cauchy o*

(b) $(x_n)_n$ *tiene una subsucesión básica equivalente a la base canónica de* ℓ_1*.*

Demostración. Supongamos que no vale lo afirmado en *(a)*. Consideremos $S = \{x_n\}_n$, entonces no contiene sucesiones débil convergentes. Luego, por Eberlein-Šmulian, $\overline{S}^w$ no es débil compacto y entonces, por el Teorema 2.2.1 concluimos que S debe tener una sucesión básica y entonces podemos obtener una subsucesión básica de $(x_n)_n$. En efecto, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $(x_{\sigma(n)})_n$ es sucesión básica para alguna permutación σ; basta tomar $n_1 = \sigma(1), n_{k+1} = \text{mín}\{\sigma(n) > n_k\}$. Asumamos directamente que $(x_n)_n$ es una sucesión básica, y supongamos también $||x_n|| \leq 1$. Ahora necesitamos encontrar una subsucesión equivalente a la base canónica de ℓ_1. Para esto es que usaremos las herramientas vistas de la teoría de Ramsey.

Dado $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, para medir que tan lejos está $(x_n)_{n\in M}$ de ser débil Cauchy, definimos

$$\text{osc}(M) = \sup_{||x'||\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k\\ m,n\in M}} |x'(x_m) - x'(x_n)|.$$

Observar que si F es un conjunto finito, entonces $\text{osc}(M) = \text{osc}(M \cup F)$.

- Afirmamos: existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que $\forall\ \widetilde{M} \in \mathcal{P}_\infty(M), \text{osc}(\widetilde{M}) = \text{osc}(M) > 0$.
  Usaremos un razonamiento diagonal. Sean $\mathbb{N} = M_0 \supset M_1 \supset M_2 \supset \cdots$ tales que para todo $k \geq 1$ tenemos
  $$\text{osc}(M_k) < \inf_{M'\in\mathcal{P}_\infty(M_{k-1})} \text{osc}(M') + \frac{1}{k}.$$
  Definimos $M = \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{k\text{-ésimo elemento de } M_k\}$. Tenemos que $M \subset M_1$; llamemos $F_1 = \emptyset$. Si $F_2 = \{\text{primer elemento de } M_1\}$, entonces $M \subset M_2 \cup F_2$. En general, si consideramos los conjuntos finitos $F_j = \bigcup_{k=1}^{j}\{k\text{-ésimo elemento de } M_k\}$, tenemos que $M \subset M_k \cup F_k$.
  Dado $\widetilde{M} \in \mathcal{P}_\infty(M)$, es claro que $\text{osc}(M) \geq \text{osc}(\widetilde{M})$. Por otro lado, de la observación se deduce que $\text{osc}(M) \leq \text{osc}(M_k \cup F_k) = \text{osc}(M_k)\ \forall\ k \geq 1$. Observemos además que
  $$\inf_{M'\in\mathcal{P}_\infty(M_{k-1})} \text{osc}(M') \leq \text{osc}(\widetilde{M} \cap M_{k-1}) = \text{osc}(\widetilde{M}).$$
  (La última igualdad vale pues la diferencia es un conjunto finito). Así
  $$\text{osc}(M) \leq \text{osc}(M_k) \leq \text{osc}(\widetilde{M}) + \frac{1}{k} \quad \forall \quad k \geq 1.$$
  Entonces $\text{osc}(M) \leq \text{osc}(\widetilde{M})$ y luego $\text{osc}(M) = \text{osc}(\widetilde{M})$. Notar que $\text{osc}(M) > 0$ pues $(x_n)_{n\in M}$ no es débil Cauchy.

- Observemos que, dado $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$
  $$\frac{\text{osc}(M)}{2} \leq \sup_{||x'||\leq 1} \lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{n>k\\ n\in M}} |x'(x_n)| = \sup_{||x'||\leq 1} \limsup_{n\in M} |x'(x_n)|.$$
  Tomamos $||u'|| \leq 1$ tal que $\limsup_{n\in M} |u'(x_n)| \geq \frac{\text{osc}(M)}{3}$ y $M' \in \mathcal{P}_\infty(M)$ tal que $(u'(x_n))_{n\in M'}$ converge. Si $\theta = \lim_{n\in M'} u'(x_n)$, luego $|\theta| \geq \frac{\text{osc}(M)}{3}$.

Entonces por simplicidad, podemos suponer directamente que para todo $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ se tiene que $\operatorname{osc}(M) = \operatorname{osc}(\mathbb{N}) > 4\delta$, para algún $\delta > 0$ y que existen $||u'|| \leq 1, |\theta| \geq \frac{4\delta}{3} > \delta$ tal que $\lim_{n\to\infty} u'(x_n) = \theta$.

Sea $C = 1 + \delta^{-1} + \delta^{-2}$ y $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ el conjunto formado por los $M = \{m_j\}_{j=1}^\infty$ (ordenados de forma creciente) tal que existe $x' \in X'$ con $||x'|| \leq C$ y $x'(x_{m_j}) = (-1)^j \ \forall\ j$.

- $\mathcal{V}$ es cerrado para la topología de Cantor.
  Tomamos $(M_n)_n \subset \mathcal{V}$ tal que $M_n \xrightarrow{d} M$ y queremos ver que $M \in \mathcal{V}$. Si escribimos $M_n = \{m_j^n\}_j, M = \{m_j\}_j$ tenemos que existen funcionales $x_n' \in X', ||x_n'|| \leq C$ tal que $x_m'(x_{m_j^n}) = (-1)^j \ \forall\ j$. Además vale
  $$\sum_{k=1}^\infty \frac{|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)|}{2^k} \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$
  Como $\{||x'|| \leq C\}$ es w^*-compacto, $\{x_n'\}_n$ tiene un punto de acumulación, x'. Luego $||x'|| \leq C$ y $x'(x_{m_j^n}) = (-1)^j$.
  Veamos que $x'(x_{m_j}) = (-1)^j$. Dado $N \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^N \frac{|\chi_{M_n}(k)-\chi_M(k)|}{2^k} \underset{n}{\longrightarrow} 0$ luego, si $\varepsilon > 0$ es tal que $2^N\varepsilon < 1$ existe n_N tal que para todo $n \geq n_N$ $\sum_{k=1}^N \frac{|\chi_{M_n}(k)-\chi_M(k)|}{2^k} < \varepsilon$, en particular
  $$\frac{|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)|}{2^k} < \varepsilon \quad \forall\ 1 \leq k \leq N, n \geq n_N$$
  y entonces para todo $1 \leq k \leq N, n \geq n_N$ tenemos
  $$|\chi_{M_n}(k) - \chi_M(k)| < \varepsilon 2^k < \varepsilon 2^N < 1$$
  $$\chi_{M_n}(k) = \chi_M(k).$$
  Por ende, para $N = m_1$ y $n \geq n_N$ tenemos $\chi_{M_n}(m_1) = \chi_M(m_1) = 1$ y luego $m_1 \in M_n$. Supongamos $m_i^n \in M_n$ tal que $m_{i+1}^n = m_1$, como $m_i^n < m_1 = N$, $1 = \chi_{M_n}(m_i^n) = \chi_M(m_i^n)$
  $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad m_i^n \in M, \text{ pero } m_1 \text{ era el primer elemento de } M,\\ &\Rightarrow \quad \text{no existe tal } m_i^n, \text{ es decir, } m_1 = m_1^n,\\ &\Rightarrow \quad x'(x_{m_1}) = x'(x_{m_1^n}) = (-1)^1. \end{aligned}$$
  Ahora para $N = m_2$ existe n_{m_2} que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $n_{m_2} > n_{m_1}$, tal que si $n \geq n_N$ tengamos $\chi_{M_n}(m_2) = \chi_M(m_2) = 1$ y entonces $m_2 \in M_n$. Supongamos $m_i^n \in M_n$ tal que $m_{i+1}^n = m_2$, como $m_i^n < m_2 = N$, $1 = \chi_{M_n}(m_i^n) = \chi_M(m_i^n)$
  $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad m_i^n \in M, \mathrm{y} m_i^n < m_2\\ &\Rightarrow \quad m_i^n = m_1\\ &\Rightarrow \quad x'(x_{m_1}) = x'(x_{m_1^n}) = (-1)^1\\ &\Rightarrow \quad \text{debe ser } i \text{ impar}\\ &\Rightarrow \quad x'(x_{m_2}) = x'(x_{m_{i+1}^n}) = 1 = (-1)^2. \end{aligned}$$
  Observar que, como $n \geq n_{m_2} \geq n_{m_1}$, tenemos que $m_i^n = m_1 = m_1^n$, es decir, $i = 1$ y entonces $m_2 = m_2^n$.

Para $N = m_3$ y $n \geq n_N$ (y supongamos además $n_{m_3} > n_{m_3}$), en particular tenemos $\chi_{M_n}(m_3) = \chi_M(m_3) = 1$ y entonces $m_3 \in M_n$. Supongamos $m_i^n \in M_n$ tal que $m_{i+1}^n = m_3$, como $m_i^n < m_3 = N$, $1 = \chi_{M_n}(m_i^n) = \chi_M(m_i^n)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad m_i^n \in M, \text{y} m_i^n < m_3 \\ &\Rightarrow \quad m_i^n \in \{m_1, m_2\} \end{aligned}$$

Pero como $n \geq n_{m_2}$, vimos que $m_1 = m_1^n, m_2 = m_2^n$, luego el término inmediatamente anterior a $m_3 = m_{i+1}^n$ es $m_i^n = m_2$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (-1)^2 = x'(x_{m_2}) = x'(x_{m_i^n}) = (-1)^i \\ &\Rightarrow \quad \text{debe ser } i \text{ par} \\ &\Rightarrow \quad x'(x_{m_3}) = x'(x_{m_{i+1}^n}) = -1 = (-1)^3. \end{aligned}$$

Es claro cómo, iterando este razonamiento, probamos que $x'(x_{m_j}) = (-1)^j$, probando que $\mathcal{V}$ es cerrado para la topología de Cantor y entonces también es cerrado para la topología de Ellentuck, luego, por el Corolario 2.1.13 es completametne Ramsey.

- Dado $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, veamos que existe $M' \in \mathcal{P}_\infty(M) \cap \mathcal{V}$.
  Como $\operatorname{osc}(M) = 4\delta$, luego existe $y' \in B_{X'}$ tal que

  $$\lim_{k\to\infty} \sup_{\substack{m,n>k \\ m,n\in M}} |y'(x_n) - y'(x_m)| \geq 2\delta.$$

  En particular , $(y'(x_m))_{m\in M}$ no converge y existe $M' = \{m_j\}_j \in \mathcal{P}_\infty(M)$ y $|\alpha|, |\beta| \leq 1$ tal que $y'(x_{m_{2j}}) \to \alpha, y'(x_{m_{2j-1}}) \to \beta$ con $|\alpha - \beta| \geq 2\delta$. Llamemos

  $$v' = \frac{2}{\alpha-\beta} y' - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)} u'.$$

  Se tiene que

  $$||v'|| \leq \frac{1}{|\alpha-\beta|} \left| 2 + \frac{\alpha+\beta}{\theta} \right| \leq \frac{1+\theta^{-1}}{\delta} \leq \delta^{-1} + \delta^{-2}.$$

  Además,

  $$v'(x_{m_{2j}}) = \frac{2}{\alpha-\beta} \overbrace{y'(x_{m_{2j}})}^{\to\alpha} - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)} \overbrace{u'(x_{m_{2j}})}^{\to\theta} \longrightarrow \frac{2\alpha}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = 1.$$

  $$v'(x_{m_{2j-1}}) = \frac{2}{\alpha-\beta} \overbrace{y'(x_{m_{2j-1}})}^{\to\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\theta(\alpha-\beta)} \overbrace{u'(x_{m_{2j-1}})}^{\to\theta} \longrightarrow \frac{2\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} = -1.$$

  Sea $c_j = v'(x_{m_j}) - (-1)^j$, como tiende a cero, tomando una subsucesión si fuera necesario, podemos suponer $|c_j|$ suficientemente chico. Como $(x_n)_n$ es una sucesión básica acotada, si $x_n^* \in X'$ son las funciones coordenadas (luego $||x_n^*|| \leq \frac{2K}{||x_n||}$, donde K es la constante de la base), existe una constante tal que $||x_n^*|| \leq B \ \forall \ n$. Supongamos entonces $|c_j| \leq 2^{-j}B^{-1}$ y consideremos

  $$x' = v' - \sum_{j=1}^{\infty} c_j x_{m_j}^*.$$

Tenemos

$$||x'|| \leq \delta^{-1} + \delta^{-2} + \sum_{j=1}^{\infty} |c_j| B \leq \delta^{-1} + \delta^{-2} + 1 = C.$$

Además

$$x'(x_{m_i}) = v'(x_{m_i}) - \sum_{j=1}^{\infty} \left(v'(x_{m_i}) - (-1)^j \right) \overbrace{x^*_{m_j}(x_{m_i})}^{=\delta_{ij}} = (-1)^i.$$

Luego $M' \in \mathcal{V}$.

Entonces no existe M tal que $\mathcal{P}_\infty(M) \cap \mathcal{V} = \emptyset$. Luego, como $\mathcal{V}$ es completamente Ramsey, existe M tal que $\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{V}$.

Sea $M = \{m_j\}_j$ (ordenado de forma creciente), veamos que la sucesión $(m_{2j})_j$ tiene la propiedad de que para toda elección de signos $(\varepsilon_j)_j$ existe $x' \in X', ||x'|| \leq C, x'(x_{m_{2j}}) = \varepsilon_j$. Buscamos $(x_{n_j})_j$ tal que $(x_{m_{2j}})_j \subset (x_{n_j})_j \subset (x_{m_j})_j$ (donde la inclusión es en el sentido de subsucesión) de manera conveniente. Para una tal subsucesión, por definición de $\mathcal{V}$, existe $||x'|| \leq C$ tal que $x'(x_{n_j}) = (-1)^j$; necesitamos que si $x_{m_{2i}} = x_{n_j}$ valga $\varepsilon_i = (-1)^j$.

