



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Tesis de Licenciatura

Sobre la longitud de las secuencias malas controladas
en cuasi-órdenes buenos

Sergio Alejandro Abriola

Director: Santiago Figueira

Fecha de Presentación: 30/11/2011

Resumen

Una secuencia x_0, x_1, x_2, \dots sobre un conjunto C provisto de un cuasi-orden \leq es *mala* cuando $i < j$ implica $x_i \not\leq x_j$. A priori, la longitud de tales secuencias no está acotada. Las secuencias *controladas* son aquellas en donde se puede medir de alguna manera efectiva cuánto puede crecer el tamaño de cada x_i . Los cuasi-órdenes bien fundados y este tipo de secuencias malas controladas son muy usados en pruebas de decidibilidad en autómatas con contadores o estructuras de datos relacionadas en algoritmia, verificación, model-checking, lógica, etc.

En esta tesis estudiamos cotas superiores e inferiores para la longitud máxima de secuencias malas controladas sobre algunos cuasi-órdenes, y clasificamos estas cotas en la Jerarquía Rápidamente Creciente. Puntualmente, damos una demostración constructiva y sencilla del Lema de Dickson, que a su vez nos permite acotar la longitud máxima de las secuencias malas de tuplas de naturales y el orden producto. Estudiamos la longitud de las secuencias malas controladas de conjuntos de tuplas de naturales con el orden mayorante, y también investigamos el caso de los multiconjuntos. La técnica general que usamos consiste en reducir el problema de la longitud de secuencias malas controladas sobre un cuasi-orden al de la longitud de las secuencias decrecientes y controladas más largas sobre un buen orden.

Índice

1. Introducción	5
1.1. Secuencias malas	6
1.2. La Jerarquía Rápidamente Creciente	9
2. Secuencias malas de n-uplas	15
2.1. Notación	15
2.2. Lema de Dickson Constructivo	15
2.3. Reduciendo el problema del orden producto al lexicográfico	17
2.4. Cota superior	18
2.5. Cota inferior	20
3. Secuencias malas de multiconjuntos finitos de n-uplas	20
3.1. Definiciones y propiedades	20
3.2. Estrategia que maximiza la longitud de las secuencias malas	24
3.3. Una expresión recursiva para la máxima longitud de secuencias malas	29
3.4. Clasificación de la longitud en la Jerarquía Rápidamente Creciente	35
3.4.1. Cota inferior para $n = 1$	35
3.4.2. Cota superior para $n = 1$	37
4. Secuencias malas de conjuntos de n-uplas	42
4.1. Definiciones	42
4.2. Observaciones simples	42
4.3. Una estrategia para la cota inferior	44
4.4. Reducción de conjuntos a árboles	48
4.5. Reducción de árboles a multiconjuntos	50
5. Conclusiones y trabajo futuro	52

1. Introducción

Dado un algoritmo, saber si este alguna vez termina o no es un problema fundamental en computación. En las *pruebas de terminación* (*termination proofs*) se suele establecer una “relación de transición” R sobre el conjunto X de estados posibles del algoritmo y se trata de ver que R es *bien fundada*, es decir, que todo subconjunto (no vacío) de estados tiene un elemento mínimo x_f respecto a R . En otras palabras, si el algoritmo puede pasar del estado x_0 al x_1 y así sucesivamente, tendremos que x_0Rx_1 , x_1Rx_2 , etc., y queremos ver que siempre existe un x_f en la cadena tal que para toda otra configuración posible x se tenga $\neg(x_fRx)$; este x_f será un estado final del algoritmo.

Para ver que R es bien fundada, una de las herramientas clásicas es definir una función ρ desde el conjunto de configuraciones x_0, x_1, \dots del algoritmo hacia un buen orden, de modo que

$$R \subseteq \{(x_i, x_j) \mid x_i \in X, x_j \in X, \rho(x_i) > \rho(x_j)\}.$$

Como la imagen es una secuencia decreciente en un buen orden, es finita y luego la secuencia original también lo es. Más en general, basta que el codominio de ρ sea un *buen cuasi-orden* (*wqo* por sus siglas en inglés) y que

$$R \subseteq \{(x_i, x_j) \mid x_i \in X, x_j \in X, \rho(x_i) \not\leq \rho(x_j)\}.$$

De esta manera, los resultados que aseguran que diversas estructuras son wqo resultan de gran importancia. Por ejemplo son wqo:

- (\mathbb{N}^n, \leq) , el conjunto de las n -uplas provisto del orden producto (Lema de Dickson).
- Más en general, X^n con el orden producto cuando (X, \leq) es un wqo.
- Las palabras y subpalabras sobre alfabetos finitos (Lema de Higman).

Sin embargo, las pruebas de terminación por si solas pueden resultar insatisfactorias para ciertos propósitos, ya que no nos dicen nada del tiempo que puede tardar el algoritmo en terminar, esto es, no nos dicen nada sobre la *longitud* de la secuencia de estados.

La idea principal de esta tesis. En esta tesis estudiaremos maneras de encontrar, para sucesiones sobre algunos wqo, cotas para esta longitud bajo ciertas condiciones de comportamiento, principalmente la existencia de una *función de control* (ver Ejemplo 1.15 y Definición 1.17). Las funciones de control impondrán un límite para el “tamaño” de los términos durante cada paso de la secuencia, lo cual nos permitirá acotar la máxima longitud posible de estas.

La idea principal para obtener estas cotas es pasar de secuencias *malas* sobre un wqo a secuencias *decrecientes* sobre un *buen orden*. Sobre un buen orden podremos entonces encontrar algoritmos que construyen la secuencia más larga decreciente y controlada por cierta nueva función, derivada de la función de control original.

Durante el resto de la Sección 1 daremos algunas definiciones, ejemplos, y resultados, mayormente sin demostración.

En la Sección 2 reproduciremos y utilizaremos la prueba constructiva del Lema de Dickson dada en [6] para obtener una nueva y más simple demostración del resultado central de [5], que nos permite categorizar la longitud de las secuencia malas y controladas sobre (\mathbb{N}^n, \leq) en la Jerarquía Rápidamente Creciente.

En la Sección 3 veremos algunos resultados generales para el orden sobre multiconjuntos, y luego nos restringiremos al caso de multiconjuntos derivados de $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$. Continuaremos después con resultados nuevos, hallando una forma recursiva para expresar la longitud máxima de secuencias decrecientes y controladas sobre este orden, la cual luego clasificaremos en la Jerarquía Rápidamente Creciente en el caso $n = 1$.

En la Sección 4 proponemos un método para encontrar cotas para secuencias malas y controladas de conjuntos, particularmente de $(\mathbb{N}^n, <)$ sobre el orden mayorante. Hasta ahora no se conocían cotas para este problema. Veremos que esta longitud es efectivamente mayor que en el caso de n -uplas con el orden lexicográfico, y encontraremos un algoritmo que manifiesta esta diferencia. Luego reducimos el problema de la longitud máxima de las secuencias malas controladas de conjuntos de tuplas a un problema de secuencias decrecientes de multiconjuntos. Esto abre el camino para encontrar cotas superiores para la longitud de conjuntos de tuplas. Utilizando los resultados de la sección 3 estudiamos en detalle el caso $n = 1$.

En la Sección 5 resaltamos los resultados principales obtenidos hasta ahora, y trazamos nuevas líneas de investigación que se desprenden de nuestro trabajo.

1.1. Secuencias malas

Definición 1.1. [Secuencia] Dado un conjunto C , llamamos una *secuencia* en C a un subconjunto indexado $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i \in I}$, donde $I = [0, n]$, con $n \in \mathbb{N}$ o $I = \mathbb{N}$. También usamos la notación $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots]$.

Definición 1.2. [Longitud de una secuencia] Definimos la longitud de una secuencia finita $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_u]$ como

$$|\mathbf{x}| = u + 1.$$

Definición 1.3. [Cuasi orden (o preorden)] Un conjunto C está provisto de un *cuasi-orden* \leq si \leq es una relación *reflexiva* y *transitiva* (pero donde no necesariamente todo par de elementos están relacionados, y la relación no necesariamente es *antisimétrica*).

En general, los cuasi-órdenes con los que trabajaremos son en realidad *órdenes parciales*, es decir cuasi-órdenes *antisimétricos*.

Definición 1.4. [Buen orden] Un orden \leq sobre un conjunto C se dice que es un *buen orden* si es total (i.e. todos los elementos son comparables) y todo subconjunto no vacío tiene un elemento minimal respecto a este orden: $\forall S \subseteq C$ con $S \neq \emptyset$, $\exists m \in S$ tal que $\forall x \in S$ $x \not\leq m$. En otras palabras, un buen orden es un orden total bien fundado.

Definición 1.5. [Secuencia mala] Si el conjunto C está provisto de un cuasi-orden \leq , entonces decimos que una secuencia $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots]$ en C es *mala* respecto a este orden si $\forall i < j$ vale que $x_i \not\leq x_j$.

Observar que como el orden \leq no necesariamente es *total*, esto último *no* equivale a decir $x_i > x_j$, aunque sí vale que toda secuencia decreciente es mala. En el caso que el orden sea *total*, decir que una secuencia es mala será equivalente a decir que es *decreciente*.

Ejemplo 1.6. Si tomamos el conjunto de los números naturales (con cero) \mathbb{N} provisto del orden usual, la secuencia $\mathbf{x} = [3, 2, 1, 0]$ es mala (y decreciente).

Ejemplo 1.7. Si tomamos el conjunto de los pares de números naturales \mathbb{N}^2 , provistos del orden de diccionario (i.e. el orden lexicográfico¹) entonces la secuencia $[(1, 0), (0, 2)]$ es mala y decreciente.

Ejemplo 1.8. Si en \mathbb{N}^2 consideramos el orden producto² Entonces $[(1, 0), (0, 1)]$ es mala, pero no es decreciente (observar que \leq no es un orden total).

Recordamos algunos conceptos clave:

Definición 1.9. [Buen cuasi-orden] Un *buen cuasi-orden* (*well-quasi-ordering*), abreviado wqo, es un cuasi-orden tal que no existen secuencias infinitas estrictamente decrecientes $x_0 > x_1 > \dots$ ni anticadenas infinitas (secuencias de elementos incomparables de a pares, es decir tales que $\forall i, j$, valen simultáneamente $x_i \not\leq x_j$ y $x_j \not\leq x_i$).

Equivalentemente, no existen secuencias infinitas tales que $\forall i < j$, $x_i \not\leq x_j$.

Definición 1.10. [Función coordenada] Dado $z \in \mathbb{N}^n$ y $1 \leq i \leq n$, $z[i]$ denota la i -ésima coordenada de z .

Definición 1.11. [Orden producto \leq] Dados $x, y \in \mathbb{N}^n$, decimos que $x \leq y$ si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ vale $x[i] \leq y[i]$.

Definición 1.12. [Orden Lexicográfico \leq_{lex} .] El *orden lexicográfico* sobre \mathbb{N}^n se define recursivamente de la siguiente forma:

- Si $x, y \in \mathbb{N}$, el orden lexicográfico \leq_{lex} coincide con el usual \leq .
- Si $x, y \in \mathbb{N}^n$, con $n \geq 2$, decimos que $x <_{\text{lex}} y$ si

$$x[1] < y[1] \quad \text{o} \quad (x[1] = y[1] \wedge (x[2], x[3], \dots, x[n]) <_{\text{lex}} (y[2], y[3], \dots, y[n])),$$

donde estas dos últimas $(n-1)$ -uplas son comparadas via el orden lexicográfico en \mathbb{N}^{n-1} .

Observación 1.13. Observar que $x \leq y \Rightarrow x \leq_{\text{lex}} y$. Luego $x \not\leq_{\text{lex}} y \Rightarrow x \not\leq y$.

Esto implica que las secuencias malas con el orden lexicográfico son también secuencias malas con el orden producto. Notar que no vale el recíproco: $[(0, 1), (1, 0)]$ es mala en el orden producto, pero no es mala (de hecho es creciente) en el orden lexicográfico.

Notar también que como el orden lexicográfico es total, las secuencias malas coinciden con las decrecientes.

Teorema 1.14 (Lema de Dickson). (\mathbb{N}^n, \leq) es un wqo, donde \leq es el orden producto.

Observar que este resultado solo nos dice que cualquier secuencia mala sobre (\mathbb{N}^n, \leq) es finita, pero no nos dice nada sobre su longitud; sin condiciones adicionales de control no se puede asegurar nada al respecto, como veremos en el próximo ejemplo.

Ejemplo 1.15. $[(0, 1), (N, 0), (N-1, 0), \dots, (1, 0), (0, 0)]$ es mala sobre el orden producto, pero podemos hacer su longitud arbitrariamente grande ya que no hay ninguna restricción sobre el N .

Esto motiva la necesidad de una función de control:

¹Ver Definición 1.12

²Ver Definición 1.11

Definición 1.16. [Norma infinito] Dado $x \in \mathbb{N}^n$, definimos

$$|x|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\{x[1], x[2], \dots, x[n]\}.$$

Definición 1.17. [Función de control] Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots]$ una secuencia sobre \mathbb{N}^n . Sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función (que siempre consideraremos monótona creciente). Sea $t \in \mathbb{N}$. Decimos que \mathbf{x} está *t-controlada con respecto a f*, o también que está *f, t-controlada*, si

$$\forall i, |x_i|_\infty < f(t + i).$$

Ejemplo 1.18 (Ejemplo simple de uso del Lema de Dickson para decidir la terminación de un programa). [5, Sección 1]

Consideremos el siguiente programa no determinístico:

```

CHOICE (a, b)
while a > 0 ∧ b > 1
    (a, b) ← (a - 1, a)
or
    (a, b) ← (b - 2, a + 1)
end

```

Sin importar cual de las dos opciones es elegida en cada paso i , se puede probar que las sucesivas configuraciones posibles de este programa $[(a, b), x_1, x_2 \dots]$ definen una secuencia mala sobre el orden producto de \mathbb{N}^2 , y por lo tanto el programa termina.

La demostración de que la secuencia es mala es la siguiente:

Demostración. Hagamos inducción en la longitud de la secuencia.

- Para el primer paso, veamos que tanto $(a, b) \not\leq (a - 1, a)$ como $(a, b) \not\leq (b - 2, a + 1)$.
 - El primer caso es claro, pues $a > a - 1$.
 - Para el segundo separemos en los subcasos $a \leq b - 2$ y $a > b - 2$.
En el primero de estos subcasos la segunda coordenada decreció ($a \leq b - 2 < b$), en el segundo subcaso, la primera decreció ($a + 2 > b \Rightarrow a > b - 2$).
- Para el paso inductivo: Llamemos $z_0 = (x_0, y_0)$ al elemento inicial, y (a, b) al anteúltimo, de modo que por hipótesis inductiva $[z_0, z_1, \dots, (a, b)]$ sea mala. Queremos ver que también son malas $[z_0, z_1, \dots, (a, b), (a - 1, a)]$ y $[z_0, z_1, \dots, (a, b), (b - 2, a + 1)]$.
 - En el caso que tenemos $[z_0, z_1, \dots, (a, b), (a - 1, a)]$, supongamos $\exists z_i = (x, y)$ tal que $(x, y) \leq (a - 1, a)$, luego $x \leq a - 1 \wedge y \leq a$. Veamos que siempre que estemos en estas condiciones el algoritmo dará nuevos elementos que seguirán en ellas (primera coordenada menor o igual que $a - 1$ y segunda menor o igual que a), y luego nunca se puede alcanzar la primera coordenada de (a, b) . En efecto, si a (x, y) le sigue $(\underbrace{x - 1}_{\leq a - 2 < a}, \underbrace{x}_{\leq a - 1 < a})$ esto pasa. Si le sigue $(\underbrace{y - 2}_{\leq a - 2 < a}, \underbrace{x + 1}_{\leq a})$ también.
 - En el caso $[z_0, z_1, \dots, (a, b), (b - 2, a + 1)]$, $(x, y) \leq (b - 2, a + 1)$ separamos en dos subcasos:

Si $a \leq b - 2$ tenemos $x \leq b - 2 = (b - 1) - 1$, $y \leq a + 1 \leq b - 1$. Luego, razonando como antes (pero tomando $b - 1$ en lugar de a) se tiene que ambas coordenadas se mantienen menores o iguales a $b - 1$, y luego no se puede alcanzar la segunda coordenada de (a, b) .

En el subcaso $a > b - 2$ tenemos que $x \leq b - 2 < a$, $y \leq a + 1$. Se puede probar como antes que aplicaciones sucesivas del algoritmo mantienen la primer coordenada estrictamente menor que a : basta mirar $(\underbrace{x - 1}_{<a}, \underbrace{x}_{<a < a+1})$ y $(\underbrace{y - 2}_{\leq a+1-2 < a}, \underbrace{x + 1}_{<a+1})$.

□

Observar también que tenemos un control para la secuencia: si tomamos $f(x) = x + 1$, entonces la secuencia que comienza por (a, b) es f , $\max\{a, b\}$ -controlada, ya que se empieza por

$$|(a, b)|_\infty < f(\underbrace{\max\{a, b\}}_t + \underbrace{0}_i) = \max\{a, b\} + 1,$$

y en ningún paso la norma puede aumentar en más de 1.

1.2. La Jerarquía Rápidamente Creciente

En esta sección veremos algunos resultados de [8] y [1], pero utilizando las definiciones, para nuestros propósitos equivalentes, usadas en [10, Secciones 4,5].

Hay varias jerarquías de funciones que proveen formas naturales de clasificar funciones de acuerdo a su complejidad computacional. Una de ellas es la llamada *Jerarquía Rápidamente Creciente*. Para definirla formalmente tendremos que ver algunas definiciones sobre números ordinales contables³, aunque en realidad durante el resto de la tesis solo necesitaremos utilizar ordinales finitos u ω .

Términos Ordinales Sea ω el primer ordinal infinito, esto es, el tipo de orden de \mathbb{N} con el orden usual. Consideraremos ordinales contables α construidos usando el 0, la adición finita, y la exponenciación de ω . Esto⁴ es:

$$\alpha = \omega^{\beta_1} + \omega^{\beta_2} + \dots + \omega^{\beta_m}$$

con $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_m$ (donde el orden está definido más abajo) ordinales también de esta forma. Por ejemplo $\alpha = \omega^2 + \omega^1 + \omega^0 + \omega^0 + \omega^0 + \omega^0$ (donde $1 = \omega^0$, $2 = \omega^0 + \omega^0$)

Distinguimos 3 casos:

- Si $m = 0$ decimos que $\alpha = 0$.
- Decimos que α es un *sucesor* si $\beta_m = 0$. Cuando notemos sucesores generalmente los notaremos directamente como $\alpha + 1$.
- Decimos que α es un ordinal *límite* si $\beta_m \neq 0$. Denotaremos ordinales límite con la letra λ .

³I.e. de cardinal finito o infinito numerable

⁴Es decir, $\alpha < \epsilon_0$, y vamos a representarlos en Forma Normal de Cantor (Cantor Normal Form)

El orden sobre estos ordinales se puede definir inductivamente como

$$\alpha < \alpha' \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \alpha = 0 \text{ y } \alpha' \neq 0, \text{ o} \\ \alpha = \omega^\beta + \gamma, \alpha' = \omega^{\beta'} + \gamma' \text{ y } \begin{cases} \beta < \beta', \text{ o} \\ \beta = \beta' \text{ y } \gamma < \gamma' \end{cases} \end{cases}$$

(donde $\omega^\beta \geq \gamma, \omega^{\beta'} \geq \gamma'$)

Definimos el producto a derecha por $c \in \mathbb{N}$ como la adición sucesiva c veces:

$$\omega^\beta \cdot c = \underbrace{\omega^\beta + \omega^\beta + \dots + \omega^\beta}_c.$$

Por último, asignamos *sucesiones fundamentales* $(\lambda_x)_{x \in \mathbb{N}}$ a cada ordinal límite λ , las cuales cumplen $\forall x \in \mathbb{N} \lambda_x < \lambda$ y $\lambda = \sup_x \lambda_x$. La asignación que nosotros hacemos es:

Definición 1.19. [Sucesiones fundamentales para ordinales límite]

$$\begin{aligned} (\gamma + \omega^{\beta+1})_x &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma + \omega^\beta \cdot (x + 1) \\ (\gamma + \omega^\lambda)_x &\stackrel{\text{def}}{=} \gamma + \omega^{\lambda_x} \end{aligned}$$

donde $\gamma = 0$ o $\gamma \geq \omega^{\beta+1}, \omega^\lambda$

Ejemplo 1.20. ■ $\omega_x = x + 1$

- $(\omega \cdot 2)_x = \omega + x + 1$
- $(\omega^{k+1})_x = \omega^k \cdot (x + 1)$
- $(\omega^\omega)_x = \omega^{\omega_x} = \omega^{x+1}$
- $(\omega^3 \cdot 5 + \omega^2 \cdot 2)_x = \omega^3 \cdot 5 + \omega^2 + \omega^1 \cdot (x + 1)$

La Jerarquía Rápidamente Creciente $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha < \epsilon_0}$. Finalmente estamos en condiciones de definir esta familia de funciones. Comenzaremos definiendo recursivamente las funciones $(F_\alpha)_{\alpha < \epsilon_0} F_\alpha : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, las cuales constituirán la base de la Jerarquía.

Definición 1.21. [F_α]

$$F_0(x) \stackrel{\text{def}}{=} x + 1 \tag{1}$$

$$F_{\alpha+1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_\alpha^{\omega_x}(x) = F_\alpha^{x+1}(x) \tag{2}$$

$$F_\lambda(x) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\lambda_x}(x) \tag{3}$$

donde λ denota un ordinal límite.

En esta definición, los exponentes sobre las funciones indican su composición iterada:

$$F_0^k(x) = \underbrace{F_0(F_0(\dots(F_0(x))\dots))}_{k \text{ veces}}.$$

Ejemplo 1.22. ■ $F_0^k(x) = x + k$

- $F_1(x) = F_0^{x+1}(x) = x + x + 1 = 2x + 1$
- $F_2(x) = F_1^{x+1}(x) = 2(\dots(2(2x + 1) + 1)\dots) + 1 > \underbrace{D^{x+1}}_{D(x):=2x}(x) + 1 = 2^{x+1}x + 1.$
- $F_3(x) = F_2^{x+1}(x) > \underbrace{E^{x+1}}_{E(x)=2^x}(x) = 2^{2^{\dots^{2^x}}}$, donde la altura de la torre de exponentes, sin contar el 2 base inicial, es $x + 1$.

Así, $F_3(2) > E^3(2) = 2^{(2^{2^2})} = 2^{16} = 65536$, $F_3(3) > E^4(3) = 2^{2^{2^{2^3}}} > 2^{10^{77}}$

Ejemplo 1.23. ▪ $F_\omega(x) = F_{\omega_x}(x) = F_{x+1}(x)$

- $F_{\omega \cdot 2}(x) = F_{(\omega \cdot 2)_x}(x) = F_{\omega+x+1}(x)$

Definición 1.24. [Jerarquía Rápidamente Creciente]

\mathfrak{F}_α es la clausura de la constante, suma, proyección, identidad, y funciones F_β con $\beta \leq \alpha$, bajo las operaciones de sustitución y recursión limitada (definidas abajo); $f \in \mathfrak{F}_\alpha$ entonces $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ para algún k .

La *Jerarquía Rápidamente Creciente*⁵ o *jerarquía extendida de Grzegorzcyk* es el conjunto de familias de funciones $(\mathfrak{F}_\alpha)_{\alpha < \epsilon_0}$.

- **sustitución** Si $h_0, h_1, \dots, h_n \in \mathfrak{F}_\alpha$, entonces $f \in \mathfrak{F}_\alpha$, donde

$$f(x_1, \dots, x_n) = h_0(h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_n(x_1, \dots, x_n))$$

- **recursión limitada (o acotada)** Si $h_1, h_2, h_3 \in \mathfrak{F}_\alpha$, entonces $f \in \mathfrak{F}_\alpha$, donde

$$\begin{aligned} f(0, x_1, \dots, x_n) &= h_1(x_1, \dots, x_n) \\ f(y + 1, x_1, \dots, x_n) &= h_2(y, x_1, \dots, x_n, f(y, x_1, \dots, x_n)) \\ f(y, x_1, \dots, x_n) &\leq h_3(y, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Para valores finitos pequeños de α , la Jerarquía caracteriza algunas clases de funciones comunes:

- $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1$ contiene todas las funciones lineales, como ser $x + 1$ o $2x$.
- \mathfrak{F}_2 contiene todas las funciones “elementales” obtenidas con sumas y productos, como ser x^2 o $x2^{2^x}$.
- \mathfrak{F}_3 contiene todas las funciones de “tetración” (tetration), como ser $2^{2^{\dots^2}}$, donde la torre tiene altura x .

⁵A veces se llama “jerarquía rápidamente creciente” a las F_α .

Aunque es importante tener presente qué elección de sucesión fundamental elegimos para los ordinales límite, la mayoría de los resultados que daremos a continuación se mantienen independientemente de la elección o tienen apenas pequeñas variaciones. Otra elección de sucesión fundamental común en la literatura es $\omega_x = x$.

A continuación enumeramos una serie de propiedades básicas de la Jerarquía.

Hecho 1.25. Cada F_α es estrictamente creciente.

Hecho 1.26. Si $\alpha < \beta$, existe k tal que $\forall n \geq k$ vale $F_\alpha(n) < F_\beta(n)$ (i.e. F_α está eventualmente dominada por F_β).

De hecho, si $\gamma \in \omega$ y $\gamma \geq 1$ entonces $F_\alpha(n) < F_{\alpha+\gamma}(n)$ para todo $n \geq 1$, y $F_\alpha(n) \leq F_{\alpha+\gamma}(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Hecho 1.27. $F_{\alpha+1} \notin \mathfrak{F}_\alpha$

Hecho 1.28. La Jerarquía Rápidamente Creciente es estricta para $\alpha > 0$, es decir:

$$0 < \alpha < \alpha' \Rightarrow \mathfrak{F}_\alpha \subsetneq \mathfrak{F}_{\alpha'}$$

Hecho 1.29. El siguiente tipo de sustracción (cut-off subtraction) puede definirse por recursión limitada en \mathfrak{F}_0

$$x \dot{-} y = \begin{cases} x - y & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

Como las \mathfrak{F}_α son cerradas por sustitución, este resultado implica que todas las \mathfrak{F}_α son cerradas por $\dot{-}$.

Hecho 1.30. \mathfrak{F}_α es cerrada por producto para $\alpha \geq 2$.

Probamos:

Proposición 1.31. La función $f(x, y) = x^y$ (donde $0^0 \stackrel{\text{def}}{=} 1$) pertenece a \mathfrak{F}_2 , y luego \mathfrak{F}_2 es cerrada por exponenciaciones finitas.

Demostración. Primero veamos que, $x^x \leq 4^{x^2} (\in \mathfrak{F}_2)$. El caso $x = 0$ vale: por definición: $0^0 = 1 \leq 4^0 = 1$ Si $x \geq 1$,

$$x^x \leq 4^{x^2} \Leftrightarrow x \ln x \leq x^2 \ln 4 \Leftrightarrow \ln x \leq x \ln 4$$

Pero esto último vale ya que $\ln x < x$ y $1 < \ln 4$.

Veamos $h(y) = y^y \in \mathfrak{F}_2$, definiendo h mediante recursión limitada:

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(y+1) &= yh(y) \quad (= yy^y, \text{ y el producto está en } \mathfrak{F}_2) \\ h(y) &\leq 4^{y^2} \end{aligned}$$

Ahora, como $x, y \in \mathbb{N}$, tenemos que $x^y \leq \max\{x, y\}^{\max\{x, y\}} \leq x^x + y^y \leq 4^{x^2} + 4^{y^2} \in \mathfrak{F}_2$, y por lo tanto también podemos definir por recursión limitada a $e(y, x) = x^y$:

$$\begin{aligned} e(0, x) &= 1 \\ e(y+1, x) &= xe(y, x) \quad (= xx^y, \text{ y el producto está en } \mathfrak{F}_2) \\ e(y, x) &\leq 4^{x^2} + 4^{y^2} \end{aligned}$$

□

Para todo α y f unaria en \mathfrak{F}_α valen las dos siguientes propiedades

Hecho 1.32. $\alpha > 0 \Rightarrow \exists p$ tal que $\forall x f(x) < F_\alpha^p(x)$.

Luego, si g (no necesariamente en la Jerarquía) es tal que $g \leq g'$, con $g' \in \mathfrak{F}_\alpha$ y $\alpha > 0$, entonces

$$\exists p \forall x, g(x) \leq g'(x) < F_\alpha^p(x).$$

Hecho 1.33. $\exists p$ tal que $\forall x \geq p, f(x) \leq F_{\alpha+1}(x)$.

Luego, si g (no necesariamente en la Jerarquía) es tal que $g \leq g'$, con $g' \in \mathfrak{F}_\alpha$ entonces

$$\exists p \forall x \geq p, g(x) \leq g'(x) \leq F_{\alpha+1}(x).$$

Proposición 1.34. Sea $\alpha \geq 2$. Entonces $\forall x \geq 1, \forall c \geq 2$ vale:

$$F_\alpha(cx) > c F_\alpha(x).$$

Observar que en el caso $c = 1$ vale trivialmente $c F_\alpha(x) = F_\alpha(cx)$, por lo que no es de interés.

Demostración. Usaremos frecuentemente, sin mencionarlo, el Hecho 1.25. Procederemos por inducción en c . Veamos primero el caso $c = 2$:

$$\begin{aligned} F_\alpha(2x) &= F_{\alpha-1}^{(2x)+1}(2x) \\ &= F_{\alpha-1}(F_{\alpha-1}^{2x}(2x)) \\ &\geq F_1(F_{\alpha-1}^{2x}(2x)) && (\alpha - 1 \geq 1 \text{ y Hecho 1.26}) \\ &= 2(F_{\alpha-1}^{2x}(2x)) + 1 && (\text{Expresión de } F_1) \\ &> 2(F_{\alpha-1}^{x+1}(2x)) && (x \geq 1) \\ &\geq 2(F_{\alpha-1}^{x+1}(x)) \\ &= 2F_\alpha(x) \end{aligned}$$

El caso inductivo es similar: supongamos que la proposición vale hasta cierto $c \geq 2$, ahora:

$$\begin{aligned} F_\alpha((c+1)x) &= F_{\alpha-1}^{((c+1)x)+1}((c+1)x) \\ &= F_{\alpha-1}(F_{\alpha-1}^{(c+1)x}((c+1)x)) \\ &\geq F_1(F_{\alpha-1}^{(c+1)x}((c+1)x)) \\ &\geq F_1(F_{\alpha-1}^{cx+1}((c+1)x)) && (x \geq 1) \\ &\geq F_1(F_{\alpha-1}^{cx+1}(cx)) \\ &= F_1(F_\alpha(cx)) \\ &> F_1(cF_\alpha(x)) && (\text{Hipótesis inductiva}) \\ &= 2(cF_\alpha(x)) + 1 \\ &> 2cF_\alpha(x) \\ &\geq (c+1)F_\alpha(x) && (c \geq 1) \end{aligned}$$

□

Observación 1.35. Como corolario resulta que, $\forall p \geq 1, \alpha \geq 2, x \geq 1, c \geq 2$:

$$cF_\alpha^p(x) < F_\alpha^p(cx).$$

Proposición 1.36. Dado $k \geq 2, x \in \mathbb{N}, y \alpha \geq 2$, vale:

$$F_\alpha^k(x) > (F_\alpha(x))^k.$$

Observar que en el caso $k = 1$ vale la igualdad.

Demostración. Procederemos por inducción en k . Si $k = 2$

$$\begin{aligned} F_\alpha^2(x) &= F_\alpha(F_\alpha(x)) \\ &\geq 2^{F_\alpha(x)+1} F_\alpha(x) + 1 \quad (\alpha \geq 2, \text{ Hecho 1.26, y } F_2(x) > 2^{x+1}x + 1 \text{ por Ejemplo 1.22}) \\ &> F_\alpha(x)F_\alpha(x) + 1 \quad (2^{F_\alpha(x)+1} > F_\alpha(x)) \\ &> F_\alpha^2(x) \end{aligned}$$

Para el paso inductivo, consideremos que la proposición vale para k , y probémosla para $k + 1$:

$$\begin{aligned} F_\alpha^{k+1}(x) &= F_\alpha(F_\alpha^k(x)) \\ &> F_\alpha((F_\alpha(x))^k) && \text{(Por hipótesis inductiva)} \\ &\geq 2^{(F_\alpha(x))^k+1} ((F_\alpha(x))^k) + 1 && (\alpha \geq 2) \\ &> (F_\alpha(x))^{k+1} && (2^{(F_\alpha(x))^k+1} > F_\alpha(x)) \end{aligned}$$

□

Corolario 1.37. Dados $p_1, p_2 \geq 1, k \geq 2, x \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$, vale:

$$F_\alpha^{p_1+p_2}(x) > F_\alpha^{p_1}(x) F_\alpha^{p_2}(x) \geq (F_\alpha(x))^{p_1} F_\alpha^{p_2}(x) \geq (F_\alpha(x))^{p_1} (F_\alpha(x))^{p_2}$$

Demostración. Solo falta probar la primera desigualdad. Para esto procedamos por inducción en p_1 de manera similar a lo anterior: Caso $p_1 = 1$:

$$\begin{aligned} F_\alpha^{1+p_2}(x) &= F_\alpha(F_\alpha^{p_2}(x)) \\ &\geq 2^{(F_\alpha^{p_2}(x))} (F_\alpha^{p_2}(x)) + 1 \\ &> (F_\alpha^{p_2}(x)) (F_\alpha^{p_2}(x)) \\ &\geq (F_\alpha(x)) (F_\alpha^{p_2}(x)) \end{aligned}$$

Caso inductivo: sea $p_1 \geq 2$

$$\begin{aligned} F_\alpha^{p_1+p_2}(x) &= F_\alpha^{p_1}(F_\alpha^{p_2}(x)) \\ &= F_\alpha(F_\alpha^{(p_1-1)+p_2}(x)) \\ &> F_\alpha(F_\alpha^{(p_1-1)}(x) F_\alpha^{p_2}(x)) && \text{(Hipótesis inductiva)} \\ &\geq F_\alpha^{p_2}(x) F_\alpha(F_\alpha^{(p_1-1)}(x)) && \text{(Proposición 1.34, } F_\alpha^{(p_1-1)}(x) \geq 1, F_\alpha^{p_2}(x) \geq 1) \\ &= F_\alpha^{p_1}(x) F_\alpha^{p_2}(x) \end{aligned}$$

□

2. Secuencias malas de n -uplas

Trabajaremos en esta sección con secuencias malas controladas sobre $(\mathbb{N}^n, <)$, donde $<$ es el orden producto introducido en la Definición 1.11, y obtendremos cotas para sus longitudes. Para esto utilizaremos un resultado de [6] que nos permitirá en la subsección 2.3 reducir nuestro problema original a uno más fácil: el de secuencias decrecientes controladas sobre $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$. Obtendremos así cotas clasificadas en la Jerarquía Rápidamente Creciente que son ajustadas y conocidas (ver [5]), pero lo haremos mediante una demostración considerablemente más simple y corta que la de [5], la cual es a su vez más sencilla que otras anteriores [9, 2].

2.1. Notación

Si $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$ entonces para $j \in \{0, \dots, k\}$, denotamos con $\mathbf{x} \upharpoonright j$ el prefijo de \mathbf{x} de longitud $j + 1$, i.e. la secuencia $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_j]$. Para $\mathbf{x} = [x_0, x_1, x_2, \dots, x_k]$ e $\mathbf{y} = [y_0, y_1, y_2, \dots, y_l]$, denotamos con $\mathbf{x} \frown \mathbf{y}$ a la concatenación de \mathbf{x} e \mathbf{y} , i.e. la secuencia $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_k, y_0, y_1, y_2, \dots, y_l]$. Decimos que \mathbf{x} *extiende estrictamente a* \mathbf{y} si $\mathbf{x} = \mathbf{y} \frown \mathbf{z}$, donde \mathbf{z} es una secuencia no vacía. A veces notamos $\lambda x.h(x)$ para decir explícitamente que la expresión a la derecha del punto es una función de x y no de otros parámetros que aparecen. Por ejemplo: $\lambda x.nx + t$.

2.2. Lema de Dickson Constructivo

Por completitud, en esta sección reproducimos un resultado de [6]. Dado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el siguiente orden parcial (el *orden de extensión*) sobre el conjunto de secuencias en \mathbb{N}^n :

$$\mathbf{x} < \mathbf{y} \stackrel{\text{def}}{\iff} \mathbf{x} \text{ extiende estrictamente } \mathbf{y}$$

Definimos $(\mathbb{N}^n)^+$ como el conjunto de secuencias finitas no vacías de n -uplas, con el orden de extensión.

Teorema 2.1 (Lema de Dickson Constructivo [6]). *Existe una función $f_n: (\mathbb{N}^n)^+ \rightarrow \mathbb{N}^n$ con la propiedad: Si $\mathbf{x} \frown x$ es una secuencia mala de n -uplas, y \mathbf{x} es no vacía, entonces*

$$f_n(\mathbf{x} \frown x) <_{\text{lex}} f_n(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Comentario 2.2. Esta f_n es un morfismo de orden para secuencias malas. Luego, dado que $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$ es un buen orden, tenemos el resultado que las secuencias malas son necesariamente finitas.

Prueba del teorema 2.1. Definimos las funciones f_n por inducción en n . El caso $n = 1$ es simple:

$$f_1(x_0, x_1, x_2, \dots, x_k) \stackrel{\text{def}}{=} x_k.$$

Ya que en \mathbb{N} el orden producto y el lexicográfico coinciden, vale (4).

Para la construcción inductiva de f_n asumimos que ya tenemos f_{n-1} tal que

$$f_{n-1}(\mathbf{x} \frown x) <_{\text{lex}} f_{n-1}(\mathbf{x}),$$

donde las secuencias están en \mathbb{N}^{n-1} .

Hacemos a continuación algunas definiciones que serán utilizadas para la construcción de f_n . Para $1 \leq i \leq n$ y $x \in \mathbb{N}^n$ definimos

$$\pi_{-i}(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x[1], \dots, x[i-1], x[i+1], \dots, x[n])$$

i.e. $\pi_{-i}(x)$ elimina la i -ésima componente de la n -upla x . Dada una secuencias finita (y no vacía) $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ de n -uplas, definimos el conjunto

$$\text{BAD}_{-i}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{[\pi_{-i}(x_{j_0}) \dots \pi_{-i}(x_{j_p})] \mid p \geq 0, 0 \leq j_0 < \dots < j_p \leq k, \text{ y} \\ [\pi_{-i}(x_{j_0}) \dots \pi_{-i}(x_{j_p})] \text{ es mala}\},$$

i.e. $\text{BAD}_{-i}(\mathbf{x})$ consiste de las subsecuencias malas de $(n-1)$ -uplas de \mathbf{x} en las cuales la i -ésima componente de las n -uplas han sido eliminadas. Finalmente definimos

$$\text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{<_{\text{lex}}} \{f_{n-1}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in \text{BAD}_{-i}(\mathbf{x})\}$$

y

$$S_n(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{N}^n \mid \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ MIN}_{-i}(\mathbf{x}) = \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x} \frown x), \text{ y} \\ \forall j \in \{0, \dots, k\} x_j \not\leq x\},$$

que consiste de las n -uplas con las cuales puede extenderse la secuencia \mathbf{x} de manera que siga siendo mala pero sin alterar los valores de MIN_{-i} .

Para proceder con la demostración probemos:

Lema 2.3. $S_n(\mathbf{x})$ es finita.