- ▷ Si $\varepsilon_1 = 1$, tomamos $n_1 = m_1, n_2 = m_2$. Luego, $x_{m_{2\cdot 1}} = x_{n_2}$ y $\varepsilon_1 = 1 = (-1)^2$.
- ▷ Si $\varepsilon_1 = -1$, tomamos $n_1 = m_2$. Luego, $x_{m_{2\cdot 1}} = x_{n_1}$ y $\varepsilon_1 = -1 = (-1)^1$.
  - ▷ En este caso, si $\varepsilon_2 = 1$, tomamos $n_2 = m_4 = m_{2\cdot 2}$. Luego, $x_{m_{2\cdot 2}} = x_{n_2}$ y $\varepsilon_2 = 1 = (-1)^2$.
  - ▷ Si en cambio $\varepsilon_2 = -1$, tomamos $n_2 = m_3, n_3 = m_4 = m_{2\cdot 2}$. Luego, $x_{m_{2\cdot 2}} = x_{n_3}$ y $\varepsilon_2 = -1 = (-1)^3$.

Siguiendo con este razonamiento, nos construimos la sucesión $(x_{n_j})_j$ apropiada.

Por úlitmo, veamos que la sucesión $(x_{m_{2j}})_j$ es equivalente a la base canónica de ℓ_1, probando así el teorema.

- *Caso real:*
  Dada $(a_j)_j \subset \mathbb{R}$, tomamos $\varepsilon_j = sg(a_j)$ y $x' \in X'$ que cumpla lo anterior, luego

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{m_{2j}} \right\| \geq \frac{x'}{C} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_{m_{2j}} \right) = \frac{1}{C} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j sg(a_j) \right) = \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

  Luego $(x_{m_{2j}})_j \asymp (e_n)_n$.

- *Caso Complejo:*
  Dada $(a_j)_j \subset \mathbb{C}$, tomamos $\varepsilon_j = sg(Re(a_j))$ y $x' \in X'$ que cumpla lo anterior, razonando como antes tenemos:

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{m_{2j}} \right\| \geq \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} |Re(a_j)|.$$

  De la misma manera,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{m_{2j}} \right\| \geq \frac{1}{C} \sum_{j=1}^{n} |Im(a_j)|.$$

Entonces

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j x_{m_{2j}} \right\| \geq \frac{2}{C} \sum_{j=1}^{n} |a_j|.$$

Luego $(x_{m_{2j}})_j \asymp (e_n)_n$.

□

Corolario 2.2.3. *Un espacio de Banach X cumple que cada sucesión acotada tiene un sucesión débil Cauchy si y sólo si X no contiene una copia de ℓ_1.*

2.3. El teorema de separación de Elton-Odell

Al comienzo del capítulo, inspirados en el lema de Riesz y en un ejemplo en c_0, nos planteamos el problema de encontrar una sucesión normalizada cuyos términos disten "lo suficiente". Formalmente, nuestro objetivo será probar el siguiente teorema de Elton-Odell.

Teorema 2.3.1 (Elton-Odell)**.** *Para cada espacio de Banach X de dimensión infinita, existen $\varepsilon > 0$ y una sucesión $(x_n)_n \subset S_X$ tales que $||x_n - x_m|| \geq 1 + \varepsilon$ para todo $n \neq m$.*

Vimos en el ejemplo que el teorema vale para c_0 con $\varepsilon = 1$. Para generalizar este hecho, consideremos primero el siguiente resultado.

Teorema 2.3.2 (R. C. James)**.** *Si un espacio de Banach X contiene un subespacio isomorfo a c_0, entonces para cada $\delta > 0$ existe una sucesión $(u_n)_n \subset B_X$ tal que*

$$(1 - \delta) \sup |a_i| \leq || \sum a_i u_i || \leq \sup |a_i|$$

se satisface para cada $(a_i)_i \in c_0$.

Demostración. Si $(x_n)_n$ es una sucesión básica normalizada en X equivalente a la base canónica de c_0, existen constantes n y M tales que para toda sucesión $(a_n)_n \in c_0$ se tiene

$$m \sup_n |a_n| \leq \left\| \sum_n a_n x_n \right\| M \sup_n |a_n|.$$

Consideremos la siguiente sucesión de números reales:

$$K_n = \sup\{|| \textstyle\sum_i a_i x_i|| : ||a||_{c_0} = 1, a \in c_{00}, a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0\}.$$

$(K_n)_n$ es una sucesión decreciente y acotada, $m \leq K_n \leq M$, y por lo tanto tiene límite: $\lim_n K_n = K$ para algún $m \leq K \leq M$.

Fijemos $0 < \theta < 1 < \theta'$ a determinar y tomemos $p_1 \in \mathbb{N}$ tal que $K < K_{p_1} < \theta' K$, y escalares $a^1_{p_1}, a^1_{p_1+1}, \cdots, a^1_{p_2-1}$ tales que $|| \sum_{i=p_1}^{p_2-1} a^1_i x_i|| \geq K$ y $||(0, 0, \cdots, a^1_{p_1}, \cdots, a^1_{p_2-1}, 0, 0, \cdots)||_{c_0} = 1$. Ahora consideramos K_{p_2} y tomamos escalares $a^2_{p_2}, a^2_{p_2+1}, \cdots, a^2_{p_3-1}$ tales que $|| \sum_{i=p_2}^{p_3-1} a^2_i x_i|| \geq K$ y $||(0, 0, \cdots, a^2_{p_2}, \cdots, a^2_{p_3-1}, 0, 0, \cdots)||_{c_0} = 1$. Iterando este proceso, para cada n obtenemos escalares $a^n_{p_n}, a^n_{p_n+1}, \cdots, a^n_{p_{n+1}-1}$ con $||(0, 0, \cdots, a^n_{p_n}, \cdots, a^n_{p_{n+1}-1}, 0, 0, \cdots)||_{c_0} = 1$ y tales que, si llamamos $y_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a^n_i x_i$, tenemos $||y_n|| > K > \theta K$.

Observemos que para cada sucesión $b \in c_0$ de norma 1, existe j tal que $|b_j| = 1$ e i tal que $|a_i^j| = 1$, entonces para cada $N \geq j$ y ciertos a_i (alguno de módulo 1) se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} b_i y_i \right\| = \left\| \sum_{i=p_1}^{p_{N+1}-1} a_i x_i \right\| \leq K_{p_1}.$$

Luego, para toda sucesión $b \in c_0$ vale que

$$\left\| \sum_{i=1}^{\infty} b_i y_i \right\| \leq K_{p_1} \sup_i |b_i| < \theta' K \sup_i |b_i|.$$

Ahora estamos en condiciones de definir la sucesión buscada; consideremos $u_n = \frac{y_n}{\theta' K}$. Por lo anterior, la sucesión cumple $|| \sum a_i u_i || \leq \sup |a_i|$. Falta verificar que cumple la otra desigualdad. Para eso, sean $a_1, \cdots, a_n$ escalares tales que $\sup_i |a_i| = 1$ y k tal que $|a_k| = 1$, escribimos $w = a_k y_k + \sum_{i \neq k} a_i y_i$; entonces

$$\begin{aligned} 2\theta K < 2||y_k|| &= ||2a_k y_k|| = ||w + a_k y_k - \sum_{i \neq k} a_i y_i|| \\ &\leq ||w|| + ||a_k y_k - \sum_{i \neq k} a_i y_i|| \\ &\leq ||w|| + \theta' K \sup_i |a_i| = ||w|| + \theta' K, \end{aligned}$$

luego $||w|| > (2\theta - \theta')K$ y

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \right\| = \frac{1}{\theta' K} \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\| > \frac{2\theta - \theta'}{\theta'}.$$

De esta manera,

$$\left\| \sum_i a_i u_i \right\| > \frac{2\theta - \theta'}{\theta'} \sup_i |a_i|.$$

Basta tomar entonces θ y θ' tales que $\frac{2\theta-\theta'}{\theta'} > 1 - \delta$.

□

De esta manera, podemos probar el Teorema de Elton-Odell para espacios que contengan copias de c_0. En efecto, fijemos $\delta > 0$ a determinar, y $(u_n)_n \subset B_X$ como en el teorema de James, y llamemos $y_k = \sum_{i=1}^k u_i - u_{k+1}$, de manera similar a lo hecho anteriormente en el ejemplo de c_0. Observemos que $1 - \delta \leq ||y_k|| \leq 1$; ahora tomemos $x_k = \frac{y_k}{||y_k||}$ y veamos que sirven. Para esto, basta observar que si escribimos $x_n - x_m = \sum_i a_i u_i$, las coordenadas de la sucesión $(a_i)_i \in c_{00}$ cumplen que $a_i = 0$, $|a_i| = ||y_n||^{-1}$, $|a_i| = ||y_m||^{-1}$ o $|a_i| = |\ ||y_n||^{-1} \pm ||y_m||^{-1}|$, y como en particular el coeficiente $a_{m+1} = ||y_n||^{-1} + ||y_m||^{-1}$ entonces $\sup |a_i| \geq 2$ y tenemos que

$$||x_n - x_m|| = \left\| \sum_i a_i u_i \right\| \geq (1 + \delta)2.$$

De esta manera, querríamos que $2(1-\delta) = 1+\varepsilon$, o equivalentemente, $\varepsilon = 1-2\delta$; basta fijar entonces δ tal que $1 - 2\delta > 0$ y tomar dicho ε.

Faltaría entonces demostrar el Teorema de Elton-Odell en el caso de espacios que no contengan copias de c_0. Para ello, estudiaremos ciertos resultados con el objetivo de establecer un criterio para determinar la presencia o no de c_0. Es en las demostraciones de estos hechos que juega un rol importante los teoremas de Ramsey estudiados al comienzo de este capítulo.

Lema 2.3.3. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces para cada $K \in \mathbb{N}$ el conjunto definido por*

$$\mathcal{B}_K = \{M = (m_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) : \sup_n ||\sum_{i=1}^{n} x_{m_i}|| \leq K\}$$

es cerrado para la topología de Ellentuck.

Demostración. Equivalentemente, probaremos que el conjunto $\mathcal{U} = \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{B}_K$ es abierto. Dado $E = \{m_i\}_i \in \mathcal{U}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $||\sum_{i=1}^{n} x_{m_i}|| > K$ y el conjunto $U = \mathcal{P}_\infty(\{m_i\}_{i=1}^n; E)$ es un entorno básico de E de la topología de Ellentuck. Por otro lado, si $L = \{l_i\}_i \in U$, tenemos que

$$||\sum_{i=1}^{n} x_{l_i}|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_{m_i}|| > K,$$

de donde sigue que $E \in U \subset \mathcal{U}$. □

Para el próximo lema, necesitamos introducir una nueva definición.

Definición 2.3.4. Una sucesión básica $(x_n)_n$ de dice *bimonótona* si para cada n y cada sucesión de escalares $(a_n)_n$ tal que la serie $\sum_n a_n x_n$ converge, se tiene que

$$\text{máx}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|;\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i\right\|\right\} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right\|.$$

Recordemos que, dada una sucesión básica, se podía definir una norma en $\overline{[x_n]}$ equivalente a la orginal para la cual la sucesión era monótona. De manera análoga, si definimos

$$\left|\left|\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right|\right|\right| = \sup_n\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|;\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i x_i\right\|\right\},$$

obtenemos una norma equivalente y $(x_n)_n$ resulta bimonótona; también ahora, si $||x_n|| = 1$ se tiene que $|||x_n||| = 1$.

Lema 2.3.5. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica bimonótona en un espacio de Banach X y para cada $K > 0$ definimos $\mathcal{B}_K$ como antes. Supongamos que $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ satisface que*

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_{K>0} \mathcal{B}_K.$$

Entonces existe $M' \in \mathcal{P}_\infty(M)$ y $K_M > 0$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M') \subset \mathcal{B}_{K_M}.$$

Demostración. Por el Lema 2.3.3 el conjunto $\mathcal{B}_1$ es cerrado y, por lo tanto, completamente Ramsey por el Corolario 2.1.13. Luego existe $M_1 \in \mathcal{P}_\infty(M)$ para el cual

$$\mathcal{P}_\infty(M_1) \subset \mathcal{B}_1 \quad \text{o} \quad \mathcal{P}_\infty(M_1) \cap \mathcal{B}_1 = \emptyset.$$

Si ocurriera lo primero, quedaría probado el lema. Si en cambio estamos en la segunda situación, repetimos el razonamiento anterior para $\mathcal{B}_2$: existe $M_2 \in \mathcal{P}_\infty(M_1)$ para el cual

$$\mathcal{P}_\infty(M_2) \subset \mathcal{B}_2 \quad \text{o} \quad \mathcal{P}_\infty(M_2) \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset.$$

Iteranando este procedimiento, o encontramos $M_{k_0} \in \mathcal{P}_\infty(M_{k_0-1})$ para el cual $\mathcal{P}_\infty(M_{k_0}) \subset \mathcal{B}_{k_0}$ (terminando así la demostración), u obtenemos una sucesión $(M_n)_n \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ que satisface

$$M_{n+1} \in \mathcal{P}_\infty(M_n) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}_\infty(M_n) \cap \mathcal{B}_n = \emptyset.$$

Veamos que esto último no puede suceder. Tomamos ahora la subsucesión de $(x_n)_n$ determinada por una elección de subíndices $(k_n)_n \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ que verifique que $(k_n)_{n\geq j} \in \mathcal{P}_\infty(M_j)$ para cada j; luego usando para cada j la definición de $\mathcal{B}_j$ y la bimonotonía de $(x_{k_i})_{i\geq j}$ tenemos que

$$j < \sup_n \left\| \sum_{i=j}^n x_{k_i} \right\| \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\|.$$

Se sigue que

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\| = \infty,$$

contradiciendo el hecho de que $(k_n)_n \in \mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_K \mathcal{B}_K$.

□

El siguiente lema es el paso previo al criterio que buscamos para determinar la presencia o no de c_0 en un espacio de Banach.