Demostración. Sean $1 \leq i \leq n$ y j_0, \dots, j_p tales que $\text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}) = f_{n-1}[\pi_{-i}(x_{j_0}), \dots, \pi_{-i}(x_{j_p})]$, y sea $x \in S_n(\mathbf{x})$. Si la secuencia $[\pi_{-i}(x_{j_0}), \dots, \pi_{-i}(x_{j_p}), \pi_{-i}(x)]$ fuese mala, entonces por inducción (i.e. el supuesto que f_{n-1} satisface la hipótesis inductiva) tendríamos que

$$\begin{aligned} \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x} \frown x) &\leq_{\text{lex}} f_{n-1}[\pi_{-i}(x_{j_0}), \dots, \pi_{-i}(x_{j_p}), \pi_{-i}(x)] \\ &<_{\text{lex}} f_{n-1}[\pi_{-i}(x_{j_0}), \dots, \pi_{-i}(x_{j_p})] \\ &= \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Contradiciendo $x \in S_n(\mathbf{x})$. Luego $\pi_{-i}(x) \geq \pi_{-i}(x_{j_m})$ para algún m . Pero como $x \in S_n(\mathbf{x})$ tenemos que $x \not\leq x_{j_m}$, y luego $x[i] < x_{j_m}[i]$. Ahora, como esto vale para todos los i tales que $1 \leq i \leq n$, todas las coordenadas de x están acotadas, y luego puede haber solo una cantidad finita de elementos x en $S_n(\mathbf{x})$. \square

Comentario 2.4. Supongamos que $\mathbf{y} = \mathbf{x} \frown x$ es una secuencia mala, y que \mathbf{x} es no vacía. Como para todo $i \in \{0, \dots, n\}$, $\text{BAD}_{-i}(\mathbf{x}) \subseteq \text{BAD}_{-i}(\mathbf{y})$, entonces $\text{MIN}_{-i}(\mathbf{y}) \leq_{\text{lex}} \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x})$; y si la igualdad vale en todos los casos entonces $S_n(\mathbf{y}) \subsetneq S_n(\mathbf{x})$, pues $S_n(\mathbf{y}) \subseteq S_n(\mathbf{x})$ pero $x \in S_n(\mathbf{x}) \setminus S_n(\mathbf{y})$. Luego, como los S_n son finitos, $|S_n(\mathbf{y})| < |S_n(\mathbf{x})|$.

Ahora estamos en condiciones de definir la función f_n sobre secuencias (no vacías) de n -uplas \mathbf{x} :

$$f_n(\mathbf{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^n \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}), |S_n(\mathbf{x})| \right). \quad (5)$$

(Donde la suma es componente a componente)

Observar que, por el Comentario 2.4, si $\mathbf{x} \frown x$ es una secuencia mala y \mathbf{x} es no vacía, entonces $f_n(\mathbf{x} \frown x) <_{\text{lex}} f_n(\mathbf{x})$. \square

Observación 2.5. Las f_n no son inyectivas sobre las secuencias malas. Por ejemplo, si tomamos $n = 2$ y las secuencias $\mathbf{a}_1 = [(3, 3), (4, 2)]$, $\mathbf{a}_2 = [(3, 3), (2, 4)]$ tenemos

$$\text{BAD}_{-1}(\mathbf{a}_1) = \{[3, 2]; [3]; [2]\}, \text{MIN}_{-1}(\mathbf{a}_1) = 2$$

$$\text{BAD}_{-2}(\mathbf{a}_1) = \{[3]; [4]\}, \text{MIN}_{-2}(\mathbf{a}_1) = 3$$

$$\text{BAD}_{-1}(\mathbf{a}_2) = \{[3]; [4]\}, \text{MIN}_{-1}(\mathbf{a}_2) = 3$$

$$\text{BAD}_{-2}(\mathbf{a}_2) = \{[3, 2]; [3]; [2]\}, \text{MIN}_{-2}(\mathbf{a}_2) = 2$$

Por simetría vale $|S_2(\mathbf{a}_1)| = |S_2(\mathbf{a}_2)|$. Y luego $f_2(\mathbf{a}_1) = (2 + 3, |S_2(\mathbf{a}_1)|) = (3 + 2, |S_2(\mathbf{a}_2)|) = f_2(\mathbf{a}_2)$.

2.3. Reduciendo el problema del orden producto al lexicográfico

En esta sección analizamos la prueba del Teorema 2.1 cuando la secuencia mala \mathbf{x} es también controlada. Dada la función que controla a la secuencia mala \mathbf{x} , calculamos una nueva función que controla otra secuencia que tiene la misma longitud que \mathbf{x} y es decreciente respecto al orden lexicográfico, y por lo tanto mala en ese orden.

Teorema 2.6. *Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ una secuencia finita y t -controlada en \mathbb{N}^n con respecto a g . Entonces para todo $j \in \{0, 1, \dots, k\}$, tenemos*

$$|f_n([x_0, \dots, x_j])|_\infty = |f_n(\mathbf{x} \upharpoonright j)|_\infty < n! g(nj + t)^n.$$

Demostración. Observar que si se prueba el caso $j = k$ entonces vale el caso general. Vamos entonces a mostrar que $|f_n(\mathbf{x})|_\infty < n! g(nk + t)^n$.

Procederemos por inducción en n .

Para $n = 1$ el resultado es directo: $|f_1(\mathbf{x})|_\infty = x_k < g(k + t) = 1! g(1k + t)^1$.

Ahora probemos que el Teorema 2.6 vale para n arbitrario, asumiendo que vale para secuencias en dimensión $n - 1$. Es decir, veamos que si $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ es una secuencia finita en \mathbb{N}^n que es g, t -controlada, entonces tenemos $|f_n(\mathbf{x} \upharpoonright k)|_\infty = |f_n(\mathbf{x})|_\infty < n! g(nk + t)^n$.

Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ una secuencia en \mathbb{N}^n . Para cualquier i y todo $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_p] \in \text{BAD}_{-i}(\mathbf{x})$ tenemos $\forall j, |y_j|_\infty \leq \max_i |x_i|_\infty < g(k + t)$, y por lo tanto vale trivialmente $|y_j|_\infty < g(j + k + t)$. Esto es, \mathbf{y} es $(t + k)$ -controlada con respecto a g . Por hipótesis inductiva para \mathbf{y} , obtenemos

$$\begin{aligned} |f_{n-1}(\mathbf{y})|_\infty &< (n-1)! g((n-1)p + t + k)^{n-1} \\ &\leq (n-1)! g((n-1)k + t + k)^{n-1} \\ &= (n-1)! g(nk + t)^{n-1}. \end{aligned}$$

En particular, esto vale para \mathbf{y} tal que $\text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}) = f_{n-1}(\mathbf{y})$. Luego concluimos

$$|\text{MIN}_{-i}(\mathbf{x})|_\infty < (n-1)! g(nk + t)^{n-1}. \quad (6)$$

Dada $x \in S_n(\mathbf{x})$, la prueba del Lema 2.3 muestra que dado $i \in \{1, \dots, n\}$ existe j tal que $x[i] < x_j[i] < g(j + t) \leq g(k + t)$. Por lo tanto, $|S_n(\mathbf{x})| \leq g(k + t)^n$, pero como \mathbf{x} era no vacía y $x_0 \notin S_n(\mathbf{x})$, concluimos

$$|S_n(\mathbf{x})| < g(k + t)^n. \quad (7)$$

Recordemos de (5) que

$$f_n(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^n \text{MIN}_{-i}(\mathbf{x}), |S_n(\mathbf{x})| \right) \in \mathbb{N}^n$$

Por (6), las primeras $n - 1$ coordenadas de $f_n(\mathbf{x})$ están acotadas estrictamente por $n! g(nk + t)^{n-1}$ (el factor n proviene de las n sumas), y por (7), la última coordenada de $f_n(\mathbf{x})$ está estrictamente acotada por $g(k + t)^n$. Luego,

$$\begin{aligned} |f_n(\mathbf{x})|_\infty &< \max\{n! g(nk + t)^{n-1}, g(k + t)^n\} \\ &\leq n! g(nk + t)^n, \end{aligned}$$

y esto concluye la prueba. \square

Corolario 2.7. *Sea $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_k]$ una secuencia mala t -controlada en \mathbb{N}^n con respecto a g , y sea $\widehat{\mathbf{x}} = [\widehat{x}_0, \widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_k]$, donde $\widehat{x}_i = f_n(\mathbf{x} \upharpoonright i)$. Entonces $\widehat{\mathbf{x}}$ es una secuencia $<_{\text{lex}}$ -decreciente y t -controlada con respecto a $\widehat{g}(x) = n! g(nx)^n$.*

Demostración. Por el Teorema 2.1, $\widehat{\mathbf{x}}$ es decreciente con respecto al orden lexicográfico. Por el Teorema 2.6, $|\widehat{x}_j|_\infty < n! g(nj + t)^n$. Como $n \geq 1$ y g es monótona creciente concluimos

$$\begin{aligned} |\widehat{x}_j|_\infty &< n! g(nj + t)^n \\ &\leq n! g(n(j + t))^n \\ &= \widehat{g}(j + t). \end{aligned}$$

\square

Recordemos que denotamos con $(\mathfrak{F}_k)_{k \in \omega}$ a la Jerarquía Rápidamente Creciente (ver subsección 1.2).

Proposición 2.8. *Si $g \in \mathfrak{F}_\alpha$ entonces $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_{\max\{2, \alpha\}}$.*

Demostración. Supongamos $\alpha \geq 2$ y recordemos $\widehat{g}(x) = n!g(nx)^n$. Entonces \widehat{g} está definida a través de sustitución finita a partir de g (y notar que $\lambda x.nx \in \mathfrak{F}_2$) y producto. Como \mathfrak{F}_2 y niveles superiores son cerrados para el producto (Hecho 1.30), tenemos $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_\alpha$ como queríamos. Si $\alpha < 2$ el argumento de recién muestra que $\widehat{g} \in \mathfrak{F}_2$. \square

2.4. Cota superior

Definición 2.9 ($L_{n,g}^{\text{lex}}(t)$). *Denotamos por $L_{n,g}^{\text{lex}}(t)$ la longitud de la más larga secuencia decreciente y g, t -controlada en $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$.*

Por [5, Sección 6], tenemos

$$\begin{aligned} L_{1,g}^{\text{lex}}(t) &= g(t) \\ L_{n+1,g}^{\text{lex}}(t) &= \sum_{j=1}^{g(t)} L_{n,g}^{\text{lex}}(o_{n,g}^{j-1}(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

donde el exponente denota composición iterada y

$$o_{n,g}(t) \stackrel{\text{def}}{=} t + L_{n,g}^{\text{lex}}(t). \tag{9}$$

Encontraremos ahora una cota superior para $L_{n,g}^{\text{lex}}(t)$, clasificada en la Jerarquía Rápidamente Creciente. Esta cota será luego aplicada a la función del Corolario 2.7, con lo cual obtendremos una cota superior para nuestra secuencia original \mathbf{x} .

Proposición 2.10 (Cota superior para $L_{n,g}^{\text{lex}}$). Si $g \in \mathfrak{F}_k$ es monótona creciente, con $k \geq 1$, entonces existe una función que mayor a $L_{n,g}^{\text{lex}}$ en \mathfrak{F}_{n+k-1} .

Demostración. Procedemos por inducción en n . Si $n = 1$ entonces $L_{1,g}^{\text{lex}}(t) = g(t)$, y por hipótesis $g \in \mathfrak{F}_k$.

Para el paso inductivo $n + 1$:

$$\begin{aligned}
L_{n+1,g}^{\text{lex}}(t) &= \sum_{j=1}^{g(t)} L_{n,g}^{\text{lex}}(o_{n,g}^{j-1}(t)) && \text{(por (8))} \\
&\leq g(t) \cdot L_{n,g}^{\text{lex}}(o_{n,g}^{g(t)-1}(t)) && \text{(Pues } o_{n,g} \text{ es creciente)} \\
&\leq g(t) \cdot o_{n,g}^{g(t)}(t) && \text{(pues } L_{n,g}^{\text{lex}} \leq o_{n,g}) \\
&< g(t) \cdot (F_{n+k-1}^p)^{g(t)}(t) \\
&\quad \text{(Hecho 1.32 para } o_{n,g} = t + L_{n,g}^{\text{lex}}(t), \text{ mayorada en } \mathfrak{F}_{n+k-1}) \\
&\leq g(t) \cdot (F_{n+k-1})^{p \cdot g(t)}(p \cdot g(t)) \\
&\leq g(t) \cdot (F_{n+k-1})^{p \cdot g(t)+1}(p \cdot g(t)) \\
&= g(t) \cdot (F_{n+k})(p \cdot g(t)) \\
&\quad \text{(Definición de } F_{n+k-1+1} \text{ (1.21) y composición con } p \cdot g(t) \in \mathfrak{F}_k)
\end{aligned}$$

que está en \mathfrak{F}_{n+k} pues es el producto y composición de funciones en \mathfrak{F}_{n+k} (como $n + k \geq 1 + 1 = 2$, vale el Hecho 1.30). \square

Definición 2.11 ($L_{n,g}^{\text{prod}}(t)$). Denotemos con $L_{n,g}^{\text{prod}}(t)$ la máxima longitud de las secuencias malas g, t -controladas en $(\mathbb{N}^n, <)$.

Corolario 2.12 (Cota superior para $L_{n,g}^{\text{prod}}$). Si $g \in \mathfrak{F}_k$ es monótona creciente, con $k \geq 2$, entonces $L_{n,g}^{\text{prod}}$ está mayorada por una función en \mathfrak{F}_{n+k-1} .

Demostración. Sea $\hat{g}(x) = n! \cdot g(nx)^n$. Como g está en \mathfrak{F}_k ($k \geq 2$), por Proposición 2.8, \hat{g} también lo está. Por Proposición 2.10, existe una función $h \in \mathfrak{F}_{n+k-1}$ tal que $L_{n,\hat{g}}^{\text{lex}} \leq h$. Sea ahora \mathbf{x} una secuencia mala t -controlada en \mathbb{N}^n con función de control g . Por Corolario 2.7 hay una secuencia $<_{\text{lex}}$ -decreciente $\hat{\mathbf{x}}$ de n -uplas que es t -controlada con respecto a \hat{g} , y tiene la misma longitud que \mathbf{x} . Luego, $|\mathbf{x}| = |\hat{\mathbf{x}}| \leq L_{n,\hat{g}}^{\text{lex}}(t) \leq h(t)$ y por lo tanto $L_{n,g}^{\text{prod}}(t) \leq h(t)$. \square

De hecho, se sabe que el Corolario 2.12 también vale para $g \in \mathfrak{F}_k$ con $k = 1$, y recordar que como $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1$ tenemos un resultado para todo \mathfrak{F}_α con $\alpha \in \mathbb{N}$.

No probamos aquí por separado este caso $k = 1$, pero para referencia, vale por [5], que reproducimos a continuación:

Teorema 2.13 (Proposición 5.2 de [5]). Sea $n, k \geq 1$. Si g es una función unaria monótona creciente perteneciente a \mathfrak{F}_k , con $g \geq \max\{1, x\}$ para todo x , entonces $L_{n,g}^{\text{prod}}$ está mayorada por una función en \mathfrak{F}_{n+k-1}

Esto coincide con nuestro resultado para $k \geq 2$, pero, como dijimos antes, la demostración de este hecho dada en [5] es considerablemente más larga y complicada que la nuestra.

2.5. Cota inferior

La cota superior hallada en la subsección anterior para $L_{n,g}^{\text{prod}}$ es de hecho ajustada para g si esta crece lo suficientemente rápido: en [5, Apéndice A.4] se prueba lo siguiente, de manera similar a la demostración de la Proposición 2.10:

Hecho 2.14. $L_{n,F_k}^{\text{lex}}(t) \geq F_{k+n-1}(t)$.

Como para toda h vale $L_{n,h}^{\text{lex}}(t) \leq L_{n,h}^{\text{prod}}(t)$ esto implica que:

Corolario 2.15 (Cota inferior para $L_{n,g}^{\text{prod}}$). *Si $g \geq F_k$ entonces*

$$L_{n,g}^{\text{prod}}(t) \geq L_{n,g}^{\text{lex}}(t) \geq L_{n,F_k}^{\text{lex}} \geq F_{k+n-1}(t).$$

3. Secuencias malas de multiconjuntos finitos de n -uplas

En esta sección buscaremos cotas para la longitud de secuencias malas en el orden de multiconjuntos, el cual es un orden que aparece naturalmente en algunas pruebas de terminación (ver [3] para algunos ejemplos). En el camino desarrollaremos algunas herramientas y resultados nuevos para poder enfrentar el problema. Finalmente encontraremos cotas para la longitud de secuencias decrecientes de multiconjuntos de \mathbb{N} , dadas funciones de control en \mathfrak{F}_k , con $k \in \omega$. Estos resultados son novedosos y, aunque la clasificación dentro de la Jerarquía Rápidamente Creciente solo está desarrollada en esta tesis para el caso $n = 1$, se puede utilizar la misma técnica para el caso general.

3.1. Definiciones y propiedades

Las definiciones de esta subsección están mayormente basadas en [3].

Definición 3.1. Sea S un conjunto. Decimos que M es un *multiconjunto* de S si M es una función $M : S \rightarrow \mathbb{N}$. Decimos que M es un *multiconjunto finito* si esta función toma valores distintos de cero solo en finitos puntos, i.e. si el soporte de M , notado $\text{Sop}(M)$, es finito, donde

$$\text{Sop}(M) = \{z \in S \mid M(z) > 0\}.$$

Intuitivamente, M es como un subconjunto de S , pero que puede tener elementos repetidos; la cantidad de veces que aparece un elemento z es $M(z)$, a lo cual llamaremos la *multiplicidad* de z .

Definición 3.2. Dados M, N multiconjuntos, notamos $z \in M$ cuando $z \in \text{Sop}(M)$, y notamos $z \in M \cap N$ si $z \in \text{Sop}(M) \cap \text{Sop}(N)$.

De ahora en más, al menos que se aclare lo contrario, siempre que mencionemos multiconjunto estaremos pensando en multiconjuntos finitos.

Ejemplo 3.3. Son multiconjuntos finitos de \mathbb{N} :

- $M = \{0, 1, 1, 1, 1, 2, 2\}$, es decir:

$$M(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 4 & \text{si } z = 1 \\ 2 & \text{si } z = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- $N = \{0, 1, 2\}$, es decir:

$$N(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 1 & \text{si } z = 1 \\ 1 & \text{si } z = 2 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejemplo 3.4. Son multiconjuntos finitos de \mathbb{N}^2 :

- $\tilde{M} = \{(0, 0), (0, 0), (0, 0), (10, 5), (10, 5), (5, 10), (1, 1)\}$, es decir:

$$\tilde{M}(z) = \begin{cases} 3 & \text{si } z = (0, 0) \\ 1 & \text{si } z = (1, 1) \\ 1 & \text{si } z = (5, 10) \\ 2 & \text{si } z = (10, 5) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

- $\tilde{N} = \{(1, 2), (0, 1)\}$, es decir:

$$\tilde{N}(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = (0, 1) \\ 1 & \text{si } z = (1, 2) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Definición 3.5. Sean M, N multiconjuntos sobre un conjunto S .

- Pensamos al conjunto vacío \emptyset como el multiconjunto tal que $\forall x \in S, \emptyset(x) = 0$
- Notamos $N \subseteq M$ si $\forall x \in S, N(x) \leq M(x)$
- Si $N \subseteq M$ notaremos $M - N$ al multiconjunto tal que $\forall x \in S$ cumple $(M - N)(x) = M(x) - N(x)$.
- Notaremos con $M + N$ al multiconjunto tal que $\forall x \in S$ cumple $M + N(x) = M(x) + N(x)$
- Si $k \in \mathbb{N}$, notamos $k \cdot M$ al multiconjunto tal que $\forall x \in S, (k \cdot M)(x) = kM(x)$

Definición 3.6. Sean $M \neq N$ multiconjuntos finitos de un conjunto S provisto de un orden total. Definimos

$$d_{M,N} = d_{N,M} \stackrel{\text{def}}{=} \text{máx}\{z \in S \mid M(z) \neq N(z)\}.$$

Es decir, $d_{M,N}$ es el mayor elemento tal que las multiplicidades de M y N difieren. Esto existe porque se trata de multiconjuntos distintos y finitos, y el máximo es único porque se trata de un orden total.

Definición 3.7. Sea (S, \leq) un cuasi-orden. Sean M, N dos multiconjuntos finitos de S . Decimos que $M > N$ si $M \neq N$ y $\forall x \in S$ tal que $N(x) > M(x)$ existe un $y \in S$ tal que $y > x \wedge M(y) > N(y)$.

Observación 3.8. Si $(S, <)$ es un orden total tenemos que la definición es equivalente a:

$$M > N \text{ sii } M \neq N \text{ y } M(d_{M,N}) > N(d_{M,N}).$$

Ejemplo 3.9. ■ $\{3, 1\} > \{3\}$

- $\{3, 1\} > \{2, 2, 2, 2, 2, 1, 0, 0, 0, 0\} > \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0\}$
- $\{3, 1\} > \{2\} > \{1\} > \{0\} > \emptyset$

Intuitivamente, $M > N$ si N se obtiene eliminando elementos de M y/o reemplazándolos por elementos menores.

Formalicemos esta intuición:

Proposición 3.10 (Forma equivalente de definir el orden de multiconjuntos). *Sean $M \neq N$ multiconjuntos finitos de un conjunto S provisto de un orden total. Entonces*

$$M > N \quad \text{sii} \quad \text{existen } D \text{ y } A \text{ multiconjuntos tales que } N = M - D + A$$

con $D \neq \emptyset$, $D \cap A = \emptyset$, y $\forall z$, $A(z) > 0 \Rightarrow z < \text{máx } D = d_{M,N}$

Equivalentemente se pueden agregar las condiciones $D = \{d_1, \dots, d_r\}$ y $A = \sum_{1 \leq i \leq r} A_i$, donde $A_i < \{d_i\}$, y $\forall i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Pedimos $D \cap A = \emptyset$ para no estar haciendo operaciones redundantes, pero la proposición vale igualmente aunque no se pida esto.

Prueba de proposición 3.10. Está claro que $N = M - D + A$ así definido es menor que M . La otra implicación es intuitiva, pero probémosla formalmente: dado $N < M$, definimos

$$A = \sum_{z: M(z) < N(z)} (N(z) - M(z)) \cdot \{z\}$$

A es, intuitivamente, lo que estamos “agregándole” a M . Por otro lado,

$$D = \sum_{z: M(z) > N(z)} (M(z) - N(z)) \cdot \{z\}$$

que es lo que le estamos “sacando” a M . Primero notemos que se verifica $N = M - D + A$. Por otro lado, como $M > N$ existe z tal que $M(z) > N(z)$, y luego se tiene $D \neq \emptyset$. Si para algún z valiese $D(z) \geq 1$ y $A(z) \geq 1$ tendríamos $z \in \{z \mid M(z) < N(z)\} \cap \{z \mid M(z) > N(z)\} = \emptyset$, absurdo. Luego $D \cap A = \emptyset$. Por último, si $A(z) \geq 1$ entonces por lo anterior $z \neq \text{máx } D$. Si fuese $z > \text{máx } D$ entonces $N(z) > M(z)$, y como para todo $y > \text{máx } D$ vale $N(y) \geq M(y)$ esto dice que $N > M$ absurdo; luego $z < \text{máx } D$ y $\text{máx } D = d_{M,N}$. \square

Observación 3.11. Si $N \subsetneq M$ entonces $N < M$.

Proposición 3.12. *Sean M, A, D, A', D' multiconjuntos sobre un orden total, con $D \subseteq M, D' \subseteq M$. Si $A \subseteq A', D' \subseteq D$ entonces: $C := M - D + A \subseteq M - D' + A' =: C'$. Además, si $A \subsetneq A'$ o $D' \subsetneq D$ entonces $C \subsetneq C'$.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{N}^n$. Por un lado, $A(z) \leq A'(z)$. También, como $D'(z) \leq D(z)$, entonces $-D(z) \leq -D'(z)$.

Luego $C(z) = M(z) - D(z) + A(z) \leq M(z) - D'(z) + A'(z) = C'(z)$. Como esto se cumple para todo z , entonces $C \subseteq C'$.

Con el mismo razonamiento se ve que si $A \subsetneq A'$ o $D' \subsetneq D$ entonces $C \subsetneq C'$. \square

Generalicemos este resultado al orden $<$:

Proposición 3.13. Sean M, A, D, A', D' multiconjuntos sobre un orden total, con $D \subseteq M, D' \subseteq M, D \cap A = \emptyset, D' \cap A' = \emptyset$. Si $A \leq A', D' \leq D$ entonces: $C := M - D + A \leq M - D' + A' =: C'$. Además, si $A < A'$ o $D' < D$ entonces $C < C'$.

Demostración. Primero observamos que si $A = A'$ o $D = D'$ el resultado vale:

- Si $A = A'$ y $D = D'$ se cumple $C = C'$.
- Si $A = A', D' < D$ entonces $d_{C,C'} = d_{D,D'}$ y $C(d_{C,C'}) = M(d_{C,C'}) - D(d_{C,C'}) + A(d_{C,C'}) < M(d_{C,C'}) - D'(d_{C,C'}) + A'(d_{C,C'}) = C'(d_{C,C'})$.
- Si $A < A', D = D'$ entonces $d_{C,C'} = d_{A,A'}$ y $C(d_{A,A'}) = M(d_{A,A'}) - D(d_{A,A'}) + A(d_{A,A'}) < M(d_{A,A'}) - D'(d_{A,A'}) + A'(d_{A,A'}) = C'(d_{A,A'})$.

Supongamos finalmente $A < A', D' < D$. Llamemos $a = d_{A,A'}, c = d_{C,C'}, d = d_{D,D'}$. Por construcción de C, C' , sabemos que $c \leq \max\{a, d\} =: m$. Tenemos de hecho que $c = m$:

- Si $m = a$ entonces necesariamente $A'(m) > A(m) \geq 0$ y luego, como $D' \cap A' = \emptyset, D'(m) = 0$, con lo cual

$$C(m) = M(m) - D(m) + A(m) < M(m) + A'(m) = C'(m)$$

- Si $m = d$ entonces necesariamente $D(m) > D'(m) \geq 0$, y luego, como $D \cap A = \emptyset, A(m) = 0$, con lo cual

$$C(m) = M(m) - D(m) < M(m) - D'(m) + A'(m) = C'(m)$$

De modo que vimos simultáneamente $c = m$ y $C < C'$. □

Veamos por último algunas propiedades generales, que relacionan características del orden sobre el conjunto base y el orden sobre multiconjuntos.

Hecho 3.14. El orden de multiconjuntos finitos asociado a un orden estricto parcial [total] también es un orden estricto parcial [total].

Demostración. Ver [3] □

Lema 3.15 (Kőnnig's [7]). Si G es un grafo conexo con infinitos vértices tal que cada vértice tiene grado finito (es decir, cada vértice es adyacente a un número finito de vértices), entonces G contiene un camino simple (i.e. sin nodos repetidos) de longitud infinita.

Teorema 3.16 ([3]). El orden de multiconjuntos finitos asociado a un orden total bien fundado sobre un conjunto S es también bien fundado.

Demostración. Supongamos existe una secuencia infinita descendiente de multiconjuntos $M_1 > M_2 > \dots$. Construimos un árbol donde cada vértice es finito de la siguiente manera:

- La raíz tiene un hijo por cada elemento de M_1

- Como por la Proposición 3.10 M_2 se obtiene de M_1 reemplazando algunos elementos por finitos otros más chicos, o eliminándolos (en el caso $A_i = \emptyset$), construimos el próximo nivel del árbol representando este reemplazo como agregar los elementos de A_i al nodo d_i (si $A_i = \emptyset$ agregamos el nodo \emptyset)
- En los pasos siguientes, tomamos las hojas, que son elementos del último M que agregamos, y repetimos el proceso anterior.

Como la secuencia de multiconjuntos es decreciente e infinita, este árbol tiene infinitos niveles, y luego es infinito, pero cada nodo tiene solo finitos hijos. Por el Lema de Kőnnig, hay un camino simple infinito en este árbol. Pero entonces hay una secuencia infinita decreciente $x_1 > x_2 > \dots$ en S , que era bien fundado. Absurdo. \square

En particular, usando también el Hecho 3.14, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.17. *El orden de multiconjuntos finitos sobre $(\mathbb{N}^n, \leq_{\text{lex}})$ es bien fundado y total (i.e. es un buen orden).*

En consecuencia tendrá sentido⁶ buscar longitudes máximas de secuencias de multiconjuntos finitos sobre $(\mathbb{N}^n, \leq_{\text{lex}})$, bajo ciertas condiciones de control.

Trabajaremos de ahora en más con multiconjuntos finitos de $(\mathbb{N}^n, \leq_{\text{lex}})$.

3.2. Estrategia que maximiza la longitud de las secuencias malas

Queremos ahora analizar la longitud de las secuencias malas f -controladas sobre multiconjuntos finitos de $(\mathbb{N}^n, \leq_{\text{lex}})$, para una definición adecuada de “controlada”. Observar que no bastaría acotar la norma de los elementos de cada multiconjunto, pues la multiplicidad de los elementos podría igualmente crecer sin control:

Ejemplo 3.18.

$$\{2\} > \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_k > \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{k-1} > \dots > \{1\} > \{0\}$$

Es mala y “ $x + 3$ -controlada”, pero el k podría ser arbitrariamente grande.

Definimos entonces:

Definición 3.19. [Secuencias controladas de multiconjuntos] Sea f una función monótona creciente. Decimos que una secuencia $[M_0, M_1, \dots]$ de multiconjuntos finitos es t -controlada con respecto a f (o f, t -controlada) si

$$\forall i \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}^n \quad M_i(x) < f(i + t) \wedge (M_i(x) > 0 \Rightarrow |x|_\infty < f(i + t))$$

Decimos que un multiconjunto M es f, t - controlado si la secuencia $\mathbf{M} = [M]$ es f, t -controlada.

Definición 3.20. [f, t -antecesor] Decimos que N es un f, t -antecesor de M cuando $N < M$ y N está f, t - controlado.

⁶Ver Lema 3.22

Ejemplo 3.21. Consideremos en \mathbb{N}^n los multiconjuntos:

$$M_0(z) \begin{cases} 2 & \text{si } |z|_\infty < 3 \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 3 \end{cases}$$

$$M_1(z) \begin{cases} 3 & \text{si } |z|_\infty < 4 \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 4 \end{cases}$$

$$M_2(z) \begin{cases} 6 & \text{si } |z|_\infty < 7 \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 7 \end{cases}$$

(Observar que como $\{z \mid |z|_\infty < c\}$ es finito para todo $c \in \mathbb{N}$ entonces estos multiconjuntos son finitos.) Se verifica que $[M_0, M_1, M_2]$ es una secuencia (no mala) de multiconjuntos finitos 0-controlada con respecto a la función $f(x) = x^2 + 3$.

Sin embargo, no es 0-controlada con respecto a f la secuencia $[N_0, N_1, N_2]$ con

$$N_0(z) \begin{cases} 2 & \text{si } |z|_\infty < 3 \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 3 \end{cases}$$

$$N_1(z) \begin{cases} 3 & \text{si } |z|_\infty < 4 \text{ y } z \neq (0, 0) \\ 4 & \text{si } z = (0, 0) \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 4 \end{cases}$$

$$N_2(z) \begin{cases} 6 & \text{si } |z|_\infty < 7 \\ 0 & \text{si } |z|_\infty \geq 7 \end{cases}$$

pues $4 = N_1((0, 0)) \not\leq f(0 + 1) = 1^2 + 3 = 4$

Lema 3.22. *Dada una función f y un $t \in \mathbb{N}$, existe un $E \in \mathbb{N}$ tal que todas las secuencias de multiconjuntos (de \mathbb{N}^n) f, t -controladas son de longitud inferior a E . En otras palabras: no existen secuencias de multiconjuntos f, t -controladas de longitud arbitrariamente grande.*

Demostración. Consideremos el siguiente árbol T construido de manera recursiva:

- Nivel 0 del árbol: Como raíz ponemos a un nodo que llamamos R , que no será de importancia.
- Nivel 1 del árbol: Como hijos de la raíz ponemos a todos los posibles multiconjuntos M_0 tales que

$$\forall x \in \mathbb{N}^n, M_0(x) < f(t) \wedge (M_0(x) > 0 \Rightarrow |x|_\infty < f(t)).$$

Observar que las dos condiciones juntas acotan la cantidad de multiconjuntos posibles, es decir, la raíz tiene finitos hijos.

- Nivel $i + 1$ del árbol: dado un multiconjunto no vacío M que está como hoja del árbol en el nivel i , agregamos como hijos a todos los multiconjuntos N tales que

$$M > N \wedge (\forall x \in \mathbb{N}^n, N(x) < f(t + i) \wedge (N(x) > 0 \Rightarrow |x|_\infty < f(t + i)))$$

Nuevamente, solo hay finitos N que son agregados. Si el multiconjunto es $M = \emptyset$, no tiene hijos.

Esto define un árbol donde todos los vértices son de grado finito, y cuyos caminos simples (partiendo desde el nivel 1 del árbol) representan todas las posibles secuencias decrecientes de multiconjuntos f, t -controladas.

Si este árbol tuviera infinitos vértices entonces, por el Lema de Kőnnig (3.15), tendría un camino infinito. Pero, por construcción de T , este camino (ignorando R) sería una secuencia infinita decreciente de multiconjuntos, lo que contradice al Corolario 3.17.

En consecuencia el árbol es finito, y luego todos sus caminos simples (que definen secuencias decrecientes de multiconjuntos f, t -controlados) están acotados en longitud. \square

Ahora, si queremos construir sobre multiconjuntos asociados a $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$ una secuencia mala (o sea, por Hecho 3.14, decreciente) de longitud máxima, queremos ver en cada paso la manera óptima de construir el siguiente elemento de la secuencia.

Observación 3.23. A la hora de construir la secuencia mala paso a paso, como el orden es total, basta comparar el candidato a sucesor con el último elemento de la secuencia.

Gracias al Lema 3.22 podemos definir:

Definición 3.24. $[E_{M,t,f}]$ Sea M un multiconjunto. Llamamos $E_{M,t,f}$ a la máxima longitud de una secuencia mala de multiconjuntos que tiene a M como primer elemento y es f, t -controlada.

En otras palabras,

$$E_{M,t,f} = |M, M_1, M_2, \dots, M_u|$$

con M, M_1, \dots, M_u una secuencia mala f, t -controlada de longitud máxima.

Ejemplo 3.25. Para cualesquiera t, f con $f(t) \geq 1$, si $M = \emptyset$ entonces $E_{M,t,f} = 1$. (Recordar que \emptyset es el multiconjunto con todas las multiplicidades iguales a 0).

Observación 3.26 (Monotonía de $E_{M,t,f}$). Si M y N son f, t -controlados entonces

$$M \leq N \Rightarrow E_{M,t,f} \leq E_{N,t,f}.$$

De hecho, como estamos considerando que f es monótona creciente,

$$M < N \Rightarrow E_{M,t,f} < E_{N,t,f}.$$

Más en general, sean M y N f, t - y g, u -controlados, respectivamente. Entonces

$$M \leq N, t \leq u, f \leq g \Rightarrow E_{M,t,f} \leq E_{N,u,g}.$$

Observación 3.27 (Último elemento de una secuencia mala). Para todo multiconjunto M vale $\emptyset \subseteq M$ y luego $\emptyset \leq M$, y por lo tanto toda secuencia mala de longitud máxima tiene como último elemento a \emptyset .

Observación 3.28. Dados M, f, t , queremos encontrar un N que sea el f, t -antecesor maximal (respecto al orden) de M (como estamos sobre un orden total, tal N es el óptimo para maximizar la longitud de la secuencia mala).

Ya sabemos por Proposición 3.10 que un tal N será de la forma $N = M - D + A$, donde $D \neq \emptyset$, $D \cap A = \emptyset$, y $\forall z$ tal que $A(z) \geq 1$ vale $z < \text{máx } D = d_{M,N}$.

Veremos que para N expresado de esta forma se pueden encontrar los D y A óptimos.

Definición 3.29. Dados M, D, t, f , con $D \subseteq M$, M un multiconjunto $f, t - 1$ - controlado, definimos el multiconjunto (potencialmente vacío)

$$S_{M,D,t,f} = \sum_{\substack{z : z < \text{máx } D, \\ z \notin D, \\ |z|_\infty < f(t)}} \underbrace{(f(t) - 1 - M(z))}_{\geq 0 \text{ porque } M \text{ es } f, t - 1\text{- controlado}} \cdot \{z\}.$$

De cierta manera, $S_{M,D,t,f}$ satura a M respecto a f y t para los elementos menores que $\text{máx } D$ que no están en D . Notar que este multiconjunto es finito porque solo suma sobre los z tales que $|z|_\infty < f(t)$.

Notamos también

$$S_{M,d,t,f} := S_{M,\{d\},t,f}.$$

Observar que si $d = 0$ entonces $S_{M,d,t,f} = \emptyset$. También es vital observar que

$$S_{M,D,t,f} \cap D = \emptyset.$$

Proposición 3.30. Sea $N = M - D + A$. Notemos $d = \text{máx } D$, y sean $A \cap D = \emptyset$, $A < \{d\}$, y $N' = M - D + S_{M,D,t,f}$, con N y N' f, t - controladas.⁷ Entonces $N \leq N'$ (y luego $E_{N,t,f} \leq E_{N',t,f}$).

Demostración. Por construcción, $N(z)$ y $N'(z)$ solo pueden diferir si $z < d$, $z \notin D$ y $|z|_\infty < f(t)$, pero como son f, t - controladas, en tales casos

$$N(z) \leq f(t) - 1 = M(z) - \underbrace{0}_{D(z)} + \underbrace{(f(t) - 1 - M(z))}_{S_{M,D,t,f}(z)} = N'(z).$$

□

Observación 3.31 (Candidatos a f, t -antecesor maximal). Sea $d = \text{máx } D$. Como vale $S_{M,D,t+1,f} \subseteq S_{M,d,t+1,f}$, y obviamente $\{d\} \subseteq D$, entonces por Proposición 3.12 se tiene,

$$M - D + S_{M,D,t+1,f} \leq M - \{d\} + S_{M,d,t+1,f}$$

Juntando esto con la Proposición 3.30 tenemos que

$$M - D + A \leq M - D + S_{M,D,t+1,f} \leq M - \{d\} + S_{M,d,t+1,f}$$

En consecuencia, el f, t -antecesor maximal de un M f, t -controlado debe ser de la forma

$$N = M - \{d\} + S_{M,d,t+1,f}$$

para cierto d .

Ahora solo nos queda saber qué d conviene elegir en un principio.

Proposición 3.32. Si $N = M - \{d\} + S_{M,d,t,f}$ y $N' = M - \{b\} + S_{M,b,t,f}$, con $b = \text{mín } M$, entonces $N \leq N'$.

Observar, usando la Proposición 3.30, que la elección del sumando fue óptima dada la elección de d y b .

⁷Observar que si M fuese f, t -controlada tomaríamos N y N' $f, t + 1$ -controladas, y a $S_{M,D,t+1,f}$.