Lema 2.3.6 (W. B. Johnson)**.** *Sea $(x_n)_n$ una sucesión seminormalizada (es decir, acotada superior e inferiormente) en un espacio de Banach X, tal que cada subsucesión admite una subsucesión que verifica que $\sup_n || \sum_{i=1}^n y_i|| < \infty$. Entonces $(x_n)_n$ admite una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0.*

Demostración. Como vamos a apelar al principio de selección de Bessaga-Pelczynski, será conveniente ver primero que la sucesión $(x_n)_n$ debe ser débil nula. Si esto no fuera así, existiría $x' \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$ tal que $|x'(x_n)| > \varepsilon$ para infinitos n. En el caso que X sea un espacio de Banach sobre $\mathbb{R}$, esto quiere decir $x'(x_n) > \varepsilon$ o $-x'(x_n) > \varepsilon$ para infinitos n, $M = (m_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$; sin pérdida de generalidad podemos asumir que $x'(x_{m_i}) > \varepsilon$ para cada i. Por hipótesis, para algún $(k_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(M)$ podemos concluir que

$$n\varepsilon \leq x' \left(\sum_{i=1}^n x_{k_i} \right) \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\| \leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n x_{k_i} \right\| < \infty$$

para todo n, lo cual constituye una contradicción. Si, en cambio, X es un espacio de Banach complejo, entonces $|\mathrm{Re}(x'(x_n))|$ o $|\mathrm{Im}(x'(x_n))|$ sea mayor que $\varepsilon/2$ para todo infinitos n; supongamos lo primero, entonces, cambiando x' por $-x'$ si fuera necesario, como antes podemos suponer que $\mathrm{Re}(x'(x_{m_i})) > \varepsilon/2$ para algún $M = (m_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ obteniendo una contradicción análoga:

$$n\varepsilon \leq \mathrm{Re}\ x'\left(\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}\right) \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}\right\| \leq \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} x_{k_i}\right\| < \infty.$$

Por el Teorema 1.2.5, podemos asumir que $(x_n)_n$ es una sucesión básica seminormalizada, bimonótona y débil nula, ya que la propiedad que tienen las subsucesiones en la hipótesis del teorema y la existencia de una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0 se preservan si se cambia la norma por una equivalente.

Por el Lema 2.3.3, $\bigcup_K \mathcal{B}_K$ es un boreliano de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ para la topología de Ellentuck, por ser unión numerable de cerrados, entonces, por el Teorema 2.1.14 se sigue que es completamente Ramsey y por lo tanto existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_K \mathcal{B}_K \qquad \text{o} \qquad \mathcal{P}_\infty(M) \cap \bigcup_K \mathcal{B}_K = \emptyset.$$

Sin embargo podemos descartar la segunda situación; si existiera tal $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, por hipótesis tendríamos $M' \in \mathcal{P}_\infty(M), M' = \{m_i\}_i$ tal que $||\sum_i x_{m_i}|| < \infty$, es decir, $M' \in \mathcal{B}_K$ para algún K. De esta manera, existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_K \mathcal{B}_K.$$

Estamos ahora en condiciones de usar el Lema 2.3.5: existe $M' = \{m'_i\} \in \mathcal{P}_\infty(M)$ y $K' > 0$ tales que

$$\mathcal{P}_\infty(M') \subset \mathcal{B}_{K'}.$$

Es decir, toda subsucesión $(z_n)_n$ de $(x_{m'_n})_n$ verifica que

$$\sup_n \left\|\sum_{k=1}^{n} z_k\right\| \leq K',$$

de donde se sigue que para cada $F \in \mathcal{F}(\mathbb{N})$ y para cada elección de signos $(\varepsilon_n)_{n\in F}$ tenemos que

$$\left\|\sum_{k\in F} \varepsilon_k x_{m'_k}\right\| \leq 2K',$$

y por lo tanto probamos que $(x_{m'_n})_n$ satisface el criterio de Bessaga-Pelczynski de equivalencia a la base canónica de c_0 (Teorema 1.3.6).

□

Finalmente, el resultado que necesitamos para asegurar la presencia de c_0 es el siguiente.

Lema 2.3.7. *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básica normalizada en un espacio de Banach X. Supongamos que cada subsucesión de $(x_n)_n$ contiene una subsucesión $(y_n)_n$ tal que*

$$\sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} (-1)^i y_i\right\| < \infty.$$

Entonces el espacio $\overline{[x_n]}$ contiene una copia de c_0.

La demostración será muy similar a lo hecho en el lema anterior, pero necesitaremos versiones alternativas de los Lemas 2.3.3 y 2.3.5, que se pueden demostrar de manera análoga.

Lema 2.3.3' *Sea $(x_n)_n$ una sucesión en un espacio de Banach X. Entonces para cada $K \in \mathbb{N}$ el conjunto definido por*

$$\mathcal{A}_K = \{M = (m_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) : \sup_n || \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_{m_i} || \leq K\}$$

es cerrado para la topología de Ellentuck.

Lema 2.3.5' *Sea $(x_n)_n$ una sucesión básia bimonótona en un espacio de Banach X y para cada $K > 0$ definimos $\mathcal{A}_K$ como antes. Supongamos que $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ satisface que*

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_{K>0} \mathcal{A}_K.$$

Entonces existe $M' \in \mathcal{P}_\infty(M)$ y $K_M > 0$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M') \subset \mathcal{A}_{K_M}.$$

Ahora sí, demostremos el Lema 2.3.7.

Demostración. Podemos suponer que $(x_n)_n$ es una sucesión básica bimonótona normalizada, ya que si no, renormalizamos $\overline{[x_n]}$.
Por el Lema 2.3.3', $\bigcup_K \mathcal{A}_K$ es un conjunto $\mathfrak{F}_\sigma$ de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ entonces, por el Teorema 2.1.14 se sigue que es completamente Ramsey y por lo tanto existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_K \mathcal{A}_K \quad \text{o} \quad \mathcal{P}_\infty(M) \cap \bigcup_K \mathcal{A}_K = \emptyset.$$

Sin embargo podemos descartar la segunda situación; si existiera tal $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, por hipótesis tendríamos $M' \in \mathcal{P}_\infty(M), M' = \{m_i\}_i$ tal que $|| \sum_i (-1)^i x_{m_i} || < \infty$, es decir, $M' \in \mathcal{A}_K$ para algún K. De esta manera, existe $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \bigcup_K \mathcal{A}_K.$$

Ahora por el Lema 2.3.5', sin pérdida de generalidad podemos suponer que existe $K' > 0$ tal que

$$\mathcal{P}_\infty(M) \subset \mathcal{A}_{K'}.$$

Es decir, si $M = (m_n)_n$, toda subsucesión $(z_n)_n$ de $(x_{m_n})_n$ verifica que

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} (-1)^i z_k \right\| \leq K'.$$

Llamamos ahora $y_n = x_{m_{2n}} - x_{m_{2n+1}}$, entonces para cada $L = (l_i)_i \in \mathcal{P}_\infty(M)$ tenemos que

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^{n} y_{l_k} \right\| \leq \infty,$$

es decir, $(y_n)_n$ satisface las hipótesis del Lema 2.3.6 y por lo tanto tiene una subsucesión equivalente a la base canónica de c_0, de donde sigue que $\overline{[x_n]}$ contiene una copia de c_0.

□

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema de Elton-Odell.

Demostración. Reproduciendo lo hecho en la demostración del Teorema 1.2.4 obtenemos una sucesión básica normalizada $(x_n)_n$ que satisface la siguiente condición para cada $n \leq m$:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq (1 + 20^{-n}) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|.$$

Podemos suponer que $(x_n)_n$ es una base de X. Recordemos que si X contiene una copia de c_0, con el Teorema de James y la observación que hicimos a continuación, terminaríamos la demostración. Supongamos ahora el caso en que X no contiene copias de c_0; entonces por el Lema 2.3.7 debe existir (pasando a subsucesiones si fuera necesario) una sucesión creciente de números naturales $(m_n)_n$ tal que

$$\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_{m_i} \right\| = \infty. \tag{2.1}$$

Tomemos α un punto límite de la sucesión $(||x_n - x_{n+1} + x_{n+2}||^{-1})_n$, $1 \leq \alpha^{-1} \leq 3$.
Antes de seguir, fijemos cierta notación. Supongamos $\delta > 0$. Vamos a decir que un vector $b \in X$ es un δ-bloque de $(x_n)_n$, o simplemente, δ-bloque, si $||b|| = 1$ y b es de la forma

$$b = \beta \sum_{i=1}^{l} (-1)^{i+1} x_{m_i},$$

donde $m_1 < m_2 < \cdots < m_l$, $|\alpha/\beta - 1| < \delta$ y $l \geq 3$ es un número impar. Copiando la notación de sucesiones en bloque, vamos a escribir $n < b_1 < b_2 < \cdots < b_k$ (donde b_i son δ-bloques) si existen números naturales $n < p_1 < p_2 < \cdots < p_{k+1}$ tales que

$$b_i = \sum_{j=p_i+1}^{p_{i+1}} a_j x_j,$$

Observemos que nuestra elección de α asegura, dado $\delta > 0$ y $n \in \mathbb{N}$, la existencia de un δ-bloque $b > n$. En efecto, existe $m \geq n + 2$ tal que $|\ ||x_m - x_{m+1} + x_{m+2}||^{-1} - \alpha| < \delta$. Entonces, si $b = \beta x_m - x_{m+1} + x_{m+2}$ tomamos $\beta = ||x_m - x_{m+1} + x_{m+2}||^{-1}$ y entonces como $1 \leq \beta \leq 3$

$$|\alpha/\beta - 1| = \frac{|\alpha - \beta|}{\beta} < \frac{\delta}{\beta} < \delta.$$

Ahora, consideremos la siguiente situación: para cada $\delta > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, existen δ-bloques $n < b_1 < \cdots < b_k$ tales que si b es un δ-bloque con $b > b_k$, entonces existe $1 \leq i \leq k$ tal que $||b - b_i|| \leq 1 + \delta$.

Vamos a querer ver que esto no ocurre, pues, en tal caso, existe $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para toda elección de ε-bloques $n_0 < b_1 < \cdots < b_k$ existe otro bloque $b > b_k$ tal que $||b - b_i|| > 1 + \varepsilon$ para todo i, y ahora nos podemos constuir la sucesión cuya existencia afirma el teorema de Elton-Odell: $(y_n)_n \subset S_X$ con $||y_n - y_m|| > 1 + \varepsilon$ siempre que $n \neq m$. Lo hacemos a partir de los siguientes ε-bloques:

$$\begin{array}{lcll} y_1 & = & x_{n_0+1}, & \\ y_2 & > & y_1 & \text{tal que } ||y_2 - y_1|| > 1 + \varepsilon, \\ y_3 & > & y_2 & \text{tal que } ||y_3 - y_i|| > 1 + \varepsilon \quad \text{para} \quad i < 3, \\ y_4 & > & y_3 & \text{tal que } ||y_4 - y_i|| > 1 + \varepsilon \quad \text{para} \quad i < 4, \text{ etc.} \end{array}$$

Entonces, con el objetivo de llegar a una contradicción, suponemos que sí se verifica lo anterior, y lo aplicamos para $\delta_j = 20^{-j}, j \in \mathbb{N}_0$, y elegimos δ_j-bloques, $b_i^j, 1 \leq i \leq k_j$ tales que

$$b_1^1 < b_2^1 < \cdots < b_{k_1}^1 < b_1^2 < b_2^2 < \cdots b_{k_2}^2 < \cdots$$

y tales que si b es un δ_j-bloque, $b > b_{k_j}^j$, entonces existe $1 \leq i \leq k_j$ con $||b - b_i^j|| \leq 1 + \delta_j$.

Observemos que si logramos elegir $b_{m_j}^j \in \{b_1^j < \ldots < b_{k_h}^j\}$, $b_{m_j}^j = \beta_{m_j}^j \sum_k (-1)^{k+1} x_{n_k}$ tales que si llamamos $d_{m_j}^j = \frac{\alpha}{\beta_{m_j}^j} b_{m_j}^j$ tengamos

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n (-1)^j d_{m_j}^j \right\| < \infty, \tag{2.2}$$

entonces tendríamos un absurdo, ya que, por la imparidad de la "longitud" de los $d_{m_j}^j$, obtendríamos un desarrollo como el de (2.1) (es decir, con los signos alternados), pero acotado, concluyendo así la demostración.

Esto lo veremos en dos pasos: primero para n fijo, y luego, usando un procedimiento diagonal.

I.
- Tomamos $1 \leq i_2 \leq k_2$ cualquiera. En particular, como $\delta_2 < \delta_1$, b_{i_2} es un δ_1 bloque y verifica que $b_{i_2}^2 < b_{k_1}^1$ luego, por nuestra suposición, existe $1 \leq i_1 \leq k_1$ tal que $||b_{i_2}^2 - b_{i_1}^1|| \leq 1 + \delta_1$. Definiendo $d_{i_1}^1, d_{i_2}^2$ como antes, tenemos que

$$\begin{aligned} ||(d_{i_1}^1 - d_{i-2}^2) - (b_{i_2}^2 - b_{i_2}^2)|| &\leq ||d_{i_1}^1 - b_{i_1}^1|| + ||d_{i_2}^2 - b_{i_2}^2|| \\ &= ||b_{i_1}^1||\,|\frac{\alpha}{\beta_{i_1}^1} - 1| + ||b_{i_2}^2||\,|\frac{\alpha}{\beta_{i_2}^2} - 1| < \delta_1 + \delta_2 < 2\delta_1. \end{aligned}$$

  Notaremos $\overline{y}$ al vector que se obtiene a partir de y, restándole el último término no nulo de x_k; en general, el vector $\overline{y}^{(q)}$ se obtiene truncándole a y los últimos q términos x_k. Entonces

$$||\overline{d_{i_1}^1 - d_{i_2}^2}|| \leq (1 + 20^{-1})||d_{i_1}^1 - d_{i_2}^2|| < (1 + 20^{-1})(1 + 3\delta_1) < 1 + \delta_0 = 2.$$

  Luego, $||d_{i_1}^1|| \leq 2(1 + 20^{-1}) < 3$.
- Copiemos el razonamiento anterior, pero ahora partiendo de los δ_4-bloques, y eligiendo algún $1 \leq i_4 \leq k_4$. En particular $b_{i_4}^4 > b_{k_3}^3$ y es un δ_3-bloque, entonces existe $1 \leq i_3 \leq k_3$ tal que $||b_{i_3}^3 - b_{i_4}^4|| \leq 1 + \delta_3$.