Demostración. Si $d = b$ entonces $N = N'$. Si $d > b$ entonces $d_{N,N'} = d$, con $N(d) = M(d) - 1 < M(d) = N'(d)$, luego, por la última caracterización en la Definición 3.7, $N < N'$. \square

Hemos entonces probado el siguiente teorema:

Teorema 3.33. *Dado M un multiconjunto de $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$ $f, t - 1$ - controlado, existe un único f, t -antecesor de M maximal respecto al orden. Llamamos $\text{PRE}_{f,t}(M)$ a tal f, t -antecesor.*

Se cumple $\text{PRE}_{f,t}(M) = M - \{b\} + S_{M,b,t,f}$, con $b = \text{mín } M$. Explícitamente:

$$\text{PRE}_{f,t}(M)(z) = \begin{cases} f(t) - 1 & \text{si } z < \text{mín } M \text{ y } |z|_{\infty} < f(t) \\ M(z) - 1 & \text{si } z = \text{mín } M \\ M(z) & \text{si } z > \text{mín } M \text{ o } |z|_{\infty} \geq f(t) \end{cases}$$

Observación 3.34. Gracias a este teorema encontramos la estrategia óptima explícita (sabemos como construir el antecesor maximal) para maximizar la longitud de una secuencia decreciente de multiconjuntos sobre \mathbb{N}^n , dado un prefijo: Si se tiene $[M_0, \dots, M_k]$ f, t - controlada, la mejor manera de continuarla es con $\text{PRE}_{f,t+k+1}(M_k)$.

Ejemplo 3.35 (Maximizar el sufijo de un multiconjunto en \mathbb{N}). Sea $f(x) = x, t = 3$, y $M_0 = \{2\}$

Entonces tenemos la siguiente secuencia mala maximal (fijado el M_0) de multiconjuntos en \mathbb{N} :

$$\begin{array}{llll} M_0 = \{2\} & M_1 = \{ \underbrace{1, 1, 1}_{3 < f(1+3)=4}, \underbrace{0, 0, 0}_{3 < f(1+3)=4} \} & M_2 = \{1, 1, 1, 0, 0\} & \dots \\ M_{4=1+3} = \{1, 1, 1\} & M_5 = \{1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{7=5+2 < f(5+3)=8} \} & M_6 = \{1, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_6 \} & \dots \\ M_{12=7+5} = \{1, 1\} & M_{13} = \{1, \underbrace{0, \dots, 0}_{15=13+2} \} & \dots & \dots \\ M_{28=13+15} = \{1\} & M_{29} = \{ \underbrace{0, \dots, 0}_{31=29+2} \} & \dots & M_{60=29+31} = \emptyset \end{array}$$

Por la Observación 3.34, hemos visto que $E_{\{2\},3,f} = 61$.

Así que, dado un multiconjunto inicial, maximizamos la longitud de su sufijo, pero notar que no optimizamos el multiconjunto inicial. Uno puede preguntarse “¿estaremos muy lejos de la longitud máxima para secuencias malas $f, 3$ -controladas?”. En el Ejemplo 3.40 veremos que, aún en este caso con función de control de lento crecimiento, se obtiene una gran diferencia cuando también se elige el mejor multiconjunto inicial posible.

Definición 3.36. $[L_{n,f}^{\text{mset}}(t)]$ Sea f una función monótona creciente, $t \in \mathbb{N}$, y $n \in \mathbb{N}$. Denotamos con $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$ a la longitud máxima de una secuencia de multiconjuntos sobre $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$ que es decreciente y f, t -controlada.

Observación 3.37. Sea x_0, x_1, \dots una secuencia de n -uplas mala en el orden lexicográfico y t -controlada con respecto a cierta g . Luego $[\{x_0\}, \{x_1\}, \dots]$ es una secuencia de multiconjuntos mala y t -controlada respecto a g ⁸.

Por lo tanto

$$L_{n,g}^{\text{mset}}(t) \geq L_{n,g}^{\text{lex}}(t).$$

⁸Cuando g es monótona creciente, esto falla únicamente en el caso que la secuencia consista únicamente de la n -upla de ceros, con $f(0+t) = 1$. En tal caso tenemos a \emptyset como la secuencia de multiconjuntos correspondiente.

Observación 3.38. Ya sabemos, gracias al Teorema 3.33, optimizar $E_{M,t,f}$, de modo que para poder calcular $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$ solo necesitaríamos determinar el multiconjunto con el cual iniciar la secuencia.

Sabemos, ya que estamos en un orden total, que será

$$M_0 = \text{máx}\{M \mid \forall z M(z) < f(0+t), z \in M \Rightarrow |z|_\infty < f(0+t)\}$$

pero este máximo se puede encontrar fácilmente: $M_0 = \sum_{|z|_\infty < f(t)} (f(t) - 1) \cdot \{z\}$ contiene a todos los demás multiconjuntos que cumplen esas propiedades, y luego en particular es mayor que ellos respecto al orden de multiconjuntos.

Es decir que tenemos la estrategia para encontrar la secuencia mala f, t - controlada cuya longitud alcanza $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$:

Corolario 3.39 (Estrategia maximizadora). $L_{n,f}^{\text{mset}}(t) = |[M_0, M_1, \dots, M_u]|$, donde

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{z: |z|_\infty < f(t)} (f(t) - 1) \cdot \{z\} \\ M_{i+1} &= \text{PRE}_{f,t+i+1}(M_i)(z) \end{aligned}$$

y se cumple $M_u = \emptyset$.

Es decir, se elige el mejor M_0 posible y luego se toma el antecesor maximal sucesivamente hasta llegar al multiconjunto vacío.

Ejemplo 3.40 (Cálculo constructivo de $L_{1,x}^{\text{mset}}(3)$). El Ejemplo 3.35 no optimizaba el primer elemento. Si queremos encontrar la más larga secuencia mala de multiconjuntos sobre \mathbb{N} que sea $x, 3$ -controlada debemos, por la Observación 3.38, comenzar por

$$M_0 = \{2, 2, 1, 1, 0, 0\}.$$

Veamos cómo continuaría:

$$\begin{array}{llll} M_0 = \{2, 2, 1, 1, 0, 0\} & M_1 = \{2, 2, 1, 1, 0\} & M_2 = \{2, 2, 1, 1\} & M_3 = \{2, 2, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_5\} \\ \dots & M_{8=3+5} = \{2, 2, 1\} & M_9 = \{2, 2, \underbrace{0, \dots, 0}_{11}\} & \dots \\ M_{20=9+11} = \{2, 2\} & M_{21} = \{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{23=21+2}\} & M_{22} = \{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{22}, \underbrace{0, \dots, 0}_{24}\} & \dots \\ M_{46} = \{2, \underbrace{1, \dots, 1}_{22}\} & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Cuya longitud total es aproximadamente del orden de $2^{2^{22}}$, considerablemente mayor que la longitud 61 del Ejemplo 3.35.

3.3. Una expresión recursiva para la máxima longitud de secuencias malas

Expresaremos el crecimiento recursivo de la función $L_{n,g}^{\text{mset}}(t)$ de una manera que nos facilite clasificarla en la Jerarquía Rápidamente Creciente.

Recordemos de la Definición 3.24 que $E_{M,t,f} = |[M, M_1, M_2, \dots, M_u]| = u + 1$, con $[M, M_1, \dots, M_u]$ una secuencia mala de multiconjuntos en $(\mathbb{N}^n, <_{\text{lex}})$ (o sea decreciente) f, t -controlada de longitud máxima. Expresaremos ahora de manera recursiva estos valores para f, t fijos y M de la forma $M = k \cdot \{x\}$.

Para facilitar la notación definiremos la siguiente función:

Definición 3.41. $[\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t)]$ Dada f fija, $t, k \in \mathbb{N}$, $k < f(t)$ y $x \in \mathbb{N}^n$ con $|x|_\infty < f(t)$ definimos:

$$\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} E_{k \cdot \{x\}, t, f} - 1.$$

Cuando queramos cambiar o hacer explícita la función de control notaremos:

$$\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t)[f] \stackrel{\text{def}}{=} E_{k \cdot \{x\}, t, f} - 1.$$

El término -1 de la expresión anterior viene de no contar el multiconjunto inicial, lo cual nos facilitará la expresión recursiva. Es decir, $\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t)$ cuenta la cantidad de pasos para llegar desde $k \cdot \{x\}$ hasta \emptyset mediante la secuencia f, t -controlada más larga. En el Comentario 3.45 extenderemos esta definición para todo $x \in \mathbb{N}^n$ y $k \in \mathbb{N}$.

Observación 3.42. Dada f .

- Como $0 \cdot \{x\} = \emptyset$ es el mínimo absoluto sobre multiconjuntos, tenemos que siempre vale

$$\mathbb{L}_0^{(n)}(x, t) = 0$$

- Dado que $k \cdot \{0\}$ se extiende siempre removiendo un cero, tenemos

$$\mathbb{L}_k^{(n)}(0, t) = k$$

- Para calcular $\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t)$:

Empezaremos reemplazando un x por elementos menores y $t+1$ -controlados; la cantidad de pasos para terminar de eliminarlos es precisamente $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)$. A esta altura estamos “sobre” $k \cdot \{x\}$ “con un control de” $t + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)$, así que insertamos esta cantidad en $\mathbb{L}_k^{(n)}(x, -)$ y sumamos con la cantidad de pasos necesaria para llegar allí:

$$\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) = \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_k^{(n)}(x, t + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)). \quad (10)$$

Escribamos esto último más explícitamente.

Definición 3.43. Dada $x \in \mathbb{N}^n$ y una función f , definimos:

$$\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_x(u) \stackrel{\text{def}}{=} u + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, u).$$

Proposición 3.44 (Expresión de $\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t)$ en base a $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, -)$).

$$\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) = \sum_{i=0}^k \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(t))$$

(donde $\rho^0(t) = t$).

Demostración. Con la notación de ρ tenemos que la Ecuación (10) se escribe

$$\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) = \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_k^{(n)}(x, \rho(t)). \quad (11)$$

Veamos el caso $k = 0$, y luego, meramente de manera ilustrativa, los casos $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_0^{(n)}(x, \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)) = \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + 0 \\ \mathbb{L}_2^{(n)}(x, t) &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho(t)) \\ \mathbb{L}_3^{(n)}(x, t) &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_2^{(n)}(x, \rho(t)) \\ &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + (\mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho(t)) + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho(\rho(t)))) \\ &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho(t)) + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^2(t)) \end{aligned}$$

Ahora veamos el paso inductivo:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \mathbb{L}_k^{(n)}(x, \rho(t)) && \text{(Por la Ecuación (11))} \\ &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(\rho(t))) && \text{(Por hipótesis inductiva)} \\ &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \sum_{i=0}^{k-1} \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^{i+1}(t)) \\ &= \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) + \sum_{i=1}^k \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(t)) \\ &= \sum_{i=0}^k \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(t)) \end{aligned}$$

□

Para terminar la definición recursiva sobre $\mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ nos faltaría definir $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)$. Ahora, por Corolario 3.39 tenemos:

$$\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) = E_{P, t+1, f} \quad (12)$$

donde

$$P = P_{t+1, x, f} = (f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t+1)\}.$$

Comentario 3.45. Adoptaremos la definición $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) = E_{P, t+1, f}$, que generaliza a la original al permitir tomar un x cualquiera (no necesariamente controlado por $f(t)$) siempre y cuando continuemos la sucesión de manera decreciente y controlada. Por ejemplo, para esta nueva definición tenemos que para $f(x) = x + 1$, $t = 0$, $x = 8$, $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) = 4$, correspondiéndose con la secuencia $[\{8\}, \{1\}, \{0, 0\}, \{0\}, \emptyset]$.

Usaremos esta “ampliación” de la definición original en el Corolario 3.49. También tomaremos la definición ampliada a todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(t)).$$

que usaremos abundantemente en la Subsubsección 3.4.2.

Para expresar de manera recursiva a (12), observemos que lo que vamos a hacer es aplicar $\mathbb{L}^{(n)}(\cdot)$ sobre subconjuntos de P de menor a mayor, sumando en cada paso al t inicial la cantidad de pasos que tomó hacer todo lo anterior. Introduzcamos notación para expresar esto convenientemente.

Dados t, x , y f , definimos el sucesor $S(y)$ de un elemento y como el sucesor lexicográfico dentro de cierto subconjunto de \mathbb{N}^n :

Definición 3.46. Dado $x \in \mathbb{N}^n$ definimos, para $y \in \mathbb{N}^n, t \in \mathbb{N}$:

$$S_f^x(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} S(y) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{z \in \mathbb{N}^n \mid y <_{\text{lex}} z \leq_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t)\}$$

Empecemos ahora nuestra búsqueda de una expresión recursiva para $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t)$, utilizando la Ecuación (12).

- Primero contamos el mero paso inicial de estar “sobre” el multiconjunto

$$(f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t+1)\}$$

- Después contamos los $L_0 = \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(0, t+1)$ pasos para eliminar⁹ los ceros ¹⁰.
- Luego pasamos a $S(0) = S_f^x(0, t+1)$, donde tenemos $L_1 = \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(0), t+1 + L_0)$ pasos para eliminar los $S(0)$.
- Después tenemos $L_2 = \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(S(0)), t+1 + L_0 + L_1)$ pasos para eliminar los $S^2(0)$.
- Etc.
- En general:

$$L_j = \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^j(0), t+1 + \sum_{l=0}^{j-1} L_l). \quad (13)$$

Y valdrá:

$$E_{P,t+1,f} = 1 + \sum_{j=0}^{|\text{Sop}P|-1} L_j. \quad (14)$$

Donde recordamos de la Ecuación (12) que:

$$P = P_{t+1,x,f} = (f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t+1)\}.$$

Para escribir esto de una manera más compacta definimos la siguiente función:

Definición 3.47.

$$\sigma(y, u) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\underbrace{S(y)}_{:=S_f^x(y,t+1)}, u + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(y, u) \right).$$

⁹Notar que no estamos contando nuevamente el multiconjunto inicial.

¹⁰Abusamos la notación y ponemos 0, pero nos referimos a las n -uplas de ceros $\vec{0} \in \mathbb{N}^n$.

Tenemos entonces ¹¹

$$\begin{aligned}\sigma(0, t+1) &= (S(0), t+1 + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(0, t+1)); \\ \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma(0, t+1)), \pi_2(\sigma(0, t+1))) &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(0), t+1 + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(0, t+1)) \\ &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(0), t+1 + L_0) = L_1\end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma^2(0, t+1)), \pi_2(\sigma^2(0, t+1))) &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^2(0), \pi_2(\sigma(\sigma(0, t+1)))) \\ &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^2(0), \pi_2(\sigma(S(0), t+1 + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(0, t+1)))) \\ &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^2(0), \sigma_2(S(0), t+1 + L_0)) \\ &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^2(0), t+1 + L_0 + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(0), t+1 + L_0)) \\ &= \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S(S(0)), t+1 + L_0 + L_1) \\ &= L_2\end{aligned}$$

En general, tendremos

$$\pi_2(\sigma^j(0, t+1)) = (t+1) + \sum_{l=0}^{j-1} L_l \quad (15)$$

Donde interpretamos que la sumatoria vale 0 si $j = 0$. Luego vale, $\forall j \geq 0$

$$L_j = \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma^j(0, t+1)), \pi_2(\sigma^j(0, t+1))). \quad (16)$$

Demostración de (15). Procedemos por inducción en j . El caso $j = 1$ ya fue visto. Veamos el caso inductivo:

$$\begin{aligned}\pi_2(\sigma^{j+1}(0, t+1)) &= \pi_2(\sigma(\sigma^j(0, t+1))) \\ &= \pi_2(\sigma(S^j(0), t+1 + \sum_{l=0}^{j-1} L_l)) \quad (\text{Por hipótesis inductiva}) \\ &= \pi_2(S^{j+1}, t+1 + \sum_{l=0}^{j-1} L_l + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(n)}(S^j(0), t+1 + \sum_{l=0}^{j-1} L_l)) \quad (\text{Def. 3.47}) \\ &= t+1 + \sum_{l=0}^{j-1} L_l + L_j \quad (\text{Ecuación (13)}) \\ &= t+1 + \sum_{l=0}^j L_l\end{aligned}$$

□

Con esta notación, juntando (12), (14) y (16), tenemos el resultado:

¹¹ $\pi_1(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} a$. $\pi_2(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} b$

Teorema 3.48. Dada f monótona creciente, $x \in \mathbb{N}^n, x \neq \vec{0}, t \in \mathbb{N}$ vale

$$\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) = 1 + \sum_{j=0}^{|\text{Sop}P|-1} \mathbb{L}_{f^{(t+1)}-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma^j(0, t+1)), \pi_2(\sigma^j(0, t+1))),$$

donde $P = (f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t+1)\}$

Y por lo tanto, usando la definición del Comentario 3.45 para $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t-1)$ tenemos:

Corolario 3.49 (Expresión de $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$). Si $t > 0$

$$L_{n,f}^{\text{mset}}(t) = \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t-1) = 1 + \sum_{j=0}^{|\text{Sop}P|-1} \mathbb{L}_{f^{(t)}-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma^j(0, t)), \pi_2(\sigma^j(0, t))), \quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma(y, u) &= (S_f^x(y, t), u + \mathbb{L}_{f^{(t)}-1}^{(n)}(y, u)) \\ P &= (f(t) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t)\} \\ x &= (f(t), \dots, f(t)). \end{aligned}$$

Observar que la elección de x permite que P sea efectivamente el multiconjunto inicial óptimo dado en el Corolario 3.39.

Comentario 3.50. Para $P = (f(t) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t)\}$, vale $|\text{Sop}(P)| = (f(t))^n$

En resumen, juntando la Observación 3.42, la Proposición 3.44, y el Teorema 3.48, tenemos:

Comentario 3.51 (Definición recursiva completa de $\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t)$). Sea f monótona creciente y $t \in \mathbb{N}$. Recordemos las Definiciones 3.41, 3.43, 3.46, 3.47, y las definiciones extendidas dadas en el Comentario 3.45:

- Si $|x|_{\infty}, k < f(t)$ entonces $\mathbb{L}_k^{(n)}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} E_{k \cdot \{x\}, t, f} - 1$
- $\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_x(u) \stackrel{\text{def}}{=} u + \mathbb{L}_1^{(n)}(x, u)$
- $S_f^x(y, t) \stackrel{\text{def}}{=} S(y) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{z \in \mathbb{N}^n \mid y <_{\text{lex}} z \leq_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t)\}$
- $\sigma(y, u) = (S_f^x(y, t+1), u + \mathbb{L}_{f^{(t+1)}-1}^{(n)}(y, u)),$
- $P = (f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z <_{\text{lex}} x, |z|_{\infty} < f(t+1)\}$
- $\mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) = E_{P, t+1, f}$

Y tenemos para todo $x \in \mathbb{N}^n, k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0^{(n)}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ \mathbb{L}_k^{(n)}(0, t) &\stackrel{\text{def}}{=} k \\ \mathbb{L}_{k+1}^{(n)}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^k \mathbb{L}_1^{(n)}(x, \rho^i(t)) \\ \mathbb{L}_1^{(n)}(x, t) &\stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{j=0}^{|\text{Sop}P|-1} \mathbb{L}_{f^{(t+1)}-1}^{(n)}(\pi_1(\sigma^j(0, t+1)), \pi_2(\sigma^j(0, t+1))) \end{aligned}$$

3.4. Clasificación de la longitud en la Jerarquía Rápidamente Creciente

Observación 3.52. Observemos que como $n = 1$ tenemos las siguientes simplificaciones para $y < x \leq f(t)$:

$$\begin{aligned} S_f^x(y, t) &\stackrel{\text{def}}{=} S(y) = y + 1 \\ \sigma(y, u) &= (y + 1, u + \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(1)}(y, u)) \\ P &= (f(t+1) - 1) \cdot \{z \mid z < x\} = (f(t+1) - 1) \cdot \{0, 1, \dots, x - 1\} \end{aligned}$$

Con esta observación, podemos reescribir partes del Comentario 3.51 como:

Observación 3.53.

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0^{(1)}(x, t) &= 0 \\ \mathbb{L}_k^{(1)}(0, t) &= k \\ \mathbb{L}_{k+1}^{(1)}(x, t) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{L}_1^{(1)}(x, \rho^i(t)) \\ \mathbb{L}_1^{(1)}(x, t) &= 1 + \sum_{j=0}^{x-1} \mathbb{L}_{f(t+1)-1}^{(1)}(j, \pi_2(\sigma^j(0, t+1))) \end{aligned}$$

Si $x \leq f(t)$ entonces $\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t) = E_{P, t+1, f} = E_{(f(t+1)-1) \cdot \{0, 1, \dots, x-1\}, t+1, f}$

3.4.1. Cota inferior para $n = 1$

Recordemos que

$$L_{1, f}^{\text{mset}}(t) = E_{(f(t)-1) \cdot \{0, \dots, f(t)-1\}, t, f} \quad (18)$$

Veremos cómo acotar inferiormente esta función.

El Ejemplo 3.40 sugiere que el crecimiento de $E_{\{k\}, t, f}$ es sumamente rápido, y parecería subir en la Jerarquía por cada aumento de k . Probemos primero esta intuición:

Proposición 3.54. Sean $f \geq F_\alpha$, $\alpha \in \omega$, $\alpha \geq 1$, $t > 1$, y $1 \leq x \leq f(t)$. Entonces

$$\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t) > F_{\alpha+x-1}(t).$$

Demostración. Procederemos por inducción en x .

Caso $x = 1$:

$$\mathbb{L}_1^{(1)}(1, t) = f(t+1) \geq F_\alpha(t+1) > F_\alpha(t)$$

Paso inductivo: llamemos $L(t) = \mathbb{L}_1^{(1)}(x-1, t)$, y observemos que por hipótesis inductiva $L(t) > F_{\alpha+x-2}(t)$. Ahora:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t) &= E_{(f(t+1)-1) \cdot \{0, \dots, x-1\}, t+1, f} && \text{(Observación 3.53)} \\
&\geq E_{(f(t+1)-1) \cdot \{x-1\}, t+1, f} \\
&\geq 1 + \mathbb{L}_{f(t)-1}^{(1)}(x-1, t) \\
&\geq \sum_{i=0}^{f(t)-2} \mathbb{L}_1^{(1)}(x-1, \rho^i(t)) && \text{(Observación 3.53)} \\
&\geq \sum_{i=0}^{f(t)-2} \mathbb{L}_1^{(1)}(x-1, L^i(t)) && (\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} u + \mathbb{L}_1^{(1)}(x-1, u) = u + L(u)) \\
&= \sum_{i=0}^{f(t)-2} L^{i+1}(t) \\
&\geq L^{f(t)-1}(t) \\
&\geq L^{F_\alpha(t)-1}(t) \\
&\geq L^{2t+1-1}(t) && (\alpha \geq 1 \text{ junto al Hecho 1.26 y la expresión de } F_1) \\
&\geq L^{t+1}(t) && (t \geq 1) \\
&> F_{\alpha+x-2}^{t+1}(t) && \text{(Hipótesis inductiva)} \\
&= F_{\alpha+x-1}(t)
\end{aligned}$$

□

Volviendo a la ecuación (18) y aplicando este resultado podemos ver:

Corolario 3.55 (Comportamiento “ackermanniano” de la cota inferior). *Sea $\alpha \geq 1$, $f \geq F_\alpha$. Entonces $\forall t > 1$ vale*

$$L_{1,f}^{\text{mset}}(t) > F_\omega(t).$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
L_{1,f}^{\text{mset}}(t) &= E_{(f(t)-1) \cdot \{0, \dots, f(t)-1\}, t, f} \\
&\geq E_{1 \cdot \{f(t)-1\}, t, f} \\
&\geq \mathbb{L}_1^{(1)}(F_\alpha(t) - 1, t) && (f \geq F_\alpha) \\
&> F_{\alpha+F_\alpha(t)-1-1}(t) && \text{(Por Proposición 3.54)} \\
&\geq F_{\alpha+2t+1-1-1}(t) && (\alpha \geq 1 \text{ y el Hecho 1.26)} \\
&\geq F_{2t}(t) && (\alpha \geq 1) \\
&\geq F_{t+1}(t) && (t \geq 1) \\
&= F_\omega(t) && \text{(Definición de } F_\omega)
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.56. *Sea $n \geq 1$, y H una función unaria tal que $L_{1,f}^{\text{mset}}(t) > H(t)$. Entonces*

$$L_{n,f}^{\text{mset}}(t) > H(t).$$

Corolario 3.57 (Cota inferior para \mathbb{N}^n). *En consecuencia, por el Corolario 3.55, si $\alpha \geq 1$ y $f \geq F_\alpha$, entonces $\forall t > 1$ vale*

$$L_{n,f}^{\text{mset}}(t) > F_\omega(t).$$

Prueba de Proposición 3.56. Para cada t , tomemos en \mathbb{N} una secuencia de multiconjuntos

$$\mathbf{X}^{(1)} = [M_0, M_1, \dots]$$

decreciente y f, t -controlada, de longitud superior a $H(t)$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \iota_1 : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}^n \\ \iota_1(x) &= (x, 0, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Y consideremos que dado un multiconjunto M en \mathbb{N} , $\iota_1(M)$ es el siguiente multiconjunto en \mathbb{N}^n :

$$(\iota_1(M))(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} M(x_1) & \text{si } x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ahora construimos en \mathbb{N}^n la secuencia de multiconjuntos que consiste en:

$$\mathbf{X}^{(n)} = [\iota_1(M_0), \iota_1(M_1), \dots]$$

Es claro que $\mathbf{X}^{(n)}$ es también decreciente, f, t -controlada, y de longitud superior a $H(t)$. \square

3.4.2. Cota superior para $n = 1$

Miremos ahora las cotas superiores para secuencias de multiconjuntos en \mathbb{N} , dada una función de control f estrictamente creciente. Esta última condición sobre el crecimiento de f sirve para facilitar las demostraciones, pero no es de importancia fundamental, como se verá finalmente en el Corolario 3.64.

Lema 3.58. *Sean $f \in \mathfrak{F}_\alpha$ estrictamente creciente y $x \in \mathbb{N}$. Llamemos*

$$\begin{aligned} K(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_1^{(1)}(x, u) \\ L(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{f(u)}^{(1)}(x, u) \end{aligned}$$

Entonces, si $K(u)$ está mayorada por una función en \mathfrak{F}_β , con $\beta \geq 2$ entonces $L(u)$ está mayorada por una función en $\mathfrak{F}_{\max\{\beta+1, \alpha\}}$.

Demostración. Recordar que

$$\rho(u) \stackrel{\text{def}}{=} \rho_x(u) = u + K(u).$$

Como f es estrictamente creciente, K también lo es, y luego

$$\rho(u) \leq 2K(u) \tag{19}$$

Y luego, como ambas funciones son crecientes, $\rho^i(u) \leq (2K)^i(u) = \underbrace{2K(2K(\dots(2K(u))))}_{i \text{ veces}}$

$$\begin{aligned}
L(u) &= \mathbb{L}_{f(u)}^{(1)}(x, u) \\
&= \sum_{i=0}^{f(u)-1} \mathbb{L}_1^{(1)}(x, \rho^i(u)) && \text{(Observación 3.53)} \\
&\leq f(u) \mathbb{L}_1^{(1)}(x, \rho^{f(u)-1}(u)) \quad (\mathbb{L}_a^{(1)}(b, c) \text{ es monótona creciente sobre sus tres variables}) \\
&\leq f(u) \mathbb{L}_1^{(1)}(x, (2K)^{f(u)-1}(u)) && \text{(Ecuación (19))} \\
&= f(u) K((2K)^{f(u)-1}(u)) \\
&\leq f(u) (2K)((2K)^{f(u)-1}(u)) \\
&= f(u) (2K)^{f(u)}(u) \\
&\leq f(u) (2K)^{f(u)}(f(u)) && (f \text{ estrictamente creciente}) \\
&\leq f(u) (F_\beta^p)^{f(u)}(f(u)) && \text{(Hecho (1.32) aplicado a } 2K \in \mathfrak{F}_\beta. \text{ Ver Comentario 3.59)} \\
&\leq f(u) F_\beta^p{}^{f(u)+1}(p f(u)) \\
&= f(u) F_{\beta+1}(p f(u)) && \text{(definición de } F_{\beta+1} \text{ y composición con } p f(u))
\end{aligned}$$

Que al ser producto¹² y composición de funciones en \mathfrak{F}_α y $\mathfrak{F}_{\beta+1}$, está en $\mathfrak{F}_{\max\{\beta+1, \alpha\}}$. \square

Comentario 3.59. Para el caso $\beta = 1$ la demostración valdría igual salvo que $2K \in \mathfrak{F}_2$, y luego $L(u)$ está mayorada en $\mathfrak{F}_{\max\{3, \alpha\}}$.

Proposición 3.60. *Dados $\alpha \in \omega$, y $1 \leq x$, con $f \in \mathfrak{F}_\alpha$ una función estrictamente creciente, entonces:*

- Si $\alpha \geq 2$ entonces $\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t)$ está mayorada por una función en $\mathfrak{F}_{\alpha+x-1}$
- Si $\alpha = 1$ entonces $\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t)$ está mayorada por una función en \mathfrak{F}_{1+x}

Demostración. Procederemos por inducción en x . Para el caso $x = 1$ tenemos:

$$\mathbb{L}_1^{(1)}(1, t) = 1 + f(t+1) - 1 = f(t+1) \in \mathfrak{F}_\alpha.$$

Paso inductivo sobre $x + 1$: ahora consideremos $x + 1 > 1$, y supongamos $\alpha + x - 1 \geq 2$ (i.e. $\alpha \geq 2 \vee x \geq 2$). Llamemos, como en el Lema 3.58:

$$\begin{aligned}
K(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_1^{(1)}(x, u) [f + 1] \\
L(u) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{f(u)+1}^{(1)}(x, u) [f + 1]
\end{aligned}$$

(Donde estamos tomando¹³ que en $\mathbb{L}_a^{(1)}(b, c) [f + 1]$ la función de control es $f + 1$ (y no f))

¹²Observar que $\beta + 1 \geq 2$, y luego el producto es cerrado en $\mathfrak{F}_{\beta+1}$.

¹³Ver Definición 3.41.

Observar que por hipótesis inductiva ¹⁴ K está mayorado por una función en $\mathfrak{F}_{\alpha+x-1}$ y luego ¹⁵ por Lema 3.58, L está mayorada por una función en $\mathfrak{F}_{\max\{\alpha+x,\alpha\}} = \mathfrak{F}_{\alpha+x}$.

Ahora:

$$\begin{aligned}\mathbb{L}_1^{(1)}(x+1, t) &= E_{(f(t+1)-1) \cdot \{0, \dots, x\}, t+1, f} \\ &< E_{(f(t+1)) \cdot \{x\}, t+1, f+1} \\ &= 1 + \mathbb{L}_{f(t+1)}^{(1)}(x, t+1) [f+1] \\ &\leq 1 + L(t+1)\end{aligned}$$

Que está mayorada en $\mathfrak{F}_{\alpha+x}$, como queríamos ver.

Finalmente, en el caso $\alpha + x - 1 = 1$ (i.e $\alpha = 1, x = 1$), L está mayorado en \mathfrak{F}_3 , y luego, con un razonamiento análogo al de recién, $\mathbb{L}_1^{(1)}(x+1, t)$ estará acotado en $\mathfrak{F}_{\alpha+x+1}$. \square

Comparar la Proposición 3.60 con la cota inferior en la Proposición 3.54 indica que esta cota es bastante ajustada. Sin embargo, esta información es insuficiente para calcular $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$, porque no tenemos una cota puntual explícita para la función que mayor a $\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t)$: solo sabemos en qué nivel de la Jerarquía se encuentra para cada x fijo, pero ignoramos cómo varía en función de x .

Trataremos ahora de refinar los anteriores resultados bajo mayores suposiciones, con el propósito de obtener cotas para $L_{n,f}^{\text{mset}}(t)$.

Lema 3.61. Sean $t \geq 2, x \in \mathbb{N}$, y sea f una función estrictamente creciente tal que $\forall z f(z) \leq F_\alpha(z)$, para cierto $\alpha \in \omega, 2 \leq \alpha$.

Llamemos

$$\begin{aligned}K(u) &= K(u)[f] = \mathbb{L}_1^{(1)}(x, u) [f] \\ L(u) &= L(u)[f] = \mathbb{L}_{f(u)}^{(1)}(x, u) [f]\end{aligned}$$

Entonces, para $u \geq 2$, si $K(u) \leq F_\alpha(u)$, entonces $L(u) \leq F_{\alpha+2}(u)$.

¹⁴Como f estrictamente creciente, $K(u) \leq \mathbb{L}_1^{(1)}(x, u+1)$, que está mayorada por HI.

¹⁵ $\alpha + x - 1 \geq 2$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
L(u) &= \mathbb{L}_{f(u)}^{(1)}(x, u) \\
&= \sum_{i=0}^{f(u)-1} \mathbb{L}_1^{(1)}(x, \rho^i(u)) && \text{(Observación 3.53)} \\
&\leq f(u) \mathbb{L}_1^{(1)}(x, \rho^{f(u)-1}(u)) \quad (\mathbb{L}_a^{(1)}(b, c) \text{ es monótona creciente sobre sus tres variables}) \\
&\leq f(u) \mathbb{L}_1^{(1)}(x, (2K)^{f(u)-1}(u)) && (19) \\
&= f(u) K((2K)^{f(u)-1}(u)) \\
&\leq f(u) (2K)((2K)^{f(u)-1}(u)) \\
&= f(u) (2K)^{f(u)}(u) \\
&\leq F_\alpha(u) (2F_\alpha)^{F_\alpha(u)}(u) && (f \leq F_\alpha) \\
&< F_\alpha(u) (F_\alpha(F_\alpha))^{F_\alpha(u)}(u) && (F_\alpha(x) > 2x) \\
&= F_\alpha(u) (F_\alpha)^{2F_\alpha(u)}(u) \\
&\leq (F_\alpha)^{2F_\alpha(u)+1}(u) && (\alpha \geq 2 \text{ y Corolario 1.37}) \\
&< (F_\alpha)^{2F_\alpha(u)+1}(2F_\alpha(u)) \\
&= F_{\alpha+1}(2F_\alpha(u)) \\
&\leq F_{\alpha+1}(F_{\alpha+1}^2(u)) \\
&= F_{\alpha+1}^3(u) \\
&\leq F_{\alpha+1}^{u+1}(u) && (u \geq 2) \\
&= F_{\alpha+2}(u)
\end{aligned}$$

□

Proposición 3.62. *Dados $\alpha \in \omega, \alpha \geq 2x, t \in \mathbb{N}, t \geq 2$, y $1 \leq x \leq f(t)$ con f una función estrictamente creciente tal que $f(t) \leq F_\alpha(t)$, entonces:*

$$\mathbb{L}_1^{(1)}(x, t) \leq F_{\alpha+3x}(t).$$

Demostración. Procederemos por inducción en x . Para el caso $x = 1$ tenemos:

$$\mathbb{L}_1^{(1)}(1, t) = f(t+1) \leq F_\alpha(t+1) \leq F_\alpha^2(t) \leq F_{\alpha+1}(t) \leq F_{\alpha+3}$$

Ahora supongamos que la proposición vale hasta cierto $x \geq 1$, para toda función que cumpla las hipótesis. Llamemos, como antes:

$$\begin{aligned}
K(u) &= K(u)[f] = \mathbb{L}_1^{(1)}(x, u) [f] \\
L(u) &= L(u)[f] = \mathbb{L}_{f(u)}^{(1)}(x, u) [f]
\end{aligned}$$

Por hipótesis inductiva, $K(u) \leq F_{\alpha+3x}(u)$ y luego por Lema 3.61 vale $L(u) \leq F_{\alpha+3x+2}(u)$.

Ahora:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_1^{(1)}(x+1, t) &= E_{(f(t+1)-1) \cdot \{0, \dots, x\}, t+1, f} && \text{(Observación 3.53)} \\
&\leq E_{(f(t+2)-1) \cdot \{x\}, t+2, f} && (f(t+1) - 1 < f(t+2) - 1) \\
&= \mathbb{L}_{f(t+2)-1}^{(1)}(x, t+2) + 1 \\
&\leq \mathbb{L}_{f(t+2)}^{(1)}(x, t+2) \\
&= L(t+2) \\
&\leq F_{\alpha+3x+2}(t+2) \\
&\leq F_{\alpha+3x+2}^3(t) \\
&\leq F_{\alpha+3x+3}(t) && (t \geq 2) \\
&= F_{\alpha+3(x+1)}(t)
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.63 (Cota Superior en \mathfrak{F}_ω). Sean $\alpha \in \omega, \alpha \geq 2, t \in \mathbb{N}, t \geq 2$, y f una función estrictamente creciente tal que $1 \leq f(t) \leq F_\alpha(t)$. Entonces $L_{1,f}^{\text{mset}}(t)$ está acotada superiormente por una función en \mathfrak{F}_ω

Demostración.

$$\begin{aligned}
L_{1,f}^{\text{mset}}(t) &= E_{(f(t)-1) \cdot \{0, \dots, f(t)-1\}, f, t} \\
&\leq E_{1 \cdot \{f(t)\}, f, t+1} && (f \text{ estrictamente creciente}) \\
&= \mathbb{L}_1^{(1)}(f(t), t+1) + 1 \\
&\leq F_{\alpha+3f(t)}(t+1) + 1 && \text{(Proposición 3.62)} \\
&\leq F_{\alpha+3f(t)+1}(\alpha + 3f(t)) + 1 && (\alpha \geq 1 \text{ y } f \text{ estrictamente creciente}) \\
&= F_\omega(\alpha + 3f(t)) + 1 \\
&\leq F_\omega(\alpha + 3F_\alpha(t)) + 1
\end{aligned}$$

Finalmente, $F_\omega(\alpha + 3F_\alpha(t)) + 1 \in \mathfrak{F}_\omega$ ya que $\alpha + 3F_\alpha(t) \in \mathfrak{F}_\alpha \subset \mathfrak{F}_\omega$. □

Observar que la clasificación en la Jerarquía de la cota superior no depende del α .

Corolario 3.64 (Cota Superior en \mathfrak{F}_ω para funciones de control primitivas-recursivas). Sea $f \in \mathfrak{F}_\alpha$, con $\alpha \in \omega$. Entonces existe $S \in \mathfrak{F}_\omega$ tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ $L_{1,f}^{\text{mset}}(t) \leq S(t)$.

Demostración. Por el Hecho 1.33 $\exists t_0$, que podemos suponer mayor que 2, tal que $\forall t \geq t_0, f(t) \leq F_{\alpha+1}(t)$. Luego por el Teorema 3.63 $L_{1,f}^{\text{mset}}(t)$ está acotada superiormente por una función S' en \mathfrak{F}_ω para todo $t \geq t_0$. Finalmente tomamos $m = \max_{0 \leq t < t_0} \{L_{1,f}^{\text{mset}}(t)\}$ y definimos

$$S(t) = S'(t) + m$$

que pertenece a \mathfrak{F}_ω y acota superiormente a $L_{1,f}^{\text{mset}}(t)$ para todo $t \in \mathbb{N}$. □

4. Secuencias malas de conjuntos de n -uplas

En esta sección desarrollaremos algunas observaciones y resultados nuevos encauzados a la búsqueda de cotas para la longitud de secuencias malas en un orden sobre el cual hay escasa literatura: el orden mayorante sobre subconjuntos de \mathbb{N}^n . El resultado más importante de esta sección (subsecciones 4.4 y 4.5) es dar una reducción del orden mayorante al orden de multiconjuntos, estudiada en la sección 3.

4.1. Definiciones

Definición 4.1. Denotamos con $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$ el conjunto de subconjuntos finitos y no vacíos de \mathbb{N}^n .

Recordando que, en \mathbb{N}^n , \leq denota el orden producto, definimos:

Definición 4.2. [Orden mayorante] Definimos el *orden mayorante* ¹⁶ en $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$:

$$\text{Si } A, B \subseteq \mathbb{N}^n, A \leq B \text{ sii } \forall a \in A \exists b \in B \text{ tal que } a \leq b.$$

Consecuentemente, $A \not\leq B$ significa que $\exists a \in A$ tal que $\forall b \in B$ hay una coordenada $i = i_{a,b}$ tal que $a[i] > b[i]$.