  Como antes

$$\begin{aligned} ||(d_{i_3}^3 - d_{i-4}^4) - (b_{i_3}^3 - b_{i_4}^4)|| &\leq ||d_{i_3}^3 - b_{i_3}^3|| + ||d_{i_4}^4 - b_{i_4}^4|| \\ &= ||b_{i_3}^3||\,|\frac{\alpha}{\beta_{i_3}^3} - 1| + ||b_{i_4}^4||\,|\frac{\alpha}{\beta_{i_4}^4} - 1| < \delta_3 + \delta_4 < 2\delta_3, \end{aligned}$$

  y entonces $||d_{i_3}^3 - d_{i_4}^4|| < 1 + 3\delta_3$ y

$$||\overline{d_{i_3}^3 - d_{i_4}^4}|| < (1 + 20^{-3})||d_{i_3}^3 - d_{i_4}^4|| < (1 + 20^{-3})(1 + 3\delta_3) < 1 + \delta_2.$$

  Además, siendo $|\ ||d_{i_3}^3|| - 1| < \delta_3$ tenemos

$$||\overline{d_{i_3}^3 - d_{i_4}^4}|| \geq \frac{||d_{i_3}^3||}{1 + 20^{-3}} \geq \frac{1 - \delta_3}{1 + 20^{-3}} \geq 1 - \delta_2.$$

Si llamamos $z_1 = \overline{d^3_{i_3} - d^4_{i_4}}$, entonces $\frac{z_1}{||z_1||}$ es un δ_2-bloque. En efecto, podemos escribir $z_1 = \alpha \sum_k (-1)^{k+1} x_{n_k}$, entonces $\frac{z_1}{||z_1||} = \beta \sum_k (-1)^{k+1} x_{n_k}$, donde $\beta = \frac{\alpha}{||z_1||}$, y $\frac{\alpha}{\beta} - 1 = ||z_1|| - 1$ está acotado por $(1-\delta_2) - 1 = -\delta_2$ y $(1+\delta_2) - 1 = \delta_2$.
Entonces, como $z_1 > b_{k_2}$, existe $1 \leq i_2 \leq k_2$ tal que $||b^2_{i_2} - \frac{z_1}{||z_1||}|| \leq 1 + \delta_2$ y

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}} - (b^2_{i_2} - \frac{z_1}{||z_1||})\right\| &\leq ||d^2_{i_2} - b^2_{i_2}|| + \left\|\overline{d^3_{i_3} - d^4_{i_4}} - \frac{z_1}{||z_1||}\right\| \\ &= \delta_2 + \left\|z_1 - \frac{z_1}{||z_1||}\right\| = \delta_2 + |\ ||z_1|| - 1| < 2\delta_2.\end{aligned}$$

Entonces $\left\|\overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}}\right\| \leq 2\delta_2 + 1 + \delta_2 = 1 + 3\delta_2$ y

$$\left\|\overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}}^{(2)}\right\| \leq (1 + 20^{-2})\left\|\overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}}\right\| \leq (1+20^{-2})(1+3\delta_2) < 1 + \delta_1.$$

Ahora llamamos $z_2 = \overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}}^{(2)}$. Como $1 - \delta_1 \leq ||z_2|| \leq 1 + \delta_1$, $\frac{z_2}{||z_2||}$ es un δ_1-bloque "mayor" que $b^1_{k_1}$, entonces existe $1 \leq i_1 \leq k_1$ tal que $||b^1_{i_1} - \frac{z_2}{||z_2||}|| \leq 1 + \delta_1$ y tenemos que

$$\begin{aligned}\left\|\overline{\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} d^j_{i_j}}^{(2)} - (b^1_{i_1} - \frac{z_2}{||z_2||})\right\| &\leq ||d^1_{i_1} - b^1_{i_1}|| + \left\|\overline{\sum_{j=2}^{4}(-1)^j d^j_{i_j}} - \frac{z_2}{||z_2||}\right\| \\ &= \delta_1 + \left\|z_2 - \frac{z_2}{||z_2||}\right\| = \delta_1 + |\ ||z_2|| - 1| < 2\delta_1.\end{aligned}$$

Luego,

$$\left\|\overline{\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} d^j_{i_j}}^{(3)}\right\| \leq (1 + 20^{-1})\left\|\overline{\sum_{j=1}^{4}(-1)^{j+1} d^j_{i_j}}^{(2)}\right\| \leq (1+20^{-1})(1+3\delta_1) < 1 + \delta_0 = 2.$$

De esta manera, $\left\|\sum_{j=1}^{2}(-1)^{j+1} d^j_{i_j}\right\| \leq (1+20^{-2})2 < 3$.

- En general, partimos de los δ_{2n}-bloques, y repitiendo el razonamiento anterior, obtenemos una n-tupla $(d^1_{i_1}, \cdots, d^n_{i_n})$ tal que $\left\|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} d^j_{i_j}\right\| \leq 3$.

II. Notemos que en lo que hicimos en el paso anterior, la n-tupla que obtuvimos depende de n; para recalcar esto en nuestra notación, notamos a dicha tupla de la siguiente manera: $(d^1_{i_1(n)}, \cdots, d^n_{i_n(n)})$, con $1 \leq i_j(n) \leq k_j$ para todo j y todo n y tal que

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1} d^j_{i_j(n)}\right\| \leq 3.$$

Como $1 \leq i_1(n) \leq k_1$ para todo n, existe $1 \leq i_1 \leq k_1$ tal que $i_1(n) = i_1$ para infinitos valores de n; llamamos $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : i_1(n) = i_1\} \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$.

Como $1 \leq i_2(n) \leq k_2$ para todo $n \in N_1$, existe $1 \leq i_2 \leq k_2$ tal que $i_2(n) = i_2$ para infinitos valores de $n \in N_1$; llamamos $N_2 = \{n \in N_1 : i_2(n) = i_2\} \subset \mathcal{P}_\infty(N_1)$.

De esta manera, nos construimos una sucesión de números enteros $(i_j)_j$ y una sucesión decreciente de conjuntos encajados $(N_j)_j \subset \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, tal que para todo $k \in \mathbb{N}, j \leq k$ vale que $i_j(n) = i_j$ para todo $n \in N_k$.
Llamemos n_k al k-ésimo elemento de N_k y veamos que la sucesión $(d^k_{i_k(n_k)})_k$ cumple (2.2), llegando así al la contradicción que necesitamos para concluir la demostración. Como siempre que $j \leq k$ vale que $n_j, n_k \in N_j$, y luego $i_j(n_j) = i_j(n_k) = i_j$, tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} d^j_{i_j(n_j)} \right\| \leq \underbrace{(1 + 20^{-k})}_{\leq 2} \left\| \sum_{j=1}^{n_k} (-1)^{j+1} d^j_{i_j(n_j)} \right\| \leq 2 \left\| \sum_{j=1}^{n_k} (-1)^{j+1} d^j_{i_j(n_k)} \right\| \leq 6,$$

llegando así a la contradicción buscada.

□

Concluimos así el segundo capítulo, habiendo no sólo demostrado dos resultados importantes del análisis funcional, sino también, habiendo incursionado en la teoría de Ramsey. En el próximo capítulo, seguiremos ahondando en esta rama de la matemática. Si bien probaremos otro teorema de tipo Ramsey, será evidente que los argumentos y las técnicas usadas son similares.

Capítulo 3

El problema de los espacios homogéneos

Diremos que un espacio de Banach de dimensión infinita X es homogéneo si tiene la propiedad de ser isomorfo a todos sus subespacios de dimensión infinita. Notemos que, en tal caso, dicho espacio debe ser separable pues, en particular, si $\{x_1, x_2, \cdots\}$ es un conjunto linealmente independiente en X, se tiene $X \backsimeq \overline{[x_1, x_2, \cdots]}$. Un ejemplo de un espacio con dicha propiedad es ℓ_2. Surge entonces la pregunta de si habrá otros ejemplos; éste es el llamado "Problema de los espacios homogéneos". Combinando dos resultados interesantes en sí mismos, uno de Komorowski y Tomczac-Jaegermann, publicado en 1995, y otro de Gowers, publicado en 2002, responderemos esta pregunta y probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.0.8. *Todo espacio de Banach homogéneo de dimensión infinita es isomorfo a un espacio de Hilbert separable.*

No demostraremos los resultados de [K T-J] sino que nos enfocaremos en el artículo de Gowers, en el cual se utilizan herramientas de la teoría de Ramsey. Siguiendo los pasos de Gowers, lo primero que haremos entonces, es explicar cómo el problema antes mencionado puede reducirse a una pregunta de carácter más combinatorio.

Enunciemos primero los resultados que usaremos, y veamos cómo a partir de éstos, concatenados, se resuelve el problema de los espacios homogéneos.
El resultado de Komorowski y Tomczak-Jaegermann (1993) que usaremos es el siguiente [K T-J].

Teorema 3.0.9. *Sea X un espacio de Banach con cotipo q para algún $q < \infty$. Entonces X tiene un subespacio sin base incondicional o X tiene un subespacio isomorfo a ℓ_2.*

Recordemos que al final del capítulo 1 se definió lo que quiere decir que un espacio tenga cotipo q; de todos modos, en este trabajo no le prestaremos especial atención a este concepto, será suficiente con tener presente que se puede probar que los espacios homogéneos cumplen la propiedad de cotipo del teorema. De hecho, el Teorema 1.2.4 afirma que todo espacio de Banach tiene un subespacio con base; para un espacio homogéneo, esto significa que todos sus subespacios tienen base. Por otro lado, Szankowski probó [S] que si $q > 2$ todo espacio de Banach que no tenga cotipo q, debe tener un subespacio sin base. Luego, dicho espacio no puede ser homogéneo. Así obtenemos el siguiente corolario del Teorema 3.0.9.

Corolario 3.0.10. *Sea X un espacio de Banach homogéneo. Entonces X es isomorfo a ℓ_2 o X no tiene ninguna base incondicional.*

Notemos que en el segundo caso, ningún subespacio de X tiene base incondicional. Este resultado implica entonces una propiedad muy fuerte de los espacios homogéneos no isomorfos a ℓ_2; de hecho, no es nada obvia la existencia de espacios de Banach tal que ninguno de sus subespacios tenga una base incondicional. La existencia de tales espacios fue un problema abierto por muchos años hasta 1991, cuando aparecieron contraejemplos [GM]. Sin embargo, dichos contraejemplos no cumplían la propiedad de ser homogéneos; de hecho, la mayoría cumplía una propiedad prácticamente opuesta. Diremos que un espacio de Banach X es *descomponible* si se puede escribir como suma directa de dos subespacios complementados. De lo contrario, X se dice *indescomponible*; es *hereditariamente indescomponible* si todos sus subespacios son indescomponibles. Posteriormente diremos más acerca de espacios hereditariamente indescomponibles; por el momento, simplemente citaremos los siguientes resultados de [GM].

Teorema 3.0.11. *Un espacio de Banach hereditariamente indescomponible no es isomorfo a ningún subespacio propio.*

Corolario 3.0.12. *Un espacio de Banach hereditariamente indescomponible no es homogéneo.*

Podemos ahora enunciar nuestra primera dicotomía.

Teorema 3.0.13. *Sea X un espacio de Banach, entonces tiene un subespacio W que es hereditariamente indescomponible o que tiene una base incondicional.*

Notemos que esto es realmente una dicotomía ya que una base incondicional permite descomponer a W de no numerables formas. Demostraremos este teorema al final del cápitulo, pero para ello, necesitaremos resultados de tipo Ramsey distintos a los utilizados en el capítulo 2.

Notemos también que este último teorema combinado con los corolarios anteriores resuelven el problema de los espacios homogéneos: supongamos que X es homogéneo; si no fuera isomorfo a ℓ_2 no tendría ninguna base incondicional, por lo tanto debería contener un subespacio hereditariamente indescomponible lo cual implicaría, por homogeneidad, que X es hereditariamente indescomponible, lo cual contradice el Corolario 3.0.12.

Como por Mazur todo espacio tiene un subespacio con base, en particular, todo espacio homogéneo tiene base. Entonces, a partir de ahora, dado un espacio de Banach supondremos que éste tiene base $(e_n)_n$, y asumiremos que ésta es monótona normalizada.

3.1. Resultados preliminares

Será conveniente tener presente el siguiente hecho algebraico que luego usaremos en la demostración del próximo resultado.

Lema 3.1.1. *Sea X un espacio de Banach, $F \subset X$ un espacio vectorial de dimensión infinita y $S \subset X$ un subespacio de codimensión finita, entonces $F \cap S \neq \{0\}$.*

Demostración. Supongamos Y subespacio de dimensión N tal que $S + Y = X$. Tomamos N+1 elementos linealmente independiente de $F, f_1, ..., f_{N+1}$ y sean $x_i \in S$ y $y_i \in Y$ tales que $f_i = x_i + y_i$. Como dim(Y)=N, existen escalares a_i no todos nulos tal que $\sum_{i=1}^{N+1} a_i y_i = 0$. De esta manera, $\sum_{i=1}^{N+1} a_i f_i = \sum_{i=1}^{N+1} a_i x_i$ es un elemento no nulo de $F \cap S$ (pues los f_i los tomamos linealmente independientes). $\square$

En virtud de demostrar el Teorema 3.0.13, consideremos los siguientes lemas que relacionan los conceptos de bases incondicionales y espacios hereditariamente idescomponibles.

Lema 3.1.2. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(*1*) *X no tiene subespacios con bases incondicionales;*

(*2*) *Para cada Y subespacio en bloque de X y para cada número real C, existe una sucesión de vectores de Y $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$ tales que*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} y_i \right\| > C \left\| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i y_i \right\|.$$

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Supongamos que no vale (2): existe un subespacio en bloque $Y \subset X$ y una constante C tal que para toda sucesión $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ en Y se tiene que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \right\|.$$

Observemos que $C \geq 1$

Sea $(y_n)_n$ una base en bloque de Y, veamos que es una base C-incondicional, contradiciendo nuestra hipótesis. Tenemos que ver que, dados escalares $a_1, \ldots, a_n$, y cualquier elección de signos $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ vale:

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i y_i \right\| \leq C \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\|.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\varepsilon_1 = 1$. Definimos

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1 - 1} a_i y_i; \; n_1 = \min\{i \geq 1 : \; \varepsilon_i = -1\};$$

$$x_2 = \sum_{i=n_1}^{n_2 - 1} a_i y_i; \; n_2 = \min\{i \geq n_1 : \; \varepsilon_i = 1\};$$

Inductivamente, si $n_{k+1} = \min\{i \geq n_k : \; \varepsilon_i = (-1)^{k+1}\}$, entonces:

$$x_{k+1} = \sum_{i=n_k}^{n_{k+1}-1} a_i y_i.$$

Así, como la sucesión $(y_n)_n$ es una sucesión en bloque, también lo es la sucesión $(x_n)_n$, y por ser $x_i \in Y$, tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i y_i \right\| &= \|x_1 - x_2 + \ldots\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} x_i \right\| \\ &\leq C \left\| \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} x_i \right\| = C \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i y_i \right\|. \end{aligned}$$

Es decir, $(y_n)_n$ es C-incondicional, contradiciendo la hipótesis de (1).