Definición 4.3 (Secuencia controlada). *Dada una función monótona creciente $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, una secuencia $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots, X_k]$, donde $X_i \subseteq \mathbb{N}^n$, se dice t -controlada con respecto a f si para todo i y para todo $x \in X_i$, tenemos $|x|_\infty < f(t + i)$.*

Hecho 4.4 (Proposición 2.15 de [4]). \leq sobre conjuntos de t -uplas es un wgo.

Definición 4.5. Denotemos con $L_{n,g}^{\text{maj}}(t)$ la longitud máxima de secuencias malas g, t -controladas en $\mathcal{P}(\mathbb{N}^n)$.

4.2. Observaciones simples

Observación 4.6. $L_{1,g}^{\text{maj}} = L_{1,g}^{\text{prod}}$.

Demostración. Si $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_k]$ es una secuencia mala de conjuntos de números, que es t -controlada con respecto a g entonces $[\sup X_0, \dots, \sup X_k]$ es una secuencia mala t -controlada de números; luego $L_{1,g}^{\text{maj}} \leq L_{1,g}^{\text{prod}}$. Si $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_k]$ es una secuencia mala t -controlada de números con respecto a g entonces $[\{x_0\}, \dots, \{x_k\}]$ es una secuencia mala de conjuntos de números que también es t -controlada con respecto a g ; luego $L_{1,g}^{\text{prod}} \leq L_{1,g}^{\text{maj}}$. \square

Tomar sup como en la prueba de arriba¹⁷ no funciona para $n > 1$. Por ejemplo, $\mathbf{X} = [\{(2, 2)\}, \{(1, 3), (3, 1)\}]$. \mathbf{X} es una secuencia mala pero $[\{(2, 2)\}, \{(3, 3)\}]$ no lo es.

Comentario 4.7. Más en general, si hubiésemos definido el orden mayorante utilizando el orden lexicográfico en vez del orden producto, tendríamos $L_{n,g}^{\text{majLex}} = L_{n,g}^{\text{lex}}$.

¹⁶“majoring ordering”, en inglés.

¹⁷Tomando el supremo de cada coordenada.

Demostración. Como antes, si $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_k]$ es una secuencia mala (pero con el orden derivado del lexicográfico) de subconjuntos finitos de \mathbb{N}^n , como el orden lexicográfico es un orden total, tomamos el elemento máximo de cada uno, que puede verse como una secuencia mala en el orden lexicográfico sobre \mathbb{N}^n . \square

Como cualquier secuencia mala de n -uplas es trivialmente una secuencia mala de conjuntos de un elemento, siempre tenemos

$$L_{n,g}^{\text{maj}} \geq L_{n,g}^{\text{prod}}.$$

Sospechamos que en general $L_{n,g}^{\text{maj}} \gg L_{n,g}^{\text{prod}}$. En un principio, por lo menos sabemos que no coinciden: hay una función g tal que $L_{2,g}^{\text{maj}}(1) > L_{2,g}^{\text{prod}}(1)$.

En efecto, tomemos $n = 2$ y la función de control $g(x) = x + 1$. La más larga secuencia mala 1-controlada de 2-uplas con respecto a g es:

$$(1, 1); (0, 2); (0, 1); (4, 0); (3, 0); (2, 0); (1, 0); (0, 0),$$

que tiene longitud 8. Sin embargo se puede verificar que la siguiente secuencia de conjuntos

$$\begin{array}{cccccc} \{(1, 1)\}; & \{(0, 2), (2, 0)\}; & \{(0, 2), (1, 0)\}; & \{(0, 1), (2, 0)\}; & \{(0, 1), (1, 0)\}; & \\ \{(6, 0)\}; & \{(5, 0)\}; & \{(4, 0)\}; & \{(3, 0)\}; & \{(2, 0)\}; & \{(1, 0)\}; \\ \{(0, 12)\}; & \dots & \{(0, 4)\}; & \dots & \{(0, 1)\}; & \{(0, 0)\}; \end{array}$$

es 1-controlada con respecto a g , es mala, y tiene longitud 24.

Definamos ahora:

Definición 4.8. [Testigos de conjuntos] Sea $X \subseteq \mathbb{N}^n$. Decimos que y es un *testigo* para X (o que X tiene testigo y) si para todo $x \in X$ tenemos $y \not\leq x$.

Decimos que y es un testigo para X en Y si y es un testigo para X e $y \in Y$.

Observación 4.9. Sea $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots]$ una secuencia de conjuntos (no vacíos) de n -uplas. Si \mathbf{X} es mala entonces $\forall i, j$ con $i < j$, X_j tiene un testigo en X_i .

Sea ahora, X_i ($i \geq 0$) el i -ésimo elemento de la secuencia de recién. El punto clave de este ejemplo es que algunos X_i de la secuencia tienen diferentes testigos, que dependen de los siguientes conjuntos X_j , para $j > i$. Por ejemplo, $(2, 0)$ (y no $(0, 2)$) es un testigo en X_1 para X_2 , mientras que $(0, 2)$ (y no $(2, 0)$) es un testigo en X_1 para X_3 .

Observar que este ejemplo está hecho en la dimensión más chica posible (el caso $n = 1$ no tiene interés, por la Observación 4.6), y $x + 1$ es la función estrictamente creciente de $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ con más lento crecimiento posible y que no es nula en 0).

Comentario 4.10. Acotar de manera uniforme la cantidad de elementos en los conjuntos sería de gran utilidad. Una conjetura que puede surgir pensando en aspectos combinatorios es que basta con tomar $n!$ elementos por conjunto. Pero esto no es válido para secuencias malas en general: sean $A_0 = \{(6, 4), (4, 6), (5, 5)\}$; $A_1 = \{(5, 6)\}$; $A_2 = \{(6, 5)\}$; $A_3 = \{(6, 4), (4, 6)\}$

$[A_0, A_1, A_2, A_3]$ es una secuencia mala que verifica que A_0 solo tiene un testigo posible para A_1, A_2, A_3 , y estos son distintos: $(6, 4)$, $(4, 6)$, y $(5, 5)$ respectivamente. Luego A_0 no tiene elementos “redundantes”.

Así que en un principio la única cota (obvia) que tenemos para la cantidad $|X_i|$ de elementos en el conjunto i -ésimo de una secuencia mala g, t -controlada $[X_0, X_1, \dots]$ en \mathbb{N}^n es:

$$|X_i| \leq g(t+i)^n \quad (20)$$

que se correspondería con poner todas las n -uplas x posibles sin repetición de modo que se cumpla $|x|_\infty < g(t+i)$.

Observación 4.11. A la hora de elegir un primer conjunto $A_0 \subseteq \mathbb{N}^n$ para construir una secuencia mala \mathbf{A} g, t -controlada, con el propósito de maximizar su longitud, es suficiente tomar $A_0 = \{\underbrace{(g(t)-1, \dots, g(t)-1)}_n\}$. En otras palabras, podemos suponer $|X_0| = 1$.

Demostración. Sea $\mathbf{A} = [A_0, A_1 \dots]$ una secuencia mala g, t -controlada de conjuntos en \mathbb{N}^n . Sean t_1, t_2, \dots los testigos en A_0 para A_1, A_2, \dots respectivamente. Por el control vale que $\forall i, j, 1 \leq i \leq n, t_j[i] \leq g(t) - 1$. Es decir que $\forall j, t_j \leq \underbrace{(g(t)-1, \dots, g(t)-1)}_n$.

Ahora, si existiese un $a_{j_0} \in A_{j_0}$ tal que $(g(t)-1, \dots, g(t)-1) \leq a_{j_0}$ tendríamos entonces que $t_{j_0} \leq (g(t)-1, \dots, g(t)-1) \leq a_{j_0}$, lo que contradiría que t_{j_0} es testigo para A_{j_0} .

Por lo tanto, $\forall j, a_j \in A_j, (g(t)-1, \dots, g(t)-1) \not\leq a_j$, y luego $(g(t)-1, \dots, g(t)-1)$ es testigo para todo A_j . \square

4.3. Una estrategia para la cota inferior

Ahora veremos un algoritmo general para construir una secuencia mala, que utiliza de manera general las ventajas del orden sobre conjuntos.

Construiremos primero una secuencia mala en \mathbb{N}^2 , t -controlada con respecto a $f(x) + 1$ (el $+1$ es para facilitar un poco la notación, no tiene importancia real). Empecemos por los conjuntos

$$A_0 = \{(f(t), f(t))\}, A_1 = \{((f(t)-1, f(1+t)), (f(1+t), f(t)-1))\}.$$

Observar que por ahora la secuencia es mala.

Para $i \geq 1$, cada A_i de la sucesión será de la forma $A_i = \{a_i, b_i\}$. Los a_i empiezan con el anterior $a_1 = ((f(t)-1, f(1+t)))$, van a ir decreciendo en el orden lexicográfico de la manera óptima dada por la función de control, y van a tener siempre un “piso” en los puntos donde la segunda coordenada es $f(t)$, i.e. puntos de la forma $(x, f(t))$ (ver Figura 1 para un diagrama correspondiente al Ejemplo 4.12).

Una vez que lleguemos al fin de esta secuencia mala (con cierto $a_j = (0, f(t))$) reducimos en 1 el b , hasta ahora inalterado, como si fuese el orden lexicográfico “opuesto” $((x, y) \leq_o (x', y')$ si $y < y'$ o $y = y', x \leq x'$), con piso en $(f(t), y)$; simultáneamente “reiniciamos” el a , poniéndolo en $(f(t)-1, X)$, donde X es el más grande posible permitido por la función de control y la posición actual. Podemos pensar que $f(t)-1$ es una “pared” para la primera coordenada de a . Luego volvemos a repetir el proceso anterior sobre las a (ver Figuras 2 y 3 para un diagrama correspondiente al Ejemplo 4.12).

Así, en cada “macropaso” (ir decreciendo en el opuesto del orden lexicográfico para las b , con piso $(f(t), 0)$) estamos resolviendo un pequeño problema de maximización de longitud sobre el orden lexicográfico, donde la secuencia está $(f(x) - f(t), t_0)$ -controlada, con el t_0 dependiente de la cantidad de “macropasos” anteriores y cuántos “micropasos” se tardó para completarlos (ver Figuras 4 y 5 para diagramas correspondientes al Ejemplo 4.12).

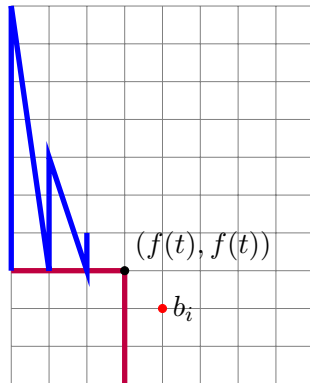


Figura 1: esquema del primer “macropaso” de una secuencia mala de conjuntos f, t -controlada en \mathbb{N}^2 . En este ejemplo $f(x) = x + 1$ y $t = 3$. Mientras que $b_i = b_1$ (en rojo) se mantiene constantemente $(4, 2)$, los a_i (azul) realizan $L_{2,g}^{\text{lex}}(1)$ pasos, donde $g(x) = f(x + 3) - f(3)$.

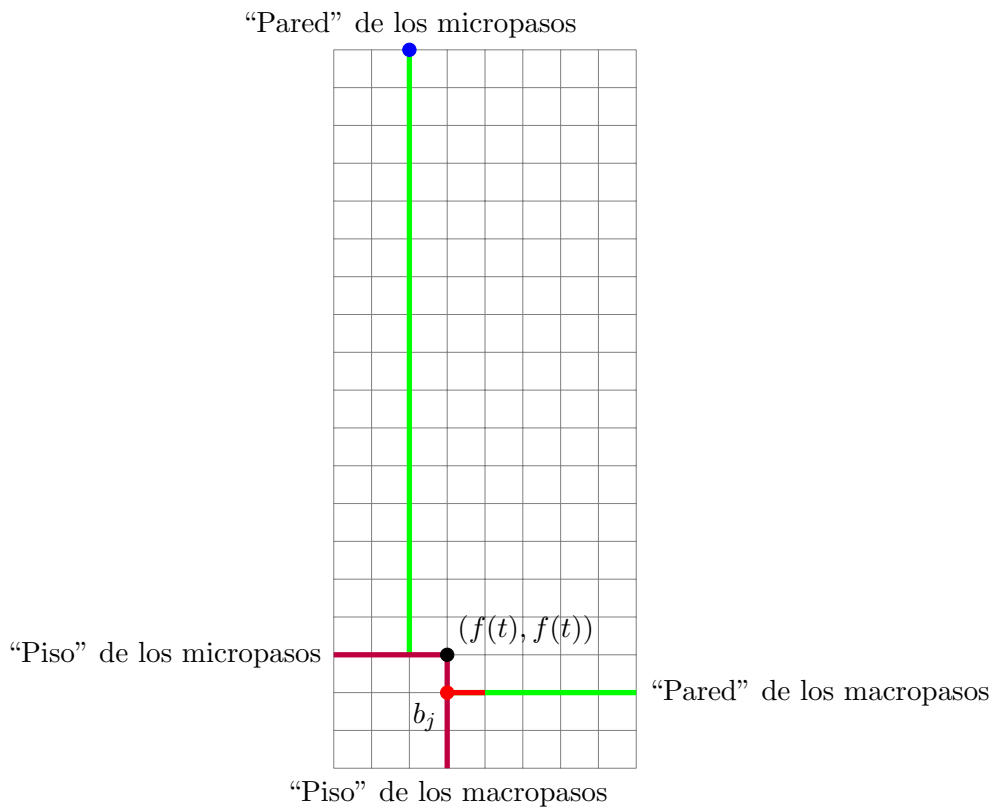


Figura 2: esquema sobre la idea principal de nuestro algoritmo. Terminados todos los micropasos posibles para el primer macropaso, pasamos al próximo macropaso (en rojo, pasamos de $(4, 2)$ a $(3, 2)$), y volvemos a iniciar el ciclo de los micropasos (azul).

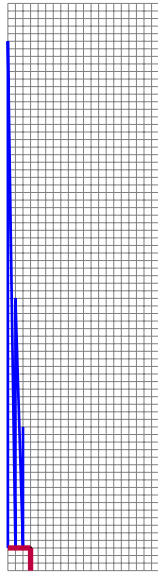


Figura 3: segundo macropaso de nuestro algoritmo para secuencias malas de conjuntos. Ya en el segundo macropaso ha habido un gran aumento en la cantidad de micropasos antes de terminar.

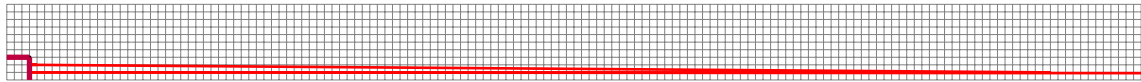


Figura 4: esquema de los macropasos de nuestro algoritmo. No solo la cantidad de micropasos aumenta considerablemente en cada macropaso, sino que estos a su vez crecen enormemente cada vez que bajan de nivel: aquí pasamos de $(3, 2)$ a $(138, 1)$, y el c de $(c, 0)$ será $\sim 2^{408}$.

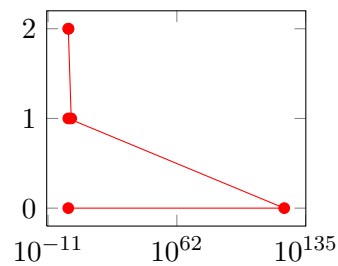


Figura 5: Una representación logarítmica más completa de la Figura 4

Demostración de que esta estrategia define una sucesión mala: dada A_j , para compararla con $A_{j'}, j' > j$, hacemos lo siguiente: si $A_{j'}$ está dentro del mismo “macropaso” que A_j entonces tomamos al a_j como el testigo; como los a están decreciendo en el orden lexicográfico, en particular no hay un \leq con el orden producto, y con los b utilizamos que siempre tenemos la segunda coordenada de a mayor o igual a $f(t)$, mientras que la segunda coordenada de la b es siempre menor o igual a $f(t) - 1$. Para conjuntos entre distintos “macropasos” tomamos como el testigo al b , donde vale el argumento simétrico a lo de recién. \square

Por último podemos “llenar” el cuadrado de $f(t) - 1 \times f(t) - 1$ que queda, o realizar un último “macropaso” con conjuntos unipuntuales de la forma $\{a_i\}$.

Ejemplo 4.12. Veamos un ejemplo de uso de este algoritmo para función de control $f(x) = x+1$ (i.e. $f = F_0$) y $t = 3$. Aquí la primera parte tendrá pared a derecha en la primer coordenada de 2, y piso 3 sobre la segunda coordenada, la segunda parte tendrá techo en la segunda coordenada 2, y pared a izquierda de 3 sobre la primer coordenada (Ver Figuras 1, 2, 3, 4 y 5).

$\{(3, 3)\};$	$\{(2, 4), (4, 2)\};$	$\{(2, 3), (4, 2)\};$	$\{(1, 6); (4, 2)\};$
$\{(1, 5), (4, 2)\};$	\dots	$\{(0, 10), (4, 2)\};$	\dots
$\{(0, 3), (4, 2)\};$	$\{(2, 19), (3, 2)\};$	\dots	$\{(2, 3), (3, 2)\};$
$\{(1, 36), (3, 2)\};$	\dots	$\{(0, 3), (3, 2)\};$	$\{(2, 138), (138, 1)\};$
\dots	$\{(2, 1090), (137, 1)\};$	\dots	\dots
$\{(2, \sim 2^{408}), (\sim 2^{408}, 0)\};$	\dots	$\{(0, 3), (3, 0)\};$	\dots
\dots	\dots	\dots	$(0, 0)$

En los puntos suspensivos “...” de la última fila podemos restringirnos a conjuntos de un elemento, con los cuales cubrimos el cuadrado de 2×2 que “queda”; de todos modos, esa cantidad de pasos es minúscula en comparación a todo lo anterior (más de $2^{2^{408}}$ pasos).

Otra opción es comenzar con conjuntos de un elemento, pero empezando por una coordenada $(2, d)$, donde d depende del índice del conjunto a esta altura. Posteriormente decrecemos esta coordenada en el orden lexicográfico. La secuencia dada por este procedimiento es mala, ya que estos conjuntos van decreciendo al compararse entre sí, y todos tienen a cualquier b como testigo para los conjuntos anteriores, ya que siempre $b[1] > 2$.

Para comparación comentamos:

$$L_{2, F_0}^{\text{lex}}(3) = 60 \ll 2^{2^{408}} < L_{2, F_0}^{\text{maj}}(3).$$

Observación 4.13. Este algoritmo muestra que en general, si f es estrictamente creciente y $f(t) > 1$, vale:

$$L_{2, f}^{\text{lex}}(t) < L_{2, f}^{\text{maj}}(t).$$

En efecto, tenemos que nuestra estrategia comienza la secuencia en $\{(f(t) - 1, f(t) - 1)\}$ y después hace p pasos, con $p > f(t)$, antes de llegar a las esquinas de ambos bloques¹⁸. Ahora, como propusimos antes, continuamos la secuencia con un conjunto $\{(f(t) - 2, d)\}$ y a partir de este momento decrecemos óptimamente en el orden lexicográfico. Por otro lado, la más larga secuencia en el orden lexicográfico solo necesita $f(t) < p$ pasos antes pasar a $\{(f(t) - 2, e)\}$. Como f es estrictamente creciente, $e < d$, y luego la longitud que se obtenga será menor que la de la secuencia de conjuntos construida.

¹⁸Como f es estrictamente creciente hay al menos 2 macropasos, en cada uno de los cuales se hacen más de $f(t) - 1$ micropasos. Luego, como $f(t) \geq 2$, $p > 2(f(t) - 1) \geq f(t)$.

Observación 4.14. El algoritmo que hemos construido se extiende naturalmente a uno en \mathbb{N}^n , donde hay n bloques, cada uno con un “piso” sobre una coordenada distinta, y “paredes” sobre las otras.

En consecuencia, razonando como anteriormente, tendremos que si f es estrictamente creciente y $f(t) > 1$ entonces

$$L_{n,f}^{\text{lex}}(t) < L_{n,f}^{\text{maj}}(t).$$

4.4. Reducción de conjuntos a árboles

Queremos ahora encontrar una cota superior para $L_{n,g}^{\text{maj}}$. Para esto veremos que el caso sobre conjuntos puede trasladarse a cierto tipo de secuencias de árboles.