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos $Z \subset X$ con base incondicional $(z_n)_n$, que podemos suponer normalizada. En efecto, si $\chi(z_n)$ es la constante de incondicionalidad, esto es, para todo $a_j \in \mathbb{R}$, para toda ε_n elección de signos:

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n t_n z_n\right\| \leq \chi(z_n) \left\|\sum_{n=1}^{N} t_n z_n\right\|,$$

entonces

$$\left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n t_n \frac{z_n}{||z_n||}\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{N} \varepsilon_n \frac{t_n}{||z_n||} z_n\right\| \leq \chi(z_n) \left\|\sum_{n=1}^{N} \frac{t_n}{||z_n||} z_n\right\|,$$

y luego $\left(\frac{z_n}{||z_n||}\right)_n$ también es una base incondicional.

Queremos un subespacio $Y \subset X$ y una constante $C > 0$ donde no valga lo afirmado en (2). Por el Lema 3.1.1 podemos considerar la siguiente sucesión $(w_n)_n$:

$$\begin{array}{ll} w_1 = z_1; & \\ w_2 \in [z_k : k \geq 2] \cap \overline{[e_k : k \geq 2]}; & w_2 = \sum_{i=1}^{r_2} a_j z_j, \\ w_3 \in [z_k : k > r_2] \cap \overline{[e_k : k > r_2]}; & w_3 = \sum_{i=r_2+1}^{r_3} a_j z_j, \\ w_4 \in [z_k : k > r_3] \cap \overline{[e_k : k > r_3]}, \text{ etc.} & \end{array}$$

Iteramos el procedimiento, de manera que $w_1 < w_2 < ...$ es una base en bloque de la sucesión $(z_n)_n$, y la normalizamos de ser necesario.

Observemos además que $e_j'(w_n) \to_n 0$ para todo j. Estamos entonces bajo las hipótesis del Teorema 1.3.5 de Bessaga-Petcynski, y luego $(w_n)_n$ tiene una subsucesión $(w_{n_k})_k$ que es sucesión básica equivalente a una sucesión en bloque de los $(e_n)_n, (x_k)_k$. Tomamos $Y = \overline{[x_k]}_k$.

Sean $y_1 < y_2 < ... < y_n$ vectores en Y. Veamos primero que $(y_i)_{i=1}^n$ también es una sucesión básica en bloque con respecto a $(x_k)_k$:

Como $(x_k)_k$ es una sucesión básica en bloque con respecto a la base de X, podemos escribir $x_k = \sum_{i=p_k}^{q_k} a_j e_j$ con $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < ...$

Por otro lado, $y_1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^1 x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=p_k}^{q_k} b_k^1 a_j e_j$, debe tener soporte (en $(e_n)_n$) finito, y podemos suponer $N_1 \leq k \leq M_1$. Por la misma razón, $y_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 x_k$ tiene soporte finito, $N_2 \leq k \leq M_2$. Veamos que vale $M_1 < N_2$. En efecto, esto vale pues, $\mathrm{sop}(y_i) \subset \{p_{N_i}; ...; q_{M_i}\}$ y, al ser $y_1 < y_2$, se tiene $q_{M_1} < p_{N_2}$. Repitiendo este razonamiento, se prueba lo afirmado.

Escribimos entonces: $y_i = \sum_{j=p_i}^{q_i} a_j x_j$ con $p_1 < q_1 < p_2 < q_2 < ... < p_n < q_n$. Recordemos que las sucesiones $(w_{n_k})_k$ y $(x_k)_k$ son equivalentes, entonces existen constantes A y B tales que

$$A \left\|\sum_j b_j w_{n_j}\right\| \leq \left\|\sum_j b_j x_j\right\| \leq B \left\|\sum_j b_j w_{n_j}\right\|,$$

y que $(z_n)_n$ es una sucesión básica incondicional, por lo tanto $(w_n)_n$ y $(w_{n_j})_j$ también son sucesiones básicas incondicionales con constante de incondicionalidad $\chi(z_n)$. Luego:

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^{n} y_i\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(-1)^i y_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i(-1)^i \sum_{j=p_i}^{q_i} a_j x_j\right\| \\
&\leq B\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{j=p_i}^{q_i}(-1)^i a_j w_{n_j}\right\| \leq B\ \chi(z_n)\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{j=p_i}^{q_i} a_j w_{n_j}\right\| \\
&\leq A^{-1}B\ \chi(z_n)\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i \sum_{j=p_i}^{q_i} a_j x_j\right\| = A^{-1}B\ \chi(z_n)\left\|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i y_i\right\|.
\end{aligned}$$

Tomando $C = A^{-1}B\ \chi(z_n)$ contradecimos lo afirmado en (2).

□

Recordemos que del Teorema 3.0.13 se seguía que un espacio de Banach debe tener un subespacio que sea hereditariamente indescomponible o que admita base incondiconal. Recién vimos un hecho equivalente a que no ocurra lo segundo, en términos de subespacios en bloque. A continuación, enunciaremos un resultado de [GM] que establece una equivalencia de la misma naturaleza, esta vez, a ser hereditariamente indescomponible. Omitiremos su demostración ya que ésta sigue las mismas líneas que la anterior.

Lema 3.1.3. *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*

(*1*) *X es hereditariamente indescomponible.*

(*2*) *Para cada par de espacios en bloque Y, Z de X y para cada número real C, existe una sucesión de vectores $y_1 < z_1 < y_2 < \dots < y_n < z_n$ tal que $y_i \in Y$, $z_i \in Z$ y tal que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i + z_i)\right\| > C \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)\right\|.$$

Observación 3.1.4. La condición (2) es equivalente a

(*2'*) *Para cada par de espacios en bloque Y, Z de X y para cada número real C, existe una sucesión de vectores $y_1 < z_1 < y_2 < \dots < y_n$ y un vector z_n con $z_n = 0$ o $z_n > y_n$ tales que $y_i \in Y$, $z_i \in Z$ y tales que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i + z_i)\right\| > C \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i - z_i)\right\|.$$

Demostración. Fijada la constante C y espacios en bloque Y, Z de X, supongamos una sucesión $y_1 < z_1 < y_2 < \dots < y_n$ tal que $y_i \in Y$, $z_i \in Z$ con

$$\left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i + z_i) + y_n\right\| > C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i - z_i) + y_n\right\|.$$

Buscamos $z_n > y_n$ en Z que cumpla (2). Como Z es un espacio en bloque, sin pérdida de generalidad, podemos suponer $e_k \in Z$ para algún $k > \sup(sop(y_n))$; consideremos $z_n = \varepsilon e_k$ con $\varepsilon > 0$ a determinar. Teniendo en cuenta que la base es monótona, entonces

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\right\| \geq \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i+z_i)+y_n\right\| > C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n\right\| > C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n\right\| + \delta,$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente chico. Como

$$C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n-\varepsilon e_k\right\| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n\right\|,$$

existe $\varepsilon > 0$ tal que $C \left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n-\varepsilon e_k\right\| < C\left\|\sum_{i=1}^{n-1}(y_i-z_i)+y_n\right\| + \delta.$

$\square$

Notemos que si tomamos $Y = Z$ en la condición (2) del lema anterior, entonces recuperamos la condición (2) del Lema 3.1.2 (reemplazando n por $2n$). Esto sugiere una manera de probar el Teorema 3.0.13: si X no tiene subespacios con bases incondicionales, esto es (por el Lema 3.1.2), para cada C sus subespacios en bloque contienen una base C-condicional, la idea es encontrar un subespacio en bloque que tenga la propiedad de que dados dos subespacios en bloque y dada cualquier C, contiene una sucesión C-condicional con sus términos pares en un subespacio y los impares en el otro. Por el Lema 3.1.3, este subespacio resulta ser hereditariamente indescomponible.

3.2. Otro teorema de Ramsey

En esta sección expondremos los resultado de Ramsey que necesitamos. Para ello, es necesario introducir definiciones y notaciones nuevas.

Dado X un espacio de Banach (con una base dada), definimos $\sum_f = \sum_f(X)$ al conjunto de las sucesiones de finitos vectores no nulos y de norma a lo sumo 1 tales que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Fijado un subconjunto $\sigma \subset \sum_f$, consideramos el siguiente juego de dos jugadores a quienes llamaremos S y P. Comienza S eligiendo $X_1 \subset X$ un subespacio en bloque, y P elije un elemento $x_1 \in X_1$. En general, en la enésima jugada, el jugador S elije $X_n \subset X$ un subespacio en bloque y P elije x_n un vector en X_n de norma a lo sumo 1. P gana si en algún momento logra construir una sucesión $(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma$; S gana si el juego es infinito.

Una *estrategia para* P es una función ϕ tal que para cada sucesión básica en bloque finita $(x_1, \cdots, x_n)$ y para cada subespacio $Y \subset X$ devuelve un vector $x = \phi(x_1, \cdots, x_n; Y) \in Y$. Decimos que ϕ es una *estrategia ganadora* para P si dada cualquier sucesión de subespacios de $X, X_1, X_2, \cdots$, existe n tal que la sucesión $(x_1, \cdots, x_n)$ definida inductivamente por $x_1 = \phi(\emptyset; X_1)$ y $x_{k+1} = \phi(x_1, \cdots, x_k; X_{k+1})$ está en σ.

Si $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots)$ es una sucesión de escalares positivos, definimos la *expansión* de σ:

$$\sigma_\Delta = \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \textstyle\sum_f : \exists\ (y_1, \cdots, y_n) \in \sigma, ||y_i - x_i|| \leq \delta_i \text{ para todo } i\right\}.$$

También definimos
$\sigma_{-\Delta} = (((\sigma)^c)^c_\Delta$

$$= \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \textstyle\sum_f : (y_1, \cdots, y_n) \in \sum_f, ||y_i - x_i|| \leq \delta_i \text{ para todo } i \Rightarrow (y_1, \cdots, y_n) \in \sigma\right\}.$$

Observación 3.2.1. $(\sigma_{-\Delta})_\Delta \subset \sigma \subset (\sigma_\Delta)_{-\Delta}$

Demostración. Probemos la primera inclusión. Tomemos $(y_1, \cdots, y_n) \in (\sigma_{-\Delta})_\Delta$. Entonces existe $(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma_{-\Delta}$ tal que $||x_i - y_i|| \leq \delta_i$ para todo i, lo cual implica que $(y_1, \cdots, y_n) \in \sigma$, como queríamos ver. Para la otra inclusión, dado $(y_1, \cdots, y_n) \in \sigma$, tomamos $(x_1, \cdots, x_n) \in \sum_f$ tal que $||y_i - x_i|| \leq \delta_i$ para todo i, y queremos ver que $(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma_\Delta$; en efecto, esto vale por definición de σ_Δ. □

A continuación, introduciremos más notación. Si $A = (y_1, \cdots, y_m)$, $Y \subset X$ es un subespacio y $\sigma \in \sum_f$, entonces tenemos:

- $[A; Y] = \left\{(z_n)_{n=1}^N \in \sum_f : z_i = y_i \ \forall\ i \leq n, z_i \in Y\ \forall\ m < i \leq N\right\}$. Si $A = \emptyset$, escribiremos $[Y]$.
- $\sigma[A; Y] = \left\{(x_n)_{n=1}^N : (y_1, \cdots, y_m, x_1, \cdots, x_N) \in [A; Y] \cap \sigma\right\}$.

Así, cuando decimos que P tiene una estrategia ganadora para el juego $\sigma[A; Y]$, sobreentendemos que las jugadas de S son subespacios de Y.

Enunciemos ahora el teorema de Ramsey que nos permitirá demostrar la dicotomía planteada en el Teorema 3.0.13; la demostración quedará pendiente hasta la próxima sección.

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio de Banach, $\sigma \subset \sum_f$ y sea Δ una sucesión de números positivos. Entonces X tiene un subespacio Y tal que $\sigma[Y] = \emptyset$ o P tiene una estrategia ganadora para el juego $\sigma_\Delta[Y]$.*

Decimos que el resultado anterior es un teorema de Ramsey por dos razones. La primera es que la demostración usa varios argumentos ya existentes en la teoría de Ramsey. Además, incluso la afirmación del teorema tiene el carácter de los teoremas de Ramsey que ya vimos en el capítulo anterior: si pensamos que las sucesiones en σ son azules, y las que no están en σ, rojas, entonces el teorema nos da un subespacio tal que todas sus sucesiones en bloque (finitas) son rojas o hay tantas perturbaciones de las sucesiones azules que P tiene una estrategia ganadora para obtener una de ellas.

Para demostrar el teorema anterior, necesitaremos introducir más notación y lemas previos.

- Un $*$-*par* es un par (A, Z) donde $A = (x_1, \cdots, x_n) \in \sum_f$, Z es un subespacio en bloque de dimensión infinita y $A < Z$, esto es, $x_n < z$ para todo $z \in Z$.
- Si $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \cdots), A = (x_1, \cdots, x_n), B = (y_1, \cdots, y_n)$ son sucesiones en bloque del mismo tamaño, diremos que $d(A, B) \leq \Delta$ si $d(x_i, y_i) \leq \delta_i$ para todo i.
- Dado un subconjunto C de $\sum_f$, una Δ-*red* de C es una colección $A_1, \cdots, A_N \in C$ tal que para cada $A \in C$ existe A_i de la misma longitud que A tal que $d(A, A_i) \leq \Delta$.
- Si Π es un conjunto de $*$-pares, escribimos $\Pi_\Delta = \{(A, Z) *\text{-pares} : \exists\ (B, Z) \in \Pi, d(A, B) \leq \Delta\}$.
- Diremos que $\Delta \leq \Delta'$ si $\delta_i \leq \delta_i'$ para todo i; observemos que, en tal caso, $(\Pi)_{\Delta'} \subset (\Pi)_\Delta$.
- Por último, si $x_1 < \cdots < x_n$, notaremos $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ al subespacio generado por $x_1, \cdots, x_n$; así, dada $(x_1, \cdots, x_n) \in \sum_f$, escribiremos $\sum_f(x_1, \cdots, x_n)$ al conjunto formado por las sucesiones $(y_1, \cdots, y_k) \in \sum_f$ tales que $y_i \in \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$.

Observación 3.2.3. Si $||y_i|| \leq 1$, $\sum_f(y_1, \cdots, y_n) \subset \sum_f$ admite una Δ-red.

Demostración. Haremos la demostración para los casos $n = 1, 2$; con el mismo razonamiento se puede probar el caso general.

El caso más sencillo sería para $n = 1$. Consideramos entonces $\sum_f(y)$ y buscamos una colección $(A_i)_i \in \sum_f(y)$ tal que para todo $A \in \sum_f(y)$ exista i tal que $d(A, A_i) \leq \Delta$. Observemos que la única opción es $A = \alpha y, A_i = \alpha_i y$. Como

$$d(A, A_i) \leq \Delta \Leftrightarrow |\alpha_i - \alpha| \leq \delta_1.$$

Como se puede cubrir $[-1; 1]$ con finitos subintervalos de longitud menor que δ_1, basta elegir α_i como los centros de dichos intervalos.

El siguiente caso sería una Δ-red de $\sum_f(y_1, y_2)$. Observemos que, para $A \in \sum_f(y_1, y_2)$, hay dos opciones posibles: $A = (w), w = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j y_j$ o $A = (w_1, w_2), w_1 < w_2$. En la primera situación, buscamos $A_i = (\sum_{j=1}^{2} \alpha_j^i y_j)$ de la misma longitud tal que $d(A, A_i) \leq \Delta$. Basta pedir $|\alpha_j^i - \alpha_j| \leq \frac{\delta_1}{2}$, asi

$$\left\| \sum_{j=1}^{2} (\alpha_j^i - \alpha_j) y_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{2} |\alpha_j^i - \alpha_j| \leq \delta_1.$$

Cubrimos $[-1; 1]$ con finitos intervalos de longitud menor que $\frac{\delta_1}{2}$, y consideremos $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ sus centros.
En la segunda situación, para que $w_1 < w_2$, siendo vectores no nulos, debe ser $w_j = \alpha_j y_j$; buscamos $A_i = (w_1^i, w_2^i)$ con $w_j^i = \alpha_j^i y_j$ tales que $||w_j^i - w_j|| \leq \delta_j$ para $j = 1, 2$. Esto ocurre por ejemplo si $|\alpha_j^i - \alpha_j| \leq \delta_j$. Para $j = 1, 2$, cubrimos el $[-1; 1]$ con finitos subintervalos de longitud menor que δ_j, y considermaos $\alpha_j^1, \cdots, \alpha_j^{N_j}$.
La colección que tomamos es la formada por los A_i determinados en ambas situaciones.

□

Para concluir esta sección, demostremos el siguiente lema y veamos algunas consecuencias que nos serán de utilidad más adelante.

Lema 3.2.4. *Dados $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots$ una sucesión de sucesiones de términos positivos, y $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ sucesión de conjuntos de $*$-pares tales que se verifican las siguientes condiciones:*

(*1*) *Para cada $*$-par (A, Z) y para cada n existe $Z' \subset Z$ tal que $(A, Z') \in \Pi_n$;*

(*2*) *Si $(A, Z) \in \Pi_n$ y $Z' \subset Z$ entonces $(A, Z') \in \Pi_n$.*

Entonces, existe un subespacio $Y \subset X$ tal que $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$ para cada par (A, Z) tal que A sea de longitud por lo menos n y ambos A y Z sean subconjuntos de Y.

Demostración. Construimos una base en bloque $(y_i)_i$ y una sucesion de subespacios en bloque $(Y_i)_i$ inductivamente. Primero tomamos $Y_0 = X,\ y_1 \in Y_0$ tal que $y_1 \in \sum_f$; supongamos $\sum_{i=p_1}^{q_1} \lambda_i e_i$.

Sea $A_1^1, \cdots, A_N^1$ una Δ_1-red de $\sum_f(y_1)$, donde $N = N_1$. Como $(A_1^1, \overline{[e_k : k > q_1]})$ es un $*$-par, por la propiedad (1), existe $V_{1,1}^1 \subset \overline{[e_k : k > q_1]}$ tal que $(A_1^1, V_{1,1}^1) \in \Pi_1$. Iteramos este razonamiento:

$$
\begin{array}{rcl}
(A_2^1, V_{1,1}^1) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{2,1}^1 \subset V_{1,1}^1 \ / \ (A_2^1, V_{2,1}^1) \in \Pi_1, \\
(A_3^1, V_{2,1}^1) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{3,1}^1 \subset V_{2,1}^1 \ / \ (A_3^1, V_{3,1}^1) \in \Pi_1, \\
& \vdots & \\
(A_N^1, V_{N-1,1}^1) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{N,1}^1 \subset V_{N-1,1}^1 \ / \ (A_N^1, V_{N,1}^1) \in \Pi_1.
\end{array}
$$

Así, tenemos $X = Y_0 \supset V_{1,1}^1 \supset V_{2,1}^1 \supset \cdots \supset V_{N,1}^1$ con $(A_i^1, V_{i,1}^1) \in \Pi_1$ para todo $1 \leq i \leq N$. Llamamos $Y_1 = V_{N,1}^1$, y tomamos $y_2 \in Y_1$ tal que $(y_1, y_2) \in \sum_f$. Supongamos $y_2 = \sum_{i=p_2}^{q_2} \lambda_i e_i$ con $p_2 > q_1$.

Sea $A_1^2, \cdots, A_N^2$ una Δ_2-red de $\sum_f(y_1, y_2)$, donde $N = N_2$. Repetimos el razonamiento hecho anteriormente.

$$
\begin{array}{rcl}
(A_1^2, \overline{[e_k : k > q_2]} \cap Y_1) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{1,1}^2 \subset Y_1 \ / \ (A_1^2, V_{1,1}^2) \in \Pi_1, \\
(A_1^2, V_{1,1}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{1,2}^2 \subset V_{1,1}^2 \ / \ (A_1^2, V_{1,2}^2) \in \Pi_2, \\
(A_2^2, V_{1,2}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{2,1}^2 \subset V_{1,2}^2 \ / \ (A_2^2, V_{1,2}^2) \in \Pi_1, \\
(A_2^2, V_{2,1}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{2,2}^2 \subset V_{2,1}^2 \ / \ (A_2^2, V_{2,2}^2) \in \Pi_2, \\
(A_3^2, V_{2,2}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{3,1}^2 \subset V_{2,2}^2 \ / \ (A_3^2, V_{3,1}^2) \in \Pi_1, \\
(A_3^2, V_{3,1}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{3,2}^2 \subset V_{3,1}^2 \ / \ (A_3^2, V_{3,2}^2) \in \Pi_2, \\
& \vdots & \\
(A_N^2, V_{N-1,2}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{N,1}^2 \subset V_{N-1,2}^2 \ / \ (A_N^2, V_{N,1}^2) \in \Pi_1, \\
(A_N^2, V_{N,1}^2) \text{ es un } *\text{-par} & \Rightarrow & \exists\, V_{N,2}^2 \subset V_{N,1}^2 \ / \ (A_N^2, V_{N,2}^2) \in \Pi_2.
\end{array}
$$

Así, tenemos una sucesión $Y_1 \supset V_{1,1}^2 \supset V_{1,2}^2 \supset V_{2,1}^2 \supset V_{2,2}^2 \supset V_{3,1}^2 \supset \cdots \supset V_{N,1}^2 \supset V_{N,2}^2$ con $(A_i^2, V_{i,j}^2) \in \Pi_j$ para todo $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq 2$. Llamamos $Y_2 = V_{N,2}^2$.

Supongamos elegidos $X = Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots \supset Y_{n-1},\ y_1, \cdots, y_{n-1}$ tal que $y_i \in Y_{i-1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$. Tomamos $y_n \in Y_{n-1}$ tal que $(y_1, \cdots, y_n) \in \sum_f$.

Sea $A_1^n, \cdots, A_N^n$ una Δ_n-red de $\sum_f(y_1, \cdots, y_n)$, donde $N = N_n$. Como antes, nos construimos una sucesión de subespacios

$$Y_{n-1} \supset V_{1,1}^n \supset V_{1,2}^n \supset \cdots \supset V_{1,n}^n \supset V_{2,1}^n \supset V_{2,2}^n \supset \cdots \supset V_{2,n}^n \supset \cdots \supset V_{N,1}^n \supset \cdots \supset V_{N,n}^n,$$

con $(A_i^n, V_{i,j}^n) \in \Pi_j$ para todo $1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n$.

Llamamos $Y_n = V_{N,n}^n$.

Observemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, si $Z \subset Y_k$ es un subespacio en bloque de dimensión infinita, en particular se tiene que $Z \subset Y_k \subset V_{i,j}^k$ y entonces, por la propiedad (2), $(A_i^k, Z) \in \Pi_j$

para todo $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq k$. Como $(A_i^k)_{i=1}^{N_k}$ es una Δ_k-red de $\sum_f(y_1, \cdots, y_k)$, para cada $A \in \sum_f(y_1, \cdots, y_k)$, existe i tal que $d(A, A_i^k) \leq \Delta_k$. Tomando $B = A_i^k$ tenemos que $d(A, B) \leq \Delta_k$ y $(B, Z) \in \Pi_j$, es decir, $(A, Z) \in (\Pi_j)_{\Delta_k}$.

Tomemos $Y = \overline{\langle y_1, y_2, \cdots \rangle}$. Veamos que sirve: dado $n, (A, Z)$ $*$-par en Y tal que la longitud de A es al menos $n, Z \subset Y$ subespacio en bloque, queremos ver que $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$. Sea $k \geq n$ tal que $A \in \sum_f(y_1, \cdots, y_k)$, y luego $Z \subset \overline{\langle y_{k+1}, \cdots \rangle} \subset Y_k$; por lo observado anteriormente se concluye que $(A, Z) \in (\Pi_j)_{\Delta_k}$ para todo $j \leq k$. En particular, $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_k}$ y, al ser $\Delta_k \leq \Delta_n$, obtenemos $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$ como queríamos.

□

A menudo usaremos ciertos casos particulares del Lema 3.2.4 por lo cual va a ser conveniente enunciarlos por separado. Vamos a definir un singleton $*$-par como un par (x, Z) donde x es un vector no nulo de norma menor o igual que 1, Z un subespacio en bloque y $x < z$ para todo $z \in Z$; en otras palabras, es un $*$-par (A, Z) donde A es un conjunto de un elemento. Dado Π un conjunto de singleton $*$-pares, $\delta > 0$, escribiremos Π_δ para referirnos al conjunto de $*$-pares (x, Z) para los cuales existe x' tal que $d(x, x') \leq \delta$, $(x', Z) \in \Pi$.

Corolario 3.2.5. *Sea $\delta > 0, \Pi$ un conjunto de singleton $*$-pares tales que*

i. Para cada $*$-par (y, Z) existe $Z' \subset Z$ tal que $(y, Z') \in \Pi$;

ii. Si $(y, Z) \in \Pi$ y $Z' \subset Z$ entonces $(y, Z') \in \Pi$.

Entonces, existe un subespacio $Y \subset X$ tal que $(y, Z) \in \Pi_\delta$ para cada par (y, Z) tal que $y \in Y, Z \subset Y$.

Demostración. Apliquemos el Lema 3.2.4 para $\Delta_i = (\delta, 1, 1, \cdots)$ para todo i, Π_1 el conjunto formado por los $*$-pares de Π y aquellos que no son singleton y, para $i > 1, \Pi_i$ es el conjunto de todos los $*$-pares. Es fácil verificar que las propiedades (i), (ii) implican que estos conjuntos cumplen las propiedades (1) y (2) del lema. Entonces, existe $Y \subset X$ tal que $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$ para todo (A, Z) en Y, con A de longitud a lo sumo n. En particular, $(y, Z) \in (\Pi_1)_{\Delta_1}$ para todo $y \in Y$ y para todo subespacio en bloque $Z \subset Y$. Luego, existe $(y', Z) \in \Pi_1$ $(y' \in \Pi)$ tal que $||y' - y|| < \delta$, esto es, $(y, Z) \in \Pi_\delta$.

□

Corolario 3.2.6. *Dados $\Delta_1 \geq \Delta_2 \geq \cdots$ y $\Pi_1, \Pi_2, \cdots$ en las condiciones del Lema 3.2.4, y supongamos que además verifican la siguiente condición:*

3. si $(A, Z) \in \Pi_n$ entonces A tiene longitud n.

Entonces, existe un subespacio $Y \subset X$ tal que $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$ para cada par (A, Z) tal que A sea de longitud n y ambos A y Z sean subconjuntos de Y.

Demostración. Apliquemos el Lema 3.2.4 a $\Pi'_n = \{(A, Z) : \ long(A) \neq n\} \cup \Pi_n$. Observemos que la propiedad (3) asegura que esta unión sea disjunta. Es fácil ver que las propiedades (1) y (2) del lema siguen valiendo para Π'_n. Entonces, existe $Y \subset X$ tal que $(A, Z) \in (\Pi'_n)_{\Delta_n}$ para todo (A, Z) en Y con A de longitud a lo sumo n. En particular, si la longitud de A es exactamente n; queremos ver que, en ese caso, $(A, Z) \in (\Pi_n)_{\Delta_n}$. Sabemos que existe B de la misma longitud de A tal que $d(A, B) \leq \Delta_n, (B, Z) \in \Pi'_n$ pero, por ser de longitud n, debe ser $(B, Z) \in \Pi_n$.

□

3.3. Demostración del teorema de Ramsey

En esta sección probaremos la dicotomía planteada en el Teorema 3.2.2 y mostraremos cómo éste implica el Teorema 3.0.13. Esto completaría la solución al problema de los espacios homogéneos. Antes de seguir con el próximo resultado, introduciremos algunos nuevos conceptos.

Definición 3.3.1. Dados $Y \subset X$ subespacio en bloque, $\sigma \in \sum_f(X)$, diremos que:

- σ es *grande para* Y si todo $Z \subset Y$ subespacio en bloque tiene una sucesión en σ.
- σ es *estratégicamente grande para* Y si P tiene una estrategia ganadora para el juego $\sigma[Y]$ (recordemos que esto quería decir que las movidas de S son subespacios de Y).