Supongamos \mathbf{X} es mala, y supongamos $X_0 = \{a_0\}$ (sin pérdida de generalidad para nuestros propósitos, por la Observación 4.11). Definimos la siguiente secuencia de árboles finitos, con nodos etiquetados con n -uplas, que pueden repetirse sobre distintos nodos:

- T_0 es a_0 , la raíz.
- T_{i+1} se forma expandiendo T_i de la siguiente manera: para todo camino a_0, \dots, a_m en T_i desde la raíz a_0 hacia una hoja a_m se hace lo siguiente: si para todo $j = 0, \dots, m$, a_j es un testigo para X_{i+1} entonces se agregan todos los elementos X_{i+1} como hijos de a_m .

Proposición 4.15. *Sea a_0, \dots, a_m un camino simple (i.e. que no repite nodos) en T_i con a_0 la raíz y a_m una hoja de T_i .*

Entonces $[a_0, \dots, a_m]$ es una secuencia mala de n -uplas.

Observar que si la proposición vale, entonces también vale el enunciado con a_m no necesariamente una hoja y a_0 no necesariamente la raíz.

Demostración. Procedemos por inducción en i .

Si $i = 0$ el único camino posible es a_0 , y $[a_0]$ es trivialmente mala.

Para el caso $i + 1$, sea a_0, \dots, a_m un camino simple de T_{i+1} .

- Si $a_m \in T_i$ entonces el camino está en T_i y por hipótesis inductiva la secuencia que se deriva de él es mala.
- Si $a_m \in T_{i+1} \setminus T_i$ entonces a_{m-1} es una hoja de T_i y $a_m \in X_{i+1}$; tenemos, por construcción de T_{i+1} , que a_0, \dots, a_{m-1} son testigos para X_{i+1} . En particular vale que $\forall j \in \{0, \dots, m-1\}$, $a_j \not\leq a_m$. Por otro lado a_0, \dots, a_{m-1} es un camino simple en T_i , y por hipótesis inductiva $[a_0, \dots, a_{m-1}]$ es mala. Juntando estas dos cosas tenemos que $[a_0, \dots, a_{m-1}, a_m]$ es mala.

□

Observar que aunque los árboles pueden repetir las mismas n -uplas en distintos nodos, estos nodos no pueden estar en un mismo camino simple.

Proposición 4.16. *Si la secuencia mala \mathbf{X} es por lo menos de longitud $i + 2$ (i.e., existe X_{i+1}) entonces T_{i+1} es una extensión propia de T_i*

En otras palabras, existe un camino simple a_0, \dots, a_m en T_{i+1} tal que a_m corresponde a una n -upla perteneciente a X_{i+1} .

La importancia de esta proposición es que afirma que el árbol crece junto con la secuencia, por lo que si podemos acotar la longitud de este árbol podremos acotar la longitud de la secuencia original.

Probemos ahora la proposición:

Demostración. Hagamos inducción sobre i :

Si $i = 0$ el único camino simple que hay es x_0 , que necesariamente $(X_0 = \{x_0\})$ es testigo para X_1 . Luego T_1 extiende a T_0 con todos los elementos de X_1 como hijos de x_0

Supongamos ahora que el resultado vale para cualquier secuencia y hasta un cierto $i \in \mathbb{N}$ (es decir, para secuencias de hasta longitud $i + 2$). En otras palabras, supongamos que para toda $\mathbf{Y} = [Y_0, \dots, Y_{i+1}]$ mala, construir de esta manera $T_i^{(\mathbf{Y})}$ y $T_{i+1}^{(\mathbf{Y})}$ da que $T_{i+1}^{(\mathbf{Y})}$ es una extensión propia de $T_i^{(\mathbf{Y})}$. Queremos ver entonces que dada $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_i, X_{i+1}, X_{i+2}]$ mala, T_{i+2} es una extensión propia de T_{i+1} .

Como $\mathbf{X} = [X_0, \dots, X_i, X_{i+1}, X_{i+2}]$ es mala $\check{\mathbf{X}} = [X_0, \dots, X_i, X_{i+2}]$ es mala y de longitud $i + 2$, por lo que entra en la hipótesis inductiva. Llamemos $T_0^{(\check{\mathbf{X}})}, \dots, T_{i+1}^{(\check{\mathbf{X}})}$ a los árboles que se forman con $\check{\mathbf{X}}$. Por hipótesis inductiva existe un camino a_0, \dots, a_m en $T_{i+1}^{(\check{\mathbf{X}})}$ tal que $a_m \in X_{i+2}$ (es decir que a_{m-1} es un testigo para X_{i+2}). Observar que por construcción del árbol debe ser a_{m-1} una hoja de $T_i^{(\check{\mathbf{X}})} = T_i$ (porque ambos están contruidos a partir de $[X_0, \dots, X_i]$). El problema es que no sabemos si a_{m-1} es también una hoja en T_{i+1} .

Tenemos entonces dos casos:

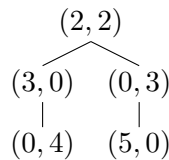
- Si el nodo a_{m-1} es una hoja de T_{i+1} entonces listo: en T_{i+2} la podemos extender con X_{i+2} (ya que a_{m-1} es un testigo para X_{i+2}).
- Si el nodo a_{m-1} no es una hoja de T_{i+1} , entonces es una hoja de T_i que en el paso desde T_i a T_{i+1} fue extendida con todos los elementos de X_{i+1} . Ahora, como \mathbf{X} es mala, existe x_{i+1} testigo para X_{i+2} , luego todos los elementos en el camino (que está en T_{i+1}) $a_0, \dots, a_{m-1}, x_{i+1}$ son testigos para X_{i+2} , y por lo tanto T_{i+2} será una extensión propia de T_{i+1} .

□

Observación 4.17. Notemos que por más que la secuencia original \mathbf{X} sea g, t -controlada, las secuencias obtenidas tomando caminos simples ascendentes en los árboles no necesariamente van a ser g, t -controladas, pues no todas las hojas necesariamente tienen hijos en cada paso:

Sea $\mathbf{X} = [X_0, X_1, X_2, X_3]$, con $X_0 = \{(2, 2)\}$, $X_1 = \{(3, 0), (0, 3)\}$, $X_2 = \{(0, 4)\}$, $X_3 = \{(0, 5)\}$. Esta secuencia es mala y $h, 2$ -controlada, con $h(x) = x + 1$

Tenemos entonces que T_3 es



Pero el camino simple de la rama derecha, $(2, 2), (0, 3), (5, 0)$ no es $h, 3$ -controlado.

Este ejemplo también ilustra que la *altura* de los árboles no necesariamente crece en cada paso.

Observación 4.18. Notemos sin embargo que todos los caminos simples en un árbol T_i serán $g, (t+i)$ -controlados, pues la g es monótona creciente, y las n -uplas asociadas a sus nodos están en $\bigcup_{j \leq i} X_j$, que resulta controlado por $g(t+i)$.

4.5. Reducción de árboles a multiconjuntos

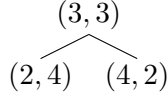
Sea $\mathbf{X} = [X_0, \dots]$ una secuencia mala de conjuntos en \mathbb{N}^n .

Observemos que, por la Proposición 4.15, si un camino $c_i = a_0, \dots, a_m$ en T_i es expandido a $c_{i+1} = a_0, \dots, a_m, x_{i+1}$ en T_{i+1} entonces

$$f_n(\mathbf{c}_i) >_{\text{lex}} f_n(\mathbf{c}_{i+1}) \quad (21)$$

donde la f_n es la definida en el Teorema 2.1.

Pero notemos que dados dos caminos distintos c_i y \tilde{c}_i , de la raíz a una hoja de T_i , no podemos asegurar en un principio que valdrá $f_n(\mathbf{c}_i) \neq f_n(\tilde{\mathbf{c}}_i)$: un ejemplo de esto es con la secuencia $[\{(3, 3)\}, \{(2, 4), (4, 2)\}]$, que es transformada en el árbol



cuyos dos caminos de la raíz a una hoja son los \mathbf{a}_1 y \mathbf{a}_2 de la Observación 2.5, los cuales cumplían $f_2(\mathbf{a}_1) = f_2(\mathbf{a}_2)$.

Esto puede motivar¹⁹, si queremos mantener la información que nos da este árbol, a considerar *multiconjuntos* que son las imágenes de los caminos de la raíz a las hojas en estos árboles.

Definición 4.19. Dados dos árboles T, T' , decimos que $T < T'$ si T' extiende estrictamente a T .

Por lo dado antes, si $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots]$ es una secuencia mala y T_i es el árbol construido como lo describimos en la subsección 4.4, entonces la Proposición 4.16 dice que $T_i < T_{i+1}$.

Llamemos

$$C_i = \{c_k \mid c_k \text{ es un camino simple en } T_i \text{ de la raíz a una hoja}\}$$

$$M_i = \{f_n(\mathbf{c}) \text{ contados con multiplicidad} \mid c \in C_i\} = \sum_{c \in C_i} \{f_n(\mathbf{c})\}$$

Queremos ver que:

Proposición 4.20. Sean $T_0 < T_1 < \dots$ árboles tales que:

- Los nodos de T_i están etiquetados con n -uplas.
- T_0 consiste de un solo nodo.
- T_{i+1} se forma a partir de T_i solo agregando (finitos o ningún) nuevos hijos en cada hoja de T_i , de modo que todos los caminos simples de la raíz a una hoja en T_{i+1} sean secuencias malas en el orden producto de \mathbb{N}^n .

¹⁹De hecho, originalmente desarrollamos la Sección 3 para abordar este problema.

Entonces para todo i ,

$$M_{i+1} < M_i$$

Si vemos esto, como vimos que el orden de multiconjuntos (derivado del lexicográfico) es un buen orden, tendremos que la secuencia de árboles derivada de \mathbf{X} deja de crecer en algún $i = i_u$, lo cual por Proposición 4.16 implica que la secuencia \mathbf{X} es finita (y $|\mathbf{X}| = i_u + 1$). Es más: por el Lema 3.22, el razonamiento podrá aplicarse a todas las secuencias \mathbf{X} controladas si logramos encontrar un control apropiado para las secuencias de multiconjuntos asociadas.

Demostración de la Proposición 4.20. Sea i tal que existe T_{i+1} . Observemos que

$$M_{i+1} = M_i - \underbrace{\{f_n(\mathbf{c}) \mid c \in C_i \setminus C_{i+1}\}}_{=:D} + \underbrace{\{f_n(\mathbf{c} \frown \mathbf{x}_c) \mid c \in C_i \setminus C_{i+1}, x_c \in A_c\}}_{=:A}$$

donde $A_c \neq \emptyset$ es el conjunto de nodos con el cual se extiende a cada $c \in C_i \setminus C_{i+1}$. Observar que $D \neq \emptyset$, ya que $T_i < T_{i+1}$. Ahora, sea $f_n(\mathbf{c}_0 \frown \mathbf{x}_{\mathbf{c}_0}) \in A$, por Teorema 2.1 vale que $f_n(\mathbf{c}_0 \frown \mathbf{x}_{\mathbf{c}_0}) <_{\text{lex}} f_n(\mathbf{c}_0) < \text{máx } D$. Luego, por la Proposición 3.10, $M_{i+1} < M_i$. \square

Nos faltaría ahora acotar las multiplicidades y normas de cada elemento de estos multiconjuntos.

Proposición 4.21 (Controles sobre los multiconjuntos derivados). *Sea $\mathbf{X} = [X_0, X_1, \dots]$ una secuencia mala de conjuntos, g, t -controlada, con g monótona creciente y X_0 unipuntual. Sea M_i el multiconjunto asociada al árbol T_i de la subsección 4.4. Sea U_i la máxima multiplicidad de M_i , es decir $U_i = \text{máx}\{k \mid \exists m \in M_i \text{ tal que } M_i(m) = k\}$. Supongamos ²⁰ $n > 1$.*

Entonces $U_0 = 1$, y si $i > 0$ vale:

$$U_i \leq \prod_{j=1}^i g(t+j)^n \leq g(t+i)^{ni}. \quad (22)$$

Por otro lado,

$$\forall m \in M_i, |m|_\infty < n! g(t+i)^n \stackrel{\text{def}}{=} K_i \quad (23)$$

Demostración. Para la primera parte, notemos que U_i va a ser menor o igual a la cantidad de hojas de T_i , que a su vez es menor o igual que el producto de el máximo número de elementos que puede haber en cada X_0, \dots, X_i . Por (20) y la Observación 4.11 esto da:

$$U_i \leq |X_0| \prod_{j=1}^i |X_j| \leq \prod_{j=1}^i g(t+j)^n.$$

Que es menor o igual que $g(t+i)^{ni}$ porque g es monótona creciente.

Para la segunda parte, recordemos el Teorema 2.6: en nuestro caso, por la Observación 4.18, para cada T_i los caminos están $g, (t+i)$ - controlados, y hasta se puede pensar que están controlados por la función constante ²¹ $g(t+i)$.

Por lo tanto, via Teorema 2.6, valdrá, para todo $f_n(\mathbf{c}_i) \in M_i$: $|f_n(\mathbf{c}_i)|_\infty < n! g(t+i)^n$ \square

Podemos ahora probar que:

²⁰Notar que por la Observación 4.6, nosotros solo estamos interesados en ver qué pasa cuando $n > 1$.

²¹Para cada t fijo de control.

Corolario 4.22. Si la secuencia mala de conjuntos $[X_0, X_1, \dots]$ es g, t -controlada, entonces la secuencia mala de multiconjuntos $\mathbf{M} = [M_0, M_1, \dots]$ está t -controlada por G , donde

$$G(x) = n!g(x)^{n(x+1)} + 1.$$

Notar que la G es monótona creciente, y $\forall x G(x) > g(x)$

Demostración. Observar que para que \mathbf{M} sea G, t -controlada es condición suficiente ver que para todo i , $\max\{U_i, K_i\} < G(t+i)$. Veamos esto:

En el caso M_0 ,

$$\max\{U_0, K_0\} = \max\{1, n!g(t)^n\} < n!g(t)^{n(t+1)} + 1 = G(t)$$

y si $i > 0$

$$\max\{U_i, K_i\} \leq \max\{g(t+i)^{ni}, n!g(t+i)^n\} < n!g(t+i)^{n(t+i+1)} + 1 = G(t+i)$$

□

Observación 4.23. Si $g \in \mathfrak{F}_\alpha$ entonces $G \in \mathfrak{F}_{\max\{\alpha, 2\}}$, ya que por el Hecho 1.30 y la Proposición 1.31 tenemos que \mathfrak{F}_2 es cerrada por producto y exponenciación, y $\lambda x.g(x) \in \mathfrak{F}_\alpha$, $\lambda x.n(x+1) \in \mathfrak{F}_2$

Resumiendo: dada una secuencia mala de conjuntos \mathbf{X} , g, t -controlada, construimos una secuencia decreciente de multiconjuntos \mathbf{M} que es G, t -controlada y que cumple $|\mathbf{M}| = |\mathbf{X}|$. Entonces, si tenemos una cota superior para $L_{n,G}^{\text{mset}}(t)$ tendremos una cota superior para $L_{n,g}^{\text{maj}}(t)$.

Pero observar que la cota no necesariamente será ajustada. Efectivamente, usando el resultado 3.64 tendríamos en el caso $n = 1$ que dada $g \in \mathfrak{F}_\alpha$, con $\alpha \in \omega$, existe $S \in \mathfrak{F}_\omega$ tal que para todo $t \in \mathbb{N}$ vale:

$$L_{1,g}^{\text{maj}}(t) \leq L_{1,G}^{\text{mset}}(t) \leq S(t) \in \mathfrak{F}_\omega,$$

pero por Observación 4.6 tenemos que $L_{1,g}^{\text{maj}}(t) = L_{1,g}^{\text{prod}}(t) = g(t) \in \mathfrak{F}_\alpha$.

5. Conclusiones y trabajo futuro

Durante esta tesis hemos utilizado la técnica de “linealizar” órdenes. Esto es, pasar secuencias malas (controladas) sobre un wqo a secuencias decrecientes (controladas) sobre un buen orden. Así hemos logrado en la Sección 2 obtener una nueva y más sencilla demostración de un resultado ya existente. También gracias a la linealización, en la Sección 4 conseguimos reducir el problema de cotas superiores para la longitud de secuencias malas sobre conjuntos al problema sobre multiconjuntos. Por lo que sabemos, estos resultados son novedosos. Es también importante destacar que la Sección 3, aunque inicialmente desarrollada por su aplicación al problema específico de los conjuntos de tuplas, produjo múltiples resultados nuevos y de interés individual.

Por otro lado, han quedado varios interrogantes y cuestiones de gran potencial para profundizar en una investigación futura:

- Usualmente nos hemos restringido a funciones de control en \mathfrak{F}_α con $\alpha \in \omega$, pero ¿cómo cambian los resultados principales si se permiten funciones de control en \mathfrak{F}_β con $\beta \geq \omega$?

- El Corolario 2.12 no prueba nada para el caso $k = 1$; sería interesante poder encontrar una demostración igualmente simple para incluir este caso.
- Conjeturamos que el Corolario 3.64 se generaliza como “ $L_{n,g}^{\text{mset}}$ está mayorada por una función en \mathfrak{F}_{ω^n} ”, ¿será cierto?
- Sería interesante plantear el problema de estrategias maximizadoras sobre multiconjuntos sobre un orden bien fundado en general, provisto de una norma finita sobre sus elementos.
- Sería interesante realizar un análisis más fino del algoritmo descrito en la Subsección 4.3, para encontrar mejores cotas inferiores de $L_{n,g}^{\text{maj}}$ y clasificarlas en la Jerarquía Rápidamente Creciente.
- Ha quedado abierto el problema de encontrar una cota superior en la Jerarquía Rápidamente Creciente para $L_{n,g}^{\text{maj}}$. Si lo que conjeturamos antes es cierto, nuestros resultados indicarían que $L_{n,g}^{\text{maj}} \in \mathfrak{F}_{\omega^n}$, aunque es también posible que otros métodos proporcionen cotas más ajustadas.

Referencias

- [1] Wilfried Buchholz and Stan Wainer. Provably computable functions and the fast growing hierarchy. *Logic and Combinatorics*, edited by S. Simpson, *Contemporary Mathematics*, 65:179–198, 1987.
- [2] Peter Clote. On the finite containment problem for Petri nets. *Theoretical Computer Science*, 43:99–105, 1986.
- [3] Nachum Dershowitz and Zohar Manna. Proving termination with multiset orderings. *Communications of the ACM*, 22(8):465–476, August 1979.
- [4] Diego Figueira. *Reasoning on Words and Trees with Data*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan Laboratoire Spécification et Vérification, 2010.
- [5] Diego Figueira, Santiago Figueira, Sylvain Schmitz, and Philippe Schnoebelen. Ackermannian and primitive-recursive bounds with Dickson’s lemma. In *Proceedings of the 26th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS’11)*, Toronto, Canada, June 2011. IEEE Computer Society Press. To appear.
- [6] Will Harwood, Faron Moller, and Anton Setzer. Weak bisimulation approximants. In Zoltán Ésik, editor, *Computer Science Logic. 20th International Workshop, CSL 2006, 15th Annual Conference of the EACSL*, volume 4207 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 365–379, 2006.
- [7] Dénes König. *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*. Leipzig, 1986.
- [8] Martin Löb and Stan Wainer. Hierarchies of number theoretic functions, I. *Archiv für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 13:39–51, 1970.
- [9] Kenneth McAloon. Petri nets and large finite sets. *Theoretical Computer Science*, 32(1–2):173–183, 1984.
- [10] Sylvain Schmitz and Philippe Schnoebelen. Multiply-recursive upper bounds with Higman’s lemma. In Henzinger M. Aceto, L. and J. Sgall, editors, *38th International Colloquium on Automata, Languages and Programming*, volume 6756 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 441–452, 2011.