Más en general,

Definición 3.3.2. Dados $Y \subset X$ subespacio en bloque, $\sigma \in \sum_f(X)$, (A, Y) un $*$-par, diremos que:

- σ es *grande para [A; Y]* si todo $Z \subset Y$ subespacio en bloque tiene una sucesión $B \in \sum_f$ tal que $(A, B) \in \sigma$.
- σ es *estratégicamente grande para [A;Y]* si P tiene una estrategia ganadora para el juego $\sigma[A; Y]$.

Observación 3.3.3. σ es grande para $[A; Y] \Leftrightarrow \sigma[A; Y]$ es grande para Y.

Demostración. $\Rightarrow$) Dado $Z \subset Y$ subespacio en bloque, buscamos una sucesión de elementos de Z, en $\sigma[A; Y]$. Por hipótesis, sabemos que existe $B = (z_1, \cdots, z_n) \in \sum_f$ tal que $(A, B) \in \sigma$. Como $(A, z_1, \cdots, z_n) \in [A; Y] \cap \sigma$, se tiene justamente que $(z_1, \cdots, z_n) \in \sigma[A; Y]$.
$\Leftarrow$) Dado $Z \subset Y$ subespacio en bloque, buscamos una tira de elementos de $Z, B \in \sum_f$ tal que $(A, B) \in \sigma$. Sabemos que existe $B \in \sum_f$ tal que $B \in \sigma[A; Y]$, esto es, $(A, B) \in \sigma$. $\square$

La misma equivalencia vale para "estratégicamente grande".

Teorema 3.3.4. *Sea X un espacio de Banach con una base monótona normalizada dada, y sean $\Theta = (\theta_n)_{n=1}^{\infty}$ y $\Delta = (\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ sucesiones de números positivos tales que $2\sum_{i=N}^{\infty} \delta_i \leq \theta_n$ para todo N. Si $\sigma_{-\Theta}$ es grande para X, entonces X tiene un subespacio en bloque Y tal que $\sigma_{2\Delta}$ es estratégicamente grande para Y.*

Demostración. Supogamos que $\sigma \subset \sum_f$ es un conjunto para el cual es resultado es falso. Por hipótesis, $\sigma_{-\Theta}$ es grande para X; en particular, como $\sigma_{-\Theta} \subset \sigma, \sigma$ es grande para X. Por otro lado, tenemos que $\sigma_{2\Delta}$ no es estratégicamente grande para ningún subespacio en bloque de X.

Consideremos

$$\rho = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma : y_1 < \cdots < y_k, \langle y_1, \cdots, y_k \rangle \subsetneq \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \Rightarrow (y_1, \cdots, y_k) \notin \sigma\}.$$

Se tiene que ρ sigue siendo grande para X; en efecto, dado $Z \subset X$ un subespacio en bloque, sabemos que Z contiene sucesiones finitas de σ, entonces tomamos $(z_1, \cdots, z_n) \in \sigma$ de longitud mínima. Observemos que si $n = 1, (z_1) \in \rho$ trivialmente, ya que no existen subespacios en bloque contenidos estrictamente en $\langle z_1 \rangle$. Para $n > 1$, si fuera $(z_1, \cdots, z_n) \notin \rho$, existiría $y_1 < \cdots < y_k$ tal que $\langle y_1, \cdots, y_k \rangle \subsetneq \langle z_1, \cdots, z_n \rangle$ (luego, necesariamente $k < n$) con $(y_1, \cdots, y_k) \in \sigma$, lo cual no puede ser ya que habíamos elegido un elemento de longitud mínima. Además, $\rho_{2\Delta}$ no es estratégicamente grande para ningún subespacio de X, pues $\rho_{2\Delta} \subset \sigma_{2\Delta}$.

Para cada $n \geq 0$ sean $\Delta_n = (\delta_1, \cdots, \delta_n, 0, 0, \cdots), \Gamma_n = 2\Delta - \Delta_n = (\delta_1, \cdots, \delta_n, 2\delta_{n+1}, 2\delta_{n+2}, \cdots)$. Ahora construiremos dos sucesiones: $x_1, x_2, \cdots$ de elementos de X y $X = X_0 \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ sucesión de subespacios en bloque, con las siguientes propiedades:

(1) $x_n \in X_{n-1}$;

(2) ρ_{Δ_n} es grande para $[x_1, \cdots, x_n; X_n]$;

(3) ρ_{Γ_n} no es estratégicamente grande para ningún $[x_1, \cdots, x_n; Z]$ con $Z \subset X$.

Comenzamos eligiendo $X_0 = X$, que cumple las propiedades (2) y (3). Supongamos que no existen $x_1 \in X_0, X_1 \subset X_0$ que cumplan las propiedades. Entonces, para todo $x \in X_0$ para todo $Y \subset X_0$ subespacio en bloque, existe $Z \subset Y$ que cumple alguna de las siguientes propiedades:

a. $\rho_{\Delta_1} \cap [x; Z] = \emptyset$, o

b. ρ_{Γ_1} es estratégicamente grande para $[x; Z]$.

Consideremos Π el conjunto de dichos singleton $*$-pares, (x, Z), y llamemos $\delta = \delta_1$. Veamos que estamos en las condiciones del Corolario 3.2.5. Π cumple la propiedad (i) por definición: dado (x, Y) $*$-par, existe un subespacio en bloque $Z \subset Y$ tal que (x, Z) verifica la condición (a) o la condicion (b), luego, $(x, Z) \in \Pi$. Veamos la propiedad (ii): si $(x, Z) \in \Pi, Z' \subset Z$. Si (x, Z) cumplía la condición (a), entonces también la cumple (x, Z') pues $\rho_{\Delta_1} \cap [x; Z'] \subset \rho_{\Delta_1} \cap [x; Z]$. Si en cambio, (x, Z) cumplía la condición (b), P tiene estrategia ganadora en el juego $\sigma[x; Z]$; en particular, si las movidas de S son subespacios de Z', son subespacios de Z y por lo tanto, P tiene estrategia ganadora en el juego $\sigma[x; Z']$. Entonces, por el corolario, existe $Y \subset X_0$ tal que $(y, Z) \in \Pi_{\delta_1}$ para todo $y \in Y$ y para todo $Z \subset Y$. Entonces, dado $y \in Y, Z \subset Y$, sea $(x, Z) \in \Pi$ con $||x - y|| \leq \delta_1$, hay dos opciones:

- (x, Z) cumple (a): en este caso, $\rho_{\Delta_0} \cap [y; Z] = \emptyset$ pues, si exisitiera $(y, z_2, \cdots, z_n) \in \rho_{\Delta_0} = \rho$, como $||x - y|| \leq \delta_1$, se tendría que $(x, z_2, \cdots, z_n) \in \rho_{\Delta_1} \cap [x; Z]$.
- (x, Z) cumple (b): veamos que ρ_{Γ_0} es estratégicamente grande para $[y; Z]$. Como P tiene estrategia ganadora para el juego $\rho_{\Gamma_1}[x; Z]$, basta ver que $\rho_{\Gamma_1}[x; Z] \subset \rho_{\Gamma_0}[y; Z] = \rho_{2\Delta}[y; Z]$. Si $(x, z_2, \cdots, z_m) \in \rho_{\Gamma_1}$ entonces existe $(x', z_2', \cdots, z_m') \in \rho$ con $||x - x'|| \leq \delta_1$ y $||z_i - z_i'|| \leq 2\delta_1$ para todo $2 \leq i \leq m$, luego tenemos que $||x' - y|| \leq ||x' - x|| + ||x - y|| \leq 2\delta_1$ y por lo tanto $(y, z_1, \cdots, z_m) \in \rho_{2\Delta}$.

En particular, lo anterior vale para $y \in Y, Z = \{z \in Y : y < z\}$. Observemos que el conjunto de los y que cumplen $\rho_{\Delta_0} \cap [y; Z] = \emptyset$ no puede contener un subespacio Z' de Z. Sino, por (2) tenemos $\rho_{\Delta_0} \cap [Z'] \neq \emptyset$ y, por lo tanto, existiría $y_1, \cdots, y_m \in Z'$ tal que $(y_1, \cdots, y_m) \in \rho_{\Delta_0} = \rho$ y, entonces, $\rho \cap [y_1; Z'] \neq \emptyset$, pero esto no es cierto para los elementos y_1 de Z'. Entonces, dado $Z' \subset Z$, necesariamente contiene algún $y \in Z$ tal que ρ_{Γ_0} es estratégicamente grande para $[y; Z]$, luego, el conjunto de los y que tienen dicha propiedad es grande para Y. Pero esto le proporciona a P una estrategia ganadora para el juego $\rho_{\Gamma_0}[Z]$ contradiciendo (3).
Supongamos que tenemos $x_1, \cdots, x_n$ y $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n$ que cumplen lo pedido; si no existieran x_{n+1} y X_{n+1} apropiados, entonces, para todo $x \in X_n$, $Y \subset X_n$ subespacio en bloque, existe $Z \subset Y$ que cumple alguna de las siguientes propiedades:

a. $\rho_{\Delta_{n+1}} \cap [x_1, \cdots, x_n, x; Z] = \emptyset$, o

b. $\rho_{\Gamma_{n+1}}$ es estratégicamente grande para $[x_1, \cdots, x_n, x; Z]$.

Consideremos Π el conjunto de dichos singleton $*$-pares, (x, Z), y llamemos $\delta = \delta_{n+1}$. Como antes, estamos en las condiciones del Corolario 3.2.5, entonces existe un subespacio en bloque $Y \subset X_n$ tal que $(y, Z) \in \Pi_{\delta_{n+1}}$ para todo $y \in Y$ y para todo $Z \subset Y$. Entonces, dado $y \in Y, Z \subset Y$, sea $(x, Z) \in \Pi$ con $||x - y|| \leq \delta_{n+1}$. Entonces hay dos opciones:

- (x, Z) cumple (a): en este caso se tiene que $\rho_{\Delta_n} \cap \ [x_1, \cdots, x_n, y; Z] = \emptyset$ pues, si existiera $(x_1, \cdots, x_n, y, z_1, \cdots, z_m) \in \rho_{\Delta_n}$, entonces tendríamos $(x'_1, \cdots, x'_n, y', z'_1, \cdots, z'_m) \in \rho$ con $||x_i - x'_i|| \leq \delta_i,\ ||y' - y|| \leq 0,\ ||z'_i - z_i|| \leq 0$, es decir, $(x'_1, \cdots, x'_n, y, z_1, \cdots, z_m) \in \rho$ y por lo tanto, como $||x - y|| \leq \delta_{n+1}$, se tendría que $(x, z_1, \cdots, z_n) \in \rho_{\Delta_{n+1}} \cap [x_1, \cdots, x_n, x; Z]$.

- (x, Z) cumple (b): veamos que ρ_{Γ_n} es estratégicamente grande para $[x_1, \cdots, x_n, y; Z]$. Como P tiene estrategia ganadora para el juego $\rho_{\Gamma_{n+1}}[x_1, \cdots, x_n, x; Z]$, es suficiente ver que $\rho_{\Gamma_{n+1}}[x_1, \cdots, x_n, x; Z] \subset \rho_{\Gamma_n}[x_1, \cdots, x_n, y; Z]$. Si $(x_1, \cdots, x_n, x, z_1, \cdots, z_m) \in \rho_{\Gamma_{n+1}}$ entonces existen $||x_i - x'_i|| \leq \delta_i, ||x - x'|| \leq \delta_{n+1}, ||z_i - z'_i|| \leq 2\delta_{n+i}$ para todo $1 \leq i \leq m$ tal que $(x'_1, \cdots, x'_n, x', z'_1, \cdots, z'_m) \in \rho$, luego $||x' - y|| \leq ||x' - x|| + ||x - y|| \leq 2\delta_{n+1}$ y por lo tanto $(x_1, \cdots, x_n, y, z_1, \cdots, z_m) \in \rho_{\Gamma_n}$.

En particular, lo anterior vale para $y \in Y, Z = \{z \in Y : y < z\}$. Observemos que el conjunto de los y que cumplen $\rho_{\Delta_n} \cap [x_1, \cdots, x_n, y; Z] = \emptyset$ no puede contener un subespacio Z' de Z. Sino, por (2) tenemos $\rho_{\Delta_n} \cap [x_1, \cdots, x_n; Z'] \neq \emptyset$ y, por lo tanto, existiría $y_1, \cdots, y_m \in Z'$ tal que $(x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_m) \in \rho_{\Delta_n}$ y, entonces, $\rho_n \cap [x_1, \cdots, x_n, y_1; Z'] \neq \emptyset$, pero esto no es cierto para los elementos y_1 de Z'. Entonces, dado $Z' \subset Z$, necesariamente contiene algún $y \in Z$ tal que ρ_{Γ_n} es estratégicamente grande para $[x_1, \cdots, x_n, y; Z]$, luego, el conjunto de los y que tienen dicha propiedad es grande para Y. Pero esto le proporciona a P una estrategia ganadora para el juego $\rho_{\Gamma_n}[x_1, \cdots, x_n; Z]$ contradiciendo (3).

Consideremos el subespacio $Y = \overline{[(x_n)_n]}$ y veamos que $Y \cap \ \sigma_{-\Theta} = \emptyset$, lo cual contradice el hecho de que $\sigma_{-\Theta}$ sea grande para X. Tomemos entonces $(y_1, \cdots, y_k) \in \sum_f(x_1, \cdots, x_n)$ para algún n. Como $\langle x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \rangle$ es un subespacio en bloque de X_n, por la condición (2), existe $(x'_{n+1}, \cdots, x'_m) \subset \langle x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots \rangle$ sucesión finita tal que $(x_1, \cdots, x_n, x'_{n+1}, \cdots, x'_m) \in \rho_{\Delta_n}$, es decir que existe $(x'_1, \cdots, x'_n, x'_{n+1}, \cdots, x'_m)$ con $||x_i - x'_i|| \leq \delta_i\ \forall\ i \leq n, (x'_1, \cdots, x'_n, x'_{n+1}, \cdots, x'_m) \in \rho$. Si escribimos $y_j = \sum_{i=p_j}^{q_j} \alpha_i x_i,\ 1 \leq p_1 < q_1 < \cdots < q_k \leq n$, definimos $y'_j = \sum_{i=p_j}^{q_j} \alpha_i x'_i$. Como $\langle y'_1, \cdots, y'_k \rangle \subsetneq \langle x'_1, \cdots, x'_m \rangle$, por definición de ρ tenemos que $(y'_1, \cdots, y'_k) \notin \sigma$. Pero

$$||y_j - y'_j|| \leq \sum_{i=p_j}^{q_j} |\alpha_i|\ ||x_i - x'_i|| \leq 2 \sum_{i=p_j}^{q_j} \delta_i \leq 2 \sum_{i=j}^{\infty} \delta_i \leq \theta_i.$$

(Aquí estamos usando que $p_j \geq j$ y que, como la base $(e_n)_n$ es monótona normalizada, y $||y_j|| \leq 1$, se tiene que $|e'_l(y_j)| \leq 2$ para cada j, l). Esto significa que $(y_1, \cdots, y_k) \notin \sigma_{-\Theta}$, como habíamos afirmado. $\square$

Ahora con el resultado anterior podemos probar el Teorema 3.2.2. Recordemos el enunciado.

Teorema 3.2.2 *Sea X un espacio de Banach, $\sigma \subset \sum_f$ y sea Δ una sucesión de números positivos. Entonces X tiene un subespacio Y tal que $\sigma[Y] = \emptyset$ o P tiene una estrategia ganadora para el juego $\sigma_\Delta[Y]$.*

Demostración. Supongamos que no existe Y tal que $\sigma[Y] = \emptyset$, entonces, σ es grande para X. Llamemos $\tau = \sigma_{\Delta/2}, \Theta = \Delta/2$, entonces tenemos que $\tau_{-\Theta}$ es grande para X, pues por la observación 2.1 , $\sigma \subset (\sigma_\Theta)_{-\Theta} = \tau_{-\Theta}$. Si Δ' es tal que $2\sum_{i=N}^{\infty} \delta'_i \leq \delta_N/2$, entonces, por el Teorema 3.3.4 (para

$\tau, \Delta', \Theta)$, existe $Y \subset X$ subespacio en bloque tal que $\tau_{2\Delta'}$ es estratégicamente grande para Y. Como $2\delta_i' \leq \delta_i/2 = \theta_i$, tenemos que $\tau_{2\Delta'} \subset \tau_\Theta$. Si vemos que $\tau_\Theta \subset \sigma_\Delta$, probaríamos entonces que σ_Δ es estratégicamente grande para Y y que, por lo tanto, P tiene estrategia ganadora para el juego $\sigma_\Delta[Y]$, como queríamos probar. Veamos entonces esa inclusión: dado $(x_1, \cdots, x_n) \in \tau_\Theta$, existe $(y_1, \cdots, y_n) \in \tau = \sigma_{\Delta/2}$ con $||x_i - y_i|| \leq \delta_i/2$. Luego existe $(y_1', \cdots, y_n') \in \sigma$ tal que $||y_i - y_i'|| \leq \delta_i/2$. Así, tenemos $||x_i - y_i'|| \leq \delta_i$ y por lo tanto $(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma_\Delta$. □

Al comienzo de este capítulo definimos los espacios hereditariamente indescomponibles. Antes de continuar, vamos a introducir un concepto estrechamente relacionado.

Definición 3.3.5. Un espacio de Banach X se dice *C-hereditariamente indescomponible* si para todo par de subespacio en bloque Y y Z existen vectores $y \in Y, z \in Z$ con soporte finito tales que $||y + z|| > C||y - z||$.

Observación 3.3.6. La condición para que un espacio sea C-hereditariamente indescomponible es equivalente a la condición (2) del Lema 3.1.3 para ese mismo valor de C.

Demostración. Asumamos primero que X cumple la condición (2) del lema: para cualquier par de subespacios en bloque de X, Y y Z, existen $y_1 < z_1 < \cdots < y_n < z_n$, $y_i \in Y, z_i \in Z$ tal que $\|\sum_{i=1}^n (y_i + z_i)\| > C \|\sum_{i=1}^n (y_i - z_i)\|$. Llamando $y = \sum_{i=1}^n y_i \in Y$, $z = \sum_{i=1}^n z_i \in Z$, tenemos que $||y + z|| > C||y - z||$. Es decir, X es C-hereditariamente indescomponible.

Recíprocamente, supongamos ahora que X es C-hereditariamente indescomponible y tomemos Y y Z subespacios en bloque. Definimos $Y' \subset Y, Z' \subset Z$ subepsacios en bloque de la siguiente manera:

$$y_1' \in Y \cap [e_1,\ e_2, \cdots],\ y_1' = \sum_{i=p_1}^{q_1} \alpha_i e_i;$$

$$z_1' \in Z \cap [e_{q_1+1},\ e_{q_1+2}, \cdots],\ z_1' = \sum_{i=p_2}^{q_2} \alpha_i e_i;$$

$$y_1' \in Y \cap [e_{q_2+1},\ e_{q_2+2}, \cdots],\ y_2' = \sum_{i=p_3}^{q_3} \alpha_i e_i.$$

Así obtenemos $(y_n')_n$, $(z_n')_n$ sucesiones en bloque y definimos: $Y' = \overline{[y_n']}$, $Z' = \overline{[z_n']}$. Como estamos suponiendo que X es C-hereditariamente indescomponible, existen $y = \sum a_i e_i \in Y'$, $z = \sum b_i e_i \in Z'$ con soporte finito tales que $||y + z|| > C||y - z||$. Por cómo fueron construidos Y' y Z' tenemos que los soportes de y y z son disjuntos. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que vale que $\inf(sop(y)) < \inf(sop(z))$. Sean:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{i \in sop(y) :\ i < \inf\left(sop(z)\right)\}, \\
J_1 &= \{j \in sop(z) :\ j < \inf(sop(y) \setminus I_1)\}, \\
I_2 &= \{i \in sop(y) \setminus I_1 :\ i < \inf\left(sop(y) \setminus J_1\right)\}, \\
J_2 &= \{j \in sop(z) \setminus J_1 :\ j < \inf(sop(y) \setminus I_2)\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Tomamos entonces $y_k = \sum_{i \in I_k} a_i e_i$, $z_k = \sum_{j \in J_k} b_j e_j$; cumplen que $y_1 < z_1 < \cdots < y_n < z_n$ para algún n (notemos que estamos asumiendo que la sucesión termina con un elemento de Z'; esto es posible por la Observación 3.1.4) y:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}(y_k+z_k)\right\| = ||y+z|| > C||y-z|| = C\left\|\sum_{k=1}^{n}(y_k-z_k)\right\|.$$

□

Así, X es hereditariamente indescomponible si y sólo si es C-hereditariamente indescomponible para todo C.

El siguiente resultado nos brinda la relación entre bases incondicionales y subespacios hereditariamente indescomponibles que necesitaremos para demostrar el teorema final.

Corolario 3.3.7. *Sea X un espacio de Banach, entonces X contiene una sucesión básica en bloque C-incondicional o para todo $\varepsilon > 0$ tiene un subespacio en bloque que es $(C-\varepsilon)$-hereditariamente indescomponible.*

Demostración. Supongamos que X no contiene ninguna sucesión básica en bloque C-incondicional. Consideremos $\sigma = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \sum_f :$ sucesiones C-condicionales con $||x_i|| = 1$ para algún $i\}$. Observemos que σ es grande para X: si $Y \subset X$ subespacio en bloque, como X no tiene sucesiones básicas en bloque C-incondicionales, Y contiene una sucesión en bloque $(y_1, \cdots, y_n)$ $C-$condicional; dividiendo por $\max ||y_i||$ obtenemos un elemento de σ.
Dado $\Delta \geq 0$, por el Teorema 3.2.2, existe $W \subset X$ subespacio en bloque tal que P tiene estrategia ganadora en el juego $\sigma_\Delta[Y]$ (no puede ser $\sigma[W] = \emptyset$ pues σ es grande). Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\eta > 0$ a determinar y Δ tal que $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i = \eta$. Veamos que el espacio W correspondiente a este Δ es $(C-\varepsilon)$-hereditariamente indescomponible. Dados $Y, Z \subset W$ subespacios en bloque, por la observación, basta encontrar $y_1 < z_1 < \cdots < y_n < z_n,\ y_i \in Y,\ z_i \in Z$ tales que

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\right\| > (C-\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|.$$

Consideremos la siguiente estrategia para S: elegir los subespacios alternadando entre Y y Z: $X_{2n-1} = Y,\ X_{2n} = Z$. Pero como σ_Δ es estrategicamente grande para W, P puede vencer la estrategia de S, es decir, existen $y_1 < z_1 < \cdots < y_n < z_n,\ y_i \in Y,\ z_i \in Z$ tal que $(y_1, z_1, \cdots, y_n, z_n) \in \sigma_\Delta$. Observemos nuevamente que podemos asumir que P gana en una movida par.
Existen entonces $(y'_1, z'_1, \cdots, y'_n, z'_n) \in \sigma$ tal que $||y'_i - y_i|| \leq \delta_{2i-1},\ ||z'_i - z_i|| \leq \delta_{2i}\ \forall\ i \leq n$. Tenemos entonces las siguientes desigualdades:

- Si $(x_1, \cdots, x_n) \in \sigma$, $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\| \geq 1/2$.
  Sea k tal que $||x_k|| = 1$, usando (dos veces) que la base es monótona, tenemos que

  $$1 = ||x_k|| \leq \left\|\sum_{i=k}^{n} x_i\right\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{k-1} x_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\| + \left\|\sum_{i=1}^{k-1} x_i\right\| \leq 2\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|.$$

  En particular, $\|\sum_{i=1}^{n}(y'_i - z'_i)\| \geq 1/2$.

- $\left\|\sum_{i=1}^{n}(y'_i+z'_i)\right\| > C\left\|\sum_{i=1}^{n}(y'_i-z'_i)\right\|$ pues $(y'_1, \cdots, z'_n) \in \sigma$,

- $$\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'+z_i')\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-y_i)+(z_i'-z_i)\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-y_i)\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}(z_i'-z_i)\right\| \leq \sum_{i=1}^{2n}\delta_i \leq \eta,$$
- $$\left|\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-z_i')\right\|-\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-y_i)+(z_i'-z_i)\right\| \leq \eta.$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i+z_i)\right\| &\geq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'+z_i')\right\|-\eta \\ &> C\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-z_i')\right\|-\eta \\ &\geq C\left(\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|-\eta\right)-\eta \\ &= C\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|-\eta(C+1).\end{aligned}$$

Basta ver que $-\eta(C+1) \geq -\varepsilon\left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|$ o, equivalentemente,

$$\frac{\eta(C+1)}{\varepsilon} \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|.$$

Tomamos η tal que $\frac{\eta(C+1)2}{(1-2\eta)} \leq \varepsilon$, y entonces:

$$\frac{\eta(C+1)}{\varepsilon} \leq \frac{1}{2}-\eta \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i'-z_i')\right\|-\eta \leq \left\|\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)\right\|.$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema 3.0.13.

Teorema 3.0.13 *Sea X un espacio de Banach, entonces tiene un subespacio W que es hereditariamente indescomponible o que tiene una base incondicional.*

Demostración. Supongamos que ningún subespacio tiene base incondicional, entonces, por el Lema 3.1.2 para cada C, cada subespacio en bloque de X contiene una sucesión básica en bloque C-condicional. Usando el Corolario 3.3.7 reiteradamente, para $\varepsilon = 1$, tenemos:

$$\begin{aligned} C=2: &\quad \exists\, W_1 \subset X \text{ 1-hereditariamente indescomponible,} \\ C=3: &\quad \exists\, W_2 \subset W_1 \text{ 2-hereditariamente indescomponible, etc.}\end{aligned}$$

Así obtenemos $W_1 \supset W_2 \supset \cdots$ subespacios en bloque, con W_n n-hereditariamente indescomponible. Tomamos $w_n \in W_n$ tal que $(w_n)_n$ es una sucesión básica en bloque y consideramos $W = \overline{\langle w_n \rangle}$;

veamos que es hereditariamente indescomponible. Dados $Y, Z \subset W$ subespacios en bloque, y C una constante, tomamos $n \geq C$. Observemos que $Y \cap W_n$ y $Z \cap W_n$ son subespacios de dimensión infinita. En efecto, si $Y = \langle y_1, y_2, \cdots \rangle$, $y_i = \sum_{j=p_i}^{q_i} \alpha_i w_i$, si k es tal que $p_k > n$, entonces $y_i \in W_n$ para todo $i \geq k$. Como W_n es n-hereditariamente indescomponible, para todo par de subespacios en bloque de dimensión infinita $Y' \subset Y \cap W_n, Z' \subset Z \cap W_n$ existen $y_1 < z_1 < \cdots < y_k < z_k,\ y_i \in Y', z_i \in Z'$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} (y_i + z_i) \right\| > n \left\| \sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i) \right\| \geq C \left\| \sum_{i=1}^{k} (y_i - z_i) \right\|.$$

Luego, como C era arbitraria, por el Lema 3.1.3 concluimos que W es hereditariamente indescomponible. $\square$

Bibliografía

[AK] F. Albiac, N. Kalton, *Topics in Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, 233. Springer, New York, 2006.

[AT] S. A. Argyros, S. Todorcevic, *Ramsey Methods in Analysis*, Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.

[D] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces.* Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer-Verlag, New York, 1984.

[EO] J. Elton, E. Odell. The unit ball of every infinite-dimensional normed linear space contains a $(1+\varepsilon)-$separated sequence. Colloq. Math 44 (1981), no. 1, 105-109.

[G1] W. T. Gowers. An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies, *Annals of Mathematics*, 156 (2002), 797-833.

[G2] . T. Gowers. Ramsey methods in Banach spaces. *Handbook of the geometry of Banach spaces*, Vol. 2, 10711-1097, North-Holland, Amsterdam, 2003-

[GM] W. T. Gowers y B. Maurey, The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.* 6 (1993), 851-874.

[GP] F. Galvin y K. Prikry, *Borel sets and Ramsey's theorem*, J. Symbolic Logic 38, 193-198.

[K T-J] R. A. Komorowski y N. Tomczak-Jaegermann, Banach Spaces without local unconditional structure, *Israel J. Math* 89 (1995), 205-226.

[LT] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. 9 (1971), 263-269.

[R] H. P. Rosenthal. A characterization of Banach spaces containing l1. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.S. 71 (1974), 2411-2413.

[S] A. Szankowsky, Subspaces without the approximation property, *Israel J. Math.* 30 (1978), 123-129.

[W] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1991.